



ENFRIAMIENTO DE ESTRELLAS DE NEUTRONES A  
TRAVÉS DE LA EMISIÓN DE NEUTRINOS  
PRODUCIDOS EN EL PROCESO URCA DIRECTO

Carlos Enrique Alvarez Salazar

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Física  
Bogotá, Colombia  
Junio de 2015



ENFRIAMIENTO DE ESTRELLAS DE NEUTRONES A  
TRAVÉS DE LA EMISIÓN DE NEUTRINOS  
PRODUCIDOS EN EL PROCESO URCA DIRECTO

Carlos Enrique Alvarez Salazar

TESIS COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL  
TÍTULO DE  
**Magister en Ciencias-Física**

*Director:* Carlos José Quimbay, Ph.D

Línea de Investigación:  
Física de neutrinos  
Grupo de Investigación:  
Grupo de Campos y Partículas

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Física  
Bogotá, Colombia  
Junio de 2015



# Agradecimientos

A mi director de tesis de Maestría, Carlos José Quimbay Herrera, Ph.D., agradezco profundamente su apoyo constante e incondicional durante el desarrollo de este trabajo. Considero que cada charla o reunión con él se convirtió en un momento muy enriquecedor, que no sólo me permitió realizar avances significativos en mi investigación, sino que también me ayudó a consolidar mis conocimientos en diferentes campos de la Física.

A la Vicerrectoría Académica de la Universidad Nacional de Colombia, quien a través del programa “Beca Estudiante Sobresaliente de Posgrado” permitió financiar el programa de Maestría en Ciencias-Física.

Agradezco a mis padres, Yolanda y Humberto, quienes aún residiendo en una ciudad diferente, me enviaron su apoyo emocional en diferentes ocasiones. Aunque ellos podrían comprender algunas pocas páginas de esta tesis, su decisión de traerme a este mundo trajo consecuencia, después de unos años, que este trabajo se realizara.

Finalmente, extendiendo el agradecimiento más cálido posible a Ana Romero, quien compartió conmigo largas jornadas de estudio, de búsqueda de referencias, de cálculo, escritura,... En fin, de todas aquellas pequeñas hazañas que requiere el realizar una investigación. Sin su apoyo inquebrantable, estoy seguro que este trabajo no hubiera llegado a feliz término.

# Resumen

En este trabajo se analiza el enfriamiento de estrellas de neutrones (NS) a través de la emisión de neutrinos producto del proceso Urca Directo (DUrca). Para esto, se calcularon las emisividades de neutrinos, considerando la interacción efectiva entre los nucleones a través del intercambio de piones, derivando una expresión relativista para la pérdida de energía en las NS, utilizando la regla de oro de Fermi, dentro del Modelo Estándar de interacciones electrodébiles. Para caracterizar el proceso de enfriamiento se calculó numéricamente el perfil densidad para diferentes ecuaciones de Estado (EoS) y a partir de éste se determinaron cantidades termodinámicas influyentes en la emisividad. Así, pudo describirse la dependencia radial de la emisividad para las EoS estudiadas, comparando con la tasa de emisión de energía para el proceso Urca Modificado (MUrca). Adicionalmente, se calculó la tasa de emisión de energía dentro la Teoría de Campo Medio, integrando los efectos del retroceso de nucleones, la violación de paridad, y las interacciones pseudo-escalares entre los nucleones. Finalmente, se determinó la disminución en las tasas de emisión de energía cuando se presentan fases superfluidas de la materia, por debajo de la temperatura de transición de fase de aparición de pares de Cooper de nucleones.

**Palabras clave:** Estrellas de neutrones, ecuación de estado, perfil densidad, procesos de enfriamiento, proceso Urca directo, emisividad, superfluidez en estrellas de neutrones

# Abstract

We analyzed the cooling process of neutron stars (NS) through neutrino emission produced by the Direct Urca process (DUrca). To do this, we calculated the neutrino emissivities, taking into account the effective interaction between nucleons, mediated by pion exchange, obtaining a relativistic expression for NS energy losses, using Fermi's golden rule, within the Standard Model of Electroweak Interactions. To find the characteristics of the cooling process, we numerically calculated the density profile for different Equations of State (EoS), and using this we determined thermodynamical quantities influencing the calculated emissivity. Doing so, we could describe the radial dependence of the emissivity for the analyzed EoS, comparing with the energy emission rates for the Modified Urca process (MUrca). Furthermore, we found the energy emission rate within Mean Field Theory, considering the effects of nucleon recoil, parity violation and pseudo-scalar interactions between nucleons. Finally, the suppression of the energy emission rates when superfluid phases of matter appear was calculated, for temperatures below the critical temperature at which Cooper pairs are formed.

**Key words:** Neutron stars, equation of state, density profile, cooling processes, direct Urca process, emissivity, superfluidity in neutron stars

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Origen, Estructura y Evolución de las Estrellas de Neutrones</b>	<b>6</b>
2.1	Introducción Histórica . . . . .	7
2.2	Origen de las Estrellas de Neutrones . . . . .	9
2.2.1	Evolución estelar durante la secuencia principal (MS) . . . . .	9
2.2.2	Evolución estelar posterior a la MS . . . . .	13
2.3	Estructura Interna de las NS . . . . .	18
2.3.1	Estructura de las NS . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Equilibrio, Ecuación de Estado y Perfil Densidad</b>	<b>23</b>
3.1	Equilibrio Hidrostático de NS: la ecuación TOV . . . . .	24
3.1.1	El espacio-tiempo de estrellas relativistas . . . . .	24
3.2	Algunas Ecuaciones de Estado (EoS) para la materia al interior de las NS . . . . .	26
3.2.1	Determinación de densidades de partículas y momenta de Fermi . . . . .	27
3.2.2	Ecuación de Pandharipande (neutrones) . . . . .	31
3.2.3	Ecuación de Pandharipande (hiperones) . . . . .	33
3.2.4	Ecuación de Bethe-Jhonson V . . . . .	35
3.2.5	Ecuación de Walecka . . . . .	37
3.2.6	Ecuación de Friedman-Pandharipande . . . . .	39
3.2.7	Ecuación de Wiringa, Fiks y Fabrocini . . . . .	41
3.2.8	Ecuación de Prakash, Ainsworth y Lattimer . . . . .	43
3.2.9	Ecuación de Sahu, Basu y Datta . . . . .	45
3.3	Comparación de los diferentes modelos de EoS . . . . .	47



---

<b>4</b>	<b>Enfriamiento de NS por emisión de neutrinos</b>	<b>52</b>
4.1	Procesos de enfriamiento en NS . . . . .	53
4.2	Enfriamiento acrecentado: el proceso Urca directo (DUrca) . .	56
4.2.1	Determinación de la emisividad de neutrinos a partir de la regla de oro de Fermi . . . . .	57
4.3	Enfriamiento estándar: el proceso Urca modificado (MUrca) .	60
4.3.1	Determinación de la emisividad de neutrinos cuando los nucleones interactúan a través del intercambio de piones . . . . .	62
4.4	Influencia de la EoS en el enfriamiento . . . . .	74
4.4.1	Ecuación de Pandharipande (neutrones) . . . . .	74
4.4.2	Ecuación de Pandharipande (hiperones) . . . . .	75
4.4.3	Ecuación de Bethe-Johnson V . . . . .	75
4.4.4	Ecuación de Walecka . . . . .	77
4.4.5	Ecuación de Friedman-Pandharipande . . . . .	77
4.4.6	Ecuación de Wiringa, Fiks y Fabrocini . . . . .	78
4.4.7	Ecuación de Prakash, Ainsworth y Lattimer . . . . .	79
4.4.8	Ecuación de Sahu, Basu y Datta . . . . .	80
4.5	Influencia de los diferentes modelos de EoS sobre el proceso de enfriamiento por emisión de neutrinos . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Consideraciones adicionales</b>	<b>87</b>
5.1	Teoría de Campo Medio . . . . .	87
5.1.1	Cinemática de la reacción y Modelos de la materia nu- clear . . . . .	88
5.1.2	Modelo del Gas Libre . . . . .	89
5.1.3	Modelo de Teoría de Campos en la Aproximación de Campo Medio . . . . .	91
5.1.4	Sobre la no-conservación de la corriente vectorial car- gada de los nucleones . . . . .	99
5.1.5	Elemento de matriz para el decaimiento beta del neutrón	100
5.1.6	Determinación de la emisividad de energía aplicando la Teoría de Campo Medio . . . . .	104
5.1.7	Límite no-relativista . . . . .	107
5.2	Efecto de la Superfluidez en la Emisividad de neutrinos . . . .	108
5.2.1	Superfluidez en NS . . . . .	108
5.2.2	Influencia de la superfluidez en el proceso de enfriamiento	111

---

---

5.2.3	Determinación de la emisividad de neutrinos en las fases superfluidas de la materia nucleónica densa . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>122</b>
<b>A</b>	<b>Derivación de las ecuaciones TOV</b>	<b>126</b>
A.1	Solución de Schwarzschild . . . . .	126
A.2	Ecuaciones TOV . . . . .	131
<b>B</b>	<b>Interpolación numérica del perfil densidad</b>	<b>134</b>
B.1	Método de Interpolación de Lagrange . . . . .	134
B.2	Interpolación del Perfil Densidad . . . . .	136
<b>C</b>	<b>Detalles de cálculo de las emisividades de neutrinos para los procesos DUrca y MUrca</b>	<b>140</b>
C.1	Cálculo de la tasa de decaimiento diferencial $dW_{i \rightarrow f}$ para el decaimiento beta del neutrón . . . . .	140
C.1.1	Cálculo de $\mathcal{L}^{\alpha\beta}$ . . . . .	142
C.1.2	Cálculo de $\mathcal{J}^{\alpha\beta}$ . . . . .	145
C.1.3	Cálculo de $\sum_{spins}  H_{fi} ^2$ . . . . .	147
C.1.4	Cálculo de $dW_{i \rightarrow f}$ . . . . .	148
C.2	Cálculo de la integral $A_D$ . . . . .	150
C.3	Cálculo de la integral $I_D$ . . . . .	151
C.4	Cálculo de la integral $A_M$ . . . . .	156
C.5	Cálculo de la integral $I_M$ . . . . .	157
<b>D</b>	<b>Detalles de Cálculo de la amplitud en la teoría de campo medio</b>	<b>162</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>167</b>

---

# Índice de cuadros

2.1	Características básicas de los objetos compactos. . . . .	14
3.1	Valores de las masas totales, radios y densidades centrales de los modelos de EoS utilizados. . . . .	51
4.1	Principales procesos de producción de neutrinos en una NS. $\gamma$ representa un fotón o plasmón, mientras que $(A, Z)$ representa un núcleo atómico. . . . .	56
4.2	Luminosidades totales para los procesos MUrca ( $L_\nu^M$ ) y DUrca ( $L_\nu^D$ ) obtenidas para la EoS de Pandharipande (neutrones) . .	75
4.3	Luminosidades totales para los procesos MUrca ( $L_\nu^M$ ) y DUrca ( $L_\nu^D$ ) obtenidas para la EoS de Pandharipande (hiperones) . .	76
4.4	Luminosidades totales para los procesos MUrca ( $L_\nu^M$ ) y DUrca ( $L_\nu^D$ ) obtenidas para la EoS de Bethe-Johnson . . . . .	77
4.5	Luminosidades totales para los procesos MUrca ( $L_\nu^M$ ) y DUrca ( $L_\nu^D$ ) obtenidas para la EoS de Walecka. . . . .	78
4.6	Luminosidades totales para los procesos MUrca ( $L_\nu^M$ ) y DUrca ( $L_\nu^D$ ) obtenidas para la EoS de Friedman-Pandharipande . . .	78
4.7	Luminosidades totales para los procesos MUrca ( $L_\nu^M$ ) y DUrca ( $L_\nu^D$ ) obtenidas para la EoS de Wiringa. . . . .	79
4.8	Luminosidades totales para los procesos MUrca ( $L_\nu^M$ ) y DUrca ( $L_\nu^D$ ) obtenidas para la EoS de Prakash, Ainsworth y Lattimer	80
4.9	Luminosidades totales para los procesos MUrca ( $L_\nu^M$ ) y DUrca ( $L_\nu^D$ ) obtenidas para la EoS de Sahu, Basu y Datta. . . . .	81
4.10	Resumen de resultados para la luminosidad de neutrinos, producidos en los procesos MUrca y DUrca, para una NS de masa $1.330M_\odot$ , para las ocho EoS analizadas en este trabajo. . . . .	85

4.11	Resumen de resultados para la luminosidad de neutrinos, producidos en los procesos MUrca y DUrca, para una NS de masa $1.400M_{\odot}$ , para las ocho EoS analizadas en este trabajo. . . . .	86
5.1	Valores de las masas y tiempos de vida media de los bariones que constituyen la NS en la Aproximación de Campo Medio . . .	92
5.2	Parámetros característicos de la superfluidez: $\lambda$ , $F(\vartheta)$ y $kT_c/\Delta(0)$ , que aparecerán en ecuaciones posteriores. . . . .	113
B.1	Conjunto de datos a interpolar usando el método de los polinomios de Lagrange . . . . .	134
B.2	Perfiles de densidad de la corteza para el modelo de Pandharipande (neutrones). . . . .	136
C.1	Números de Bernoulli hasta $n = 11$ . . . . .	155

---

# Índice de figuras

2.1	Producción de estrellas compactas como el resultado final de la evolución estelar. Figura adaptada de [1] . . . . .	15
2.2	Estructura básica de las estrellas de neutrones. Figura adaptada de [2] . . . . .	18
3.1	Interpolación del perfil densidad usando la EoS de Pandharipande (neutrones). . . . .	32
3.2	Densidad de neutrones (izquierda) y protones (derecha) para la EoS de Pandharipande (neutrones). . . . .	32
3.3	Momenta de Fermi del neutrón (izquierda) y del protón (derecha) para la EoS de Pandharipande (neutrones). . . . .	33
3.4	Interpolación del perfil densidad usando la EoS de Pandharipande (hiperones). . . . .	34
3.5	Densidad de neutrones (izquierda) y protones (derecha) para la EoS de Pandharipande (hiperones). . . . .	34
3.6	Momenta de Fermi del neutrón (izquierda) y del protón (derecha) para la EoS de Pandharipande (hiperones). . . . .	35
3.7	Interpolación del perfil densidad usando la EoS de Bethe-Jhonson V. . . . .	36
3.8	Densidad de neutrones (izquierda) y protones (derecha) para la EoS de Bethe-Jhonson V. . . . .	36
3.9	Momenta de Fermi del neutrón (izquierda) y del protón (derecha) para la EoS de Bethe-Jhonson V. . . . .	37
3.10	Interpolación del perfil densidad usando la EoS de Walecka. . . . .	38
3.11	Densidad de neutrones (izquierda) y protones (derecha) para la EoS de Walecka. . . . .	38
3.12	Momenta de Fermi del neutrón (izquierda) y del protón (derecha) para la EoS de Walecka. . . . .	39

---

3.13	Interpolación del perfil densidad usando la EoS de Friedman-Pandharipande. . . . .	40
3.14	Densidad de neutrones (izquierda) y protones (derecha) para la EoS de Friedman-Pandharipande. . . . .	40
3.15	Momenta de Fermi del neutrón (izquierda) y del protón (derecha) para la EoS de Friedman-Pandharipande. . . . .	41
3.16	Interpolación del perfil densidad usando la EoS de Wiringa. . . . .	42
3.17	Densidad de neutrones (izquierda) y protones (derecha) para la EoS de Wiringa. . . . .	42
3.18	Momenta de Fermi del neutrón (izquierda) y del protón (derecha) para la EoS de Wiringa. . . . .	43
3.19	Interpolación del perfil densidad usando la EoS de Prakash. . . . .	44
3.20	Densidad de neutrones (izquierda) y protones (derecha) para la EoS de Prakash. . . . .	44
3.21	Momenta de Fermi del neutrón (izquierda) y del protón (derecha) para la EoS de Prakash. . . . .	45
3.22	Interpolación del perfil densidad usando la EoS de Sahu, Basu y Datta. . . . .	46
3.23	Densidad de neutrones (izquierda) y protones (derecha) para la EoS de Sahu, Basu y Datta. . . . .	46
3.24	Momenta de Fermi del neutrón (izquierda) y del protón (derecha) para la EoS de Sahu, Basu y Datta. . . . .	47
3.25	Perfiles densidad para las ocho EoS analizadas en el caso de estrellas de masa $1.330M_{\odot}$ (izquierda) y $1.400M_{\odot}$ (derecha). . . . .	47
3.26	Densidades de neutrones para las ocho EoS analizadas en el caso de estrellas de masa $1.330M_{\odot}$ (izquierda) y $1.400M_{\odot}$ (derecha). . . . .	48
3.27	Densidades de protones para las ocho EoS analizadas en el caso de estrellas de masa $1.330M_{\odot}$ (izquierda) y $1.400M_{\odot}$ (derecha). . . . .	48
3.28	Momenta de Fermi de los neutrones para las ocho EoS analizadas en el caso de estrellas de masa $1.330M_{\odot}$ (izquierda) y $1.400M_{\odot}$ (derecha). . . . .	49
3.29	Momenta de Fermi de los protones para las ocho EoS analizadas en el caso de estrellas de masa $1.330M_{\odot}$ (izquierda) y $1.400M_{\odot}$ (derecha). . . . .	49
4.1	Diagrama de Feynman para la dispersión de dos nucleones, donde la interacción está mediada por el intercambio de piones . . . . .	63

---

---

4.2	Diagramas de Feynman que contribuyen al proceso MURca. . .	67
4.3	Emisividades de neutrinos para el proceso MURca (izquierda) y DURca (derecha) para la EoS de Pandharipande (neutrones).	75
4.4	Emisividades de neutrinos para el proceso MURca (izquierda) y DURca (derecha) para la EoS de Pandharipande (hiperones).	76
4.5	Emisividades de neutrinos para el proceso MURca (izquierda) y DURca (derecha) para la EoS de Bethe-Johnson. . . . .	76
4.6	Emisividades de neutrinos para el proceso MURca (izquierda) y DURca (derecha) para la EoS de Walecka. . . . .	77
4.7	Emisividades de neutrinos para el proceso MURca (izquierda) y DURca (derecha) para la EoS de Friedman-Pandharipande. .	78
4.8	Emisividades de neutrinos para el proceso MURca (izquierda) y DURca (derecha) para la EoS de Wiringa. . . . .	79
4.9	Emisividades de neutrinos para el proceso MURca (izquierda) y DURca (derecha) para la EoS de Prakash, Ainsworth y Lattimer.	80
4.10	Emisividades de neutrinos para el proceso MURca (izquierda) y DURca (derecha) para la EoS de Sahu, Basu y Datta. . . . .	81
4.11	Gráfica comparativa de las emisividades de neutrinos produci- dos durante el proceso MURca, para una NS de masa $1.330M_{\odot}$ .	82
4.12	Gráfica comparativa de las emisividades de neutrinos produci- dos durante el proceso DURca, para una NS de masa $1.330M_{\odot}$ .	82
4.13	Gráfica comparativa de las emisividades de neutrinos produci- dos durante el proceso MURca, para una NS de masa $1.400M_{\odot}$ .	83
4.14	Gráfica comparativa de las emisividades de neutrinos produci- dos durante el proceso DURca, para una NS de masa $1.400M_{\odot}$ .	83
5.1	Momentum de Fermi del protón en función del momentum de Fermi del neutrón, para el Modelo del Gas Libre . . . . .	90
5.2	Solución gráfica de la desigualdad $p_p(p_n) \geq p_n/2$ . . . . .	98
5.3	Comportamiento del gap adimensional $v = \frac{\Delta(T)}{kT}$ en función de la temperatura adimensional $\tau = T/T_c$ . Nótese la escala logarítmica en el eje vertical. . . . .	115
5.4	Gráfica de los factores de supresión dados por (5.114) en funci- ón de la temperatura adimensional $\tau$ . . . . .	121
B.1	Código fuente del programa escrito en C++ para realizar la interpolación del perfil densidad con la EoS de Pandharipande (neutrones). . . . .	137

---

- B.2 Código fuente del programa escrito en C++ para realizar el cálculo numérico de las densidades de neutrones y protones con la EoS de Pandharipande (neutrones). . . . . 138
  - B.3 Código fuente del programa escrito en C++ para realizar el cálculo numérico de los momenta de Fermi de neutrones y protones con la EoS de Pandharipande (neutrones). . . . . 139
  
  - C.1 Diagrama de Feynmann para el decaimiento beta del neutrón . 141
  - C.2 Contorno de integración para evaluar la integral C.56 . . . . . 152
  - C.3 Contorno de integración para evaluar la integral C.84 . . . . . 159
-



# Capítulo 1

## Introducción

Las estrellas de neutrones (NS) son consideradas los objetos astrofísicos más compactos del universo [3, 4, 5, 6], ya que tienen masas del orden de  $1.4M_{\odot}$ , con  $M_{\odot}$  la masa del sol, confinadas en esferas de radios del orden de 10km [7, 8, 9]. Por esta razón, su energía potencial y aceleración gravitacional superficial son muy grandes [10, 11], del orden de  $5 \times 10^{53} \text{erg} \sim 0.2Mc^2$  y  $2 \times 10^{14} \text{cm s}^{-2}$  respectivamente, lo que las convierte en objetos relativistas, dado que la energía gravitacional constituye una gran fracción de la energía en reposo [12, 13, 14]. Debido a su gran masa y densidad (que puede llegar a  $20\rho_0$ , siendo  $\rho_0$  la densidad de la materia nuclear estándar [6, 15, 16]), el espacio-tiempo se curva dentro y en los alrededores de las NS [17, 18], con lo que el análisis de la materia al interior de estas estrellas requiere la aplicación de la Teoría General de la Relatividad [19, 20, 21, 22]. Debido a su pequeño tamaño y alta densidad, una NS posee un campo gravitacional superficial  $2 \times 10^{11}$  veces mayor que el de la Tierra [20, 23]. De la misma forma, las NS soportan campos magnéticos un millón de veces mayor que los campos magnéticos producidos en la Tierra [19, 1, 24].

Las NS se han convertido en un escenario de gran interés para la aplicación de la Teoría de Muchos Cuerpos [2, 25, 26, 27, 28], ya que desde su descubrimiento observacional como Pulsares de radiofrecuencia [29, 30, 31, 32] se predice que la densidad en su interior varía alrededor de siete órdenes de magnitud [24] (desde la atmósfera hasta el núcleo interno). De esta forma, las NS se consideran laboratorios para el estudio de los diagramas de fase de la materia rica en neutrones [33], lo que permite analizar diferentes observables asociados a la interacción nuclear bajo condiciones de densidad extremas (altas y bajas, dentro del rango  $10^4 - 10^{25} \text{g cm}^{-3}$ ) [6]. La caracterización de la

materia al interior de las NS se realiza en términos de la Ecuación de Estado (EoS) de la materia nuclear densa en el interior, que dependerá de las especies de partículas consideradas y del modelo efectivo que describe las interacciones entre estas partículas [28, 34, 35, 36, 37]. Debido a la incertidumbre en cuanto a la composición exacta de las NS, se han planteado diferentes hipótesis, que van desde la composición nuclear estándar (neutrones, protones y electrones) [38, 39, 40], pasando por hiperones  $\Sigma^-$ ,  $\Lambda$ ,  $\Xi^{0,\pm}$  [9, 41, 42, 43] y condensados de piones y kaones [25, 44, 45, 46] hasta condensados de quarks [47, 48, 49, 50]. Esta diversidad en cuanto a la composición de las NS ha hecho que se analicen diferentes posibilidades para la EoS de la materia al interior de estos objetos compactos [14, 15, 2, 28, 38, 43, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58], lo que conlleva a una gran diversidad de modelos de objetos astrofísicos, que exhibirán diferentes propiedades físicas [12, 59, 60, 61].

De esta forma, las NS constituyen un escenario muy interesante para el análisis de las interacciones fundamentales que ocurren en su interior. Por ejemplo, la interacción gravitacional se debe analizar dentro del marco de la relatividad general [62, 63], dando cuenta de los estados de equilibrio hidrodinámico al interior de la estrella a partir de las ecuaciones de Einstein [64, 65] o principios variacionales [66, 67]. Las interacciones electrodébiles aparecen debido a que cuando las NS se generan como remanentes de explosiones de supernova sus energías internas son muy elevadas, con lo que debe existir un mecanismo de enfriamiento que disminuya la temperatura interna [30, 68, 69, 70, 71]. Entre los mecanismos de liberación de energía más aceptados en la literatura se encuentra la emisión de neutrinos [17, 72, 73, 74] producidos como subproductos de las reacciones nucleares que se presentan entre las partículas que conforman las NS. De esta forma, se considera la emisión de neutrinos por aniquilación de pares, decaimiento de plasmones, radiación sincrotrón de electrones, emisión de fotoneutrinos, bremsstrahlung electrón-núcleo, neutrón-neutrón y neutrón-núcleo, formación de pares de Cooper y procesos de decaimiento beta [17, 45, 70, 71, 75, 76]. La interacción fuerte efectiva entre los nucleones que constituyen las NS resulta muy importante en el estudio de la EoS de las NS [77, 78, 79, 80] mientras que la interacción fuerte entre quarks y gluones se podría presentar en el centro del núcleo de las NS super-densas, cuando las condiciones de densidad y temperatura sean suficientemente altas como para tener un medio constituido por quarks y gluones interactuando a través de la QCD [19, 33, 81, 82, 83]. Otro aspecto físico interesante que se presenta en las NS es la presencia de fases superfluidas y/o superconductoras de la materia nucleónica al interior de las NS, que aparecen

---

debido a las altas densidades que se presentan en su interior [84, 85, 86]. La modificación de las tasas de emisión de energía debido a la presencia de estas fases superfluidas de la materia, también constituye un interesante escenario de aplicación de la Teoría de Muchos Cuerpos [87, 88]

Dentro de los principales mecanismos de enfriamiento conocidos en las NS se encuentran los denominados procesos Urca, que determinan los escenarios de **enfriamiento estándar**, a través del *proceso Urca Modificado (MUrca)*, y el **enfriamiento acrecentado**, a través del *proceso Urca Directo (DUrca)* [17, 32, 89, 90, 91, 92].

De esta forma, el Objetivo General de este trabajo de tesis es determinar las características del proceso de enfriamiento por emisión de neutrinos en el núcleo y la corteza de las NS, a través del cálculo de las tasas de enfriamiento para el proceso DUrca, considerando los escenarios de intercambio de piones de forma efectiva, el intercambio de piones dentro del modelo estándar de las interacciones electrodébiles y efectos relativistas como retroceso de nucleones y violación de paridad, analizando además el efecto de las fases superfluidas de la materia nucleónica densa en las NS.

Para desarrollar este objetivo se siguen los siguientes pasos metodológicos: *Primero*, se determina la tasa de pérdida de energía por emisión de neutrinos, caracterizada por la emisividad, dentro de los procesos DUrca y MUrca en las NS para el caso en que los nucleones interactúan de forma efectiva a través del intercambio de piones. Para hacer esto, se hace necesario obtener las características del perfil densidad al interior de NS modelo, lo que se realiza a partir de la interpolación numérica de soluciones de las ecuaciones de estructura de Tolman-Oppenheimer-Volkoff [15, 16] considerando diferentes EoS que describen la materia al interior de los objetos astrofísicos considerados [15, 43, 52, 53, 54, 55, 56, 57]. A partir de este perfil densidad, se obtienen propiedades físicas adicionales de las partículas constituyentes de las NS consideradas, tales como las densidades de neutrones y protones, al igual que sus momenta de Fermi, cantidades sobre las cuales dependen las emisividades de partículas calculadas. Usando el perfil densidad obtenido, se encuentra la dependencia de la emisividad de neutrinos con la coordenada radial medida desde el centro de la estrella, a partir de la cual, realizando una integración numérica, es posible obtener la luminosidad total de neutrinos de las estrellas consideradas, haciendo posible una comparación con lo reportado en diferentes fuentes bibliográficas [30, 70]. *Segundo*, se deriva una expresión relativista para las pérdidas de energía por emisión de neutrinos en el proceso DUrca con nucleones en la materia bariónica degenerada de las

---

NS, a través de la aplicación de la regla de oro de Fermi y dentro del modelo estándar de las interacciones electrodébiles. Este procedimiento permite obtener expresiones para la emisividad de neutrinos para ambos procesos, cantidad física que depende de la densidad al interior de la estrella (su perfil de densidad) y de la temperatura interna de la misma. *Tercero*, se calculan las tasas de emisión de energía debido a las reacciones con producción de neutrinos en el proceso DUrca con nucleones, dentro del marco de trabajo de la Teoría de Campo Medio, integrando los efectos del retroceso de nucleones, la violación de paridad y las interacciones pseudo-escalares entre los nucleones. Este tratamiento nos lleva a analizar un lagrangiano efectivo para la interacción entre las partículas, a partir del cual, aplicando la Teoría de Campo Medio, se determina una condición entre los momenta de los nucleones para que el proceso DUrca ocurra al interior de una NS. *Cuarto*, se determina la emisividad de neutrinos en el proceso DUrca en las fases superfluidas de la materia nucleónica densa por debajo de la temperatura crítica de transición de fase de aparición de pares de Cooper de nucleones, lo que nos lleva a analizar las características de las fases superfluidas de la materia al interior de las NS, lo que enriquece el análisis del proceso de enfriamiento de estos objetos astrofísicos.

Este trabajo se ha organizado de acuerdo al siguiente esquema: en el Capítulo 2 se realiza una revisión bibliográfica de los aspectos fundamentales respecto al origen, evolución y estructura de las NS, partiendo de una introducción histórica sobre la evolución del concepto y descripción física de estos objetos astrofísicos, discutiendo su origen en las explosiones de supernova de estrellas que han finalizado la secuencia principal (MS), y finalizando con una discusión cualitativa de la estructura interna de las NS. En el Capítulo 3 se realiza un estudio del equilibrio hidrostático de las NS y se analizan diferentes posibilidades para la EoS de la materia en su interior. En este capítulo se presentan los perfiles de densidad obtenidos para las ocho EoS analizadas, y a partir de éstos se obtienen las densidades de partículas y momenta de Fermi para los neutrones y protones, cantidades que influyen en las características de la emisividad de neutrinos, como se mencionó anteriormente. En el Capítulo 4 se realiza el análisis del proceso de enfriamiento de las NS a partir del cálculo de las emisividades de neutrinos para los procesos DUrca y MUrca. Inicialmente, se discuten las características principales del proceso de enfriamiento, para posteriormente obtener las emisividades de neutrinos para ambos procesos, a partir de la consideración de la interacción efectiva entre los nucleones por el intercambio de piones. En este capítulo se obtiene

---

---

una expresión relativista para las pérdidas de energía por emisión de neutrinos a partir de la aplicación de la regla de oro de Fermi, dentro del Modelo Estándar de las Interacciones Electrodébiles. Para finalizar este capítulo, se analiza la influencia del perfil densidad sobre el proceso de enfriamiento, y se calculan las emisividades totales para cada una de las EoS analizadas. En el Capítulo 5 se consideran efectos adicionales sobre la emisividad de neutrinos producidos en el proceso DUrca. Inicialmente se aplica la Teoría de Campo Medio en el análisis del proceso Durca, integrando los efectos del retroceso de nucleones, la violación de paridad y las interacciones pseudo-escalares entre los nucleones. Finalmente, se discute el efecto de la aparición de fases superfluidas de la materia nuclear al interior de las NS, calculando los factores de supresión de la emisividad que introducen las fases superfluidas de la materia densa, por debajo de la temperatura de transición de fase de aparición de pares de Cooper de nucleones.

---

## Capítulo 2

# Origen, Estructura y Evolución de las Estrellas de Neutrones

En este capítulo se describen aspectos básicos de la evolución estelar: la evolución durante la secuencia principal y los posibles remanentes que resultan de las fases finales de la evolución de las estrellas: las **Enanas Blancas (WD)**, las **Estrellas de Neutrones (NS)** y los **Agujeros Negros (BH)**, es decir, los llamados **Objetos Compactos**. Veremos que el tipo de objeto astrofísico formado depende de la evolución de la estrella colapsada y, más fundamentalmente, de su masa.

Posteriormente, nos enfocamos en la evolución de las NS como productos de las etapas finales en la vida de una estrella. Se estudia su evolución y estructura, y en particular su posible contenido de materia, lo que nos llevará a discutir las diferentes hipótesis sobre la composición interna de las NS<sup>1</sup>.

El capítulo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2.1 se presenta un resumen de la evolución histórica de la física de las NS, desde la concepción de su existencia hasta algunos de los resultados observacionales más recientes. En la sección 2.2, se presentan las características de las estrellas durante y después de la secuencia principal (MS), hasta llegar a las etapas finales de evolución, en las que aparecen los objetos compactos. Finalmente, en la sección 2.3, se discuten algunas de las propiedades físicas que se presentan en las diferentes regiones de las NS.

---

<sup>1</sup>Debido a que los resultados experimentales disponibles en la literatura no permiten determinar de forma contundente cuál es la verdadera composición de las NS, se han planteado todo tipo de posibilidades para su contenido de materia, lo que a su vez conlleva a plantear distintas relaciones entre las variables termodinámicas al interior de la estrella.

## 2.1 Introducción Histórica

La aplicación de la teoría cuántica a las ecuaciones de estado de sistemas densos mostró que es posible que la presión de un gas dependa solamente de la densidad, lo que implica que es viable la existencia de configuraciones de materia fría y estable, independientemente de la historia térmica de la materia [20].

Tras aplicar esta idea a la evolución estelar, Landau, en 1931 [81], un año antes del descubrimiento del neutrón por Chadwick [93], discutió la posibilidad que el estado final de la evolución estelar fuera tal que la presión fuera proporcionada completamente por fermiones altamente degenerados, lo que resulta del hecho que, en un gas cuántico, los fermiones están obligados a distribuirse de forma tal que haya sólo una partícula por celda del espacio de fase [94], por el principio de exclusión de Pauli. Además, Landau postuló que sería posible para la configuración depender solamente de la masa de la partícula constituyente, lo que determina el momentum a una energía dada, con lo que existen objetos en que las partículas constituyentes son fermiones neutros y pesados [22].

En el inicio de los años 30, Chandrasekhar encontró un límite superior para la masa de un objeto astrofísico con estas características, por encima del cual la presión ejercida por los electrones es insuficiente para superar la atracción gravitacional, es decir, las estrellas más masivas no pueden terminar su existencia en equilibrio hidrodinámico, con lo que su destino final sería el colapso [95]. Actualmente estos objetos se denominan **enanas blancas (WD)** y su masa es del orden de la masa del sol [96].

El descubrimiento del neutrón y la teoría del mesón de Yukawa clarificaron las propiedades básicas de la materia nuclear [97]. Ya que el neutrón es un fermión (lo que se deriva de la aplicación de la mecánica estadística cuántica), está sujeto al principio de exclusión de Pauli, pero ya que su masa es alrededor de 2000 veces mayor, las configuraciones de neutrones degenerados serían considerablemente más densas que las de la materia en las enanas blancas [63]. Si una **estrella de neutrones (NS)** se formara, sería tan compacta a una masa dada que los cálculos newtonianos usados previamente para determinar la estructura estelar no serían adecuados para su descripción [98]. Siguiendo el trabajo de Tolman [64], que en 1939 derivó la estructura métrica interna para una masa homogénea no rotante, Oppenheimer y Volkoff [65], derivaron la ecuación para el equilibrio hidrostático relativista, mostrando que existe una masa máxima por encima de la cual no es posible una config-

---

uración estable para una NS degenerados.

Un artículo posterior mostró que el destino de objetos con masas superiores a  $1M_{\odot}$  era el colapso rápido después de pasar el radio de Schwarzschild<sup>2</sup> y volverse objetos singulares completamente relativistas, llamados posteriormente **agujeros negros (BH)** por Wheeler [62]. Al final de 1930, se había entendido que el estado final de la evolución estelar era una configuración estable de electrones degenerados (WD), ó de neutrones degenerados (NS) ó el colapso gravitacional catastrófico (BH) [98].

La existencia de las NS fue propuesta en 1934 por Baade y Zwicky [100, 101, 102], quienes postularon que su densidad sería muy alta, su radio muy pequeño y que su campo gravitacional sería mucho mayor que el de las estrellas ordinarias. Además de esto, postularon que estas estrellas se formarían en las explosiones de supernova.

El primer cálculo de la ecuación de estado de una NS se realizó asumiendo que la estrella estaba compuesta por un gas de neutrones libres a alta densidad [103].

Debido a que inicialmente se creyó que a partir de los núcleos de estas estrellas se podría obtener energía, lo cual fue desvirtuado por el estudio de la fusión termonuclear, el estudio de las NS se estancó alrededor de 30 años. El descubrimiento de quasars y de fuentes cósmicas de rayos X despertó nuevamente el interés en las NS, analizando sus propiedades de equilibrio, pero aún así la existencia de las NS fue cuestionada por una gran parte de la comunidad científica.

El descubrimiento de los pulsars en 1967 [33], llevó a la hipótesis que son NS rotantes, lo cual es aceptado actualmente [98]. A partir de 1968, se ha realizado mucho trabajo teórico en el estudio de las NS [80], que fue adicionalmente estimulado por la observación de fuentes pulsantes y compactas de rayos X (pulsars de rayos X) [104], lo que se ha interpretado como NS en sistemas binarios cercanos. Los descubrimientos de los pulsars del Cangrejo y Vela, remanentes de supernova, proporcionaron evidencia sobre la formación de NS en explosiones de supernova (la nebulosa del cangrejo, por ejemplo, es el remanente de la explosión de supernova observada por astrónomos chinos en 1054 A.C.).

A partir de observaciones ópticas y de rayos X en fuentes binarias es posible determinar la masa de algunas NS. Para el año 2004, se conocían alrededor

---

<sup>2</sup>El radio de Schwarzschild corresponde a una singularidad coordinada que depende de la masa total de la distribución esférica de materia [99]

---



de 350 pulsars y 300 fuentes compactas de rayos X [19]. Debido a que se acepta que los pulsars corresponden a NS rotantes, actualmente se conocen alrededor de 1000 NS [1].

## 2.2 Origen de las Estrellas de Neutrones

### 2.2.1 Evolución estelar durante la secuencia principal (MS)

Las nubes de gases interestelares compuestas principalmente de moléculas de hidrógeno y un poco de polvo son las precursoras de las estrellas. Estas nubes son difusas, no uniformes, se distribuyen sobre amplios rangos de temperatura (la mayor parte del gas se encuentra a 10K, pero algunas regiones pueden llegar a 2000K) y cubren vastas regiones del espacio (con radios desde un año luz hasta varios cientos de años luz), además de tener masas entre  $10 - 10^7 M_{\odot}$  [105]. Para formar una estrella, se requiere una compresión de un orden de magnitud de  $10^{20}$  sobre estas nubes de gas, además de otros factores, como la gravedad, la presión del gas, la rotación, los campos magnéticos, la radiación de estrellas cercanas y el efecto de ondas de choque radiativas, aunque los efectos precisos de cada uno de estos aspectos sobre una región que podría ser estable dinámicamente no se conocen con exactitud [20].

El polvo en las nubes moleculares se origina en las superficies frías de las **supergigantes** (estrellas masivas en una etapa avanzada de la evolución estelar). Este polvo actúa como un escudo contra la luz ultravioleta de estrellas vecinas, por lo que la parte central de las nubes se enfría, con lo que, con una baja presión térmica, el colapso gravitacional de las regiones más densas de las nubes se vuelve inevitable [18]. Así, una perturbación, como el paso de una onda de choque o de un gas en expansión de una remanente de supernova, induce una inestabilidad sobre una masa crítica de la nube, lo que hace que una porción del gas comience a caer hacia su centro de masa bajo el efecto de la gravedad, y la energía gravitacional se convierte en calor por la compresión [106]. De esta forma, la opacidad del gas aumenta, al igual que su densidad, lo que establece gradientes de temperatura y presión térmicas que equilibran aproximadamente el efecto de la gravedad en un estado de cuasi-equilibrio hidrostático. La pérdida de energía por radiación en la superficie de la **protoestrella** causa una contracción adicional, que produce calentamiento

---

to, hasta que la temperatura del núcleo se eleva hasta el punto de ignición para fusionar hidrógeno en helio ( $T \approx 10^7 K$ ). A partir de entonces, la fusión se vuelve la fuente dominante de emisión de energía, y la presión térmica y de radiación equilibrarán de forma aproximada la atracción gravitacional por millones o billones de años, lo que depende, de forma aproximada, del inverso del cuadrado de la masa estelar [20].

Las estrellas como el sol son estables debido a un balance entre las fuerzas gravitacionales y las fuerzas internas, siendo estas últimas generadas por las reacciones termonucleares que se presentan en el interior. Este balance determina de forma unívoca la estructura interna de una estrella cuya masa y composición química se conoce, con lo que la mayor parte del gas dentro de tales estrellas puede describirse a través de la ley de los gases ideales [21].

Las estrellas en la fase de MS son aquellas en que la fuente de generación de energía es la conversión de hidrógeno en helio al interior del núcleo estelar, son químicamente homogéneas y se encuentran en equilibrio hidrostático y térmico [18, 105, 107]. Se dice que cualquier proceso de combustión nuclear se vuelve importante al interior de una estrella cuando la tasa de liberación de energía por este proceso constituye una fracción significativa de la tasa a la que la energía es radiada, es decir, la luminosidad estelar [96, 108].

Ya que la tasa a la que se producen las reacciones nucleares se incrementa con la densidad y cambia radicalmente con la temperatura, y las ecuaciones de estructura para una estrella muestran que estas dos magnitudes disminuyen desde el centro hacia afuera, podemos concluir que la evolución de una estrella estará liderada por su núcleo, ya que los cambios de composición ocurren primero allí, y a medida que cada uno de los combustibles nucleares se consume en su interior, las características globales de la estrella cambian [106].

El tiempo que una estrella dura en la etapa MS, depende de su masa. Para una estrella estándar, el patrón de evolución puede describirse como sigue:

1. Después de su formación y llegada a la MS, la estrella gasta alrededor de  $10^{10}$  años convirtiendo hidrógeno en helio, inicialmente a partir de la cadena protón-protón<sup>3</sup>, pero posteriormente, a medida que el núcleo se

---

<sup>3</sup>La cadena protón-protón consiste en una serie de reacciones que inicia con la interacción débil de dos protones para producir un neutrón, con lo que se forma un isótopo del hidrógeno,  $p+p \rightarrow {}^2D + e^+ + \nu$ . Posteriormente, el Deuterio ( ${}^2D$ ) captura un protón para formar el isótopo más ligero del helio ( ${}^3He$ ),  ${}^2D + p \rightarrow {}^3He + \gamma$ , donde  $\gamma$  indica la emisión de un fotón energético, que se absorbe rápidamente y cuya energía será compartida por

---

caliente, a través del ciclo CNO<sup>4</sup>. Las estrellas *enanas rojas*, pequeñas, relativamente frías y de baja masa, fusionan lentamente el hidrógeno en su interior, con lo que permanecerán en la MS por cientos de billones de años, mientras que las estrellas supergigantes, más masivas y calientes, dejarán la MS después de unos pocos millones de años [105].

2. La combustión del núcleo es reducida debido a una falta de hidrógeno, pero la conversión de hidrógeno en helio continúa en una región que rodea el núcleo, lo que genera una presión tanto hacia adentro de él, que hace que éste se caliente, y hacia afuera de él, que hace que la estrella se expanda y se enfríe [107]. A medida que el núcleo consume su reserva de hidrógeno, ya no existe una presión hacia el exterior, generada por la fusión de hidrógeno, que contrarreste la fuerza de gravedad, con lo que se presenta una contracción hasta que, o bien la degeneración de los electrones es suficiente para oponerse a la gravedad, o el núcleo se vuelve lo suficientemente caliente para que el helio comience a fusionarse. La masa de la estrella es el factor que determina cuál de estos dos procesos se realiza. Las estrellas de baja masa (alrededor de 0.5 masas solares o menos) o enanas rojas, son incapaces de fusionar helio en su interior debido a que no hay una envoltura lo suficientemente masiva para ejercer presión sobre el núcleo, con lo que muy lentamente colapsarán hasta convertirse en enanas blancas [106].
3. La compresión del núcleo ocasiona el degeneramiento<sup>5</sup> de la materia, lo que hace que ésta se caliente mientras que su presión se mantiene constante. Eventualmente se alcanza una temperatura en la cual el helio se convierte en carbono (a través de la reacción alpha triple<sup>6</sup>). Ya que el material se encuentra inicialmente degenerado, el calor liberado

---

partículas vecinas. La interacción de dos isótopos  $^3He$  finaliza la llamada cadena  $p - p$  I, que convierte seis protones (núcleos de hidrógeno) en un núcleo de Helio (partícula  $\alpha$ ):  $^3He + ^3He \rightarrow ^4He + 2p$  [97].

<sup>4</sup>El ciclo CNO es una doble cadena de reacciones, donde cada una de las dos cadenas cerradas envuelve seis reacciones que resultan en la producción de un núcleo de  $^4He$ : cuatro capturas de protones y dos decaimientos  $\beta$ , acompañados por la emisión de neutrinos [97]

<sup>5</sup>En este contexto, el degeneramiento implica que las propiedades del material están dominadas por los electrones.

<sup>6</sup>Como en el caso de la combustión del hidrógeno, la reacción nuclear más simple y obvia en un gas de helio sería la fusión de dos partículas alpha, pero, ya que no existe ninguna configuración estable de materia con un número másico (la suma del número de protones y

no produce un enfriamiento ni una expansión inducida por la presión, hasta que la temperatura alcance un valor en el que se remueva el degeneramiento. Las estrellas con masas entre 0.5 y 10 masas solares se convierten en gigantes rojas de gran luminosidad, con núcleos inertes y capas concéntricas al núcleo, y aún fusionan hidrógeno en helio [21]. Ya que la presión interna del núcleo es insuficiente para compensar la fuerza de gravedad, el colapso gravitacional libera energía calentando las capas externas al núcleo, con lo que la fusión de hidrógeno se mantiene en su interior. A medida que el hidrógeno alrededor del núcleo se consume, éste absorbe el helio resultante, causando una contracción adicional, con lo que el hidrógeno restante se consume aún más rápido, lo que eventualmente lleva a la fusión del helio en el núcleo y a la aparición de un *fulgor de helio*<sup>7</sup>, si la presión de degeneramiento de los electrones en el núcleo es suficiente, lo que ocurre para estrellas con una masa inferior a 1.4 masas solares [105]. Para estrellas más masivas, donde la presión de degeneramiento de los electrones no es tan fuerte, el encendido de la fusión de helio ocurre de forma más lenta. La energía liberada por la fusión del helio hace que el núcleo se expanda, de tal forma que la fusión de hidrógeno en las capas externas se vuelva lenta, con lo que la generación de energía en toda la estrella disminuye. Así, la estrella se contrae, disminuyendo gradualmente su radio y aumentando su temperatura superficial [96].

4. Cuando el degeneramiento se ha eliminado, la principal fuente de generación de energía es la combustión de helio en el núcleo, y las condiciones de equilibrio son muy similares a aquellas de la etapa inicial de combustión de hidrógeno [109]. El hidrógeno que aún queda en la corteza continúa quemándose, pero la estrella es más caliente en el centro, con lo que el calor es transportado por radiación, conducción y convección hacia la superficie, donde es radiado al exterior.

---

electrones en un átomo) de 8, la fusión a un átomo de berilio  ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^8\text{Be}$  produce un isótopo con una vida media muy corta ( $\sim 2.6 \times 10^{-16}\text{s}$ ). Pero, ya que esta vida media es mayor que el tiempo medio de colisión de dos partículas alpha a temperaturas del orden de  $10^8\text{K}$ , existe una probabilidad no nula de que una partícula alpha colisione con un núcleo de  ${}^8\text{Be}$  antes que este decaiga, para producir carbono:  ${}^8\text{Be} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C}$ . Así, la combustión del helio se produce en una reacción de dos etapas que lleva a la fusión de tres núcleos de helio en  ${}^{12}\text{C}$ , de donde proviene el nombre de la reacción (triple alpha) [106].

<sup>7</sup>Helium flash

---

5. A medida que el helio se consume, se forma un núcleo de carbon en la estrella, con lo que capas concéntricas de diferentes combustibles se van estableciendo, a medida que uno u otro elemento es sintetizado. La ignición de carbono en el núcleo dura sólo unos pocos miles de años.
6. La generación copiosa de rayos gamma en el núcleo produce pares electrón-positrón que a su vez se aniquilan, produciendo pares de neutrinos, con lo que la tasa de emisión de neutrinos aumenta. En esta etapa, la pérdida de energía es tan alta que las etapas subsecuentes de combustión progresan aún más rápidamente: oxígeno en un año, silicio en una semana. Cuando se consume cada uno de estos combustibles nucleares, el núcleo se contrae aún más, hasta que se alcanza la temperatura necesaria para que la siguiente etapa de combustión se active [108].
7. El cese de la fusión nuclear marca el final de la etapa luminosa de la estrella. La duración de la etapa de fusión, al igual que su evolución final depende de la masa de la estrella. La combustión hasta el punto final del hierro se alcanza solamente en estrellas con masas  $M \geq 8M_{\odot}$ , cuyas etapas finales serán como NS o BH, mientras que las estrellas más ligeras, cuya combustión es más lenta e incompleta, terminan su vida como WD [63].

### 2.2.2 Evolución estelar posterior a la MS

Los objetos compactos (WD, NS y BH) nacen cuando las estrellas normales mueren, y difieren de éstas en dos aspectos fundamentales. Primero, ya que no consumen combustible nuclear, no pueden mantenerse a ellas mismas en contra del colapso gravitacional generando presión térmica. Por el contrario, las WD son mantenidas por la presión de electrones degenerados, las NS por la presión de los neutrones degenerados y los BH están completamente colapsados, esto es, son estrellas en las que no hay ninguna forma de revertir la atracción gravitacional y que colapsan en singularidades [98]. El segundo aspecto es que los objetos compactos tienen tamaños muy pequeños comparados con los de las estrellas normales. La tabla 2.1, tomada de [81], muestra las características más importantes de los objetos compactos, comparadas con las de nuestra estrella más cercana, el sol [19]. En esta tabla,  $\bar{\rho}$  es la densidad promedio y  $U_{gS}$  es la energía gravitacional superficial.

Objeto	Masa (M)	Radio (R)	$\bar{\rho}$ ( $g\ cm^{-3}$ )	$U_{gS}$ ( $GM/Rc^2$ )
Sol	$M_{\odot}$	$R_{\odot}$	1	$10^{-6}$
WD	$\leq M_{\odot}$	$\sim 10^{-2}R_{\odot}$	$\leq 10^7$	$\sim 10^{-4}$
NS	$\sim 1 - 3M_{\odot}$	$\sim 10^{-5}R_{\odot}$	$\leq 10^{15}$	$\sim 10^{-1}$
BH	Arbitraria	$2GM/c^2$	$\sim M/R^3$	1

$$M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33}g, R_{\odot} = 6.9599 \times 10^{10}cm$$

Cuadro 2.1: Características básicas de los objetos compactos.

Los objetos compactos son los productos finales de la evolución estelar, y el factor principal que determina si una estrella se convertirá en una WD, NS o BH es su masa.

Se cree que las WD se originan de estrellas con masas  $M \leq 4M_{\odot}$  y su masa máxima es de aproximadamente  $1.4M_{\odot}$ , con lo que para convertirse en una WD una estrella debe expulsar masa (formando nebulosas planetarias) al final de su evolución [5].

Por otro lado, las NS y los BH se producen por la extinción de estrellas más masivas [4]. Debido al desconocimiento de las etapas finales en la evolución de las estrellas, no se conoce un límite de masa que permita conocer si el final de una estrella corresponde a una NS o un BH, pero se sabe que aspectos tales como la masa del núcleo de hierro (que limita la masa del núcleo bariónico del remanente) pueden determinar el tipo de objeto compacto que se formará [110]. Sin embargo, se sabe que las NS pueden tener una masa máxima entre  $1.4 - 3M_{\odot}$  [57, 111].

El colapso gravitacional total que lleva a la formación de un BH puede ocurrir de diferentes maneras. Por ejemplo, ya que hay definida una masa máxima por encima de la cual una WD o una NS no puede evitar colapsarse, la acreción del gas por cualquiera de estos dos objetos puede llevar a la formación de un BH [1]. La figura 2.1, adaptada de [1], muestra las diferentes etapas en la evolución estelar, donde se puede observar cómo se realiza la evolución después de la MS, dependiendo de la masa de la estrella.

El remanente después de una explosión de supernova es una NS, que contiene neutrones, protones, electrones y núcleos pesados, pero predominantemente neutrones [112]. Las explosiones de supernova<sup>8</sup> ocurren en las etapas finales de evolución de estrellas masivas aisladas, con masas suficientemente grandes como para mantener en su interior diferentes reacciones nucleares. Zwicky y

<sup>8</sup>Convencionalmente llamadas *supernova tipo II*

Baade mostraron que existe una clase de eventos estelares explosivos con energías significativamente mayores (aproximadamente tres órdenes de magnitud por encima) que la explosión nova y después notaron que la magnitud de la energía observada podría ser suplida por la formación de una NS [100, 101, 102].

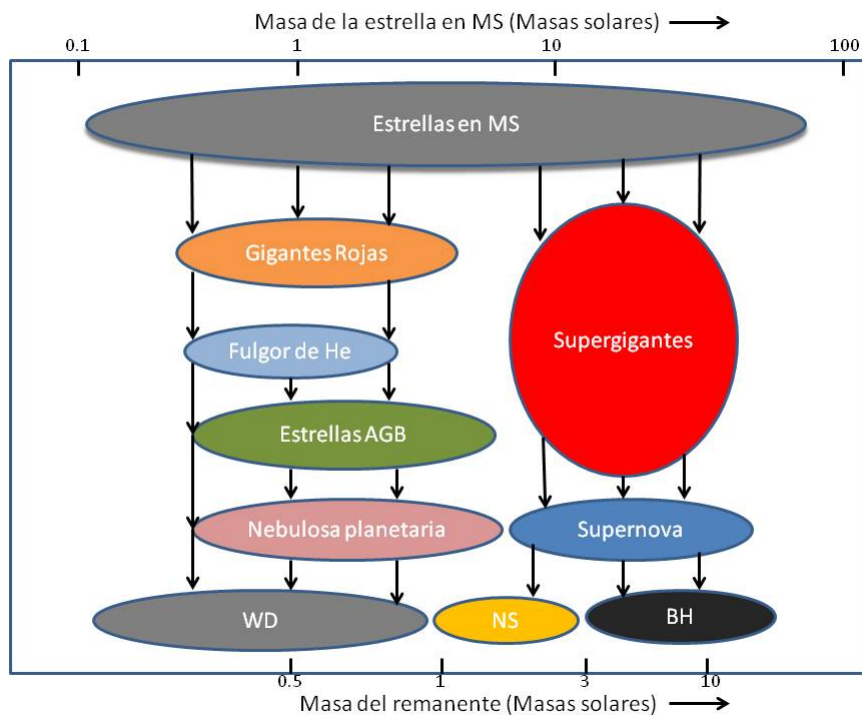


Figura 2.1: Producción de estrellas compactas como el resultado final de la evolución estelar. Figura adaptada de [1]

Ellos argumentaron que el colapso del núcleo de la estrella, desde aproximadamente el radio del sol hasta 10 km, sería suficiente para expulsar la cubierta de la estrella con la cantidad de energía correcta que había sido observada en los eventos de supernova, con lo que el único objeto que podía ser formado en un evento tal era una NS [98].

En el interior de una estrella suficientemente masiva se producen diferentes reacciones nucleares dependiendo del radio de la esfera durante las diferentes etapas de su evolución, como se explicó en la sección 2.2.1. Una vez se ha

formado un núcleo de hierro en el centro de una estrella, su evolución se puede describir como sigue [18, 113, 114]:

1. La incineración continua de silicio y otros elementos de la corteza se adicionan a la masa del núcleo y eventualmente lo llevan a un valor límite de masa, llamada la masa de Chandrasekhar,  $M_{Ch} \simeq M_{\odot}$ . En las condiciones que se presentan durante esta etapa, las interacciones de los neutrinos con los núcleos juegan un papel muy importante, ya que estos procesos pueden actuar como el mecanismo de enfriamiento principal del núcleo.
2. Debido a las altas temperaturas existentes en el núcleo ( $T \simeq 10^9 K$ ), los fotones altamente energéticos pueden desintegrar los núcleos de hierro, produciendo partículas  $\alpha$  y protones (de alguna manera deshaciendo lo que la estrella ha venido haciendo a lo largo de toda su vida).
3. Es también posible que la combinación de protones y electrones produzca neutrones y neutrinos (que eventualmente escapan de la estrella) debido a un decaimiento beta inverso.
4. La fotodesintegración del núcleo de hierro y la aparición de neutrones tienen el efecto de reducir la presión en el núcleo de la estrella, produciendo un rápido colapso del núcleo.
5. El colapso del núcleo interno continúa hasta que la densidad es de aproximadamente  $8 \times 10^{14} g cm^{-3}$ , que es aproximadamente tres veces la densidad nuclear,  $\rho_0 = 2.8 \times 10^{14} g cm^{-3}$ . Debido a que modelos nucleares sugieren que las interacciones nucleónicas pueden producir fuerzas efectivas repulsivas a altas densidades, el colapso es detenido, lo que ocasiona la emisión de una onda de presión hacia el exterior de la estrella.
6. La propagación de la onda de presión producida se ha estudiado numéricamente, y se ha llegado a dos posibles casos: a medida que la onda se propaga hacia afuera del núcleo estelar, rompe los núcleos de hierro a través de fotodesintegración, lo que corresponde a un proceso que consume bastante energía<sup>9</sup>. Si el núcleo de hierro no es tan masivo, el pulso puede emerger a la región exterior sin perder tanta energía, lo

---

<sup>9</sup>Alrededor de  $1,7 \times 10^{51} ergs$  para desintegrar  $0.1M_{\odot}$  de hierro



que puede dar lugar a una explosión, llamada *explosión hidrodinámica pronta*<sup>10</sup>. El segundo caso corresponde al núcleo ferroso altamente masivo, lo que ocasiona que el pulso de presión no se pueda propagar y se vuelva estacionario. Como consecuencia, los neutrinos no pueden escapar libremente y generan una «esfera de neutrinos» y una pequeña fracción de su energía ( $\sim 0,05$ ) se deposita en la materia. Esta energía puede calentar la materia y permitir la propagación del pulso de presión hacia el exterior de la estrella, produciéndose una explosión, llamada *explosión tardía*<sup>11</sup>. Es de anotar que estos comportamientos sólo han sido estudiados a través de simulaciones numéricas.

7. La energía cinética liberada por el pulso saliente es de alrededor  $10^{51} \text{ergs}$  lo que corresponde cercanamente al 1 % de la energía liberada por los neutrinos. Cuando el material exterior se expande, volviéndose ópticamente delgado, se liberan  $\sim 10^{49} \text{ergs}$  de energía en fotones.
8. La naturaleza del remanente depende de su masa, y por ende de la masa inicial de la estrella. Si la masa de la estrella original era menor que  $\sim 25M_{\odot}$ , el núcleo interno, compuesto principalmente de neutrones, puede ser estabilizado por la presión del degeneramiento de los neutrones, y la estructura resultante es un **NS**. Si la masa de la estrella original es mayor a  $25M_{\odot}$ , la masa remanente es mayor que la masa de Chandrasekhar de la esfera de neutrones, y el remanente colapsará para formar un **BH**.
9. Una clara señal del colapso del núcleo, seguida por la formación de un objeto compacto, es la emisión de aproximadamente  $3 \times 10^{53} \text{ergs}$  de energía en la forma de neutrinos. Así, la detección de neutrinos de una supernova puede ser muy útil para la comprobación de modelos teóricos.

---

<sup>10</sup>Prompt hydrodynamic explosion

<sup>11</sup>Delayed-explosion

## 2.3 Estructura Interna de las NS

### 2.3.1 Estructura de las NS

Las NS son objetos cuasi-esféricos compuestos de seis regiones principales. Desde el exterior hacia el interior, las NS están compuestas por una atmósfera, una envoltura, una corteza exterior, una corteza interna, un núcleo exterior y posiblemente un núcleo interno, como se muestra en la figura 2.2, adaptada de [2]. El estudio de los núcleos interior y exterior, al igual que de las cortezas interior y exterior, que representan alrededor del 99 % de la masa de la NS y donde se presentan la mayoría de las transformaciones de la materia nuclear al interior de la estrella, es usualmente suficiente para entender las propiedades principales de las NS [115].

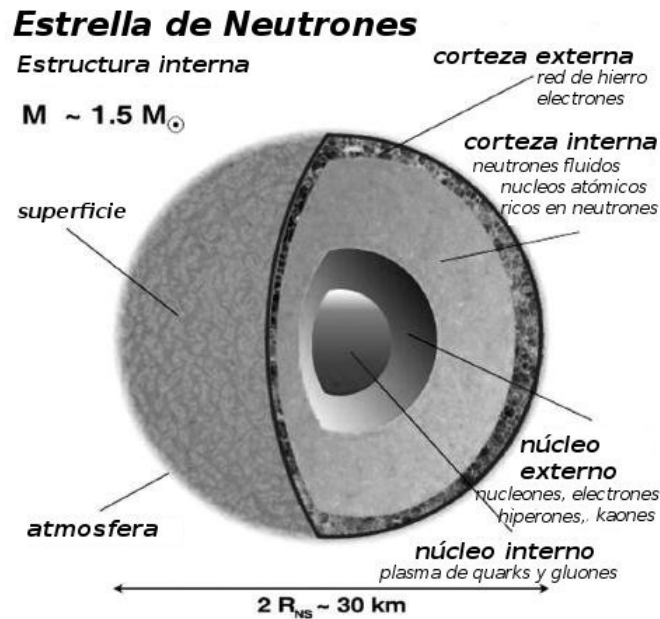


Figura 2.2: Estructura básica de las estrellas de neutrones. Figura adaptada de [2]

#### La atmósfera y la envoltura

Corresponden a las capas más externas de una NS y determinan el espectro de emisión de radiación electromagnética térmica, dando información sobre la

temperatura, la composición química, la aceleración gravitacional y el campo magnético de la estrella, con lo que, a partir del análisis de su espectro de emisión pueden conocerse diferentes aspectos de la *estructura interna* de una NS [11].

La atmósfera y la envoltura determinan también la colimación y polarización de la radiación emitida por la estrella [7], al igual que el transporte y liberación de energía térmica hacia su superficie [10, 116].

La atmósfera, con un espesor de 10 cm para estrellas calientes ( $T_{eff} \sim 10^{6.5}$ ) a  $\sim 1mm$  para estrellas frías ( $T_{eff} \sim 10^{5.5}$ ) [117], y la envoltura, con un espesor de unos pocos metros, conforman una delgada capa de plasma con densidades del orden de  $\rho = 10^4 g cm^{-3}$ , con lo que constituyen una fracción del orden de  $10^{-4}$  de la masa de la estrella [118].

### La corteza exterior

La **corteza exterior**, se extiende entre 1 y 2 km<sup>12</sup> por debajo de la superficie de la NS, y es una región en la que, partiendo desde la frontera con la atmósfera, con densidades del orden de  $10^4 g cm^{-3}$ , se alcanzan densidades del orden de la densidad de goteo de neutrones,  $\rho_{ND} \approx 4 \times 10^{11} g cm^{-3}$  [10], con lo que la densidad presenta variaciones de siete órdenes de magnitud [6]. La corteza exterior consiste de núcleos pesados, en forma fluida o conformando una red cristalina, y electrones degenerados [89]. A las densidades presentes en la corteza exterior, los electrones (indispensables para mantener la neutralidad eléctrica) se separan de los núcleos, lo que ocurre cuando se alcanzan densidades mayores a  $10^4 g cm^{-3}$ , y se mueven libremente a través de la corteza a velocidades relativistas, cuando la densidad supera los  $10^7 g cm^{-3}$  [119]. La perturbación de los núcleos sobre el movimiento de los electrones es muy pequeña, con lo que el apantallamiento que ejercen los electrones sobre los campos eléctricos producidos por éstos desaparece, lo que ocasiona que los núcleos ejerzan fuerzas de repulsión entre ellos, con lo que las energías de interacción pueden alcanzar valores del orden de 1MeV, lo que obliga al medio a alcanzar un estado de mínima energía en que los núcleos se encuentran tan alejados entre sí como sea posible [13, 120].

Cuando el potencial químico (o energía de Fermi) de los electrones,  $\mu_e$ , es mayor que la diferencia de masa neutrón-protón  $\Delta m = 1.3MeV$ , los electrones pueden convertir protones en neutrones, debido a procesos de absor-

---

<sup>12</sup>Lo que corresponde a alrededor de un décimo del radio total de la NS.

ción [12], con lo que puede decirse que los nucleones y electrones están en equilibrio químico, respecto al decaimiento beta y las reacciones de captura:



Este equilibrio puede ser expresado por una ligadura entre los potenciales químicos de las partículas que participan en la reacción:

$$\mu_n - \mu_p = \mu_e, \quad (2.2)$$

donde se ha despreciado el potencial químico de los neutrinos debido a que estas partículas abandonan la estrella sin sufrir interacciones [59].

### La corteza interna

La **corteza interna**, que puede tener varios kilómetros de espesor [14], se extiende desde una densidad  $\rho_{ND}$  (donde termina la corteza externa) hasta la frontera con el núcleo, donde la densidad es del orden de la densidad de saturación nuclear,  $\rho \sim \rho_0 = 2.8 \times 10^{14} g cm^{-3}$ , y está compuesta por electrones, neutrones libres y núcleos atómicos ricos en neutrones [121].

A medida que aumenta la densidad, es decir, a medida que nos acercamos al centro de la estrella, el potencial químico de los neutrones aumenta, mientras que para los protones disminuye [119]. A la densidad de goteo, la energía de los neutrones es suficientemente alta,  $\mu_n > m_n$ , y los neutrones escapan del núcleo [11]. Los neutrones libres en la corteza interna podrían ser superfluidos, pero la temperatura crítica a la que se espera ocurra la superfluidez depende del modelo que se utilice para la descripción de la interacción entre los neutrones y también de la teoría de muchos cuerpos que se emplee [122]. A las densidades de la corteza interna el sistema exhibe estructuras ricas y complejas que emergen de una competencia dinámica entre la atracción nuclear de corto alcance y la repulsión Coulombiana de largo alcance [6]. A las densidades más bajas que se presentan en la corteza externa, la red cristalina nuclear que existía antes se rompe, dejando una serie de vacíos en la estructura, y que se irán llenando a medida que la densidad se acerca a  $\rho_0$  [59]. Así, partiendo de  $0.1\rho_0$ , se presenta un cambio continuo en la dimensionalidad de la materia: desde los núcleos tridimensionales, pasando por cilindros nucleares bidimensionales, capas unidimensionales de núcleos intercalados con vacíos planos, vacíos cilíndricos bidimensionales, vacíos tridimensionales

hasta llegar a una eventual transición a la materia nucleónica uniforme<sup>13</sup> [10]. Estas estructuras complejas pueden tener un impacto significativo en la propagación de neutrinos y electrones a través de la estrella [6, 123].

### El núcleo exterior

El **núcleo exterior** comprende densidades en el rango  $0.5\rho_0 \lesssim \rho \lesssim 2\rho_0$  y está compuesto por neutrones superfluidos, protones superconductores y un gas de electrones [60, 61], de tal forma que la concentración de protones (que debe ser igual a la de electrones, ya que la estrella es eléctricamente neutra) es muy pequeña en comparación con la de neutrones<sup>14</sup> [25]. Además, si la densidad es mayor que la densidad de saturación nuclear y el potencial químico de los electrones  $\mu_e$  es mayor que la masa en reposo del muón,  $\mu_e > m_\mu c^2 = 105.7 \text{ MeV}$ , pueden también aparecer estas partículas, debido a que es más favorable energéticamente<sup>15</sup> [25].

La composición de la materia por debajo de la densidad umbral para que aparezcan muones está determinada por las condiciones de neutralidad eléctrica y equilibrio beta respecto a las reacciones 2.1. Estas condiciones de equilibrio se expresan como 2.2 y  $n_p = n_e$ , para la neutralidad eléctrica [29]. En presencia de muones, estas condiciones se convierten en  $n_p = n_e + n_\mu$ ,  $\mu_e = \mu_\mu$  y  $\mu_n = \mu_p + \mu_e$ , donde el plasma  $npe\mu$  es fuertemente degenerado, con lo que los electrones y muones forman gases de Fermi casi ideales, los electrones son ultrarrelativistas y los neutrones y protones constituyen un líquido de Fermi no-relativista y fuertemente no-ideal [8].

De esta forma, una estrella de neutrones tiene un núcleo líquido denso cubierto de una corteza sólida con una densidad inferior [1].

### El núcleo interior

La existencia del **núcleo interno** se presenta solamente para las estrellas más masivas, su densidad se encontraría entre 10 y 15 veces  $\rho_0$  y podría

<sup>13</sup>Esta sucesión de estructuras se denomina “pasta nuclear”: núcleos 3D (albóndigas)→núcleos cilíndricos 2D (spaghetti)→capas 1D de núcleos intercalados con vacíos planos (lasagna)→ vacíos cilíndricos 2D (ziti)→vacíos 3D (ravioli o queso suizo)→materia nuclear uniforme (salsa) [10].

<sup>14</sup>La abundancia de protones está entre 5 y 10 %.

<sup>15</sup>También podrían aparecer  $\pi^-$ , pero estas partículas presentan un potencial repulsivo en su interacción con los neutrones.

tener un radio de varios kilómetros [21, 63]. Su composición es desconocida, aunque existen diversas hipótesis:

1. Materia hiperónica: al crecer la densidad, los potenciales químicos de neutrones y electrones aumentan, posibilitando la aparición de materia hiperónica:  $\Sigma^-$  y  $\Lambda$  al principio, después  $\Xi^0$ ,  $\Xi^-$  y  $\Sigma^{+16}$  [44, 45].
2. Condensado de piones o kaones: se ha mostrado que para densidades del orden de  $\rho \simeq \rho_0$  puede presentarse un condensado de Bose-Einstein de kaones o piones [46]. El condensado se forma debido a que a medida que aumenta la densidad, la interacción fuerte entre los mesones y los nucleones se incrementa, lo que disminuye la energía del estado de momentum cero, con lo que la condensación ocurrirá cuando esta energía sea igual al potencial químico de los kaones o piones<sup>17</sup> [75, 124]. Esta situación ocurre a densidades  $\rho \sim 4\rho_0$ , con lo que, ya que esta densidad es menor que la correspondiente a las regiones centrales de las NS, se espera que el condensado ocurra en el núcleo de la estrella [49, 76]
3. Plasma de quarks: la tercera hipótesis plantea la aparición de quarks en estado libre. Debido a que los hadrones están conformados por estas partículas, a las densidades que se alcanzan en el núcleo los hadrones se encuentran tan comprimidos que los estados comienzan a solaparse, produciendo un gas de quarks deconfinados [23, 50].

La razón de analizar los contenidos de materia en las diferentes capas de las NS radica en que la materia a alta densidad juega un papel primordial en el enfriamiento de las estrellas de neutrones, que se realiza principalmente debido a la emisión de neutrinos. La emisión de neutrinos al interior de las NS puede ser clasificada como nuclear o leptónica. La emisión nuclear contiene procesos en que la emisión de neutrinos acompaña un grupo de reacciones nucleares, tales como las cadenas protón-protón o los ciclos CNO, y el proceso Urca, que será discutido más adelante. Por otro lado, los procesos leptónicos ocurren sin reacciones nucleares, sino debido a las interacciones electrodébiles, y entre ellos se encuentran la aniquilación de pares, los procesos de fotoneutrino y los decaimientos de plasmones.

---

<sup>16</sup>Para NS's lo suficientemente calientes, la carga bariónica se transfiere a los hiperones como una consecuencia del principio de Pauli, lo que disminuirá el potencial químico bariónico y por ende la energía, a través de reacciones como  $N + N \rightarrow N + \Lambda + K$ . [48]

<sup>17</sup>El potencial químico de los kaones,  $\mu_K$ , está dado por  $\mu_K = \mu_e = \mu_n - \mu_p$ , debido al equilibrio en las reacciones  $n \leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$  y  $n \leftrightarrow p + K^-$ .

---

## Capítulo 3

# Equilibrio, Ecuación de Estado y Perfil Densidad

En este capítulo se estudiarán las condiciones de equilibrio hidrostático de las NS, además de discutir algunas de las posibles ecuaciones de estado (EoS) de la materia al interior de estas estrellas, obtenidas para diferentes composiciones. A partir de estas EoS, se encontrarán propiedades como el perfil densidad de los modelos de estrella utilizados, las densidades de partículas al interior de la estrella y los momenta de Fermi de neutrones y protones.

El capítulo está organizado de la siguiente manera: en la sección 3.1, se obtienen las ecuaciones de Tolman, Oppenheimer y Volkoff (TOV), que describen el equilibrio hidrostático de una configuración esférica de materia en el marco de la Teoría General de la Relatividad. En la sección 3.2 se encuentran expresiones para las densidades de neutrones y protones al interior de la estrella, y para los momenta de Fermi de estas mismas partículas, en función de la densidad de la estrella. Posteriormente, se presenta una discusión cualitativa de ocho EoS para la materia densa de las NS, y se presentan los resultados de simulaciones numéricas que permiten calcular el perfil densidad, las densidades de neutrones y protones y los momenta de Fermi de estas mismas partículas, como funciones de la coordenada radial, medida desde el centro de la estrella. Finalmente, en la sección 3.3, se realiza una comparación de las características fundamentales del perfil densidad obtenido para las ocho EoS estudiadas.

### 3.1 Equilibrio Hidrostático de NS: la ecuación TOV

Las características globales de las NS, tales como la masa total, el radio, la relación entre estas últimas, el perfil densidad, las densidades de partículas, entre otras, se determinan a partir de las ecuaciones de equilibrio hidrostático, que corresponden a un modelo de una estrella aislada, esféricamente simétrica, no-rotante, no-magnética, etc [105].

En la relatividad general, un modelo de una estrella aislada generalmente consiste de una región interior llena de algún fluido, que es técnicamente hablando una solución de fluido perfecto<sup>1</sup> de la ecuación de campo de Einstein; y una región exterior que corresponde a una solución asintóticamente plana en el vacío [1]. Estas dos piezas deben cumplir las condiciones de frontera adecuadas en la superficie exterior de la estrella, donde la presión es nula.

#### 3.1.1 El espacio-tiempo de estrellas relativistas

En esta sección determinaremos las propiedades del espacio-tiempo para objetos esféricos, estáticos y no rotantes, por lo que buscaremos soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein en regiones isótropas del espacio-tiempo (tales como las que se encontrarán en las regiones internas y externas de las estrellas estáticas).

Debido a la altísima simetría de los objetos considerados, todos los elementos no diagonales del tensor métrico  $g^{\mu\nu}$  se anulan y, debido a los requerimientos estáticos para los campos gravitacionales, los componentes de  $g^{\mu\nu}$  serán funciones de la posición radial de un cascarón esférico, es decir, de la coordenada radial  $r$ , pero no del tiempo [1]. Bajo estas condiciones, la forma más general del elemento de línea será

$$d\tau^2 = U(r)dt^2 - V(r)dr^2 - W(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.1)$$

---

<sup>1</sup>En Relatividad General, un fluido perfecto se define como un fluido que no tiene viscosidad ni conduce el calor [62]. En cada punto, el fluido perfecto tiene una velocidad  $\mathbf{v}$ , de tal forma que un observador que se mueva con esta velocidad ve un fluido isótropo a su alrededor. Esto ocurriría si la trayectoria libre media entre las colisiones fuera pequeña en comparación con la escala de longitud utilizada por el observador [125]. El tensor de momento-energía para un fluido perfecto es de la forma  $T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P(\eta_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu)$ , donde  $P$  y  $\rho$  son la presión y densidad de energía propia, y  $u^\mu$  es la quadri-velocidad del fluido [126].

---



Ya que podemos reemplazar la coordenada radial por cualquier función de  $r$  sin alterar la simetría esférica, podemos escribir la ecuación (3.1) en la forma

$$d\tau^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.2)$$

donde  $\nu(r)$  y  $\lambda(r)$  son funciones sólo de  $r$ , que estarán unívocamente determinadas por el perfil densidad de la estrella,  $\rho(r)$  [1].

Podemos además definir la masa total dentro de un cascarón de radio  $r$  en la forma Newtoniana usual

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', \quad (3.3)$$

donde la integración de volumen no se realiza con el elemento de volumen propio,  $dV = 4\pi r^2 e^{2\lambda(r)} dr$ , sino con un elemento de volumen algo reducido [48].

La estructura completa de una estrella compacta está determinada por las llamadas ecuaciones TOV (Tolman-Oppenheimer-Volkoff), que describen la dependencia con la coordenada radial de la densidad de masa-energía  $\rho$  y la presión  $P$  [20, 1, 62]. Las ecuaciones TOV se deducen detalladamente en el apéndice A

$$\begin{aligned} \frac{dM(r)}{dr} &= 4\pi\rho(r)r^2, \\ \frac{dP(r)}{dr} &= -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} \left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)c^2}\right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)c^2}\right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

A partir de estas ecuaciones, vemos que la masa total dentro de un cascarón de radio  $r$  determina el equilibrio hidrostático, salvo por las siguientes cuatro correcciones [20, 1]:

- La densidad de masa  $\rho_0$  debe reemplazarse por la densidad de masa-energía  $\rho$ .
- La densidad de masa inercial está dada por  $\rho c^2 + P$ , que corresponde al primer término de corrección en la ecuación (3.4).
- La presión es un factor de corrección significativo del volumen (segundo factor de corrección en (3.4)).

- La métrica del 3-espacio aparece en el último factor de (3.4), y determina las propiedades de estabilidad de las soluciones.

La solución de las ecuaciones TOV depende de la relación entre la presión  $P$  y la densidad  $\rho$ , es decir, de la ecuación de estado (EoS) para la materia al interior de la estrella. Una vez que se ha fijado la EoS, las ecuaciones pueden resolverse con las condiciones iniciales  $M(0) = 0$  y  $\rho(0) = \rho_c$ , donde  $\rho_c$  es la densidad central, y la condición de frontera  $P(R) = 0$ , donde  $R$  es el radio de la estrella [1]. Así, para cada una de las posibles EoS, existe una única familia de estrellas parametrizadas por la densidad central [38].

## 3.2 Algunas Ecuaciones de Estado (EoS) para la materia al interior de las NS

Las características de equilibrio hidrostático al interior de las NS están determinadas por la solución de las ecuaciones TOV, obtenidas en la sección anterior. Ya que las propiedades físicas de una NS (tales como la relación masa-radio, el tamaño de la corteza, el momento de inercia o la densidad central) dependen de su composición, es de esperar que la solución de las ecuaciones TOV sea sensible únicamente a la **Ecuación de Estado (EoS)** de la materia rica en neutrones al interior de la estrella [6]. De esta forma, ya que la tasa de cambio de la presión  $P(r)$  y la masa  $M(r)$  dentro de un cascarón esférico de radio  $r$  dependen de la densidad de energía  $\rho(r)$ , ecuación (3.4), se hace imposible resolver las ecuaciones TOV sin que se conozca una relación entre  $P(r)$  y  $\rho(r)$ , es decir, una EoS.

La EoS de la materia nuclear describe cómo la densidad de energía y la presión varían con la densidad y la temperatura, y puede además describir diferentes fases de la materia nuclear, desde el estado gaseoso y la estructura de núcleos líquidos hasta la transición hacia el deconfinamiento [26]. La EoS se obtiene a partir de la composición de la materia densa en la estrella, sobre la cual existe muy poca información disponible:

- ¿dónde se localizan las transiciones de fase entre la materia compuesta de neutrones, protones y electrones y aquella compuesta de hadrones más masivos, como hiperones [23, 48]?
- Hay un consenso global sobre la conversión de la materia nuclear a su estructura de quarks, pero, ¿a qué densidad [50, 78]?

- ¿ocurre realmente la condensación de mesones (piones, kaones) [49, 75, 76, 124]?

Varias ecuaciones de estado han sido analizadas con miras a investigar las consecuencias observacionales de la composición de la materia densa [34, 127], y las masas máximas y radios predichos por estos modelos son muy diferentes [2]. La obtención de una EoS, y por ende de un modelo de estrella, depende fundamentalmente del tipo de interacción entre sus partículas constituyentes, un aspecto sobre el cual no se tiene información experimental confiable en el momento [39], con lo que todos los cálculos envuelven o bien extrapolaciones sobre datos experimentales conocidos, o predicciones basadas en la teoría de campos [27, 36, 60].

Es por esto que se hace necesario el cálculo de perfiles de densidad para diferentes modelos de estrellas, que diferirán en parámetros como la densidad central, la masa total o el radio. Estos perfiles de densidad determinarán a su vez cantidades adicionales, como las densidades de partículas al interior de la estrella (neutrones, protones), y los momenta de Fermi de estas partículas. Finalmente la evolución térmica de la estrella dependerá también de la distribución de materia en la estrella, como veremos en el siguiente capítulo.

### 3.2.1 Determinación de densidades de partículas y momenta de Fermi

#### Consideraciones preliminares

Para encontrar las densidades de neutrones y protones al interior de la estrella, partimos de la condición de equilibrio beta al interior de la estrella:

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e,$$

donde, a orden  $(kT/\mu_n)^2$  los potenciales químicos de las partículas son iguales a las energías de Fermi,  $E_{Fn} = E_{Fp} + E_{Fe}$ , donde el subíndice  $F$  indica “de Fermi” y  $n, p, e$  representan al neutrón, protón y electrón, respectivamente [19, 20, 98].

A las densidades nucleares, los nucleones son no-relativistas, mientras que el electrón sí lo es, con lo que tendremos

$$E_{Fn} = m_n c^2 + \frac{p_{Fn}^2}{2m_n}, \quad E_{Fp} = m_p c^2 + \frac{p_{Fp}^2}{2m_p}, \quad E_{Fe} = p_{Fe} c, \quad (3.5)$$

donde  $p_{Fi}$ , con  $i = n, p, e$ , es el momento de Fermi de la partícula correspondiente [66, 104].

Debido a la neutralidad eléctrica de la estrella, la densidad de protones debe ser igual a la de electrones, con lo que, ya que la densidad de partículas es proporcional al momento de Fermi al cubo ( $n_i = \frac{8\pi p_{Fi}^3}{3h^3}$ ) [128], con  $h$  la constante de Planck, debemos tener que  $p_{Fp} = p_{Fe}$ , con lo que, reemplazando en las ecuaciones (3.5), obtenemos

$$\frac{p_{Fn}^2}{2m_n} = p_{Fe}c \left( 1 + \frac{p_{Fe}}{2m_p c} \right) - (m_n - m_p)c^2. \quad (3.6)$$

Definimos  $Q = (m_n - m_p)c^2 = (939.566 - 938.272)MeV = 1.294MeV$ , que es un valor pequeño en comparación con los otros términos de la ecuación anterior<sup>2</sup>. De esta forma, la energía cinética del neutrón,  $E'_{Fn} \equiv \frac{p_{Fn}^2}{2m_n}$ , será equivalente a la energía de Fermi del electrón<sup>3</sup>,  $E_{Fe} = p_{Fe}c$ , con lo que tendremos finalmente las desigualdades [71]

$$p_{Fe} = p_{Fp} \ll p_{Fn}, \quad E'_{Fp} \ll E'_{Fn}. \quad (3.7)$$

La fracción de protones  $x_p$  al interior de la estrella está dada por

$$x_p = \frac{n_p}{n_p + n_n},$$

donde  $n_p$  y  $n_n$  son las densidades de protones y neutrones, respectivamente. Debido a la desigualdad triangular,  $p_{Fp} + p_{Fe} \geq p_{Fn}$ , y a la condición de neutralidad eléctrica ( $p_{Fe} = p_{Fp}$ ), tenemos que  $2p_{Fp} \geq p_{Fn}$ , con lo que  $8p_{Fp}^3 \geq p_{Fn}^3$ , lo que, en términos de las densidades, corresponde a  $8n_p \geq n_n$ . Así, la condición de equilibrio beta, escrita en términos de la fracción de protones

---

<sup>2</sup>Las temperaturas en las NS son mucho menores que las temperaturas de Fermi de las partículas constituyentes, con lo que las partículas que participan en las reacciones  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$  y  $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$  deben tener energías que yacen dentro de un intervalo de longitud  $\sim kT$  de sus respectivas energías de Fermi [19]

<sup>3</sup>A primer orden en  $p_{Fe}$ .

$x_p$  se obtiene como

$$\begin{aligned}
 8n_p &\geq n_n, \\
 9n_p &\geq n_n + n_p, \\
 \frac{1}{9n_p} &\leq \frac{1}{n_n + n_p}, \\
 \frac{1}{9} &\leq \frac{n_p}{n_n + n_p} = x_p, \\
 x_p &\geq \frac{1}{9}.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

De esta forma, para que el equilibrio beta al interior de la estrella se mantenga, la fracción de protones debe ser, como mínimo, 11.1 % [57].

### Densidad de neutrones

Si definimos  $n_n$ ,  $n_p$  y  $n_e$  como las densidades de neutrones, protones y electrones, respectivamente, podremos obtener la densidad de materia a partir de la expresión [19]

$$\begin{aligned}
 \rho &= m_n n_n + m_p n_p + m_e n_e, \\
 \rho &= m_n n_n \left( 1 + \frac{m_p}{m_n} \frac{n_p}{n_n} + \frac{m_e}{m_n} \frac{n_e}{n_n} \right).
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ya que, como vimos anteriormente, la fracción de protones bajo la condición de equilibrio beta corresponde al 11.1 % de masa bariónica de la estrella, y la masa del electrón es muy pequeña comparada con la del neutrón, podemos despreciar los últimos dos términos de la ecuación (3.9) para obtener [19]

$$\rho \approx m_n n_n. \tag{3.10}$$

De no despreciar estos términos, la densidad mínima de la estrella estaría dada por

$$\rho_{min} = m_n n_n \left[ 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{m_p}{m_n} + \frac{m_e}{m_n} \right) \right],$$

con lo que el valor mínimo de la densidad de la estrella sería  $1.1249m_n n_n$ , con lo que el porcentaje de error del resultado (3.10) es de por lo menos 12.49 %. A partir de la ecuación (3.10) obtenemos la densidad de neutrones como

$$n_n = \frac{\rho}{m_n} = \frac{\rho_0}{m_n} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right).$$

Así, la densidad de neutrones estará dada por

$$n_n = 1.672 \times 10^{38} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \text{ cm}^{-3}. \quad (3.11)$$

Para llegar a esta última expresión se han introducido los valores de la densidad nuclear estándar,  $\rho_0 = 2.8 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$  y de la masa del neutrón.

### Momentum de Fermi del neutrón

El momentum de Fermi se calcula a partir de la relación

$$p_{Fi} = \left( \frac{3h^3 n_i}{8\pi} \right)^{1/3}, \quad (3.12)$$

y usando la ecuación (3.11), con lo que se obtiene [19]

$$p_{Fn} = (337.206 \text{ MeV}/c) \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/3}. \quad (3.13)$$

### Momenta de Fermi de protón y electrón

Los momenta de Fermi de estas partículas se obtienen a partir de la ecuación (3.7) [19]:

$$p_{Fe} = p_{Fp} = \frac{p_{Fn}^2}{2m_n c} = (60.51086 \text{ MeV}/c) \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3}. \quad (3.14)$$

### Densidades de protones y electrones

Estas densidades se calculan a partir de la relación

$$n_i = \frac{8\pi p_{Fi}^3}{3h^3},$$

con lo que tenemos [19]

$$n_p = n_e = (9.563 \times 10^{35} \text{ cm}^{-3}) \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2. \quad (3.15)$$


---

A continuación se presenta una discusión cualitativa de un conjunto de ocho EoS, relevantes para el análisis de la estructura de las NS en cuanto a la diversidad de las composiciones de materia al interior de estos objetos astrofísicos. Para cada una de las EoS, se incluye una breve descripción de la composición de partículas que considera el modelo, al igual que de las interacciones nucleares que se presentan en el modelo de estrella. Las gráficas del perfil densidad se obtuvieron a partir de la interpolación numérica a través del método de los polinomios de Lagrange, tal y como se explica en el apéndice B, en el que se presenta también el código fuente del programa, escrito en C++, con el que se realizó la interpolación numérica. A partir de este perfil se calculan las densidades de partículas y momenta de Fermi, usando los programas que se presentan en el mismo apéndice.

### 3.2.2 Ecuación de Pandharipande (neutrones)

Pandharipande [40] estudió el comportamiento de la materia neutrónica densa usando una teoría de muchos cuerpos basada en el tratamiento variacional sugerido por Jastrow<sup>4</sup> en el que la función de onda de dos cuerpos se tomó como una solución de una ecuación de Bethe-Goldstone simplificada<sup>5</sup>, y en la que se reemplazaron los términos que representan el principio de exclusión de Pauli por ligaduras en la función de onda [40].

Para describir la interacción nuclear, Pandharipande utilizó el potencial de interacción nucleón-nucleón de Reid<sup>6</sup>, que no describe por completo las propiedades actualmente conocidas de la materia nuclear [131].

El perfil densidad, obtenido a partir de la interpolación numérica de los datos presentados en [16], se muestra en la figura 3.1.

---

<sup>4</sup>El método variacional de Jastrow consiste en buscar una solución de prueba para el problema de los  $N$  cuerpos, construida a partir de funciones de onda de dos partículas. Usando este tratamiento los valores esperados, que no pueden escribirse como productos de integrales sobre el espacio de fase de una sola partícula, son calculados a partir de un desarrollo en serie de potencias de la densidad del medio [129].

<sup>5</sup>La ecuación de Bethe-Goldstone es simplemente la ecuación de Schrödinger para dos fermiones en un gas de Fermi, donde el principio de Pauli prohíbe la aparición de estados intermedios que ya estén ocupados por otros fermiones. Ya que el par interactuante se encuentra inicialmente en el mar de Fermi, no puede realizar transiciones reales. Sin embargo, sí puede realizar transiciones virtuales a todos los estados por fuera del mar de Fermi [130]

<sup>6</sup>El potencial de interacción de Reid tiene un núcleo repulsivo suave, que se determina, en cada estado de dos nucleones, de forma independiente de los otros estados [131].

---

3.2. ALGUNAS ECUACIONES DE ESTADO (EOS) PARA LA MATERIA AL INTERIOR DE LAS NS

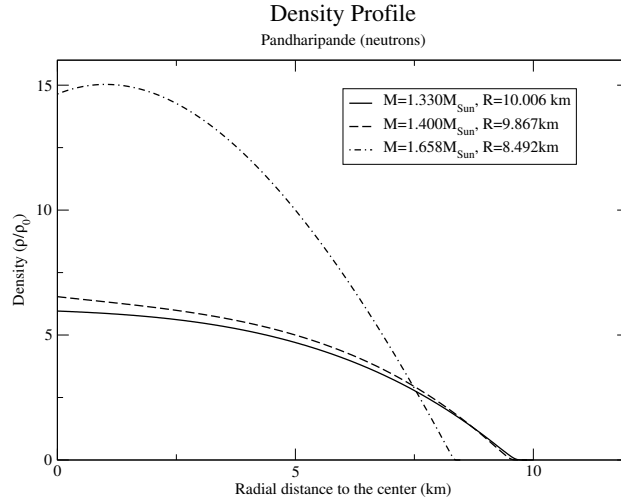


Figura 3.1: Interpolación del perfil densidad usando la EoS de Pandharipande (neutrones).

Las densidades de neutrones y protones, calculadas a partir de las ecuaciones (3.11) y (3.15), y usando el modelo de programa presentado en B.2, se presentan en la figura 3.2.

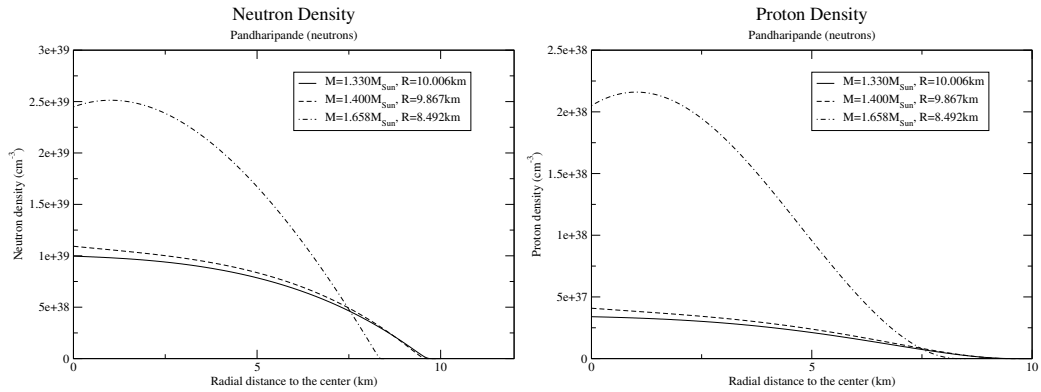


Figura 3.2: Densidad de neutrones (izquierda) y protones (derecha) para la EoS de Pandharipande (neutrones).



Finalmente, los momenta de Fermi del neutrón y el protón, obtenidos para esta EoS se muestran en la figura 3.3. Esta gráfica se obtuvo a partir de las ecuaciones (3.13) y (3.14), y usando el algoritmo presentado en la figura B.3.

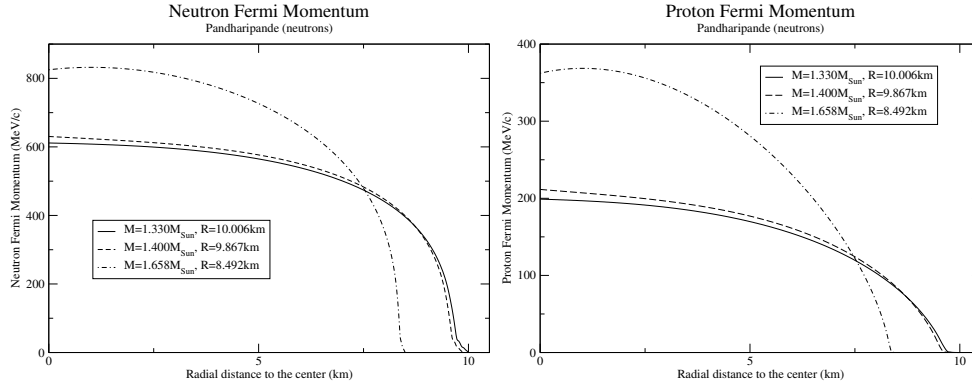


Figura 3.3: Momenta de Fermi del neutrón (izquierda) y del protón (derecha) para la EoS de Pandharipande (neutrones).

### 3.2.3 Ecuación de Pandharipande (hiperones)

La posibilidad que los hiperones hagan parte también de la materia bariónica al interior de las NS fue propuesta inicialmente por Ambartsumyan y Saakyan [132], quienes demostraron que, al aumentar la densidad de materia, aparecerán en número creciente y de forma sucesiva hiperones del tipo  $\Lambda$ ,  $\Sigma^{\pm,0}$ .

Esta nueva EoS de Pandharipande trata de determinar las propiedades de un líquido bariónico compuesto de neutrones, protones e hiperones, interactuantes a través de un potencial hiperónico similar al de la interacción nucleón-nucleón, pero con las modificaciones necesarias para incluir los diferentes estados de isospín [41].

El perfil densidad, las densidades de neutrones y protones, y los momenta de Fermi del neutrón y el protón obtenidos para esta EoS se muestran en las figuras 3.4, 3.5 y 3.6, respectivamente.

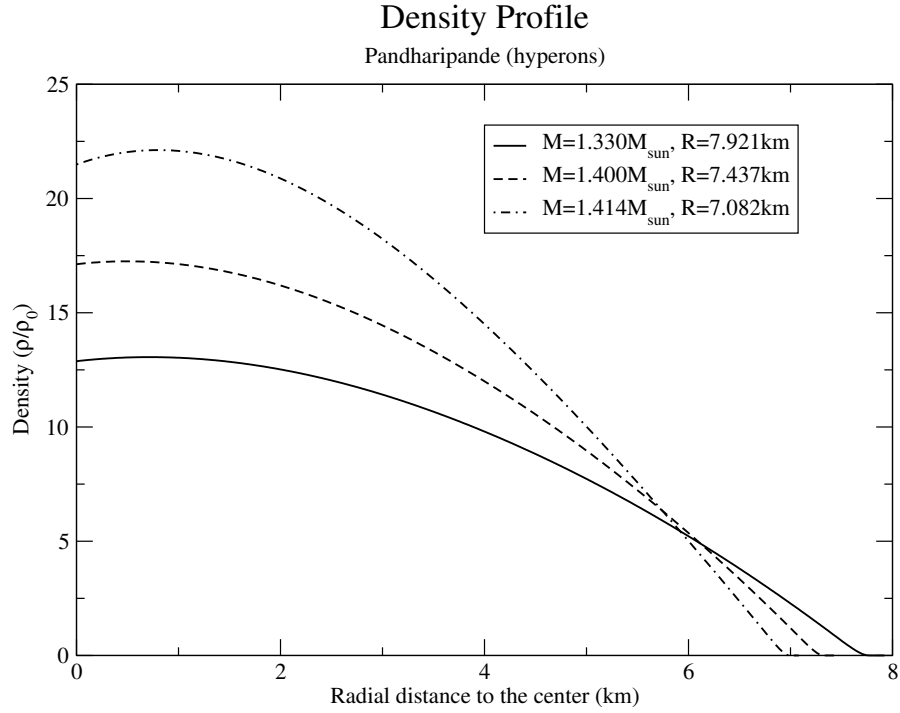


Figura 3.4: Interpolación del perfil densidad usando la EoS de Pandharipande (hiperones).

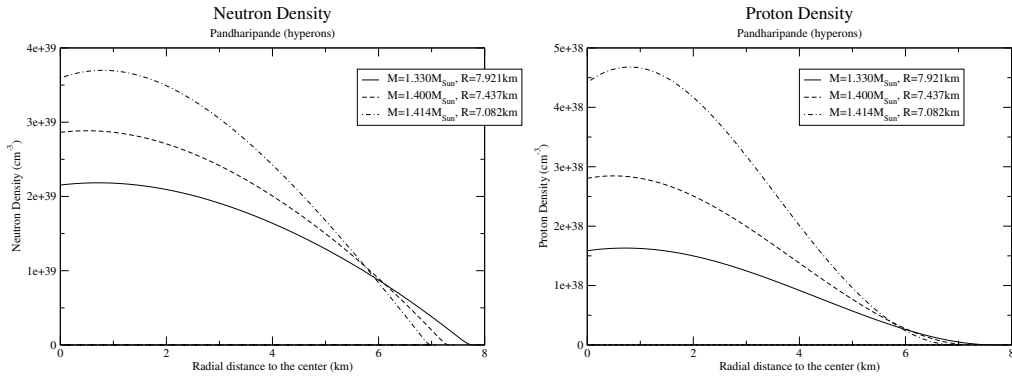


Figura 3.5: Densidad de neutrones (izquierda) y protones (derecha) para la EoS de Pandharipande (hiperones).

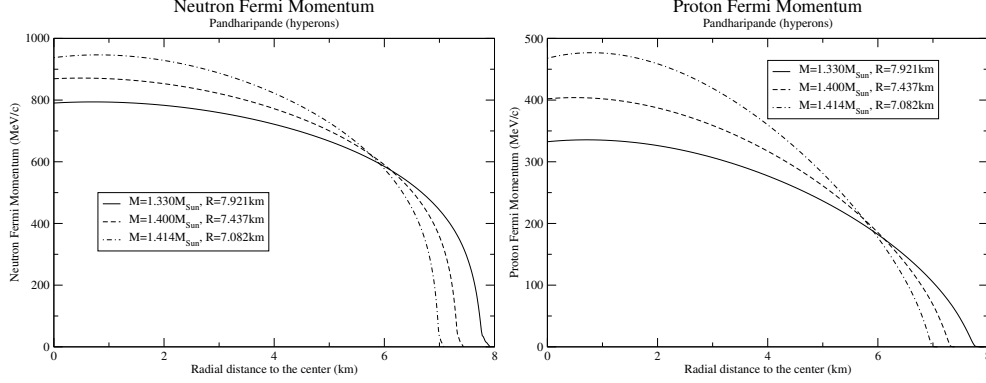


Figura 3.6: Momenta de Fermi del neutrón (izquierda) y del protón (derecha) para la EoS de Pandharipande (hiperones).

### 3.2.4 Ecuación de Bethe-Jhonson V

La EoS de Bethe y Jhonson está basada en el desarrollo de potenciales fenomenológicos que tengan un comportamiento a corto rango más realista que el del potencial de Reid. La EoS para la materia al interior de las NS se calcula usando un método variacional similar al de Pandharipande, en el que se determina primero la EoS para un gas compuesto sólo de neutrones, para después derivar una EoS hiperónica [53].

El perfil densidad, obtenido a partir de la interpolación numérica de los datos presentados en [16], se muestra en la figura 3.7.

Las densidades de neutrones y protones, calculadas a partir de las ecuaciones (3.11) y (3.15), y usando el modelo de programa presentado en B.2, se presentan en la figura 3.8.

Finalmente, los momenta de Fermi del neutrón y el protón, obtenidos para esta EoS se muestran en la figura 3.9, respectivamente. Esta gráfica se obtuvo a partir de las ecuaciones (3.13) y (3.14), y usando el algoritmo presentado en la figura B.3.

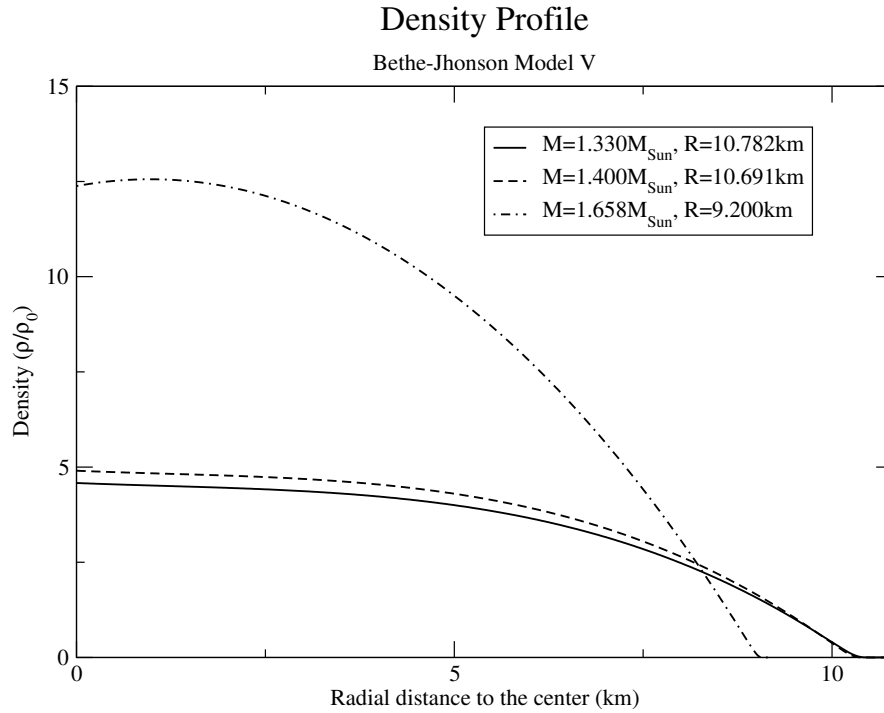


Figura 3.7: Interpolación del perfil densidad usando la EoS de Bethe-Jhonson V.

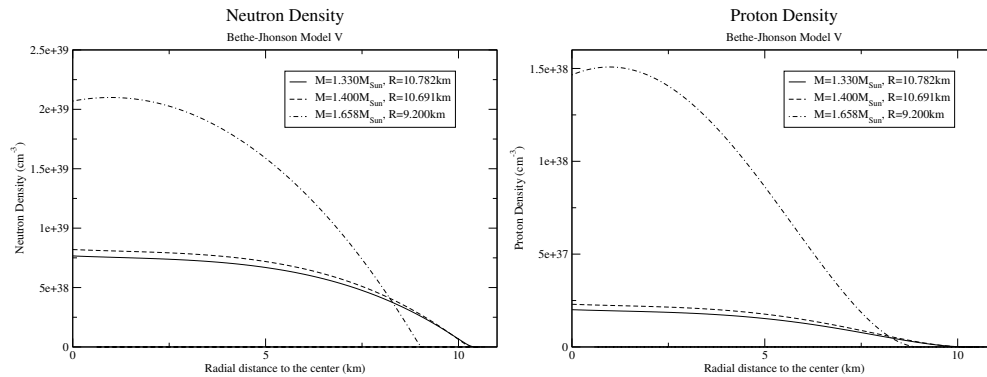


Figura 3.8: Densidad de neutrones (izquierda) y protones (derecha) para la EoS de Bethe-Jhonson V.

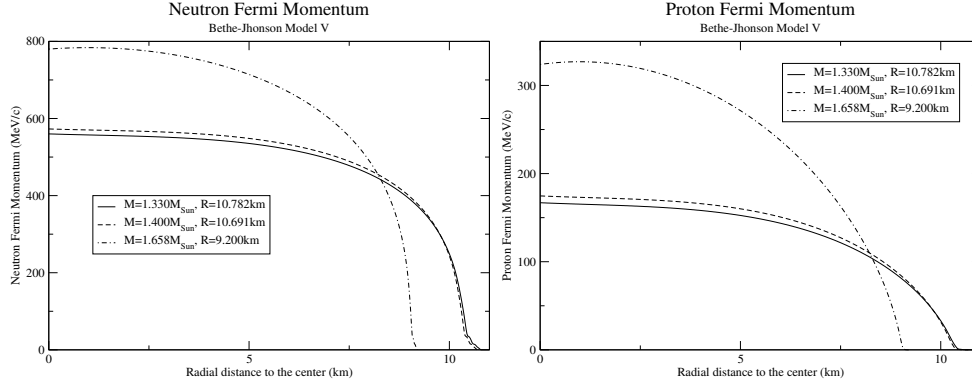


Figura 3.9: Momenta de Fermi del neutrón (izquierda) y del protón (derecha) para la EoS de Bethe-Jhonson V.

### 3.2.5 Ecuación de Walecka

Se sabe que el intercambio de mesones escalares y vectoriales entre los nucleones proporciona la repulsión de corto rango y la atracción de rango intermedio en el potencial de interacción nucleón-nucleón [79].

De esta forma, la interacción efectiva estará caracterizada por los parámetros mesónicos, tales como sus masas y constantes de acople, con lo que al conocer estos parámetros pueden obtenerse las funciones de onda de los mesones como una función de la densidad (asumiendo que sean independientes de las coordenadas de espacio y tiempo) [33]. A partir de esto puede obtenerse el tensor de momento-energía, y a partir de éste, calcular la EoS. Walecka [54], en 1974, encontró los parámetros mesónicos que reproducen la energía de enlace de la materia nuclear<sup>7</sup>, y a partir de allí calculó un modelo de EoS para la materia compuesta únicamente de neutrones. En este modelo, se asume que tanto los mesones escalares como los vectoriales tienen isoespín cero.

El perfil densidad, las densidades de neutrones y protones, y los momenta de Fermi del neutrón y el protón, obtenidos para esta EoS se muestran en las figuras 3.10, 3.11 y 3.12, respectivamente.

<sup>7</sup>Que se asumía como  $-15.75 \text{ MeV/nucleón}$  a una densidad de saturación nuclear de  $0.193 \text{ nucleones } \text{fm}^{-3}$

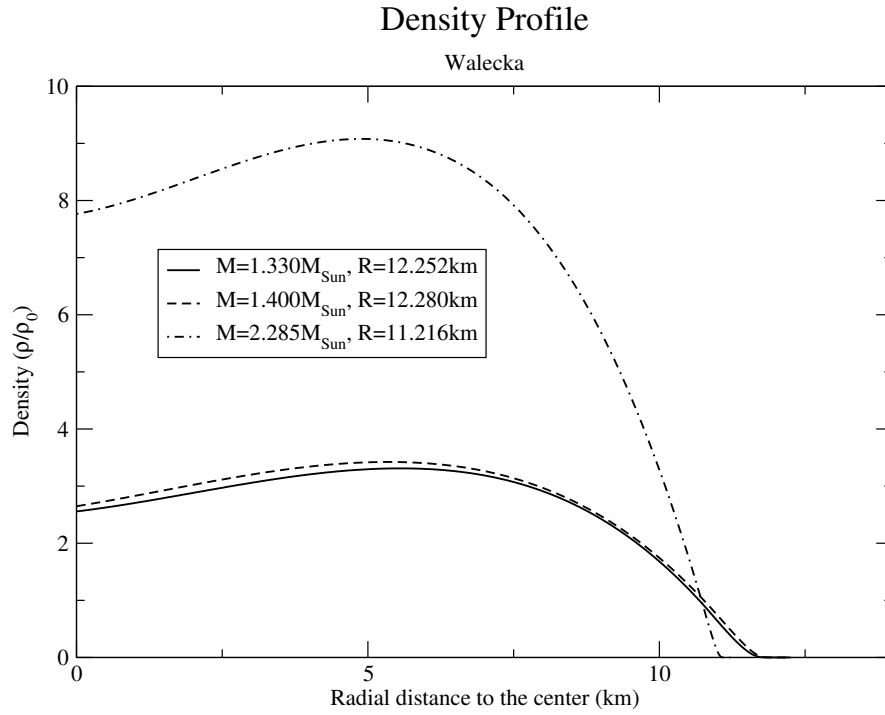


Figura 3.10: Interpolación del perfil densidad usando la EoS de Walecka.

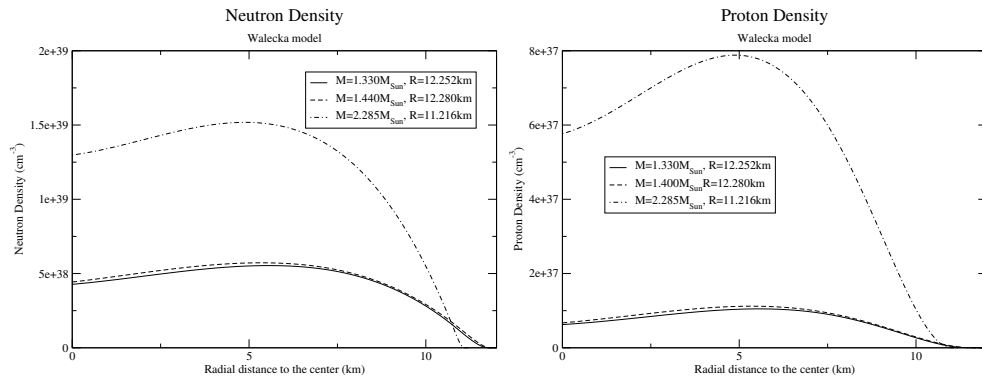


Figura 3.11: Densidad de neutrones (izquierda) y protones (derecha) para la EoS de Walecka.

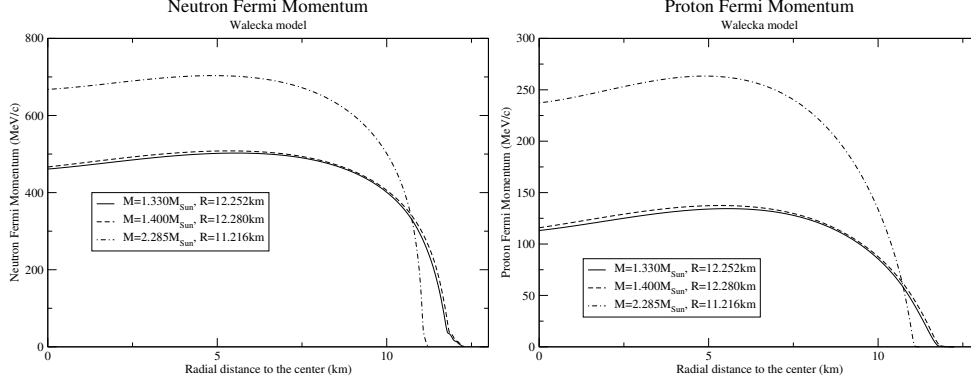


Figura 3.12: Momenta de Fermi del neutrón (izquierda) y del protón (derecha) para la EoS de Walecka.

### 3.2.6 Ecuación de Friedman-Pandharipande

Friedman y Pandharipande [55] encontraron una EoS para un gas denso de neutrones basados en un método variacional ligado de primer orden, pero en vez de usar el modelo de interacción de Reid, usaron un potencial de interacción nucleón-nucleón (fenomenológico) que contenía correlaciones tanto de dos como de tres cuerpos. Este tipo de interacción ajusta los datos de secciones eficaces de dispersión nucleón-nucleón, las propiedades del deuterón y también algunas de las propiedades más representativas de la materia nuclear [55].

El perfil densidad, obtenido a partir de la interpolación numérica de los datos presentados en [16], se muestra en la figura 3.13.

Las densidades de neutrones y protones, calculadas a partir de las ecuaciones (3.11) y (3.15), y usando el modelo de programa presentado en B.2, se presentan en la figura 3.14.

Finalmente, los momenta de Fermi del neutrón y el protón, obtenidos para esta EoS se muestran en la figura 3.15, respectivamente. Esta gráfica se obtuvo a partir de las ecuaciones (3.13) y (3.14), y usando el algoritmo presentado en la figura B.3.

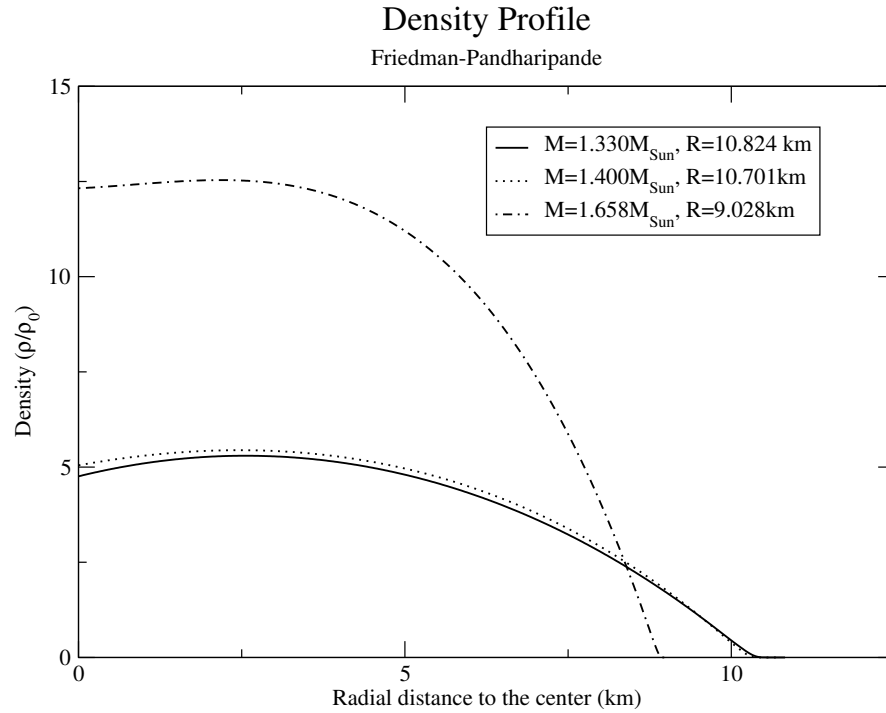


Figura 3.13: Interpolación del perfil densidad usando la EoS de Friedman-Pandharipande.

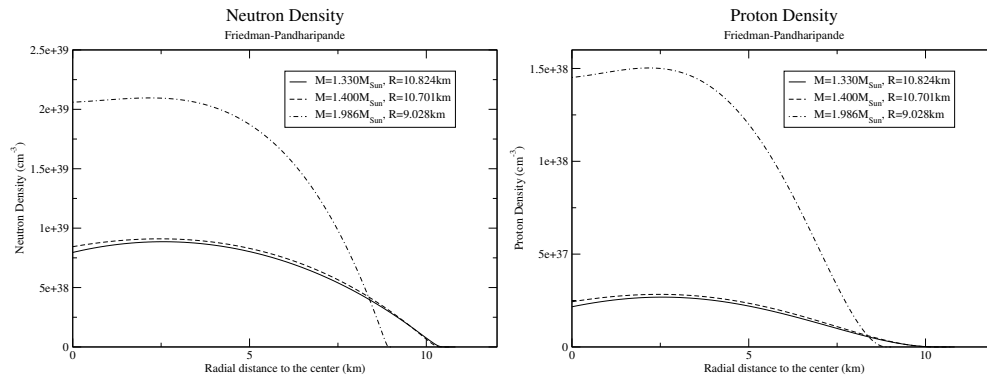


Figura 3.14: Densidad de neutrones (izquierda) y protones (derecha) para la EoS de Friedman-Pandharipande.



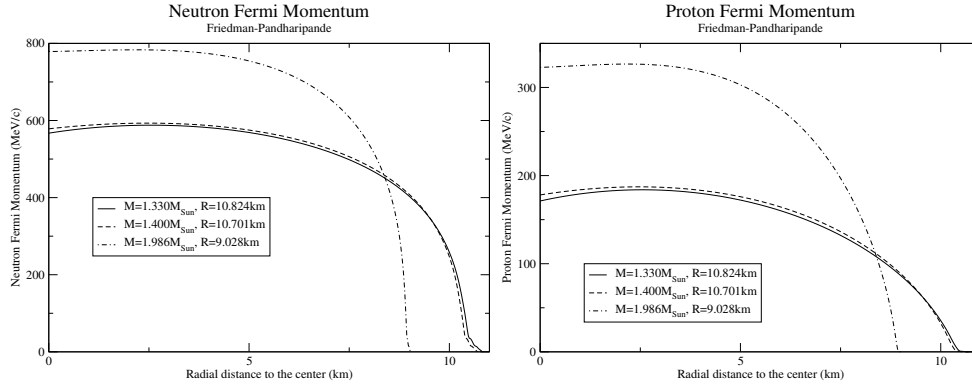


Figura 3.15: Momenta de Fermi del neutrón (izquierda) y del protón (derecha) para la EoS de Friedman-Pandharipande.

### 3.2.7 Ecuación de Wiringa, Fiks y Fabrocini

Estos autores desarrollaron un modelo de EoS para la materia nuclear neutrónica que involucra interacciones a tres cuerpos, con un modelo no-relativista basado en un método variacional [56]. El potencial de interacción a tres cuerpos considerado por los autores incluye términos repulsivos de largo alcance, que se han ajustado para obtener los valores correctos de las energías de enlace nucleares y de las propiedades de saturación de la materia nuclear. En su artículo, los autores proponen tres modelos de EoS. En este trabajo sólo se utiliza el modelo de EoS compuesto por neutrones, electrones, protones y muones, llamado por ellos UV14+UVII.

El perfil densidad, las densidades de neutrones y protones, y los momenta de Fermi del neutrón y el protón, obtenidos para esta EoS se muestran en las figuras 3.16, 3.17 y 3.18, respectivamente.

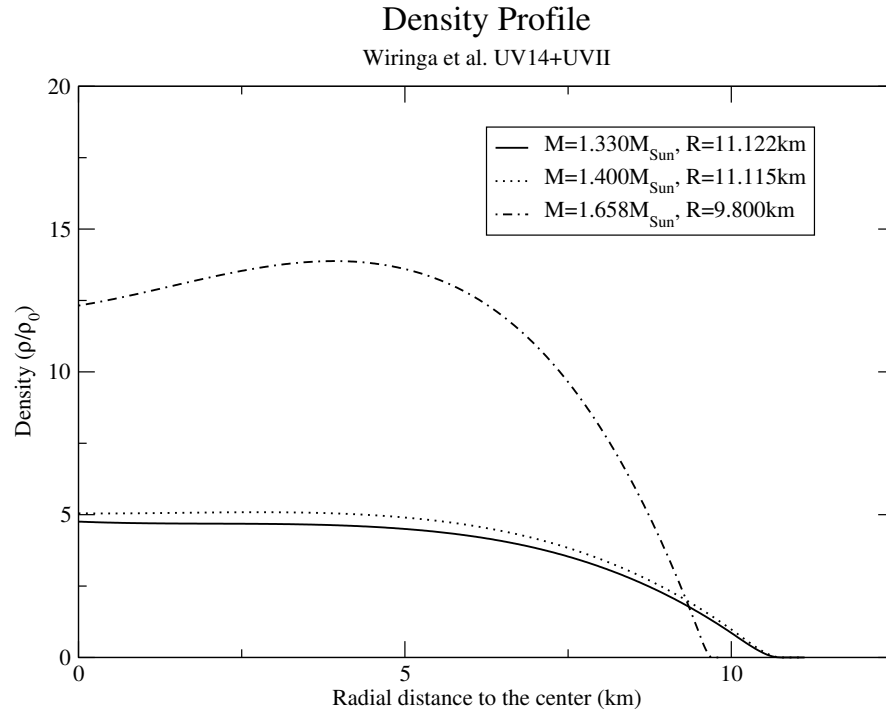


Figura 3.16: Interpolación del perfil densidad usando la EoS de Wiringa.

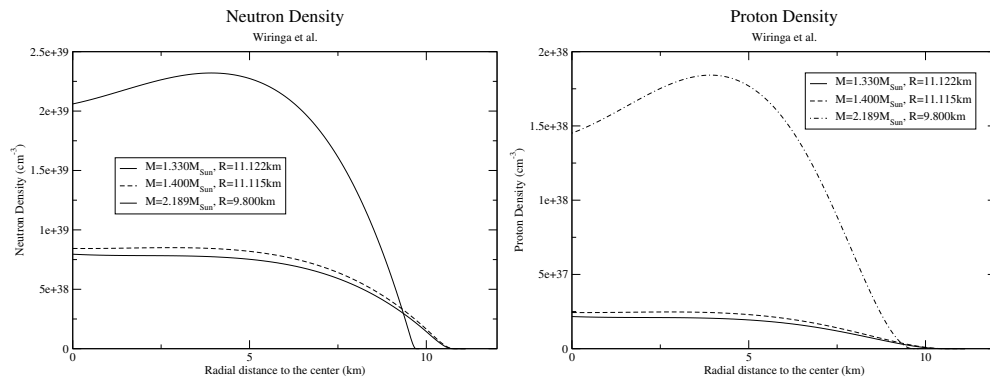


Figura 3.17: Densidad de neutrones (izquierda) y protones (derecha) para la EoS de Wiringa.

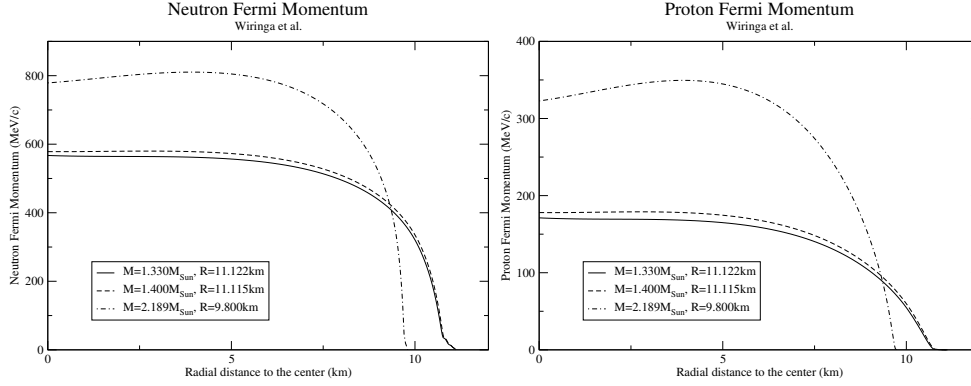


Figura 3.18: Momenta de Fermi del neutrón (izquierda) y del protón (derecha) para la EoS de Wiringa.

### 3.2.8 Ecuación de Prakash, Ainsworth y Lattimer

Prakash, Ainsworth y Lattimer propusieron modelos de EoS para NS basados en una extrapolación de la energía por partícula que se presenta en la materia nuclear simétrica [57]. El tratamiento de los autores es empírico e involucra varios parámetros, pero las energías totales se obtienen por la inclusión de la energía cinética de los nucleones y del efecto de las fuerzas finitas entre los nucleones.

Los autores proponen cuatro modelos de EoS, pero en este trabajo se incluye solamente uno de ellos (el modelo 1) [57].

El perfil densidad, obtenido a partir de la interpolación numérica de los datos presentados en [16], se muestra en la figura 3.19.

Las densidades de neutrones y protones, calculadas a partir de las ecuaciones (3.11) y (3.15), y usando el modelo de programa presentado en B.2, se presentan en la figura 3.20.

Finalmente, los momenta de Fermi del neutrón y el protón, obtenidos para esta EoS se muestran en la figura 3.21, respectivamente. Esta gráfica se obtuvo a partir de las ecuaciones (3.13) y (3.14), y usando el algoritmo presentado en la figura B.3.

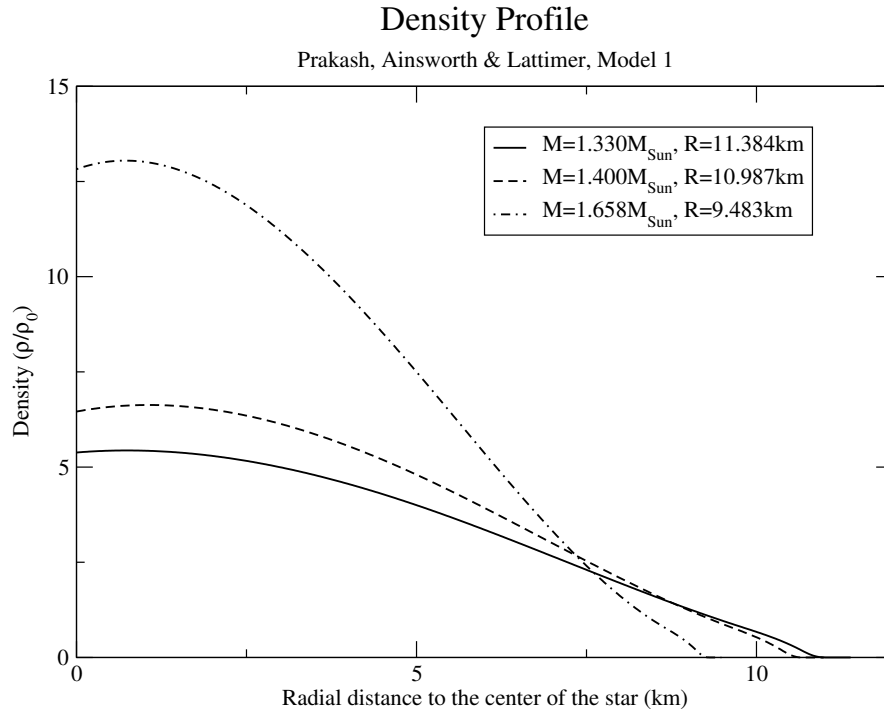


Figura 3.19: Interpolación del perfil densidad usando la EoS de Prakash.

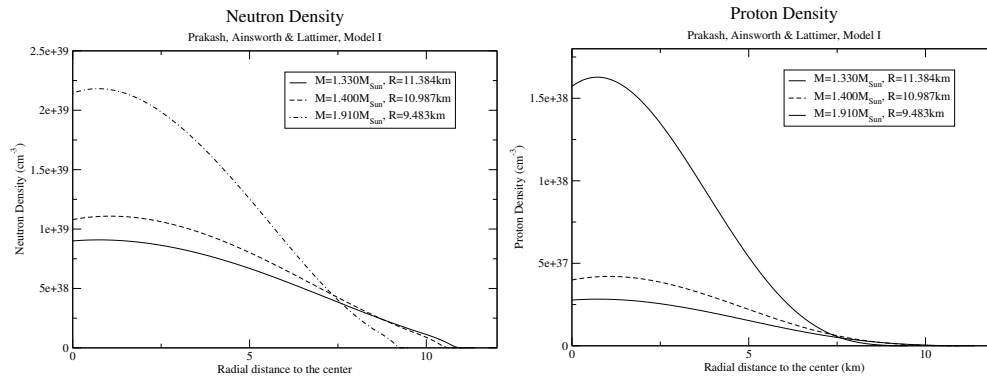


Figura 3.20: Densidad de neutrones (izquierda) y protones (derecha) para la EoS de Prakash.

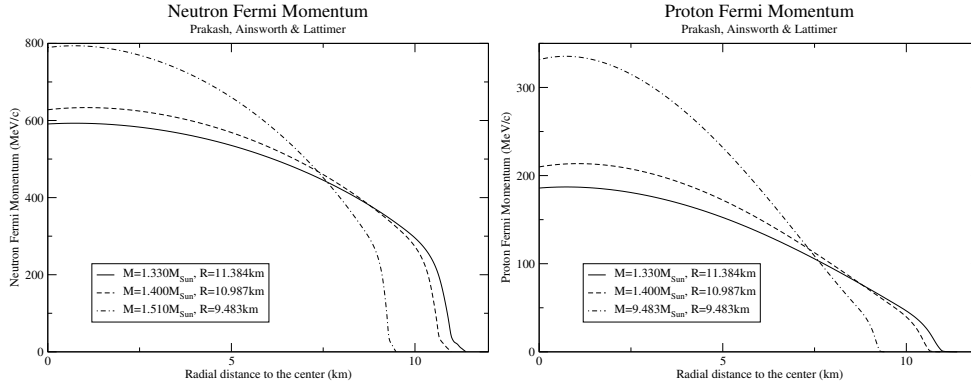


Figura 3.21: Momenta de Fermi del neutrón (izquierda) y del protón (derecha) para la EoS de Prakash.

### 3.2.9 Ecuación de Sahu, Basu y Datta

Estos autores desarrollaron un modelo de teoría de campos para la EoS de la materia rica en neutrones en equilibrio beta, basados en el modelo quirral sigma [15]. El modelo incluye un campo vectorial isoescalar generado en forma dinámica, que reproduce los valores empíricos de la densidad de saturación de la materia nuclear, de la energía de enlace y también del coeficiente de simetría de isoespín para la materia nuclear asimétrica [15].

El perfil densidad, las densidades de neutrones y protones, y los momenta de Fermi del neutrón y el protón, obtenidos para esta EoS se muestran en las figuras 3.22, 3.23 y 3.24, respectivamente.

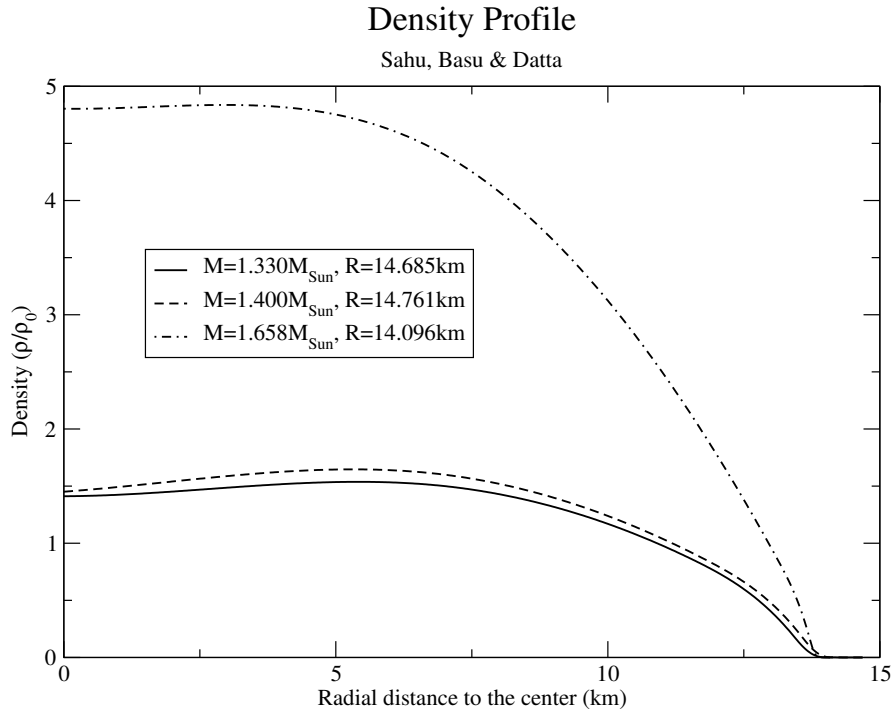


Figura 3.22: Interpolación del perfil densidad usando la EoS de Sahu, Basu y Datta.

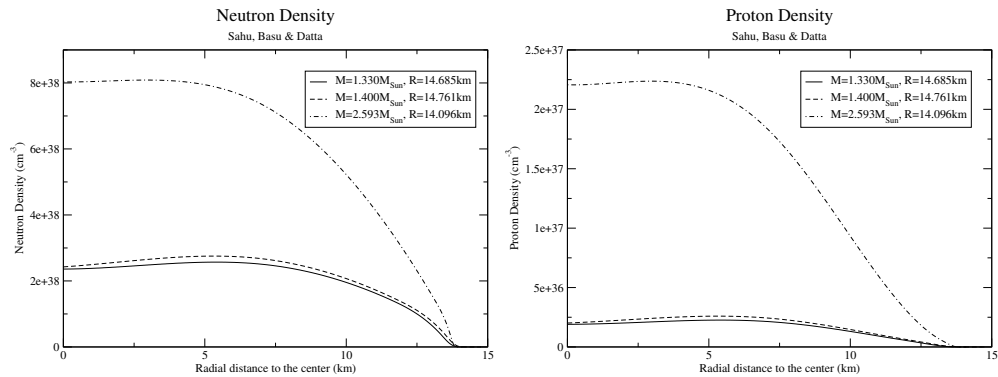


Figura 3.23: Densidad de neutrones (izquierda) y protones (derecha) para la EoS de Sahu, Basu y Datta.

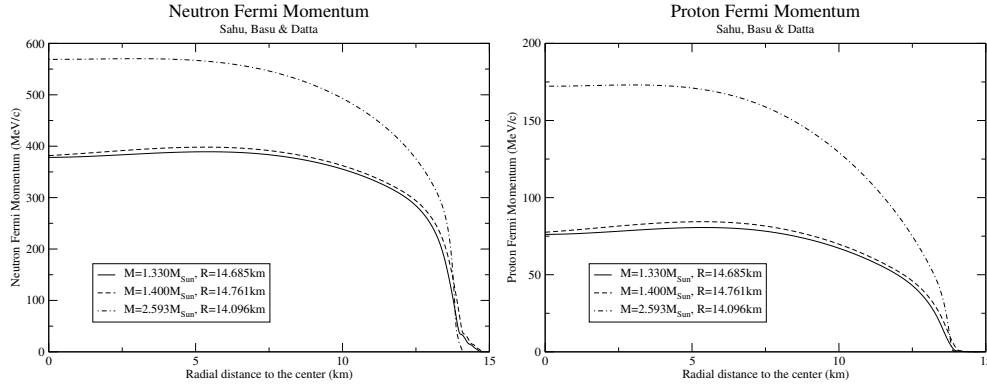


Figura 3.24: Momenta de Fermi del neutrón (izquierda) y del protón (derecha) para la EoS de Sahu, Basu y Datta.

### 3.3 Comparación de los diferentes modelos de EoS

En las figuras 3.25, 3.26, 3.27, 3.28 y 3.29, se presentan gráficas comparativas de los perfiles densidad, las densidades de neutrones, densidades de protones y los momenta de Fermi para las ocho EoS que se analizaron, para NS con masas de  $1.330M_{\odot}$  y  $1.400M_{\odot}$ .

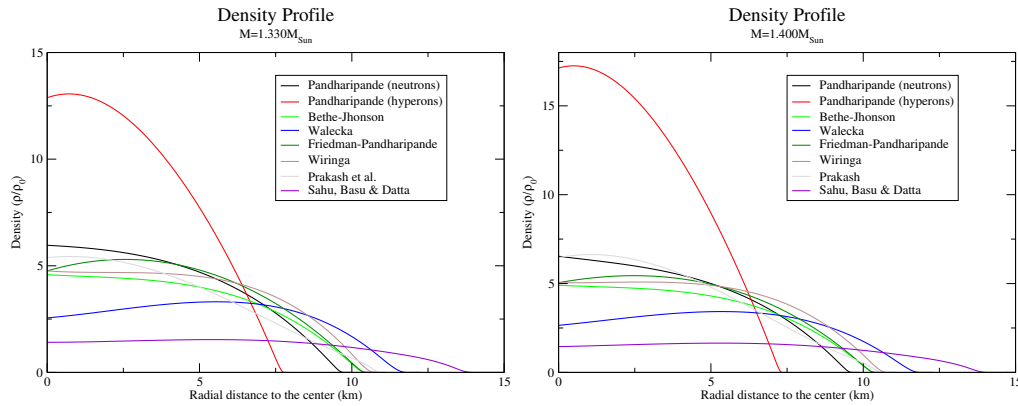


Figura 3.25: Perfiles densidad para las ocho EoS analizadas en el caso de estrellas de masa  $1.330M_{\odot}$  (izquierda) y  $1.400M_{\odot}$  (derecha).

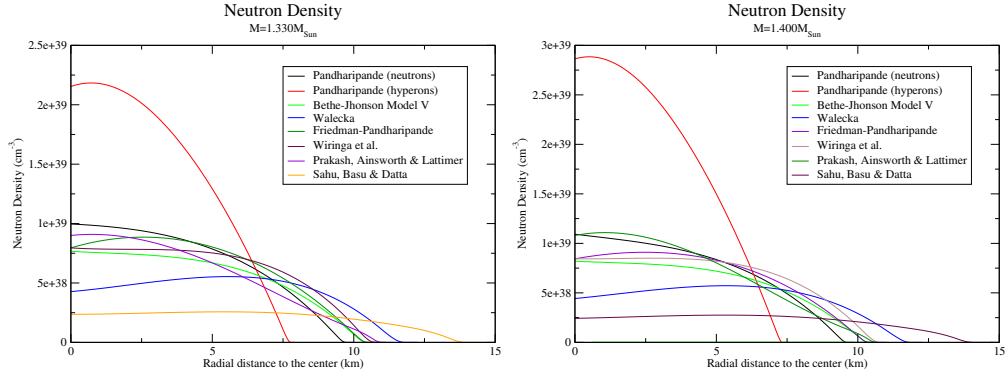


Figura 3.26: Densidades de neutrones para las ocho EoS analizadas en el caso de estrellas de masa  $1.330M_{\odot}$  (izquierda) y  $1.400M_{\odot}$  (derecha).

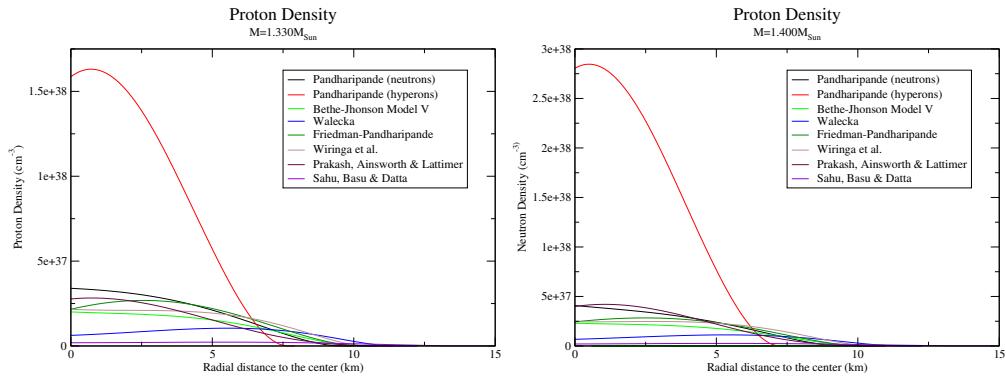


Figura 3.27: Densidades de protones para las ocho EoS analizadas en el caso de estrellas de masa  $1.330M_{\odot}$  (izquierda) y  $1.400M_{\odot}$  (derecha).

En primera instancia, observamos que las cantidades físicas representadas tienen valores mayores para la masa de  $1.400M_{\odot}$  que para la de  $1.330M_{\odot}$ , cuando comparamos las EoS correspondientes. Esto es debido a que el aumento de masa ocasiona un incremento de las densidades bariónicas en la estrella, con lo que la densidad, las densidades de partículas y los momenta de Fermi serán mayores para objetos compactos más masivos.



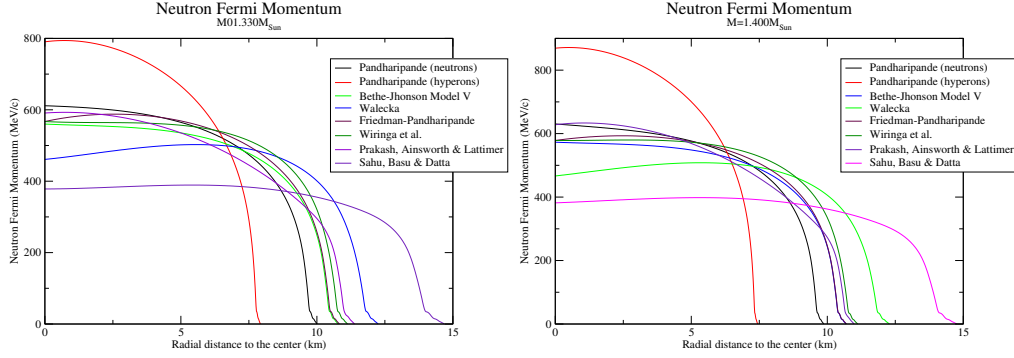


Figura 3.28: Momenta de Fermi de los neutrones para las ocho EoS analizadas en el caso de estrellas de masa  $1.330M_{\odot}$  (izquierda) y  $1.400M_{\odot}$  (derecha).

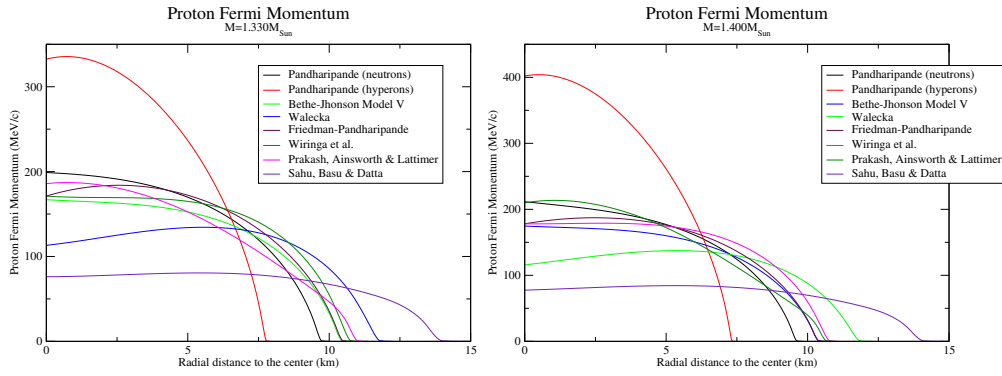


Figura 3.29: Momenta de Fermi de los protones para las ocho EoS analizadas en el caso de estrellas de masa  $1.330M_{\odot}$  (izquierda) y  $1.400M_{\odot}$  (derecha).

A partir de las figuras 3.25, 3.26, 3.27, 3.28 y 3.29 observamos que la EoS de Pandharipande para la materia hiperónica es aquella en que las magnitudes físicas representadas toman los valores más altos, alcanzando, por ejemplo, densidades centrales de aproximadamente  $13\rho_0$ , mientras que la EoS de Sahu, Basu y Datta es la de menores densidades al interior de las NS, con valores máximos de aproximadamente  $1.75\rho_0$ . Los otros modelos de EoS presentan densidades intermedias, que van desde  $2.5\rho_0$  hasta aproximadamente  $6.0\rho_0$ .

Evidentemente, el modelo de Pandharipande para la materia hiperónica es el que tiene las mayores densidades en el núcleo debido a la composición exótica del mismo, ya que al considerar estados bariónicos del tipo  $\Lambda$  y  $\Sigma^{\pm,0}$ , la masa

bariónica del sistema aumenta, y por ende, se alcanzará una mayor densidad. Por otro lado, ya que la EoS de Sahu, Basu y Datta se obtiene a partir de un modelo de teoría de campos que da cuenta de varias propiedades observadas de la materia nuclear, y los resultados experimentales se miden para densidades cercanas a la densidad de la materia nuclear estándar, es de esperarse que este modelo no se aleje mucho de la densidad  $\rho_0$ . Finalmente, ya que los demás modelos de EoS corresponden a modelos teóricos intermedios entre el de Pandharipande para materia hiperónica y el de Sahu, Basu y Datta, es de esperarse que los perfiles de densidad obtenidos con estos otros seis modelos se encuentren acotados entre estos dos.

Adicionalmente, a partir de la figura 3.25 se observa que las EoS de Bethe-Jhonson, Friedman-Pandharipande y Wiringa, Fiks y Fabrocini tienen densidades centrales muy similares, como también puede observarse a partir de la tabla 3.1, lo que obedece a que en estas tres EoS se consideran interacciones a tres cuerpos entre los nucleones, y los parámetros de ajuste de los potenciales fenomenológicos obtenidos describen adecuadamente propiedades comunes de la materia nuclear estándar.

Se observa además, a partir de la figura 3.25, que la variación del perfil densidad con la coordenada radial no es tan rápida para  $r$  entre 0 y 5km aproximadamente, con lo que los modelos anteriores, en los que se suponía que la densidad del núcleo estelar era aproximadamente constante, tienen una validez restringida. En el modelo de Pandharipande para la materia hiperónica, observamos que la variación del perfil densidad es mucho más brusca, con lo que los estados hiperónicos desaparecen rápidamente para dar paso a estados más estables de la materia.

En cuanto a los radios de los modelos de estrella analizados, observamos que la mayoría de modelos proporcionan estrellas con radios entre 8.492 y 12.252km, con la excepción, nuevamente, de la EoS de Pandharipande para la materia hiperónica, que resulta en estrellas de aproximadamente 7.5km y de la EoS de Sahu, Basu y Datta, que produce la estrella de mayor tamaño, con radios de aproximadamente 14.5km. Para apreciar más fácilmente estas diferencias, se ha construido la tabla 3.1, en la que se presentan las masas (en términos de la masa del sol,  $M_\odot$ ), radios (en km) y densidades centrales  $\rho_c$ , en unidades de  $\rho_0$ , de cada una de las EoS analizadas.

En cuanto a las densidades de neutrones y protones, el comportamiento global de esta cantidad es muy similar al del perfil densidad, pero podemos además afirmar que la densidad de neutrones es alrededor de 12-15 veces la densidad de protones, con lo que la condición de equilibrio beta es plenamente satis-

---

fecha por todas las EoS analizadas. Además, observamos nuevamente que la EoS de Pandharipande para la materia hiperónica y la EoS de Sahu, Basu y Datta actúan como cotas superior e inferior, respectivamente, para los demás modelos analizados.

Finalmente, observamos que los Momenta de Fermi de neutrones y protones son las cantidades que presentan menor variación, ya que se mantienen relativamente constantes desde el centro de la estrella hasta radios de aproximadamente 8km, con la excepción de la EoS de Pandharipande para los hiperones, que cae de forma muy rápida. Vemos también que el momentum de Fermi del neutrón, para todos los modelos estudiados, es de más del doble del momentum de Fermi del protón, lo que ratifica que la materia al interior de las NS se encuentra en equilibrio beta.

Ecuación de Estado	$M/M_{\odot}$	R(km)	$\rho_c/\rho_0$
Pandharipande (neutrones) [40]	1.330	10.006	5.961
	1.400	9.867	6.536
	1.658	8.492	14.643
Pandharipande (hiperones) [41]	1.330	7.921	12.879
	1.400	7.437	17.125
	1.414	7.082	21.489
Bethe-Jhonson, Model V [53]	1.330	10.782	4.582
	1.400	10.691	4.904
	1.658	9.200	12.379
Walecka [54]	1.330	12.252	2.556
	1.400	12.280	2.648
	2.285	11.216	7.764
Friedman-Pandharipande [55]	1.330	10.824	4.757
	1.400	10.701	5.046
	1.986	9.028	12.321
Wiringa, Fiks y Fabrocini [56]	1.330	11.122	3.571
	1.400	11.115	3.725
	2.189	9.800	10.107
Prakash, Ainsworth y Lattimer, Model 1 [57]	1.330	11.384	5.382
	1.400	10.987	6.457
	1.510	9.483	12.821
Sahu, Basu y Datta [15]	1.330	14.685	1.411
	1.400	14.761	1.451
	2.593	14.096	4.804

Cuadro 3.1: Valores de las masas totales, radios y densidades centrales de los modelos de EoS utilizados.

# Capítulo 4

## Enfriamiento de NS por emisión de neutrinos

En este capítulo se analiza el proceso de enfriamiento de las NS por emisión de neutrinos generados en reacciones nucleares que se presentan en su interior.

Como se discutió anteriormente, las NS aparecen como remanentes de las explosiones de supernova, con lo que estos objetos compactos comienzan su evolución a temperaturas muy altas, por lo que se hace necesario que radién energía hacia el exterior por algún mecanismo de enfriamiento. Debido a la diversidad de composiciones que pueden presentarse en las NS, y a las altas densidades existentes en su interior, uno de los procesos de enfriamiento más aceptado actualmente es el realizado por emisión de neutrinos en el núcleo y la corteza de las NS. Cada uno de estos procesos (o reacciones nucleares), tiene asociada una tasa de pérdida de energía, que dependerá, entre otros aspectos, de las interacciones nucleares que existan entre las partículas que participen en la reacción, de los umbrales de densidades de partículas interactuantes<sup>1</sup>, y de la temperatura de la estrella.

Las diferentes posibilidades que se tienen para el enfriamiento de NS se han clasificado en dos grandes grupos: el **Enfriamiento Estándar**, cuya reacción más representativa es el *Proceso Urca modificado (MUrca)*, y el **Enfriamiento Acrecentado**, donde la reacción más representativa es el *Proceso Urca directo (DUrca)*.

---

<sup>1</sup>Dependientes a su vez del perfil densidad de la estrella, como vimos en el capítulo anterior.

El objetivo fundamental de este capítulo es obtener las tasas de emisión de energía para estos dos procesos, asumiendo que los nucleones interactúan de forma efectiva a través del intercambio de piones.

De esta forma, se derivará una expresión relativista para las pérdidas de energía por emisión de neutrinos en el proceso Urca directo con nucleones en la materia bariónica degenerada de las estrellas de neutrones, a través de la aplicación de la regla de oro de Fermi, y dentro del Modelo Estándar de las Interacciones Electrodébiles.

El capítulo está organizado de la siguiente manera: en la sección 4.1 se hace una introducción a los procesos de enfriamiento de NS, presentando algunas de las reacciones más importantes que llevan a la producción y emisión de neutrinos. En la sección 4.2 se analiza el escenario de enfriamiento acrecentado, calculando la tasa de emisión de energía transportada por los neutrinos generados por el proceso DUrca, la reacción más representativa de este escenario de enfriamiento. En la sección 4.3 se hace una descripción del escenario de enfriamiento estándar, y se calcula la emisividad de neutrinos para la reacción con producción de neutrinos en el proceso MUrca. Finalmente, en la sección 4.4 se determina la influencia de las ocho EoS presentadas en el capítulo anterior (sección 3.2) sobre la emisividad de neutrinos en los procesos MUrca y DUrca, y se calculan las luminosidades totales para cada una de las EoS analizadas.

## 4.1 Procesos de enfriamiento en NS

Después que una NS es generada por una explosión de supernova tipo II, el interior de la llamada proto-estrella de neutrones (PNS)<sup>2</sup> se encuentra a temperaturas del orden de  $20 - 50 MeV$ , con lo que la NS pierde energía de forma rápida, principalmente por emisión de neutrinos, hasta alcanzar temperaturas del orden de  $1 MeV$  [134].

En un tiempo entre 10 y 100 años, correspondiente al tiempo de evolución térmica de la corteza, se crea una estructura isotérmica al interior de la NS, ya que el calor transportado por la conducción electrónica es radiado por los neutrinos que dejan libremente la estrella [10].

---

<sup>2</sup>Se denomina proto-estrella de neutrones al resultado del colapso gravitacional del núcleo de hierro de una estrella masiva, con radios del orden de  $2 - 6 \times 10^3 km$  y que libera materia a velocidades entre  $30000$  y  $60000 km s^{-1}$ , para generar una “esfera de neutrinos”, que envuelve el núcleo denso que generará la estrella de neutrones [133].

---

El enfriamiento a través de la emisión de neutrinos domina el proceso de emisión de energía durante los primeros mil años de existencia de la NS, al menos para aquellas en que el escenario estándar de enfriamiento es dominante. La emisión de fotones eventualmente supera a la de neutrinos cuando la temperatura interna ha caído lo suficiente. Después de esto, la estrella emite continuamente fotones, principalmente en los rayos X, con una temperatura efectiva  $T_{eff}$  que sigue los cambios de la temperatura interior, pero que es más pequeña que ésta por un factor de  $\sim 100$  [10, 30].

El tiempo total que una NS permanecerá visible a los observadores terrestres es aún desconocido, pero hay dos posibilidades: los escenarios de enfriamiento *estándar* y *acrecentado*<sup>3</sup>. Las reacciones de enfriamiento con producción de neutrinos que dominan el proceso son de un tipo general, conocido como procesos Urca<sup>4</sup>, en que las partículas térmicamente excitadas realizan alternativamente decaimientos beta y beta inverso. Cada reacción produce un neutrino o anti-neutrino, con lo que la energía térmica de la estrella se pierde de forma continua [10].

La denominación de los dos escenarios de enfriamiento obedece al hecho que en el *enfriamiento acrecentado* se consideran reacciones en las que la tasa de emisión de neutrinos es mayor que la correspondiente al *enfriamiento estándar* (que se considera el escenario más probable, debido a que las condiciones bajo las cuales el enfriamiento se desarrolla son mucho más probables que las correspondientes al escenario acrecentado) [10, 30, 70].

El proceso más eficiente para liberar energía dentro del escenario de enfriamiento acrecentado es el **Proceso Urca Directo (DUrca)** con bariones, que puede expresarse, en forma general, mediante la reacción

$$B_1 \longrightarrow B_2 + l + \bar{\nu}_l, \quad B_2 + l \longrightarrow B_1 + \nu_l, \quad (4.1)$$

donde  $l$  representa los leptones ( $e^-$ ,  $\mu^-$ ) y  $B_i$  son bariones envueltos en el proceso de interacción débil ( $n, p, \Lambda, \Sigma^-$ ) [42]. Para el caso de estrellas con la composición nuclear estándar (neutrones, protones y electrones), el proceso

---

<sup>3</sup>Recientemente se ha cambiado el nombre de *enfriamiento estándar* por el de *enfriamiento minimal*, que reemplaza y extiende al enfriamiento estándar para incluir la emisión de neutrinos por la formación y el rompimiento de pares de Cooper de nucleones [70].

<sup>4</sup>El nombre de estos procesos de enfriamiento fue propuesto por Gamow, al considerar, junto con Schoenberg, que la pérdida de energía después de las explosiones de supernova se asemejaba a la manera en que los apostadores del Casino da Urca, en Rio de Janeiro, veían disminuído el dinero de sus bolsillos [71].

---

DUrca se escribe como

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad p + e^- \rightarrow n + \nu_e. \quad (4.2)$$

Este proceso es permitido solamente si la energía y el momentum se conservan simultáneamente [19]. Esto requiere que la razón mínima de protones al interior de la estrella sea al menos  $x \geq 1/9$  [135] (como se demostró en la sección 3.2), lo que corresponde a un valor mucho mayor que el valor encontrado en la materia de las NS en la vecindad de  $\rho_0$  [136, 137].

Debido a que generalmente la fracción de protones  $x_p$  se incrementa con la densidad, el proceso Urca directo podría todavía ocurrir por encima de algún umbral de energía [135].

Sin embargo, si el proceso directo no es posible, el enfriamiento por neutrinos debe ocurrir por el proceso Urca modificado [30]

$$\begin{aligned} \text{Rama neutrónica: } & n + n \rightarrow n + p + e^- + \bar{\nu}_e, & n + p + e^- & \rightarrow n + n + \nu_e; \\ \text{Rama protónica: } & p + n \rightarrow p + p + e^- + \bar{\nu}_e, & p + p + e^- & \rightarrow p + n + \nu_e, \end{aligned} \quad (4.3)$$

en el que participa un nucleón adicional  $(n, p)^5$ .

La tasa MUrca es reducida por un factor de  $(T/\mu_n)^2 < 10^{-4}$  comparado con la tasa DUrca<sup>6</sup>, como veremos más adelante, y el enfriamiento de la NS es por ende más lento [32].

El escenario de enfriamiento estándar asume que el proceso Urca directo no puede ocurrir y predice que las NS's permanecen observables debido a la emisión térmica superficial por hasta unos pocos millones de años [135, 138]. La cuestión de si el proceso Urca directo ocurre o no es de fundamental importancia, ya que determinaría el tiempo que tarda una NS en alcanzar temperaturas estables del orden de  $1MeV$ , a partir de las cuales comienza la emisión de energía en forma de fotones [30]. El proceso DUrca y todos los mecanismos exóticos de enfriamiento de NS sólo pueden ocurrir a densidades supranucleares, ya que la materia a densidades subnucleares se enfría principalmente por la difusión del calor proveniente del interior [138].

Existen reacciones adicionales que producen neutrinos en las cortezas de las

---

<sup>5</sup>Este nucleón adicional se denomina comúnmente “mirón” (bystander), y se introduce con miras a garantizar la conservación del momentum y la energía [19, 138].

<sup>6</sup>Ya que el proceso MUrca envuelve cinco fermiones degenerados, la eficiencia del proceso es reducida debido a la disminución del espacio de fase disponible para cada partícula [30].

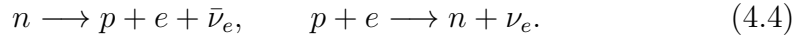
NS. Algunas de estas reacciones se muestran en la tabla 4.1, adaptada de [17].

Aniquilación de pares $e^-e^+$	$ee^+ \rightarrow \nu\bar{\nu}$
Decaimiento de plasmones	$\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$
Emisión sincrotrón por electrones	$e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$
Emisión de fotoneutrinos	$e\gamma \rightarrow e\nu\bar{\nu}$
Bremsstrahlung electrón-núcleo	$e(A, Z) \rightarrow e(A, Z)\nu\bar{\nu}$
Procesos Beta	$e(A, Z) \rightarrow (A, Z-1)\nu_e,$ $(A, Z-1) \rightarrow (A, Z)e\bar{\nu}_e$
Generación de pares de Cooper de neutrones	$nn \rightarrow \nu\bar{\nu}$
Bremsstrahlung neutrón-neutrón	$nn \rightarrow nn\nu\bar{\nu}$
Bremsstrahlung neutrón-núcleo	$n(A, Z) \rightarrow n(A, Z)\nu\bar{\nu}$

Cuadro 4.1: Principales procesos de producción de neutrinos en una NS.  $\gamma$  representa un fotón o plasmón, mientras que  $(A, Z)$  representa un núcleo atómico.

## 4.2 Enfriamiento acrecentado: el proceso Urca directo (DURca)

El proceso de emisión de neutrinos con mayor eficiencia es el llamado **Proceso Urca Directo (DURca)**, que consiste de dos reacciones sucesivas, el decaimiento beta y la captura:



Este tipo de reacción puede ocurrir solamente si se satisface la conservación del momentum y la energía. Ya que, para la materia degenerada, las energías y momenta son muy cercanos, dentro de un intervalo  $\sim kT$ , a las energías y momenta de Fermi, y ya que  $E_{F_i}$  es prácticamente igual al potencial químico  $\mu_i$ , la conservación de la energía coincide con la condición de equilibrio químico  $\mu_n = \mu_p + \mu_e$ , que se satisface en todas las NS con la composición nuclear estándar [139].

Por otro lado, la condición de conservación del momentum no es trivial, ya que las reacciones (4.4) requieren que  $p_{Fn} \leq p_{Fp} + p_{Fe}$  (la desigualdad triangular), lo que nos lleva, de acuerdo al análisis de la sección 3.2.1, a que la



fracción de protones,  $x_P$ , debe ser de al menos 11.1 %.

Durante mucho tiempo se asumió que las NS no podían alcanzar esta fracción de protones, y que el proceso DUrca estaba cinemáticamente prohibido, con lo que el **Proceso Urca Modificado (MUrca)**,

$$n + n \longrightarrow p + n + e + \bar{\nu}_e, \quad p + n + e \longrightarrow n + n + \nu_e, \quad (4.5)$$

era considerado el agente de enfriamiento más representativo.

En la reacción (4.5), el neutrón adicional se introduce para asegurar la conservación del momentum, pero hace que el proceso con cinco fermiones degenerados, en vez de los tres del proceso DUrca, tenga una disminución de la emisividad de orden  $(kT/E_{Fn})^2$  [139].

Sin embargo, la condición  $x_P \geq 11.1\%$  no es tan restrictiva como se pensó inicialmente, y la mayoría de las EoS modernas permiten la aparición del proceso DUrca como mecanismo de enfriamiento [135].

### 4.2.1 Determinación de la emisividad de neutrinos a partir de la regla de oro de Fermi

Procedemos ahora a calcular la tasa de emisión de la energía transportada por los neutrinos producidos durante el proceso DUrca.

Para calcular la emisividad  $Q^{D7}$  del proceso (4.4), calculamos la emisividad del decaimiento beta y doblamos el resultado:

$$Q^D = 2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} dW_{i \rightarrow f} \varepsilon_\nu f_n (1 - f_p) (1 - f_e), \quad (4.6)$$

en la ecuación (4.6),  $dW_{i \rightarrow f}$  representa la probabilidad diferencial de decaimiento, y  $\varepsilon_\nu$  es la energía transportada por el neutrino.

En la ecuación (4.6) se introducen los **factores de bloqueo**  $f_n$ ,  $(1 - f_p)$  y  $(1 - f_e)$ , en términos de la función de distribución de Fermi-Dirac  $f$ , que dan cuenta de que el decaimiento se realiza bajo condiciones de temperatura y densidad finitas<sup>8</sup>. La tasa diferencial de decaimiento  $dW_{i \rightarrow f}$  que aparece en

<sup>7</sup>La cantidad de energía emitida por unidad de volumen y por unidad de tiempo

<sup>8</sup>Por cada uno de los fermiones que aparece en la reacción aparecerá un factor de la forma  $f_i$  para las partículas reaccionantes, y de la forma  $1 - f_i$  para las partículas producidas. No aparece un factor de bloqueo para el neutrino ya que los neutrinos abandonan de forma libre la estrella, sin quedar confinados en ésta para participar de otras reacciones [19].

la ecuación (4.6) se calcula a partir de la **Regla de Oro de Fermi**, que para el decaimiento beta se expresa como

$$dW_{i \rightarrow f} = 2\pi \delta(\varepsilon_n - \varepsilon_p - \varepsilon_e - \varepsilon_\nu) \sum_{spins} |H_{fi}|^2 \frac{d^3 \mathbf{p}_p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_e}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_\nu}{(2\pi)^3}. \quad (4.7)$$

En el apéndice C.1 se muestra el cálculo detallado de la probabilidad de decaimiento diferencial, cuyo resultado se presenta a continuación:

$$\begin{aligned} dW_{i \rightarrow f} \frac{d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} &= \frac{1}{(2\pi)^8} \delta(\varepsilon_n - \varepsilon_p - \varepsilon_e - \varepsilon_\nu) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_e) \\ &\times |M_{fi}|^2 4\pi \varepsilon_\nu^2 d\varepsilon_\nu \prod_{j=1}^3 p_{Fj} m_j^* d\varepsilon_j d\Omega_j. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Reemplazando este resultado en la expresión para la emisividad del proceso DÚrca, ecuación (4.6), obtenemos:

$$\begin{aligned} Q^D &= \frac{2}{(2\pi)^8} \int \delta(\varepsilon_n - \varepsilon_p - \varepsilon_e - \varepsilon_\nu) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_e) |M_{fi}|^2 \\ &\times 4\pi \varepsilon_\nu^2 d\varepsilon_\nu \prod_{j=1}^3 p_{Fj} m_j^* d\varepsilon_j d\Omega_j \varepsilon_\nu f_n (1 - f_p) (1 - f_e). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para simplificar un poco estas expresiones, hacemos las sustituciones

$$x_\nu = \frac{\varepsilon_\nu}{T}, \quad x_j = \frac{\varepsilon_j - \mu_j}{T}, \quad (4.10)$$

con lo que los factores de bloqueo  $f_n(1 - f_p)(1 - f_e)$  se convierten, con

$$f_j = \frac{1}{1 + e^{(\varepsilon_j - \mu_j)/T}} = \frac{1}{1 + e^{x_j}},$$

en

$$f_n(1 - f_p)(1 - f_e) = f(x_1) f(-x_2) f(-x_3). \quad (4.11)$$

Por otro lado,

$$\delta(\varepsilon_n - \varepsilon_p - \varepsilon_e - \varepsilon_\nu) = \delta(\mu_n + T x_1 - \mu_p - T x_2 - \mu_e - T x_3 - T x_\nu). \quad (4.12)$$

Debido a la condición de equilibrio beta  $\mu_n = \mu_p + \mu_e$ , y a la propiedad  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$  tenemos que

$$\delta(\varepsilon_n - \varepsilon_p - \varepsilon_e - \varepsilon_\nu) = \frac{1}{T} \delta(x_1 - x_2 - x_3 - x_\nu). \quad (4.13)$$

Reemplazando las expresiones (4.11) y (4.13) en (4.9) obtenemos

$$\begin{aligned}
 Q^D &= \frac{2}{(2\pi)^8} T^6 |M_{fi}|^2 \prod_{j=1}^3 p_{Fj} m_j^* \\
 &\times 4\pi \int d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \\
 &\times \int_0^\infty dx_\nu x_\nu^3 \prod_{j=1}^3 \int_{-\infty}^\infty dx_j f(x_j) \delta(x_1 + x_2 + x_3 - x_\nu), \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

que puede expresarse en términos de las integrales

$$A_D = 4\pi \int d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3), \quad (4.15)$$

$$I_D = \int_0^\infty dx_\nu x_\nu^3 \prod_{j=1}^3 \int_{-\infty}^\infty dx_j f(x_j) \delta(x_1 + x_2 + x_3 - x_\nu), \quad (4.16)$$

como

$$Q^D = \frac{2}{(2\pi)^8} T^6 |M_{fi}|^2 A_D I_D \prod_{j=1}^3 p_{Fj} m_j^*. \quad (4.17)$$

Las expresiones para las integrales (4.15) y (4.16) se calculan en los apéndices C.2 y C.3, respectivamente, y sus resultados se presentan a continuación:

$$\begin{aligned}
 A_D &= \frac{32\pi^3}{p_{F1} p_{F2} p_{F3}}, \\
 I_D &= \frac{457\pi^6}{5040}, \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

con lo que, reemplazando (4.18) y reinsertando las unidades del Sistema Internacional, se llega a

$$Q^D = \frac{457\pi}{10080} G_F^2 \cos^2 \theta_c (1 + 3g_A^2) \frac{m_n^* m_p^* m_e^*}{\hbar^{10} c^3} (k_B T)^6. \quad (4.19)$$

Ya que la masa efectiva del electrón puede aproximarse como  $m_e^* = \mu_e/c^2 \approx$ , y  $\mu_e = \sqrt{m_e^2 c^4 + p_{Fe}^2 c^2} \approx p_{Fe} c$ , podemos escribir esta expresión como

$$Q^D = \frac{457\pi}{10080} G_F^2 \cos^2 \theta_c (1 + 3g_A^2) \frac{m_n^* m_p^* p_{Fe}}{\hbar^{10} c^4} (k_B T)^6. \quad (4.20)$$

Escribiendo el momentum de Fermi del electrón en términos de la densidad de electrones,

$$p_{Fe} = \hbar(3\pi^2 n_0)^{1/3} \left( \frac{n_e}{n_0} \right)^{1/3}, \quad (4.21)$$

y reemplazando los valores conocidos de las constantes que aparecen en la ecuación (4.20) se obtiene

$$Q^D = (4.013564 \times 10^{27} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}) \frac{m_n^* m_p^*}{m_n^2} T_9^6 \left( \frac{n_e}{n_0} \right)^{1/3}. \quad (4.22)$$

Esta expresión coincide con la obtenida por [135], donde se ha introducido  $T_9 = \frac{T}{10^9 K}$ .

Para obtener esta expresión en términos de la densidad de la estrella, usamos la relación

$$\frac{n_e}{n_0} = (5.977 \times 10^{-3}) \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2, \quad (4.23)$$

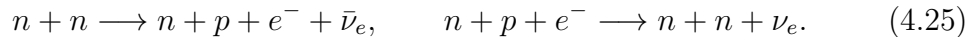
y si además suponemos que tenemos un gas de partículas libres<sup>9</sup>, la expresión final para la emisividad de neutrinos en el proceso DURca será:

$$Q^D = (7.27375 \times 10^{26} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}) \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3} T_9^6. \quad (4.24)$$

### 4.3 Enfriamiento estándar: el proceso Urca modificado (MURca)

En esta sección calcularemos la tasa de emisión de energía para el proceso URCA modificado (MURca) a partir de la aplicación de la regla de oro de Fermi, dentro del marco de trabajo del Modelo Estándar de las interacciones fundamentales y asumiendo que los nucleones interactúan a través del intercambio de piones, basados en el tratamiento presentado en [19, 68, 69].

El proceso URCA modificado, en la rama neutrónica, está descrito por las reacciones cíclicas




---

<sup>9</sup>Esta suposición no afecta mucho el resultado final, ya que de acuerdo a cálculos recientes [140], las masas efectivas de los nucleones en las estrellas de neutrones disminuyen entre 5 y 10%.

Para la materia en equilibrio beta al interior de las NS, las ramas neutrónica y protónica del proceso MURca coexisten y sus tasas de emisión de energía son iguales, con lo que es suficiente calcular la tasa de emisión para cualquiera de las reacciones y doblar el resultado [17].

De esta forma, la expresión general para la emisividad del proceso puede escribirse como

$$Q^M = 2 \int \left[ \prod_{j=1}^4 \frac{d^3 \mathbf{p}_j}{(2\pi)^3} \right] \frac{d^3 \mathbf{p}_e}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_\nu}{(2\pi)^3} \varepsilon_\nu (2\pi)^4 \delta(E_f - E_i) \times \delta^{(3)}(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i) f_1 f_2 (1 - f_3) (1 - f_4) (1 - f_e) \frac{1}{2} |M_{fi}|^2. \quad (4.26)$$

Para notar las partículas que aparecen en la primera de las reacciones (4.25), usaremos los subíndices 1 a 4 para los nucleones (1 y 2 para los neutrones del lado izquierdo, 3 y 4 para el neutrón y el protón del lado derecho),  $e$  y  $\nu$  para el electrón y el antineutrino, respectivamente.

En esta ecuación,  $(E_i, \mathbf{P}_i)$  y  $(E_f, \mathbf{P}_f)$  representan las energías y momenta de los estados inicial y final, respectivamente,  $|M_{fi}|^2$  representa la probabilidad de transición del estado inicial al estado final (que debe sumarse sobre los estados finales de espín, y promediado sobre los estados iniciales [141]).

Siguiendo un procedimiento completamente análogo al que se utilizó para calcular la emisividad para el proceso DURca, la emisividad (4.26) puede expresarse como

$$Q^M = \frac{1}{(2\pi)^{14}} T^8 A_M I_M \langle |M_{fi}|^2 \rangle \prod_{j=1}^5 p_{Fj} m_j^*, \quad (4.27)$$

donde cada uno de los factores que aparece en (4.27) está dado por

$$A_M = 4\pi \prod_{j=1}^5 \int d\Omega_j \delta^{(3)}(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i), \quad (4.28)$$

$$\langle |M_{fi}|^2 \rangle = \frac{4\pi}{A_M} \left[ \prod_{j=1}^5 \int d\Omega_j \right] \delta^{(3)}(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i) |M_{fi}|^2, \quad (4.29)$$

$$I_M = \int_0^\infty dx_\nu x_\nu^3 \left[ \prod_{j=1}^5 \int_{-\infty}^\infty dx_j f(x_j) \right] \delta \left( \sum_{j=1}^5 x_j - x_\nu \right). \quad (4.30)$$

Las cantidades  $A_M$  y  $|M_{fi}|^2$  contienen las integrales sobre las orientaciones de los momenta de las partículas (con  $j = 5$  correspondiente al electrón). Todas las magnitudes de los momenta  $\mathbf{p}_j$  se han aproximado a los momenta de Fermi  $p_{Fj}$ , ya que las partículas tienen energías que yacen muy cerca de la superficie de Fermi, mientras que el momentum del neutrino se desprecia en comparación al de las otras partículas.

Como en el caso del proceso DURca, el cuadrado del elemento de matriz puede evaluarse promediando sobre las orientaciones de  $\mathbf{p}_\nu$ , pero ya que generalmente depende de la orientación de otros momenta, se ha mantenido bajo la integral. De esta forma, se hace relevante introducir  $\langle |M_{fi}|^2 \rangle$ , el cuadrado del elemento de matriz, promediado sobre las orientaciones de los momenta de los nucleones.

La cantidad  $I_M$  dada por (4.30), incluye las integrales sobre las energías adimensionales del neutrino ( $x_\nu$ ) y las demás partículas ( $x_j$ ), en la que se introducen además los factores de bloqueo apropiados (en términos de la distribución de Fermi  $f$ ).

La obtención de las integrales (4.28) y (4.30) se realiza de una forma similar a las que aparecieron en el cálculo de la emisividad para el proceso DURca, y los detalles de cálculo se muestran en los apéndices C.4 y C.5. Los resultados se presentan a continuación:

$$\begin{aligned} A_M &= \frac{2\pi(4\pi)^4}{p_{Fn}^3}, \\ I_M &= \frac{11513\pi^8}{120960}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

El problema principal se presenta al calcular el elemento de matriz  $M_{fi}$ , que envuelve la interacción fuerte entre los nucleones.

### 4.3.1 Determinación de la emisividad de neutrinos cuando los nucleones interactúan a través del intercambio de piones

Para simplificar un poco el análisis, basaremos nuestro cálculo en el trabajo de Friman y Maxwell [69], quienes modelaron la parte de la interacción NN de largo rango (poca transferencia de momentum) con un modelo de interacción por intercambio de piones (OPE), mientras que la parte de corto rango (alta transferencia de momentum) fue descrita en el marco de la teoría del

líquido de Fermi, aunque se desprecia al final su contribución. Debido a que los quarks que conforman los nucleones y sus campos de color están confinados en esferas de radios menores a  $1\text{fm}$ , dos nucleones a una distancia mayor no interactuarán debido al intercambio de gluones. Debido a que los piones pueden acoplarse a los nucleones, estos últimos pueden interactuar entre sí a través del intercambio de piones, con lo que, en una primera aproximación, podemos considerar que nucleones separados por más de  $1\text{fm}$  interactúan mediados por el intercambio de piones.

De esta forma, para obtener el potencial de intercambio de un pión (OPE) debemos considerar la interacción descrita por el diagrama de Feynman que aparece en la figura 4.1, que está construido en el centro de masa del sistema, de tal forma que el momentum transferido por el pión es  $q = p - p'$ .

La interacción del pión con un nucleón no relativista en la posición  $\vec{r}$  está da-

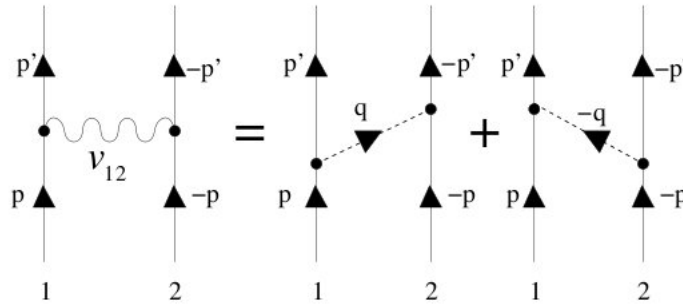


Figura 4.1: Diagrama de Feynman para la dispersión de dos nucleones, donde la interacción está mediada por el intercambio de piones

da por el hamiltoniano

$$H_{\pi NN} = -\frac{f_{\pi}}{m_{\pi}} \vec{\sigma} \cdot \nabla (\hat{\phi}(\vec{r}) \cdot \vec{\tau}) \quad (4.32)$$

donde el operador de campo del pión,  $\hat{\phi}(\vec{r})$  es un vector en el espacio de isoespín, en el que  $\pi^+$ ,  $\pi^0$  y  $\pi^-$  forman un triplete de isoespín.

El hamiltoniano  $H_{\pi NN}$  es un escalar en el espacio de configuración y en el espacio de isoespín, por lo que la interacción  $\pi NN$  conserva momentum, momentum angular, paridad e isoespín.

Expresaremos las componentes del operador de campo  $\hat{\phi}(\vec{r})$  como un vector

en el espacio de isoespín, con componentes ( $a = x, y, z$ )

$$\hat{\phi}_a(\vec{r}) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (a_{ka} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + a_{ka}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \quad (4.33)$$

en esta ecuación, los operadores de aniquilación de los piones cargados y neutros están relacionados con los operadores  $a_{ka}$  por las ecuaciones

$$a_{k\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{kx} \mp i a_{ky}), \quad a_{k0} = a_{kz} \quad (4.34)$$

De manera análoga, se definen los operadores de campo para los piones cargados y neutros como

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_\pm(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{\phi}_x(\vec{r}) \pm i \hat{\phi}_y(\vec{r})] \\ \hat{\phi}_\pm(\vec{r}) &= \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (a_{k\mp} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + a_{k\pm}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \\ \hat{\phi}_0(\vec{r}) &= \hat{\phi}_z(\vec{r}) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Los operadores definidos por las ecuaciones (4.35) son tales que  $\hat{\phi}_{+,0,-}$  crean piones  $\pi^{+,0,-}$  o destruyen piones  $\pi^{-,0,+}$ , respectivamente.

Los operadores de espín 1/2 e isoespín 1/2, denotados por  $\mathbf{s} = \sigma/2$  y  $\mathbf{t} = \tau/2$ , donde  $\sigma$  y  $\tau$  son matrices de Pauli definidas sobre los espacios de configuración e isoespín respectivamente, tomadas en la forma usual:

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Los estados de protones y neutrones, autoestados de  $t_z$  correspondientes a los valores propios  $\pm 1/2$ , están definidos por

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Las matrices  $\tau_x$ ,  $\tau_y$  y  $\tau_z$  son idénticas a las matrices de espín de Pauli,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ , en la base en que esta última es diagonal. Los autoestados de espín, correspondientes a los autovalores  $\pm 1/2$  se denotan como  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$ , respectivamente. De esta forma, un nucleón puede estar en uno de los siguientes



estados:  $|\uparrow p\rangle, |\downarrow p\rangle, |\uparrow n\rangle$  o  $|\downarrow n\rangle$ .

El operador  $\hat{\phi} \cdot \vec{\tau}$  que aparece en el hamiltoniano  $H_{\pi NN}$  se escribirá como

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi} \cdot \vec{\tau} &= \phi_x \tau_x + \phi_y \tau_y + \phi_z \tau_z \\
 \hat{\phi} \cdot \vec{\tau} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_+(\vec{r}) + \phi_-(\vec{r}))\tau_x - \frac{i}{\sqrt{2}}(\phi_+(\vec{r}) - \phi_-(\vec{r}))\tau_y + \phi_0 \tau_0 \\
 \hat{\phi} \cdot \vec{\tau} &= \phi_+(\vec{r}) \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_x - i\tau_y) \right) + \phi_-(\vec{r}) \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_x + i\tau_y) \right) + \phi_0 \tau_0 \\
 \hat{\phi} \cdot \vec{\tau} &= \phi_+(\vec{r})\tau_- + \phi_-(\vec{r})\tau_+ + \phi_0 \tau_0
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Al reemplazar las formas matriciales (4.36) pueden obtenerse las representaciones de  $\tau_+$  y  $\tau_-$  como

$$\tau_+ = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_- = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

resultado con el que podemos determinar la acción de estos operadores sobre los autoestados  $|p\rangle$  y  $|n\rangle$ :

$$\tau_+|p\rangle = 0, \quad \tau_+|n\rangle = \sqrt{2}|p\rangle, \quad \tau_-|n\rangle = 0, \quad \tau_-|p\rangle = \sqrt{2}|n\rangle \tag{4.40}$$

De esta forma, vemos que el operador  $\hat{\phi}_+(\vec{r})\tau_-$  crea piones  $\pi^+$  o aniquila piones  $\pi^-$ , mientras convierte un protón en un neutrón,  $\hat{\phi}_-(\vec{r})\tau_+$  crea piones  $\pi^-$  o aniquila piones  $\pi^+$ , mientras convierte un neutrón en un protón, mientras que  $\phi_0\tau_0$  crea o aniquila un  $\pi^0$ , sin cambiar la carga.

Para calcular una expresión para el potencial de intercambio de un pión, partimos de la relación

$$\langle f|V_{OPE}|i\rangle \equiv \sum_I \langle f|H_{\pi NN}|I\rangle \frac{1}{E - E_I} \langle I|H_{\pi NN}|i\rangle \tag{4.41}$$

donde el subíndice  $I$  representa todos los estados intermedios entre el estado inicial  $|i\rangle$  y el estado final  $|f\rangle$ . En el primero de los diagramas de Feynman presentados en la figura 4.1, los estados inicial y final de los nucleones están dados por

$$|i\rangle = |\mathbf{p}, \chi_1; -\mathbf{p}, \chi_2\rangle \quad |f\rangle = |\mathbf{p}', \chi'_1; -\mathbf{p}', \chi'_2\rangle \tag{4.42}$$

En este mismo diagrama, un pión de momentum  $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$  se intercambia entre los nucleones, siendo emitido por el nucleón 1, con lo que el estado intermedio  $|I\rangle$  será

$$|I\rangle = |\mathbf{p}', \chi'_1; -\mathbf{p}, \chi_2; \mathbf{q}, \alpha\rangle \tag{4.43}$$

De esta forma, al evaluar el elemento de matriz  $\langle I|H_{\pi NN}|i\rangle$ , se crea un pión en la posición del nucleón 1, con momentum  $\mathbf{q}$ :

$$\langle I|H_{\pi NN}|i\rangle = i \frac{f_\pi}{m_\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} \langle \chi'_1 | \sigma_1 \cdot \mathbf{q} \tau_{1,-\alpha} | \chi_1 \rangle \quad (4.44)$$

Para obtener este resultado, el gradiente que aparece en  $H_{\pi NN}$  opera sobre el coeficiente  $e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_1}$  del operador de creación de piones en  $\hat{\phi}_\alpha(\vec{r}_1)$ , y el operador  $\tau_{1,-\alpha}$  acompaña la creación de un pión de carga  $\alpha$  por el nucleón 1. De una forma similar se obtiene

$$\langle f|H_{\pi NN}|I\rangle = -i \frac{f_\pi}{m_\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} \langle \chi'_2 | \sigma_2 \cdot \mathbf{q} \tau_{2,\alpha} | \chi_2 \rangle \quad (4.45)$$

En este caso, el gradiente en el operador  $H_{\pi NN}$  opera sobre el coeficiente  $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_2}$  del operador de aniquilación, y el operador de isoespín  $\tau_{2,\alpha}$  indica la absorción de un pión de carga  $\alpha$  por el nucleón 2.

Por otro lado, el denominador  $E - E_I$  es igual a  $-\omega_q$ , con lo que tendremos

$$\langle f|V_{OPE}|i\rangle_1 = -\frac{f_\pi^2}{m_{pi}^2} \frac{1}{2\omega_q^2} \langle \chi'_1, \chi'_2 | (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{q})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{q})(\tau_{2,+}\tau_{1,-} + \tau_{2,0}\tau_{1,0} + \tau_{2,-}\tau_{1,+}) | \chi_1, \chi_2 \rangle \quad (4.46)$$

donde el subíndice 1 indica que este término corresponde al primer diagrama de Feynman. Debido a que en el segundo diagrama el pión intercambiado tiene momentum  $-\mathbf{q}$ , nos lleva a una contribución idéntica a la amplitud. Al expandir el producto punto  $\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$  en términos de las coordenadas cartesianas, y posteriormente éstas en términos de los operadores de subida y bajada de isoespín,  $\tau_+$  y  $\tau_-$  se encuentra que

$$\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 = \tau_{2,+}\tau_{1,-} + \tau_{2,0}\tau_{1,0} + \tau_{2,-}\tau_{1,+} \quad (4.47)$$

con lo que podemos escribir la ecuación (4.46) como

$$V_{OPE}(\mathbf{q}) = -\frac{f_\pi^2}{m_\pi^2} \frac{(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{q})(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{q})}{\omega_q^2} \vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)} \quad (4.48)$$

Finalmente, debido a que la energía del pión puede escribirse como  $\omega_q^2 = \mathbf{q}^2 + m_\pi^2$ , obtenemos finalmente:

$$V_{OPE} = \left( \frac{f_\pi}{m_\pi} \right)^2 \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{q} \left( \frac{-1}{q^2 + m_\pi^2} \right) \vec{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{q} (\vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}), \quad (4.49)$$

donde los  $\sigma$ 's y  $\tau$ 's son, respectivamente, las matrices de espín e isoespín de Pauli, asociadas con las dos líneas nucleónicas,  $\mathbf{q}$  es el momentum transferido y  $f_\pi = 4\pi \times 0.08 \approx 1$  es la constante de acople pión-nucleón ( $\pi N$ )<sup>10</sup>. Los diagramas de Feynman que contribuyen al proceso MUrca, en la aproximación de Born, se muestran en la figura 4.2.

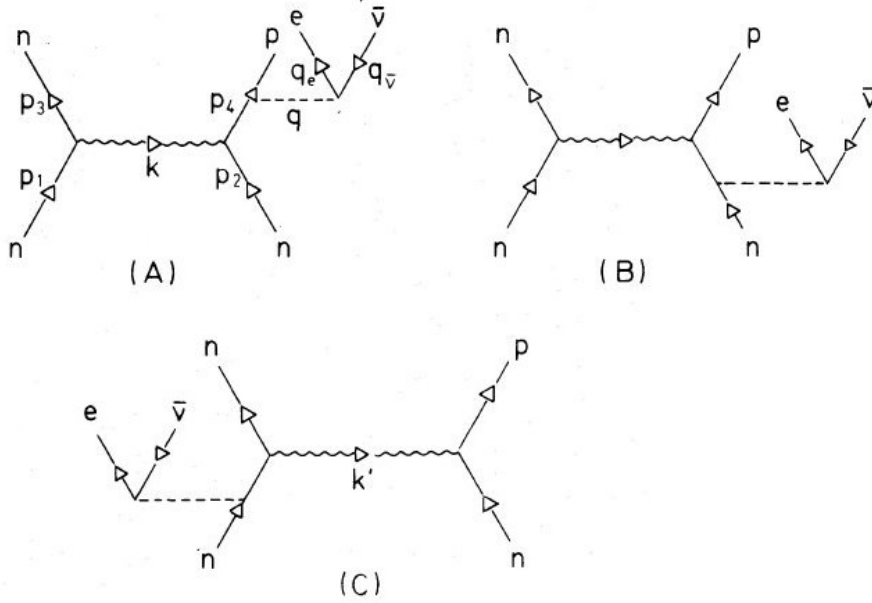


Figura 4.2: Diagramas de Feynman que contribuyen al proceso MUrca.

Para hallar los elementos de matriz para cada uno de estos diagramas, asumimos que el cuadri-momentum impartido al par leptónico es  $\mathbf{q}$ , y que el momentum transferido entre los nucleones es  $\mathbf{k}$  o  $\mathbf{k}'$ , con lo que la conservación del momentum requiere que  $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{q}$ , de tal forma que  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{k}'$  no son iguales. Sin embargo, para el proceso MUrca se tiene que  $|\mathbf{k}|$  y  $|\mathbf{k}'|$  son grandes en comparación a  $|\mathbf{q}|$  a través del espacio de fase, con lo que podemos igualar  $|\mathbf{k}|$  y  $|\mathbf{k}'|$  sin introducir mayores errores en las emisividades.

<sup>10</sup>Debido a la renormalización del vértice  $\pi NN$  sobre una región finita del espacio, el parámetro  $f$  depende del momentum, y se parametriza, típicamente, por un factor de forma monopolar. En este cálculo no se ha considerado tal factor de forma, ya que a las densidades típicas de las NS, la constante de acoplamiento renormalizada no dista mucho del valor elegido [17, 69, 142].

En la figura 4.2, existen otros tres diagramas que contribuyen al elemento de matriz [142]. Estos diagramas son análogos a los de la figura 4.2, pero con las etiquetas  $n$  y  $p$  (sobre las líneas nucleónicas salientes) intercambiadas<sup>11</sup>. Ya que estos diagramas describen estados finales diferentes, la contribución de éstos debe sumarse de forma incoherente con los de la figura 4.2. Más aún, después de desarrollar las integrales sobre el espacio de fase, la contribución a la emisividad MURca es idéntica a la obtenida para los diagramas de la figura 4.2, con lo que es suficiente multiplicar la emisividad obtenida a partir de los diagramas 4.2 por 2.

Usando el Modelo Estándar de Weinberg-Salam [143], podemos describir la interacción débil a través de la expresión no-relativista para las interacciones de corriente cargada

$$\mathcal{L}_c = \frac{G}{\sqrt{2}} \chi_p^\dagger (\delta_{\mu 0} - g_A \delta_{\mu i} \sigma_i) \chi_n l_\mu. \quad (4.50)$$

En la ecuación (4.50),  $\chi_n$  y  $\chi_p^\dagger$  son los espinores de Pauli que representan el neutrón entrante y el protón saliente, respectivamente,  $G$  es la constante de Fermi,  $g_A$  es la constante de renormalización axial-vectorial, y  $l_\mu$  es la corriente leptónica, expresada por

$$l_\mu = \bar{u}(q_1) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(q_2), \quad (4.51)$$

donde  $q_1$  y  $q_2$  son los cuadri-momenta de los leptones.

Por otro lado, las interacciones de corriente neutra para los neutrones,  $\mathcal{L}_n$ , y para los protones,  $\mathcal{L}_p$ , están dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n &= -\frac{G}{2\sqrt{2}} \chi_1^\dagger (\delta_{\mu 0} - g_A \delta_{\mu i} \sigma_i) \chi_2 l_\mu, \\ \mathcal{L}_p &= \frac{G}{2\sqrt{2}} \chi_1^\dagger (c_v \delta_{\mu 0} - g_A \delta_{\mu i} \sigma_i) \chi_2 l_\mu, \end{aligned} \quad (4.52)$$

donde  $c_v$  es la constante de acople vectorial, relacionada con el ángulo de Weinberg  $\theta_W$  a través de  $c_v = 1 - 4 \sin^2 \theta_W$  [143].

Para el propagador, no-relativista, de los nucleones tenemos la expresión

$$iG(p \pm q, E_p \pm \omega) = \frac{i}{E_p \pm \omega - E_{p \pm q}}, \quad (4.53)$$

---

<sup>11</sup>Y con el corrimiento apropiado de la interacción débil.

donde  $E_p$  es la energía asociada con la línea nucleónica externa,  $E_{p\pm q}$  es la energía asociada con la línea nucleónica interna, y  $\omega$  es la energía total de los leptones. El signo se escoge positivo si la interacción débil está asociada a una línea nucleónica saliente. Al expandir (4.53) en potencias del inverso de la masa nucleónica y tomando el término de primer orden, se obtiene la aproximación

$$iG(p \pm q, E_p \pm \omega) = \pm i\omega^{-1}, \quad (4.54)$$

con la misma convención de signos mencionada anteriormente.

Si combinamos ahora las ecuaciones (4.50), (4.51), (4.52) y (4.54), junto con el potencial de intercambio de piones dado por la ecuación (4.49), podemos escribir las amplitudes de transición para los diagramas de Feynman (A), (B) y (C) de la figura 4.2 como sigue:

$$\begin{aligned} M_{OPE}^{(A)} &= -\frac{G}{2\sqrt{2}} \left(\frac{f}{m_\pi}\right)^2 \omega^{-1} l_\mu \frac{\chi_4^\dagger (c_v \delta_{\mu 0} - g_A \delta_{\mu i} \sigma_i) (\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \chi_2 \chi_3^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \chi_1}{k^2 + m_\pi^2}, \\ M_{OPE}^{(B)} &= \frac{G}{2\sqrt{2}} \left(\frac{f}{m_\pi}\right)^2 \omega^{-1} l_\mu \frac{\chi_4^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) (c_v \delta_{\mu 0} - g_A \delta_{\mu i} \sigma_i) \chi_2 \chi_3^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \chi_1}{k^2 + m_\pi^2}, \\ M_{OPE}^{(C)} &= \frac{G}{2\sqrt{2}} \left(\frac{f}{m_\pi}\right)^2 \omega^{-1} l_\mu \frac{\chi_4^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \chi_2 \chi_3^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) (c_v \delta_{\mu 0} - g_A \delta_{\mu i} \sigma_i) \chi_1}{k^2 + m_\pi^2}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Para obtener, por ejemplo, la expresión para  $M_{OPE}^{(A)}$ , partimos primero del intercambio del pión de momentum  $\mathbf{k}$ , lo que introduce un término de la forma (4.49):

$$\left(\frac{f_\pi}{m_\pi}\right)^2 \vec{\sigma} \cdot \mathbf{k} \chi_2 \left(-\frac{1}{k^2 + m_\pi^2}\right) \chi_3^\dagger \vec{\sigma} \cdot \mathbf{k} \chi_1 \quad (4.56)$$

En el diagrama (A) de la figura 4.2 vemos ahora que hay una propagación de un nucleón desde el vértice inferior del lado derecho del diagrama, con lo que tendremos una contribución de  $\omega^{-1}$ , de acuerdo a (4.54).

A continuación tenemos la interacción de corriente neutra para los protones, que introduce un término

$$\frac{G}{2\sqrt{2}} \chi_4^\dagger (c_v \delta_{\mu 0} - g_A \delta_{\mu i} \sigma_i) l_\mu \quad (4.57)$$

De esta forma, la contribución del diagrama de Feynman (A) en la figura 4.2 será:

$$M_{OPE}^{(A)} = \left[ \frac{G}{2\sqrt{2}} \chi_4^\dagger (c_v \delta_{\mu 0} - g_A \delta_{\mu i} \sigma_i) l_\mu \right] \omega^{-1} \left[ \left( \frac{f_\pi}{m_\pi} \right)^2 \vec{\sigma} \cdot \mathbf{k} \chi_2 \left( -\frac{1}{k^2 + m_\pi^2} \right) \chi_3^\dagger \vec{\sigma} \cdot \mathbf{k} \chi_1 \right]$$

$$M_{OPE}^{(A)} = -\frac{G}{2\sqrt{2}} \left( \frac{f_\pi}{m_\pi} \right)^2 \omega^{-1} l_\mu \frac{\chi_4^\dagger (c_v \delta_{\mu 0} - g_A \delta_{\mu i} \sigma_i) (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{k}) \chi_2 \chi_3^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{k}) \chi_1}{k^2 + m_\pi^2}$$

Las expresiones para  $M_{OPE}^{(B)}$  y  $M_{OPE}^{(C)}$  se calculan de la misma forma, sólo que los diferentes factores que aparecen en el elemento de matriz se encuentran en diferente orden, de acuerdo a cómo entran o salen las partículas de los vértices, qué partículas están envueltas en la interacción débil y cómo se realiza el intercambio de piones. Además, debido a que en diagrama (B) la corriente leptónica se genera a partir del neutrón, aparecerá un signo negativo, de acuerdo a (4.52).

Como se dijo anteriormente, existen otros tres diagramas que aportan al cálculo del elemento de matriz, y que corresponden al intercambio de la rama leptónica. Por ejemplo, en el diagrama (A) vemos que el electrón y el antineutrino aparecen ligados a la interacción electrodébil con el protón de momentum  $p_4$ . En el diagrama complementario, estos leptones aparecerían ligados a una interacción electrodébil con el neutrón de momentum  $p_3$ , al lado izquierdo del diagrama, lo que introduciría un signo negativo para este término, de acuerdo a las expresiones para las corrientes neutras, ecuación (4.52).

De esta forma, al sumar las contribuciones de los seis diagramas la parte vectorial de la interacción débil se cancela, mientras que la parte axial daría una contribución no nula al elemento de matriz  $M_{OPE}$ . Sumando los diferentes términos en la ecuación (4.55), obtenemos la siguiente contribución del Potencial de Intercambio de Piones al elemento de matriz MURca:

$$M_{OPE} = \frac{G}{\sqrt{2}} \left( \frac{f}{m_\pi} \right)^2 g_A \omega^{-1} (k^2 + m_\pi^2)^{-1} l_i \left\{ 2k_i \chi_3^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \chi_1 \chi_4^\dagger \chi_2 \right. \\ \left. + 2k_m [\chi_4 (\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \chi_2 \chi_3^\dagger (i\epsilon_{imk} \sigma_k - \delta_{im}) \chi_1] \right\}. \quad (4.58)$$

Para obtener esta expresión, se reorganizan los términos que envuelven las matrices de Pauli, a partir de los siguientes resultados:

$$\sigma_i(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{k}) = \sum_j \sigma_i \sigma_j k_j = \sum_j (\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k) k_j = k_i + i\epsilon_{ijk} k_j \sigma_k \quad (4.59)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{k})\sigma_i = \sum_j \sigma_j \sigma_i k_j = \sum_j (\delta_{ij} + i\epsilon_{jik} \sigma_k) k_j = k_i - i\epsilon_{ijk} k_j \sigma_k \quad (4.60)$$

las relaciones dadas por (4.59) se obtienen aplicado las relaciones con conmutación y anticonmutación de las matrices de Pauli,  $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k$  y  $\sigma_i \sigma_j = 2\delta_{ij}$ , a partir de la cual se obtiene  $\sigma_{ij} = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k$ .

Con estos resultados, los términos de la forma  $-g_A \delta_{\mu i} \sigma_i (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{k})$  se escriben como  $-g_A \delta_{\mu i} (k_i + i\epsilon_{ijk} k_j \sigma_k)$ , con lo que, al realizar las simplificaciones pertinentes, se llega a la ecuación (4.3.1).

Para hallar las contribuciones de la teoría del líquido de Fermi-Landau al elemento de matriz [144], observamos primero que el elemento de matriz del operador de isoespín unitario, se anula para todos los diagramas que envuelven intercambios de carga, con lo que las contribuciones de estos diagramas solamente pueden envolver a los parámetros  $f'$  y  $g'$ . Más aún, debido a cancelaciones del mismo tipo que eliminan la parte vectorial de la interacción débil, las contribuciones con  $f$  y  $f'$  se anulan entre sí para los diagramas que no involucran intercambio de carga. En suma, las contribuciones de estos diagramas pueden envolver solamente  $g$  y  $g'$  [69].

Teniendo en consideración estos aspectos, la contribución de Landau al elemento de matriz es [69]:

$$\begin{aligned} M_L = & \frac{G}{\sqrt{2}} \left( \frac{f}{m_\pi} \right)^2 g_A \omega^{-1} l_i \left\{ 2(f' - g') [\chi_3^\dagger \sigma_i \chi_1 \chi_4^\dagger \chi_2 - \chi_4^\dagger \sigma_i \chi_2 \chi_3^\dagger \chi_1] \right. \\ & \left. + 2i\epsilon_{imk} (g - g') [\chi_3^\dagger \sigma_m \chi_1 \chi_4^\dagger \sigma_k \chi_2] \right\}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

De esta forma, para hallar  $\sum_{spins} |M|^2$ , sumamos las contribuciones de la interacción de un pión,  $M_{OPE}$ , y de Landau  $M_L$ , tomamos el cuadrado y evaluamos las trazas, usando la siguiente propiedad para la contracción de las trazas leptónicas, dadas por la relación [69]

$$Tr(l_j^\dagger l_i) = 8(q_{1j} q_{2i} + q_{1i} q_{2j} + q_{12} g_{ij} + i\epsilon_{\alpha j \beta} q_1^\alpha q_2^\beta), \quad (4.62)$$

donde  $g_{ij}$  es el tensor métrico, y  $\epsilon_{\alpha j \beta}$  es el tensor completamente antisimétrico de rango cuatro.

De esta manera, el elemento de matriz para el proceso MURCA se escribe como [69]

$$\begin{aligned} \sum_{spins} |M|^2 &= 256G^2g_A^2 \left\{ 2 \left( \frac{f}{m_\pi} \right)^4 \left( \frac{k^2}{k^2 + m_\pi^2} \right)^2 \right. \\ &\quad + 2[(g - g') + (f' - g')] \left( \frac{f}{m_\pi} \right)^2 \frac{k^2}{k^2 + m_\pi^2} \\ &\quad \left. + 3[(g - g')^2 + (f' - g')^2] \right\} \frac{\omega_1\omega_2}{\omega^2}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

donde  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son las energías de los neutrinos, que tienen momenta correspondientes  $\mathbf{q}_1$  y  $\mathbf{q}_2$ .

En tratamientos menos simplificados que el de Friman y Maxwell, el elemento de matriz (4.63), calculado asumiendo que los nucleones son partículas no-relativistas, asumiendo que el momentum de los neutrinos sea mucho menor que los momenta de las otras partículas, y promediando sobre las orientaciones del momentum del neutrino se obtiene [17, 142]

$$\sum_{spins} |M|^2 = \frac{16G^2}{\varepsilon_e^2} \left( \frac{f}{m_\pi} \right)^4 (g_V^2 F_V + g_A^2 F_A), \quad (4.64)$$

donde  $g_V = 1$  y  $g_A = 1.26$  son las constantes vectorial y axial-vectorial de la corriente débil hadrónica.

Los términos  $F_V$  y  $F_A$  que aparecen en la ecuación (4.64) están dados por las expresiones[17]

$$\begin{aligned} F_V &= q_1^4 + q_2^4 + q_3^4 + q_4^4 + q_1^2q_3^2 + q_2^2q_4^2 - q_1^2q_4^2 - q_2^2q_3^2 \\ &\quad - 2(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2 - 2(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_3)^2 - 2(\mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_4)^2 \\ &\quad - 2(\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_4)^2 + 2(\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_3)^2 + 2(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_4)^2, \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} F_A &= q_1^4 + 3q_2^4 + q_3^4 + 3q_4^4 - q_2^2q_3^2 - q_2^2q_4^2 - q_1^2q_4^2 \\ &\quad + 2(\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_3)^2 - (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_3)^2 + 2(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_4)^2 - 2(\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_4)^2. \end{aligned} \quad (4.66)$$

En las ecuaciones (4.65) y (4.66) se han definido

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i &\equiv \frac{\mathbf{k}_i}{\sqrt{k_i^2 + m_\pi^2}}, \\ \mathbf{k}_1 &= \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3 \quad , \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_2, \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2 \quad , \quad \mathbf{k}_4 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_4. \end{aligned} \quad (4.67)$$



La contribución al elemento de matriz obtenido por Friman y Maxwell puede obtenerse a partir de las ecuaciones (4.64), (4.65) y (4.66) haciendo las aproximaciones  $\mathbf{p}_e = 0$ ,  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1$  y  $\mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_3$  en el elemento de matriz, con lo que se anulan las contribuciones de las corrientes vectoriales débiles, mientras que la contribución de las corrientes axiales se transforma en

$$F_A \approx \frac{4k_1^4}{(k_1^2 + m_\pi^2)^2} + \frac{4k_3^4}{(k_3^2 + m_\pi^2)^2} + \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3)^2 - 3k_1^2 k_3^2}{(k_1^2 + m_\pi^2)(k_3^2 + m_\pi^2)}. \quad (4.68)$$

En la ecuación (4.68), el primer término corresponde al cuadrado de la amplitud de los diagramas en que el nucleón 1 se transforma en 3, y el nucleón 2 se transforma en 4. El segundo término es el cuadrado de la amplitud de la transición  $1 \rightarrow 4$  y  $2 \rightarrow 3$ , y el tercer término describe la interferencia de las dos amplitudes[17].

Ahora, si asumimos, teniendo en cuenta la desigualdad triangular, que el momentum del protón es muy pequeño en comparación al del neutrón, podemos aproximar  $k_1 \approx k_2 \approx p_{Fn}$  y  $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3 \approx \frac{p_{Fn}^2}{2}$ , con lo que el elemento de matriz se reduce a [17, 142]

$$\sum_{spins} |M|^2 = 16G^2 \left( \frac{f}{m_\pi} \right)^4 \frac{g_A^2}{\varepsilon_e^2} \frac{21}{4} \frac{p_{Fn}^4}{(p_{Fn}^2 + m_{\pi^2})^2}. \quad (4.69)$$

El elemento de matriz que aparece en (4.69) es independiente de la orientación de los momenta de las partículas, con lo que puede extraerse de la integral en (4.28). Usando esta aproximación, la emisividad para el proceso MURca puede escribirse en la forma [69]

$$Q^M = \frac{11513}{60480} \frac{G^2 g_A^2 m_n^{*3} m_p^*}{2\pi\hbar} \left( \frac{f}{m_\pi} \right)^4 p_{Fe} \alpha_{MURca} (kT)^8, \quad (4.70)$$

donde  $\alpha_{MURca}$  es un factor que aparece debido a la estimación de los términos de interferencia, y está dada por [69]

$$\begin{aligned} \alpha_{MURca} &= 2 \left( \frac{p_{Fn}^2}{p_{Fn}^2 + m_\pi^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{f}{m_\pi} \right)^{-2} [(g - g') + (f' - g')] \frac{p_{Fn}^2}{p_{Fn}^2 + m_\pi^2} \\ &+ 3 \left( \frac{f}{m_\pi} \right)^{-4} [(g - g')^2 + (f' - g')^2]. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Al calcular el promedio de la energía transmitida al anti-neutrino, la expresión para la emisividad MURca se escribe como

$$Q^M = \frac{11513}{60480} \frac{G^2 g_A^2 m_n^{*3} m_p^*}{2\pi\hbar} \left( \frac{f}{m_\pi} \right)^4 p_{Fe} \alpha_{MURca} (kT)^8. \quad (4.72)$$

Haciendo una expansión en serie de potencias de  $(m_\pi/p_{Fn})^2$  para la función  $\alpha_{MURca}$ , y reemplazando la expresión para el momentum de Fermi del neutrón en términos de la densidad, se obtiene finalmente la siguiente expresión para la emisividad de neutrinos, en términos de la densidad  $\rho$ :

$$Q^M = (6.257 \times 10^{19} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}) \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3} T_9^8. \quad (4.73)$$

## 4.4 Influencia de la EoS en el enfriamiento

En esta sección se analizarán las características del proceso de enfriamiento de los modelos de NS calculados en el capítulo anterior, realizando cálculos numéricos de las luminosidades de neutrinos para los escenarios de enfriamiento acrecentado y estándar, calculadas a partir de (4.24) y (4.73), respectivamente.

Para calcular la luminosidad total,  $L_\nu$ , que corresponde a la energía total emitida por la estrella por unidad de tiempo, debe resolverse la integral

$$L_\nu = \int_V Q_\nu dV = 4\pi \int_0^R Q_\nu r^2 dr, \quad (4.74)$$

donde la última igualdad se debe al hecho que la emisividad  $Q_\nu$  es una función esféricamente simétrica<sup>12</sup>.

### 4.4.1 Ecuación de Pandharipande (neutrones)

Las emisividades de neutrinos en los procesos MURca y DURca, para la EoS de Pandharipande (neutrones), se muestran en la figura 4.3.

Realizando una integración numérica de las emisividades mostradas en la figura 4.3 se obtienen las luminosidades totales para los procesos MURca,  $L_\nu^M$ , y DURca,  $L_\nu^D$ , para la EoS de Pandharipande (neutrones) que se muestran en la tabla 4.2.

---

<sup>12</sup>Es posible incluir, en la ecuación (4.74), un factor correspondiente al corrimiento al rojo de la emisividad total, que corresponde, de acuerdo a la métrica de Schwarzschild a  $(1 - \frac{2GM}{c^2 r})$ . Las modificaciones que se obtienen al realizar la integración con este factor están entre el 1 y 5 %, con lo que la expresión clásica (4.74) es bastante precisa.

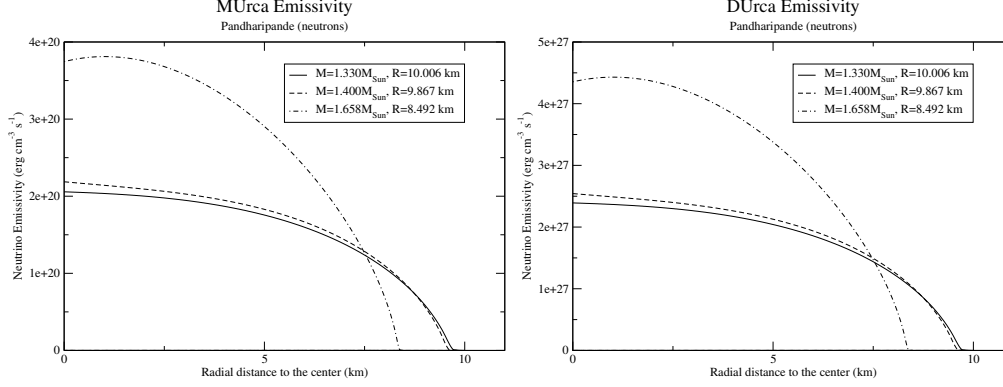


Figura 4.3: Emisividades de neutrinos para el proceso MURca (izquierda) y DURca (derecha) para la EoS de Pandharipande (neutrones).

Masa $M_{\odot}$	Radio (km)	$L_{\nu}^M$ ( $erg\ s^{-1}$ )	$L_{\nu}^D$ ( $erg\ s^{-1}$ )
1.330	10.006	$4.28907 \times 10^{38}$	$4.98603 \times 10^{45}$
1.400	9.867	$4.38711 \times 10^{38}$	$5.1 \times 10^{45}$
1.658	8.492	$4.8169 \times 10^{38}$	$5.59964 \times 10^{45}$

Cuadro 4.2: Luminosidades totales para los procesos MURca ( $L_{\nu}^M$ ) y DURca ( $L_{\nu}^D$ ) obtenidas para la EoS de Pandharipande (neutrones)

#### 4.4.2 Ecuación de Pandharipande (hiperones)

Usando las expresiones (4.24) y (4.73) y los datos del perfil densidad correspondientes a la EoS de Pandharipande (hiperones), se construyeron las gráficas de la emisividad de neutrinos para los procesos MURca y DURca, que se muestran en la figura 4.4.

Integrando numéricamente las emisividades mostradas en la figura 4.4 se obtienen las luminosidades totales para los procesos MURca,  $L_{\nu}^M$ , y DURca,  $L_{\nu}^D$ , para la EoS de Pandharipande (hiperones) que se muestran en la tabla 4.3.

#### 4.4.3 Ecuación de Bethe-Johnson V

Las emisividades de neutrinos en los procesos DURca y MURca, para la EoS de Bethe-Johnson, se muestran en la figura 4.5.

Realizando una integración numérica de las emisividades mostradas en la figura 4.5 se obtienen las luminosidades totales para los procesos MURca,

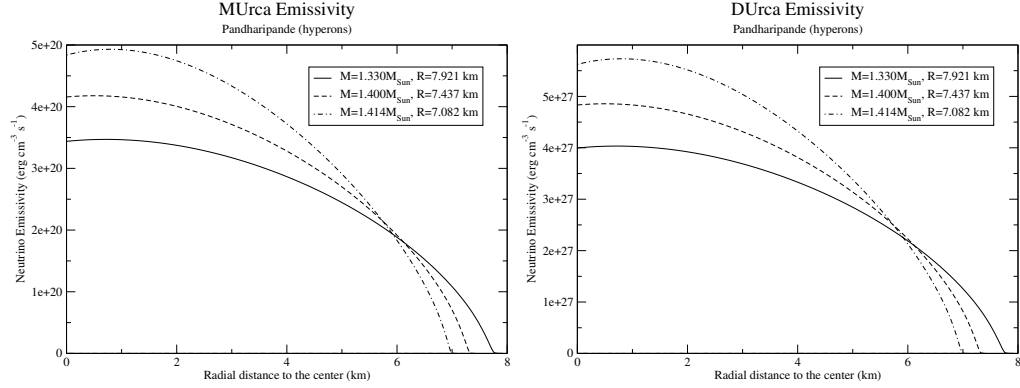


Figura 4.4: Emisividades de neutrinos para el proceso MURca (izquierda) y DURca (derecha) para la EoS de Pandharipande (hiperones).

Masa $M_{\odot}$	Radio (km)	$L_{\nu}^M$ ( $erg\ s^{-1}$ )	$L_{\nu}^D$ ( $erg\ s^{-1}$ )
1.330	7.921	$3.44326 \times 10^{38}$	$4.00278 \times 10^{45}$
1.400	7.437	$3.41449 \times 10^{38}$	$3.96934 \times 10^{45}$
1.414	7.082	$3.42175 \times 10^{38}$	$3.97777 \times 10^{45}$

Cuadro 4.3: Luminosidades totales para los procesos MURca ( $L_{\nu}^M$ ) y DURca ( $L_{\nu}^D$ ) obtenidas para la EoS de Pandharipande (hiperones)

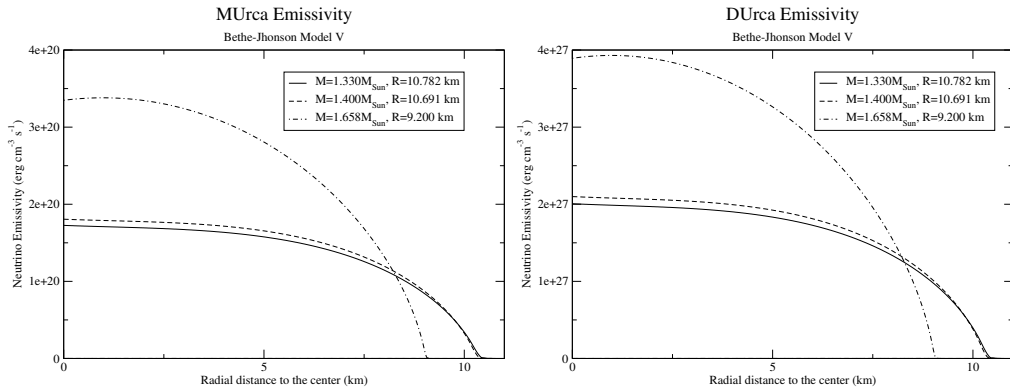


Figura 4.5: Emisividades de neutrinos para el proceso MURca (izquierda) y DURca (derecha) para la EoS de Bethe-Johnson.

$L_{\nu}^M$ , y DURca,  $L_{\nu}^D$ , para la EoS de Bethe-Johnson que se muestran en la tabla 4.4.

Masa $M_{\odot}$	Radio (km)	$L_{\nu}^M$ ( $erg\ s^{-1}$ )	$L_{\nu}^D$ ( $erg\ s^{-1}$ )
1.330	10.782	$4.77708 \times 10^{38}$	$5.55334 \times 10^{45}$
1.400	10.691	$4.95936 \times 10^{38}$	$5.76524 \times 10^{45}$
1.658	9.200	$5.69959 \times 10^{38}$	$6.62577 \times 10^{45}$

Cuadro 4.4: Luminosidades totales para los procesos MURca ( $L_{\nu}^M$ ) y DURca ( $L_{\nu}^D$ ) obtenidas para la EoS de Bethe-Johnson

#### 4.4.4 Ecuación de Walecka

Usando las expresiones (4.24) y (4.73) y los datos del perfil densidad correspondientes a la EoS de Walecka, se construyeron las gráficas de la emisividad de neutrinos para los procesos MURca y DURca, que se muestran en la figura 4.6.

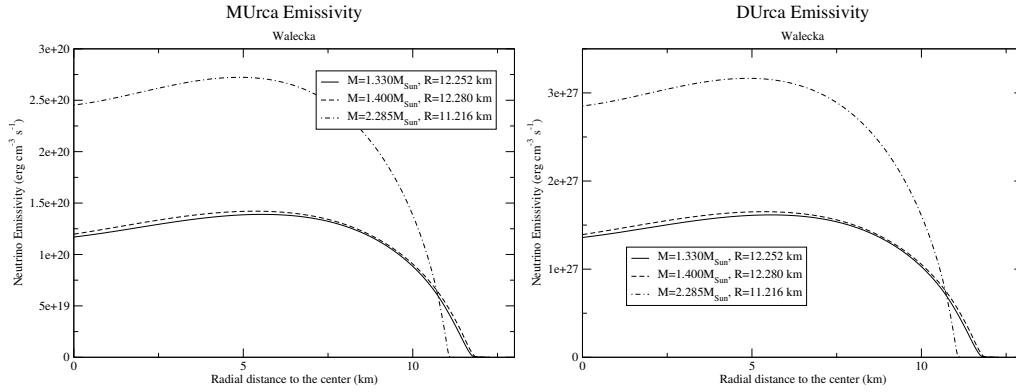


Figura 4.6: Emisividades de neutrinos para el proceso MURca (izquierda) y DURca (derecha) para la EoS de Walecka.

Integrando numéricamente las emisividades mostradas en la figura 4.6 se obtienen las luminosidades totales para los procesos MURca,  $L_{\nu}^M$ , y DURca,  $L_{\nu}^D$ , para la EoS de Walecka que se muestran en la tabla 4.5.

#### 4.4.5 Ecuación de Friedman-Pandharipande

Las emisividades de neutrinos en los procesos DURca y MURca, para la EoS de Friedman-Pandharipande, se muestran en la figura 4.7.

Realizando una integración numérica de las emisividades mostradas en la

Masa $M_{\odot}$	Radio (km)	$L_{\nu}^M$ ( $erg\ s^{-1}$ )	$L_{\nu}^D$ ( $erg\ s^{-1}$ )
1.330	12.252	$6.37666 \times 10^{38}$	$7.41286 \times 10^{45}$
1.400	12.280	$6.57871 \times 10^{38}$	$7.64774 \times 10^{45}$
2.285	11.216	$1.06908 \times 10^{39}$	$1.2428 \times 10^{46}$

Cuadro 4.5: Luminosidades totales para los procesos MUrca ( $L_{\nu}^M$ ) y DUrca ( $L_{\nu}^D$ ) obtenidas para la EoS de Walecka.

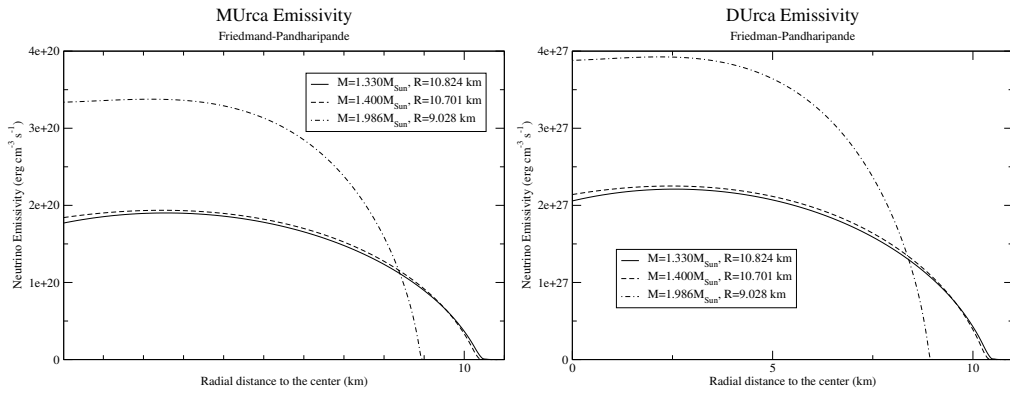


Figura 4.7: Emisividades de neutrinos para el proceso MUrca (izquierda) y DUrca (derecha) para la EoS de Friedman-Pandharipande.

figura 4.7 se obtienen las luminosidades totales para los procesos MUrca,  $L_{\nu}^M$ , y DUrca,  $L_{\nu}^D$ , para la EoS de Friedman-Pandharipande que se muestran en la tabla 4.6.

Masa $M_{\odot}$	Radio (km)	$L_{\nu}^M$ ( $erg\ s^{-1}$ )	$L_{\nu}^D$ ( $erg\ s^{-1}$ )
1.330	10.824	$5.2373 \times 10^{38}$	$6.08835 \times 10^{45}$
1.400	10.701	$5.32487 \times 10^{38}$	$6.19016 \times 10^{45}$
1.986	9.028	$6.44242 \times 10^{38}$	$7.48937 \times 10^{45}$

Cuadro 4.6: Luminosidades totales para los procesos MUrca ( $L_{\nu}^M$ ) y DUrca ( $L_{\nu}^D$ ) obtenidas para la EoS de Friedman-Pandharipande

#### 4.4.6 Ecuación de Wirlinga, Fiks y Fabrocini

Usando las expresiones (4.24) y (4.73) y los datos del perfil densidad correspondientes a la EoS de Wirlinga, se construyeron las gráficas de la emisividad

de neutrinos para los procesos MURca y DURca, que se muestran en la figura 4.8.

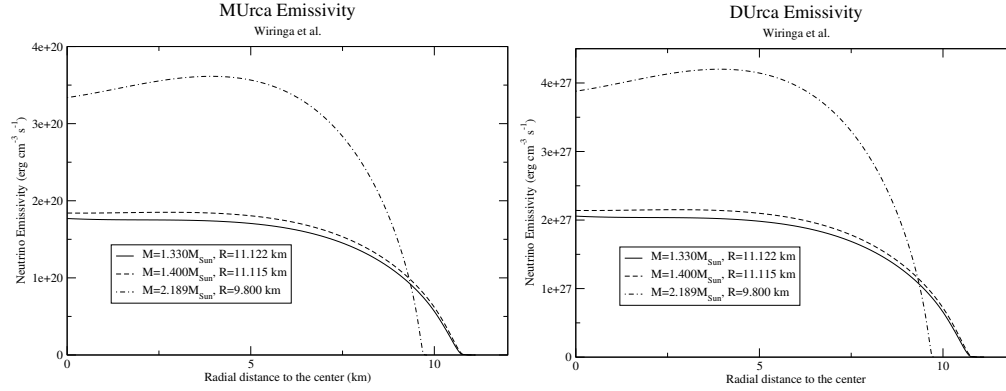


Figura 4.8: Emisividades de neutrinos para el proceso MURca (izquierda) y DURca (derecha) para la EoS de Wiringa.

Integrando numéricamente las emisividades mostradas en la figura 4.8 se obtienen las luminosidades totales para los procesos MURca,  $L_\nu^M$ , y DURca,  $L_\nu^D$ , para la EoS de Wiringa que se muestran en la tabla 4.7.

Masa $M_\odot$	Radio (km)	$L_\nu^M$ ( $erg\ s^{-1}$ )	$L_\nu^D$ ( $erg\ s^{-1}$ )
1.330	11.122	$5.72967 \times 10^{38}$	$6.66072 \times 10^{45}$
1.400	11.115	$6.09316 \times 10^{38}$	$7.08329 \times 10^{45}$
2.189	9.800	$9.4206 \times 10^{38}$	$1.09514 \times 10^{46}$

Cuadro 4.7: Luminosidades totales para los procesos MURca ( $L_\nu^M$ ) y DURca ( $L_\nu^D$ ) obtenidas para la EoS de Wiringa.

#### 4.4.7 Ecuación de Prakash, Ainsworth y Lattimer

Las emisividades de neutrinos en los procesos MURca y DURca, para la EoS de Prakash, Ainsworth y Lattimer, se muestran en la figura 4.9.

Realizando una integración numérica de las emisividades mostradas en la figura 4.9 se obtienen las luminosidades totales para los procesos MURca,  $L_\nu^M$ , y DURca,  $L_\nu^D$ , para la EoS de Prakash, Ainsworth y Lattimer que se muestran en la tabla 4.8.

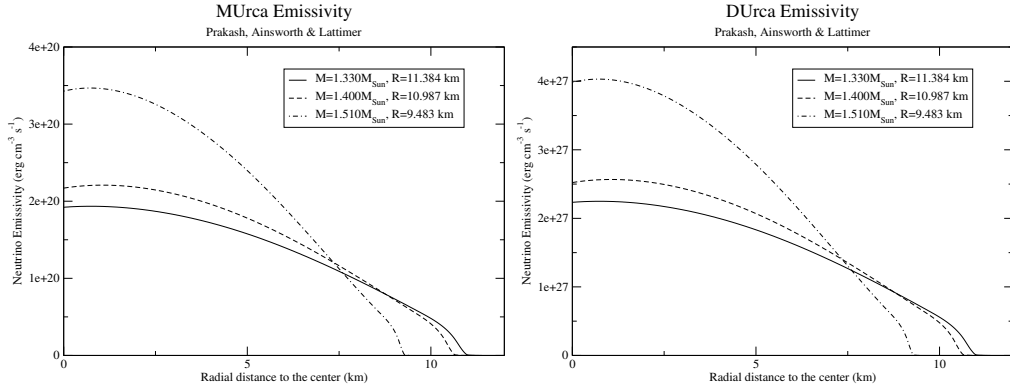


Figura 4.9: Emisividades de neutrinos para el proceso MUrca (izquierda) y DURca (derecha) para la EoS de Prakash, Ainsworth y Lattimer.

Masa $M_{\odot}$	Radio (km)	$L_{\nu}^M$ ( $erg\ s^{-1}$ )	$L_{\nu}^D$ ( $erg\ s^{-1}$ )
1.330	11.384	$4.76114 \times 10^{38}$	$5.53482 \times 10^{45}$
1.400	10.987	$4.87048 \times 10^{38}$	$5.66193 \times 10^{45}$
1.510	9.483	$4.5632 \times 10^{38}$	$5.30471 \times 10^{45}$

Cuadro 4.8: Luminosidades totales para los procesos MUrca ( $L_{\nu}^M$ ) y DURca ( $L_{\nu}^D$ ) obtenidas para la EoS de Prakash, Ainsworth y Lattimer

#### 4.4.8 Ecuación de Sahu, Basu y Datta

Usando las expresiones (4.24) y (4.73) y los datos del perfil densidad correspondientes a la EoS de Sahu, Basu y Datta, se construyeron las gráficas de la emisividad de neutrinos para los procesos MUrca y DURca, que se muestran en la figura 4.10.

Integrando numéricamente las emisividades mostradas en la figura 4.10 se obtienen las luminosidades totales para los procesos MUrca,  $L_{\nu}^M$ , y DURca,  $L_{\nu}^D$ , para la EoS de Sahu, Basu y Datta que se muestran en la tabla 4.9.



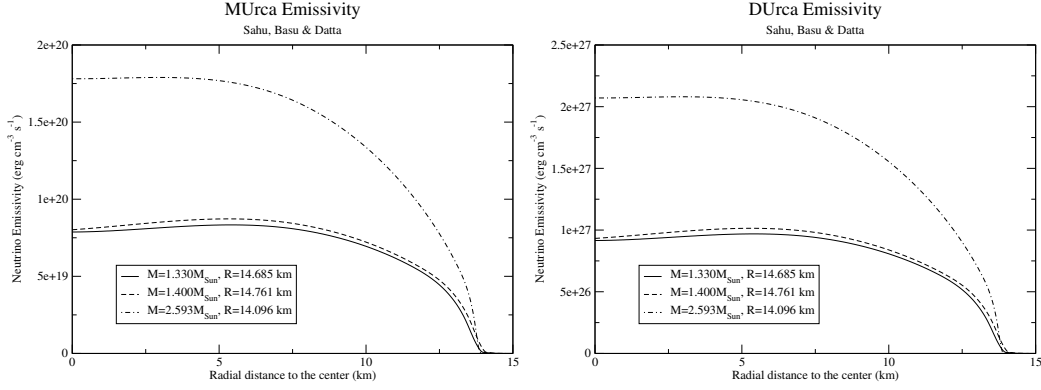


Figura 4.10: Emisividades de neutrinos para el proceso MUrca (izquierda) y DURca (derecha) para la EoS de Sahu, Basu y Datta.

Masa $M_{\odot}$	Radio (km)	$L_{\nu}^M$ ( $erg\ s^{-1}$ )	$L_{\nu}^D$ ( $erg\ s^{-1}$ )
1.330	14.685	$6.37192 \times 10^{38}$	$7.40734 \times 10^{45}$
1.400	14.761	$6.76751 \times 10^{38}$	$7.86722 \times 10^{45}$
2.593	14.096	$1.23677 \times 10^{39}$	$1.43744 \times 10^{46}$

Cuadro 4.9: Luminosidades totales para los procesos MUrca ( $L_{\nu}^M$ ) y DURca ( $L_{\nu}^D$ ) obtenidas para la EoS de Sahu, Basu y Datta.

## 4.5 Influencia de los diferentes modelos de EoS sobre el proceso de enfriamiento por emisión de neutrinos

En esta sección realizaremos una comparación entre los procesos de enfriamiento de NS con masas de  $1.330M_{\odot}$  y  $1.400M_{\odot}$ , considerando las diferentes EoS que se analizaron.

En las figuras 4.11 y 4.12 se muestran las luminosidades de neutrinos, producidos en los procesos MUrca y Durca (respectivamente), para una estrella de masa  $1.330M_{\odot}$ , mientras que en la tabla 4.10 aparecen las luminosidades totales para cada uno de los modelos estudiados.

En las figuras 4.13 y 4.14 se muestran las luminosidades de neutrinos, producidos en los procesos MUrca y Durca (respectivamente), para una estrella de masa  $1.400M_{\odot}$ , mientras que en la tabla 4.11 aparecen las luminosidades

#### 4.5. INFLUENCIA DE LOS DIFERENTES MODELOS DE EOS SOBRE EL PROCESO DE ENFRIAMIENTO POR EMISIÓN DE NEUTRINOS

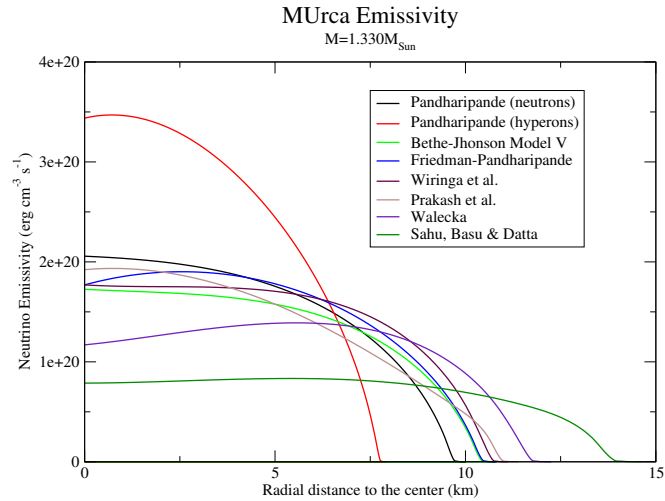


Figura 4.11: Gráfica comparativa de las emisividades de neutrinos producidos durante el proceso MURca, para una NS de masa  $1.330M_{\odot}$ .

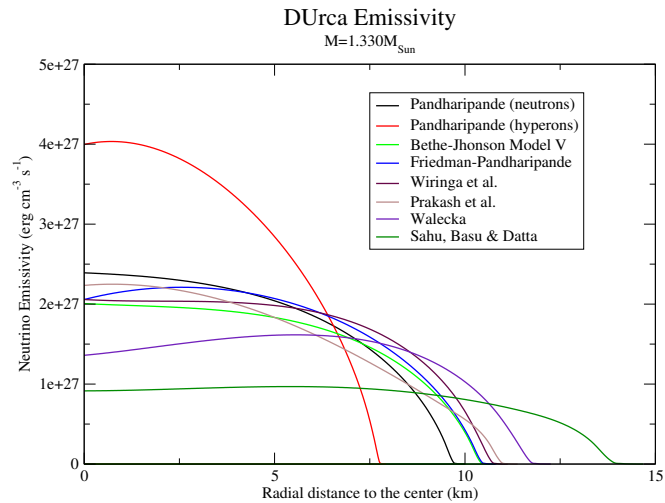


Figura 4.12: Gráfica comparativa de las emisividades de neutrinos producidos durante el proceso DURca, para una NS de masa  $1.330M_{\odot}$ .

totales para cada uno de los modelos estudiados.

A partir de las gráficas y tablas que se han presentado, podemos concluir que,

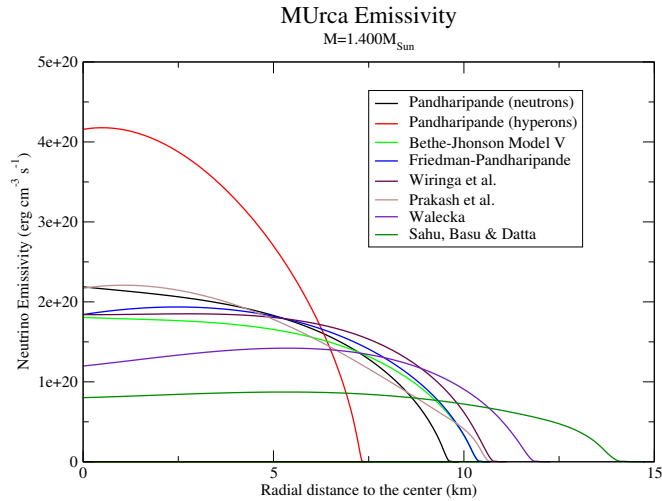


Figura 4.13: Gráfica comparativa de las emisividades de neutrinos producidos durante el proceso MURca, para una NS de masa  $1.400M_{\odot}$ .

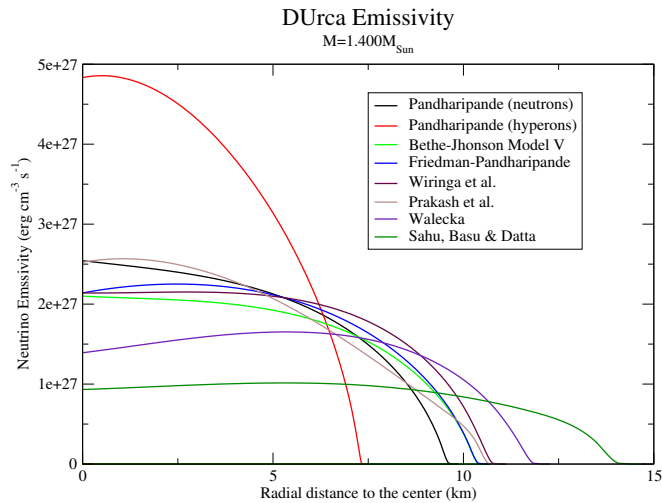


Figura 4.14: Gráfica comparativa de las emisividades de neutrinos producidos durante el proceso DURca, para una NS de masa  $1.400M_{\odot}$ .

con la excepción de la EoS de Pandharipande para la materia hiperónica (una EoS muy rígida) y la EoS de Sahu et al. (una EoS muy suave) la emisividad para los procesos MURca y DURca tiene comportamientos muy similares para todas las EoS estudiadas, ya que se presenta un entrecruce de las curvas en

#### 4.5. INFLUENCIA DE LOS DIFERENTES MODELOS DE EOS SOBRE EL PROCESO DE ENFRIAMIENTO POR EMISIÓN DE NEUTRINOS

---

las regiones centrales de las figuras 4.11, 4.12, 4.13 y 4.14.

Vemos además que para la EoS de Walecka, aunque la emisividad central es inferior a las demás (excepto la correspondiente a la EoS de Sahu, et al.), la luminosidad total no se ve reducida en comparación a las demás debido al comportamiento creciente con la distancia radial que tiene la emisividad para esta EoS. Este comportamiento es consecuencia de la presencia de mesones escalares y vectoriales en el modelo propuesto para obtener la EoS.

Se observa también que, aunque la emisividad de neutrinos en la EoS de Sahu et al. está por debajo de las correspondientes otros modelos (producto del carácter suave de la EoS), es ésta la EoS que permite una emisión de energía más constante a través de la estrella, ya que la función de emisividad es casi plana, para distancias radiales entre 0 y 12 km<sup>13</sup>.

A partir de las tablas 4.10 y 4.11 observamos que la luminosidad del proceso DÚrca es siete órdenes de magnitud superior a la del proceso MÚrca, lo que justifica las denominaciones de los escenarios de enfriamiento acrecentado y estándar, respectivamente.

Por otra parte, vemos que las luminosidades totales para los diferentes modelos se encuentran muy cerca entre sí, con lo que la decisión sobre cuál es el tipo de composición presente en una estrella cuya luminosidad sea observada y qué tipo de interacciones nucleares se presentan en su interior (es decir, determinar su EoS), requerirá medidas muy precisas de la luminosidad.

---

<sup>13</sup>Recordemos que para la EoS de Sahu, Basu y Datta los radios son de 14.685 km, para la estrella de  $1.300M_{\odot}$ , y 14.761 km, para la estrella de masa  $1.400M_{\odot}$ .

---

EoS	$\rho_c/\rho_0$	R(km)	$L_\nu^M \times 10^{38} \text{erg s}^{-1}$	$L_\nu^D \times 10^{45} \text{erg s}^{-1}$
Pandharipande (neutrones)	5.961	10.006	4.28907	4.98603
Pandharipande (hiperones)	12.8786	7.921	3.44326	4.00278
Bethe-Johnson Model V	4.582	10.782	4.77708	5.55334
Walecka	2.556	12.252	6.37666	7.41286
Friedman-Pandharipande	4.757	10.824	5.2373	6.08835
Wiringa, Fiks y Fabrocini	3.571	11.122	5.72967	6.66072
Prakash, Ainsworth y Lattimer	5.382	11.384	4.76114	5.53482
Sahu, Basu y Datta	1.411	14.685	6.37192	7.40734

Cuadro 4.10: Resumen de resultados para la luminosidad de neutrinos, producidos en los procesos MURca y DURca, para una NS de masa  $1.330M_\odot$ , para las ocho EoS analizadas en este trabajo.

4.5. INFLUENCIA DE LOS DIFERENTES MODELOS DE EOS SOBRE  
86EL PROCESO DE ENFRIAMIENTO POR EMISIÓN DE NEUTRINOS

---

EoS	$\rho_c/\rho_0$	R(km)	$L_\nu^M \times 10^{38} \text{erg s}^{-1}$	$L_\nu^D \times 10^{45} \text{erg s}^{-1}$
Pandharipande (neutrones)	6.536	9.867	4.38711	5.1
Pandharipande (hiperones)	17.125	7.437	3.41449	3.96934
Bethe-Johnson Model V	4.904	10.691	4.95936	5.76524
Walecka	2.648	12.280	6.57871	7.64774
Friedman- Pandharipande	5.046	10.701	5.32487	6.19016
Wiringa, Fiks y Fabrocini	3.725	11.115	6.09316	7.08329
Prakash, Ainsworth y Lattimer	6.457	10.987	4.87048	5.66193
Sahu, Basu y Datta	1.451	14.761	6.76751	7.86722

Cuadro 4.11: Resumen de resultados para la luminosidad de neutrinos, producidos en los procesos MUrca y DUrca, para una NS de masa  $1.400M_\odot$ , para las ocho EoS analizadas en este trabajo.

---

# Capítulo 5

## Consideraciones adicionales

En este capítulo se analizarán efectos adicionales que pueden modificar la emisividad de neutrinos en una NS, tales como el retroceso de los nucleones, la violación de paridad y las interacciones pseudo-escalares entre los nucleones. Por otro lado, se analizará también el efecto de la superfluidez en la materia nucleónica densa en una NS, por debajo de la temperatura crítica en la que se presenta la transición de fase en que aparecen pares de Cooper de nucleones.

### 5.1 Teoría de Campo Medio

En esta sección analizaremos la aplicación de la Teoría de Campo Medio para determinar la emisividad de neutrinos producto del proceso DUrca que, como se mencionó en el capítulo anterior, es uno de los procesos más rápido de enfriamiento de NS, ya que corresponde a la fuente más poderosa de neutrinos y antineutrinos.

La condición sobre la fracción de protones,  $x_p \geq 1/9$ , aparece solamente a densidades muy altas, donde los momenta de Fermi de los nucleones son comparables con sus masas efectivas [135]. En este caso, la densidad central  $\rho_c$  de la NS debe ser  $\rho_c \leq 8\rho_0$ , lo que implica, a estas densidades tan altas, que los nucleones sean partículas relativistas. Esto nos llevará al estudio del proceso DUrca totalmente relativista con nucleones, en el que se analizará un modelo de la materia bariónica relativista, tipo Walecka, donde las interacciones se realizan a través del intercambio de mesones  $\sigma$ ,  $\omega$  y  $\rho$ . Además, el cálculo de las pérdidas de energía por emisión de neutrinos se realiza en la aproximación de campo medio, que permite determinar, en forma autoconsistente,

la composición de la materia, su energía y las masas efectivas de los bariones constituyentes [145].

### 5.1.1 Cinemática de la reacción y Modelos de la materia nuclear

Analizaremos la cinemática relativista de la reacción  $n \rightarrow p + l + \bar{\nu}_l$  en la materia degenerada en equilibrio beta, para lo cual consideraremos neutrinos no masivos con cuatrimomentum  $k_1 = (\omega_1, \mathbf{k}_1)$ , con  $\omega_1 = |\mathbf{k}_1|$ , y leptones  $l = e^-, \mu^-$  de masa  $m_l$  con cuatrimomentum  $k_2 = (\omega_2, \mathbf{k}_2)$ , con  $\omega_2^2 = \mathbf{k}_2^2 + m_l^2$ . De esta forma, la conservación de energía y momentum en la reacción se expresa a través de las ecuaciones

$$E_n(\mathbf{p}) - E_p(\mathbf{p}') - \omega_1 - \omega_2 = 0, \quad \mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 = 0, \quad (5.1)$$

donde  $E_n(\mathbf{p})$  y  $E_p(\mathbf{p}')$  son las energías del neutrón y el protón en el medio, dependientes de sus momenta  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{p}'$ , respectivamente.

El intercambio de energía es del orden de la temperatura  $T$ , que es baja en comparación con las energías cinéticas típicas de las partículas degeneradas. Así, los momenta de los fermiones pueden aproximarse a sus valores sobre la superficie de Fermi.

Ya que  $\omega_1 = |\mathbf{k}_1| \sim T$ , podemos despreciar la contribución del neutrino en la ecuación (5.1), con lo que la ecuación de conservación del momento,  $\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_l = \mathbf{p}_n$  nos lleva a la condición triangular

$$p_p + p_l \geq p_n. \quad (5.2)$$

La desigualdad (5.2) es, como ya se ha mencionado anteriormente, la primera de las condiciones necesaria para que el proceso DUrca opere. La segunda condición se obtiene a partir de la conservación de la energía:

$$E_n(p_n) - E_p(p_p) = \omega_2 = \sqrt{\mathbf{k}_2^2 + m_l^2} = \sqrt{(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p)^2 + m_l^2}. \quad (5.3)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación (5.3) obtenemos

$$(E_n(p_n) - E_p(p_p))^2 - (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p)^2 = m_l^2, \quad (5.4)$$

definiendo  $K^\mu = (E_n(p_n) - E_p(p_p), \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p)$ , el cuatrivector de transferencia de energía-momentum, podemos escribir  $K^2 = m_l^2$ .



Consideremos ahora la condición de equilibrio beta, escrita en términos de los potenciales químicos,  $\mu_n = \mu_p + \mu_l$ . Debido a que los potenciales químicos de las partículas degeneradas pueden aproximarse a sus energías de Fermi, tendremos que

$$E_n(p_n) - E_p(p_p) = \sqrt{p_l^2 + m_l^2}. \quad (5.5)$$

La ecuación (5.5) es diferente a la ecuación (5.3) debido a que la materia nuclear alcanza el equilibrio químico ( $\mu_n = \mu_p + \mu_l$ ) aún cuando no se alcance el equilibrio beta ( $\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_l = \mathbf{p}_n$ ). Si la condición de equilibrio beta es satisfecha, las ecuaciones (5.5) y (5.3) coinciden, y la “condición triangular” es la condición necesaria y suficiente para activar el proceso DÚrca.

Para encontrar una relación entre los momenta de protón y neutrón, necesaria para que el proceso DÚrca opere, analizaremos dos modelos: el **Modelo del gas libre**, en el que se asume que las partículas no interactúan al interior de la NS, y un **Modelo de Teoría de Campos en la aproximación de Campo Medio**, en el que consideramos que la materia nuclear interactúa a través del intercambio de mesones  $\sigma$ ,  $\omega$  y  $\rho$ .

### 5.1.2 Modelo del Gas Libre

Consideremos un gas libre degenerado compuesto por neutrones, protones y electrones en equilibrio beta.

A partir de la ecuación (5.4) vemos que debe existir una diferencia entre las energías del neutrón y el protón con miras a que el cuadrivector  $K$  sea como de tiempo. En el caso del gas libre, esta brecha de energías se debe a la diferencia de masas  $m_n - m_p$ , como veremos a continuación.

Las energías de Fermi del neutrón y el protón están dadas por

$$E_n(p_n) = \sqrt{m_n^2 + p_n^2}, \quad E_p(p_p) = \sqrt{m_p^2 + p_p^2}. \quad (5.6)$$

Debido a que las NS son neutras, las densidades de protones y electrones son iguales, y ya que  $n_i \propto p_i^3$ , tenemos que  $p_p = p_e$ , con lo que la ecuación de equilibrio químico (5.5) nos queda:

$$\sqrt{m_n^2 + p_n^2} - \sqrt{m_p^2 + p_p^2} = \sqrt{m_e^2 + p_p^2}. \quad (5.7)$$

A partir de la ecuación (5.5) se puede obtener una expresión analítica para el momentum del protón en función del momentum del neutrón [83]:

$$p_p = \frac{1}{2\sqrt{p_n^2 + m_n^2}} \sqrt{[p_n^2 + m_n^2 - (m_p + m_e)^2][p_n^2 + m_n^2 - (m_p - m_e)^2]}. \quad (5.8)$$

Reemplazando los valores numéricos para las masas de neutrón, protón y electrón (5.8), podemos construir una gráfica de la función  $p_p(p_n)$ , gráfica que se muestra en la figura 5.1.

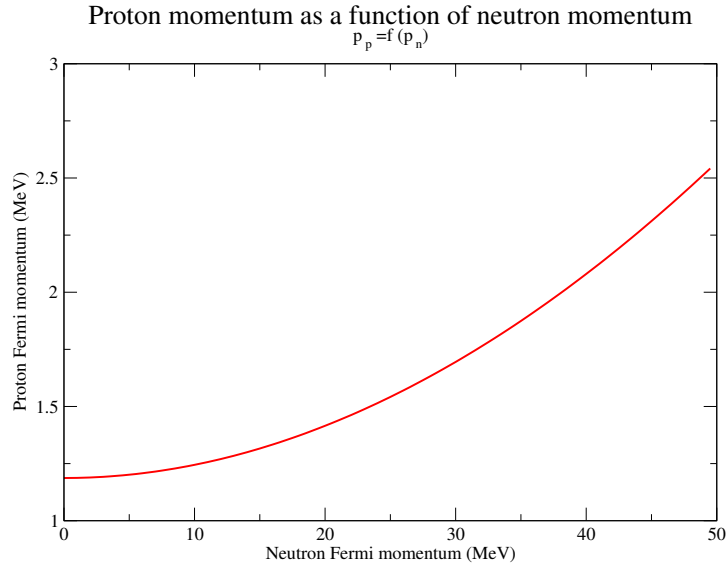


Figura 5.1: Momentum de Fermi del protón en función del momentum de Fermi del neutrón, para el Modelo del Gas Libre

Debido a la condición triangular, para que el proceso DUrca esté permitido debemos tener que  $2p_p \geq p_n$ , con lo que

$$p_p \geq \frac{p_n}{2}. \quad (5.9)$$

Para obtener el valor crítico del momentum de Fermi del neutrón, igualamos las ecuaciones (5.8) y (5.9):

$$\frac{p_n}{2} = \frac{1}{2\sqrt{p_n^2 + m_n^2}} \sqrt{[p_n^2 + m_n^2 - (m_p + m_e)^2][p_n^2 + m_n^2 - (m_p - m_e)^2]}. \quad (5.10)$$

La ecuación (5.10) se puede resolver de forma exacta para  $p_n$ , y su resultado es [145]:

$$p_n^c = \frac{\sqrt{[m_n^2 - (m_p - m_e)^2][m_n^2 - (m_p + m_e)^2]}}{\sqrt{2m_p^2 + 2m_e^2 - m_n^2}}. \quad (5.11)$$

Reemplazando los valores numéricos de las masas de las partículas, se encuentra que el valor crítico del momentum de Fermi del neutrón es

$$p_n^c = 2.3811 \text{ MeV}. \quad (5.12)$$

De acuerdo a la relación (5.9), tendremos que, en el caso del gas libre, el momentum de Fermi del neutrón debe satisfacer la desigualdad

$$0 \leq p_n \leq 2.3811 \text{ MeV}. \quad (5.13)$$

Con lo que el proceso DUrca estará prohibido si la densidad de neutrones es mayor que

$$n_n^c = \frac{(p_n^c)^3}{3\pi^2 \hbar^3} = 5.934 \times 10^{-8} \text{ fm}^{-3} = 5.934 \times 10^{31} \text{ cm}^{-3}. \quad (5.14)$$

Ya que esta densidad crítica es mucho menor que la densidad de neutrones típica en los núcleos de las NS, el modelo del gas libre no es viable como una descripción de la materia al interior de las NS, ya que las diferencias de energías entre los neutrones y protones se debe exclusivamente a sus diferencias de masa.

### 5.1.3 Modelo de Teoría de Campos en la Aproximación de Campo Medio

Para que el decaimiento del neutrón que se presenta en el proceso DUrca esté permitido, debemos generalizar el modelo de la materia nuclear e incluir algunos grados de libertad y acoples adicionales, capaces de crear una diferencia de energías, entre el neutrón y el protón, que sea mayor que la correspondiente al modelo del gas libre. Por ejemplo, un modelo simple para la materia bariónica [54], que contenga mesones neutros escalares ( $\sigma$ ) y vectoriales ( $\omega_\mu$ ) reproduce de manera simple la amplitud de dispersión NN observada experimentalmente, al igual que otras propiedades nucleares. Sin embargo, los mesones neutros escalares y vectoriales interactúan con protones y neutrones de forma equitativa, que por ende tendrán espectros de energía

idénticos [145]. Por ende, la energía y el momentum no puede conservarse de forma simultánea en el decaimiento directo del neutrón.

De esta forma, adicionalmente a los mesones isoescales  $\sigma$  y  $\omega$ , el modelo deberá incluir también mesones isovectoriales, ya que éstos se acoplan de manera diferente a protones y electrones, creando una diferencia de energías entre neutrón y protón necesaria para que el proceso DURca opere.

De esta forma, consideraremos un modelo relativista autoconsistente de la materia nuclear en donde la composición bariónica será

$$B = n, p, \Sigma^-, \Sigma^+, \Sigma^0, \Lambda.$$

La tabla 5.1 muestra las masas y tiempos de vida media ( $\tau$ ) de las partículas anteriores, tomados de [146] Deberíamos además incluir en el modelo los

Partícula	Masa (MeV)	$\tau$
n	939.565	885.7 s
p	938.272	$> 2.1 \times 10^{21}$ años
$\Sigma^-$	1197.449	$1.479 \times 10^{-10}$ s
$\Sigma^0$	1192.642	$7.4 \times 10^{-20}$ s
$\Sigma^+$	1189.37	$0.8018 \times 10^{-10}$ s
$\Lambda$	1115.683	$2.631 \times 10^{-10}$ s

Cuadro 5.1: Valores de las masas y tiempos de vida media de los bariones que constituyen la NS en la Aproximación de Campo Medio

campos de los piones, pero ya que sus valores esperados son nulos, no contribuyen a los campos medios.

De esta forma, la densidad Lagrangiana que consideraremos, es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_B \bar{B} \left[ \gamma_\mu (i\partial^\mu - g_{\omega B} \omega^\mu - \frac{1}{2} g_{\rho B} \vec{b}^\mu \cdot \vec{\tau}) - (M_B - g_{\sigma B} \sigma) \right] B \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu - \frac{1}{4} \vec{B}_{\mu\nu} \cdot \vec{B}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{b}_\mu \cdot \vec{b}^\mu \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - U(\sigma) + \bar{l} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_l) l, \end{aligned} \quad (5.15)$$

En la ecuación (5.15)  $B$  representa los Espinores de Dirac de los bariones considerados,  $\vec{b}_\mu$  es el campo isovectorial del mesón  $\rho$ ,  $\vec{\tau}$  es el operador de isoespín y  $l = e^-, \mu^-$  representa los leptones (partículas no interactuantes

en este modelo). Este lagrangiano es similar al de la QED con factores de interacción adicional, con lo que la teoría cuántica de campos resultante es renormalizable. Los tensores  $F_{\mu\nu}$  y  $\vec{B}_{\mu\nu}$  se definen en la forma usual a partir de  $\omega_\mu$  y  $\vec{b}_\mu$ :

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu, \\ \vec{B}_{\mu\nu} &= \partial_\mu\vec{b}_\nu - \partial_\nu\vec{b}_\mu. \end{aligned} \quad (5.16)$$

La energía potencial de auto-interacción del campo escalar  $\sigma$ ,  $U(\sigma)$ , está dada por la expresión

$$U(\sigma) = \frac{1}{3}bM(g_{\sigma N}\sigma)^3 + \frac{1}{4}c(g_{\sigma N}\sigma)^4. \quad (5.17)$$

Consideraremos ahora la aproximación de campo medio, en que los campos mesónicos son reemplazados por sus valores esperados, de acuerdo al siguiente esquema:

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow \langle\sigma\rangle \equiv \sigma_0, \\ \omega^\mu &\rightarrow \langle\omega^\mu\rangle \equiv \omega_0\delta_{\mu 0}, \\ \vec{b}^\mu &\rightarrow \langle\vec{b}^\mu\rangle \equiv (0, 0, \rho_0)\delta_{\mu 0}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Reemplazando (5.18) en (5.15) se obtiene la siguiente expresión para el Lagrangiano, en la aproximación de campo medio:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_B \bar{B} \left[ \gamma_\mu (i\partial^\mu - g_{\omega B}\omega_0\delta^{\mu 0} - \frac{1}{2}g_{\rho B}\rho_0\tau_3\delta^{\mu 0}) - (M_B - g_{\sigma B}\sigma_0) \right] B \\ &+ \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_0^2 - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - U(\sigma_0) + \bar{l}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m_l)l, \end{aligned} \quad (5.19)$$

En la densidad lagrangiana (5.15), el mesón isovectorial  $\rho$  se introduce para incluir una asimetría de isospín de la materia nuclear, y para describir propiedades de los isótopos; mientras que los mesones  $\sigma$  (atractivo) y  $\omega$  (repulsivo) dan cuenta de las propiedades de saturación de la materia nuclear simétrica [147].

A partir del Lagrangiano (5.19) podemos obtener las ecuaciones de movimien-

to para los campos  $\sigma$ ,  $\omega^\mu$  y  $\vec{b}^\mu$ , aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned}\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \sigma)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} &= 0, \\ \partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \omega^\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega^\mu} &= 0, \\ \partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu b_a^\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_a^\mu} &= 0,\end{aligned}\tag{5.20}$$

con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}\partial^\mu \partial_\mu \sigma + m_\sigma^2 \sigma &= \sum_B g_{\sigma B} \bar{B} B - b M g_{\sigma N}^3 \sigma^2 - c g_{\sigma N}^4 \sigma^3, \\ \partial_\nu F^{\nu\mu} + m_\omega^2 \omega^\mu &= \sum_B g_{\omega B} \bar{B} \gamma^\mu B, \\ \partial_\nu B_i^{\mu\nu} + m_\rho^2 b_i^\mu &= -\frac{1}{2} \sum_B g_{\rho B} \bar{B} \gamma^\mu \tau_i B.\end{aligned}\tag{5.21}$$

Ahora aplicamos la aproximación de campo medio, tratando los campos mesónicos  $\sigma$ ,  $\omega^\mu$  y  $b_i^\mu$  como campos clásicos, y tomando los valores esperados del estado base:

$$\sigma \rightarrow \langle \sigma \rangle, \quad \omega^\mu \rightarrow \langle \omega^\mu \rangle, \quad b_i^\mu \rightarrow \langle b_i^\mu \rangle.\tag{5.22}$$

Considerando la materia en reposo, los términos con derivadas de las ecuaciones (5.21) se anulan debido a la invariancia traslacional de la materia. Las componentes espaciales de los campos mesónicos vectoriales se anulan debido a la simetría rotacional, y solamente la tercera componente de isoespín del campo mesónico  $b_i^\mu$  tendrá un valor no nulo, debido a la conservación de la carga.

De esta forma, las ecuaciones para los campos mesónicos se reducen a:

$$\begin{aligned}\sigma_0 &\equiv \langle \sigma \rangle = \frac{1}{m_\sigma^2} \sum_B g_{\sigma B} \langle \bar{B} B \rangle - \frac{1}{m_\sigma^2} (b M g_{\sigma N}^3 \sigma_0^2 + c g_{\sigma N}^4 \sigma_0^3), \\ \omega_0 &\equiv \langle \omega^0 \rangle = \frac{1}{m_\omega^2} \sum_B g_{\omega B} \langle \bar{B} \gamma^0 B \rangle, \\ \rho_0 &\equiv \langle b_3^0 \rangle = -\frac{1}{2m_\rho^2} \sum_B g_{\rho B} \langle \bar{B} \gamma^0 \tau_3 B \rangle.\end{aligned}\tag{5.23}$$

Los campos bariónicos deben ser cuantizados también a través de la ecuación de Euler-Lagrange, con lo que obtenemos la siguiente ecuación de movimiento para el campo de los bariones  $B(x)$ :

$$\left[ i\gamma_\mu \partial^\mu - g_\omega B \gamma^0 \omega_0 - \frac{1}{2} g_\rho B \gamma^0 \rho_0 \tau_3 - (M_B - g_\sigma B \sigma_0) \right] B(x) = 0. \quad (5.24)$$

La ecuación (5.24) muestra que la masa efectiva de los bariones está dada por la expresión

$$M_B^* = M_B - g_\sigma B \sigma_0. \quad (5.25)$$

A partir de la ecuación (5.24) podemos obtener las energías potenciales de neutrones y protones, usando las expresiones conocidas para los operadores de isoespín [148], con lo que se obtiene

$$U_n = g_\omega \omega_0 - \frac{1}{2} g_\rho \rho_0, \quad U_p = g_\omega \omega_0 + \frac{1}{2} g_\rho \rho_0. \quad (5.26)$$

La ecuación (5.26) indica que existe una diferencia de energías entre el neutrón y el protón dada por

$$U_n - U_p = -g_\rho \rho_0. \quad (5.27)$$

De esta forma, procedemos ahora a buscar las soluciones de la ecuación (5.24) en forma separada para neutrones y protones.

### Solución de la ecuación de movimiento de los neutrones

La ecuación de movimiento para los neutrones puede escribirse en la forma

$$\left[ i\gamma_\mu \partial^\mu - (g_\omega \omega_0 - \frac{1}{2} g_\rho \rho_0) \gamma^0 - (M_n - g_\sigma n \sigma_0) \right] \psi_n(x) = 0. \quad (5.28)$$

Reemplazando las ecuaciones para  $U_n$ , dada por (5.26), y  $M^*$ , dada por (5.25), escribimos la ecuación (5.28) en la forma

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - U_n \gamma^0 - M_n^*] \psi_n(x) = 0. \quad (5.29)$$

Así, buscamos soluciones de (5.29) en forma de ondas planas espinoriales de la forma

$$\psi_n(x) = N_n u_n \exp(-iE_n t + i\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{r}) = N_n u_n \exp(-ip_n^\mu x_\mu). \quad (5.30)$$

Reemplazando esta solución en la ecuación de movimiento (5.29) se obtiene la relación

$$[(E_n - U_n)\gamma^0 - \vec{\gamma} \cdot \mathbf{p}_n - M_n^*]u_n = 0. \quad (5.31)$$

La solución de la ecuación (5.31) es del tipo espinor libre, pero construido a partir del momentum cinético del neutrón, dado por

$$p_n^\mu = (E_n - U_n, \mathbf{p}_n) = (\sqrt{\mathbf{p}_n^2 + M_n^{*2}}, \mathbf{p}_n) = (\mathcal{E}_n, \mathbf{p}_n). \quad (5.32)$$

### Solución de la ecuación de movimiento de los protones

Para el protón, tomamos una solución con la misma forma funcional que la correspondiente al neutrón:

$$\psi_p(x) = N_p u_p(p_p) \exp(-ip_p^\mu x_\mu). \quad (5.33)$$

Siguiendo el mismo procedimiento realizado para el caso del neutrón, se obtiene la siguiente ecuación para el espinor  $u_p$

$$N_p[(E_p - U_p)\gamma^0 - \vec{\gamma} \cdot \mathbf{p}_p - M_p^*]u_p = 0. \quad (5.34)$$

La solución de (5.34) es nuevamente un espinor libre construido con el momentum cinético del protón

$$p_p'^\mu = (E_p - U_p, \mathbf{p}_p) = (\sqrt{\mathbf{p}_p^2 + M_p^{*2}}, \mathbf{p}_p) = (\mathcal{E}_p, \mathbf{p}_p). \quad (5.35)$$

Con esta notación, los factores de normalización  $N_n$  y  $N_p$  están dados por

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}_n}} \quad N_p = \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}_p}}. \quad (5.36)$$

Mientras que las energías totales del neutrón y del protón serán

$$\begin{aligned} E_n(\mathbf{p}_n) &= \mathcal{E}_n + U_n = \sqrt{\mathbf{p}_n^2 + M_n^{*2}}, \\ E_p(\mathbf{p}_p) &= \mathcal{E}_p + U_p = \sqrt{\mathbf{p}_p^2 + M_p^{*2}}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Sustituyendo estas expresiones para las energías del neutrón y el protón en la ecuación para la conservación de la energía, ecuación (5.4) se obtiene

$$\begin{aligned} (E_n(p_n) - E_p(p_p))^2 - (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p)^2 &= m_l^2, \\ \left[ \sqrt{\mathbf{p}_n^2 + M_n^{*2}} - \sqrt{\mathbf{p}_p^2 + M_p^{*2}} + U_n - U_p \right]^2 - (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p)^2 &= m_l^2. \end{aligned} \quad (5.38)$$



Típicamente, los valores de  $\Delta U = U_n - U_p$  son de aproximadamente 100MeV [147, 148].

Por otro lado, podemos reemplazar las energías dadas por (5.37) en la ecuación de equilibrio químico (5.5)

$$\begin{aligned} E_n(p_n) - E_p(p_p) &= \sqrt{p_l^2 + m_l^2}, \\ \sqrt{\mathbf{p}_n^2 + M_n^{*2}} - \sqrt{\mathbf{p}_p^2 + M_p^{*2}} + \Delta U &= \sqrt{p_l^2 + m_l^2}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

La ecuación (5.39) expresa una relación entre los momenta de Fermi del neutrón  $p_n$  y el protón  $p_p$ , a partir de la cual puede obtenerse una función de la forma  $p_p(p_n)$ , que permitirá caracterizar mejor el proceso DUrca.

Si tomamos el nucleón como un doblete isobárico, podemos despreciar la diferencia de masas entre el protón y el neutrón, y tomar

$$M = \frac{M_n + M_p}{2} = 938.919 \text{ MeV}, \quad (5.40)$$

con lo que la masa efectiva de los nucleones será  $M^* = (0.6 - 0.7)M$ . Así, tomando el valor medio de este intervalo tenemos  $M^* = 0.65M = 610.297 \text{ MeV}$  [145].

De esta forma, para resolver la ecuación (5.39) escribiremos el momentum de Fermi del protón como  $p_n = \alpha M^*$ , donde  $\alpha$  es un parámetro de proporcionalidad que facilitará el proceso de solución.

Reemplazando esta relación, la ecuación (5.39) se escribe como

$$\begin{aligned} \sqrt{p_n^2 + M^{*2}} - \sqrt{p_p^2 + M^{*2}} + \Delta U &= \sqrt{p_p^2 + m^2}, \\ M^* \sqrt{\alpha^2 + 1} + \Delta U &= \sqrt{p_p^2 + m^2} + \sqrt{p_p^2 + M^{*2}}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Resolviendo esta ecuación algebraica elevando al cuadrado dos veces y agrupando términos semejantes podemos escribir la solución, en términos de  $\alpha$  y  $p_n$  en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} p_p &= \frac{\sqrt{[(M^* \sqrt{1 + \alpha^2} + \Delta U)^2 - (M^* - m)^2][(M^* \sqrt{1 + \alpha^2} + \Delta U)^2 - (M^* + m)^2]}}{2(M^* \sqrt{1 + \alpha^2}) + \Delta U}, \\ p_p &= \frac{\sqrt{[(\sqrt{p_n^2 + M^{*2}} + \Delta U)^2 - (M^* - m)^2][(\sqrt{p_n^2 + M^{*2}} + \Delta U)^2 - (M^* + m)^2]}}{2(\sqrt{p_n^2 + M^{*2}}) + \Delta U}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

De esta forma, la condición para que el proceso DURca se realice en las NS, dado por la desigualdad

$$p_p \geq \frac{p_n}{2}, \quad (5.43)$$

se expresa como sigue:

$$\frac{\sqrt{[(\sqrt{p_n^2 + M^{*2}} + \Delta U)^2 - (M^* - m)^2][(\sqrt{p_n^2 + M^{*2}} + \Delta U)^2 - (M^* + m)^2]}}{2(\sqrt{p_n^2 + M^{*2}}) + \Delta U} \geq \frac{p_n}{2}. \quad (5.44)$$

La solución de esta desigualdad se obtuvo de manera numérica, a través de la construcción de la gráfica de la función  $p_p(p_n)$  y de la línea recta  $p_p = \frac{p_n}{2}$ , ya que el conjunto solución de la desigualdad (5.44) está representado por los valores de  $p_n$  para los cuales la gráfica de  $p_p(p_n)$  se encuentra por encima de la línea recta  $p_p = p_n/2$ .

La gráfica construida se muestra en la figura 5.2.

### Momentum de Fermi del Proton Vs Momentum de Fermi del neutron

Modelo de Teoria de Campos. Aproximacion de campo medio

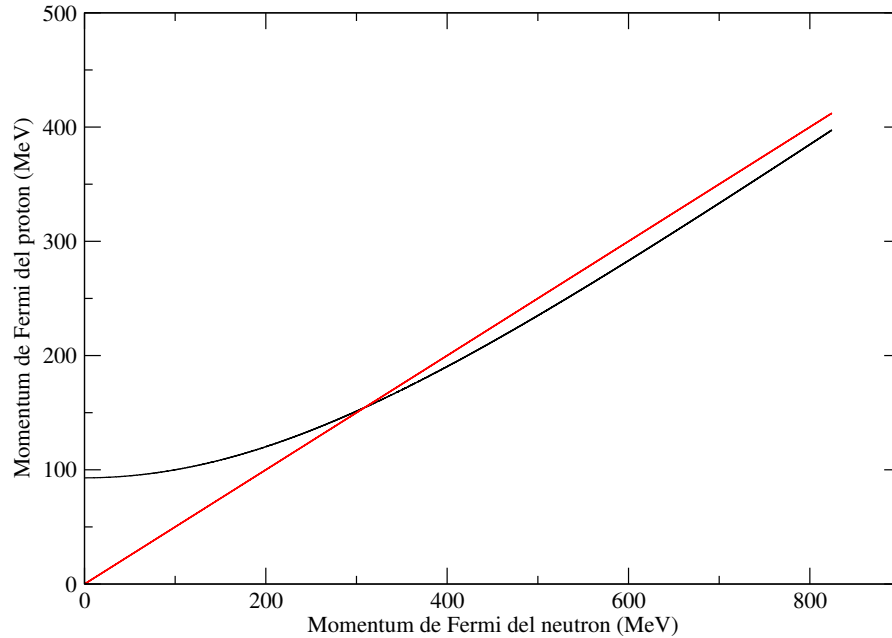


Figura 5.2: Solución gráfica de la desigualdad  $p_p(p_n) \geq p_n/2$ .

A partir de los resultados numéricos obtenidos, se encuentra que  $p_p(p_n) =$

$p_n/2$  para  $309.076 \leq p_n \leq 309.085$  (MeV), con lo que tomaremos como valor crítico

$$p_n^c = \frac{309.076 + 309.085}{2} = 309.081 \text{ MeV}. \quad (5.45)$$

De esta forma, la solución de la desigualdad (5.44) se obtendrá en la región

$$\begin{aligned} 0 &\leq p_n \leq p_n^c, \\ 0 &\leq p_n \leq 309.081 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

#### 5.1.4 Sobre la no-conservación de la corriente vectorial cargada de los nucleones

Debido al teorema de Noether [149], la densidad lagrangiana (5.15) posee una corriente isovectorial conservada

$$\mathbf{T}^\mu = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \vec{\tau} \psi + \mathbf{b}_\nu \times \mathbf{B}^{\mu\nu}, \quad (5.47)$$

de tal forma que su cuadi-divergencia se anula

$$\partial_\mu \mathbf{T}^\mu = 0. \quad (5.48)$$

En esta expresión,  $\mathbf{B}^{\mu\nu}$  es el tensor correspondiente al campo  $\mathbf{b}^\mu$ . Como se obtuvo anteriormente, la ecuación de movimiento para el campo  $\mathbf{b}^\mu$  está dada por [145]

$$\partial_\nu \mathbf{B}^{\nu\mu} + m_\rho^2 \mathbf{b}^\mu = \frac{1}{2} g_\rho \bar{\psi} \gamma^\mu \vec{\tau} \psi, \quad \partial^\nu \mathbf{b}_\nu = 0. \quad (5.49)$$

Usando la ecuación (5.49) en la corriente conservada (5.47) se obtiene la siguiente relación

$$i \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \vec{\tau} \psi) = g_\rho \mathbf{b}_\mu \times \bar{\psi} \gamma^\mu \vec{\tau} \psi. \quad (5.50)$$

Así, aplicando la aproximación de campo medio (5.18) se obtiene

$$i \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \tau_+ \psi) = -g_\rho \rho_0 \bar{\psi} \gamma^0 \tau_+ \psi. \quad (5.51)$$

Al introducir la derivada covariante [54]

$$D_\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t} - i g_\rho \rho_0, \nabla \right), \quad (5.52)$$

podemos reescribir la ecuación (5.51) en la forma

$$D_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\tau_+\psi) = 0, \quad (5.53)$$

al escribir la ecuación (5.53) a partir de los espinores  $u_n$  y  $u_p$  se obtiene

$$\bar{u}_p(p_p)q_\mu\gamma^\mu u_n(p_n) = 0. \quad (5.54)$$

En la ecuación (5.54),  $q_\mu$  denota la transferencia de momentum cinético

$$q^\mu = (E_n - E_p + g_\rho\rho_0, \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p). \quad (5.55)$$

### 5.1.5 Elemento de matriz para el decaimiento beta del neutrón

A primer orden en la constante de Fermi  $G_F$ , el elemento de matriz para el decaimiento beta del neutrón puede escribirse como [145]

$$\begin{aligned} \langle f|(S-1)|i\rangle &= -i\frac{G_F\cos\theta_C}{\sqrt{2}}N_nN_p\bar{u}_l(k_2)\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu(-k_1)_p\langle p_p|J^\mu(0)|p_n\rangle_n \\ &\times (2\pi)^4\delta(E_n - E_p - \omega_1 - \omega_2)\delta(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \end{aligned} \quad (5.56)$$

En la ecuación (5.56)  $(\omega_1, \mathbf{k}_1)$  y  $(\omega_2, \mathbf{k}_2)$  representan los quadri-momentos de los leptones producidos, mientras que  $J^\mu(x) = V^\mu(x) + A^\mu(x)$  es la corriente cargada efectiva en el medio, consistente de los vectores polares y axiales [54]. A continuación determinaremos el elemento de matriz nucleónico de la corriente débil cargada en el medio,  $\langle p_p|J^\mu(0)|p_n\rangle_n$ , considerando en primera instancia la contribución del vector polar. A partir de la corriente isovectorial (5.47) podemos construir la corriente electromagnética en el medio:

$$J_{em}^\mu = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + T_3^\mu + \frac{1}{2M}\partial_\nu(\bar{\Psi}\lambda\sigma^{\mu\nu}\Psi), \quad \partial_\mu J_{em}^\mu = 0, \quad (5.57)$$

El último término de la ecuación (5.57) es la contribución de Pauli, donde  $\sigma^{\mu\nu} = \gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu$ , y

$$\lambda = \frac{\lambda_p}{2}(1 + \tau_3) + \frac{\lambda_n}{2}(1 - \tau_3). \quad (5.58)$$

Esta corriente fue inicialmente introducida por Walecka como un operador de corriente electromagnética efectiva, usada inicialmente en la Hadrodinámica

Cuántica (QHD) para describir las interacciones electromagnéticas. Esta corriente es de tipo local, covariante, conservada ( $\partial_\mu J^\mu = 0$ ), y da el resultado correcto para nucleones libres [150].

En la aproximación de campo medio, los factores de forma magnéticos de los nucleones se reemplazan por los momentos magnéticos anómalos del protón y el neutrón, dados por  $\lambda_p = 1.7928$  y  $\lambda_n = -1.9132$  [145].

Debido a la conservación de la corriente vectorial, el elemento de matriz nucleónico de la corriente débil vectorial cargada estará dado por [148]

$${}_p\langle P'|V^\mu|P\rangle_n = {}_p\langle P'|J_{em}^\mu|P\rangle_p - {}_n\langle P'|J_{em}^\mu|P\rangle_n. \quad (5.59)$$

De esta forma, para las transiciones electromagnéticas tendremos

$$\begin{aligned} {}_p\langle P'|J_{em}^\mu(0)|P\rangle_p &= \bar{u}_p(P') \left( \gamma^\mu + \frac{1}{2M} \lambda_p \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right) u_p(P), \\ {}_n\langle P'|J_{em}^\mu(0)|P\rangle_n &= \bar{u}_n(P') \left( \frac{1}{2M} \lambda_n \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right) u_n(P), \end{aligned} \quad (5.60)$$

donde  $q_\mu = P - P'$  es la transferencia de momento entre los nucleones.

Reemplazando (5.60) en la expresión para la corriente vectorial cargada (5.59) se obtiene

$${}_p\langle P'|V^\mu(0)|P\rangle_n = \bar{u}_p(P') \left[ \gamma^\mu + \frac{\lambda_p - \lambda_n}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u_n(P). \quad (5.61)$$

El segundo término de (5.61) describe los efectos del magnetismo débil. Usando las ecuaciones de Dirac (5.31) y (5.34), para los espinores  $u_n$  y  $u_p$ , se encuentra que la contribución de la corriente vectorial cargada se anula:

$${}_p\langle P'|V^\mu(0)|P\rangle_n = 0. \quad (5.62)$$

Consideremos ahora la corriente cargada axial-vectorial, responsable tanto de la transición  $np$  como del decaimiento de los piones [97]. En el límite de la simetría quiral,  $m_\pi \rightarrow 0$ , la corriente vectorial axial debe conservarse, lo que implica que, en un medio con un condensado de mesones  $\rho$  [82],

$$\lim_{m_\pi \rightarrow 0} D_\mu A^\mu(x) = 0, \quad (5.63)$$

donde la derivada covariante que aparece en (5.63) fue definida en (5.52). Debido a que el pión tiene una masa finita, la corriente cargada axial estará conectada con el campo de los piones,  $\pi^-$ . Para el espacio libre, esta

relación se conoce como la hipótesis de la conservación parcial de la corriente axial [151], con lo que, para el medio considerado, tendremos

$$D_\mu A^\mu(x) = m_\pi^2 f_\pi \pi^-, \quad (5.64)$$

donde  $m_\pi = 139 \text{ MeV}$  es la masa del mesón  $\pi$ , y  $f_\pi$  es la constante de decaimiento del pión.

Al considerar las interacciones de los piones con los nucleones y los mesones  $\rho$ , la densidad Lagrangiana para los piones puede escribirse como [152]

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2} \left[ (\partial_\mu \vec{\pi} - g_\rho \vec{b}_\mu \times \vec{\pi}) \cdot (\partial^\mu \vec{\pi} - g_\rho \vec{b}^\mu \times \vec{\pi}) - m_\pi^2 \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} \right] + i g_\pi \bar{\psi} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \psi. \quad (5.65)$$

En la aproximación de campo medio, se obtiene la siguiente ecuación de movimiento para el campo del mesón  $\pi^-$  [153]:

$$((i\partial^0 + g_\rho \rho_0)^2 - (i\nabla)^2 - m_\pi^2) \pi(x) = -i\sqrt{2} g_\pi \bar{\psi} \gamma_5 \psi_n, \quad (5.66)$$

en esta ecuación,  $g_\pi$  es la constante de acople pión-nucleón.

Para la transición nuclear de nuestro interés, la ecuación (5.64) proporciona

$${}_p \langle P' | q_\mu A^\mu(0) | P \rangle_n = i m_\pi^2 f_\pi {}_p \langle P' | \pi(0) | P \rangle_n. \quad (5.67)$$

En la ecuación (5.67) podemos utilizar la ecuación (5.66) para calcular el lado derecho, obteniendo

$${}_p \langle P' | q_\mu A^\mu(0) | P \rangle_n = -\frac{\sqrt{2} m_\pi^2 f_\pi g_\pi}{m_\pi^2 - q^2} \bar{u}_p(P') \gamma_5 u_n(P). \quad (5.68)$$

Esta última ecuación nos permite derivar el elemento de matriz de los nucleones para la corriente cargada axial-vectorial. Para construir el elemento de matriz axial-vector de la corriente cargada, a causa de la transición nucleónica, tenemos solamente dos pseudo-vectores independientes, consistentes con la invariancia de las interacciones fuertes bajo la transformación de isoespín  $T_2$ . Estos pseudo-vectores son  $\bar{u}_p(P') \gamma^\mu \gamma_5 u_n(P)$  y  $\bar{u}_p(P') q^\mu \gamma_5 u_n(P)$ . Esto nos indica que el elemento de matriz de la corriente cargada axial-vectorial tiene la forma general

$${}_p \langle P' | q_\mu A^\mu(0) | P \rangle_n = C_A \bar{u}_p(P') (\gamma^\mu \gamma_5 + F_q q^\mu \gamma_5) u_n(P). \quad (5.69)$$

En este caso, bajo la aproximación de campo medio, fijamos  $C_A = 1.26$ , mientras que  $F_q$  es el factor de forma, que será elegido para satisfacer la ecuación (5.68), que escribimos a continuación

$$C_A(-2M^* + F_q q^2) \bar{u}_p(P') \gamma_5 u_n(P) = -\frac{\sqrt{2} m_\pi^2 f_\pi g_\pi}{m_\pi^2 - q^2} \bar{u}_p(P') \gamma_5 u_n(P). \quad (5.70)$$

Para obtener este resultado, se usaron nuevamente las ecuaciones de los espinores  $u_n$  y  $u_p$ .

De esta forma, obtenemos la relación

$$C_A(2M^* - F_q q^2) = \frac{\sqrt{2} m_\pi^2 f_\pi g_\pi}{m_\pi^2 - q^2}. \quad (5.71)$$

En la aproximación de campo medio que hemos considerado, asumimos que las constantes de acople son independientes de las transferencias de momentum, con lo que, haciendo  $q^2 = 0$  en la ecuación (5.71), obtenemos la relación Goldberger-Treiman [154]

$$f_\pi g_\pi = \sqrt{2} M^* C_A. \quad (5.72)$$

Insertando (5.72) en la ecuación (5.71) se obtiene

$$F_q = -\frac{2M^*}{(m_\pi^2 - q^2)}. \quad (5.73)$$

De esta forma, teniendo en cuenta los resultados expresados por las ecuaciones (5.61), (5.69) y (5.73), el elemento de matriz para el decaimiento beta del neutrón estará dado por [145, 153]

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= -i \frac{G_F \cos \theta_C}{\sqrt{2}} \bar{u}_l(k_2) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu(-k_1) \\ &\times \bar{u}_p(P') \left[ C_V \gamma^\mu + \frac{1}{2M} C_M \sigma^{\mu\nu} q_\nu + C_A (\gamma^\mu \gamma_5 + F_q q^\mu \gamma_5) \right] u_n(P). \end{aligned} \quad (5.74)$$

En esta ecuación hemos tomado las siguientes aproximaciones:

$$C_V = 1, \quad C_M = \lambda_p - \lambda_n \simeq 3.7, \quad C_A = 1.26. \quad (5.75)$$

Notemos que el elemento de matriz obtenido tiene la misma forma del que se obtuvo para el decaimiento beta del neutrón en el espacio libre, pero con el

momentum total transferido reemplazado por la transferencia de momentum cinético. Debido a la diferencia en las energías potenciales del neutrón y el protón, ecuación (5.26), la transferencia de momentum cinético  $q = P - P' = (\varepsilon - \varepsilon', \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p)$ , que se usará en el elemento de matriz (5.74) difiere del momentum total del par leptónico  $K = (\varepsilon - \varepsilon' + U_n - U_p, \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p)$ . Esto asegura que  $K^2 > 0$ , mientras que  $q^2 = (\varepsilon - \varepsilon')^2 - (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p)^2 < 0$ . La amplitud obtenida a partir del elemento de matriz (5.74) está dado por la expresión [145]

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_{fi}|^2 &= 32G_F^2 \cos^2 \theta_C [(C_A^2 - C_V^2)M^{*2}(k_1 k_2) + (C_A - C_V)^2(k_1 P_2)(k_2 P_1) \\
&+ (C_A + C_V)^2(k_1 P_1)(k_2 P_2) \\
&+ 2C_M \frac{M^*}{M} [2C_A((k_1 P_1)(k_2 P_2) - (k_1 P_2)(k_2 P_1)) \\
&+ C_V((k_1 k_2)(P_1 P_2 - M^{*2}) - (k_1 P_1 - k_1 P_2)(k_2 P_1 - k_2 P_2))] \\
&- \frac{C_M^2}{M^2} [M^{*2}(k_1 P_2)(3(k_2 P_2) - (k_2 P_1)) \\
&+ M^{*2}(k_1 P_1)(3(k_2 P_1) - (k_2 P_2)) + (k_1 k_2)(P_1 P_2 - M^{*2})^2 \\
&- (k_1 P_1 + k_1 P_2)(k_2 P_1 + k_2 P_2)(P_1 P_2)] \\
&+ C_A^2 F_q (2M^* + F_q(M^{*2} - (P_1 P_2))) [(k_1 k_2)(M^{*2} - (P_1 P_2)) \\
&- (k_1 P_1 - k_1 P_2)(k_2 P_1 - k_2 P_2)]. \tag{5.76}
\end{aligned}$$

En esta ecuación,  $P_1 = (\varepsilon, \mathbf{p}_n)$  y  $P_2 = (\varepsilon', \mathbf{p}_p)$ .

Los detalles de cálculo para obtener este resultado se muestran en el Apéndice D.

### 5.1.6 Determinación de la emisividad de energía aplicando la Teoría de Campo Medio

Consideraremos la energía total emitida, por unidad de volumen y por unidad de tiempo, por una NS que libera neutrinos y antineutrinos producidos durante el proceso DUrca.

De acuerdo a la regla de oro de Fermi tendremos la siguiente expresión para la emisividad:

$$\begin{aligned}
Q &= 2 \int \frac{d^3 k_2 d^3 k_1 d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^{12} 2\omega_2 2\omega_1 2\varepsilon 2\varepsilon'} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \omega_1 f_n (1 - f_p) (1 - f_l) \\
&\times (2\pi)^4 \delta(E_n(\mathbf{p}) - E_p(\mathbf{p}') - \omega_1 - \omega_2) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \tag{5.77}
\end{aligned}$$



Nuevamente, asumimos que los neutrinos escapan libremente de la estrella, e introducimos el factor de bloqueo  $f_n(1 - f_p)(1 - f_l)$ , que da cuenta de la distribución inicial de los neutrones, y del bloqueo de los estados finales de del protón y el leptón  $l$ , donde las funciones de distribución de Fermi-Dirac para los leptones, el neutrón y el protón están dada por

$$\begin{aligned} f_l(\omega_2) &= \frac{1}{1 + \exp(\omega_2 - \mu_l)/T}, \\ f_n(\varepsilon) &= \frac{1}{1 + \exp((\varepsilon + U_n - \mu_n))/T}, \\ f_p(\varepsilon') &= \frac{1}{1 + \exp((\varepsilon' + U_p - \mu_p))/T}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Despreciando el potencial químico de los neutrinos, la condición de equilibrio químico se escribe como  $\mu_l = \mu_n - \mu_p$ , con lo que, usando la ecuación de conservación de energía,  $\varepsilon + U_n = \varepsilon' + U_p + \omega_2 + \omega_1$ , y tomando la energía total del par leptón-antineutrino como  $\omega_2 + \omega_1 = \mu_l + \omega'$ , podemos reescribir el factor de bloqueo que aparece en (5.77) como

$$f_n(\varepsilon)(1 - f_p(\varepsilon'))(1 - f_l(\omega_2)) \equiv f_n(\varepsilon)(1 - f_n(\varepsilon - \omega'))(1 - f_l(\mu_l + \omega' - \omega_1)), \quad (5.79)$$

en esta ecuación,  $\omega' \sim T$ .

De la misma forma en que se realizaron los cálculos en el capítulo anterior, podemos despreciar las contribuciones de los neutrinos en las funciones delta (conservación de momentum y energía) en la ecuación (5.77), es decir,

$$\delta(E_n(\mathbf{p}) - E_p(\mathbf{p}') - \omega_1 - \omega_2) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \simeq \delta(E_n(\mathbf{p}) - E_p(\mathbf{p}') - \omega_2) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}_2), \quad (5.80)$$

con lo que la integral sobre  $d^3p'$  puede resolverse inmediatamente para obtener  $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \mathbf{k}_2$ .

Igualmente, si tenemos en cuenta que los nucleones y leptones al interior de la estrella son fuertemente degenerados, la contribución principal a la integral (5.77) vendrá de las regiones más cercanas a los momenta de Fermi correspondientes, con lo que podemos reemplazar  $|\mathbf{p}| = p_n$ ,  $|\mathbf{k}_2| = p_l$ .

La energía del leptón final es muy cercana a su energía de Fermi,  $\mu_l = \mu_n - \mu_p$ , con lo que los potenciales químicos de los nucleones pueden ser aproximados por sus energías de Fermi:  $\mu_n = \varepsilon_n + U_n$  y  $\mu_p = \varepsilon_p + U_p$ , lo que nos permite transformar la función delta como

$$\begin{aligned} &\delta \left( \varepsilon_n - \sqrt{p_n^2 + p_l^2 - 2p_n p_l \cos \theta_l} + M^{*2} + U_n - U_p - \mu_l \right) \\ &= \frac{\varepsilon_p}{p_n p_l} \delta \left( \cos \theta_l - \frac{1}{2p_n p_l} (p_n^2 - p_p^2 + p_l^2) \right), \end{aligned} \quad (5.81)$$

en esta expresión,  $\theta_1$  es el ángulo formado entre el momentum del neutrón inicial,  $\mathbf{p}_n$ , y el momentum del leptón final,  $\mathbf{p}_l$ .

Para realizar los cálculos, trabajamos en un marco de referencia en que el eje  $z$  está a lo largo del momentum del neutrón, con lo que podemos escribir los momenta que aparecen en la ecuación (5.76) en la forma

$$\begin{aligned} P_1 &= (\varepsilon_n, 0, 0, p_n), \\ k_1 &= \omega_l(1, \sin \theta_\nu, 0, \cos \theta_\nu), \\ k_2 &= (\mu_l, p_l \sin \theta_l \cos \phi_l, p_l \sin \theta_l \sin \phi_l, p_l \cos \theta_l). \end{aligned} \quad (5.82)$$

De esta forma, el cuadri-momentum del protón estará determinado, de acuerdo a la conservación del c-momentum, por la expresión

$$P_2 = (\varepsilon_p, -p_l \sin \theta_l \cos \phi_l, -p_l \sin \theta_l \sin \phi_l, p_n - p_l \cos \theta_l). \quad (5.83)$$

Por otro lado, al enfocarnos en el caso de nucleones y leptones degenerados, consideraremos las pérdidas de energía por emisión de neutrinos a primer orden en  $T/\mu_l$ , con lo que la integral de energía se convierte en

$$\begin{aligned} & \int d\omega_1 \omega_1^3 d\omega' d\varepsilon f_n(\varepsilon)(1 - f_n(\varepsilon - \omega'))(1 - f_l(\mu_l + \omega' - \omega_1)) \\ & \simeq \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\omega'}{\exp(\omega'/T) - 1} \int_0^{\infty} d\omega_1 \frac{\omega_1^3}{1 + \exp(\omega_1 - \omega')/T} = \frac{457}{5040} \pi^6 T^6. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Reemplazando los resultados (5.82) y (5.84) en la expresión para la emisividad, ecuación (5.77), obtenemos finalmente la siguiente expresión relativista para la emisividad de neutrinos en la Teoría de Campo Medio Rela-

---

tivista [145]:

$$\begin{aligned}
Q = & \frac{457}{1080} G_F^2 \cos^2 \theta_C T^6 \Theta(p_l + p_p - p_n) \left\{ (C_A^2 - C_V^2) M^{*2} \mu_l \right. \\
& + \frac{1}{2} (C_A^2 + C_V^2) [4\varepsilon_n \varepsilon_p \mu_l - (\varepsilon_n - \varepsilon_p) ((\varepsilon_n + \varepsilon_p)^2 - p_l^2)] \\
& + C_V C_M \frac{M^*}{M} [2(\varepsilon_n - \varepsilon_p) p_l^2 - (3(\varepsilon_n - \varepsilon_p)^2 - p_l^2) \mu_l] \\
& + C_A \left( C_V + 2C_M \frac{M^*}{M} \right) (\varepsilon_n + \varepsilon_p) (p_l^2 - (\varepsilon_n - \varepsilon_p)^2) \\
& + C_M^2 \frac{1}{4M^2} \left[ 8M^{*2} (\varepsilon_n - \varepsilon_p) (p_l^2 - (\varepsilon_n - \varepsilon_p) \mu_l) \right. \\
& + (p_l^2 - (\varepsilon_n - \varepsilon_p)^2) (2\varepsilon_n^2 + 2\varepsilon_p^2 - p_l^2) \mu_l \\
& - (p_l^2 - (\varepsilon_n - \varepsilon_p)^2) (\varepsilon_n + \varepsilon_p)^2 (2\varepsilon_n - 2\varepsilon_p - \mu_l) \left. \right] \\
& \left. - C_A^2 M^{*2} \Phi (1 + m_\pi^2 \Phi) [\mu_l ((\varepsilon_n - \varepsilon_p)^2 + p_l^2) - 2(\varepsilon_n - \varepsilon_p) p_l^2] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.85}$$

En esta ecuación,  $\Theta(p_l + p_p - p_n)$  es la función paso de Heaviside, que aparece como un requerimiento de la conservación de momentum (desigualdad triangular, el proceso está permitido siempre y cuando  $p_n > p_p + p_l$ ), mientras que la función  $\Phi$ , dada por

$$\Phi = \frac{1}{m_\pi^2 + p_l^2 - (\varepsilon_n - \varepsilon_p)^2}, \tag{5.86}$$

representa la contribución de la interacción pseudo-escalar en la emisividad de neutrinos.

### 5.1.7 Límite no-relativista

En las condiciones de equilibrio beta, la fracción de protones adecuada para que el proceso DUrca opere aparece a muy altas densidades, cuando los momenta de Fermi son del orden de sus masas efectivas, con lo que la “condición triangular” es inconsistente con el límite no-relativista [153].

Para obtener la aproximación no-relativista de la ecuación (5.85) consideramos el caso en que  $p_n, p_p, p_l \ll M^*$ , pero esta condición no es suficiente

para determinar los términos dominantes de la ecuación (5.85), ya que las contribuciones relativas de algunos de los términos depende también de la abundancia de electrones en el medio [145]. Si la fracción de electrones es suficientemente grande, de tal forma que  $M^* \mu_l \ll p_n^2$ , se obtiene la aproximación no-relativista que obtuvimos en el capítulo anterior:

$$Q = \frac{457\pi}{10080} G_F^2 \cos^2 \theta_C (C_V^2 + 3C_A^2) T^6 M^{*2} \mu_l \Theta(p_l + p_p - p_n). \quad (5.87)$$

Esta misma expresión fue presentada por Lattimer et al. [135], y ha sido utilizada ampliamente para determinar las características del proceso de enfriamiento en NS [91, 92].

Sin embargo, cuando  $p_n^2 \sim M^* \mu_l$ , lo que es más probable que ocurra en la materia nucleónica no-relativista en equilibrio beta, la expresión para la emisividad se aproxima a

$$Q = \frac{457\pi}{10080} G_F^2 \cos^2 \theta_C T^6 [(C_V^2 + 3C_A^2) M^{*2} \mu_l - (C_V^2 + C_A^2) M^* p_n^2] \Theta(p_l + p_p - p_n). \quad (5.88)$$

En esta expresión, el término adicional corresponde a la contribución del retroceso de los nucleones.

Este término no apareció en los cálculos realizados anteriormente, pero cuando la fracción de protones es pequeña, su contribución es comparable con los términos que aparecen en (5.87).

## 5.2 Efecto de la Superfluidéz en la Emisividad de neutrinos

### 5.2.1 Superfluidéz en NS

Los sistemas con un gran número de fermiones y donde las interacciones entre las partículas constituyentes favorecen la formación de **pares de partículas** en estados de dos cuerpos pueden desarrollar transiciones de fase a un estado superfluido [155], en el que la energía del estado base es mayor que la energía de interacción.

Si las partículas que conforman el sistema tienen carga eléctrica, se dice que el sistema se encuentra en un estado **superconductor**, mientras que si las partículas que lo conforman son neutras, el sistema se dice **superfluido**. En un metal

---

superconductor, por ejemplo, los electrones con momentum  $\mathbf{k}$  y espín  $s$  se emparejan con los electrones de momentum  $-\mathbf{k}$  y espín  $-s$ . El acoplamiento está mediado por la interacción electrón-fonón en la red [156].

Ya que la interacción nuclear básica es atractiva a largas distancias, el mecanismo de emparejamiento de largo rango puede presentarse en la materia hadrónica densa, ya que, aunque dos neutrones no pueden estar ligados en el vacío, ellos pueden enlazarse cuando están en presencia del campo de otros nucleones [10].

En sistemas de Fermi altamente degenerados, el emparejamiento ocurre principalmente entre estados cercanos a la superficie de Fermi. En núcleos pesados o en NS, donde la razón  $n_n/n_p$  es alta, se consideran solamente el emparejamiento de dos neutrones (superfluidez) y/o de dos protones (superconductividad).

Los pares de neutrones son bosones, ya que el momentum total del par puede ser o bien 0 o 1, con lo que su comportamiento es presumiblemente similar al de los átomos de  ${}^4\text{He}$  en el helio líquido, que presenta un comportamiento superfluido a temperaturas por debajo de  $T = 2.19\text{K}$  [155]. En particular el  ${}^4\text{He}$ , desarrolla un flujo libre de viscosidad: la energía cinética de un superfluido puro no es disipada por la fricción contra las paredes del contenedor o dentro del fluido mismo [130].

En las NS, un comportamiento similar puede ocurrir siempre y cuando la energía térmica  $kT$  sea menor que el calor latente  $\Delta$  asociado con la transición de fase a un estado de emparejamiento (“gap de energía superfluida”); el parámetro del gap,  $\Delta$ , depende de la magnitud de la interacción de emparejamiento y, a su vez, de la densidad [33].

A las densidades nucleares típicas,  $\rho \lesssim 2.8 \times 10^{14} \text{g cm}^{-3}$ , se ha determinado, a partir de los núcleos analizados en los laboratorios, que tanto neutrones y protones han desarrollado transiciones de emparejamiento en materia nuclear fría y que  $\Delta \sim 1 - 2 \text{MeV}$  [156].

Así, a temperaturas relativamente bajas, se espera que aparezca superfluidez de neutrones en la corteza y el núcleo de las NS, al igual que se exhiba también superconductividad por parte de los protones [33]. Es improbable, sin embargo, que los electrones sean superconductores, ya que el acoplamiento fonón-electrón es muy débil en el caso de las NS [84].

Existen diversas consecuencias importantes de la superfluidez y superconductividad hadrónica, que podrían llevar a varios efectos observacionales. Es importante notar que la superfluidez tiene un pequeño efecto sobre las propiedades gruesas de las NS, tales como sus masas y sus radios, ya que

la energía de emparejamiento es  $\lesssim 1\%$  de la energía de interacción total en la región de fluido de neutrones, lo que causa muy poca diferencia en la relación  $P$  vs.  $\rho$  para la materia normal. Consecuencias físicas importantes de la superfluidéz incluyen [33, 85]:

1. **Efectos Térmicos:** la reducción en la capacidad calorífica acorta la escala de tiempo de enfriamiento para los pulsars, ya que la disminución de la capacidad calorífica ocasiona que la estrella superfluida almacene menos energía que una estrella normal [33]. Sin embargo, las componentes normales del fluido (por ejemplo, los electrones) contribuyen completamente a la capacidad calorífica, con lo que el efecto del superfluido se reduce un poco. La superfluidéz también reduce las tasas de emisión de neutrinos por debajo de sus valores correspondientes a la materia normal, como veremos posteriormente.
2. **Efectos magnéticos:** los electrones libres presentes en las NS ocasionan que los campos magnéticos atraviesen toda la configuración interna de éstas. Como resultado, las componentes cargadas del núcleo y la corteza están enlazadas por el campo magnético y co-rotan. Los neutrones superfluidos, sin embargo, están sólo débilmente acoplados a la corteza y a las componentes cargadas. Ahora, las partículas componentes cargadas son constantemente desaceleradas por el torque de reacción transmitido por el campo magnético. El superfluido debe entonces rotar **más rápido** que el pulsar, en promedio. Las fuerzas friccionales débiles entre la corteza externa normal y el interior de neutrones superfluidos acoplan las dos componentes y convierten alguna energía rotacional en calentamiento friccional [81].
3. **Efectos hidrodinámicos:** Una consecuencia única de la superfluidéz de neutrones es que debido a la rotación de la NS, el fluido contendrá un arreglo discreto de vórtices. Los vórtices son paralelos al eje de rotación y cada uno tiene una circulación cuantizada

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \frac{h}{2m_n}, \quad (5.89)$$

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad del fluido y  $2m_n$  la masa de un par neutrónico. Microscópicamente, el fluido se mueve irrotacionalmente,  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ , en todo el espacio excepto dentro del centro de cada línea de vórtice. Cuando se promedia sobre muchas líneas de vórtice, la velocidad promedio

del fluido puede satisfacer la relación usual para rotación uniforme:

$$\nabla \times \langle \mathbf{v} \rangle = 2\boldsymbol{\Omega}. \quad (5.90)$$

De las ecuaciones (5.89) y (5.90) y el teorema de Stokes, encontramos que el número de líneas de vórtice cuantizadas, por unidad de área, es

$$n_v = \frac{4\Omega m_n}{h}. \quad (5.91)$$

El espaciamiento medio entre las líneas de vórtice es  $n_v^{-1/2} \sim 10^{-2} \text{cm}$ , que es mucho más pequeño que el radio de la estrella. Esto justifica el punto de vista macroscópico: si uno considera  $\langle \mathbf{v} \rangle$ , entonces el superfluido puede ser tratado como si rotara rígidamente [86].

### 5.2.2 Influencia de la superfluidez en el proceso de enfriamiento

El enfriamiento de las estrellas de neutrones puede ser afectado fuertemente por la superfluidez de los neutrones y la superconductividad de los protones en los núcleos estelares. Se piensa generalmente que la superfluidez es de tipo BCS, producida bajo la atracción nuclear de los nucleones [157].

A densidades subnucleares,  $\rho \lesssim \rho_0$  (donde  $\rho_0$  es la densidad de la materia nuclear estándar) el emparejamiento de neutrones ocurre debido a la atracción  $nn$  en el estado  $^1S_0$  y los gaps superfluidos dependen sensiblemente del modelo de interacción  $nn$  [87].

Diferentes teorías microscópicas predicen que estos gaps varían en el rango de algunas decenas de keV a algunos MeV [158, 159, 160]. Sin embargo, la interacción de estados singlete de neutrones se vuelve repulsiva para  $\rho \sim \rho_0$ , y, así, la superfluidez de neutrones de estado singlete se anula cerca a la frontera entre el núcleo de la estrella de neutrones y su corteza [33].

Más profundamente en el núcleo, ( $\rho \gtrsim \rho_0$ ), la interacción  $nn$  de estado de triplete  $^3P_2$  puede ser atractiva para producir el superfluido con un gap anisotrópico [161]. Ya que la densidad de protones es mucho más pequeña que la de neutrones, la interacción  $pp$  de estados de singlete se piensa que es atractiva en el núcleo estelar, llevando a superfluidez de los protones.

La superfluidez de neutrones y la superconductividad de protones afectan los principales mecanismos de generación de neutrinos en los núcleos de las

NS, con lo que la tasa de enfriamiento con núcleos superfluidos se verá disminuida. La superfluidez siempre suprime estas reacciones, disminuyendo la luminosidad de los neutrinos en las NS [88].

Ya que los nucleones forman un líquido fuertemente degenerado en el interior de las NS, los protones y neutrones en su interior pueden desplazarse hacia el estado superfluido, debido a la generación de pares de Cooper  $nn$  y  $pp$  bajo la atracción nuclear. El tipo de superfluidez que se presente dependerá de dos factores:

- El estado cuántico de los pares de Cooper. Ya que la concentración de protones es relativamente baja, la interacción de protones en el estado  $^1S_0$  es atractiva, y puede producir pares de protones, mientras que la interacción entre neutrones correspondiente al mismo estado es repulsiva. Cuando los neutrones se encuentran en el estado  $^3P_2$ , la interacción se vuelve atractiva, con lo que la superfluidez de los neutrones puede aparecer [162].
- La temperatura crítica  $T_c$ . Para los neutrones y protones, la temperatura crítica depende de los detalles de la interacción nucleón-nucleón, pero se ha determinado que  $T_c \sim 10^8 - 10^{11} K$  [163].

### 5.2.3 Determinación de la emisividad de neutrinos en las fases superfluidas de la materia nucleónica densa

Para determinar la influencia de la superfluidez en la tasa de emisión de neutrinos producidos en el proceso DUrca, recordamos del capítulo 4 que la emisividad  $Q$  para las reacciones del proceso DUrca era proporcional a la integral [17, 145]

$$I_D = \int_0^\infty dx_\nu x_\nu^3 \int_{-\infty}^\infty dx_1 f(x_1) \int_{-\infty}^\infty dx_2 f(x_2) \int_{-\infty}^\infty dx_l f(x_l) \delta(x_\nu - x_1 - x_2 - x_l), \quad (5.92)$$

donde  $x_\nu = \varepsilon_\nu/(kT)$  es la energía adimensional de los neutrinos, mientras que  $x_\alpha$ , con  $\alpha = 1, 2, l$  son las mismas energías, para el neutrón ( $\alpha = 1$ ), el protón ( $\alpha = 2$ ), y el leptón ( $\alpha = l$ ). Por otro lado,  $k$  es la constante de Boltzmann y  $f(x) = [1 + \exp(x)]^{-1}$  es la función de distribución de Fermi-Dirac. Como se mostró en el capítulo 4 y en el apéndice C.3, el valor de la integral (5.92),

---



cuando no se consideran los efectos de la superfluidez es

$$I = I_0 = \frac{457\pi^6}{5040}. \quad (5.93)$$

Para introducir los efectos de la superfluidez debemos introducir el gap de energía que se presenta en un sistema superfluido, y que aparece en la expresión para la energía de las partículas que realizan la transición de fase. Cerca a la superficie de Fermi, podemos escribir la energía de los bariones al interior de la NS, usando la teoría BCS, como [87, 156]

$$\varepsilon = \begin{cases} \mu - \sqrt{\delta^2 + \eta^2} & \text{Si } p < p_F, \\ \mu + \sqrt{\delta^2 + \eta^2} & \text{Si } p \geq p_F. \end{cases} \quad (5.94)$$

En esta expresión,  $\eta = v_F(p - p_F)$ , donde  $v_F$  y  $p_F$  son la velocidad y energía de Fermi de las partículas, y  $\mu$  es su potencial químico, que asumimos de tal forma que  $\delta \ll \mu$ . La ecuación (5.94) es válida para energías cerca a la energía de Fermi, tales que  $|p - p_F| \ll p_F$ .

En los casos estudiados en la literatura [90, 157],  $\delta^2 = \Delta^2(T)F(\vartheta)$ , donde  $\Delta(T)$  es la amplitud que representa la dependencia con la temperatura del gap de energía, mientras que  $F(\vartheta)$  describe la dependencia del gap con el ángulo  $\vartheta$  entre el momentum  $p$  y el eje de cuantización.  $\lambda$  es un parámetro adimensional que permite analizar diferentes tipos de superfluidez, como se muestra en la tabla 5.2 [73]. A partir de la tabla 5.2, podemos observar que

Tipo	$\lambda$	$F(\vartheta)$	$kT_c/\Delta(0)$
A: ${}^1S_0$	1	1	0.5669
B: ${}^3P_2(m=0)$	1/2	$1 + 3\cos^2\vartheta$	0.8416
C: ${}^3P_2( m =2)$	3/2	$\sin^2\vartheta$	0.4926

Cuadro 5.2: Parámetros característicos de la superfluidez:  $\lambda$ ,  $F(\vartheta)$  y  $kT_c/\Delta(0)$ , que aparecerán en ecuaciones posteriores.

para la superfluidez tipo A el gap es isotrópico,  $\delta = \Delta$ , mientras que para los casos B y C, se presenta una anisotropía, debido a la dependencia angular con  $\vartheta$ .

La amplitud del gap  $\Delta(T)$  está determinada por la ecuación BCS [164]:

$$\ln \left[ \frac{\Delta_0}{\Delta(T)} \right] = 2\lambda \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{z} fF(\vartheta), \quad (5.95)$$

donde  $\Delta_0 = \Delta(0)$ ,  $d\Omega$  es un elemento de ángulo sólido en la dirección de  $\mathbf{p}$ ,  $f = [1 + \exp(z)]^{-1}$  es la distribución de Fermi-Dirac y  $\lambda$  es uno de los coeficientes numéricos que se introdujo en la tabla 5.2, mientras que la variable energética adimensional  $z$  se define por

$$z = \frac{\varepsilon - \mu}{kT} = \text{sign}(x)\sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = \frac{\eta}{kT}, \quad y = \frac{\delta}{kT}. \quad (5.96)$$

Para simplificar los cálculos, es conveniente introducir las variables

$$v = \frac{\Delta(T)}{kT}, \quad \tau = \frac{T}{T_c}, \quad (5.97)$$

donde la amplitud adimensional  $v$  describe la dependencia del gap con la temperatura, determinada por el tipo de superfluidez y la temperatura adimensional  $\tau$ . Usando esta notación, el gap adimensional  $y$  se escribe como

$$y_A = v_A, \quad y_B = v_B\sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta}, \quad y_C = v_C \sin\vartheta. \quad (5.98)$$

Utilizando la ecuación (5.95), se obtienen las asíntotas de la amplitud del gap cerca a la temperatura crítica y en el llamado “límite de superfluidez fuerte”, caracterizado por  $T \ll T_c$ .

Por ejemplo, cuando  $T \rightarrow T_c$ ,  $T < T_c$  ( $\tau \rightarrow 1$ ), se encuentra que [17, 165]

$$v = \beta\sqrt{1 - \tau}, \quad (5.99)$$

donde  $\beta_A = 3.063$ ,  $\beta_B = 1.977$  y  $\beta_C = 3.425$ .

Por otro lado, cuando  $T \ll T_c$  se obtiene

$$v = \frac{\Delta_0}{kT_c\tau}. \quad (5.100)$$

Debido a que las ecuaciones (5.99) y (5.100) solamente son resultados intermedios entre dos límites ( $T \rightarrow T_c$  y  $T \ll T_c$ ), Levenfish y Yakovlev calcularon una función  $v = v(\tau)$  para valores intermedios de  $\tau$ , que obtuvieron a partir de ajustes analíticos de datos numéricos [73, 165, 166]:

$$\begin{aligned} v_A &= \sqrt{1 - \tau} \left( 1.456 - \frac{0.157}{\sqrt{\tau}} + \frac{1.764}{\tau} \right), \\ v_B &= \sqrt{1 - \tau} \left( 0.7893 + \frac{1.188}{\tau} \right), \\ v_C &= \frac{\sqrt{1 - \tau^4}}{\tau} (2.030 - 0.4903\tau^4 + 0.1727\tau^8). \end{aligned} \quad (5.101)$$

Los ajustes analíticos dados por la ecuación (5.101), reproducen, de acuerdo a Levenfish y Yakovlev, los datos numéricos con errores medios entre 1 – 2 %, mientras que el error máximo no supera el 5 %, con lo que el ajuste es lo suficientemente preciso para que se pueda aplicar en el análisis del proceso de enfriamiento de las NS. La gráfica 5.3 muestra la dependencia de los gaps adimensionales 5.101 con la temperatura adimensional  $\tau$ . A partir de esta gráfica se observan dos comportamientos asintóticos de los gaps: a medida que nos acercamos al cero absoluto, el gap de energía tiende a infinito, lo que implica que en el estado base las nucleones requerirían una energía infinita para pasar al estado superfluido. Por otro lado, a medida que nos acercamos a la temperatura crítica ( $\tau \rightarrow 1$ ), el gap de energía se aproxima asintóticamente a la energía térmica correspondiente a esa temperatura,  $v \approx 1 \Rightarrow \Delta(T_c) \approx kT_c$ .

Determinaremos a continuación la emisividad de neutrinos producidos en

### Dependencia del gap adimensional $v$ con la temperatura adimensional $\tau$

Se presentan las graficas para  $v_A$ ,  $v_B$  y  $v_C$

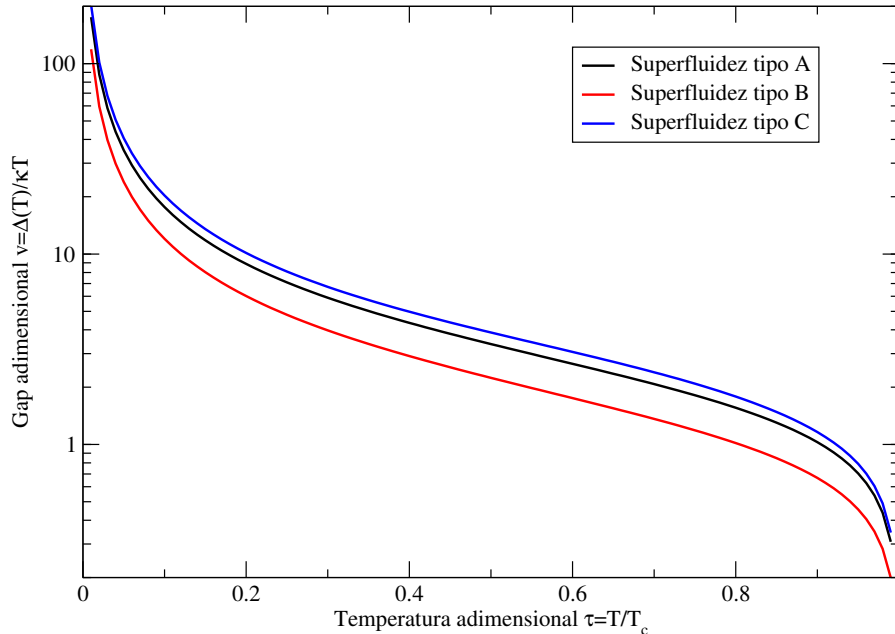


Figura 5.3: Comportamiento del gap adimensional  $v = \frac{\Delta(T)}{kT}$  en función de la temperatura adimensional  $\tau = T/T_c$ . Nótese la escala logarítmica en el eje vertical.

el proceso DUrca, en las fases superfluidas de la materia nuclear densa en las NS, para lo cual reescribimos a continuación la expresión inicial para la emisividad de neutrinos [17, 135]:

$$Q^D = 2 \int \left[ \prod_{j=1}^2 \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \right] \frac{d^3 p_e}{2\varepsilon_e (2\pi)^3} \frac{d^3 p_\nu}{2\varepsilon_\nu (2\pi)^3} \times (2\pi)^4 \delta(E_f - E_i) \delta(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i) \varepsilon_\nu \mathcal{L} \sum_{spins} |M|^2 \Theta. \quad (5.102)$$

En la ecuación (5.102),  $\mathbf{p}_j$  es el momentum de los nucleones (1 para el neutrón y 2 para el protón),  $\mathbf{p}_e, \varepsilon_e$  son, respectivamente, el momentum y energía del electrón,  $\mathbf{p}_\nu, \varepsilon_\nu$  son el momentum y energía del neutrino, y las funciones delta describen la conservación de energía y momentum en la reacción. Por otro lado,  $\mathcal{L}$  representa el producto de los factores de bloqueo que deben introducirse en la emisividad, de la misma forma que se hizo en el capítulo anterior, mientras que  $\sum_{spins} |M|^2$  representa la amplitud de la reacción, sumada sobre todos los estados de iniciales y finales de espín. La función de Heaviside  $\Theta$  se ha introducido explícitamente para recordar que, a menos que los momenta de neutrón, protón y electrón satisfagan la desigualdad triangular, la emisión de neutrinos por el proceso DUrca estará prohibido. Después de descomponer las integrales sobre las direcciones y magnitudes de los momenta, la emisividad de neutrinos puede escribirse como el producto de las siguientes cantidades [167]

$$Q^D = \frac{4}{(2\pi)^8} T^6 A I S |\bar{M}|^2 \Theta, \quad (5.103)$$

$$A = \left[ \prod_{j=1}^4 \int d\Omega_j \right] \delta \left( \sum_{j=1}^4 \mathbf{p}_j \right), \quad (5.104)$$

$$I = \int_0^\infty dx_\nu x_\nu^3 \left[ \prod_{j=1}^3 \int_{-\infty}^\infty dx_j f(x_j) \right] \delta \left( \sum_{j=1}^3 x_j - x_\nu \right), \quad (5.105)$$

$$S = \prod_{j=1}^3 p_{Fj} m_j^*. \quad (5.106)$$

Las ecuaciones (5.103)-(5.106) coinciden con las presentadas en el capítulo anterior y la notación y terminología son equivalentes.

Al resolver las integrales que aparecen en las ecuaciones (5.103)-(5.106) se obtiene la siguiente expresión para la emisividad de neutrinos liberados a

través del proceso DUrca [17, 30]

$$\begin{aligned} Q_0^D &= \frac{457\pi}{10080} G_F^2 \cos^2 \theta_C (f_v^2 + 3g_A^2) \frac{m_n^* m_p^* m_e^*}{\hbar^3 c^3} (kT)^6 \Theta, \\ &\approx 4.00 \times 10^{27} \left( \frac{n_e}{n_0} \right)^{1/3} \frac{m_n^* m_p^*}{m_n^2} T_9^6 \Theta \quad (\text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}). \end{aligned} \quad (5.107)$$

### Proceso DUrca en la materia superfluida

La principal contribución a la producción de neutrinos en la materia no superfluida viene de los nucleones con energías tales que  $|\varepsilon - \mu| \lesssim kT$ . El espectro de los nucleones en la materia superfluida contiene un gap de energía, ecuación (5.94), que suprime la reacción. La esencia de la disminución es la misma que se presenta en la disminución de la capacidad calorífica por la superfluidez fuerte [168].

Para generalizar la expresión para la emisividad del proceso DUrca incluyendo el comportamiento de la materia superfluida, debemos introducir la expresión para la energía  $\varepsilon(\mathbf{p}_j)$ , incluyendo el gap, ecuación (5.94).

Asumiremos que los protones,  $j = 2$ , forman pares de Cooper de tipo A, mientras que los neutrones,  $j = 1$ , pueden emparejarse en cualquiera de los tipos: A, B o C. De esta forma, para incorporar la superfluidez en la ecuación (5.102) es suficiente reemplazar  $x_j \rightarrow z_j$  e introducir un promedio sobre las orientaciones de  $\mathbf{p}_1$ , con lo que la emisividad puede escribirse en la forma [17]

$$Q^D = Q_0^D R^D, \quad (5.108)$$

donde  $R^D$  es el factor de supresión para el proceso DUrca, definido por [73]

$$\begin{aligned} R^D(v_1, v_2) &= \frac{I}{I_0}, \\ R^D(v_1, v_2) &= \int \frac{d\Omega}{4\pi} J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin \vartheta J(y_1, y_2), \end{aligned} \quad (5.109)$$

donde  $y_2 \equiv v_2$ , mientras que  $y_1$  depende del tipo de superfluidez que se presente en la materia nucleónica densa, de acuerdo a

$$y_A = v_A, \quad y_B = v_B \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}, \quad y_C = v_C \sin \vartheta, \quad (5.110)$$

como vimos anteriormente. Por otro lado, la función  $J(y_1, y_2)$  está definida a través de

$$J(y_1, y_2) = \frac{1}{I_0} \int_0^\infty dx_\nu x_\nu^3 \int_{-\infty}^\infty dx_1 f(z_1) \int_{-\infty}^\infty dx_2 f(z_2) \int_{-\infty}^\infty dx_e f(x_e) \delta(x_\nu - z_1 - z_2 - x_e). \quad (5.111)$$

Nuevamente,  $d\Omega$  es el elemento de ángulo sólido a lo largo de  $\mathbf{p}_1$ ,  $\vartheta$  es el ángulo entre  $\mathbf{p}_1$  y el eje de cuantización,  $Q_0^D$  es la emisividad (5.107) en la materia no superfluida. Finalmente  $R^D$  es el factor que describe la supresión en la emisividad del proceso debido a la presencia de las fases superfluidas. Normalmente se tiene que  $R^D = 1$  para nucleones normales (no superfluidos), y  $R^D < 1$  cuando se presenta superfluidez [166].

### Superfluidez de neutrones ó protones

La consideración del caso en que uno sólo de los bariones alcanza el estado superfluido es independiente de cuál de las partículas conforma el superfluido [73].

Consideraremos el caso en que sólo los neutrones son superfluidos, con lo que podemos hacer  $z_2 = x_2$  en las ecuaciones (5.109) y (5.111). De esta forma,  $R^D$  dependerá sólo de un argumento,  $v_1 = v$ , y del tipo de superfluidez considerada.

Resolver la integral  $J(y_1, y_2)$ , dada por (5.111), se reduce a calcular integrales del tipo que aparecen en la teoría de sistemas fuertemente degenerados [169], cuando se integra sobre las variables  $x_l$  o  $x_1$ , obteniéndose la siguiente expresión para el factor de supresión  $R^D$ :

$$R = \frac{5040}{457\pi^6} \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin \vartheta \int_0^\infty dx_\nu x_\nu^3 \int_0^\infty dx_2 [f(z_2)B(x_\nu - z_2) + f(-z_2)B(x_\nu + z_2)]. \quad (5.112)$$

donde la función  $B(x)$  está definida por

$$B(x) = \frac{x}{\exp(x) - 1}.$$

Para temperaturas superiores a la temperatura crítica,  $\tau = T/T_c \geq 1$ , el factor de supresión  $R^D = 1$ , con lo que por encima de la temperatura crítica de aparición de pares de Cooper de nucleones la emisividad de neutrinos es la misma que para el caso no superfluido [166].

Cuando la superfluidez es muy fuerte, es decir, para temperaturas mucho menores que la temperatura crítica ( $\tau \ll 1$ ,  $v \gg 1$ ), la emisión de neutrinos es fuertemente suprimida, debido a la aparición del gap en la relación de dispersión para los bariones, ecuación (5.94) [91].

A partir de la ecuación (5.112) es posible obtener el comportamiento asintótico del factor de supresión  $R$  para el caso  $\tau \ll 1$ , es decir, para temperaturas inferiores a la temperatura de transición de fase [170].

En este caso, la cantidad  $z_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$  se vuelve dominante, y su presencia en las funciones exponenciales bajo la integral restringe en forma considerable la región de integración que contribuye al factor de supresión  $R^D$ . Para  $\tau \ll 1$ , la expresión entre corchetes en la ecuación (5.112), para superfluidez de tipo A o B, es aproximadamente igual a  $\exp(-z_2)\Theta(y_2 - x_\nu)$ , donde  $z_2 \approx y_2 + 0.5(x_2^2/y_2)$ . En este caso, los valores  $x_2 \sim \sqrt{v_2}$  y  $x_\nu \leq v_2$  son los términos de mayor contribución en (5.112) [73].

Para superfluidez tipo A, el integrando no depende del ángulo  $\vartheta$ , mientras que en el caso B, al resolver la integral sobre  $\vartheta$ , la contribución principal se debe a aquellos valores para los cuales  $|\cos \vartheta| \lesssim v_2^{-1/2}$ , en la vecindad del mínimo del gap de energía ( $\vartheta = \pi/2$ ) [161, 165]. Finalmente, si consideramos que la superfluidez del tipo C es lo suficientemente fuerte, su contribución principal a (5.112) se produce cuando  $x_2 \sim x_\nu \sim 1$ ,  $\sin \vartheta \lesssim 1/v_2 \ll 1$ , que corresponde al rango de parámetros donde la influencia del gap se debilita y no suprime las pérdidas de energía de forma exponencial, como en los otros casos. En esta situación, es suficiente aproximar  $\sin \vartheta \approx \vartheta$ , y correr el límite superior de la integral hacia el infinito [165].

Los resultados finales para los comportamientos asintóticos en cada uno de los casos, cuando  $\tau \ll 1$  y  $v = v_2 \gg 1$  son [171]:

$$\begin{aligned} R_A^D &= \frac{252}{457\pi^6} \sqrt{\frac{\pi}{2}} v^{5.5} \exp(-v) = \frac{0.0163}{\tau^{5.5}} \exp\left(-\frac{1.764}{\tau}\right), \\ R_B^D &= \frac{126}{457\pi^5\sqrt{3}} v^5 \exp(-v) = \frac{0.00123}{\tau^5} \exp\left(-\frac{1.188}{\tau}\right), \\ R_C^D &= \frac{6029\pi^2}{5484v^2} = 2.634\tau^2. \end{aligned} \quad (5.113)$$

A partir de las expresiones asintóticas para  $R_A$ ,  $R_B$  y  $R_C$ , observamos que las dos primeras son de naturaleza exponencial, mientras que la última sigue una ley de potencias. La reducción exponencial está asociada con una “eficiencia de excitación” de los cuasi-nucleones cerca a la superficie de Fermi en presencia de un gap de magnitud considerable [73]. El comportamiento potencial característico de la superfluidez tipo C se presenta por la desaparición del gap para valores específicos de  $\theta$ , debido a la dependencia funcional de  $F(\vartheta) = \sin^2 \vartheta$ , ya que para el caso de la superfluidez tipo C el gap se anula en los polos de la esfera de Fermi, independientemente de la temperatura ( $F(0) = F(\pi) = 0$ ), con lo que la superfluidez no afecta a los nucleones que se mueven a lo largo del eje de cuantización [91].

Para valores intermedios de  $v$ , las integrales (5.112) fueron calculadas numéricamente por Levenfish y Yakovlev [166], quienes han publicado estos resultados en diversos artículos [17, 73]. Además de esto, ellos construyeron fórmulas analíticas con el mismo comportamiento asintótico presentado en (5.113), y con un margen de error inferior al 1%. A continuación se presentan los resultados [166]:

$$\begin{aligned}
 R_A^D &= \left[ 0.2312 + \sqrt{(0.7688)^2 + (0.1438v)^2} \right]^{5.5} \exp \left( 3.427 - \sqrt{(3.427)^2 + v^2} \right), \\
 R_B^D &= \left[ 0.2546 + \sqrt{(0.7454)^2 + (0.1284v)^2} \right]^5 \exp \left( 2.701 - \sqrt{(2.701)^2 + v^2} \right), \\
 R_C^D &= \frac{0.5 + (0.09226v)^2}{1 + (0.1821v)^2 + (0.16736v)^4} + \frac{1}{2} \exp \left( 1 - \sqrt{1 + (0.4129v)^2} \right).
 \end{aligned}
 \tag{5.114}$$

Las ecuaciones (5.114), junto con las expresiones para el gap adimensional  $v$  dados por las ecuaciones (5.101), permiten encontrar los factores de supresión en función de la temperatura adimensional  $\tau$ . En la figura 5.4 se muestra la dependencia de los factores de supresión en función de la temperatura.

Observamos de la gráfica 5.4 que el factor de supresión  $R^D$  presenta desviaciones muy pequeñas dependiendo del tipo de superfluides que presentan los nucleones, con lo que establecer diferencias, desde un punto de vista observacional, en cuanto a qué tipo de superfluides se presenta en una NS requerirá instrumentos muy precisos.

---



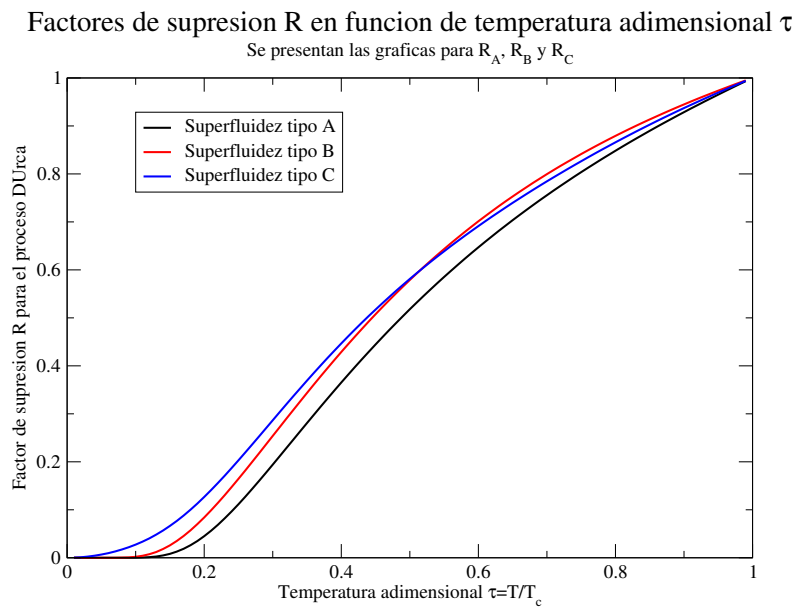


Figura 5.4: Gráfica de los factores de supresión dados por (5.114) en función de la temperatura adimensional  $\tau$

# Capítulo 6

## Conclusiones

En este trabajo se han analizado diferentes aspectos del proceso de enfriamiento de Estrellas de Neutrones (NS) a través de la emisión de neutrinos producidos principalmente en el núcleo y la corteza de estos objetos astrofísicos. Para hacer esto, se han determinado las emisividades de neutrinos de los procesos principales que determinan los escenarios de enfriamiento estándar y enfriamiento acrecentado: los procesos Urca Directo (DUrca) y Urca Modificado (MUrca), aunque este trabajo ha realizado una caracterización más completa del primer proceso que del segundo, de acuerdo al objetivo general que se presentó en la Introducción.

Inicialmente, se determinaron las características físicas generales del sistema en consideración, lo que nos llevó a comprender la estructura de las NS como sistemas superdensos en donde la composición de partículas puede variar a medida que nos alejamos del centro. Esta característica implica que al interior de una NS se presenten cambios en la densidad del sistema, que pueden alcanzar los siete órdenes de magnitud. Debido a que no se tiene un conocimiento completo de la estructura y composición de las NS, se han discutido en la literatura diferentes posibilidades para el contenido de materia de estos objetos compactos. Este desconocimiento lleva implícita la necesidad de construir diferentes ecuaciones de estado (EoS), considerando diferentes posibilidades para el contenido de partículas al interior de las estrellas, al igual que para las interacciones que se presentan entre ellas.

En este trabajo se ha determinado el perfil densidad de NS modelo a partir de ocho diferentes EoS para la materia nuclear en el interior de estas

estrellas. Para hacer esto, se partió de la solución numérica de las ecuaciones de estructura de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, y se realizó una interpolación numérica de los datos obtenidos, con miras a obtener una función continua que describiera los cambios de densidad que se presentan en las diferentes regiones del interior de una NS. Para cada una de las ocho EoS analizadas, se determinaron los perfiles para tres modelos diferentes de estrellas, caracterizados por su radio y masa total. Estos resultados se presentaron en el Capítulo 3, donde se muestran las gráficas obtenidas para los perfiles densidad de las estrellas modelo analizadas.

A partir de estos resultados se observó que las cantidades físicas estudiadas (densidad, densidades de neutrones y protones, al igual que sus momenta de Fermi) son mayores para la estrella de mayor masa analizada ( $1.400M_{\odot}$ ). Por otro lado, se observó que cuando se consideran NS con contenido de materia hiperónica (EoS de Pandharipande con hiperones) las variables analizadas son considerablemente mayores que cuando se considera la materia nuclear estándar. Para esta EoS, las densidades centrales resultan ser del orden de  $12\rho_0$  para la estrella de  $1.330M_{\odot}$  y de  $17\rho_0$  para la estrella de masa  $1.400M_{\odot}$ , lo que muestra que a medida que se consideran composiciones con contenido de bariones pesados, la EoS se hace más rígida, con lo que las densidades de protones y neutrones se hacen mucho más elevadas, debido a que existen más canales de producción de nucleones que al considerar la materia nuclear estándar.

Se observa además, a partir de las gráficas presentadas en la sección 3.2, que la variación de la densidad con la coordenada radial no es tan rápida para  $r$  entre 0 y 5km (aproximadamente), con lo que los modelos analizados anteriormente en la literatura, en donde se consideraba que la densidad era aproximadamente constante a lo largo de las diferentes capas que conforman las estrellas, tiene una validez restringida. Una variación continua en los perfiles densidad de las NS corresponde, desde nuestro punto de vista, a una caracterización más realista del interior de las NS, ya que las características gravitacionales y termodinámicas del sistema considerado implican que los cambios de composición se realicen de manera paulatina, ya que las densidades de las diferentes regiones favorecen la aparición de diferentes estados energéticos para las partículas, con lo que las probabilidades de aparición de partículas más pesadas aumentan a medida que nos acercamos al núcleo de las NS.

Posteriormente, se analizaron las características del proceso de enfriamiento de las NS a través de la determinación de las emisividades de neutrinos producidos en el proceso Urca Directo (DUrca) y Urca Modificado (MUrca). Estos dos procesos, que se realizan principalmente en el núcleo y la corteza de las NS, se consideran los mayores responsables de las pérdidas de energía al interior de estos objetos astrofísicos. Para caracterizar el enfriamiento, se calcularon las emisividades de neutrinos para el proceso DUrca (característico del llamado escenario de enfriamiento acrecentado) y se compararon con las correspondientes al proceso MUrca (característico del escenario estándar de enfriamiento). De acuerdo a los resultados, se encontró que la emisividad del proceso DUrca es siete órdenes de magnitud superior a la correspondiente al proceso MUrca, lo que justifica la denominación de los dos escenarios de enfriamiento mencionados.

Para realizar el cálculo de las emisividades de neutrinos, se parte inicialmente de la regla de oro de Fermi, que permite determinar la tasa correspondiente al decaimiento beta del neutrón, característico de los procesos Urca. En la aplicación de la regla de oro, se hace fundamental introducir *factores de bloqueo* que dan cuenta de la distribución estadística de los fermiones que participan en la reacción. El trabajo presenta el cálculo detallado de la emisividad, asumiendo que la interacción efectiva entre los nucleones se realiza a partir del intercambio de piones. El resultado final indica que la emisividad de neutrinos es proporcional a  $T^6$  para el proceso DUrca y a  $T^8$  para el proceso MUrca, donde  $T$  es la temperatura de la estrella. Posteriormente, se deriva una expresión relativista para la emisividad de neutrinos en el proceso DUrca con nucleones en la materia degenerada de las NS, aplicando nuevamente la regla de oro de Fermi y dentro del Modelo Estándar de Interacciones Electrodébiles.

Adicionalmente, se encuentra que la emisividad de ambos procesos es proporcional a  $\rho^{2/3}$ , donde  $\rho$  es la densidad de la estrella, lo que permitió establecer una conexión entre la emisividad y la coordenada radial  $r$  a partir del perfil densidad calculado anteriormente.

Un resultado importante de este trabajo es la caracterización de las emisividades en función de la coordenada radial medida desde el centro de las estrellas consideradas. A partir de los perfiles densidad calculados en el Capítu-

---

lo 3.2 se determinó una relación entre las emisividades de neutrinos para los procesos DUrca y MUrca, para las ocho EoS analizadas y para las tres estrellas de diferente masa que se analizaron para cada una de estas EoS. Este procedimiento permite concluir que las EoS más suaves (en las que se consideran interacciones similares a las que se presentan en la materia nuclear estándar entre nucleones y electrones) son las que presentan emisividades más bajas, mientras que las estrellas con contenido de bariones pesados (hiperones) presentarían emisividades de neutrinos considerablemente más elevadas. Estas consideraciones pueden revisarse en el Capítulo 4.

Adicionalmente, se calcularon las luminosidades totales de neutrinos a partir de la integración numérica de las emisividades calculadas para ambos procesos, permitiendo realizar una comparación entre resultados obtenidos para diferentes EoS. A partir de las tablas 4.10 y 4.11 se observa que las luminosidades correspondientes a diferentes EoS son muy similares, con lo que la identificación de la composición de una NS a partir de la luminosidad total de neutrinos, como se ha planteado por diferentes autores ([17], por ejemplo), requeriría medidas de la luminosidad de neutrinos con una precisión muy alta.

Para obtener una caracterización más completa del proceso de enfriamiento, se calcula nuevamente la emisividad de neutrinos para el proceso DUrca, en el marco de la Teoría de Campo Medio Relativista, obteniendo una expresión que integra los efectos del retroceso de nucleones, la violación de paridad y las interacciones pseudo-escalares entre los nucleones. Este tratamiento se realiza en el Capítulo 5. Un resultado importante de este Capítulo es la obtención de una condición bajo la cual puede presentarse el proceso DUrca al interior de las NS, implicando que el proceso es posible para momenta del neutrón inferior a  $309.081 MeV$ .

Finalmente, se determinaron los factores de supresión para la emisividad del proceso DUrca cuando aparecen fases superfluidas de nucleones al interior de las NS, por debajo de la temperatura de aparición de pares de Cooper de nucleones. Se encontró que el factor de supresión que caracteriza la emisividad en este caso depende de la temperatura de la estrella, pero presenta desviaciones muy pequeñas dependiendo del tipo de superfluidez que presenten los nucleones, con lo que establecer diferencias, desde un punto de vista observacional, en cuanto a qué tipo de superfluidez se presenta en una NS, requerirá observaciones muy precisas.

---

# Apéndice A

## Derivación de las ecuaciones TOV

La solución en la región exterior de los objetos compactos no rotantes está dada en términos de la solución de Schwarzschild. Las ecuaciones que modelan el equilibrio hidrostático de las NS's pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de campo de Einstein o usando un principio variacional. En esta sección obtendremos las ecuaciones de equilibrio de una NS por el segundo método.

### A.1 Solución de Schwarzschild de las ecuaciones de campo de Einstein

A partir de la ecuación (3.2), presentada en la sección 3.1.1, obtendremos la solución de Schwarzschild de las ecuaciones de Einstein para la región exterior a una estrella esférica en reposo, siguiendo el razonamiento presentado en [20, 172]. Reescribimos a continuación la ecuación (3.2)

$$d\tau^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (\text{A.1})$$

Podemos obtener los elementos del tensor métrico comparando con la forma general del elemento de longitud  $d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  [48]:

$$\begin{aligned} g_{00} &= e^{2\nu(r)}, & g_{11} &= -e^{2\lambda(r)}, & g_{22} &= -r^2, & g_{33} &= -r^2 \sin^2 \theta \\ g_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} = 0, & & & & & & \mu \neq \nu. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Ya que el tensor métrico y su inverso satisfacen la relación  $g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = \delta_{\mu}^{\rho}$ , tenemos que, para este caso especial,  $g_{\mu\mu} = 1/g^{\mu\mu}$  (no sumar sobre  $\mu$ ). Usando la definición de los símbolos de Christoffel de segundo tipo,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}(g_{\kappa\nu,\mu} + g_{\kappa\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\kappa}), \quad (\text{A.3})$$

y reemplazando las componentes del tensor métrico dadas por (A.2), obtenemos las siguientes componentes no nulas:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}g_{00,1} = \nu', \\ \Gamma_{00}^1 &= -\frac{1}{2}g^{11}g_{00,1} = \nu'e^{2(\nu-\lambda)}, \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}g_{11,1} = \lambda', \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2}g^{11}g_{22,1} = -re^{-2\lambda}, \\ \Gamma_{33}^1 &= -\frac{1}{2}g^{11}g_{33,1} = -re^{-2\lambda}\sin^2\theta, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}g_{22,1} = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}g_{33,1} = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}g_{33,2} = \cot\theta, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{2}g^{22}g_{33,2} = -\sin\theta\cos\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A partir de las ecuaciones (A.4), podemos obtener las componentes diagonales del tensor de Ricci, dadas por:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}, \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} R_{00} &= \left(-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r}\right)e^{2(\nu-\lambda)}, \\ R_{11} &= \nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r}, \\ R_{22} &= (1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1, \\ R_{33} &= \sin^2\theta((1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1) = \sin^2\theta R_{22}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

La ecuación de campo de Einstein, para el espacio libre exterior a un objeto esférico, se escribe como [20, 48]

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (\text{A.7})$$

donde  $R$  es el escalar de Ricci, definido como  $R = R^\mu_\mu$ , es decir, la contracción del tensor de Ricci. A partir de esta ecuación vemos que  $R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ , con lo que, al multiplicar por  $g^{\mu\alpha}$  y sumar sobre  $\alpha$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} g^{\mu\alpha}R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g_{\mu\nu}R, \\ R^\alpha_\nu &= \frac{1}{2}\delta^\alpha_\nu R. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Contrayendo  $\alpha = \nu$ , obtenemos  $R^\nu_\nu = \frac{1}{2}\delta^\nu_\nu R$ , con lo que  $R = \frac{1}{2}R$  y obtenemos finalmente que el escalar de Ricci se anula en el espacio exterior al objeto esférico.

A partir de la ecuación (A.7), vemos que

$$G_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow R = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = 0, \tag{A.9}$$

con lo que, al igualar (A.6) a cero, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} -\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} &= 0, \\ \nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r} &= 0, \\ (1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1 &= 0, \end{aligned} \tag{A.10}$$

que, al sumar las dos primeras ecuaciones nos lleva a la condición  $\nu' + \lambda' = 0$ . Al integrar esta ecuación se obtiene  $\nu + \lambda = c_1$ , donde  $c_1$  es una constante arbitraria. Ya que cuando  $r \rightarrow \infty$  (muy lejos del objeto esférico) el espacio-tiempo no se debe ver afectado por la estrella, y la métrica (A.1) debe reducirse a la métrica de Minkowski, debemos tener que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nu = \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda = 0, \tag{A.11}$$

con lo que el valor de  $c_1$  es cero. De esta forma, tenemos que  $\lambda = -\nu$ . Reemplazando este resultado en la tercera de las ecuaciones (A.10) se obtiene:

$$\begin{aligned} (1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1 &= 0, \\ (1 + 2r\nu')e^{2\nu} &= 1, \\ e^{2\nu} &= 1 - \frac{c_2}{r}, \end{aligned} \tag{A.12}$$



donde la última relación se obtiene a partir de la integración de la ecuación anterior, y  $c_2$  es otra constante arbitraria determinada por las condiciones de frontera.

De esta forma, la métrica (A.1) se escribe finalmente como

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{c_2}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{c_2}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (\text{A.13})$$

Para determinar el valor de  $c_2$ , analizamos la aproximación newtoniana [99, 125, 173], en la que consideramos una partícula moviéndose lentamente (es decir, con una velocidad  $v \ll c$ ) en un campo gravitacional estacionario débil, con lo que la ecuación de las geodésicas,

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (\text{A.14})$$

se reduce a

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = 0, \quad (\text{A.15})$$

ya que podemos despreciar  $\frac{dx^i}{d\tau}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) respecto a  $\frac{dx^0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau}$ .

Ya que el campo gravitacional es estacionario,  $g_{\mu\nu}$  es independiente del tiempo, con lo que

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} (g_{\kappa 0,0} + g_{\kappa 0,0} - g_{00,\kappa}) = -\frac{1}{2} g^{\mu\kappa} g_{00,\kappa} = -\frac{1}{2} g^{\mu\kappa} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\kappa}. \quad (\text{A.16})$$

Ya que el campo es débil, podemos aproximar la métrica  $g_{\alpha\beta}$  por una desviación de la métrica Minkowskiana:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad \text{con} \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1. \quad (\text{A.17})$$

Así, a primer orden en  $h_{\alpha\beta}$  tendremos:

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} (\eta^{\mu\kappa} + h^{\mu\kappa}) \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\kappa} \approx -\frac{1}{2} \eta^{\mu\kappa} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\kappa}, \quad (\text{A.18})$$

Usando este resultado en (A.15) obtenemos:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\kappa} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\kappa} c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0. \quad (\text{A.19})$$

Separando las componentes se obtiene:

$$0 = \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \eta^{0\kappa} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\kappa} c^2 \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \Rightarrow \frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0,$$

$$0 = \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \eta^{i\kappa} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\kappa} c^2 \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \Rightarrow \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} c^2 \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0.$$

A partir de la primera de estas ecuaciones vemos que  $t(\tau) = \alpha_1 \tau + \alpha_2$ , con lo que la segunda ecuación queda

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2} c^2 \vec{\nabla} h_{00}, \quad (\text{A.20})$$

comparando con la segunda ley de Newton  $\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{\vec{\nabla} \Phi}{m}$ , vemos que  $\frac{c^2 h_{00}}{2} = \frac{\Phi}{m} + \alpha_3$  (con  $\alpha_3$  una constante arbitraria), donde  $\Phi$  es la energía potencial gravitacional que, para un objeto esférico de masa  $M$ , está dada por

$$\Phi(r) = -\frac{GMm}{r}, \quad (\text{A.21})$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal de Newton, con lo que

$$h_{00} = -\frac{2GM}{c^2 r} + \alpha_3. \quad (\text{A.22})$$

Debido a que el sistema coordenado debe ser Minkowskiano cuando  $r \rightarrow \infty$ , tenemos que  $\alpha_3 = 0$ , con lo que, para la aproximación Newtoniana:

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (\text{A.23})$$

Así, para la aproximación de campo débil el elemento de longitud queda:

$$d\tau^2 = \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (\text{A.24})$$

Comparando la aproximación Newtoniana (A.24) con el elemento de longitud para la solución de Schwarzschild, ecuación (A.13), vemos que la constante de integración  $c_2$  debe ser  $c_2 = \frac{2GM}{c^2}$  [22, 99, 125, 173], con lo que la métrica de Schwarzschild queda finalmente:

$$d\tau^2 = \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (\text{A.25})$$

La solución de Schwarzschild es *exacta*, y, a medida que  $r \rightarrow \infty$ , el espacio-tiempo de Schwarzschild se aproxima al de Minkowski, como se esperaba. Para esta solución, *por fuera del cuerpo esférico de masa  $M$* , la distribución de materia al interior del objeto es irrelevante, de la misma forma que en la Física Newtoniana.

## A.2 Ecuaciones TOV

Encontraremos ahora las ecuaciones para la estructura interna de un cuerpo esféricamente simétrico en reposo, es decir, las ecuaciones de Tolman, Oppenheimer y Volkoff, que representan la reducción de las ecuaciones de Einstein para el interior de una estrella esférica, relativista y estática, siguiendo el razonamiento presentado en [66, 67, 174, 175, 176].

Para este fin, requerimos que la masa total de la estrella, dada por

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho r'^2 dr', \quad (\text{A.26})$$

sea un extremo con respecto a variaciones eulerianas adiabáticas en que el número de bariones

$$N = \int_0^R 4\pi r^2 n(r) \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1/2} dr, \quad (\text{A.27})$$

permanezca constante<sup>1</sup>. En la ecuación A.27,  $n(r)$  representa la densidad de bariones en un radio  $r$ .

Usando el método de los multiplicadores de Lagrange, buscamos una constante  $\lambda$  de tal forma que  $M + \lambda N$  permanezca estacionario con respecto a variaciones eulerianas arbitrarias.

---

<sup>1</sup>En la ecuación (A.27) se ha utilizado la métrica derivada de la ecuación (A.25), extendida a la región interior, en la que el único cambio que se presenta es que, debido a que tratamos con una región interior, la masa que influye sobre un cascarón esférico de radio  $r$  es la masa contenida en ese cascarón,  $M(r)$  [20].

---

De las ecuaciones (A.26) y (A.27) obtenemos

$$\begin{aligned} \delta M + \lambda \delta N &= \int_0^\infty 4\pi r^2 \delta \rho(r) dr, \\ &+ \lambda \int_0^\infty 4\pi r^2 \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1/2} \delta n(r) dr, \\ &+ \lambda \frac{G}{c^2} \int_0^\infty 4\pi r \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-3/2} n(r) \delta M(r) dr = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

donde se han extendido los límites de integración a  $[0, \infty)$ , teniendo en cuenta que  $\rho(r) = 0$  y  $n(r) = 0$  para  $r > R$ .

Usando la ecuación (A.26) y cambiando el orden de integración encontramos que el último término en la ecuación (A.28) se escribe como

$$\begin{aligned} &\lambda \frac{G}{c^2} \int_0^\infty 4\pi r \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-3/2} n(r) dr \int_0^r 4\pi r'^2 \delta \rho(r') dr', \\ &= \lambda \frac{G}{c^2} \int_0^\infty \left[ \int_0^r 4\pi r' \left(1 - \frac{2GM(r')}{c^2 r'}\right)^{-3/2} n(r') dr' \right] 4\pi r^2 \delta \rho(r) dr. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Para cambios adiabáticos, la primera ley de la termodinámica se convierte en  $\delta u = -P\delta\nu$ , donde  $u$  y  $\nu$  son la energía y el volumen por barión, respectivamente, dados por  $u = \frac{\rho c^2}{n}$  y  $\nu = \frac{1}{n}$  [94, 177]. En estos términos, la primera ley se expresa como

$$\delta \left( \frac{\rho c^2}{n} \right) + P \delta \left( \frac{1}{n} \right) = 0. \quad (\text{A.30})$$

A partir de esta ecuación, tomando las variaciones y reorganizando, obtenemos la variación del número de bariones:

$$\delta n = \frac{nc^2}{P + \rho c^2} \delta \rho. \quad (\text{A.31})$$

Las ecuaciones (A.29) y (A.31) llevan a escribir la ecuación (A.28) como sigue:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta M + \lambda \delta N = \int_0^\infty 4\pi r^2 \left[ 1 + \frac{\lambda n(r) c^2}{P + \rho c^2} \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1/2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda G}{c^2} \int_0^r 4\pi r' \left(1 - \frac{2GM(r')}{c^2 r'}\right)^{-3/2} n(r') dr' \right] \delta \rho(r) dr. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Debido a que  $\delta M + \lambda \delta N$  debe ser igual a cero para variaciones arbitrariamente pequeñas de  $\delta \rho$ , la ecuación (A.32) lleva directamente a la relación

$$-\frac{1}{\lambda} = \frac{n}{P + \rho c^2} \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1/2} + \frac{G}{c^2} \int_0^r 4\pi r' n(r') \left(1 - \frac{2GM(r')}{c^2 r'}\right)^{-3/2} dr'. \quad (\text{A.33})$$

Ya que  $\lambda$  es una constante, y por ende independiente de  $r$ , la derivada de (A.33) respecto a  $r$  es:

$$\begin{aligned} 0 &= c^2 \left[ \frac{\frac{dn}{dr}}{P + \rho c^2} - \frac{n}{(P + \rho c^2)^2} \left( \frac{dP}{dr} + c^2 \frac{d\rho}{dr} \right) \right] \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1/2} \\ &+ \frac{nc^2}{P + \rho c^2} \left( \frac{4\pi G \rho r}{c^2} - \frac{GM(r)}{c^2 r^2} \right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-3/2} \\ &- \frac{4\pi G n r}{c^2} \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-3/2}. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

De la ecuación (A.31) tenemos que

$$\frac{c^2 d\rho}{dr} = \frac{P + \rho c^2}{n} \frac{dn}{dr}, \quad (\text{A.35})$$

con lo que la ecuación (A.35) implica que el primer término en el lado derecho de la ecuación (A.34) se reduzca a

$$\frac{-nc^2}{(P + \rho c^2)^2} \frac{dP}{dr} \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1/2}. \quad (\text{A.36})$$

Se sigue entonces que la ecuación (A.34) se convierte en

$$r^2 \frac{dP}{dr} = -\frac{G}{c^2} (P + \rho c^2) \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1} \left( M(r) + \frac{4\pi r^3 P}{c^2} \right). \quad (\text{A.37})$$

Esta ecuación puede escribirse equivalentemente como

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM(r)}{r^2} \left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{M(r)c^2}\right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1}. \quad (\text{A.38})$$

La ecuación (A.38) es la ecuación para el equilibrio hidrostático en relatividad general y se conoce como la ecuación Tolman-Oppenheimer-Volkoff. Esta ecuación se reduce a la ecuación Newtoniana de equilibrio hidrostático en el límite no relativista [66].

# Apéndice B

## Interpolación numérica del perfil densidad

### B.1 Método de Interpolación de Lagrange

El método de interpolación por polinomios de Lagrange [178] consiste en ajustar un conjunto de datos a un polinomio de grado  $n$ , de forma recursiva. Por lo general, los datos se presentan en la forma tabular que se muestra en la tabla B.1.

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_n)$

Cuadro B.1: Conjunto de datos a interpolar usando el método de los polinomios de Lagrange

Asumimos que un polinomio de primer grado  $p_1(x)$  ajusta los datos entre  $(x_0, f(x_0))$  y  $(x_1, f(x_1))$ , con lo que puede escribirse como

$$p_1(x) = a_0(x - x_1) + a_1(x - x_0), \quad (\text{B.1})$$

donde  $a_0$  y  $a_1$  están dados por

$$\begin{aligned} f(x_0) = p_1(x_0) = a_0(x_0 - x_1) &\Rightarrow a_0 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)}, \\ f(x_1) = p_1(x_1) = a_1(x_1 - x_0) &\Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

De esta forma  $p_1(x)$  será

$$p_1(x) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)}(x - x_1) + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x), \quad (\text{B.3})$$

donde  $L_0(x)$  y  $L_1(x)$ , denominados polinomios de Lagrange, están dados por

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \quad L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}. \quad (\text{B.4})$$

Para ajustar un polinomio de segundo grado que pase por  $(x_0, f(x_0))$ ,  $(x_1, f(x_1))$  y  $(x_2, f(x_2))$ , escribimos

$$p_2(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) + a_1(x - x_0)(x - x_2) + a_2(x - x_0)(x - x_1), \quad (\text{B.5})$$

con lo que los coeficientes  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  serán

$$a_0 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \quad a_1 = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \quad a_2 = \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}, \quad (\text{B.6})$$

y el polinomio de segundo grado  $p_2(x)$  puede escribirse como

$$p_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x), \quad (\text{B.7})$$

con los polinomios de Lagrange

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \\ L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \\ L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

En general, para el polinomio de  $n$  -ésimo grado tendremos:

$$p_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x), \quad (\text{B.9})$$

donde los polinomios de Lagrange  $L_i(x)$  están dados por la expresión

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}. \quad (\text{B.10})$$

## B.2 Interpolación del Perfil Densidad

Los datos a interpolar, para cada una de las EoS analizadas, se obtuvieron a partir del artículo “*A numerical survey of neutron star crustal density profiles*” [16]. En este artículo se calculan las densidades de la región correspondiente a la corteza de estrellas de neutrones, para diferentes modelos de ecuaciones de estado.

A continuación se presentan los datos de densidad a interpolar, obtenidos de [16], para la ecuación de estado de Pandharipande (neutrones).

$M = 1.330M_{\odot}$	$R = 10.006km$	$M = 1.400M_{\odot}$	$R = 9.867km$	$M = 1.658M_{\odot}$	$R = 8.492km$
$x = 1 - \frac{r}{R}$	$\rho (g cm^{-3})$	$x = 1 - \frac{r}{R}$	$\rho (g cm^{-3})$	$x = 1 - \frac{r}{R}$	$\rho (g cm^{-3})$
0.0	7.866	0.0	7.863	0.0	7.866
$1.13773 \times 10^{-9}$	$1.319 \times 10^1$	$1.28891 \times 10^{-9}$	$1.360 \times 10^1$	$9.91795 \times 10^{-10}$	$1.447 \times 10^1$
$2.39423 \times 10^{-8}$	$4.972 \times 10^1$	$2.23090 \times 10^{-8}$	$5.120 \times 10^1$	$1.27579 \times 10^{-8}$	$5.428 \times 10^1$
$1.41172 \times 10^{-7}$	$1.874 \times 10^2$	$1.31095 \times 10^{-7}$	$1.927 \times 10^2$	$7.44405 \times 10^{-8}$	$2.037 \times 10^2$
$6.75515 \times 10^{-7}$	$7.066 \times 10^2$	$6.21865 \times 10^{-7}$	$7.252 \times 10^2$	$3.46816 \times 10^{-7}$	$7.642 \times 10^2$
$2.35836 \times 10^{-6}$	$2.664 \times 10^3$	$2.17080 \times 10^{-6}$	$2.730 \times 10^3$	$1.19743 \times 10^{-6}$	$2.867 \times 10^3$
$6.95373 \times 10^{-6}$	$1.004 \times 10^4$	$6.34094 \times 10^{-6}$	$1.027 \times 10^4$	$3.47397 \times 10^{-6}$	$1.076 \times 10^4$
$1.94642 \times 10^{-5}$	$3.786 \times 10^4$	$1.77038 \times 10^{-5}$	$3.866 \times 10^4$	$9.73952 \times 10^{-6}$	$4.037 \times 10^4$
$5.14517 \times 10^{-5}$	$1.427 \times 10^5$	$4.67151 \times 10^{-5}$	$1.455 \times 10^5$	$2.53765 \times 10^{-5}$	$1.515 \times 10^5$
$1.26075 \times 10^{-4}$	$5.382 \times 10^5$	$1.14160 \times 10^{-4}$	$5.477 \times 10^5$	$6.23815 \times 10^{-5}$	$5.683 \times 10^5$
$2.88548 \times 10^{-4}$	$2.029 \times 10^6$	$2.60880 \times 10^{-4}$	$2.061 \times 10^6$	$1.40445 \times 10^{-4}$	$2.132 \times 10^6$
$6.06912 \times 10^{-4}$	$7.649 \times 10^6$	$5.47153 \times 10^{-4}$	$7.758 \times 10^6$	$2.93273 \times 10^{-4}$	$8.001 \times 10^6$
$1.14403 \times 10^{-3}$	$2.884 \times 10^7$	$1.03012 \times 10^{-3}$	$2.920 \times 10^7$	$5.56213 \times 10^{-4}$	$3.002 \times 10^7$
$2.05310 \times 10^{-3}$	$1.087 \times 10^8$	$1.84738 \times 10^{-3}$	$1.099 \times 10^8$	$9.86545 \times 10^{-4}$	$1.126 \times 10^8$
$3.46132 \times 10^{-3}$	$4.099 \times 10^8$	$3.11233 \times 10^{-3}$	$4.136 \times 10^8$	$1.65994 \times 10^{-3}$	$4.226 \times 10^8$
$5.44170 \times 10^{-3}$	$1.545 \times 10^9$	$4.89128 \times 10^{-3}$	$1.557 \times 10^9$	$2.61038 \times 10^{-3}$	$1.586 \times 10^9$
$8.57267 \times 10^{-3}$	$5.826 \times 10^9$	$7.70080 \times 10^{-3}$	$5.859 \times 10^9$	$4.10792 \times 10^{-3}$	$5.950 \times 10^9$
$1.28894 \times 10^{-2}$	$2.196 \times 10^{10}$	$1.15691 \times 10^{-2}$	$2.205 \times 10^{10}$	$6.20721 \times 10^{-3}$	$2.233 \times 10^{10}$
$1.89605 \times 10^{-2}$	$8.280 \times 10^{10}$	$1.70260 \times 10^{-2}$	$8.299 \times 10^{10}$	$9.14044 \times 10^{-3}$	$8.377 \times 10^{10}$
$2.54733 \times 10^{-2}$	$3.122 \times 10^{11}$	$2.28786 \times 10^{-2}$	$3.124 \times 10^{11}$	$1.22832 \times 10^{-2}$	$3.143 \times 10^{11}$
$3.04385 \times 10^{-2}$	$1.177 \times 10^{12}$	$2.73482 \times 10^{-2}$	$1.176 \times 10^{12}$	$1.47004 \times 10^{-2}$	$1.179 \times 10^{12}$
$3.39494 \times 10^{-2}$	$4.437 \times 10^{12}$	$3.05103 \times 10^{-2}$	$4.425 \times 10^{12}$	$1.64164 \times 10^{-2}$	$4.425 \times 10^{12}$
$4.0299 \times 10^{-2}$	$1.673 \times 10^{13}$	$3.62239 \times 10^{-2}$	$1.665 \times 10^{13}$	$1.94675 \times 10^{-2}$	$1.660 \times 10^{13}$
$5.34854 \times 10^{-2}$	$6.306 \times 10^{13}$	$4.81026 \times 10^{-2}$	$6.268 \times 10^{13}$	$2.59768 \times 10^{-2}$	$6.230 \times 10^{13}$
$9.62614 \times 10^{-2}$	$2.400 \times 10^{14}$	$8.69610 \times 10^{-2}$	$2.400 \times 10^{14}$	$4.75309 \times 10^{-2}$	$2.400 \times 10^{13}$
1.0	$1.669 \times 10^{15}$	1.0	$1.830 \times 10^{15}$	1.0	$4.100 \times 10^{15}$

Cuadro B.2: Perfiles de densidad de la corteza para el modelo de Pandharipande (neutrones).

A manera de ejemplo, el algoritmo de interpolación del perfil de densidad se presenta en la figura B.1. Este código fue escrito en lenguaje C++, y a partir de su compilación se obtienen los datos que generan las gráficas que se presentaron en la sección 3.2.



```
//Este programa se usa para construir la gráfica del perfil densidad para una estrella de neutrones que además contiene elec
trones y protones, usando la EoS de Pandharipande

#include<iostream>
#include<cmath>
#include<iomanip>
#define NDatos 25
using namespace std;

#define Rho_nuc 2.8e14//La densidad nuclear estándar es 2.8x10^{14}g/cm^3. Se declara global porque se va a usar mucho.

int main()
{
    int i;
    double Radio_1Densidad[NDatos][2]={{0.0, 7.866}, {1.13773e-9, 1.319e1}, {2.39423e-8, 4.972e1}, {1.41172e-7, 1.874e2},
    {6.75515e-7, 7.066e2}, {2.35836e-6, 2.664e3}, {6.95373e-6, 1.004e4}, {1.94642e-5, 3.786e4},
    {5.14517e-5, 1.427e5}, {1.26075e-4, 5.382e5}, {2.88548e-4, 2.029e6}, {6.06912e-4, 7.649e6},
    {1.14403e-3, 2.884e7}, {2.05310e-3, 1.087e8}, {3.46132e-3, 4.099e8}, {5.44170e-3, 1.545e9},
    {8.57267e-3, 5.826e9}, {1.28894e-2, 2.196e10}, {1.89605e-2, 8.280e10}, {2.54733e-2, 3.122e11},
    {3.04385e-2, 1.177e12}, {3.39494e-2, 4.437e12}, {4.0299e-2, 1.673e13}, {5.34854e-2, 6.306e13},
    {9.62614e-2, 2.400e14}}; //Matriz que guarda los datos en la forma (1-r/R1, \rho)

    double Radio1Densidad[NDatos][2]; //Matriz para guardar los datos (r, \rho)
    double R1=10.006; //El radio de la estrella es R=10.006km, con M=1.330M_sol
    double Radio_2Densidad[NDatos][2]={{0.0, 7.863}, {1.28891e-9, 1.360e1}, {2.23090e-8, 5.120e1}, {1.31095e-7, 1.927e2},
    {6.21865e-7, 7.252e2}, {2.17080e-6, 2.730e3}, {6.34094e-6, 1.027e4}, {1.77038e-5, 3.866e4},
    {4.67151e-5, 1.455e5}, {1.14160e-4, 5.477e5}, {2.60880e-4, 2.061e6}, {5.47153e-4, 7.758e6},
    {1.03012e-3, 2.920e7}, {1.84738e-3, 1.099e8}, {3.11233e-3, 4.136e8}, {4.89128e-3, 1.557e9},
    {7.70080e-3, 5.859e9}, {1.15691e-2, 2.205e10}, {1.70260e-2, 8.299e10}, {2.28786e-2, 3.124e11},
    {2.73482e-2, 1.176e12}, {3.05103e-2, 4.425e12}, {3.62239e-2, 1.665e13}, {4.81026e-2, 6.268e13},
    {8.69610e-2, 2.400e14}}; //Matriz que guarda los datos en la forma (1-r/R2, \rho)

    double Radio2Densidad[NDatos][2];
    double R2=9.867; //El radio de la estrella es R=9.867km, con M=1.400M_sol
    double Radio_3Densidad[NDatos][2]={{0.0, 7.866}, {9.91795e-10, 1.447e1}, {1.27579e-8, 5.428e1}, {7.44405e-8, 2.037e2},
    {3.46816e-7, 7.642e2}, {1.19743e-6, 2.867e3}, {3.47397e-6, 1.076e4}, {9.73952e-6, 4.037e4},
    {2.53765e-5, 1.515e5}, {6.23815e-5, 5.683e5}, {1.40445e-4, 2.132e6}, {2.93273e-4, 8.001e6},
    {5.56213e-4, 3.002e7}, {9.86545e-4, 1.126e8}, {1.65994e-3, 4.226e8}, {2.61038e-3, 1.586e9},
    {4.10792e-3, 5.950e9}, {6.20721e-3, 2.233e10}, {9.14044e-3, 8.377e10}, {1.22832e-2, 3.143e11},
    {1.47004e-2, 1.179e12}, {1.64164e-2, 4.425e12}, {1.94675e-2, 1.660e13}, {2.59768e-2, 6.230e13},
    {4.75309e-2, 2.400e14}}; //Matriz que guarda los datos en la forma (1-r/R2, \rho)

    double Radio3Densidad[NDatos][2];
    double R3=8.492; //El radio de la estrella es R=8.492km, con M=1.658M_sol
    for(i=0; i<NDatos; i++) //Cambia la variable en la primera columna, de 1-r/R a r
    {
        Radio1Densidad[i][0]=R1*(1.0-Radio_1Densidad[i][0]);
        Radio1Densidad[i][1]=Radio_1Densidad[i][1]/Rho_nuc;
        Radio2Densidad[i][0]=R2*(1.0-Radio_2Densidad[i][0]);
        Radio2Densidad[i][1]=Radio_2Densidad[i][1]/Rho_nuc;
        Radio3Densidad[i][0]=R3*(1.0-Radio_3Densidad[i][0]);
        Radio3Densidad[i][1]=Radio_3Densidad[i][1]/Rho_nuc;
    }
    cout<<0.0<< " <<1.669e15/Rho_nuc<< " <<0.0<< " <<1.830e15/Rho_nuc<< " <<0.0<< " <<4.100e15/Rho_nuc<<endl;
    for(i=NDatos-1; i>=0; i--)
        cout<<setprecision(10)<<Radio1Densidad[i][0]<< " <<Radio1Densidad[i][1]<< " <<setprecision(10)<<Radio2Densidad[i][0]<<
    " <<Radio2Densidad[i][1]<< " <<setprecision(10)<<Radio3Densidad[i][0]<< " <<Radio3Densidad[i][1]<<endl;
    return 0;
}
```

Figura B.1: Código fuente del programa escrito en C++ para realizar la interpolación del perfil densidad con la EoS de Pandharipande (neutrones).

Para calcular numéricamente las densidades de neutrones y protones, se utilizó el programa que se presenta en la figura B.2.

El cálculo numérico de los Momenta de Fermi del neutrón y el protón se realizó con el programa que se muestra en la figura B.3.

```

//Este programa se usa para construir la gráfica de la densidad de neutrones y protones en función de la distancia radial,
//usando la ecuación de estado de Pandharipande para neutrones

#include<iostream>
#include<cmath>
using namespace std;

#define NDatos 500

double DensidadNeutrones(double Rho)
{
    double n_neutrones;
    n_neutrones=1.672e38*Rho;
    return n_neutrones;
}
double DensidadProtones(double Rho)
{
    double n_pe;
    n_pe=9.563e35*Rho*Rho;
    return n_pe;
}
int main()
{
    int i;
    //Esta matriz contendrá los datos de distancia radial y densidad escalada por rho_nuc: (r,rho):
    //Masa=1.330M_sol
    double RadioDensidad1[NDatos][2]={};
    //Masa=1.400M_sol
    double RadioDensidad2[NDatos][2]={};
    //Masa=1.658M_sol
    double RadioDensidad3[NDatos][2]={};
    double R1=10.006;//El radio de la estrella de masa 1.330M_sol es de 10.006km.
    double R2=9.867;//El radio de la estrella de masa 1.400M_sol es de 9.867km.
    double R3=8.492;//El radio de la estrella de masa 1.658M_sol es de 8.492km.
    for(i=0;i<NDatos;i++){
        cout<<RadioDensidad1[i][0]<<" "<<DensidadNeutrones(RadioDensidad1[i][1])<<" "<<DensidadProtones(RadioDensidad1[i][1])<<" "
        ;
        cout<<RadioDensidad2[i][0]<<" "<<DensidadNeutrones(RadioDensidad2[i][1])<<" "<<DensidadProtones(RadioDensidad2[i][1])<<" "
        ;
        cout<<RadioDensidad3[i][0]<<" "<<DensidadNeutrones(RadioDensidad3[i][1])<<" "<<DensidadProtones(RadioDensidad3[i][1]);
        cout<<endl;
    }
    return 0;
}

```

Figura B.2: Código fuente del programa escrito en C++ para realizar el cálculo numérico de las densidades de neutrones y protones con la EoS de Pandharipande (neutrones).

```

//Este programa se usa para construir la gráfica de los momenta de Fermi de neutrones y protones,
//usando la EoS de Pandharipande (neutrones)

#include<iostream>
#include<cmath>
#define NDatos 500
using namespace std;

double Rho_nuc=2.8e14;//La densidad nuclear estándar es 2.8x10{14}g/cm3. Se declara global porque se va a usar mucho.

double FermiNeutron(double Rho)
{
    double MomentoFermiNeutron;
    MomentoFermiNeutron=337.206*pow(Rho,0.33333);
    return MomentoFermiNeutron;
}

double FermiProton(double Rho)
{
    double MomentoFermiProton;
    MomentoFermiProton=60.51086*pow(Rho,0.666667);
    return MomentoFermiProton;
}

int main()
{
    int i;
    //Estas matrices contienen los datos de densidad obtenidos previamente.
    double RadioDensidad1[NDatos][2]={};
    double RadioDensidad2[NDatos][2]={};
    double RadioDensidad3[NDatos][2]={};
    for(i=0;i<NDatos;i++){
        cout<<RadioDensidad1[i][0]<<" "<<FermiNeutron(RadioDensidad1[i][1])<<" "<<FermiProton(RadioDensidad1[i][1])<<" ";
        cout<<RadioDensidad2[i][0]<<" "<<FermiNeutron(RadioDensidad2[i][1])<<" "<<FermiProton(RadioDensidad2[i][1])<<" ";
        cout<<RadioDensidad3[i][0]<<" "<<FermiNeutron(RadioDensidad3[i][1])<<" "<<FermiProton(RadioDensidad3[i][1]);
        cout<<endl;
    }
    return 0;
}

```

Figura B.3: Código fuente del programa escrito en C++ para realizar el cálculo numérico de los momenta de Fermi de neutrones y protones con la EoS de Pandharipande (neutrones).

# Apéndice C

## Detalles de cálculo de las emisividades de neutrinos para los procesos DUrca y MUrca

### C.1 Cálculo de la tasa de decaimiento diferencial $dW_{i \rightarrow f}$ para el decaimiento beta del neutrón

En esta sección se calculará la probabilidad de decaimiento diferencial  $dW_{i \rightarrow f}$ , dado por la ecuación (4.7), que escribimos nuevamente a continuación

$$dW_{i \rightarrow f} = 2\pi\delta(\varepsilon_n - \varepsilon_p - \varepsilon_e - \varepsilon_\nu) \sum_{spins} |H_{fi}|^2 \frac{d^3\mathbf{p}_p}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_e}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_\nu}{(2\pi)^3}. \quad (\text{C.1})$$

El decaimiento beta del neutrón puede representarse por el diagrama de Feynmann que se presenta en la figura C.1.

Para este diagrama, el Hamiltoniano de interacción está dado por

$$\hat{H} = \frac{G}{\sqrt{2}} J_\alpha l^\alpha, \quad (\text{C.2})$$

donde  $G = G_F \cos \theta_c$ , con  $G_F$  la constante de Fermi y  $\theta_c$  el ángulo de Cabibbo ( $\sin \theta_c = 0.231$ ).

En la ecuación (C.2),  $l^\alpha$  es la corriente débil leptónica, dada por

$$l^\alpha = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha (1 + \gamma^5) \psi_\nu, \quad (\text{C.3})$$

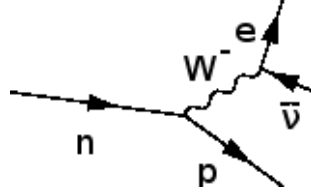


Figura C.1: Diagrama de Feynmann para el decaimiento beta del neutrón

con  $\psi_e, \psi_\nu$  las funciones de onda del electrón y el neutrino, respectivamente, que pueden expresarse como

$$\begin{aligned} \psi_e &= \frac{u_e}{\sqrt{2\varepsilon_e}} e^{-ip_e \cdot x} & \text{con } p_e &= (\varepsilon_e, \mathbf{p}_e), \\ \psi_\nu &= \frac{u_\nu}{\sqrt{2\varepsilon_\nu}} e^{-ip_\nu \cdot x} & \text{con } p_\nu &= (\varepsilon_\nu, \mathbf{p}_\nu). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

En las ecuaciones (C.4), los espinores unitarios  $u_e$  y  $u_\nu$  satisfacen las relaciones  $\bar{u}_e u_e = 2m_e$  y  $\bar{u}_\nu u_\nu = 0$ , asumiendo que los neutrinos son no masivos. Por otro lado,  $J^\alpha = (J^0, \mathbf{J})$ , es la corriente débil hadrónica, con componentes

$$\begin{aligned} J^0 &= f_V \psi_p^\dagger \psi_n & (\text{interacción vectorial}), \\ J^i &= -g_A \psi_p^\dagger \sigma^i \psi_n & (\text{interacción axial-vectorial}), \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

en las ecuaciones (C.5),  $f_V = 1$  y  $g_A = 1.26$  son las constantes de acoplamiento vectorial y axial-vectorial, respectivamente, de Gamow-Teller, y  $(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$  es el vector tridimensional cuyas componentes son las matrices de Pauli.

Las funciones de onda del neutrón y el protón se escriben en términos de los espinores no relativistas  $\chi_s, \chi_{s'}$  como

$$\begin{aligned} \psi_n &= \chi_s e^{-ip_n \cdot x} & \text{con } p_n &= (\varepsilon_n, \mathbf{p}_n), \\ \psi_p &= \chi_{s'} e^{-ip_p \cdot x} & \text{con } p_p &= (\varepsilon_p, \mathbf{p}_p). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Por otro lado, la tasa de decaimiento diferencial (C.1) contiene el elemento de matriz para el hamiltoniano de interacción (C.2), que puede expresarse como

$$\sum_{\text{spins}} |H_{fi}|^2 = (2\pi)^3 \frac{G^2}{2} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_e - \mathbf{p}_\nu) \mathcal{J}_{\alpha\beta} \mathcal{L}^{\alpha\beta}, \quad (\text{C.7})$$

en esta última expresión,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\alpha\beta} &= \sum_{spins} (J_\alpha)^* J_\beta, \\ \mathcal{L}^{\alpha\beta} &= \sum_{spins} (l^\alpha)^* l^\beta,\end{aligned}\tag{C.8}$$

son los tensores de corriente electrodébil obtenidos a partir de (C.3) y (C.5).

### C.1.1 Cálculo de $\mathcal{L}^{\alpha\beta}$

Para determinar una expresión para  $\mathcal{L}^{\alpha\beta}$  reemplazamos la corriente débil leptónica, ecuación (C.3):

$$\mathcal{L}^{\alpha\beta} = \sum_{spins} [\bar{\psi}_e \gamma^\alpha (1 + \gamma^5) \psi_\nu]^* [\bar{\psi}_e \gamma^\beta (1 + \gamma^5) \psi_\nu].$$

Reemplazando las funciones de onda para el electrón y el neutrino, dadas por (C.4) obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\alpha\beta} &= \sum_{spins} \left[ \frac{\bar{u}_e}{\sqrt{2\varepsilon_e}} e^{-ip_e \cdot x} \gamma^\alpha (1 + \gamma^5) \frac{u_\nu}{\sqrt{2\varepsilon_\nu}} e^{-ip_\nu \cdot x} \right]^* \left[ \frac{\bar{u}_e}{\sqrt{2\varepsilon_e}} e^{-ip_e \cdot x} \gamma^\beta (1 + \gamma^5) \frac{u_\nu}{\sqrt{2\varepsilon_\nu}} e^{-ip_\nu \cdot x} \right], \\ \mathcal{L}^{\alpha\beta} &= \sum_{spins} \frac{1}{4\varepsilon_e \varepsilon_\nu} [\bar{u}_e \gamma^\alpha (1 + \gamma^5) u_\nu]^* [\bar{u}_e \gamma^\beta (1 + \gamma^5) u_\nu],\end{aligned}\tag{C.9}$$

Para evaluar la expresión (C.9) vemos que tiene la forma general

$$\sum_{spins} [\bar{u}(a) \Gamma_1 u(b)] [\bar{u}(a) \Gamma_2 u(b)]^*$$

Para evaluar estas expresiones, evaluamos primero el término  $[\bar{u}(a) \Gamma_2 u(b)]^*$  como

$$[\bar{u}(a) \Gamma_2 u(b)]^* = [u^\dagger(a) \gamma^0 \Gamma_2 u(b)]^* = u^\dagger(b) \Gamma_2^\dagger \gamma^{0\dagger} u(a)\tag{C.10}$$

teniendo en cuenta que  $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$  y  $(\gamma^0)^2 = 1$ , podemos escribir (C.10) como

$$[\bar{u}(a) \Gamma_2 u(b)]^* = u^\dagger(b) \gamma^0 \Gamma_2^\dagger \gamma^0 u(a) = \bar{u}(b) (\gamma^0 \Gamma_2^\dagger \gamma^0) u(a)\tag{C.11}$$


---

definiendo  $\gamma^0 \Gamma_2^\dagger \gamma^0$  como  $\bar{\Gamma}_2$  obtenemos finalmente

$$[\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* = \bar{u}(b)\bar{\Gamma}_2 u(a) \quad (\text{C.12})$$

Usando el resultado (C.12) podemos escribir términos de la forma  $[\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^*$  como

$$[\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* = [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(b)\bar{\Gamma}_2 u(a)] \quad (\text{C.13})$$

Usando (C.13), podemos ahora sumar sobre las orientaciones de spin de la partícula  $b$ , usando las relaciones de completéz para los espinores  $u$ :

$$\sum_s u^{(s)} \bar{u}^s = (\gamma^\mu p_\mu + mc) = (\not{p} + mc) \quad (\text{C.14})$$

donde  $m$  es la masa de la partícula representada por el espinor  $u$ . Usando este resultado obtenemos:

$$\sum_{s_b} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* = \bar{u}(a)\Gamma_1 \left[ \sum_{s_b} u^{(s_b)}(p_b) \bar{u}^{(s_b)}(p_b) \right] \bar{\Gamma}_2 u(a) \quad (\text{C.15})$$

Reemplazando la relación de completéz (C.14) en (C.15) obtenemos

$$\sum_{s_b} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* = \bar{u}(a)\Gamma_1 (\not{p}_b + m_b c) \bar{\Gamma}_2 u(a) = \bar{u}(a) Q u(a) \quad (\text{C.16})$$

en la expresión (C.16) hemos definido la matriz  $Q = \Gamma_1 (\not{p}_b + m_b c) \bar{\Gamma}_2$ . Para evaluar (C.16), sumamos ahora sobre los valores de spin de la partícula  $a$ ,  $s_a$ :

$$\sum_{s_a, s_b} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* = \sum_{s_a} \bar{u}^{(s_a)}(p_a) Q u^{(s_a)}(p_a) \quad (\text{C.17})$$

escribiendo explícitamente la multiplicación matricial en la ecuación (C.17) obtenemos:

$$\sum_{s_a, s_b} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* = \sum_{s_a} \sum_{ij} \bar{u}^{(s_a)}(p_a)_i Q_{ij} u^{(s_a)}(p_a)_j \quad (\text{C.18})$$


---

debido a que la matriz  $Q$  es independiente del spin  $s_a$  podemos escribir esta ecuación como

$$\begin{aligned} \sum_{s_a, s_b} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* &= \sum_{ij} Q_{ij} \sum_{s_a} \bar{u}^{(s_a)}(p_a)_i u^{(s_a)}(p_a)_j \\ &= \sum_{ij} Q_{ij} \sum_{s_a} [u^{(s_a)}(p_a) \bar{u}^{(s_a)}(p_a)]_{ji} \\ \sum_{s_a, s_b} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* &= \sum_{ij} Q_{ij} (\not{p}_a + m_a c)_{ji} \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

El último término del lado derecho de (C.19) corresponde a la traza de la matriz  $Q(\not{p}_a + m_a c)$ , con lo que obtenemos finalmente el resultado buscado:

$$\sum_{s_a, s_b} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* = Tr[\Gamma_1(\not{p}_b + m_b c)\bar{\Gamma}_2(\not{p}_a + m_a c)] \quad (\text{C.20})$$

Usando (C.20), podemos escribir la corriente leptónica (C.9) como

$$\mathcal{L}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\varepsilon_e \varepsilon_\nu} Tr \left[ \gamma^\beta (1 + \gamma^5) \not{p}_\nu \overline{\gamma^\alpha (1 + \gamma^5)} (\not{p}_e + m_e) \right]. \quad (\text{C.21})$$

Usando las propiedades de las matrices de Dirac presentadas en [74], podemos escribir (C.21) como

$$\mathcal{L}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\varepsilon_e \varepsilon_\nu} Tr \left[ \gamma^\sigma p_{\nu\sigma} \gamma^\alpha (1 + \gamma^5) (\gamma^\rho p_{e\rho} + m_e) \gamma^\beta (1 + \gamma^5) \right].$$

Expandiendo los productos y usando los siguientes resultados para las trazas de productos de matrices de Dirac [179]:

$$\begin{aligned} Tr(\mathbf{1}) &= 4, \\ Tr(\text{No. impar de } \gamma's) &= 0, \\ Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu}, \\ Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}), \\ Tr(\gamma^5) &= 0, \\ Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) &= 0, \\ Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5) &= -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

obtenemos la siguiente expresión para  $\mathcal{L}^{\alpha\beta}$ :

$$\mathcal{L}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\varepsilon_e \varepsilon_\nu} \left[ 8p_{\nu\sigma} p_{e\rho} (g^{\sigma\alpha} g^{\rho\beta} - g^{\sigma\rho} g^{\alpha\beta} + g^{\sigma\beta} g^{\alpha\rho}) + 8ip_{\nu\sigma} p_{e\rho} \varepsilon^{\sigma\alpha\rho\beta} \right], \quad (\text{C.23})$$



subiendo los índices realizando las contracciones con los tensores métricos  $g^{\mu\nu}$ , obtenemos finalmente

$$\mathcal{L}^{\alpha\beta} = \frac{2}{\varepsilon_e \varepsilon_\nu} [p_e^\alpha p_\nu^\beta + p_e^\beta p_\nu^\alpha - (p_e \cdot p_\nu) g^{\alpha\beta} + i \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} p_{e\rho} p_{\nu\sigma}]. \quad (\text{C.24})$$

Recordemos que en la ecuación (C.24) el subíndice  $\nu$  se usa para indicar propiedades del neutrino (su momentum, en este caso), y no representa un número de componente en el espacio-tiempo, como sí lo representan las letras  $\alpha, \beta, \rho, \sigma$ .

### C.1.2 Cálculo de $\mathcal{J}^{\alpha\beta}$

Calculemos ahora los elementos de matriz de la corriente hadrónica

$$\mathcal{J}^{\alpha\beta} = \sum_{spins} (J^\alpha)^* J^\beta. \quad (\text{C.25})$$

Reemplazando  $J^0 = \chi_{s'}^\dagger \chi_s = \delta_{ss'}$  y  $J^i = -g_A \chi_{s'}^\dagger \sigma^i \chi_s$  obtenemos las siguientes componentes para  $\mathcal{J}^{\alpha\beta}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{00} &= \sum_{ss'} (J^0)^* J^0 = \sum_{ss'} \delta_{ss'} \delta_{ss'} = \sum_s 1 = 2, \\ \mathcal{J}^{01} &= \sum_{ss'} (J^0)^* J^1 = \sum_{ss'} \delta_{ss'} (-g_A \chi_{s'}^\dagger \sigma^1 \chi_s), \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

usando las siguientes expresiones para los espinores unitarios y las matrices de Pauli  $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ ,

$$\chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.27})$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.28})$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \chi_{1/2}^\dagger \sigma^1 \chi_{1/2} &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \\ \chi_{-1/2}^\dagger \sigma^1 \chi_{-1/2} &= (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

De esta forma, obtenemos que

$$\mathcal{J}^{01} = 0. \quad (\text{C.30})$$

De forma completamente análoga se obtienen los resultados

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{01} &= \mathcal{J}^{10} = 0, \\ \mathcal{J}^{02} &= \mathcal{J}^{20} = 0, \\ \mathcal{J}^{03} &= \mathcal{J}^{30} = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

Calculemos ahora  $\mathcal{J}^{12}$ :

$$\mathcal{J}^{12} = \sum_{ss'} (J^1)^* J^2 = g_A^2 \sum_{ss'} (\chi_{s'}^\dagger \sigma^1 \chi_s) (\chi_{s'}^\dagger \sigma^2 \chi_s). \quad (\text{C.32})$$

Reemplazando (C.27) y (C.28) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{12} = g_A^2 & \left[ (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\ & + (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & + (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \left. + (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

Resolviendo los productos matriciales se obtiene finalmente  $\mathcal{J}^{12} = 0$ . El cálculo de los otros elementos no diagonales de  $\mathcal{J}^{\alpha\beta}$  es similar y arroja el mismo resultado, con lo que

$$\mathcal{J}^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{Para } \alpha \neq \beta. \quad (\text{C.34})$$

Finalmente, calculemos  $\mathcal{J}^{11}$ :

$$\mathcal{J}^{11} = g_A^2 \sum_{ss'} |\chi_{s'}^\dagger \sigma^1 \chi_s|^2, \quad (\text{C.35})$$

reemplazando las ecuaciones (C.27) y (C.28) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}^{11} = g_A^2 & \left[ \left( (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^2 \right. \\
 & + \left( (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^2 \\
 & + \left( (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^2 \\
 & \left. + \left( (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^2 \right].
 \end{aligned} \tag{C.36}$$

Resolviendo los productos se obtiene  $\mathcal{J}^{11} = 2g_A^2$ .

Los cálculos para  $\mathcal{J}^{22}$  y  $\mathcal{J}^{33}$  se realizan de forma análoga.

Finalmente, las componentes de  $\mathcal{J}^{\alpha\beta}$  son

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2g_A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2g_A^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2g_A^2 \end{pmatrix}. \tag{C.37}$$

### C.1.3 Cálculo de $\sum_{spins} |H_{fi}|^2$

Teniendo ya las expresiones para  $\mathcal{L}^{\alpha\beta}$  y  $\mathcal{J}^{\alpha\beta}$  dadas, respectivamente, por las ecuaciones (C.24) y (C.37), podemos calcular

$$\begin{aligned}
 \sum_{spins} |H_{fi}|^2 & = (2\pi)^3 \frac{G^2}{2} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_e - \mathbf{p}_\nu) \mathcal{J}_{\alpha\beta} \mathcal{L}^{\alpha\beta}, \\
 & = (2\pi)^3 \frac{G^2}{2} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_e - \mathbf{p}_\nu) \sum_{\mu=0}^3 \mathcal{J}^{\mu\mu} \mathcal{L}^{\mu\mu}.
 \end{aligned} \tag{C.38}$$

Reemplazando las componentes apropiadas para  $\mathcal{J}^{\alpha\beta}$  y  $\mathcal{L}^{\alpha\beta}$ :

$$\begin{aligned}
 \sum_{\mu=0}^3 \mathcal{J}^{\mu\mu} \mathcal{L}^{\mu\mu} & = 2(2p_e^0 p_\nu^0 - p_e \cdot p_\nu) + 2g_A^2(2p_e^1 p_\nu^1 + p_e \cdot p_\nu) \\
 & + 2g_A^2(2p_e^2 p_\nu^2 + p_e \cdot p_\nu) + 2g_A^2(2p_e^3 p_\nu^3 + p_e \cdot p_\nu), \tag{C.39}
 \end{aligned}$$


---

agrupando términos semejantes y haciendo  $p_e^0 = \varepsilon_e$ ,  $p_\nu^0 = \varepsilon_\nu$  se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \sum_{spins} |H_{fi}|^2 &= (2\pi)^3 \frac{G^2}{\varepsilon_e \varepsilon_\nu} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_e - \mathbf{p}_\nu) \\ &\times [2\varepsilon_e \varepsilon_\nu + 2\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\nu + 2g_A^2(3\varepsilon_e \varepsilon_\nu - \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\nu)]. \end{aligned} \quad (C.40)$$

Este elemento de matriz suele expresarse en términos de  $|M_{fi}|^2$  como

$$\begin{aligned} \sum_{spins} |H_{fi}|^2 &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_e - \mathbf{p}_\nu) |M_{fi}|^2, \\ |M_{fi}|^2 &= \frac{G^2}{\varepsilon_e \varepsilon_\nu} [2\varepsilon_e \varepsilon_\nu + 2\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\nu + 2g_A^2(3\varepsilon_e \varepsilon_\nu - \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\nu)]. \end{aligned} \quad (C.41)$$

#### C.1.4 Cálculo de $dW_{i \rightarrow f}$

Reemplazando la ecuación (C.41) en la ecuación para  $dW_{i \rightarrow f}$  se obtiene

$$\begin{aligned} dW_{i \rightarrow f} &= 2\pi \delta(\varepsilon_n - \varepsilon_p - \varepsilon_e - \varepsilon_\nu) \sum_{spins} |H_{fi}|^2 \frac{d^3 \mathbf{p}_p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_e}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_\nu}{(2\pi)^3}, \\ dW_{i \rightarrow f} &= (2\pi)^4 \delta(\varepsilon_n - \varepsilon_p - \varepsilon_e - \varepsilon_\nu) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_e - \mathbf{p}_\nu) \\ &\times |M_{fi}|^2 \frac{d^3 \mathbf{p}_p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_e}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_\nu}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (C.42)$$

Debido al degeneramiento de la materia al interior de las NS, y a que los neutrinos son emitidos en todas las direcciones, el valor promedio del producto escalar  $\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\nu$  es cero, con lo que el elemento de matriz  $|M_{fi}|^2$  puede aproximarse como sigue

$$\begin{aligned} |M_{fi}|^2 &= \frac{G^2}{\varepsilon_e \varepsilon_\nu} [2\varepsilon_e \varepsilon_\nu + 2\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\nu + 2g_A^2(3\varepsilon_e \varepsilon_\nu - \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\nu)], \\ |M_{fi}|^2 &\approx \frac{G^2}{\varepsilon_e \varepsilon_\nu} [2\varepsilon_e \varepsilon_\nu (1 + 3g_A^2)], \\ |M_{fi}|^2 &\approx 2G^2(1 + 3g_A^2) = 2G_F^2 \cos^2 \theta_c (1 + 3g_A^2). \end{aligned} \quad (C.43)$$

Ya que la energía del neutrino es del orden de la temperatura de la estrella, su momentum es tal que  $p_\nu \sim kT$ , con lo que será mucho más pequeño que el

---

momentum de las otras partículas. Así, podemos desprestigiar  $p_\nu$  de la función delta que aparece en (C.42), con lo que obtenemos

$$dW_{i \rightarrow f} \frac{d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^8} \delta(\varepsilon_n - \varepsilon_p - \varepsilon_e - \varepsilon_\nu) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_e) |M_{fi}|^2 d^3 \mathbf{p}_n d^3 \mathbf{p}_p d^3 \mathbf{p}_e d^3 \mathbf{p}_\nu. \quad (\text{C.44})$$

Podemos escribir además  $d^3 \mathbf{p}_\nu = p_\nu^2 dp_\nu d\Omega_\nu$  y aprovechar el hecho que, para la aproximación de neutrinos no masivos,  $\varepsilon_\nu^2 = p_\nu^2$ , con lo que  $d^3 \mathbf{p}_\nu = \varepsilon_\nu^2 d\varepsilon_\nu d\Omega_\nu$  y, ya que el integrando es independiente del ángulo sólido visto por el neutrino,  $d^3 \mathbf{p}_\nu = 4\pi \varepsilon_\nu^2 d\varepsilon_\nu$ .

Con estos resultados, la expresión (C.44) puede escribirse como

$$dW_{i \rightarrow f} \frac{d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^8} \delta(\varepsilon_n - \varepsilon_p - \varepsilon_e - \varepsilon_\nu) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_e) |M_{fi}|^2 4\pi \varepsilon_\nu^2 d\varepsilon_\nu \prod_{i=1}^3 d^3 \mathbf{p}_i. \quad (\text{C.45})$$

En esta última expresión  $i = 1$  corresponde al neutrón,  $i = 2$  al protón e  $i = 3$  al electrón. Podemos además, usando la relación relativista  $E^2 = p^2 + m^2$ , escribir los diferenciales de momentum para el neutrón, el protón y el electrón,  $d^3\mathbf{p}_i = p_i^2 dp_i d\Omega_i$ , como  $p_i^2 dp_i \approx p_{Fi} \varepsilon_i d\varepsilon_i \approx p_{Fi} m_i^* d\varepsilon_i$ , donde  $p_F$  es el momentum de Fermi y  $m^*$  es la masa efectiva debido a la interacción con las demás partículas de la estrella.

De esta forma, obtenemos la expresión final para  $dW_{i \rightarrow f} \frac{d^3\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3}$ :

$$\begin{aligned} dW_{i \rightarrow f} \frac{d^3\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} &= \frac{1}{(2\pi)^8} \delta(\varepsilon_n - \varepsilon_p - \varepsilon_e - \varepsilon_\nu) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_e) |M_{fi}|^2 \\ &\times 4\pi \varepsilon_\nu^2 d\varepsilon_\nu \prod_{j=1}^3 p_{Fj} m_j^* d\varepsilon_j d\Omega_j. \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

## C.2 Cálculo de la integral $A_D$

En esta sección calcularemos el valor de la integral (4.15), que reescribimos a continuación

$$A_D = 4\pi \int d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3). \quad (\text{C.47})$$

La función delta que aparece en (C.47) puede escribirse en la forma

$$\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) = \delta(p_2 - |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3|) \frac{\delta^{(2)}(\Omega_2 - \Omega_{1-3})}{p_2^2}, \quad (\text{C.48})$$

donde la integral sobre  $\Omega_2$  puede resolverse de forma inmediata, con lo que el factor de espacio de fase  $A$  nos queda

$$A_D = 4\pi \int d\Omega_1 d\Omega_3 \frac{\delta(p_2 - |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3|)}{p_2^2}. \quad (\text{C.49})$$

Pero  $|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3| = (p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 p_3 \cos \theta_1)^{1/2}$ , donde  $\theta_1$  es el ángulo que forma  $\mathbf{p}_3$  respecto a  $\mathbf{p}_1$ . Así, aprovechando que todas las funciones suaves de los momenta  $p_i$  pueden aproximarse reemplazando los momenta de Fermi  $p_{Fi}$ , la integral anterior nos queda

$$A_D = \frac{4\pi}{p_{F2}^2} \int d\Omega_1 d\Omega_3 \delta(p_2 - (p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 p_3 \cos \theta_1)^{1/2}). \quad (\text{C.50})$$

Para simplificar esta expresión usamos la siguiente propiedad de la función delta de Dirac:

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_0} \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|},$$

donde  $\{x_0\}$  representa el conjunto de soluciones de la ecuación  $f(x) = 0$ , con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} A_D &= \frac{4\pi}{p_{F2}^2} \int d\phi_1 d\cos\theta_1 d\phi_3 d\cos\theta_3 \frac{p_2}{p_1 p_3} \delta\left(\cos\theta_1 - \frac{p_2^2 - p_1^2 - p_3^2}{2p_1 p_3}\right), \\ A_D &= \frac{4\pi}{p_{F1} p_{F2} p_{F3}} \int d\phi_1 d\phi_3 d\cos\theta_3, \\ A_D &= \frac{4\pi}{p_{F1} p_{F2} p_{F3}} (2\pi)(2\pi)(2), \\ A_D &= \frac{32\pi^3}{p_{F1} p_{F2} p_{F3}}. \end{aligned} \tag{C.51}$$

Esta ecuación es válida sólo si los momenta de Fermi de las partículas satisfacen la condición triangular  $p_{F1} < p_{F2} + p_{F3}$

### C.3 Cálculo de la integral $I_D$

En esta sección calcularemos el valor de la integral (4.16), que reescribimos a continuación

$$I_D = \int_0^\infty dx_\nu x_\nu^3 \prod_{j=1}^3 \int_{-\infty}^\infty dx_j f(x_j) \delta(x_1 + x_2 + x_3 - x_\nu). \tag{C.52}$$

Para resolver esta integral, primero calculamos la función

$$J_D(x_\nu) = \prod_{j=1}^3 \int_{-\infty}^\infty dx_j f(x_j) \delta(x_1 + x_2 + x_3 - x_\nu), \tag{C.53}$$

para lo cual introducimos la siguiente representación de la función delta[180]

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{izx} dz,$$


---

con lo que obtenemos

$$\delta\left(\sum_{i=1}^3 x_i - x_\nu\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-izx_\nu} \prod_{i=1}^3 e^{izx_i},$$

y la siguiente expresión para la función (C.53)

$$J_D(x_\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-izx_\nu} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{izx} f(x) \right]^3, \quad (\text{C.54})$$

donde la integral

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{izx} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{izx}}{1+e^x} \quad (\text{C.55})$$

se evalúa usando el teorema del residuo, como se mostrará a continuación.

En la ecuación (C.55),  $z$  debe tener una pequeña parte imaginaria para que la integral converja, con lo que, para hallar una expresión para  $g(z)$ , resolvemos la integral cerrada

$$K \equiv \oint dw \frac{e^{izw}}{1+e^w}, \quad (\text{C.56})$$

alrededor del contorno mostrado en la figura C.2, en la que se muestra el único polo de la función  $\frac{e^{izw}}{1+e^w}$ , en  $w = i\pi$ .

La integral a lo largo del eje real da  $g(z)$ , mientras que la integral a lo largo

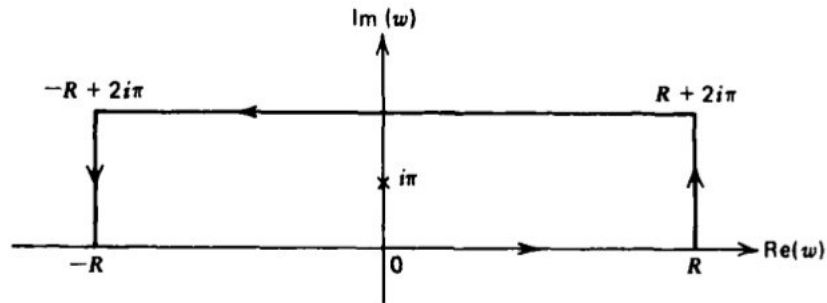


Figura C.2: Contorno de integración para evaluar la integral C.56



de la línea  $Im(w) = 2\pi$  se evalúa haciendo  $w \rightarrow w + 2\pi i$ , con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} K|_{Im(w)=2\pi} &= \int_{-\infty}^{\infty} dw (1 + e^w)^{-1} e^{iz(w+2\pi i)}, \\ K|_{Im(w)=2\pi} &= e^{-2\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} dw (1 + e^w)^{-1} e^{izw}, \\ K|_{Im(w)=2\pi} &= e^{-2\pi z} g(z). \end{aligned} \quad (C.57)$$

Usando el teorema del residuo, podemos entonces escribir

$$\oint dw e^{izw} (1 + e^w)^{-1} = g(z) - e^{-2\pi z} g(z) = 2\pi i \operatorname{Res}_{w=i\pi} \frac{e^{izw}}{1 + e^w}. \quad (C.58)$$

Para calcular el residuo de una función racional  $h(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  podemos usar la relación [181]

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} h(z) = \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)},$$

con lo que se obtiene

$$\operatorname{Res}_{w=i\pi} \frac{e^{izw}}{1 + e^w} = \frac{e^{iz(i\pi)}}{e^{i\pi}} = -e^{-\pi z}. \quad (C.59)$$

Reemplazando (C.59) en (C.58) se obtiene

$$\begin{aligned} g(z) - e^{-2\pi z} g(z) &= -2\pi i e^{-\pi z}, \\ g(z)(e^{\pi z} - e^{-\pi z}) &= -2\pi i, \\ g(z) &= \frac{\pi}{i \sinh(\pi z)}. \end{aligned} \quad (C.60)$$

De esta forma, usando el resultado (C.60) en la ecuación (C.54),  $J_D(x_\nu)$  nos queda

$$J_D(x_\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{izx_\nu} \left[ \frac{\pi}{i \sinh(\pi z)} \right]^3. \quad (C.61)$$

Ya que  $z$  debe tener una pequeña parte imaginaria, escribimos (C.61) como

$$J_D(x_\nu) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\epsilon}^{\infty-i\epsilon} dz e^{izx_\nu} \left[ \frac{\pi}{\sinh(\pi z)} \right]^3, \quad (C.62)$$


---

con lo que, haciendo la sustitución  $z = z' - i$  y usando el hecho que  $\sinh(\pi z' - i\pi) = -\sinh(\pi z')$  se obtiene

$$J_D(x_\nu) = -\frac{e^{-x_\nu}}{2\pi i} \int_{\infty-i\epsilon+i}^{-\infty-i\epsilon+i} dz' e^{-iz'x_\nu} \left[ \frac{\pi}{\sinh(\pi z')} \right]^3. \quad (\text{C.63})$$

Sumando las ecuaciones (C.62) y (C.63) obtenemos

$$(1 + e^{x_\nu})J_D(x_\nu) = -\frac{1}{2\pi i} \oint dz e^{-izx_\nu} \left[ \frac{\pi}{\sinh(\pi z)} \right]^3, \quad (\text{C.64})$$

y, para calcular esta integral, obtenemos la serie de Laurent del integrando, a partir de la división, término a término, de las series de potencias para  $e^{-izx_\nu}$ , dada por la expresión

$$e^{-izx_\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-izx_\nu)^n}{n!} = 1 - izx_\nu - \frac{z^2 x_\nu^2}{2} + \frac{iz^3 x_\nu^3}{6} + \frac{z^4 x_\nu^4}{24} - \frac{iz^5 x_\nu^5}{120} - \frac{z^6 x_\nu^6}{720} + \dots, \quad (\text{C.65})$$

y la función  $\sinh^3(\pi z)$ , para la cual usamos la identidad

$$\sinh^3 x = \frac{1}{4}(\sinh 3x - 3 \sinh x),$$

y la expansión en serie de Taylor de la función hiperbólica

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

con lo cual obtenemos

$$\sinh^3 x = x^3 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{13}{20}x^7 + \frac{41}{3024}x^9 + \dots \quad (\text{C.66})$$

De esta forma, para calcular el residuo, debemos resolver la división

$$\pi^3 \left[ \frac{1 - izx_\nu - \frac{z^2 x_\nu^2}{2} + \frac{iz^3 x_\nu^3}{6} + \frac{z^4 x_\nu^4}{24} - \frac{iz^5 x_\nu^5}{120} - \frac{z^6 x_\nu^6}{720} + \dots}{\pi^3 z^3 + \frac{\pi^5 z^5}{2} + \frac{13\pi^7 z^7}{120} + \frac{41\pi^9 z^9}{3024} + \dots} \right], \quad (\text{C.67})$$

cuyo resultado se escribe a continuación

$$\begin{aligned} e^{-izx_\nu} \left( \frac{\pi}{\sinh(\pi z)} \right)^3 &= \frac{1}{z^3} - \frac{ix_\nu}{z^2} - \frac{1}{2z}(x_\nu^2 + \pi^2) \\ &+ \frac{i}{2} \left( \frac{x_\nu^3}{3} + \pi^2 x_\nu \right) + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.68})$$

De esta forma, podemos leer directamente el valor del residuo en  $z = 0$ :

$$\text{Res}_{z=0} \left[ e^{-izx_\nu} \left( \frac{\pi}{\sinh(\pi z)} \right)^3 \right] = -\frac{1}{2}(x_\nu^2 + \pi^2), \quad (\text{C.69})$$

y reemplazando este resultado en la ecuación (C.64) se obtiene finalmente

$$J_D(x_\nu) = \frac{\pi^2 + x_\nu^2}{2(1 + e^{x_\nu})}. \quad (\text{C.70})$$

Reemplazando (C.70) en (C.52) se obtiene

$$I_D = \frac{\pi^2}{2} \int_0^\infty dx_\nu \frac{x_\nu^3}{1 + e^{x_\nu}} + \frac{1}{2} \int_0^\infty dx_\nu \frac{x_\nu^5}{1 + e^{x_\nu}}. \quad (\text{C.71})$$

Las integrales que aparecen en la ecuación (C.71) son de la forma [182]

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{2n-1}}{1 + e^{px}} = (1 - 2^{1-2n}) \left( \frac{2\pi}{p} \right)^{2n} \frac{|B_{2n}|}{4n} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{C.72})$$

donde  $B_n$  son los números de Bernoulli, que representan los coeficientes de  $\frac{t^n}{n!}$  en la expansión de la función [180]

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \quad 0 < |t| < 2\pi.$$

En la tabla C.1 listamos algunos números de Bernoulli [180].

$B_0 = 1$	$B_1 = -\frac{1}{2}$	$B_2 = \frac{1}{6}$	$B_3 = 0$
$B_4 = -\frac{1}{30}$	$B_5 = 0$	$B_6 = \frac{1}{42}$	$B_7 = 0$
$B_8 = -\frac{1}{30}$	$B_9 = 0$	$B_{10} = \frac{5}{66}$	$B_{11} = 0$

Cuadro C.1: Números de Bernoulli hasta  $n = 11$ .

Usando la ecuación (C.72) y los números de Bernoulli dados en la tabla C.1 podemos escribir (C.71) como

$$\begin{aligned} I_D &= \frac{\pi^2}{2} (1 - 2^{-3})(2\pi)^4 \frac{|B_4|}{8} + \frac{1}{2} (1 - 2^{-5})(2\pi)^6 \frac{|B_6|}{12}, \\ I_D &= \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{7}{8} \right) \left( \frac{16\pi^4}{8} \right) \left( \frac{1}{30} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{31}{32} \right) \left( \frac{64\pi^6}{12} \right) \left( \frac{1}{42} \right), \\ I_D &= \frac{7\pi^6}{240} + \frac{31\pi^6}{504}, \\ I_D &= \frac{457\pi^6}{5040}. \end{aligned} \quad (\text{C.73})$$

## C.4 Cálculo de la integral $A_M$

En este apéndice se realizará el cálculo de la integral angular que aparece al obtener la emisividad del proceso MURca, y que escribimos a continuación en forma extendida:

$$A_M = 4\pi \int d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3 d\Omega_4 d\Omega_e \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_e - \mathbf{p}_\nu). \quad (\text{C.74})$$

Para simplificar un poco la notación, definimos  $\mathbf{p}_s = \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_\nu$ .

Para evaluar la integral, consideraremos regiones del espacio de fase en que las energías de las partículas no se alejan mucho de un intervalo de amplitud  $kT$  de sus respectivas energías de Fermi. Recordemos además que los momenta de Fermi de los neutrones son mayores que los del protón y el electrón, y que el momentum de Fermi de los neutrinos, de orden  $kT/c$ , es despreciable comparado con los momenta de las otras partículas.

Considerando estos aspectos, podemos escribir la integral C.74 como sigue:

$$A_M = 4\pi \int d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3 d\Omega_4 d\Omega_e \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_s), \quad (\text{C.75})$$

para lo cual resolvemos primero la integral sobre  $d\Omega_3$ , escribiendo la función delta como

$$\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_s) = \delta^{(3)}(p_3 - |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_s|) \frac{\delta(\Omega_3 - \Omega_{1+2-s})}{p_3^2},$$

que, integrando sobre  $d\Omega_3$  obtenemos 1, y la integral nos queda

$$A_M = 4\pi \int d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_4 d\Omega_e \frac{\delta(p_3 - |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_s|)}{p_3^2}. \quad (\text{C.76})$$

Para resolver la integral C.76 usamos el teorema del coseno para hallar la magnitud de  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_s$ , con lo que obtenemos

$$\delta(p_3 - |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_s|) = \delta(p_3 - [p_1^2 + |\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_s|^2 - 2p_1|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_s|\cos\theta_1]^{1/2}).$$

La función delta que aparece en la ecuación anterior puede simplificarse usando la relación  $\delta(f(x)) = \sum_{x_0} \frac{\delta(x-x_0)}{|f'(x_0)|}$ , donde  $f(x_0) = 0$ , con lo que se obtiene

$$\delta(p_3 - |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_s|) = \frac{\delta(\cos\theta_1 - (p_1^2 + |\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_s|^2 - p_3^2)/(2p_1|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_s|))}{p_1|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_s|/p_3}, \quad (\text{C.77})$$

lo cual, escrito en esta forma, puede resolverse fácilmente sobre  $d\Omega_1$ :

$$A_M = 4\pi \int d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_4 d\Omega_e \frac{1}{p_3^2} \frac{\delta(\cos \theta_1 - (p_1^2 + |\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_s|^2 - p_3^2)/(2p_1|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_s|))}{p_1|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_s|/p_3},$$

obteniendo como resultado

$$A_M = \frac{4\pi(2\pi)}{p_1 p_3} \int d\Omega_2 d\Omega_4 d\Omega_e \frac{1}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_s|}.$$

Ya que el momentum de Fermi del neutrón es mucho mayor que los momenta de las otras partículas, tenemos que  $p_2 \gg |\mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_\nu| = |\mathbf{p}_s|$  con lo que, finalmente, el resultado de la integral será:

$$A_M = \frac{4\pi(2\pi)(4\pi)^3}{p_1 p_2 p_3} = \frac{2\pi(4\pi)^4}{p_{Fn}^3} \quad (\text{C.78})$$

## C.5 Cálculo de la integral $I_M$

En este apéndice se calculará el valor de la integral sobre las energías adimensionales  $x_i, x_\nu$  que aparece en la derivación de la emisividad de neutrinos para el proceso MURCA, y que escribimos a continuación:

$$I_M = \int_0^\infty dx_\nu x_\nu^3 \left[ \int_{-\infty}^\infty \prod_{j=1}^5 dx_j f(x_j) \right] \delta \left( \sum_{j=1}^5 x_j - x_\nu \right). \quad (\text{C.79})$$

Esta integral puede escribirse en la forma

$$I_M = \int_0^\infty dx_\nu x_\nu^3 J_M(x_\nu), \quad (\text{C.80})$$

donde

$$J_M(x_\nu) = \int_{-\infty}^\infty \prod_{j=1}^5 dx_j f(x_j) \delta \left( \sum_{j=1}^5 x_j - x_\nu \right). \quad (\text{C.81})$$

Evaluamos primero C.81 al introducir la siguiente representación de la función delta de Dirac:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{izx} dz,$$


---

con lo que  $J_M(x_\nu)$  se escribe como

$$\begin{aligned}
 J_M(x_\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^5 dx_j (1 + e^{x_j})^{-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp \left[ iz \left( \sum_{j=1}^5 x_j - x_\nu \right) \right], \\
 J_M(x_\nu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-izx_\nu} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dx (1 + e^x)^{-1} e^{izx} \right]^5, \\
 J_M(x_\nu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-izx_\nu} [g(z)]^5. \tag{C.82}
 \end{aligned}$$

Donde  $g(z)$  está definida de la misma forma que para el cálculo de la integral  $J_D(x_\nu)$ , ecuación (C.55):

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{izx} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{izx}}{1 + e^x}.$$

Usando el resultado dado por (C.60) en la expresión para  $J_M(x_\nu)$ , ecuación (C.82):

$$\begin{aligned}
 J_M(x_\nu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-izx_\nu} \left[ \frac{\pi}{i \sinh(\pi z)} \right]^5, \\
 J_M(x_\nu) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\epsilon}^{\infty - i\epsilon} dz e^{-izx_\nu} \left[ \frac{\pi}{\sinh(\pi z)} \right]^5. \tag{C.83}
 \end{aligned}$$

Para obtener un contorno cerrado de integración, hacemos la sustitución  $z = z' - i$ , con lo que se obtiene

$$J_M(x_\nu) = -\frac{e^{-x_\nu}}{2\pi i} \int_{-\infty - i\epsilon + i}^{\infty - i\epsilon + i} dz' e^{-iz'x_\nu} \left[ \frac{\pi}{\sinh(\pi z')} \right]^5,$$

y así, sumando estas dos últimas expresiones para  $J(x_\nu)$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
 (1 + e^{x_\nu}) J_M(x_\nu) &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{-\infty - i\epsilon}^{\infty - i\epsilon} + \int_{\infty - i\epsilon + i}^{-\infty - i\epsilon + i} \right] dz e^{-izx_\nu} \left( \frac{\pi}{\sinh(\pi z)} \right)^5, \\
 (1 + e^{x_\nu}) J_M(x_\nu) &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz e^{-izx_\nu} \left( \frac{\pi}{\sinh(\pi z)} \right)^5. \tag{C.84}
 \end{aligned}$$

Para obtener los polos de esta función, resolvemos la ecuación  $\sinh \pi z = 0$ , con lo que obtenemos dos soluciones,  $z = 0$  y  $z = i$ . De esta forma,

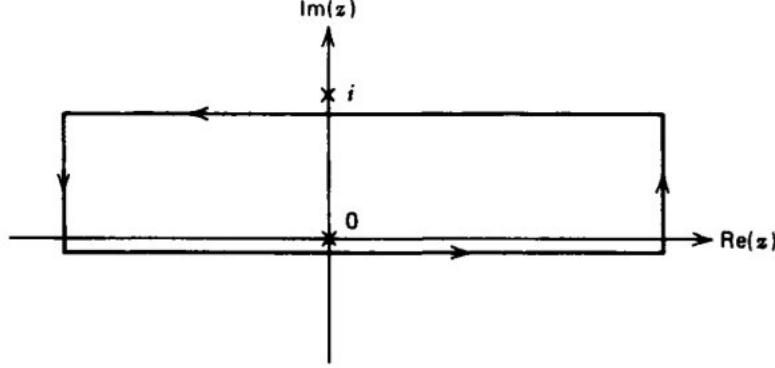


Figura C.3: Contorno de integración para evaluar la integral C.84

resolvemos la integral a lo largo del contorno de integración que se muestra en la figura C.3 Así, usando el teorema del residuo, podemos escribir

$$(1 + e^{x\nu})J_M(x_\nu) = \text{Res}_{z=0} \left[ e^{-izx_\nu} \left( \frac{\pi}{\sinh(\pi z)} \right)^5 \right], \quad (\text{C.85})$$

y, para evaluar este residuo, encontraremos una expansión en serie de Laurent de la función

$$e^{-izx_\nu} \left( \frac{\pi}{\sinh(\pi z)} \right)^5, \quad (\text{C.86})$$

para lo cual usamos la siguiente identidad para la función hiperbólica [182]

$$\sinh^5 x = \frac{1}{16}(\sinh 5x - 5 \sinh 3x + 10 \sinh x). \quad (\text{C.87})$$

Reemplazando la expansión en serie de potencias para el seno hiperbólico

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

podemos escribir la ecuación C.87 en la forma

$$\begin{aligned} \sinh^5 x &= \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{\infty} (5^{2k+1} - 5 \cdot 3^{2k+1} + 10) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \sinh^5 x &= \frac{1}{16} \left[ x^5 + \frac{5}{6}x^7 + \frac{23}{72}x^9 + \frac{371}{4752}x^{11} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.88})$$


---

Por otro lado, la función  $e^{-izx_\nu}$  tiene la siguiente expansión en serie de potencias

$$e^{-izx_\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-izx_\nu)^n}{n!} = 1 - izx_\nu - \frac{z^2 x_\nu^2}{2} + \frac{iz^3 x_\nu^3}{6} + \frac{z^4 x_\nu^4}{24} - \frac{iz^5 x_\nu^5}{120} - \frac{z^6 x_\nu^6}{720} + \dots \quad (\text{C.89})$$

De esta forma, la expansión en serie de Laurent de la función C.86 se obtiene resolviendo la división:

$$\pi^5 \left[ \frac{1 - izx_\nu - \frac{z^2 x_\nu^2}{2} + \frac{iz^3 x_\nu^3}{6} + \frac{z^4 x_\nu^4}{24} - \frac{iz^5 x_\nu^5}{120} - \frac{z^6 x_\nu^6}{720} + \dots}{z^5 + \frac{5}{6}z^7 + \frac{23}{72}z^9 + \frac{371}{4752}z^{11} + \dots} \right], \quad (\text{C.90})$$

con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} e^{-izx_\nu} \left( \frac{\pi}{\sinh(\pi z)} \right)^5 &= \frac{1}{z^5} - \frac{ix_\nu}{z^4} - \frac{1}{2z^3} \left( x_\nu^2 + \frac{5\pi^2}{3} \right) + \frac{i}{6z^2} (x_\nu^3 + 5\pi^2 x_\nu), \\ &+ \frac{1}{12z} \left( \frac{x_\nu^4}{2} + 5\pi^2 x_\nu^2 + \frac{27\pi^4}{6} \right), \\ &- \frac{i}{12} \left( \frac{x_\nu^5}{10} + \frac{5\pi^2 x_\nu^3}{3} + \frac{27\pi^4 x_\nu}{6} \right) + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.91})$$

Así, a partir de la serie de Laurent C.91 podemos leer directamente el residuo en  $z = 0$ , que corresponde al coeficiente de  $z^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=0} \left[ e^{-izx_\nu} \left( \frac{\pi}{\sinh(\pi z)} \right)^5 \right] &= \frac{1}{12} \left( \frac{x_\nu^4}{2} + 5\pi^2 x_\nu^2 + \frac{27\pi^4}{6} \right), \\ \text{Res}_{z=0} \left[ e^{-izx_\nu} \left( \frac{\pi}{\sinh(\pi z)} \right)^5 \right] &= \frac{3\pi^4}{8} + \frac{5\pi^2 x_\nu^2}{12} + \frac{x_\nu^4}{24}. \end{aligned} \quad (\text{C.92})$$

Reemplazando este resultado en la ecuación (C.85) obtenemos la siguiente expresión para  $J(x_\nu)$ :

$$J_M(x_\nu) = \frac{3\pi^4}{8} \left( \frac{1}{1 + e^{x_\nu}} \right) + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{x_\nu^2}{1 + e^{x_\nu}} \right) + \frac{1}{24} \left( \frac{x_\nu^4}{1 + e^{x_\nu}} \right). \quad (\text{C.93})$$



Usando la expresión (C.93) podemos finalmente encontrar el valor de la integral  $I$ :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^\infty dx_\nu x_\nu^3 J_M(x_\nu), \\
 I &= \frac{3\pi^4}{8} \int_0^\infty dx_\nu \frac{x_\nu^3}{1+e^{x_\nu}} + \frac{5\pi^2}{12} \int_0^\infty dx_\nu \frac{x_\nu^5}{1+e^{x_\nu}} \\
 &+ \frac{1}{24} \int_0^\infty dx_\nu \frac{x_\nu^7}{1+e^{x_\nu}} \tag{C.94}
 \end{aligned}$$

Las integrales que aparecen en (C.94) son nuevamente de la forma (C.72), con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
 I_M &= \frac{3\pi^4}{8}(1-2^{-3})(2\pi)^4 \frac{|B_4|}{8} + \frac{5\pi^2}{12}(1-2^{-5})(2\pi)^6 \frac{|B_6|}{12} \\
 &+ \frac{1}{24}(1-2^{-7})(2\pi)^8 \frac{|B_8|}{16}. \tag{C.95}
 \end{aligned}$$

Resolviendo de la misma forma en que se realizó el cálculo para la integral correspondiente al proceso DURCA se obtiene finalmente

$$I_M = \frac{11513\pi^8}{120960}. \tag{C.96}$$

# Apéndice D

## Detalles de Cálculo de la amplitud en la teoría de campo medio

En este anexo se calcula la amplitud para el proceso DUrca, cuando se realiza un análisis usando la teoría de campo medio, como se presentó en la sección 5.1 del capítulo 5.

De esta forma, calcularemos la amplitud correspondiente al elemento de matriz

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= -i \frac{G_F \cos \theta_C}{\sqrt{2}} \bar{u}_l(k_2) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu(-k_1) \\ &\times \bar{u}_p(P') \left[ C_V \gamma^\mu + \frac{1}{2M} C_M \sigma^{\mu\nu} q_\nu + C_A (\gamma^\mu \gamma_5 + F_q q^\mu \gamma_5) \right] u_n(P). \end{aligned} \tag{D.1}$$

El cuadrado del elemento de matriz  $\mathcal{M}_{fi}$ , sumado sobre los espines de las partículas iniciales y finales se obtiene a partir de

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \sum_s \mathcal{M} \mathcal{M}^* \tag{D.2}$$

De esta forma, tendremos:

$$\begin{aligned}
 \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_c}{2} & \sum_s [\bar{u}_l(k_2) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu(-k_1)] [\bar{u}_l(k_2) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu(-k_1)]^* \times \\
 & \left[ C_V^2 [\bar{u}_p(P') \gamma^\mu u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \gamma^\nu u_n(P)]^* \right. \\
 & + \frac{C_V C_M}{2M^*} [\bar{u}_p(P') \gamma^\mu u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \sigma^{\nu\beta} q_\beta u_n(P)]^* \\
 & + C_V C_A [\bar{u}_p(P') \gamma^\mu u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \gamma^\nu \gamma_5 u_n(P)]^* \\
 & + C_V C_A F_q [\bar{u}_p(P') \gamma^\mu u_n(P)] [\bar{u}_p(P') q^\nu \gamma_5 u_n(P)]^* \\
 & + \frac{C_V C_M}{2M^*} [\bar{u}_p(P') \sigma^{\mu\alpha} q_\alpha u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \gamma^\nu u_n(P)]^* \\
 & + \frac{C_M^2}{4(M^*)^2} [\bar{u}_p(P') \sigma^{\mu\alpha} q_\alpha u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \sigma^{\nu\beta} q_\beta u_n(P)]^* \\
 & + \frac{C_M C_A}{2M^*} [\bar{u}_p(P') \sigma^{\mu\alpha} q_\alpha u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \gamma^\nu \gamma_5 u_n(P)]^* \\
 & + \frac{C_A C_M}{2M^*} F_q [\bar{u}_p(P') \sigma^{\mu\alpha} q_\alpha u_n(P)] [\bar{u}_p(P') q^\nu \gamma_5 u_n(P)]^* \\
 & + C_V C_A [\bar{u}_p(P') \gamma^\mu \gamma_5 u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \gamma^\nu u_n(P)] \\
 & + \frac{C_M C_A}{2M^*} [\bar{u}_p(P') \gamma^\mu \gamma_5 u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \sigma^{\nu\beta} q_\beta u_n(P)] \\
 & + C_A^2 [\bar{u}_p(P') \gamma^\mu \gamma_5 u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \gamma^\nu \gamma_5 u_n(P)] \\
 & + C_A^2 F_q [\bar{u}_p(P') \gamma^\mu \gamma_5 u_n(P)] [\bar{u}_p(P') q^\nu \gamma_5 u_n(P)] \\
 & + C_A C_V F_q [\bar{u}_p(P') q^\mu \gamma_5 u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \gamma^\nu u_n(P)] \\
 & + \frac{C_M C_A}{2M^*} F_q [\bar{u}_p(P') q^\mu \gamma_5 u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \sigma^{\nu\beta} q_\beta u_n(P)] \\
 & + C_A^2 F_q [\bar{u}_p(P') q^\mu \gamma_5 u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \gamma^\nu \gamma_5 u_n(P)] \\
 & \left. + C_A^2 F_q^2 [\bar{u}_p(P') q^\mu \gamma_5 u_n(P)] [\bar{u}_p(P') q^\nu \gamma_5 u_n(P)] \right] \quad (D.3)
 \end{aligned}$$

La amplitud correspondiente a las corrientes débiles léptonicas es idéntica a la amplitud que se calculó para el decaimiento beta del neutrón en el espacio vacío (excepto por el signo negativo del momentum  $k_1$ ):

$$\begin{aligned}
 \sum_s [\bar{u}_l(k_2) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu(-k_1)] [\bar{u}_l(k_2) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu(-k_1)]^* & = Tr[\gamma_\mu (1 + \gamma_5) \not{k}_2 \gamma_\nu (1 + \gamma_5) \not{k}_1] \\
 & = 8[g_{\mu\nu}(k_1 \cdot k_2) - k_{1\mu} k_{2\nu} - k_{1\nu} k_{2\mu} + i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta] \quad (D.4)
 \end{aligned}$$


---

En esta última expresión hemos asumido que tanto los neutrinos como los leptones considerados tienen masas despreciables comparadas con las masas de los hadrones, lo que es bastante coherente debido a las diferencias de masas de las especies de estas partículas.

Al calcular la suma sobre los espines de cada uno de los términos anteriores se obtiene:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_s [\bar{u}_p(P') \gamma^\mu u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \gamma^\nu u_n(P)]^* &= Tr[\gamma^\mu (\not{P} + M^*) \bar{\gamma}^\nu (\not{P}' + M^*)] \\
& &= 4(P^\mu P'^\nu - g^{\mu\nu} (P \cdot P') + P^\nu P'^\mu) + 4g^{\mu\nu} (M^*)^2 \\
S_2 &= \sum_s [\bar{u}_p(P') \gamma^\mu u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \sigma^{\nu\beta} q_\beta u_n(P)]^* &= Tr[\gamma^\mu (\not{P} + M^*) \overline{\sigma^{\nu\beta} q_\beta} (\not{P}' + M^*)] \\
& &= 2M^* [2g^{\mu\nu} (P \cdot q) - 2q^\mu P^\nu - 2g^{\mu\nu} (P' \cdot q) + 2q^\mu P'^\nu] \\
S_3 &= \sum_s [\bar{u}_p(P') \gamma^\mu u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \gamma^\nu \gamma_5 u_n(P)]^* &= Tr[\gamma^\mu (\not{P} + M^*) \bar{\gamma}^\nu \gamma_5 (\not{P}' + M^*)] \\
& &= -4i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\alpha P'_\beta \\
S_4 &= \sum_s [\bar{u}_p(P') \gamma^\mu u_n(P)] [\bar{u}_p(P') q^\nu \gamma_5 u_n(P)]^* &= Tr[\gamma^\mu (\not{P} + M^*) \bar{q}^\nu \gamma_5 (\not{P}' + M^*)] \\
& &= 0 \\
S_5 &= \sum_s [\bar{u}_p(P') \sigma^{\mu\alpha} q_\alpha u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \gamma^\nu u_n(P)]^* &= Tr[\sigma^{\mu\alpha} q_\alpha (\not{P} + M^*) \bar{\gamma}^\nu (\not{P}' + M^*)] \\
& &= 2M^* [2g^{\mu\nu} (P \cdot q) - 2P^\mu q^\nu - 2g^{\mu\nu} (P' \cdot q) + 2P'^\mu q^\nu] \\
S_6 &= \sum_s [\bar{u}_p(P') \sigma^{\mu\alpha} q_\alpha u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \sigma^{\nu\beta} q_\beta u_n(P)]^* &= Tr[\sigma^{\mu\alpha} q_\alpha (\not{P} + M^*) \overline{\sigma^{\nu\beta} q_\beta} (\not{P}' + M^*)] \\
& &= 4q^\mu (P \cdot q) P'^\nu + q^\mu (P' \cdot q) P^\nu - 2q^\mu (P \cdot P') q^\nu \\
& &\quad - 2P^\mu q^2 P'^\nu + 2P^\mu (P' \cdot q) q^\nu - 4g^{\mu\nu} (P \cdot q) (P' \cdot q) \\
& &\quad + 2g^{\mu\nu} q^2 (P \cdot P') + 2P'^\mu (P \cdot q) q^\nu \\
& &\quad - 2P'^\mu q^2 P^\nu - 2(M^*)^2 q^\mu q^\nu + 2g^{\mu\nu} (M^*)^2 q^2 \\
S_7 &= \sum_s [\bar{u}_p(P') \sigma^{\mu\alpha} q_\alpha u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \gamma^\nu \gamma_5 u_n(P)]^* &= Tr[\sigma^{\mu\alpha} q_\alpha (\not{P} + M^*) \bar{\gamma}^\nu \gamma_5 (\not{P}' + M^*)] \\
& &= -4iM^* [\epsilon^{\mu\nu\alpha\sigma} q_\alpha P_\sigma + \epsilon^{\mu\nu\alpha\rho} q_\alpha P'_\rho] \\
S_8 &= \sum_s [\bar{u}_p(P') \sigma^{\mu\alpha} q_\alpha u_n(P)] [\bar{u}_p(P') q^\nu \gamma_5 u_n(P)]^* &= Tr[\sigma^{\mu\alpha} q_\alpha (\not{P} + M^*) \bar{q}^\nu \gamma_5 (\not{P}' + M^*)] \\
& &= -2i\epsilon^{\mu\alpha\sigma\rho} q_\alpha q^\nu P_\sigma P'_\rho \\
S_9 &= \sum_s [\bar{u}_p(P') \gamma^\mu \gamma_5 u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \gamma^\nu u_n(P)] &= [S_3(\mu \leftrightarrow \nu)]^* \\
& &= -4i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\alpha P'_\beta
\end{aligned} \tag{D.5}$$

En esta última ecuación, la notación  $S_9 = [S_3(\mu \leftrightarrow \nu)]^*$  indica que el resultado del valor promedio de la suma sobre los espines indicada por  $S_9$  coincide con el complejo conjugado del mismo promedio calculado para la suma  $S_3$ , pero intercambiando los índices  $\mu$  y  $\nu$ .

$$\begin{aligned}
 S_{10} &= \sum_s [\bar{u}_p(P') \gamma^\mu \gamma_5 u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \sigma^{\nu\beta} q_\beta u_n(P)] = [S_7(\mu \leftrightarrow \nu, \alpha \leftrightarrow \beta)]^* \\
 &= -4iM^* [\epsilon^{\mu\nu\beta\sigma} q_\beta P_\sigma + \epsilon^{\mu\nu\beta\rho} q_\beta P'_\rho] \\
 S_{11} &= \sum_s [\bar{u}_p(P') \gamma^\mu \gamma_5 u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \gamma^\nu \gamma_5 u_n(P)] = Tr[\gamma^\mu \gamma_5 (\not{P} + M^*) \overline{\gamma^\nu \gamma_5} (\not{P}' + M^*)] \\
 &= 4[P^\mu P'^\nu - g^{\mu\nu}(P \cdot P') + P^\nu P'^\mu - g^{\mu\nu}(M^*)^2] \\
 S_{12} &= \sum_s [\bar{u}_p(P') \gamma^\mu \gamma_5 u_n(P)] [\bar{u}_p(P') q^\nu \gamma_5 u_n(P)] = Tr[\gamma^\mu \gamma_5 (\not{P} + M^*) \overline{q^\nu \gamma_5} (\not{P}' + M^*)] \\
 &= 4M^* [P^\mu q^\nu - P'^\mu q^\nu] \\
 S_{13} &= \sum_s [\bar{u}_p(P') q^\mu \gamma_5 u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \gamma^\nu u_n(P)] = [S_4(\mu \leftrightarrow \nu)]^* \\
 &= 0 \\
 S_{14} &= \sum_s [\bar{u}_p(P') q^\mu \gamma_5 u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \sigma^{\nu\beta} q_\beta u_n(P)] = [S_8(\mu \leftrightarrow \nu, \alpha \leftrightarrow \beta)]^* \\
 &= 2i\epsilon^{\nu\beta\sigma\rho} q_\beta q^\mu P_\sigma P'_\rho \\
 S_{15} &= \sum_s [\bar{u}_p(P') q^\mu \gamma_5 u_n(P)] [\bar{u}_p(P') \gamma^\nu \gamma_5 u_n(P)] = [S_{12}(\mu \leftrightarrow \nu)]^* \\
 &= 4M^* [P^\mu q^\nu - P'^\mu q^\nu] \\
 S_{16} &= \sum_s [\bar{u}_p(P') q^\mu \gamma_5 u_n(P)] [\bar{u}_p(P') q^\nu \gamma_5 u_n(P)] = Tr[q^\mu \gamma_5 (\not{P} + M^*) \overline{q^\nu \gamma_5} (\not{P}' + M^*)] \\
 &= 4q^{\mu\nu} [(M^*)^2 - (P \cdot P')] \tag{D.6}
 \end{aligned}$$

En estas ecuaciones, se utilizó nuevamente la notación explicada antes para el intercambio de índices.

Es de anotar que para obtener estos resultados se ha considerado que los campos espinoriales  $u_p(P')$  y  $u_n(P)$  representan partículas con una misma masa efectiva  $M^*$ , que se obtiene a partir de las masas del protón y el neutrón en el background de partículas hadrónicas e intermediarias introducidas a través del lagrangiano dado en la sección correspondiente a la aplicación de la teoría de campo medio, capítulo 5, sección 5.1, ecuación 5.15.

---

De esta forma, la expresión para la amplitud (D.3) se convierte en:

$$\begin{aligned}
\frac{2\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{G_F^2 \cos^2 \theta_c} &= \left[ 8[g_{\mu\nu}(k_1 \cdot k_2) - k_{1\mu}k_{2\nu} - k_{1\nu}k_{2\mu} + i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k_1^\alpha k_2^\beta] \right] \\
&\times \left[ 4C_V^2 [(P^\mu P'^\nu - g^{\mu\nu}(P \cdot P') + P^\nu P'^\mu) + 4g^{\mu\nu}(M^*)^2] \right. \\
&+ C_V C_M [2g^{\mu\nu}(P \cdot q) - 2q^\mu P^\nu - 2g^{\mu\nu}(P' \cdot q) + 2q^\mu P'^\nu] \\
&- 4iC_A C_V \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\alpha P'_\beta + C_A C_V F_q(0) \\
&+ C_V C_M [2g^{\mu\nu}(P \cdot q) - 2P^\mu q^\nu - 2g^{\mu\nu}(P' \cdot q) + 2P'^\mu q^\nu] \\
&+ \frac{C_M^2}{4(M^*)^2} [4q^\mu(P \cdot q)P'^\nu + q^\mu(P' \cdot q)P^\nu - 2q^\mu(P \cdot P')q^\nu \\
&- 2P^\mu q^2 P'^\nu + 2P^\mu(P' \cdot q)q^\nu - 4g^{\mu\nu}(P \cdot q)(P' \cdot q) \\
&+ 2g^{\mu\nu}q^2(P \cdot P') + 2P'^\mu(P \cdot q)q^\nu \\
&- 2P'^\mu q^2 P^\nu - 2(M^*)^2 q^\mu q^\nu + 2g^{\mu\nu}(M^*)^2 q^2] - \frac{iC_A C_M}{M^*} F_q \epsilon^{\mu\alpha\sigma\rho} q_\alpha q^\nu P_\sigma P'_\rho \\
&- 2iC_A C_M [\epsilon^{\mu\nu\alpha\sigma} q_\alpha P_\sigma + \epsilon^{\mu\nu\alpha\rho} q_\alpha P'_\rho] - 4iC_V C_A \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\alpha P'_\beta \\
&- 2iC_A C_M [\epsilon^{\mu\nu\beta\sigma} q_\beta P_\sigma + \epsilon^{\mu\nu\beta\rho} q_\beta P'_\rho] \\
&+ 4C_A^2 [P^\mu P'^\nu - g^{\mu\nu}(P \cdot P') + P^\nu P'^\mu - g^{\mu\nu}(M^*)^2] \\
&+ 4C_A^2 M^* F_q [P^\mu q^\nu - P'^\mu q^\nu] + C_A C_V F_q(0) + \frac{iC_A C_M}{M^*} F_q \epsilon^{\nu\beta\sigma\rho} q_\beta q^\mu P_\sigma P'_\rho \\
&\left. + 4C_A^2 M^* F_q [P^\mu q^\nu - P'^\mu q^\nu] + 4C_A^2 F_q^2 q^{\mu\nu} [(M^*)^2 - (P \cdot P')] \right] \quad (D.7)
\end{aligned}$$

Al resolver los productos, realizar las contracciones con los tensores métricos y agrupar los términos semejantes, se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_{fi}|^2 &= 32G_F^2 \cos^2 \theta_c [(C_A^2 - C_V^2)M^{*2}(k_1 k_2) + (C_A - C_V)^2(k_1 P_2)(k_2 P_1) \\
&+ (C_A + C_V)^2(k_1 P_1)(k_2 P_2) \\
&+ 2C_M \frac{M^*}{M} [2C_A((k_1 P_1)(k_2 P_2) - (k_1 P_2)(k_2 P_1)) \\
&+ C_V((k_1 k_2)(P_1 P_2 - M^{*2}) - (k_1 P_1 - k_1 P_2)(k_2 P_1 - k_2 P_2))] \\
&- \frac{C_M^2}{M^2} [M^{*2}(k_1 P_2)(3(k_2 P_2) - (k_2 P_1)) \\
&+ M^{*2}(k_1 P_1)(3(k_2 P_1) - (k_2 P_2)) + (k_1 k_2)(P_1 P_2 - M^{*2})^2 \\
&- (k_1 P_1 + k_1 P_2)(k_2 P_1 + k_2 P_2)(P_1 P_2)] \\
&+ C_A^2 F_q (2M^* + F_q(M^{*2} - (P_1 P_2))) [(k_1 k_2)(M^{*2} - (P_1 P_2)) \\
&- (k_1 P_1 - k_1 P_2)(k_2 P_1 - k_2 P_2)]. \quad (D.8)
\end{aligned}$$

# Bibliografía

# Bibliografía

- [1] M. Kamenzind, *Compact Objects in Astrophysics: White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes*. Springer-Verlag, (2007).
- [2] M. Fallot, M. Grasso, E. Khan, and J. Margueron, “Neutron stars and nuclei: two dense systems,” *Nucl. Phys. News*, vol. 17, no. 4, pp. 24–29, (2007).
- [3] D. Yakovlev, P. Haensel, G. Baym, and C. Pethick, “Lev Landau and the conception of neutron stars,” *Physics-Uspekhi*, vol. 56, no. 3, pp. 307–313 arXiv:1210.0682v1, (2013).
- [4] I. S. et al., “Compact stars for undergraduates,” *Eur. J. Phys.*, vol. 27, pp. 577–610, (2006).
- [5] C. J. et al., “Compact objects for everyone I: White dwarf stars,” *arXiv:astro-ph/0409348 v2*, (2005).
- [6] J. Piekarewicz, “The fascinating world of neutron stars,” *Proceedings of the National Society of Black Physicists*, vol. CP1140, pp. 69–77, (2009).
- [7] A. Potekhin, “Physics of neutron star surface layers and their thermal radiation,” *Astrophysics of Compact Objects, International Conference on Astrophysics of Compact Objects*, vol. CP968, pp. 121–128, (2008).
- [8] A. Potekhin, “The physics of neutron stars,” *Physics-Uspekhi*, vol. 53, no. 12, pp. 1235–1256, (2010).
- [9] I. Bombaci, “Neutron stars as cosmic laboratories to explore hadronic matter at ultra-high densities,” *Eur. Phys. J. A*, vol. 31, pp. 810–815, (2007).
- [10] J. Lattimer and M. Prakash, “The physics of neutron stars,” *Science*, vol. 304, p. 536, (2004).
- [11] V. Kaspi, “Grand unification of neutron stars,” *PNAS*, vol. 107, no. 16, pp. 7147–7152, (2010).



- 
- [12] S. Kubis, “Matter stability in the neutron star interior,” *Acta Physica Polonica B*, vol. 38, no. 12, pp. 3879–3889, (2007).
- [13] A. Cameron, “Neutron stars,” *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, vol. 8, pp. 179–208, (1970).
- [14] B. Patricelli and R. Ruffini, “On the crust of neutron stars: A progress report,” *Probing Stellar Populations Out to the Distant Universe*, vol. CP1111, pp. 319–322, (2009).
- [15] P. Sahu, R. Basu, and B. Datta, “High-density matter in the chiral sigma model,” *ApJ*, vol. 416, p. 267, (1993).
- [16] B. Datta, A. Thampan, and D. Battacharya, “A numerical survey of neutron star crustal density profiles,” *J. Astrophys. Astr.*, vol. 16, no. 3-4, pp. 375–391, (1995).
- [17] D. Yakovlev, A. Kaminker, O. Y. Gnedin, and P. Haensel, “Neutrino emission from neutron stars,” *Phys. Rep.*, vol. 354, no. 1, pp. 1–155, (2001).
- [18] T. Padmanabhan, *Theoretical Astrophysics, Volume II: Stars and Stellar Systems*. Cambridge University Press, (2001).
- [19] S. Shapiro and S. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*. Wiley-VCH, (2004).
- [20] N. Glendenning, *Compact Stars: Nucl. Phys., Particle Physics and General Relativity*. Springer Verlag, (2000).
- [21] N. Duric, *Advanced Astrophysics*. Cambridge University Press, (2004).
- [22] N. Straumann, *General Relativity and Relativistic Astrophysics*. Springer-Verlag, (1984).
- [23] A. Li, G. Burgio, U. Lombardo, and G. Peng, “Exotic phases in neutron stars,” *Int. J. Mod. Phys. E*, vol. 17, no. 9, pp. 1635–1647, (2008).
- [24] M. Prakash, I. Bombaci, M. Prakash, P. Ellis, J. Lattimer, and R. Knorren, “Composition and structure of protoneutron stars,” *Phys. Rep.*, vol. 280, pp. 1–77, (1997).
- [25] A. Sedrakian, “The physics of dense hadronic matter and compact stars,” *Progress in Particle and Nucl. Phys.*, vol. 58, pp. 168–246, (2007).
-

- 
- [26] G. Marranghello, C. Vasconcellos, and M. Dillig, “A nuclear many-body theory at finite temperature applied to protoneutron stars,” *Int. J. Mod. Phys. E*, vol. 11, no. 02, pp. 83–104, (2002).
- [27] G. Alaverdyan, “Relativistic mean-field theory equation of state of neutron star matter and a maxwellian phase transition to strange quark matter,” *Astrofizika*, vol. 52, no. 1, pp. 147–164, (2009).
- [28] D. M. et al., “Non extensive thermodynamics and neutron star properties,” *arXiv:1410.2264v2 [nucl-th]*, (2014).
- [29] S. Reddy and A. Steiner, “Cool dense matter and neutron star phenomenology,” *Nucl. Phys. A*, vol. 785, pp. 24c–35c, (2007).
- [30] D. Page, U. Geppert, and F. Weber, “The cooling of compact stars,” *Nucl. Phys. A*, vol. 777, pp. 497–530, (2006).
- [31] H.-Y. Chiu and E. Salpeter, “Surface x-ray emission from neutron stars,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 12, no. 15, pp. 413–415, (1964).
- [32] D. Yakovlev, O. Gnedin, A. Kaminker, and A. Potekhin, “Theory of cooling neutron stars versus observations,” in *40 Years of Pulsars: Millisecond Pulsars, Magnetars and More*, vol. 983, pp. 379–387, (2008).
- [33] F. Weber, *Pulsars as Astrophysical Laboratories for Nuclear and Particle Physics*. Institute of Physics Publishing, (1999).
- [34] R. Neuhauser, V. Hambaryan, M. Hohle, and T. Eisenbeiss, “Constraints on the equation-of-state of neutron stars from nearby neutron stars observations,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 337, no. 1, p. 012073, (2012).
- [35] R. Cavagnoli and D. Menezes, “Warm protoneutron stars with strange mesons,” *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, vol. 35, p. 115202, (2008).
- [36] J. Carriere, C. Horowitz, and J. Piekarewicz, “Low-mass neutron stars and the equation of state of dense matter,” *ApJ*, vol. 593, pp. 463–471, (2003).
- [37] T. Klahn, C. Roberts, D. Blaschke, and F. Sandin, “Neutron stars and the high density equation of state.” Bulk Nuclear Properties: 5th ANL/MSU/JINA/INT FRIB Workshop, (2009).
- [38] A. Akmal, V. Pandharipande, and D. Ravenhall, “Equation of state of nucleon matter and neutron star structure,” *Phys. Rev. C*, vol. 58, no. 3, pp. 1804–1828, (1998).
-

- 
- [39] C. Pethick and D. Ravenhall, “Matter at large neutron excess and the physics of neutron star crusts,” *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.*, vol. 45, pp. 429–484, (1995).
- [40] V. Pandharipande, “Dense neutron matter with realistic interactions,” *Nucl. Phys. A*, vol. 174, no. 3, pp. 641–656, (1971).
- [41] V. Pandharipande, “Hyperonic matter,” *Nucl. Phys. A*, vol. 178, no. 1, pp. 123–144, (1971).
- [42] P. Haensel and O. Y. Gnedin, “Direct urca processes involving hyperons and cooling of neutron stars,” *Astron. and Ap.*, vol. 290, pp. 458–462, (1994).
- [43] V. Pandharipande, “Hyperonic matter,” *Nucl. Phys. A*, vol. 178, no. 1, p. 123, (1971).
- [44] P. Haensel, K. Levenfish, and D. Yakovlev, “Bulk viscosity in superfluid neutron stars core III: Effects of  $\Sigma^-$  hyperons,” *Astron. and Ap.*, vol. 381, pp. 1080–1089, (2002).
- [45] I. Bednarek, P. Haensel, J. Zdunik, M. Bejger, and R. Manka, “Hyperons in neutron star-cores and a  $2M_\odot$  pulsar,” *Astron. and Ap.*, vol. 543, no. A157, pp. 1–7, (2012).
- [46] V. Thorsson and M. Prakash, “Composition, structure and evolution of neutron stars with kaon condensates,” *Nucl. Phys. A*, vol. 572, no. 3, pp. 693–731, (1994).
- [47] D. Ivanenko and D. Kurdgelaidze, “Hypothesis concerning quark stars,” *Astrofizika*, vol. 1, no. 4, pp. 479–482, (1965).
- [48] N. Glendenning, “Phase transitions and crystalline structures in neutron star cores,” *Physics Reports*, vol. 342, no. 6, pp. 393–447, (2001).
- [49] J. Pons, S. Reddy, P. Ellis, M. Prakash, and J. Lattimer, “Kaon condensation in proto-neutron star matter,” *Phys. Rev. C*, vol. 62, no. 3, p. 035803, (2000).
- [50] G. Lugones, A. Grunfeld, N. Scoccola, and C. Villavicencio, “Deconfinement of neutron star matter within the nambu-jona-lasinio model,” *Phys. Rev. D*, vol. 80, no. 4, p. 045017, (2009).
- [51] Y. Zeldovich, “The equation of state at ultrahigh densities and its relativistic implications,” *Soviet Phys. JETP*, vol. 14, no. 5, pp. 1143–1147, (1961).
-

- 
- [52] V. Pandharipande, “Dense neutron matter with realistic interactions,” *Nucl. Phys.*, vol. A174, p. 641, (1971).
- [53] H. Bethe and M. Jhonson, “Dense baryon matter calculations with realistic potentials,” *Nucl. Phys. A*, vol. 230, no. 1, pp. 1–58, (1974).
- [54] J. Walecka, “A theory of highly condensed matter,” *Ann. Phys.*, vol. 83, no. 2, pp. 491–529, (1974).
- [55] B. Friedman and V. Pandharipande, “Hot and cold, nuclear and neutron matter,” *Nucl. Phys. A*, vol. 361, no. 2, pp. 502–520, (1981).
- [56] R. Wiringa, V. Fiks, and A. Fabrocini, “Equation of state for dense nucleon matter,” *Phys. Rev. C*, vol. 38, no. 2, p. 1010, (1988).
- [57] M. Prakash, T. Ainsworth, and J. Lattimer, “Equation of state and the maximum mass of neutron stars,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 61, no. 22, p. 2518, (1988).
- [58] J. Piekarewicz, “Nuclear physics of neutron stars,” *Bulk Nuclear Properties: 5th ANL/MSU/JINA/INT FRIB Workshop*, vol. CP1128, pp. 144–153, (2009).
- [59] N. Chamel and P. Haensel, “Physics of neutron stars crust,” *Living Rev. Relativity*, vol. 11, no. 10, pp. 1–182, (2008).
- [60] S. Reddy, “Matter at extreme density and its role in neutron stars and supernova,” *Int. J. Mod. Phys. B*, vol. 20, no. 19, pp. 2704–2713, (2006).
- [61] H. Heiselberg and M. Hjorth-Jensen, “Phases of dense matter in neutron stars,” *Phys. Rep.*, vol. 328, pp. 237–327, (2000).
- [62] B. Schutz, *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, (2004).
- [63] M. Camenzind, *Compact Objects in Astrophysics: White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes*. Springer, (2007).
- [64] T. R.C., “Static solutions of einstein’s field equations for spheres of fluid,” *Phys. Rev.*, vol. 55, pp. 364–373, (1939).
- [65] J. Oppenheimer and J. Volkoff, “On massive neutron cores,” *Phys. Rev.*, vol. 55, pp. 374–381, (1939).
- [66] W. Rose, *Advanced stellar astrophysics*. Cambridge University Press, (1998).
-

- 
- [67] M. Nauenberg and G. C. Jr., “Determination of properties of cold stars in general relativity by a variational method,” *ApJ*, vol. 179, pp. 277–287, (1973).
- [68] J. Bahcall and R. Wolf, “Neutron stars. ii. neutrino-cooling and observability,” *Phys. Rev.*, vol. 140, no. 5B, pp. B1452–B1466, (1965).
- [69] B. Friman and O. Maxwell, “Neutrino emissivities of neutron stars,” *ApJ*, vol. 232, pp. 541–557, (1979).
- [70] D. Page, J. Lattimer, M. Prakash, and A. Steiner, “Minimal cooling of neutron stars: a new paradigm,” *ApJ Supplement Series*, vol. 155, pp. 623–650, (2004).
- [71] C. Pethick, “Cooling of neutron stars,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 64, no. 4, pp. 1133–1140, (1992).
- [72] G. Beaudet, V. Petrosian, and E. Salpeter, “Energy losses due to neutrino processes,” *ApJ*, vol. 150, pp. 979–999, (1967).
- [73] D. Yakovlev, K. Levenfish, and Y. A. Shibano, “Cooling of neutron stars and superfluidity in their cores,” *Physics-Uspekhi*, vol. 42, no. 8, pp. 737–788, (1999).
- [74] C. Giunti and C. Kim, *Fundamentals of neutrino physics and astrophysics*. Oxford University Press, (2007).
- [75] P. Ellis, R. Knorren, and M. Prakash, “Kaon condensation in neutron star matter with hyperons,” *Phys. Lett. B*, vol. 349, pp. 11–17, (1995).
- [76] H. Umeda, K. Nomoto, S. Tsuruta, T. Muto, and T. Tatsumi, “Neutron star cooling and pion condensation,” *ApJ*, vol. 431, pp. 309–320, (1994).
- [77] L. M. noz, “Estrellas de neutrones y propagación de neutrinos.” Tesis de maestría, (2011).
- [78] M. Kang, N. Pan, and X. Wang, “Deconfinement phase transition heating and thermal evolution of neutron stars.” *Astrophysics of compact objects*, International conference on Astrophysics of compact objects, (2008).
- [79] J. Walecka, *Theoretical nuclear and subnuclear Physics*. World Scientific, (2004).
- [80] L. Celnikier, *Find a Hotter Place! A History of Nuclear Astrophysics*. World Scientific, (2006).
-

- 
- [81] P. Haensel, A. Potekhin, and D. Yakovlev, *Neutron Stars I: Equation of State and Structure*. Astrophysics and Space Science Library, Springer Verlag, (2007).
- [82] V. Koch, “Aspects of chiral symmetry,” *Int. J. Mod. Phys. E*, vol. 6, no. 02, p. 203, (1997).
- [83] L. Leinson, “Direct urca processes in superdense cores of neutron stars,” *arXiv:hep-ph/0211176v1*, (2002).
- [84] C. Chanmugam, R.F.O’Connell, and A. Rajagopal, “Superfluidity in neutron stars,” *Phys. Lett.*, vol. 39A, no. 4, (1972).
- [85] T. Takatsuka and R. Tamagaki, “Nucleon superfluidity in neutron star core with direct urca cooling,” *Prog. Teor. Phys.*, vol. 97, no. 2, (1997).
- [86] M. Baldo, E. Saperstein, and S. Tolokonnikov, “Superfluidity in nuclear and neutron matter,” *Nucl. Phys. A*, vol. 749, pp. 42c–52c, (2005).
- [87] E. Kolomeitsev and D. Voskresensky, “Neutrino emission due to Cooper pair recombination in neutron stars reexamined,” *Phys. Rev. C*, vol. 77, no. 065808, (2008).
- [88] A. Kaminker, P. Haensel, and D. Yakovlev, “Neutrino emission due to proton pairing in neutron stars,” *Astron. and Ap.*, vol. 345, pp. L14–L16, (1999).
- [89] B. Carroll and D. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*. Addison Wesley, (2007).
- [90] M. B. Aufderheide, S. D. Bloom, G. J. Mathews, and D. A. Resler, “Importance of (n, p) reactions for stellar beta decay rates,” *Phys. Rev. C*, vol. 53, no. 6, p. 3139, (1996).
- [91] A. Sedrakian, “Direct urca neutrino radiation from superfluid baryonic matter,” *Phys. Lett. B*, vol. 607, no. 1, pp. 27–34, (2005).
- [92] C. Horowitz and J. Piekarewicz, “Constraining urca cooling of neutron stars from the neutron radius of 208 pb,” *Phys. Rev. C*, vol. 66, no. 5, p. 055803, (2002).
- [93] J. Chadwick, “The existence of a neutron,” *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 136, pp. 692–708, (1932).
- [94] M. Kardar, *Statistical physics of particles*. Cambridge University Press, (2007).
-

- 
- [95] L. Ryder, *Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, (2009).
- [96] R. Kippenhahn and A. Weigert, *Stellar Structure and Evolution*. Springer-Verlag, (1996).
- [97] W. Cottingham, *An Introduction to Nucl. Phys.* Cambridge University Press, (2004).
- [98] S. Shore, *Neutron Stars, in Encyclopedia of Astron. and Ap.* Academic Press, Inc, (1989).
- [99] J. Tejeiro, *Principios de Relatividad General*. Universidad Nacional de Colombia, (2005).
- [100] W. Baade and F. Zwicky, “On super-novae,” *Proc. National Acad. Sci.*, vol. 20, pp. 254–259, (1934).
- [101] W. Baade and F. Zwicky, “Cosmic rays from super-novae,” *Proc. National Acad. Sci.*, vol. 20, pp. 259–263, (1934).
- [102] W. Baade and F. Zwicky, “Remarks on super-novae and cosmic rays,” *Phys. Rev.*, vol. 1, no. 46, pp. 76–77, (1934).
- [103] A. Cameron, “Pycnonuclear reactions and nova explosions,” *ApJ*, vol. 130, pp. 916–940, (1959).
- [104] W. Becker, *Neutron Stars and Pulsars*. Springer-Verlag, (2009).
- [105] C. J. Hansen and S. D. Kawaler, *Stellar Interiors. Physical Principles, Structure and Evolution*. Springer-Verlag, (1994).
- [106] D. Prialnik, *An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution*. Cambridge University Press, (2000).
- [107] M. M. Woolfson, *The Origin and Evolution of the Solar System*. Institute of Physics Publishing, (2000).
- [108] G. Bisnovatyi-Kogan, *Stellar Physics 2: Stellar Evolution and Stability*. Springer Verlag, (2010).
- [109] I. Iben, “Stellar evolution within and off the main sequence,” *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, vol. 5, p. 571, (1967).
- [110] S. Wosley and A. Heger, “The evolution and explosion of massive stars,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 74, no. 4, p. 1015, (2002).
-

- 
- [111] M. Schwarzschild, *Structure and Evolution of the stars*. Dover Publications, Inc, (1968).
- [112] D. Perkins, *Particle Astrophysics*. Oxford University Press, (2003).
- [113] H.-T. Janka, K. Kifonidis, and M. Rampp, “Supernova explosions and neutron star formation,” in *Physics of Neutron Stars Interiors (Lecture Notes in Physics)* (D. Blaschke, N. Glendenning, and A. Sedrakian, eds.), vol. 578, Springer, (2001).
- [114] M. Prakash, J. Lattimer, J. Pons, A. Steiner, and S. Reddy, “Evolution of a neutron star from its birth to old age,” in *Physics of Neutron Stars Interiors (Lecture Notes in Physics)* (D. Blaschke, N. Glendenning, and A. Sedrakian, eds.), vol. 578, Springer, (2001).
- [115] R. Hurtado, J. Morales, and C. Quimbay, “En el interior de las estrellas de neutrones,” in *Astronomía para Todos* (J. Portilla, ed.), UNIBIBLOS, (2001).
- [116] E. Gudmundsson, C. Pethick, and R. Epstein, “Structure of neutron star envelopes,” *ApJ*, vol. 272, pp. 286–300, (1983).
- [117] G. Baym and C. Pethick, “Physics of neutron stars,” *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, vol. 17, pp. 415–443, (1979).
- [118] G. Borner, “On the properties of matter in neutron stars,” in *Springer Tracts in Modern Physics* (G. Hohler, ed.), vol. 69, Springer-Verlag, (1973).
- [119] G. Baym, C. Pethick, and P. Sutherland, “The ground state of matter at high densities: Equation of state and stellar models,” *ApJ*, vol. 170, pp. 299–317, (1971).
- [120] N. Chamel, “The crust of neutron stars,” *Tours Symposium of Nucl. Phys. VI*, vol. CP891, pp. 382–390, (2006).
- [121] W. Arnett and R. Bowers, “A microscopic interpretation of neutron star structure,” *ApJ Supplement Series*, vol. 33, pp. 415–436, (1977).
- [122] U. Lombardo and H. Schulze, “Superfluidity in neutron star matter,” in *Physics of Neutron Stars Interiors (Lecture Notes in Physics)* (D. Blaschke, N. Glendenning, and A. Sedrakian, eds.), vol. 578, Springer, (2001).
- [123] C. Lorenz, D. Ravenhall, and C. Pethick, “Neutron star crusts,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, no. 4, pp. 379–382, (1993).
-



- 
- [124] M. Silverman, “Quantum condensates in extreme gravity: implications for cold stars and dark matter,” *Int. J. Mod. Phys. D*, vol. 17, no. 3 & 4, pp. 603–609, (2008).
- [125] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, (1972).
- [126] R. Wald, *General Relativity*. The University of Chicago Press, (1984).
- [127] J. Lattimer, “Neutron star observations and the equation of state.” Bulk Nuclear Properties: 5th ANL/MSU/JINA/INT FRIB Workshop, (2009).
- [128] W. Greiner, L. Neise, and H. Stoecker, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Springer, (1995).
- [129] R. Jastrow, “Many-body problem with strong forces,” *Phys. Rev.*, vol. 98, no. 5, pp. 1479–1484, (1955).
- [130] A. Fetter and J. Walecka, *Quantum theory of many-particle systems*. McGraw-Hill Book Company, (2003).
- [131] R. J. Reid, “Local phenomenological nucleon-nucleon potentials,” *Annals of Physics*, vol. 50, no. 3, pp. 411–448, (1968).
- [132] V. Ambartsumyan and G. Saakyan, “The degenerate superdense gas of elementary particles,” *Soviet astronomy*, vol. 4, no. 2, pp. 187–354, (1960).
- [133] A. Burrows, “Supernova explosions in the universe,” *Nature*, vol. 403, no. 6771, pp. 727–733, (2000).
- [134] C.-R. Ji and D.-P. Min, “Cooling modes of neutron stars,” *Phys. Rev. D*, vol. 57, no. 10, p. 5963, (1998).
- [135] J. M. Lattimer, C. Pethick, M. Prakash, and P. Haensel, “Direct urca process in neutron stars,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 66, no. 21, p. 2701, (1991).
- [136] D. G. Yakovlev and C. Pethick, “Neutron star cooling,” *arXiv preprint astro-ph/0402143*, (2004).
- [137] M. Gusakov, A. Kaminker, D. Yakovlev, and O. Gnedin, “The cooling of akmal–pandharipande–ravenhall neutron star models,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 363, no. 2, pp. 555–562, (2005).
- [138] J. M. Lattimer, K. A. van Riper, M. Prakash, and M. Prakash, “Rapid cooling and the structure of neutron stars,” *ApJ*, vol. 425, pp. 802–813, (1994).
-

- 
- [139] W. Becker, ed., *Neutron Star Cooling: I*. Astrophysics and Space Science Library, Springer, (2009).
- [140] M. Baldo, G. Burgio, H.-J. Schulze, and G. Taranto, “Nucleon effective masses within the brueckner-hartree-fock theory: Impact on stellar neutrino emission,” *Phys. Rev. C*, vol. 89, no. 4, p. 048801, (2014).
- [141] F. Halzen and A. Martin, *Quarks and Leptons: An introductory course in modern particle physics*. John Wiley and Sons, (1984).
- [142] D. Yakovlev and K. Levenfish, “Modified urca process in neutron star cores.,” *Astron. and Ap.*, vol. 297, p. 717, (1995).
- [143] S. Weinberg, “Effects of a neutral intermediate boson in semileptonic processes,” *Phys. Rev. D*, vol. 5, no. 6, p. 1412, (1972).
- [144] G. Baym and C. Pethick, *Landau Fermi-liquid theory: concepts and applications*. John Wiley & Sons, (2008).
- [145] L. Leinson, “Direct urca processes on nucleons in cooling neutron stars,” *Nucl. Phys. A*, vol. 707, no. 3, pp. 543–560, (2002).
- [146] K. N. et al. (Particle Data Group), “Particle physics booklet,” *Journal of Physics G*, vol. 37, p. 075021, (2010).
- [147] K. Sumiyoshi and H. Toki, “Relativistic equation of state of nuclear matter for the supernova explosion and the birth of neutron stars,” *ApJ*, vol. 422, pp. 700–718, (1994).
- [148] S. S. Wong, *Introductory Nucl. Phys.* John Wiley & Sons, (2008).
- [149] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*. Springer-Verlag, (1996).
- [150] J. Walecka, “Quantum hadrodynamics (qhd),” *New Vistas in Electro-Nuclear Physics*, 1986.
- [151] E. Hernandez, J. Nieves, and M. V. Vacas, “Neutrino induced coherent pion production off nuclei and the partial conservation of the axial current,” *Phys. Rev. D*, vol. 80, no. 1, p. 013003, (2009).
- [152] I. Lindgren, *Relativistic many-body theory: a new field-theoretical approach*, vol. 63. Springer, (2011).
- [153] L. Leinson and A. Perez, “Relativistic direct urca processes in cooling neutron stars,” *Phys. Lett. B*, vol. 518, no. 1, pp. 15–22, (2001).
-

- 
- [154] G. M. Shore and G. Veneziano, “The  $u(1)$  goldberger-treiman relation and the two components of the proton spin,” *Phys. Lett. B*, vol. 244, no. 1, pp. 75–82, (1990).
- [155] T. Tsuneto, *Superconductivity and superfluidity*. Cambridge University Press, (1998).
- [156] I. Khalatnikov, *An introduction to the theory of superconductivity*. Westview Press, (2000).
- [157] D. Page, J. M. Lattimer, M. Prakash, and A. W. Steiner, “Neutrino emission from cooper pairs and minimal cooling of neutron stars,” *ApJ*, vol. 707, no. 2, p. 1131, (2009).
- [158] M. Hoffberg, A. Glassgold, R. Richardson, and M. Ruderman, “Anisotropic superfluidity in neutron star matter,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 24, no. 14, p. 775, (1970).
- [159] P. Haensel, K. Levenfish, and D. Yakovlev, “Bulk viscosity in superfluid neutron star cores; 1, direct urca processes in  $npe\mu$  matter,” *Astron. Astrophys.*, vol. 357, no. astro-ph/0004183, p. 1157, (2000).
- [160] N. Andersson, G. Comer, and K. Glampedakis, “How viscous is a superfluid neutron star core?,” *Nucl. Phys. A*, vol. 763, pp. 212–229, (2005).
- [161] L. Leinson, “Neutrino emission from triplet pairing of neutrons in neutron stars,” *Phys. Rev. C*, vol. 81, no. 2, p. 025501, (2010).
- [162] T. Takatsuka and R. Tamagaki, “Superfluidity in neutron star matter and symmetric nuclear matter,” *Prog. Teor. Phys. Supplement*, vol. 112, pp. 27–65, (1993).
- [163] X. Yan, L. Guang-Zhou, L. Cheng-Zhi, F. Cun-Bo, H. Xing-Wei, Z. Ming-Feng, W. Hong-Yan, and Z. Xiao-Jun, “ $1s_0$  nucleon superfluidity in neutron star matter,” *Chinese Phys. Lett.*, vol. 30, no. 6, p. 062101, (2013).
- [164] R. Tamagaki, “Superfluid state in neutron star matter. i generalized bogoliubov transformation and existence of  $3p_2$  gap at high density,” *Prog. Teor. Phys.*, vol. 44, no. 4, pp. 905–928, (1970).
- [165] O. Y. Gnedin, D. Yakovlev, and Y. A. Shibano, “Neutron and proton superfluidity in cooling neutron stars,” *Astronomy Letters*, vol. 20, pp. 409–415, (1994).
-

- 
- [166] K. Levenfish and D. Yakovlev, “Suppression of neutrino energy losses in reactions of direct urca processes by superfluidity in neutron star nuclei,” *Astronomy Letters*, vol. 20, no. 1, (1994).
- [167] M. Gusakov, D. Yakovlev, P. Haensel, and O. Y. Gnedin, “Direct urca process in a neutron star mantle,” *arXiv preprint astro-ph/0404165*, (2004).
- [168] A. W. Steiner and S. Reddy, “Superfluid response and the neutrino emissivity of neutron matter,” *Phys. Rev. C*, vol. 79, no. 1, p. 015802, (2009).
- [169] H. M. Van Horn and S. Ichimaru, *Strongly coupled plasma physics*. Boydell & Brewer, (1993).
- [170] C. Monrozeau, J. Margueron, and N. Sandulescu, “Nuclear superfluidity and cooling time of neutron star crusts,” *Phys. Rev. C*, vol. 75, no. 6, p. 065807, (2007).
- [171] M. Gusakov, “Neutrino emission from superfluid neutron star cores: Various types of neutron pairing,” *Astron. and Ap.*, vol. 389, pp. 702–715, (2002).
- [172] N. Glendenning, *Special and General Relativity. With applications to white dwarfs, neutron stars and black holes*. Springer, (2007).
- [173] P. Dirac, *General theory of relativity*. John Wiley and Sons, (1975).
- [174] J. Hartle and D. Sharp, “Variational principle for the hydrostatic equilibrium of a relativistic, rotating fluid,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 15, no. 24, pp. 909–911, (1965).
- [175] J. Hartle and D. Sharp, “Variational principle for the hydrostatic equilibrium of a relativistic, rotating star,” *ApJ*, vol. 147, no. 1, pp. 317–333, (1967).
- [176] J. Bardeen, “A variational principle for rotating stars in general relativity,” *ApJ*, vol. 162, no. 1, pp. 71–95, (1970).
- [177] H. Callen, *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*. John Wiley and Sons, (1985).
- [178] A. Nieves and F. Dominguez, *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*. Compañía editorial continental, (2004).
- [179] M. Peskin and D. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley Publishing Company, (1995).
- [180] G. Arfken and H. Weber, *Mathematical methods for physicists*. Elsevier Academic Press, (2005).
-

- [181] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons, inc, (2011).
- [182] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, *Table of integrals, series and products*. Elsevier, (2007).
-