



TESIS DE MAESTRÍA

INFLACIÓN Y RECALENTAMIENTO EN UN MODELO INFLACIONARIO GOBERNADO POR EL CAMPO DE HIGGS DEL MODELO ESTÁNDAR ELECTRODÉBIL

Autor:
Ana ROMERO

Director:
Carlos QUIMBAY, Ph.D

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Física
Diciembre de 2014

INFLACIÓN Y RECALENTAMIENTO EN UN MODELO
INFLACIONARIO GOBERNADO POR EL CAMPO DE
HIGGS DEL MODELO ESTÁNDAR ELECTRODÉBIL

Autor:
Ana ROMERO

Director:
Carlos QUIMBAY, Ph.D

Tesis como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias-Física

Línea de investigación:
Física del universo temprano
Grupo de investigación:
Grupo de campos y partículas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Física
Diciembre de 2014

Agradecimientos

Mis sinceros agradecimientos al profesor Carlos Jose Quimbay Ph.D., mi director de tesis, quien me apoyó incondicionalmente compartiendo largas jornadas de trabajo y siendo un gran orientador y un excelente maestro durante este proceso.

A la Universidad Nacional de Colombia y muy particularmente a la Dirección Académica de la Sede Bogotá quien me otorgó la *Beca Asistente Docente*, lo que me permitió desarrollar mis estudios de Maestría y elaborar este trabajo de tesis.

A mi familia que me brindó su apoyo y aliento todo el tiempo.

Finalmente extendiendo mi más sincera gratitud a Carlos Alvarez, Físico de la Universidad Nacional, quien me acompañó día tras día durante este proceso y en quien siempre encontré el aliciente necesario para continuar. *Gracias por cada sonrisa y palabra compartidas cuando el silencio me aturdió.*

Resumen

En esta tesis se estudian los procesos de inflación y recalentamiento del universo, dentro del marco de trabajo de la inflación tipo slow-roll, asumiendo que el campo del inflatón se puede identificar con el campo de Higgs del Modelo Estándar Electrodébil (MEE). Para realizar lo anterior, inicialmente se establecen las condiciones sobre el parámetro de acople a la gravedad ξ bajo las cuales el campo de Higgs del MEE puede hacer el papel del campo de inflatón, encontrando que $10 \ll \xi \ll 10^{11}$, para obtener etapas de inflación y recalentamiento exitosa, pero, de acuerdo a las últimas medidas reportadas de la masa del bosón de Higgs, se encuentra que $\xi \approx 10^4 - 10^5$, valor que está dentro del rango encontrado. Se obtiene la masa del campo de Higgs a partir de correcciones perturbativas hasta primer orden, para ser $m_H \gtrsim 1.7m_t - 172.5(GeV)$, donde m_t es la masa del quark top. A continuación se determinan las condiciones sobre el mínimo del potencial efectivo del campo de Higgs del MEE, con el fin de obtener un monto de inflación apropiado, obteniendo relaciones entre los parámetros adimensionales del modelo estándar y el mínimo de potencial efectivo. Finalmente, se consideran los posibles efectos de la temperatura en la etapa de recalentamiento, estimando que la temperatura de inicio efectivo de esta etapa, es del orden de $T_{rh} \approx 10^{12} GeV$ para $\xi = 10^4$, que se encuentra de acuerdo con los valores reportados en la literatura en artículos que usan el mismo modelo para el lagrangiano de interacción.

Palabras clave: Inflación vía Higgs, rodadura lenta, potencial efectivo, recalentamiento, temperatura de recalentamiento, resonancia paramétrica.

Abstract

In this thesis, the inflation and reheating processes of the universe are studied, within the slow-roll approximation, assuming that the inflaton field can be identified with the Higgs field of the Electroweak Standard Model (ESM). To do this, conditions on the parameter ξ coupling the Higgs field to gravity are established, in such a way that the SM Higgs field could act as the inflaton, finding that $10 \ll \xi \ll 10^{11}$, to obtain successful inflation and reheating eras, but, in order to fit the last reported measurements of the Higgs boson mass, we found that $\xi \approx 10^4 - 10^5$. We obtain the mass of the Higgs field from radiative corrections to first order, getting $m_H \gtrsim 1.7m_t - 172.5(GeV)$, where m_t is the top quark mass. Next, we determine conditions on the minimum of the effective potential for the ESM Higgs field, in order to obtain suitable amounts of inflation, finding relations between the nondimensional parameters of the SM and the minimum of the effective potential. Finally, possible effects of temperature in the reheating era are considered, estimating the actual temperature at which this era begins, in the order $T_{rh} \approx 10^{12} GeV$ for $\xi = 10^4$, a result according to the current values reported in literature.

Key words: Higgs inflation, slow-roll approximation, effective potential, reheating process, reheating temperature, parametric resonance.

Contenido

1. Introducción	1
2. Modelo estándar cosmológico inflacionario	9
2.1. Modelo estándar cosmológico	10
2.1.1. Métrica de Robertson-Walker	10
2.1.2. Cosmología estándar	11
2.2. Modelo inflacionario	18
2.2.1. Motivaciones Históricas para un Modelo Inflacionario .	18
2.2.2. Inflación dirigida por un campo escalar	20
2.2.3. Aproximación de Slow Roll	27
3. Modelo Inflacionario dirigido por el bosón de Higgs del Modelo Estándar (MIBHME)	29
3.1. Descripción general del modelo	29
3.2. Relación entre los campos en los marcos de Einstein y Jordan	33
3.3. Comportamiento del potencial de Higgs bajo una transformación conforme	36
3.3.1. El potencial, los parámetros de slow roll y el número de e-foldings	39
3.4. Características de la inflación dirigida por el bosón de Higgs: Campos en función del tiempo	41
3.4.1. Marco de Einstein	41
3.4.2. Marco de Jordan	45
4. Potencial efectivo y corrección de la masa del Higgs a un loop	47
4.1. Potencial efectivo	47
4.2. Correcciones radiativas a la masa del bosón de Higgs	54

4.3. Condiciones sobre el mínimo del potencial efectivo y la inflación	57
5. Recalentamiento en el modelo de inflación vía Higgs	61
5.1. Precalentamiento y recalentamiento	62
5.1.1. Precalentamiento	62
5.1.2. Recalentamiento	62
5.2. Evolución del campo después de la etapa de inflación sin tomar en cuenta interacciones con otros campos	63
5.2.1. Consecuencias del corrimiento del mínimo del potencial sobre la evolución de campo	66
5.2.2. Efectos del término cuadrático sobre la ecuación de estado	69
5.3. Producción de partículas	72
5.3.1. Aproximación de Born	72
5.3.2. Resonancia Paramétrica	73
5.3.3. Comparación de las tasas de producción de partículas .	78
5.4. Estimación de la temperatura de Recalentamiento	79
5.5. Paralelo entre la Teoría de Campos a Temperatura Finita y la evolución del campo en la etapa de recalentamiento	81
5.5.1. Interacción con el inflatón.	84
6. Conclusiones	87
A. Ecuación de movimiento en el marco de Jordan	93
B. Transformación de la acción al marco de Einstein	95
C. Campo χ en el marco de Einstein en función del campo de Higgs h	99
C.1. Solución exacta	99
C.2. Solución aproximada	101
D. Marco de Jordan	103
D.1. Ecuación para el campo h	104
E. Evolución del campo sin acoplamiento	107
E.1. Rango para el parámetro ξ en recalentamiento	107
E.2. Cálculo de la función envolvente	110

F. Resonancia	115
F.1. Ecuación para Y	115
G. Temperatura finita	117
G.1. Energía y presión para un campo escalar	117
G.2. Corrección a primer orden para $\ln Z$	118
Bibliografía	123

Índice de Tablas

2.1. Geometría del universo según el valor del parámetro de curvatura.	15
--	----

Índice de figuras

2.1.	Evolución del parámetro de expansión $R(t)$ en modelos abiertos ($\Omega_0 < 1$), modelo plano ($\Omega_0 = 1$) y modelo cerrado ($\Omega_0 > 1$). Gráfica adaptada de [81].	16
2.2.	Potencial efectivo para diferentes temperaturas. Tomada de [77].	21
2.3.	Potencial efectivo $V(\phi)$ para el modelo en el escenario de la Nueva Inflación. Tomada de [20]	23
2.4.	Movimiento del campo escalar en la teoría $V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2$. Tomada de [117]	25
3.1.	Potencial efectivo en el marco de Einstein. Adaptada de [28].	32
3.2.	El campo χ/M_p en el marco de Einstein en función del campo h/M_p en el campo de Jordan.	34
3.3.	A la izquierda el campo χ/M_p en función del campo h/M_p . A la derecha la diferencia de las soluciones exacta y aproximada para el campo χ/M_p	35
3.4.	A la izquierda el campo χ/M_p en función del campo h/M_p . A la derecha vemos la ampliación de $h \rightarrow h_{end}$	37
3.5.	(a) Izquierda: Potencial $U(\chi)$ en el marco de Einstein (b) Derecha: La comparación de la aproximación trabajada en este documento con la presentada por Bezrukov, F. y Shaposhnikov, M. (2008)	38
3.6.	Potencial en función del tiempo en el marco de Einstein	43
4.1.	Aproximación a nivel árbol para el potencial efectivo del lagrangiano (4.8).	49
4.2.	Potencial reducido $\bar{V}(S)$, en función de $S = h/h_0$	55

4.3.	Masa del quark top m_t en función de la masa del Higgs m_H , dada por la ecuación (4.36), usando $M_W = 80.385 GeV$ y para diferentes valores del parámetro $\Xi = -1, -0.661, -0, 1, -0, 06, -0, 005$	56
4.4.	Cota de la Masa del Higgs m_H en función de la masa del quark top m_t , obtenidas por varios autores usando correcciones a uno o dos loops	57
4.5.	Término de corrección a primer orden para el potencial efectivo en función del campo de inflatón	58
5.1.	Comparación de la funciones envolvente para el caso de potencial cuártico con el mínimo de potencial en cero y con mínimo desplazado del origen	69
5.2.	La gráfica muestra el potencial cuártico desplazado del origen, para el cual se trabaja con densidades de energía superiores a $U(0)$ y el potencial tipo Higgs, para el cual se trabaja en un rango de densidades de energía menores que $U(0)$	70
5.3.	Funciones elípcas incompletas de primer y segundo tipo, para un argumento real, con m , aproximándose a 1, donde los diferentes colores representan diferentes valores para m . Tomadas de [160].	71
5.4.	Comparación de la forma de la densidad de energía en función del factor de escala para el caso de etapas dominadas por radiación, materia y el caso de evolución cuasiperiódica del campo después de inflación	72
5.5.	Variación de la función envolvente respecto al tiempo	77
5.6.	Tasa de decaimiento de partículas χ en partículas φ , para los dos primeros armónico de la serie de Fourier de $g(\omega t)$	79

Capítulo 1

Introducción

Desde una perspectiva cosmológica, nuestra actual comprensión sobre el origen y evolución del universo está fundamentada en el modelo de Robertson-Walker [1], también conocido como Modelo del Big-Bang Caliente (MBBC). Uno de los pilares para el planteamiento de este modelo es el principio cosmológico, es decir asumir que el universo a gran escala es homogéneo e isótropo [2], lo cual da lugar a poder describir la geometría y la evolución del universo en términos de dos parámetros: la curvatura espacial y la expansión general. La anterior descripción es posible gracias a que el MBBC está basado en la métrica de Robertson-Walker (FRW), que permite, entre otros hechos, determinar la fracción del universo conectada causalmente [3]. Por otra parte, la homogeneidad y la isotropía del universo y el hecho que el tensor de momentum-energía tiene una forma diagonal, conlleva al planteamiento de una ecuación para la conservación de la energía y del momentum, que corresponde a una ecuación de continuidad. Esta ecuación muestra que el universo se expande y que existe una pérdida de energía que es igual al trabajo hecho por la presión sobre la frontera, cuando ésta se expande [4].

Adicionalmente a la anterior fundamentación en la teoría de la relatividad general, el MBBC está sustentado en hechos observacionales tales como: (i) La distribución de materia a gran escala y la expansión isotrópica del universo [5]; (ii) la existencia de radiación cósmica de fondo (CMB) cercanamente uniforme [3]; (iii) la abundancia de elementos ligeros tales como ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$ y ${}^7\text{Li}$ predicha por nucleosíntesis primordial [6]; (iv) la existencia de pequeñas fluctuaciones en la temperatura de la CBR, denominada asimetría de la CBR [7]. El MBBC tiene un rango de validez hasta de 10^2s (nucleosíntesis) [8] y

está fuertemente sustentado en evidencia observacional como la previamente señalada. No obstante, en el MBBC surgen algunas inconsistencias que no se pueden resolver a la luz del mismo modelo, tales como el *problema de horizonte* [9], el *problema de planitud*, el problema de reliquias no deseadas y el problema de la asimetría bariónica del universo [10], entre otras. En particular, el problema de planitud radica en que el parámetro de densidad Ω_0 es ligeramente menor que la unidad, por tanto se espera que para tiempos muy cercanos al origen del universo, éste haya sido prácticamente 1, lo cual requiere de condiciones iniciales muy poco probables [11].

Una posible solución a los problemas antes mencionados, se puede lograr si se asume la existencia de una etapa inflacionaria del universo, que es posible que se haya presentado alrededor de la escala de Planck, y que se caracteriza por el hecho de que el factor de escala del universo R crece exponencialmente [8, 11, 12]. Esta etapa, conocida como etapa de inflación, es seguida por una etapa de recalentamiento que algunos autores dividen en precalentamiento y recalentamiento [13, 14]. La etapa de inflación, inicialmente propuesta como una idea por Alan Guth [15] y hoy en día asumida como un paradigma científico [16], resuelve los problemas de planitud y de horizonte de una forma satisfactoria, y plantea una posible explicación al problema de estructura a gran escala del universo [11, 17]. Sin embargo, la existencia de un escenario de inflación en la evolución del universo también trae consigo el surgimiento de nuevos problemas, que en algunos casos no tienen solución satisfactoria [18].

El escenario de inflación es muy amplio y puede dividirse en la llamada vieja inflación y en la nueva inflación. La teoría de la vieja inflación, que fue inicialmente propuesta por Guth en el contexto de transiciones de fase cosmológicas [15], se basa en una expansión exponencial del universo partiendo de un estado superfrío de falso vacío [19]. La teoría de la nueva inflación [20, 21], en la que la inflación es gobernada preferentemente por un campo cuántico de naturaleza escalar denominado el campo de inflatón, que aunque mantiene el estado de falso vacío, tiene la ventaja de hacer evolucionar el campo de inflatón hacia el mínimo de su potencial. Este hecho, hace posible que la parte importante de la inflación (la responsable de la homogeneidad) no ocurra en el estado de falso vacío (es decir en un estado sin ningún campo o partícula, pero con una alta densidad de energía) [18, 22]. A pesar de lo anterior, la solución dada por el escenario de nueva inflación trae consigo

algunos nuevos problemas, tales como los que se originan en la existencia de restricciones sobre el campo de inflatón, junto a los relacionados con los potenciales asociados a este campo [23].

Los inconvenientes antes mencionados fueron resueltos con la teoría de la inflación caótica [24, 25], en la cual se levantan las restricciones existentes tanto sobre los potenciales, como sobre las condiciones iniciales y también sobre el problema del equilibrio térmico en el universo temprano [24]. La existencia de una etapa inflacionaria, gobernada por un campo escalar, soluciona los problemas inherentes al MBBC previamente mencionados, pero a su vez se generan algunos interrogantes no resueltos, como por ejemplo la suavidad del universo (homogéneo en su densidad a gran escala), la cual no es solucionada sino solo pospuesta [7]. A este respecto, se sabe que el universo es suave, por lo menos en el volumen de Hubble. Pero ¿qué pasa más allá del volumen de Hubble? Este interrogante es algo que la teoría inflacionaria no puede responder, puesto que en un universo en expansión acelerada, la esfera de Hubble aumenta más despacio que el universo [26].

Las teorías de inflación tipo slow-roll [27], en las que la inflación es gobernada por un campo escalar, requieren de la introducción a mano de un campo de inflatón, con el cual se define un potencial escalar. A este respecto, ha sido planteado que los potenciales escalares asociados al campo de inflatón puedan ser relacionados con los potenciales escalares asociados a los campos de Higgs en el contexto de modelos mas allá del Modelo Estándar Electro débil (MEE), entre los que se destacan potenciales escalares de los modelos supersimétricos, de modelos tipo left-right, de modelos tipo GUT, etc. [18]. A pesar de lo anterior, no hace mucho fue propuesto un modelo de inflación tipo slow-roll en el que el campo escalar que gobierna la inflación puede ser identificado con el campo del bosón de Higgs del MEE [28]. Una de las ventajas de este tipo de modelo es, desde la perspectiva de la física de partículas elementales, que no se requiere de nueva física más allá del MEE, puesto que el inflatón corresponderían al bosón de Higgs. A partir del planteamiento del Modelo de Inflación dirigida por el Bosón de Higgs del MEE (MIBHME) por parte de Bezrukov y Shaposhnikov [28, 29], han sido varios los trabajos que han abordado, profundizado y extendido este tipo de modelo [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40].

Aunque las condiciones impuestas sobre el inflatón pueden ser cumpli-

das por el bosón de Higgs del MEE [31] (en presencia del acoplamiento no mínimo a la gravedad), el MIBHME ha sido ampliamente cuestionado por su falta de naturalidad, problemas de unitariedad y de cortes [41, 42]. Más aún, trabajos recientes han planteado que los problemas de unitariedad en el marco de inflación dirigida por Higgs siguen estando presentes, tanto en el marco de Jordan [34], como en el marco de Einstein [43]. A pesar de lo anterior, el MIBHME puede estar de acuerdo con las observaciones que se tienen de CMB, y al mismo tiempo establecer una masa para el bosón de Higgs del MEE que es consistente con las últimas medidas de la masa para este bosón reportadas por el LHC [44, 45]. Adicionalmente, un tratamiento a fondo con posibles soluciones al problema de unitariedad en el MIBHME ha sido propuesto [43]. De igual forma, otra posible solución a este problema en el MIBHME ha sido planteada a partir de proponer un acoplamiento no mínimo de las derivadas del inflatón con la gravedad [35]. Por lo anterior, se puede considerar que el MIBHME no ha sido completamente descartado como una alternativa teórica viable dentro de las teorías de inflación tipo slow-roll.

Después de que la etapa de inflación ha cesado, en el contexto de las teorías de inflación tipo slow-roll, el campo escalar empieza a oscilar alrededor del mínimo de su potencial efectivo, dando lugar a la excitación de los campos de materia y de radiación acoplados al campo del inflatón a través de interacciones descritas por el potencial escalar [18, 46]. Este fenómeno ocasiona que las partículas elementales emerjan como excitaciones de los campos de materia, produciéndose una elevación abrupta de la temperatura del universo [46]. La etapa posterior a la inflación es conocida como etapa de recalentamiento, siendo fundamental para entender cómo surge el plasma primordial del universo en la evolución cosmológica [46]. Por ejemplo, M. Turner y F. Wilczek [47] reportaron resultados de cálculos numéricos de la evolución del campo escalar después de la región de fluctuaciones, y tales resultados mostraron que la variación temporal del campo escalar da lugar a la generación de partículas elementales en cantidad suficiente como para calentar el universo a órdenes de $10^{14} GeV$ [48], para el modelo en que se trabaja con un campo escalar como inflatón interactuando con otro campo escalar masivo.

El objetivo general de este trabajo de tesis de maestría es estudiar los procesos de inflación y recalentamiento dentro del marco de trabajo de la

inflación tipo slow-roll, asumiendo que el campo del inflatón se puede identificar con el campo de Higgs del MEE, considerando que durante la etapa de recalentamiento el campo de Higgs puede interactuar con los otros campos de materia y de radiación del MEE vía el potencial de Higgs. Para realizar lo anterior, primero se establecen cuales son las condiciones que debe cumplir el parámetro de acople del campo de Higgs del MEE con la gravedad ξ , para que este campo escalar pueda hacer el papel del campo de inflatón. Se encuentra que para obtener etapas de inflación y recalentamiento exitosas dentro del contexto del MIBHME se requiere que ξ tome valores dentro del rango $10 \ll \xi \ll 10^{11}$. Sin embargo, si se asume que la masa del bosón escalar reportada por el LHC corresponde a la masa del bosón de Higgs del MEE, se encuentra que el rango posible de valores para parámetro ξ se restringe ahora a $\xi \approx 10^4 - 10^5$. Por otra parte, a partir de realizar correcciones perturbativas hasta primer orden en el potencial tipo Higgs y tomando en cuenta las condiciones de estabilidad sobre este potencial, se obtiene que la masa del campo de Higgs cumple la siguiente condición $m_H \gtrsim 1.7m_t - 172.5(GeV)$, donde m_t es la masa del quark top. A continuación, se determinan cuales son las condiciones sobre el mínimo del potencial efectivo del campo de Higgs del MEE, con el fin de obtener un adecuado monto de inflación. Al realizar lo anterior, se obtienen algunas relaciones entre algunos parámetros adimensionales que se pueden definir a partir de las constantes de acoplamiento de las interacciones del MEE y el mínimo de potencial efectivo. Finalmente, se consideran los posibles efectos de la temperatura en la etapa de recalentamiento. Para realizar esto último, se estima la temperatura de inicio efectivo de la etapa de recalentamiento, que es del orden de $T_{rh} \approx 10^{12} GeV$ para $\xi = 10^4$, lo cual es consistente con los valores reportados en la literatura en artículos que usan el mismo modelo [40, 46].

El contenido de esta tesis se ha estructurado como se describe a continuación. En el capítulo 2 se exponen las ideas fundamentales que permiten comprender el escenario de la teoría inflacionaria de manera general. Para lograr este propósito, en la sección 2.1 se presentan los conceptos básicos de la cosmología estándar en el marco de RW, posteriormente, en la sección 2.2, se presentan las motivaciones históricas para la inclusión de una etapa de inflación en la evolución del universo, así como la teoría de inflación gobernada por un campo escalar y la aproximación de slow roll (rodadura lenta). En el capítulo 3, se considera la inflación gobernada por el campo de Higgs del MEE. Inicialmente, en la sección (3.1) se presentan las bases

del MIBHME, mientras que en la sección (3.2), se analiza detalladamente la relación entre los campos definidos en los marcos de Einstein y Jordan, lo que permite evidenciar los rangos de validez para las aproximaciones usadas, y establecer que el valor de campo al final de la etapa de inflación en el marco de Einstein es independiente del parámetro de acople ξ . Posteriormente, en la sección (3.3), se analizan los efectos de la transformación sobre el potencial, el comportamiento de los puntos críticos bajo esta transformación y el monto de inflación en el MIBHME. Finalmente, en la sección (3.4), se analiza el comportamiento de los campos escalares en función del tiempo, encontrando que si bien efectivamente hay inflación caótica en los dos marcos, para el rango $10 \lesssim \xi \lesssim 10^{34}$, el valor del parámetro de acoplamiento influye en la explosividad (efectividad o celeridad) del proceso de inflación al final de esta etapa, mientras que para $\xi \gg 4\pi^2$ el proceso de inflación es más lento, es decir menos explosivo. En el capítulo (4), se presentan los cálculos detallados para establecer una corrección sobre la masa del bosón de Higgs a partir del potencial efectivo corregido a un lazo. Para realizar lo anterior, en la sección (4.1), se obtiene el potencial efectivo para el caso de potencial tipo Higgs en el marco de Jordan. Se observa que la corrección depende de la razón entre campos para valores pequeños del campo (lejos del rango de inflación), y por tanto el comportamiento es el mismo para los marcos de Jordan y Einstein. Luego, en la sección (4.2), se obtiene una cota mínima para la masa del Higgs, que está de acuerdo con la masa experimental medida por el LHC para el bosón escalar descubierto recientemente. En última sección (4.3), se establecen las condiciones sobre el mínimo del potencial efectivo, con miras a preservar la estabilidad. Se encontró que se deben cumplir 3 relaciones básicas entre las constantes de acople y los mínimos en el potencial sin corregir y el potencial efectivo. Por último, en el capítulo (5), se presenta la teoría del recalentamiento para el caso de inflación dirigida por el bosón de Higgs del MEE. En la sección (5.2), se estudia la evolución del campo sin tomar en cuenta las interacciones con otros campos, se obtiene una cota para el parámetro de acople a la gravedad dada por $10 \ll \xi \ll 10^{11}$, que es consistente con los rangos presentados en la literatura para este parámetro y cuyo valor central es $\xi \approx 10^4 - 10^5$. Además, se obtienen algunas ecuaciones de estado, que generalizan a las reportadas en la literatura, pero que, como valor agregado, permiten evidenciar las consecuencias de la mezcla de los potenciales cuadráticos y cuárticos que son los trabajados comúnmente en la literatura. Asimismo, estas ecuaciones de estado evidencian también el efecto del corrimiento del mínimo en el potencial de Higgs, lo cual está de acuerdo

con el comportamiento reportado en la literatura. En la sección (5.3), se trabaja el proceso de producción de partículas, por aproximación de Born y por resonancia paramétrica, para el MIBHME (sólo interacciones con bosones son tomadas en cuenta), lo que permite observar que la etapa de recalentamiento para este caso presenta una mezcla de los dos tipos de producción de partículas (por oscilación clásica y por resonancia paramétrica), lo cual coincide con lo reportado por varios autores. En la sección (5.4), se obtiene que la temperatura de recalentamiento efectivo, es del orden de:

$$\begin{aligned} T_{rh} &\approx 10^{12} GeV && \text{para } \xi = 10^4, \\ T_{rh} &\approx 10^{11} GeV && \text{para } \xi = 10^5. \end{aligned}$$

Finalmente en la sección (5.5) se realiza un paralelismo entre los resultados obtenidos en la etapa de recalentamiento, con los obtenidos haciendo uso de la teoría de campos a temperatura finita para el caso de considerar como sistema termodinámico el descrito por la densidad lagrangiana analizada en las secciones anteriores, es decir el de inflación caótica.

Capítulo 2

Modelo estándar cosmológico inflacionario

En este capítulo se presentan los conceptos fundamentales sobre cosmología estándar y teoría inflacionaria. En la primera sección se revisa la métrica de Friedman-Robertson-Walker (FRW), que es la métrica fundamental en la que se basa el Modelo del Big Bang Caliente (MBBC) y se resumen las ideas principales en las que está basado el MBBC, partiendo de las ecuaciones de Einstein hasta llegar a las ecuaciones de Friedmann en términos del parámetro de densidad Ω . En la segunda sección, se presenta una recopilación de los motivos históricos que dieron lugar a la teoría de la inflación, y se realiza un recuento de los varios modelos inflacionarios que dieron lugar a uno de los modelos más aceptado actualmente, la *inflación caótica*. Sobre este último, se presentan las ideas fundamentales del caso particular de considerar un potencial que depende del cuadrado del campo de inflatón, mostrando que si las condiciones de rodamiento suave son satisfechas, el universo realiza una expansión acelerada. Finalmente, se introducen los parámetros de slow roll (rodamiento suave) para aproximación sobre el potencial (PSRA¹).

¹Parametric slow-roll approximation

2.1. Modelo estándar cosmológico

2.1.1. Métrica de Robertson-Walker

Si el universo es isotrópico para un observador particular, el campo de velocidad en su vecindad no puede tener una dirección privilegiada [5], con lo que la parte antisimétrica del campo de velocidades de la materia, correspondiente a su rotación², debe anularse, mientras que las componentes diagonales del tensor de esfuerzo deben ser iguales [50]. Por tanto, la única distorsión permitida³ es una expansión pura, que puede ser escrita como [51]:

$$\delta v_i = H \delta x_i, \quad (2.1)$$

donde H es la constante de Hubble⁴, v_i es la componente i del campo de velocidades y x_i es la componente i del vector de posición de un punto del espacio. Esta ecuación muestra que la velocidad es perpendicular a la superficie en cada punto, ya que de no ser así habría una dirección privilegiada [54].

Asumiendo que el espacio es homogéneo, isótropo y dinámico⁵, existe una secuencia de hipersuperficies homogéneas geodésicamente paralelas que determinan la geometría del espacio [55]. Cada hipersuperficie tiene curvatura y densidad constante, y cada una de estas cantidades depende del parámetro de tiempo cosmológico t , con lo que hipersuperficies diferentes tendrán curvaturas y densidades diferentes⁶ [1]. Una posible solución para determinar la geometría del espacio que cumpla las condiciones anteriores, es una secuencia de superficies esféricas homogéneas (otras posibles soluciones son planos

²Sólo ciertas condiciones iniciales pueden dar lugar a un universo isotrópico, en particular la expansión acelerada que evite un recolapso, o aquellos universos con la velocidad de escape mínima, pueden aproximarse a un estado isotrópico [49].

³La expansión pura surge como una consecuencia del principio cosmológico copernicano generalizado, es decir de la suposición matemática de isotropía y homogeneidad y no de la relatividad general [51].

⁴La determinación de un valor preciso de H fue una de las motivaciones iniciales para la construcción del telescopio espacial Hubble. Esta constante (que en realidad es un parámetro) no sólo fija la escala para todas las distancias y tiempos cosmológicos, sino que además podría proveer límites fuertes sobre las masas de los neutrinos [52]. El valor de H está entre 70 y $72 \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [53].

⁵La ecuación 2.1 nos indica que el universo se expande o se contrae.

⁶El tiempo cosmológico es el tiempo propio visto por el observador comóvil (con el universo) que se mantiene en reposo en las coordenadas comóviles [56].

o hiperboloides [57]), cuya densidad dependa del radio, que a su vez depende del parámetro t . Usando coordenadas esféricas usuales, tenemos que para una de tales superficies esféricas de radio r fijo, la longitud propia debe variar como $(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)^{1/2}$ y siguiendo los argumentos de simetría establecidos por la homogeneidad e isotropía del espacio, se puede establecer que la forma de la métrica es [58, 59]:

$$ds^2 = R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right\}, \quad (2.2)$$

donde $R(t)$ es el factor de escala cósmico, cuya dependencia del tiempo describe la evolución del universo, r , θ y ϕ son coordenadas esféricas comóviles que se mantienen fijas para objetos que no tienen otro movimiento aparte de la expansión del universo [4]. En la anterior ecuación, k es un parámetro que describe la curvatura del espacio: $k > 0$ corresponde a una curvatura positiva; $k < 0$ corresponde a una curvatura negativa; $k = 0$ corresponde al espacio plano euclidiano de la relatividad general [19].

Se espera que en las vecindades de cualquier observador la relatividad especial sea válida, por lo que podemos escribir la métrica, en el cuadri-espacio, como [60]:

$$d\tau^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right\}. \quad (2.3)$$

La ecuación (2.3) es usualmente conocida como métrica de Robertson-Walker (RW)⁷ [63]. Notamos que el intervalo espacio-temporal $d\tau$ es real para dos eventos con una separación como de tiempo, es cero para dos eventos sobre la misma trayectoria de luz y es imaginario para una separación como de espacio.

2.1.2. Cosmología estándar

Como se mencionó al inicio de la introducción, se asume que el universo posee dos propiedades: homogeneidad e isotropía [5, 64, 65]. Es decir, el universo es el mismo visto desde cualquier punto y hacia cualquier dirección.

⁷Ocasionalmente se le asocia con Friedmann o con Lemaitre, quienes estudiaron los casos $k = 1$, en 1922 [61] y $k > 0$ en 1931 [62], respectivamente, pero fue Robertson quien trabajó primero el caso más simple $k = 0$ [1].

Por otra parte, se ha observado que las galaxias se alejan unas de otras con una velocidad proporcional a la distancia que las separa (expansión pura), lo que se conoce como la ley de Hubble⁸ [68]:

$$\vec{v} = H\vec{r}, \quad (2.4)$$

donde H es el parámetro de Hubble. Se puede afirmar entonces que el universo se está expandiendo, y es posible asumir que lo hace mediante procesos que son invariantes bajo inversión temporal⁹. Con lo anterior, se puede realizar una transformación en el tiempo de $t \rightarrow -t$, y de esta forma es natural pensar que en un inicio el universo era «puntual», siempre y cuando los procesos sean también reversibles¹⁰ [71]. Así, si el universo ha aumentado su volumen hasta lo que conocemos hoy como el universo observable, es necesario una ecuación que describa su expansión.

Uno de los modelos cosmológicos más simples, pero más interesantes, es el generado por el espacio-tiempo homogéneo e isotrópico de *Friedmann-Lemaître*¹¹ [75], que es un conjunto de soluciones de las ecuaciones de Einstein:

$$\mathfrak{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathfrak{R}g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

⁸Ley que se aplica a espacios homogéneos expandiéndose y que se asume es equivalente a la ley de distancia y corrimiento al rojo lineal de Hubble ($z = \frac{\lambda_{abs}}{\lambda_{emit}} - 1$), que es en general no lineal y se debe derivar para cada modelo por separado [66]. De hecho, Whiting (2004) estudia cómo el corrimiento al rojo podría no sólo ser un efecto de expansión, y en casos especiales puede ser separado en una parte cinética y una estática [67].

⁹No se debe confundir el hecho que el proceso sea reversible con la reversibilidad de la flecha del tiempo termodinámico, que apunta en una dirección constante, mientras el universo se expande o se contrae [69]. La invarianza bajo inversión temporal es una propiedad de las ecuaciones o leyes de evolución $f(t) \rightarrow f(-t)$, mientras que la reversibilidad está relacionada con la correspondencia de una solución de la ecuación de evolución con una curva cerrada en el espacio de fase [70].

¹⁰Los procesos termodinámicos reversibles son idealizaciones. Si un sistema se expande o se calienta, pueden aparecer irregularidades de temperatura [71]. Además, para garantizar que revertamos el sistema a condiciones idénticas a las iniciales, se requiere que los cambios infinitesimales en una propiedad del sistema, necesarios para reversar el proceso, no generen entropía [72].

¹¹Existe una gran variedad de modelos cosmológicos. Vease Szydlowski et al [73] para un recuento de los más importantes modelos; y Nesseris [74], para una comparación de modelos usando datos de supernova.

donde $\mathfrak{R}_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Riemann y $\mathfrak{R} \equiv g^{\mu\nu}\mathfrak{R}_{\mu\nu}$ es el escalar de Ricci, Λ es la constante cosmológica y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momentum. Sin tomar en cuenta la constante cosmológica Λ , las ecuaciones de Einstein toman la forma [8, 9]:

$$\mathfrak{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathfrak{R}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

Si la métrica es tipo RW, un observador comóvil en el espacio-tiempo, siguiendo el movimiento del fluido, no puede ver las componentes no diagonales del tensor de energía momentum, por lo que el tensor para este caso tiene una forma diagonal [76, 77]:

$$T_{\mu\mu} = (p + \rho c^2)U_\mu U_\mu - pg_{\mu\mu}, \quad (2.7)$$

donde p es la presión del fluido, ρc^2 es la densidad de energía y U_μ es la cuadrivelocidad del fluido ¹².

Por otro lado, de la ecuación (2.3), podemos ver que¹³:

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1, & g_{11} &= -\frac{R^2(t)}{1 - kr^2}, \\ g_{22} &= -R^2(t)r^2, & g_{33} &= -R^2(t)r^2 \sin^2(\theta). \end{aligned}$$

Usando la ecuaciones anteriores y teniendo en cuenta que [79]

$$\mathfrak{R}_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda, \quad (2.8)$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ son los símbolos de Christoffel, que en términos de las componentes del tensor métrico están dados por $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\sigma\nu,\lambda} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma})$, podemos hallar las componentes no nulas del tensor de Ricci para la métrica RW [9]:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\ddot{R}/R, & R_{11} &= (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2k)/(1 - kr^2), \\ R_{22} &= r^2(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2k), & R_{33} &= r^2 \sin^2 \theta (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2k). \end{aligned} \quad (2.9)$$

¹²La propiedad generalmente aceptada para definir un fluido perfecto relativista, es que el tensor de energía-momentum debe ser expresable en términos de la proyección espacial ortogonal $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + c^{-2}U_\mu U_\nu$ en la forma $T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu + p\gamma_{\mu\nu}$ [78]

¹³Hemos usado $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$

Reemplazando estas últimas expresiones en (2.6), se puede notar que para este caso (métrica RW), sólo dos ecuaciones de campo de Einstein son independientes [80]. Estas pueden ser escritas como [81]:

$$\ddot{R}(t) = -\frac{4\pi}{3}G \left(\rho + 3\frac{p}{c^2} \right) R(t), \quad (2.10)$$

para la componente de tiempo-tiempo, y

$$R(t)\ddot{R}(t) + 2\dot{R}^2(t) + 2kc^2 = 4\pi G \left(\rho - \frac{p}{c^2} \right) R^2(t), \quad (2.11)$$

para las componentes de espacio-espacio. En las ecuaciones anteriores, $R(t)$ es el factor de escala del universo, que es en general una función del tiempo cósmico, y tiene el mismo valor a través de todo el espacio, por lo que todas las longitudes se incrementan en el tiempo en proporción a $R(t)$ [82]. Eliminando $\ddot{R}(t)$ de (2.10) y (2.11) tenemos:

$$\dot{R}^2(t) + kc^2 = \frac{8}{3}\pi G \rho R^2(t). \quad (2.12)$$

Las ecuaciones (2.10) y (2.12) son conocidas como las ecuaciones de Friedmann [61, 83] y su solución es la base de la cosmología estándar. En principio, estas ecuaciones nos permiten conocer la evolución de $R(t)$, $\rho(t)$ y $p(t)$ si conocemos la ecuación de estado¹⁴. Puesto que es más fácil medir la densidad de energía como una razón de la densidad crítica, se define el parámetro de densidad como [85] $\Omega = \rho/\rho_c$, donde $\rho_c = 3H^2/8\pi G$. Escalando por R_0 (donde el subíndice 0 se refiere al tiempo de referencia, usualmente tomado como el tiempo presente¹⁵), obtenemos:

$$\left(\frac{\dot{R}(t)}{R_0} \right)^2 - \frac{8\pi}{3}G\rho \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^2 = -\frac{kc^2}{R_0^2}. \quad (2.13)$$

Si analizamos la anterior ecuación en un tiempo particular, en el que $R(t) = R_0$, tenemos:

$$\left(\frac{\dot{R}_0}{R_0} \right)^2 - \frac{8\pi}{3}G\rho_0 = -\frac{kc^2}{R_0^2}. \quad (2.14)$$

¹⁴El factor de escala $R(t)$ provee una completa descripción del modelo de universo uniforme generado a partir de la relatividad general y el principio cosmológico [84].

¹⁵Los valores de la masa media (masa necesaria para tener un universo con una geometría específica) y la densidad de energía del universo son datos fundamentales para las teorías cosmológicas. Estas cantidades son parametrizadas por Ω_0 , la razón presente de la densidad de energía a la requerida para activar la inflación [86].

Recordando que para este tiempo $\rho_0 = \rho_{0c}\Omega_0 = 3H_0^2\Omega_0/8\pi G$, tenemos que, en términos de Ω_0 , la ecuación de Friedmann (2.12) queda escrita como [87]:

$$\frac{kc^2}{H_0^2 R_0^2} = \Omega_0 - 1. \quad (2.15)$$

Notamos que Ω_0 y ρ_{0c} no son constantes sino que por el contrario evolucionan con el universo en el tiempo¹⁶. Por lo tanto, la ecuación anterior es válida para todos los tiempos¹⁷ y muestra que Ω_0 está relacionado con k , como se muestra en la tabla (2.1), adaptada de [81].

Curvatura	Parámetro de densidad	Geometría	Suma de ángulos internos de triángulos	Perímetro de los círculos	Tipo de universo
$k = 1$	$\Omega_0 > 1$	esférica	$> 180^\circ$	$c < 2\pi r$	Cerrado
$k = 0$	$\Omega_0 = 1$	plana	180°	$c = 2\pi r$	Plano
$k = -1$	$\Omega_0 < 1$	hiperbólica	$< 180^\circ$	$c > 2\pi r$	Abierto

Tabla 2.1: Geometría del universo según el valor del parámetro de curvatura.

Teniendo en cuenta lo anterior, la evolución de Ω_0 define la geometría del universo para t constante. La gráfica 2.1, adaptada de [81], muestra la evolución del factor de escala $R(t)$ para los diferentes valores¹⁸ de Ω_0 .

Como se había mencionado, las ecuaciones de Friedmann nos permiten determinar la evolución del factor de escala, siempre y cuando se conozca la ecuación de estado (cómo varía ρ en función de p). Por esto, a continuación, se obtiene la ecuación del fluido, que permite relacionar la evolución de ρ en

¹⁶Aunque no hay acuerdo total sobre los valores correctos para $\Omega_0 = \rho_0/\rho_{0c}$, los más aceptados son entre 0.1 y 0.5 para el caso de universo abierto, donde $\Omega_0 < 1$ [88].

¹⁷Recordamos que para cada tiempo existe una hipersuperficie como de espacio (esfera) [89], con una densidad asociada, como se explicó en la sección anterior.

¹⁸Muchas medidas reportadas para Ω_0 en el caso de universo abierto toman en cuenta sólo la masa de clusters de galaxias, pero si se toma en cuenta otras posibles fuentes de masa como los neutrinos y la energía del vacío, la medida del parámetro de densidad no puede determinar la geometría del universo [90].

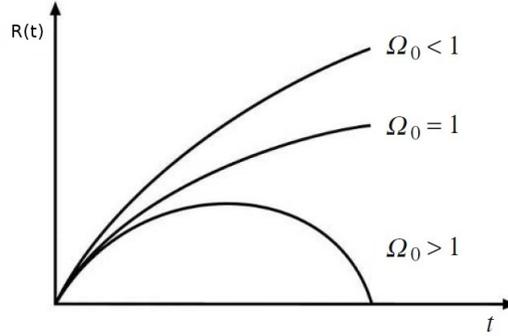


Figura 2.1: Evolución del parámetro de expansión $R(t)$ en modelos abiertos ($\Omega_0 < 1$), modelo plano ($\Omega_0 = 1$) y modelo cerrado ($\Omega_0 > 1$). Gráfica adaptada de [81].

función de t con la presión p . Esta ecuación se obtiene a partir de la primera ley de la termodinámica¹⁹ [91]:

$$dU = TdS - pdV, \quad (2.16)$$

donde U es la energía total, T es la temperatura, S es la entropía, p es la presión y V es el volumen del universo. Asumiendo que la expansión es adiabática (no hay cambio de entropía)²⁰, es decir, no hay intercambio de calor, tenemos que $TdS = 0$ [93]. Tomando $U = \rho c^2 R(t)^3$ y $V = R(t)^3$, tenemos²¹:

$$d(\rho c^2 R(t)^3) = -pd(R(t)^3), \quad (2.17)$$

el significado de esta ecuación es claro, es decir el cambio en la energía en un elemento de volumen comóvil es igual a menos el cambio en el volumen por la presión [8]. La ecuación del fluido será dada por [94]:

$$\frac{d(\rho c^2 R(t)^3)}{dt} = -p \frac{d(R(t)^3)}{dt}, \quad (2.18)$$

$$3c^2 R^2(t) \rho \dot{R}(t) + c^2 R^3(t) \dot{\rho} = -3p R^2(t) \dot{R}(t), \quad (2.19)$$

¹⁹Se ha asumido que el proceso es reversible, puesto que se ha tomado $dQ = TdS$ y $dW = -pdV$, que es válido sólo para procesos cuasi-estáticos o reversibles [91].

²⁰Estudios sobre la producción de entropía en el universo y el fluido cosmológico como un fluido imperfecto pueden verse en [92]

²¹Esta ecuación también puede ser obtenida a partir de las ecuaciones de Friedmann (2.10) y (2.12), lo que muestra que no son independientes [77]

o, equivalentemente

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0. \quad (2.20)$$

La ecuación (2.20) no es una ecuación de estado, ya que para obtener tal ecuación se debe establecer una relación entre ρ y p , sin dependencia explícita del tiempo [95].

En la primera ley de la termodinámica, expresada en (2.20), podemos discriminar las contribuciones debidas a la materia y a la radiación como $\rho = \rho_m + \rho_r$ y $p = p_m + p_r$, para densidad y presión, respectivamente [96].

Actualmente la materia domina sobre la radiación ($\rho_m \gtrsim 10^{-30} g cm^{-3}$, $\rho_r \sim 10^{-33} g cm^{-3}$), pero no siempre fue así, ya que en ciertas etapas del universo la radiación fue dominante y se puede despreciar la contribución de la materia, con lo que la ecuación de estado es de la forma $p = \frac{1}{3} \rho_r c^2$. Sustituyendo esta ecuación de estado en (2.20), tenemos que para esta etapa²²: $\rho \propto R^{-4}$ [97]. Por otro lado, si la radiación es despreciable y el universo es dominado por la materia, la ecuación de estado es²³ $p = 0$, para este caso $\rho \propto R^{-3}$, mientras $R(t) \propto t^{2/3}$ [59].

Si $p > 0$ y $\rho > 0$, las ecuaciones de Einstein requieren que $R(t)$ se anule para algún tiempo finito en el pasado. Sin embargo, esta época de singularidad matemática es de poca relevancia física²⁴ por dos razones principales: (a) Es trivial eliminar esta singularidad postulando una forma viable de la ecuación de estado para la materia a altas energías; (b) a energías suficientemente altas, la gravedad clásica ya no es válida, por lo que tal singularidad no puede ser manejada en el marco de la geometría del espacio-tiempo determinista [99].

²²Un universo lleno de radiación se expande como un gas de fotones [97]. En ambos casos se conserva la entropía y se pierde energía. Sin embargo, en el caso de la expansión del universo, dicha pérdida no puede ser asociada con la idea usual de una celda haciendo trabajo sobre sus alrededores [98], lo que llevó a Harrison, en 1995, a concluir tentativamente que la energía (en sus formas reconocibles, es decir cinética, potencial e interna), no era conservada globalmente [58, 98].

²³La ecuación de estado exacta para este caso esta dada por $p \ll \rho$ [59], pero la solución a presión cero es una aproximación que permite obtener una solución exacta para ρ en función de $R(t)$ y provee modelos útiles [9].

²⁴La singularidad cosmológica que implica densidad y curvatura infinitas, es predicha para haber ocurrido en un tiempo propio finito en el pasado, por lo que si ella fuera recurrente podría volver a ocurrir en un tiempo propio en el futuro [96].

Finalmente notamos que las ecuaciones (2.10) y (2.20), no toman en cuenta la constante cosmológica²⁵ ($\Lambda = 0$). Sin embargo, tomando en cuenta esta constante, se pueden obtener las siguientes ecuaciones de primer orden²⁶:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{R}}{R} &= 0, \\ \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{R^2}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

En este caso universos abiertos pueden expandirse infinitamente o colapsar, como sucede también para universos cerrados. Análisis detallados relacionados con lo anterior se pueden consultar en [8, 82].

Se puede incluir la contribución correspondiente a la constante cosmológica en el parámetro de densidad Ω como $\Omega_\Lambda \equiv \Lambda/3H^2$, por tanto $\Omega = \Omega_\rho + \Omega_\Lambda$, con lo que la ecuación de Friedmann, (2.21) aún tiene la forma de (2.15):

$$\frac{k}{R^2 H^2} = \Omega - 1. \tag{2.22}$$

2.2. Modelo inflacionario

2.2.1. Motivaciones Históricas para un Modelo Inflacionario

La cosmología estándar²⁷, alcanzó grandes logros, los más importantes son que logra dar cuenta de la evolución del universo desde $10^{-2}s$ hasta el presente [7, 101], y que la Radiación Cómica de Fondo (CBR)²⁸ está dentro de los alcances del modelo [105, 106]. No obstante se empiezan a presentar

²⁵Los modelos con $\Lambda = 0$ son conocidos como modelos de Lemaitre o modelos estándar. La naturaleza de estos modelos es hermosamente explicada en [58].

²⁶Se puede ver un tratamiento detallado en [100], para el caso en el que la primera ecuación de 2.21 no es alterada por la presencia de la constante cosmológica en las ecuaciones de Einstein.

²⁷Cosmología del big-bang caliente, que fue firmemente establecida como cosmología estándar en los 70s [7].

²⁸La CBR, que fue descubierta por Penzias y Wilson en 1965 [102, 103] e interpretada por Dicke en el mismo año [104], es tomada como una evidencia observacional para el modelo cosmológico estándar [7, 105, 106].

dudas sobre si las condiciones iniciales del origen del universo eran o no probables²⁹ [108, 109] y las falencias del modelo empiezan a aparecer. Entre los problemas más comunes asociados a la teoría cosmológica estándar se encuentran los problemas de: el universo plano, el horizonte y las partículas reliquia no deseadas.

Problema del universo plano

Si el universo es plano, de la ecuación (2.22) tenemos que $\Omega = 1$. Sin embargo, las observaciones que se tienen de Ω_0 actual son ligeramente diferentes de la unidad, lo que indica que en tiempos anteriores, al inicio del universo, Ω debió estar aún más cerca de la unidad [110], puesto que esto es un requerimiento para la formación del universo presente. Por ejemplo, en el caso de la nucleosíntesis, $|\Omega - 1| \leq 10^{-16}$, con lo que tales condiciones iniciales son poco probables, puesto que llevarían a un universo que colapsa casi inmediatamente a un universo curvo y muy frío [58].

Problema del Horizonte

Este problema se refiere a la comunicación entre diferentes regiones del universo. Puesto que el universo tiene una edad finita, la luz sólo pudo recorrer una distancia finita. Sin embargo, las observaciones de CBR «indican» que es cercanamente isotrópica, es decir la radiación, desde cualquier parte, parece estar a la misma temperatura ($2.725K$), lo que nos hace pensar que en algún momento la radiación, viniendo de lados opuestos, ha estado en contacto térmico y ha evolucionado hacia el equilibrio térmico [111]. Pero, puesto que la luz viene hacia nosotros desacoplada, casi desde el origen del universo mismo, y puesto que hasta ahora llega a nosotros, no puede ser que ya haya estado en contacto con el lado opuesto del universo que presenta la misma temperatura. Más aún, actualmente se sabe que la CBR no es isotrópica, por lo que en algún momento debió crearse una irregularidad que generara perturbaciones, pero tal situación no es posible a partir de un big bang [12].

²⁹El modelo cosmológico requiere de una singularidad, y en palabras de Wheeler (1961), si una singularidad es tolerada la completez de la teoría es destruida [107]

Partículas reliquia no deseadas

Dentro de las teorías gauge unificadas una variedad de partículas súper estables y súper pesadas debieron ser producidas en el universo temprano. Puesto que su masa es muy grande, su sección transversal de aniquilación es muy pequeña, por lo que se esperaría que sobrevivieran y contribuyeran de una manera significativa a la densidad de energía presente. Es más, es posible que al ser tan pesadas y estables pudieran predominar en el universo, sin embargo estas partículas no han sido observadas hasta el momento, es decir, si existieran su abundancia es realmente insignificante [8]. Los monopolos magnéticos son un ejemplo de tales partículas, y la cosmología estándar no tiene un mecanismo para explicar la supresión de dichas partículas en el universo temprano³⁰ [10].

2.2.2. Inflación dirigida por un campo escalar

El modelo inflacionario no suplanta la teoría de big bang, sino que la refuerza y pretende mostrar qué pasó cuando el universo era muy joven. Desde un punto de vista muy superficial y simple, podemos resumir el modelo inflacionario como:

La definición de Inflación es simplemente cualquier época durante la cual el factor de escala del universo $R(t)$ está acelerando, $\ddot{R}(t) > 0$.

Una expresión alternativa equivalente es [12]:

$$\frac{d}{dt} \frac{H^{-1}}{R} < 0, \quad (2.23)$$

recordando la ecuación de Friedmann (2.10), se puede ver que $c^2\rho + 3p < 0$ para el caso de inflación. Puesto que ρ es positiva, se necesita una presión negativa para satisfacer las condiciones de inflación [13].

El modelo inflacionario es una fase de expansión acelerada del espacio que tiene como característica fundamental que puede explicar algunos de los problemas generados a partir de la teoría del big bang³¹ [17]

No obstante, el escenario inflacionario en la cosmología es amplio, y es necesario que se revise no sólo desde un punto de vista histórico, sino que se

³⁰La inflación soluciona el problema, puesto que aumenta exponencialmente la distancia entre los monopolos y hace su densidad despreciablemente pequeña [10].

³¹Los problemas de homogeneidad, universo plano, distribución de la estructura y ausencia de monopolos magnéticos, pueden ser explicados a partir de la inflación [17].

trabaje la parte física y analítica que lo sostiene.

En la siguiente sección se realiza una descripción detallada de esta teoría, que cambió sustancialmente la visión sobre la evolución del universo.

Escenario de La Vieja Inflación

La cosmología estándar presenta muchos inconvenientes, y con el ánimo de solucionarlos surge en 1981 una teoría conocida como la vieja inflación, propuesta por Alan H. Guth [15], la cual está basada sobre una teoría de campo escalar que desarrolla una transición de fase a primer orden.

Para generar inflación, el campo debe ser desplazado de su posición de equilibrio en $\phi = 0$ a una nueva posición de equilibrio en $\phi \neq 0$. Ya que la temperatura decrece, el mínimo del potencial se mueve (cambio de fase con la temperatura), con lo que se genera una barrera de potencial entre los dos mínimos [97], como se presenta en la figura 2.2, tomada de [77].

Para altas temperaturas (a) sólo hay un mínimo, posteriormente se desarrolla un nuevo mínimo, a medida que la temperatura baja (b) y finalmente se alcanza un nuevo estado estable a una temperatura T_c en (c),

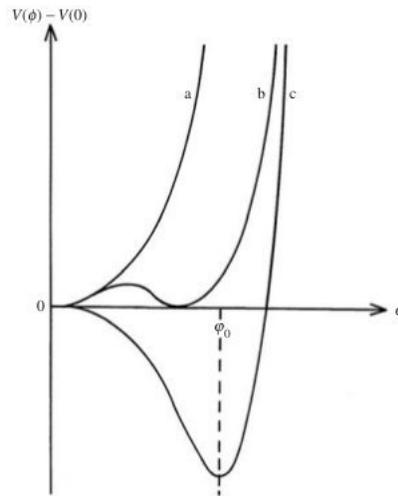


Figura 2.2: Potencial efectivo para diferentes temperaturas. Tomada de [77].

El campo puede pasar de un estado a otro mediante un tunelamiento (en esta transición de fase las cantidades termodinámicas son discontinuas y la

transición se denomina de primer orden [77]).

Por tanto las ideas principales para este modelo se pueden resumir como [77, 97]: (a) Se consideran teorías con un potencial $V(\phi)$, con un mínimo local en $\phi = 0$ aún para temperaturas bajas. Por tanto, el universo evoluciona en un metaestado $\phi = 0$ y su temperatura cae generando una transición de fase, por lo que el universo se expande exponencialmente por un largo tiempo; y (b) La expansión finaliza cuando hay una transición de fase a un estado estable $\phi \neq 0$ [112].

Aunque este modelo logró dar solución a varios de los problemas, como el universo plano y la generación de monopolos [19], la evolución del campo en un estado de falso vacío $\phi = 0$, resultó ser una hipótesis demasiado artificial [97], además de generar un universo extremadamente inhomogéneo [18] por lo que no se usa como un modelo viable actualmente.

Escenario de la Nueva Inflación

Posteriormente, A. Linde [20] propuso lo que hoy es conocido como el escenario de la nueva inflación. En esta teoría, la inflación puede comenzar o en el falso vacío (como en la vieja inflación), o en un estado inestable en el máximo del potencial efectivo. Después, el campo de inflatón rueda suavemente hacia el mínimo de su potencial efectivo [18]. Ver figura (2.3), tomada de [20].

Siempre que el movimiento sea lo suficientemente lento para que el tiempo t (necesario para que el campo ϕ alcance el mínimo de su potencial) sea mucho mayor que H^{-1} , es decir que el tiempo de Hubble, se puede desarrollar suficiente inflación para resolver los problemas de la cosmología estándar [20]. Esta condición puede ser alcanzada si el potencial efectivo de ϕ tiene una parte suficientemente plana cerca de $\phi = 0$ ³² [21].

En este escenario el universo es calentado después de la inflación debido a la creación de partículas elementales por las oscilaciones amortiguadas alrededor del mínimo de $V(\phi)$ [115].

El movimiento del campo lejos del falso vacío es de crucial importancia, puesto que las perturbaciones de la densidad generadas durante el rodamiento del inflatón son inversamente proporcionales a $\dot{\phi}$ [116].

Así, en palabras de Linde (2007): la diferencia clave entre el escenario de

³²Para los modelos de Coleman-Weinberg, que representan la electrodinámica cuántica de un campo escalar en cuatro dimensiones [113], esta condición significa que la constante de acoplamiento del campo escalar complejo con los campos gauge es pequeña [114].

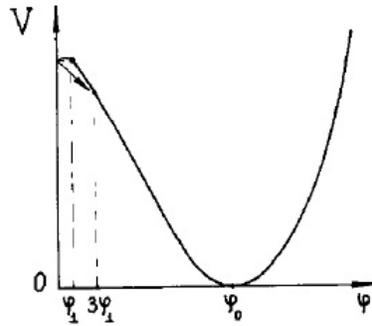


Figura 2.3: Potencial efectivo $V(\phi)$ para el modelo en el escenario de la Nueva Inflación. Tomada de [20]

la nueva inflación y el de la vieja inflación es que la parte útil de la nueva inflación, que es responsable por la homogeneidad de nuestro universo, no ocurre en el estado de falso vacío donde $\dot{\phi} = 0$ [117].

Este nuevo modelo logró resolver casi todos los problemas que se planteaban en el contexto de la cosmología moderna, pero necesitaba imponer unas condiciones muy poco probables sobre los campos y los potenciales efectivos de los campos [23]. Por ejemplo, uno de los inconvenientes radica en el hecho que el potencial fuera casi plano cerca a su mínimo en $\phi = 0$, pero que la curva cerca a $\phi = \phi_0$ fuera lo suficientemente marcada para hacer que el campo oscilara a una alta frecuencia después de la inflación [117]. Otro inconveniente en el modelo yace en que si los campos interactúan débilmente, es muy difícil que estén en equilibrio termodinámico con otros campos presentes [18]. Además, la forma del tensor de energía para el campo ϕ que es dominado por la energía potencial se debe mantener hasta que el campo ruede hacia su mínimo [118]. Finalmente el problema de la geometría del universo (si el universo exhibe una geometría plana o esférica) no logra ser solucionado ni en el modelo de Guth, ni en el escenario de la nueva inflación [117].

Inflación Caótica

El escenario de la inflación caótica [24, 25] logra darle solución a los problemas generados por la Nueva Inflación. En lo concerniente a las condiciones iniciales, en este modelo la inflación puede comenzar aún si no hay equilibrio térmico en el universo temprano y además puede darse aún en teorías con

potenciales tan simples como $V(\phi) \approx \phi^2$. El modelo no está limitado a trabajar con potenciales polinomiales, y la inflación caótica puede desarrollarse en cualquier teoría donde el potencial tenga una región suficientemente plana que permita la existencia del régimen de *slow roll* [117], que será discutido más adelante.

Se ilustrará la idea básica del escenario de inflación caótica con un ejemplo de una teoría de campo escalar simple ϕ mínimamente acoplado a la gravedad³³, con una densidad lagrangiana [18]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.24)$$

en la que se pueden analizar teorías con potenciales de la forma:

$$V(\phi) \approx \lambda \phi^n, \quad (2.25)$$

siempre que sean campos que interactúan débilmente, para lo cual la constante de acoplamiento es tal que $0 < \lambda \ll 1$ ³⁴:

Consideramos ahora el modelo más simple de un campo escalar ϕ con una masa m y con un potencial efectivo $V(\phi) = \frac{m^2}{2} \phi^2$.

La figura (2.4), tomada de [117], muestra que para este potencial, que es un caso particular de (2.25), varios regímenes son posibles dependiendo del valor del campo ϕ : para valores suficientemente pequeños de $V(\phi)$, ($m^2 \lesssim V(\phi) \lesssim m$)³⁵, se generan fluctuaciones pequeñas del campo y éste se mueve suavemente hacia el mínimo de su potencial; mientras que para valores cercanos al mínimo de $V(\phi)$, el campo escalar oscila rápidamente, creando pares de partículas elementales y calentando el universo. Puesto que esta función tiene un mínimo en $\phi = 0$, se puede esperar que el campo escalar ϕ oscile alrededor de este mínimo. Si el universo no se expande, la ecuación de movimiento para

³³En este caso el campo está mínimamente acoplado a la gravedad puesto que en el lagrangiano no aparece ningún término de la forma $\xi \phi^2 R$ (ni de ninguna otra forma), donde R es el escalar de Ricci y ξ es una constante que debe fijarse.

³⁴Una de las ventajas de la inflación caótica es que no necesita ligaduras fuertes sobre los campos escalares. La única condición es que $V(\phi) \ll M_p^4$ [119] (con M_p la masa de Planck). Sin embargo, las constantes de acoplamiento para el modelo son muy pequeñas, lo que dio origen a una teoría de inflación caótica con acoplamiento no minimal a la gravedad, para relajar las restricciones sobre la constante λ [120]

³⁵Para este caso se ha tomado $M_p = 1$, la condición equivalente sobre el campo es $1 \lesssim \phi \lesssim m^{-1/2}$, como se puede ver de la figura (2.4) [117]

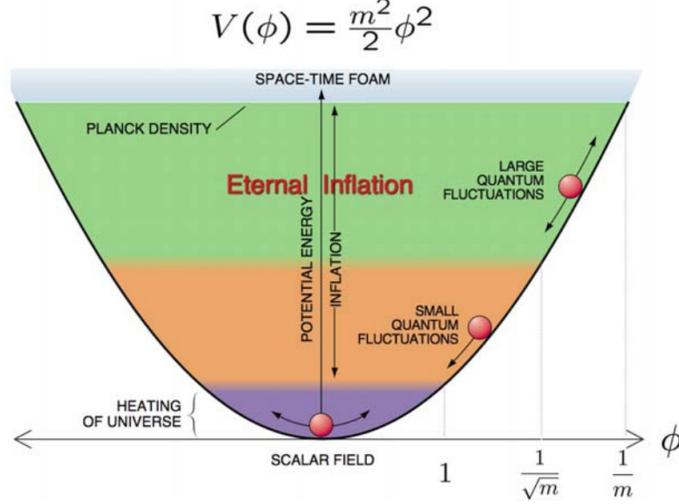


Figura 2.4: Movimiento del campo escalar en la teoría $V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2$. Tomada de [117]

el campo escalar en este régimen coincide con la de un oscilador armónico: $\ddot{\phi} = -m^2\phi$ [50].

Sin embargo, debido a la expansión del universo, con la constante de Hubble $H = \dot{R}/R$ aparece un nuevo término $3H\dot{\phi}$. Por tanto, la ecuación de movimiento en la métrica RW (2.3) está dada por³⁶ [121]:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (2.26)$$

para el caso que estamos trabajando $V'(\phi) = m^2\phi$, por tanto:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -m^2\phi, \quad (2.27)$$

con lo que el término $3H\dot{\phi}$ puede ser interpretado como un término de fricción [122].

Las ecuaciones de Einstein para un universo conteniendo campos escalares homogéneos son:

$$H^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{1}{6}(\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2), \quad (2.28)$$

³⁶En este caso con el objetivo de tener condiciones de rodadura lenta, se asume que: $R^{-2}(t)(\nabla\phi)^2$ es despreciable comparado con el potencial, y que la curvatura espacial $k/R^2(t)$ es despreciable [121], o que el espacio es plano

donde se ha usado $M_p^{-2} = 8\pi G = 1$. Por tanto tenemos que las ecuaciones que nos permiten modelar la evolución de ϕ son [123]:

$$H^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{1}{6}(\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2), \quad (2.29)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -m^2\phi. \quad (2.30)$$

La dinámica de inflación puede ser descrita como un fluido perfecto, con la presión y la densidad de energía dependiendo del tiempo como [94]:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (2.31)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (2.32)$$

para nuestro caso particular:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2, \quad (2.33)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2. \quad (2.34)$$

Para tomar en cuenta la pérdida de energía del inflatón por la producción de partículas de cualquier tipo χ ³⁷, se pueden adicionar términos en la ecuación de Klein-Gordon (2.30), con una constante de acoplamiento relacionada con la tasa de interacción [13].

Usando las ecuaciones para ρ y p dadas por (2.33, 2.34) en (2.27) se obtiene:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (2.35)$$

si el potencial efectivo domina a la energía cinética, tenemos que $p \approx -\rho$, con lo que, de (2.35) $\rho \approx cte$ [122], por tanto de la ecuación anterior vemos que en este caso:

$$R(t) \approx e^{Ht}, \quad (2.36)$$

la ecuación (2.36) muestra que hay una expansión acelerada [8, 117, 122]. Para obtener un universo expandiéndose exponencialmente se ha asumido que $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ [124], que es la condición de *slow roll*.

³⁷Cuando el campo ϕ oscila alrededor de su mínimo genera partículas, la ecuación (2.35) sólo da cuenta de la pérdida de energía por inflación pero no por producción de partículas.

2.2.3. Aproximación de Slow Roll

Las expresiones (2.29) y (2.30) son un conjunto de ecuaciones acopladas que determinan la evolución del universo FRW dominado por un campo escalar homogéneo.

En vez de resolver las ecuaciones exactas, la dinámica inflacionaria utiliza una aproximación conocida como *slow roll*³⁸, que asume que el campo se mueve lentamente hacia el mínimo de su potencial [16]:

$$\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}, \quad (2.37)$$

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi), \quad (2.38)$$

las ecuaciones (2.29) y (2.30) con estas aproximaciones se pueden escribir como:

$$H^2 \simeq m^2\phi^2, \quad (2.39)$$

$$3H\dot{\phi} \approx -m^2\phi. \quad (2.40)$$

Mientras que la ecuación de estado es de la forma $p \approx -\rho$, por lo que hay una expansión acelerada como se muestra en (2.36) [8, 117, 122]³⁹

Se introducen dos parámetros adimensionales que describen las propiedades del potencial del campo de inflatón⁴⁰:

$$\varepsilon = \frac{M_p^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad (2.41)$$

$$\eta = M_p^2 \frac{V''}{V}. \quad (2.42)$$

De las ecuaciones (2.39,2.40) vemos que la aproximación de slow roll (2.37,2.38) implican que [11]:

$$\varepsilon \ll 1, \quad |\eta| \ll 1. \quad (2.43)$$

³⁸Rodamiento lento.

³⁹La aproximación slow roll no es una condición necesaria para que la inflación ocurra [27]. Potenciales que cumplan $\langle V - \phi V' \rangle > 0$ pueden desarrollar inflación aún después de finalizar un régimen de slow roll [125].

⁴⁰En este caso se ha usado la aproximación de slow roll para el potencial (PSRA) [21], donde las restricciones están sobre la forma del potencial. Mientras que en la aproximación de slow roll para el parámetro de Hubble (HSRA) [126] las condiciones están sobre el parámetro de Hubble durante la inflación.

La inflación es comúnmente caracterizada por el número de e-foldings de expansión $N(t)$ [27],

$$N(t) = \ln \frac{R(t_f)}{R(t)}, \quad (2.44)$$

cantidad que determina el crecimiento del factor de escala desde un tiempo t hasta el final de la inflación en un tiempo t_f . Para un universo expandiéndose exponencialmente, $R(t) \propto e^{Ht}$, con lo que $N(t)$ estará dado por:

$$N(t) = H(t_f - t), \quad (2.45)$$

por tanto el número de e-foldings puede ser escrito como [127]:

$$N(t) = \int_t^{t_f} H dt = \int_\phi^{\phi_f} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \simeq -\frac{1}{M_p^2} \int_\phi^{\phi_f} \frac{V}{V'} d\phi, \quad (2.46)$$

al final de la etapa de inflación, se asume que las condiciones de slow roll se violan, es decir que la inflación termina cuando $\varepsilon \sim 1$ o $|\eta| \sim 1$. Para este régimen $N(t)$ es muy pequeña [16], puesto que H varía muy lentamente pues $R(t)$ ya no está cambiando exponencialmente.

Capítulo 3

Modelo Inflacionario dirigido por el bosón de Higgs del Modelo Estándar (MIBHME)

Los modelos basados en inflación pueden dar solución a muchos de los problemas presentados por la cosmología estándar [128, 129]. No obstante, nos enfrentan ante la necesidad de un nuevo campo escalar llamado el inflatón, que bajo las condiciones necesarias para la inflación en el modelo cosmológico estándar, no está predicho por el MEE. Sin embargo el modelo de inflación dirigido por el bosón de Higgs, MIBHME, propuesto primero por Bezrukok y Shaposhnikov [28], nos habilita para desarrollar un modelo de inflación sin salirnos del modelo estándar (MEE).

En este capítulo se presenta un desarrollo detallado de la transformación de los campos y los potenciales entre los marcos de Einstein y Jordan, se establece la dependencia de los campos en función del tiempo y se extraen algunas condiciones sobre el parámetro de acople necesarias para identificar el bosón de Higgs del MEE con el campo de inflatón.

3.1. Descripción general del modelo

En el MIBHME, se trabaja con una densidad lagrangiana acoplada no minimalmente a la gravedad, dado por:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} - \frac{M^2}{2}R - \xi H^\dagger H R, \quad (3.1)$$

donde \mathcal{L}_{SM} es la parte correspondiente al campo escalar del lagrangiano, M es un parámetro de masa, H es el campo de Higgs, R es el escalar de Ricci y ξ es una constante para ser fijada. Este densidad lagrangiana ha sido ampliamente trabajado por [130][131], entre otros.

Tenemos un acoplamiento del campo de Higgs a la gravedad mediante un parámetro de acoplamiento ξ . Cuando $\xi = 0$, el acoplamiento del campo de Higgs a la gravedad es minimal en este caso $M = M_P$ [132].

El modelo de Bezrukov y Shaposhnikov, usa el gauge unitario $H = \frac{h}{\sqrt{2}}$, es decir se ha elegido el valor esperado del campo de Higgs en el vacío como $\frac{v}{\sqrt{2}}$, se ha expandido el doblete de Higgs en torno a ese valor y h es la componente del campo de Higgs que se asocia con la partícula del mismo nombre [133], por lo que se considera sólo el sector escalar y se trabaja en la región $1 \ll \sqrt{\xi} \ll 10^{17}$, en la que se cumple $M \sim M_P$ [28], en este caso la acción para (3.1) tiene la forma:

$$S_J = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{M^2 + \xi h^2}{2} R + \frac{\partial_\mu h \partial^\mu h}{2} - \frac{\lambda}{4} (h^2 - v^2)^2 \right], \quad (3.2)$$

donde el primer término da el acople del campo con la gravedad y el segundo es el lagrangiano para el campo de Higgs en MEE; con su término cinético y con el potencial tipo Higgs para el modelo. En este caso estamos trabajando en un sistema de coordenadas comóviles, el tiempo es el tiempo físico, por lo que el marco de trabajo es el conocido como el marco de Jordan [134], en el cual el campo escalar está acoplado a la gravedad mediante el parámetro ξ . A partir del lagrangiano asociado con (3.2) obtenemos la siguiente ecuación de movimiento para el campo escalar h :

$$\frac{\partial V}{\partial h} + \xi h R + 3H\dot{h} + \ddot{h} - \nabla^2 h = 0, \quad (3.3)$$

$$3H\dot{h} + \xi h R + V'(h) = 0, \quad (3.4)$$

donde hemos usado condiciones de slow roll para el campo escalar h . Los detalles son presentados en el anexo A

Aún aplicando condiciones de slow roll, notamos que en el marco de Jordan, el campo está acoplado a la gravedad, mediante el factor ξ , en el segundo término de la ecuación anterior, por lo que se realiza la transformación conformal:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

$$\Omega^2(h) = 1 + \frac{\xi h^2}{M_P^2}, \quad (3.6)$$

donde $M_P \equiv \frac{1}{\sqrt{8\pi G}}$ es la masa de Plank reducida, esta transformación genera un término cinético no minimal, que es removido haciendo un cambio a un nuevo campo escalar [30]:

$$\frac{d\chi}{dh} = \sqrt{\frac{\Omega^2 + 6\xi^2 h^2 / M_P^2}{\Omega^4}}, \quad (3.7)$$

donde χ , es el campo escalar asociado con el inflatón en el marco generado a través de la transformación conformal (3.5), que permite desacoplar el campo de la gravedad y trabajar en un contexto de inflación tipo slow roll. Este marco es conocido como el marco de Einstein.

Por tanto la acción en el marco de Einstein está dada por:

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left[-\frac{M_P^2}{2} \hat{R} + \frac{\partial_\mu \chi \partial^\mu \chi}{2} - U(\chi) \right], \quad (3.8)$$

donde \hat{R} se calcula usando \hat{g} y el potencial es:

$$U(\chi) = \frac{1}{\Omega^4(\chi)} \frac{\lambda}{4} (h(\chi)^2 - \nu^2)^2, \quad (3.9)$$

los cálculos detallados de la transformación del marco de Jordan al marco de Einstein se presentan en el anexo B.

Cuando $h \gg M_P / \sqrt{\xi}$, se tiene:

$$h \simeq \frac{M_P}{\sqrt{\xi}} \exp\left(\frac{\chi}{\sqrt{6}M_P}\right), \quad (3.10)$$

esto conduce a que el potencial del campo de inflatón χ , en el marco de Einstein es potencialmente plano, para $\chi \gg M_P$, [28], como se muestra en la gráfica (3.1) (adaptada de [28], pág. 3), y que tiene la forma:

$$U(\chi) = \frac{\lambda M_P^4}{4\xi^2} \left(1 + \exp\left(-\frac{2\chi}{\sqrt{6}M_P}\right) \right)^{-2}, \quad (3.11)$$

bajo estas condiciones se obtiene una inflación caótica con slow roll, como la que se explicó en la sección anterior.

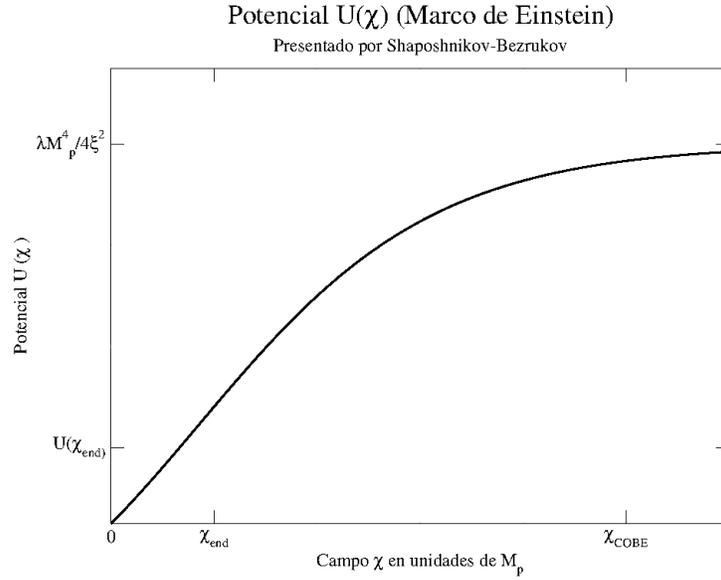


Figura 3.1: Potencial efectivo en el marco de Einstein. Adaptada de [28].

Por tanto a partir de (2.41) y (2.42), se pueden obtener los parámetros de slow roll ε y η , en el marco de Einstein, como:

$$\varepsilon = \frac{M_p^2}{2} \left(\frac{U'(\chi)}{U(\chi)} \right)^2, \quad (3.12)$$

$$\eta = M_p^2 \frac{U''(\chi)}{U(\chi)}, \quad (3.13)$$

en términos del campo χ , el parámetro ε , puede ser escrito como:

$$\varepsilon = \frac{4}{3} \left(\frac{e^{\frac{-2\chi}{\sqrt{6}M_p}}}{1 - e^{\frac{-2\chi}{\sqrt{6}M_p}}} \right)^2, \quad (3.14)$$

a partir de (3.10), tenemos que para $h \gg M_p/\sqrt{\xi}$, se cumple:

$$\varepsilon \approx \frac{4M_p^4}{3\xi^2 h^4} \left(1 - \frac{M_p^2 h^{-2}}{\xi} \right)^{-2} \approx \frac{4M_p^2}{3\xi^2 h^4} \left(1 + 2\frac{M_p^2}{h^2 \xi} \right), \quad (3.15)$$

por tanto tenemos que:

$$\varepsilon \approx \frac{4M_p^4}{3\xi^2 h^4}. \quad (3.16)$$

Puesto que las constantes de acoplamiento en el modelo de inflación dirigida por Higgs son tan grandes, el modelo empieza a ser cuestionado, [135][41], (entre otros). Cuando el campo de Higgs es expandido alrededor de su valor esperado en el vacío, en el modelos estándar $v = 246\text{GeV}$ la teoría viola unitariedad a una escala de $\Lambda \sim \frac{M_P}{\xi}$, se podría considerar este valor como un punto de corte, no obstante el valor del campo de Higgs durante la inflación está alrededor de $\frac{M_P}{\sqrt{\xi}}$ que es por encima del valor de corte, lo que genera problemas con el modelo [43].

3.2. Relación entre los campos en los marcos de Einstein y Jordan

En la sección anterior se estableció (los detalles se presentan en el apéndice (A)) que la relación entre los campos χ y h en los marcos de Einstein y Jordan respectivamente, es:

$$\frac{d\chi}{dh} = \sqrt{\frac{\Omega^2 + 6\xi^2 h^2 / M_P^2}{\Omega^4}}, \quad (3.17)$$

para el caso en que $h \gg M_p / \sqrt{\xi}$, (régimen de interés para la inflación), la relación de los campos es exponencial dada por (3.10).

Notamos ahora que tal transformación conformal se realiza directamente sobre la densidad lagrangiana y no sobre la expresión para el campo h (3.4), obtenida aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange y la condición de slow roll. Por tal motivo la relación entre los campos no está limitada para ninguna etapa específica del universo temprano.

De la ecuación (3.17) podemos obtener que la relación entre los campos χ y h , salvo la constante de integración, es de la forma:

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{\frac{1+6\xi}{\xi}} \ln \left(\sqrt{\xi(1+6\xi)Y} + \sqrt{\xi(1+6\xi)Y^2 + 1} \right) \\ &\pm \frac{\sqrt{6}}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{1+\xi(1+6\xi)Y^2} + \sqrt{6\xi}Y}{\sqrt{1+\xi(1+6\xi)Y^2} - \sqrt{6\xi}Y} \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

en la ecuación anterior $X = \frac{\chi}{M_p}$ y $Y = \frac{h}{M_p}$, son los campos escalares escalados por la masa de Planck. Esta ecuación es válida para cualquier rango del parámetro ξ .

Sin embargo estamos interesados en el caso en que $1 \ll \sqrt{\xi} \ll 10^{17}$, (es decir el régimen en que $M \approx M_p$, en (3.1), [28]), para este rango, la relación entre los campos χ y h es [30]:

$$X \approx \begin{cases} Y & \text{si } Y \rightarrow 0 \text{ ó } Y \ll \frac{1}{\sqrt{\xi}}, \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left[\frac{1}{K^2} (\xi Y^2 + 1) \right] & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.19)$$

donde K , es una constante que depende de las condiciones iniciales para los campos. Los detalles de los cálculos para obtener las expresiones (3.18) y (3.19) son presentados en el anexo C.

Puesto que $X \approx Y$ cuando $Y \rightarrow 0$, podemos mapear el cero de Y en el cero del campo X , con lo que $K = \pm 1$. En adelante trabajaremos con esta suposición.

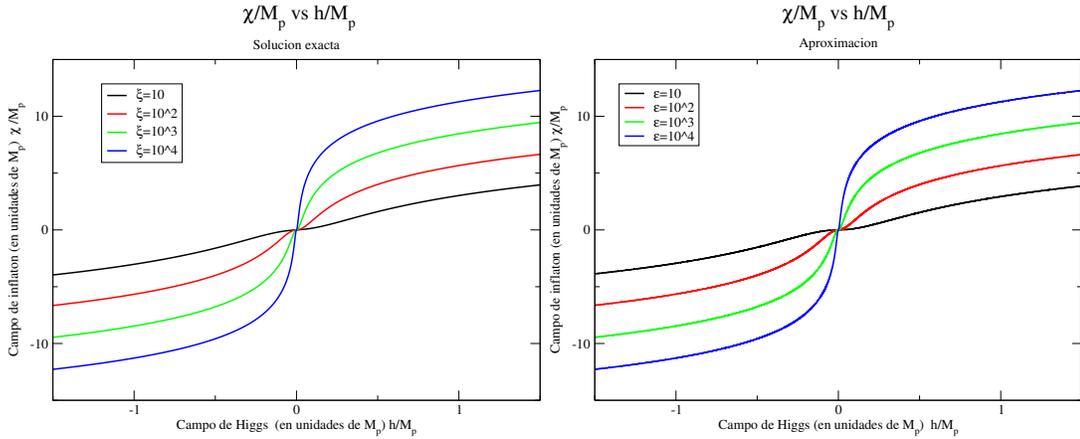


Figura 3.2: El campo χ/M_p en el marco de Einstein en función del campo h/M_p en el campo de Jordan.

Las gráficas (3.2), muestran el comportamiento del campo χ en el marco de Einstein, al que denominamos inflatón, en función del campo h , en el marco de Jordan, que representa el campo de Higgs, para diferentes valores del parámetro de acople a la gravedad ξ . A la izquierda la solución exacta (3.18) y a derecha la aproximación a trabajar (3.19) [30].

Notamos que el campo, es simétrico respecto al origen, por lo que funciones que dependan del cuadrado del campo como el potencial, conservaran las

simetría, en el marco de Einstein. Además de las gráficas se puede observar que el valor inicial del campo para la etapa de inflación depende fuertemente del parámetro de acople a la gravedad, siendo más grande para valores grandes de ξ , por otro lado se puede inferir que entre más grande sea el parámetro de acople mayor va ser la energía cinética asociada a la primera oscilación del campo en la etapa de recalentamiento.

Las gráficas (3.3), a la derecha, permite ver que el comportamiento de la solución exacta (3.18) (lineas a trozos) es muy similar a la solución aproximada $X \approx \sqrt{\frac{3}{2}} \ln(\xi Y^2 + 1)$, (lineas continuas), más aún, en la gráfica de la izquierda podemos notar que la diferencia entre las dos soluciones es casi constante para $\xi \geq 100$, por lo que tomando $10 \lesssim \xi \ll 10^{34}$ [28], (3.19) puede ser tomada como la solución exacta salvo una constante que puede ser absorbida en la constante de integración, antes de mapear el cero en cero.

No obstante de la gráfica notamos que para $Y \rightarrow 0$ la aproximación falla, puesto que en este caso $\frac{d\Omega}{dh} \rightarrow 0$. Así la ecuación (3.19), es una solución siempre que $10 \lesssim \xi \ll 10^{34}$ (que es equivalente a $\xi \nu^2 \ll M_p^2$) y nos mantengamos lejos del límite $Y \rightarrow 0$.

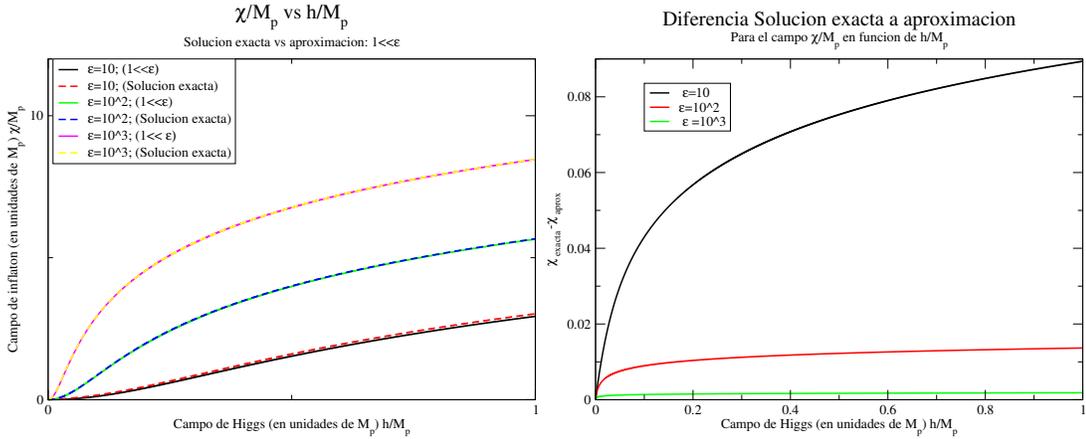


Figura 3.3: A la izquierda el campo χ/M_p en función del campo h/M_p . A la derecha la diferencia de las soluciones exacta y aproximada para el campo χ/M_p

Además notamos que a partir de la ecuación (3.19), podemos obtener los

casos límites dados en ([28, 30]):

$$Y \approx \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}} e^{\frac{X}{\sqrt{6}}} & \text{si } Y \gg 1/\sqrt{\xi}, \\ X & \text{si } Y \ll 1/\sqrt{\xi}. \end{cases} \quad (3.20)$$

A partir de (3.16), observamos que para este caso, el valor del campo en el marco de Jordan al final de la inflación, χ_{end} , es independiente del parámetro de acoplamiento con la gravedad ξ .

Puesto que al final de la inflación, $\varepsilon \approx 1$, tenemos:

$$\frac{4M_p^4}{3\xi^2 h^4} \approx 1, \quad (3.21)$$

de esta forma $h_{end} \approx \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} \frac{M_p}{\sqrt{\xi}}$, entonces $Y_{end} \approx \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\xi}}$, y, usando 3.19, el valor del campo al final de la inflación en el marco de Einstein χ , pesado por la masa de Planck, sería:

$$X_{end} = X(h_{end}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left(\sqrt{\frac{4}{3}} + 1 \right). \quad (3.22)$$

Como se puede ver en la gráfica (3.3), aún para $\chi \rightarrow \chi_{end}$ la aproximación trabaja muy bien, salvo una constante, en la ampliación presentada en (3.4), se puede ver como el valor del campo al final de la inflación en el marco de Jordan h_{end} , depende del parámetro de acople, siendo más pequeño a medida que el parámetro crece, mientras en el marco de Einstein este valor es una constante que no depende del parámetro.

Aunque χ_{end} es independiente del parámetro de acople ξ , el potencial final depende como $\frac{1}{\xi^2}$

3.3. Comportamiento del potencial de Higgs bajo una transformación conforme

El potencial en el marco de Einstein está dado por:

$$U(\chi) = \frac{1}{\Omega^2(\chi)} \frac{\lambda}{4} (h^2(\chi) - \nu^2)^2,$$

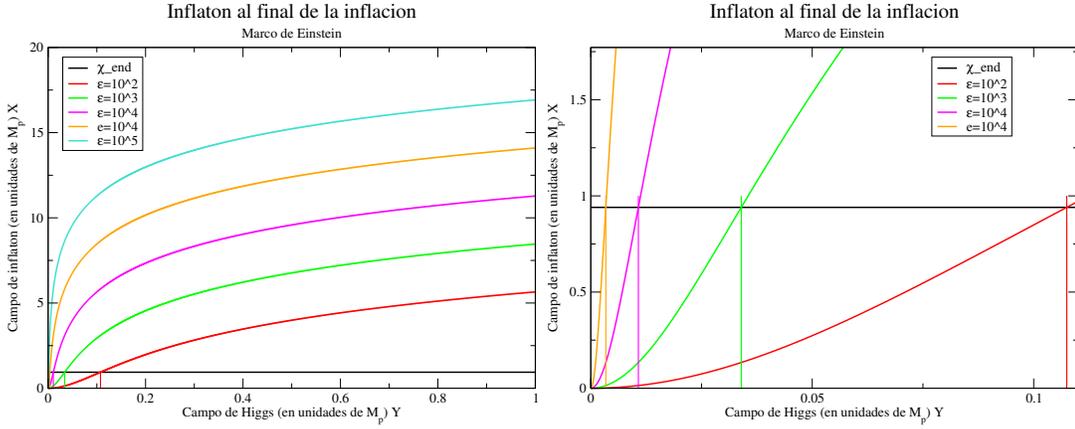


Figura 3.4: A la izquierda el campo χ/M_p en función del campo h/M_p . A la derecha vemos la ampliación de $h \rightarrow h_{end}$

en términos de Ω , tenemos que el potencial es:

$$U(\chi) = \frac{1}{\Omega^2(\chi)} \frac{\lambda}{4} \left(\frac{M_p^2}{\xi} (\Omega^2 - 1) - \nu^2 \right)^2. \quad (3.23)$$

Pero de (3.19) y (3.6), tenemos que $\Omega = \exp\left(\pm \frac{\chi}{\sqrt{6}M_p}\right)$ [30], por lo que en términos del campo χ , tenemos:

$$U(\chi) = \frac{\lambda M_p^4}{4\xi^2} \left[1 - \left(1 + \frac{\xi\nu^2}{M_p^2} \right) \exp\left(\mp \frac{2\chi}{\sqrt{6}M_p}\right) \right]^2, \quad (3.24)$$

el signo $-$ para $\chi > 0$ y $+$ para $\chi < 0$.

La gráfica (3.5) nos muestra la forma del potencial $U(\chi)$ en el marco de Einstein. Podemos notar que la forma del potencial conserva un máximo $\frac{\lambda\nu^4}{4}$ cuando $\chi = 0$. Además, vemos que, si $h_{min} = \nu$:

$$\chi_{min} = \frac{\sqrt{6}M_p}{2} \ln \left(1 + \frac{\xi\nu^2}{M_p^2} \right),$$

para este valor encontramos un mínimo en el potencial $U(\chi) = 0$.

Se puede observar que el potencial en el marco de Einstein, tiene un mínimo generado por el acople no minimal a la gravedad ($\xi \neq 0$) y esto se evidencia en la dependencia con ξ de los valores mínimos del potencial en este marco,

generados por los mínimos del potencial en el marco de Jordan ($h = \nu$). Por tanto vemos que el potencial bajo la transformación, no sólo conserva los puntos críticos, sino que mapea los mínimos en mínimos y los máximos en máximos, conservando la simetría del potencial, respecto al campo.

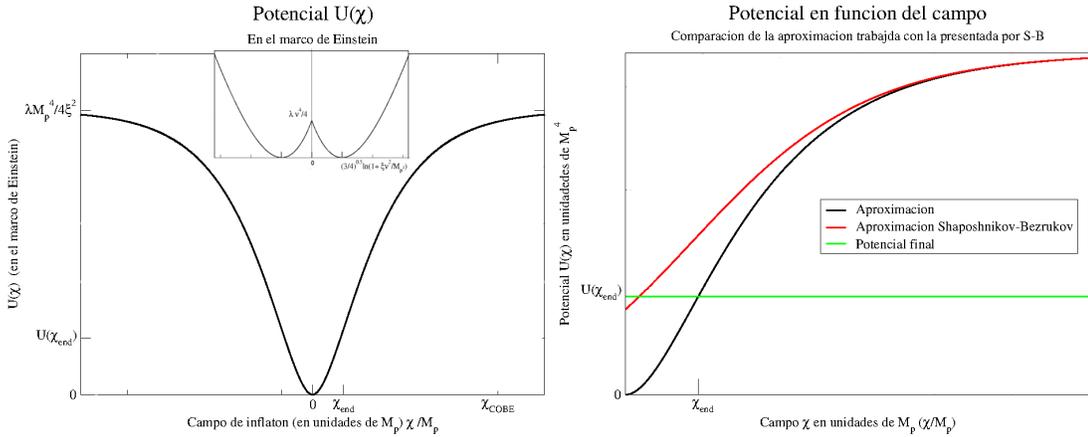


Figura 3.5: (a) Izquierda: Potencial $U(\chi)$ en el marco de Einstein (b) Derecha: La comparación de la aproximación trabajada en este documento con la presentada por Bezrukov, F. y Shaposhnikov, M. (2008)

Comparando las formas de los potenciales en los marcos de Einstein y de Jordan, se puede observar que cerca al mínimo el comportamiento es totalmente análogo, puesto que para $h \rightarrow 0$, tenemos $\chi \approx h$. No obstante el potencial de la gráfica (3.5), no representa de manera adecuada esta región, puesto que hemos usado la transformación para campos lejos del cero en el marco de Jordan.

Mientras para valores grandes del campo (región de interés para la inflación), notamos que el potencial se suaviza, como si se hiciera una relajación en el tiempo, es decir, el tiempo en el marco de Einstein ya no se escala de forma constante, sino que visto desde el marco de Jordan, entre mas grande sea el campo, mayor será el factor de escala para el tiempo en el marco de Einstein, sería, algo semente al factor de escala $R(t)$ de las coordenadas comóviles, solamente que en este caso $t_E = \alpha(h)t_J$, donde t_E y t_J , son los tiempos en los marcos de Einstein y Jordan, respectivamente.

De lo anterior notamos que los términos cinéticos del lagrangiano van a ser mucho más pequeños en el marco de Einstein, lo cual nos permite obtener

las condiciones propicias para aplicar slow roll.

La gráfica (3.5 (b)), muestra la comparación entre el potencial obtenido con la aproximación usada en este trabajo (3.19), que es el obtenido por ([30]), y el potencial (SB) presentado por ([28]). Notamos que los dos potenciales son exponencialmente planos, pero, se alejan a medida que el final de la etapa de inflación se aproxima. Más aún, se puede observar que para χ_{end} , el potencial SB asociado al campo es mayor que para la aproximación que se maneja en este escrito, pero las dos curvas presentan pendientes semejantes por lo que salvo una constante, las condiciones de slow roll son válidas.

Sin embargo de la gráfica (3.5 (b)), notamos que la aproximación presentada por ([30]), permite trabajar la etapa de recalentamiento (salvo valores del campo cercanos a cero), mientras que la SB, no

Finalmente notamos que $\chi > 0$, podemos escribir el potencial como:

$$U(\chi) = \frac{\lambda M_p^4}{4\xi^2} \left[1 - \alpha \exp\left(-\frac{2\chi}{\sqrt{6}M_p}\right) \right]^2, \quad (3.25)$$

donde $\alpha = 1 + \frac{\xi\nu^2}{M_p^2}$, para valores de campo de interés en la inflación podemos aproximar $\alpha \approx 1$, sin embargo el corrimiento del mínimo del potencial respecto al cero si podría interferir en la etapa de recalentamiento¹.

3.3.1. El potencial, los parámetros de slow roll y el número de e-foldings

A partir de la ecuación (3.12), tenemos:

$$\varepsilon = \frac{4}{3} \left(\frac{e^{-\frac{2\chi}{\sqrt{6}M_p}}}{1 - e^{-\frac{2\chi}{\sqrt{6}M_p}}} \right)^2, \quad (3.26)$$

recordando que $X = \frac{\chi}{M_p} = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln(\xi Y^2 + 1)$, donde $Y = \frac{h}{M_p}$, tenemos:

$$\varepsilon = \frac{4}{3} \frac{M_p^4}{\xi^2 h^4}, \quad (3.27)$$

¹En la etapa de recalentamiento las condiciones de slow roll ya no son satisfechas y por lo tanto el comportamiento del campo no podrá ser modelado a partir de la mismas ecuaciones usadas en inflación

expresión que se obtuvo en (3.16), con la aproximación SB, por tanto, el valor del campo para el final de la inflación no varía para las dos aproximaciones, aunque el potencial final, si lo hace.

Por otro lado η , aún es proporcional a $1/h^2$, de esto podemos concluir que las condiciones de slow roll con esta aproximación trabajan de manera análoga a lo presentado por ([28]), pero presentan la ventaja de tener un valor de campo de final de inflación independiente del parámetro de acople ξ .

El número de e-foldings, en el marco de Einstein, se puede obtener como[127]:

$$N = \int_{\chi_{end}}^{\chi_*} \frac{U(\chi)}{U'(\chi)} d\chi, \quad (3.28)$$

donde las primas representan derivadas respecto al campo χ .

Es importante anotar que esta forma para el número de e-foldings, es válida sólo en el marco de Einstein². Siguiendo el procedimiento presentado por [132], para el potencial (3.25), tenemos:

$$\frac{U(\chi)}{U'(\chi)} = \frac{\sqrt{6}}{4} M_p \left(\exp \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\chi}{M_p} - 1 \right) = \frac{\xi \sqrt{6}}{4 M_p} h^2, \quad (3.29)$$

mientras $\frac{d\chi}{dh} \approx \sqrt{6} \frac{M_p}{h}$, donde hemos aproximado el campo $h^2 \approx \frac{M_p}{\xi} \exp \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\chi}{M_p}$. Por tanto la expresión para el número de e-foldings en el marco de Jordan (en términos del campo h), es [132]:

$$N \approx \frac{1}{M_p^2} \frac{3\xi}{2} \int_{h_{end}}^{h_*} h dh = \frac{3}{4} \frac{\xi}{M_p^2} (h_*^2 - h_{end}^2), \quad (3.30)$$

de la expresión anterior se obtiene $h_*^2 = 81.1547 \frac{M_p^2}{\xi}$.

Puesto que $h_{end} = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} \frac{M_p}{\sqrt{\xi}}$, se obtiene que para este potencial [132]:

$$\varepsilon(t_*) \approx 2 \times 10^{-4}, \quad (3.31)$$

$$\eta(t_*) \approx -1 \times 10^{-2}. \quad (3.32)$$

Valores que se obtienen siguiendo el procedimiento presentado en ([132]). Notamos que los valores son muy cercanos a los presentados en ([132]), lo

²Esta forma para el número de e-foldings está relacionada con el hecho que se cumplen las ecuaciones $3H\dot{\chi} = U'(\chi)$ y $H^2 \propto U(\chi)$, las cuales surgen de una aproximación slow-roll asumida en el marco de Einstein

cual era de esperarse, pues los potenciales son equivalentes durante la etapa de inflación y las aproximaciones para el valor del campo h , al final de la inflación son las mismas.

Esta relación no depende del parámetro ξ y nos permite obtener que $\xi \approx 10^4$, con el fin de obtener inflación dirigida por bosón de Higgs del modelo estándar, como es presentado en ([132]).

Sin embargo una aproximación un poco más fina para el número de e-foldings está dada por:

$$N = \frac{h^2}{8M_p^2}(1 + 6\xi), \quad (3.33)$$

que está de acuerdo con la presentada por ([30]), pero para el caso en $\xi \gg 1$ y $h > \nu$, para este caso, aún $h_*^2 = 81.1547 \frac{M_p^2}{\xi}$.

Finalmente vemos que el valor del campo de final de inflación está lejos del valor del campo en el mínimo del potencial, puesto que $\xi \ll 10^{33}$, lo que es equivalente a decir que el mínimo del potencial en el marco de Einstein está muy lejos de la escala de Planck, $\xi \nu^2 \ll M_p^2$, es decir que la etapa de inflación termina antes de que el campo empiece a oscilar alrededor del mínimo de su potencial y empiece la etapa de recalentamiento.

3.4. Características de la inflación dirigida por el bosón de Higgs: Campos en función del tiempo

3.4.1. Marco de Einstein

Aplicando las ecuaciones de de Euler-Lagrange y las condiciones de slow roll al lagrangiano asociado a 3.8 ³, se pueden obtener las siguientes expresiones:

$$3H\dot{\chi} + U'(\chi) = 0, \quad H^2 = \frac{8\pi}{3M_p^2}U(\chi), \quad (3.34)$$

³Notamos que el lagrangiano $L = \sqrt{-\hat{g}} \left(\frac{-M_p^2}{2} \hat{R} + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - U(\chi) \right)$, tiene la misma forma del lagrangiano de un campo escalar salvo el término $\sqrt{-\hat{g}} \frac{-M_p^2}{2} \hat{R}$. Pero este último no depende del campo, por lo que las ecuaciones de Euler-Lagrange son las mismas de un campo escalar, es decir: $3 \frac{\hat{R}}{H} \dot{\chi} + U'(\chi) = 0$, donde hemos aplicado ya las condiciones de slow roll.

a partir de estas dos ecuaciones, y tomando en cuenta de 3.11 que $U(\chi) \approx \frac{\lambda M_p^4}{4\xi} (1 - e^{-2\chi/\sqrt{6}M_p})^2$, podemos obtener una ecuación de la siguiente forma:

$$\dot{\chi} = -M_p^2 \sqrt{\frac{3\lambda}{12\pi\xi}} e^{\pm 2\chi/\sqrt{6}M_p}. \quad (3.35)$$

Resolviendo la ecuación para χ en función de t , obtenemos:

$$\chi = M_p \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left(C \pm M_p \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi\xi}} t \right), \quad (3.36)$$

donde C depende de las condiciones iniciales para el campo χ . Con signo $-$ para campos $\chi > 0$ y signo $+$ para campos negativos.

Puesto que trabajamos con campos $h \gg 0$ y por tanto $\chi \gg 0$, tomaremos el signo negativo, a menos que otra cosa se indique.

Observamos que la solución para el campo tiene una dependencia de la forma de inflación por ley de potencias [136, 137]. Lo anterior es coherente con el hecho que en el marco de Einstein el potencial tiene una forma exponencial (aunque no es de la forma $U(\chi) = U_0 \exp(K\chi)$), como se vio en la sección anterior.

Suponiendo que la inflación inicia cuando h es del orden de la masa de Planck, tenemos de la ecuación (3.19):

$$X_0 = \frac{\chi_0}{M_p} \approx \sqrt{\frac{3}{2}} \ln(\xi + 1). \quad (3.37)$$

Tomando en cuenta que $X_{end} = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left(\sqrt{\frac{4}{3}} + 1 \right)$, podemos obtener, las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left(\sqrt{\frac{4}{3}} + 1 \right) &= \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left(C - M_p \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi\xi}} t_{end} \right), & \sqrt{\frac{3}{2}} \ln(\xi + 1) &= \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left(C - M_p \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi\xi}} t_0 \right), \\ t_{end} &= \frac{C - \sqrt{\frac{4}{3}} - 1}{M_p} \sqrt{\frac{6\pi\xi}{\lambda}}, & t_0 &= \frac{C - \xi - 1}{M_p} \sqrt{\frac{6\pi\xi}{\lambda}}. \end{aligned}$$

Por tanto, el tiempo que duraría la etapa de inflación en el marco de Einstein estará dado por

$$t_{end} - t_0 = \frac{\xi}{M_p} \sqrt{\frac{6\pi\xi}{\lambda}}, \quad (3.38)$$

con lo que podemos escribir el potencial en términos del tiempo como:

$$U(t) = \frac{\lambda M_p^4}{4\xi^2} \left[1 - \left(C - M_p \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi\xi}} t \right)^{-1} \right]^2. \quad (3.39)$$

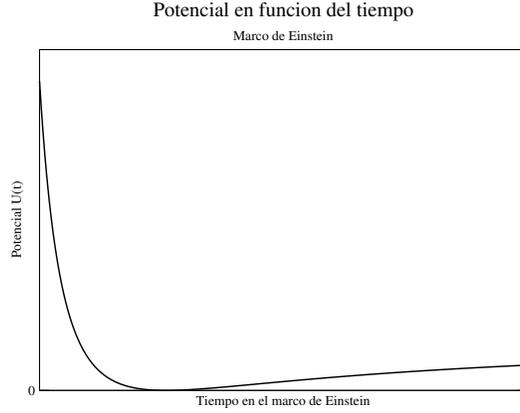


Figura 3.6: Potencial en función del tiempo en el marco de Einstein

La gráfica (3.6), muestra la forma del potencial en función del tiempo. El tiempo en que se presenta el mínimo del potencial, es aproximadamente $t_{min} \approx \frac{1}{M_p} \sqrt{\frac{6\pi\xi}{\lambda}} (C - 1)$, donde hemos asumido, que $\xi\nu^2 \ll M_p^2$. Notamos que la etapa de inflación en el marco de Einstein, terminaría un tiempo $\frac{2}{M_p} \sqrt{\frac{2\pi\xi}{\lambda}}$ antes de que el campo alcance el mínimo de su potencial.

Para el factor de escala R , aplicando la segunda ecuación de (3.34), se obtiene:

$$\frac{dR}{R} = M_p \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{\lambda}{\xi^2} \left[1 - \left(C - M_p \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi\xi}} t \right)^{-1} \right] dt, \quad (3.40)$$

y por lo tanto, tenemos que la dependencia del factor de escala en función del tiempo, será:

$$\ln(R) = Bt - \frac{B}{A} \ln(C - At). \quad (3.41)$$

En la última ecuación C , es una constante que depende de las condiciones iniciales, y que surge de la integral para hallar el campo χ en función del

tiempo.

En la ecuación (3.41), $A = M_p \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi\xi}}$ y $B = M_p \sqrt{\frac{2\pi}{3} \frac{\lambda}{\xi^2}}$, factores que dependen de la razón λ/ξ .

Por tanto el factor de escala R , en función del tiempo, es de la forma:

$$R(t) = (C - At)^{-\frac{B}{A}} e^{Bt}, \quad (3.42)$$

expresión a partir de la cual vemos que, si $\frac{B}{A} > 1$, entonces el crecimiento del factor de escala del universo se acelera aún más al final de la etapa de inflación (en el marco de Einstein). Por tanto, si ξ es del orden de 10, se tendría una gran cantidad de inflación, puesto que $\frac{B}{A} = 2\pi/\sqrt{10}$.

Más aún, mientras $10 \lesssim \xi \lesssim 4\pi^2$, la etapa de inflación es extremadamente rápida al final.

No obstante, si $\xi > 4\pi^2$, aún hay inflación, puesto que a diferencia de la inflación por ley de potencias, en este caso el potencial tiene un término adicional que agrega un aporte exponencial en el comportamiento del factor de escala. Pero el crecimiento del universo se ve seriamente atenuado por el término racional $(C - At)^{-\frac{B}{A}}$ y finalmente dominado por el término exponencial. En cualquier caso, se presenta inflación en el marco de Einstein para ($10 \lesssim \xi$), lo que está de acuerdo con lo presentado en ([138]).

De esta forma, para valores de ξ muy grandes, se tendría un proceso de inflación más *lento*, menos explosivo al final.

Finalmente se encuentra el parámetro de Hubble en función del tiempo en el marco de Einstein:

$$\dot{R}(t) = B e^{Bt} (C - At)^{-\frac{B}{A}} \left[\frac{1}{C - At} + 1 \right] = BR(t) \left[\frac{1}{C - At} + 1 \right], \quad (3.43)$$

por tanto el parámetro de Hubble en el marco de Einstein es:

$$H \approx (C - At)^{-1} + \ln(C_1), \quad (3.44)$$

donde C_1 es una constante que proviene de la integración de $R(t)$, (que está relacionada con la constante C de la ecuación (3.43)).

Notamos que es precisamente el término independiente el que diferencia el comportamiento de H en este caso ($\xi > 0$), del presentado en [138], para un acoplamiento minimal del campo a la gravedad.

3.4.2. Marco de Jordan

Para regresar al marco de Jordan, recordamos que el tiempo en los dos marcos está relacionado por la transformación[139]

$$dt_E = \Omega dt_J, \quad (3.45)$$

donde t_E es el tiempo en el marco de Einstein, t_J es el tiempo en el marco de Jordan y Ω está dado por la ecuación (3.6).

De las ecuaciones (3.19) y (3.36), podemos obtener el campo h en función del tiempo en el marco de Einstein:

$$\left(\frac{h}{M_p}\right)^2 = Y^2(t_E) = \frac{1}{\xi} \left(C - M_p \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi\xi}} t_E \right). \quad (3.46)$$

Por tanto obtenemos que la relación entre los tiempos en los dos marcos es:

$$t_J = \int \frac{dt_E}{\sqrt{C - M_p \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi\xi}} t_E}}, \quad (3.47)$$

y a partir de la relación anterior podemos obtener el campo h en el marco de Jordan:

$$\frac{h}{M_p} = Y = \mp \frac{1}{2\xi} \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} (t_J - K), \quad (3.48)$$

donde K depende de las condiciones iniciales y el signo \mp de la raíz que se escoja. Notamos que esta expresión es de la forma:

$$Y = Y_0 \mp \alpha(t - t_0), \quad (3.49)$$

que es el comportamiento del campo en el marco de Jordan presentado en [140] para inflación caótica, con el signo menos, mientras que con el signo más se obtiene una forma de nueva inflación $Y_0 \ll \nu/M_p$ [141], con α una constante que depende de los parámetros λ y ξ .

Además, la dependencia de C desaparece, lo cual es coherente puesto que las transformaciones en la coordenadas no pueden depender de la condiciones iniciales sobre los campos, a pesar que éstos estén acoplados a la gravedad y por tanto a la geometría del espacio.

El comportamiento del factor de escala y del campo en el marco de Jordan

se puede obtener también, notando que el tensor de Ricci para un espacio plano ($k = 0$), se puede escribir como [142]:

$$\mathbf{R} = -6 \frac{R\ddot{R} + \dot{R}^2}{R^2}, \quad (3.50)$$

donde \mathbf{R} es el escalar de Ricci, y ha sido escrito en negrilla para diferenciarlo del factor de escala R .

Por tanto la ecuación para el campo h en el marco de Jordan es:

$$6\xi\dot{H}h + 12\xi H^2 h - 3H\dot{h} - U'(h) = 0, \quad (3.51)$$

donde los puntos indican derivada respecto al tiempo y las comillas derivada respecto al campo.

Las ecuaciones de Einstein en este caso son de la forma [140]:

$$\begin{aligned} 3H^2(1 + \xi h^2) &= \frac{1}{2}\dot{h}^2 + U(h) - 6\xi Hh\dot{h}, \\ \dot{H}(1 + \xi h^2) &= -\frac{1}{2}\dot{h}^2 - \xi(\dot{h}^2 + h\ddot{h} - Hh\dot{h}), \end{aligned}$$

a partir de las cuales se obtiene una solución de la forma (3.49), como es presentado en [142].

Se observa que en los dos marcos se presenta inflación, aunque en un caso es una inflación caótica (Marco de Jordan), mientras en el otro es inflación con una ley de potencias (Marco de Einstein).

Capítulo 4

Potencial efectivo y corrección de la masa del Higgs a un loop

4.1. Potencial efectivo

Desde un punto de vista cualitativo, podemos pensar en dos tipos de correcciones radiativas a la teoría inflacionaria.

La primera, está relacionada con la contribución de la gravedad cuántica, en la que podemos considerar que las correcciones son proporcionales a la densidad de energía del campo χ y no al valor del campo mismo. El orden de magnitud de estas perturbaciones es $U(\chi)/M_P^4 \sim \lambda/\xi^2$, con lo que tendrán valores pequeños de acuerdo a los valores de ξ requeridos por las observaciones [143].

El segundo tipo de corrección que puede considerarse es debido al acoplamiento de los campos del Modelo Estándar al campo de Higgs. En la aproximación a un loop, estas contribuciones introducen correcciones al potencial $U(\chi)$ con la forma general [28]

$$\Delta U \sim \frac{m^4(\chi)}{64\pi^2} \ln \left(\frac{m^2(\chi)}{\mu^2} \right). \quad (4.1)$$

Para obtener estas correcciones, partimos de la transformación al marco de Einstein de la densidad Lagrangiana electrodébil dada por [144]

$$\mathcal{L}_{\text{quiral}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \frac{1}{g^2} H_1 - \frac{1}{g'^2} H_2 - L_{W/Z} + L_Y - U(\chi), \quad (4.2)$$

donde H_1 y H_2 corresponden a los términos cinéticos de los campos W^\pm y Z^0 , dados por

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2} \text{Tr}[W_{\mu\nu}^2], \\ H_2 &= \frac{1}{4} B_{\mu\nu}^2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

mientras que $L_{W/Z}$ es el lagrangiano que describe la interacción entre los bosones W^\pm y Z^0 con el bosón de Higgs [145]:

$$L_{W/Z} = \frac{h^2}{4\Omega^2(h)} \text{Tr}[V_\mu^2], \quad (4.4)$$

donde el campo gauge V_μ y las magnitudes de los otros campos, están dados por [29]

$$\begin{aligned} V_\mu &= (\partial_\mu \mathcal{U}) \mathcal{U}^\dagger + iW_\mu - i\mathcal{U} B_\mu^Y \mathcal{U}^\dagger, \\ W_\mu &= W_\mu^a T^a, \\ W_{\mu\nu} &= \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + i[W_\mu, W_\nu], \\ B_\mu^Y &= B_\mu T^3, \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \end{aligned} \quad (4.5)$$

En estas expresiones, los bosones de Nambu-Goldstone π^a (que aparecen debido al rompimiento espontáneo de la simetría [146]) están parametrizados en la forma no-lineal

$$\mathcal{U} = \exp(2i\pi^a T^a), \quad \text{donde} \quad T^a = \frac{\tau^a}{2}. \quad (4.6)$$

Por otro lado, en el Lagrangiano de Yukawa se incluye solamente la contribución del quark top, y se definen los campos de quarks como [147]

$$\bar{Q}_L = (\bar{t}_L, \bar{b}_L), \quad \tilde{\mathcal{U}} = -\tau_2 \mathcal{U}^* \tau_2, \quad \bar{Q}_R = (\bar{t}_R, 0), \quad (4.7)$$

donde τ_a son las matrices de Pauli.

Para realizar las correcciones radiativas a un lazo en la teoría de perturbaciones, partiremos del trabajo clásico de Coleman y Weinberg [148], en el que se presenta un cálculo detallado del potencial efectivo a un loop para la

teoría de un campo escalar no masivo, sujeto a una auto-interacción cuártica, descrito por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \frac{\lambda}{4!}h^4 + \frac{1}{2}A(\partial_\mu h)^2 - \frac{1}{2}Bh^2 - \frac{1}{4!}Ch^4. \quad (4.8)$$

En el lagrangiano (4.8) se han incluido los contratérminos de renormalización correspondientes a la función de onda (A), la masa (B) y la constante de acople (C)¹.

A nivel árbol, el potencial efectivo corresponde a la autointeracción $\frac{\lambda}{4!}h^4$, mientras que en la teoría de perturbaciones, la primera corrección al potencial efectivo se obtiene a partir de la contribución de los diagramas de Feynman con un lazo que se presentan en la figura 4.1.

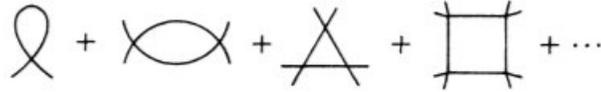


Figura 4.1: Aproximación a nivel árbol para el potencial efectivo del lagrangiano (4.8).

A partir de estos diagramas, el potencial efectivo $V(h)$, con la corrección a un loop, se escribe como

$$V(h) = \frac{\lambda}{4!}h^4 - \frac{1}{2}Bh^2 - \frac{1}{4!}Ch^4 + i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{\frac{1}{2}\lambda h^2}{k^2 + i\epsilon} \right)^n. \quad (4.9)$$

En la ecuación (4.9), el factor i frente a la integral se presenta debido a la definición de la función generatriz de las funciones de Green [100], el factor $1/2$ en el numerador de la sumatoria corresponde a un factor estadístico de Bose (el intercambio de dos líneas externas no produce un nuevo diagrama), mientras que el coeficiente $1/2n$ es un factor combinatorio que da cuenta de la invarianza frente a rotaciones o reflexiones de los diagramas 4.1.

¹Aún cuando se obtendrá la renormalización de la teoría de un campo escalar no masivo, se incluye un contratérmino de renormalización de la masa debido a que la teoría no posee una simetría que garantice la nulidad de la masa desnuda en el límite de masa renormalizada nula [148].

Al realizar una rotación de Wick ($k_0 \rightarrow i\tilde{k}_0$) [113] en la expresión (4.9), podemos escribir la norma del cuadrimomentum como

$$k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 = -\tilde{k}_0^2 - \mathbf{k}^2 = -(\tilde{k}_0^2 + \mathbf{k}^2) = -k_E^2,$$

donde k_E^2 es el cuadrado del cuadrimomentum en el espacio euclidiano cuatro-dimensional. Usando este resultado, podemos escribir el potencial como

$$V(h) = \frac{\lambda}{4!}h^4 - \frac{1}{2}Bh^2 - \frac{1}{4!}Ch^4 + \frac{i}{2} \int i \frac{d\tilde{k}_0 d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n \left(\frac{\frac{1}{2}\lambda h^2}{k_E^2} \right)^n, \quad (4.10)$$

con lo que, para resolver la expresión (4.10) hacemos uso de la expansión en serie de potencias para $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad (4.11)$$

con lo que obtenemos

$$V(h) = \frac{\lambda}{4!}h^4 - \frac{1}{2}Bh^2 - \frac{1}{4!}Ch^4 + \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \ln \left(1 + \frac{\lambda h^2}{2k_E^2} \right). \quad (4.12)$$

Para resolver la integral (4.12) utilizamos el elemento de volumen en el espacio d -dimensional $dV_d = S_d R^{d-1} dR$, donde S_d es el elemento de ángulo sólido d -dimensional

$$S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{(d/2 - 1)!},$$

con lo que, para el espacio cuatro-dimensional, el elemento de volumen queda

$$dV_4 = 2\pi^2 R^3 dR = \pi^2 R^2 dR^2, \quad (4.13)$$

con lo que la integral (4.12) presenta una divergencia ultravioleta, $k_E \rightarrow \infty$, que parametrizamos por el parámetro de corte Λ^2 , y la expresión final para la integral nos queda

$$V(h) = \frac{\lambda}{4!}h^4 - \frac{1}{2}Bh^2 - \frac{1}{4!}Ch^4 + \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} dk^2 k^2 \ln \left(1 + \frac{\lambda h^2}{2k^2} \right). \quad (4.14)$$

La integral que aparece en la ecuación (4.14) se resuelve por partes, y el resultado final es:

$$V(h) = \frac{\lambda}{4!}h^4 - \frac{1}{2}Bh^2 - \frac{1}{4!}Ch^4 + \frac{\lambda\Lambda^2}{64\pi^2}h^2 + \frac{\lambda^2 h^4}{256\pi^2} \left(\ln \frac{\lambda h^2}{2\Lambda^2} - \frac{1}{2} \right). \quad (4.15)$$

A partir de esta expresión, se infiere que para una teoría de campos general, el valor esperado en el vacío $\langle h \rangle$ afectará las masas de partículas con diferentes espines, incluyendo escalares, vectores, espinores, etc, con lo que la forma general de las correcciones de Coleman-Weinberg a los potenciales efectivos de tales teorías estarán dadas por la expresión [148]

$$V = \sum_{\text{partículas masivas}} (2S + 1)(-1)^S \frac{M^4(\langle h \rangle)}{64\pi^2} \ln \frac{M^2(\langle h \rangle)}{\mu^2}. \quad (4.16)$$

Usando la expresión general (4.16) para calcular las correcciones cuánticas al potencial efectivo, primero se reescribe la teoría en el marco de Einstein, usando las ecuaciones de transformación entre los dos marcos, obtenidas en el capítulo 2.

De esta forma, la contribución a un loop al potencial efectivo está dada por la expresión [32]

$$U_1 = \frac{6m_W^4}{64\pi^2} \log \frac{m_W^2}{\mu^2} + \frac{3m_Z^4}{64\pi^2} \log \frac{m_Z^2}{\mu^2} - \frac{3m_t^4}{16\pi^2} \log \frac{m_t^2}{\mu^2}. \quad (4.17)$$

En la ecuación anterior se ha tomado en cuenta sólo la contribución del quark top, porque las masas de los otros fermiones se pueden despreciar con respecto a la masa del top, más tomando en cuenta que los términos van como la cuarta potencia de la masa.

Posteriormente, usamos las expresiones para las masas de las partículas (W, Z, el bosón de Higgs y el quark top) en términos del campo de Higgs h , donde la única diferencia con el caso plano [144] es la presencia del factor Ω característico de la transformación conforme entre los marcos de Jordan y Einstein:

$$\begin{aligned} m_W^2 &= \frac{g^2 h_0^2}{4\Omega^2}, \\ m_Z^2 &= \frac{(g^2 + g'^2) h_0^2}{4\Omega^2}, \\ m_H^2 &= \frac{d^2 U}{d\chi^2}, \\ m_t^2 &= \frac{y_t^2 h_0^2}{2\Omega^2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

En las ecuaciones (4.18), g y g' son las constantes de acople SU(2) y U(1) del modelo estándar, mientras que y_t es la constante de Yukawa del quark top y

h es el campo de Higgs, en términos del campo χ

Usando (4.18), podemos obtener:

$$U_1 = \sum_{i=1}^3 A_i h^4 \left(1 + \frac{\xi h^2}{M_p^2}\right)^{-2} \ln \left[\alpha_i \frac{h^2}{\mu^2} \left(1 + \frac{\xi h^2}{M_p^2}\right)^{-1} \right], \quad (4.19)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{6g^4}{1024\pi^2}, & \alpha_1 &= \frac{g^2}{4}, \\ A_2 &= \frac{3(g^2 + g'^2)^2}{1024\pi^2}, & \alpha_2 &= \frac{g^2 + g'^2}{4}, \\ A_3 &= \frac{-3y_t^4}{64\pi^2}, & \alpha_3 &= \frac{y_t^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

De (4.19), podemos notar que si $h^2 \gg M_p^2/\xi$, es decir se cumple la condición de inflación, el término de corrección tiende a ser:

$$U_1 = \sum_{i=1}^3 A_i \frac{M_p^2}{\xi} \ln \left(\frac{\alpha_i}{\mu^2} \right). \quad (4.21)$$

Tenemos que la corrección tiende a ser una constante, por tanto no afecta la planitud del potencial, que es necesaria para la inflación.

Ahora, estamos interesados en el nuevo mínimo generado por la corrección del potencial, pero tal mínimo debe presentarse cuando $h^2 \ll M_p^2/\xi$, de lo contrario el campo oscilaría alrededor de este mínimo durante la inflación, alterando el comportamiento del campo en dicha etapa, sin contar que un mínimo en la parte plana del potencial no puede cumplir con la condición de ser un mínimo absoluto.

Para el caso en que $h^2 \ll M_p^2/\xi$, tenemos que (4.19), toma la forma [32]:

$$U_1 = \sum_{i=1}^3 A_i h^4 \ln \left(\frac{h^2}{\mu} \right). \quad (4.22)$$

Para este caso tenemos que los potenciales son equivalentes salvo una constante y puesto que como se vio en el capítulo 2, la transformación coformal mapea los puntos críticos en puntos críticos, tenemos que el análisis algebraico de los potenciales será análogo en los dos marcos.

Sin embargo debemos anotar que formalmente se está trabajando en el marco

de Einstein, puesto que el campo escalar no está acoplado a la gravedad, de lo contrario (4.2), no sería válido.

Por tanto la forma del potencial corregido, salvo constantes, es:

$$U = \frac{\lambda}{4}h^4 - \frac{1}{2}\nu^2h^2 + Ah^4 \ln\left(\frac{h^2}{\mu^2}\right), \quad (4.23)$$

donde:

$$A = \sum_{i=1}^3 A_i = \frac{6g^4}{1024\pi^2} + \frac{3(g^2 + g'^2)^2}{1024\pi^2} - \frac{3y_t^4}{64\pi^2}. \quad (4.24)$$

Sea h_0 el valor de campo donde el potencial corregido tiene el mínimo, tal que h_0 diferente de cero. Entonces:

$$\frac{dU}{dh}\Big|_{h_0} = 0, \quad \frac{d^2U}{dh^2}\Big|_{h_0} = M_H^2 > 0, \quad (4.25)$$

con lo que, siguiendo a [149] definimos:

$$S = \frac{h}{h_0}, \quad \Xi = \frac{4Ah_0}{m_H^2}. \quad (4.26)$$

Tenemos que en términos de S y Ξ , el potencial se puede escribir como:

$$U(S) = \frac{1}{8}m_H^2h_0^2S^2 \left[-\frac{4\mu^2}{m_H^2} + \frac{2\lambda h_0^2S^2}{m_H^2} + 2\Xi S^2 \ln\left(\frac{h_0^2}{\mu^2}\right) + 2\Xi S^2 \ln S^2 \right], \quad (4.27)$$

mientras las derivadas evaluadas en h_0 cumplen:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dh}\Big|_{h_0} &= -\nu^2 + \lambda h_0^2 + 4Ah_0^2 \ln\left(\frac{h_0^2}{\mu^2}\right) + 2Ah_0 = 0, \\ \frac{d^2U}{dh^2}\Big|_{h_0} &= -\nu^2 + 3\lambda h_0^2 + 12Ah_0^2 \ln\left(\frac{h_0^2}{\mu^2}\right) + 14Ah_0^2 = m_H^2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Escribiendo las derivadas en términos de S y Ξ , se pueden obtener las siguientes relaciones:

$$\Xi m_H^2 \ln\left(\frac{h_0^2}{\mu^2}\right) = \nu^2 - \lambda h_0^2 - \frac{1}{2}m_H^2 \Xi, \quad (4.29)$$

$$\Xi \ln\left(\frac{h_0^2}{\mu^2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{\nu^2}{3m_H^2} - \frac{\lambda h_0^2}{m_H^2} - \frac{7}{6}\Xi. \quad (4.30)$$

Usando estas expresiones en (4.27), podemos obtener:

$$U(h) = \frac{1}{8} m_H^2 h_0^2 \bar{V}(S), \quad (4.31)$$

donde $\bar{V}(S)$ es el potencial reducido, que es adimensional y está dado por:

$$\bar{V}(S) = S^2 [2\Xi S^2 \ln S^2 - 3\Xi S^2 + 4\Xi + S^2 - 2]. \quad (4.32)$$

La ecuación (4.32) es de la misma forma presentada por [149, 150].

La gráfica (4.2) muestra el potencial corregido para diferentes valores de Ξ . Notamos que tal cantidad es adimensional y es la que gobierna la forma del potencial $U(h)$. También notamos que $\bar{V}(S)$ es independiente del parámetro ξ , puesto que es función de la razón entre los campos, y ésta es la misma en los dos marcos.

Por otra parte vemos que si $\Xi < 0$ (m_t es muy grande) [117], el potencial tendría un corrimiento en el mínimo en $h_1 > h_0$. Con el fin de mantener la planitud necesaria para inflación, pero estamos suponiendo que la corrección no altera la forma básica del potencial. Por tanto Ξ debe ser mayor que cero o con valores negativos tal que su valor absoluto es muy cercano a cero. Además tenemos que el mínimo debe ser absoluto, con el fin de no alterar el proceso de recalentamiento, por tanto el mínimo debe ser menor que cero. De esta forma solo valores de Ξ muy cercanos a cero pueden satisfacer las condiciones [149].

4.2. Correcciones radiativas a la masa del bosón de Higgs

De la sección anterior vimos que sólo valores de Ξ tales que $|\Xi|$ es cercano a cero, permiten tener potenciales estables que cumplen las condiciones de inflación. Ahora establecemos cotas para la masa del Higgs a partir del potencial obtenido, y en función de la masa del quark top.

Partimos de la definición de Ξ dada anteriormente:

$$\Xi = \frac{4Ah_0}{m_H^2}, \quad (4.33)$$

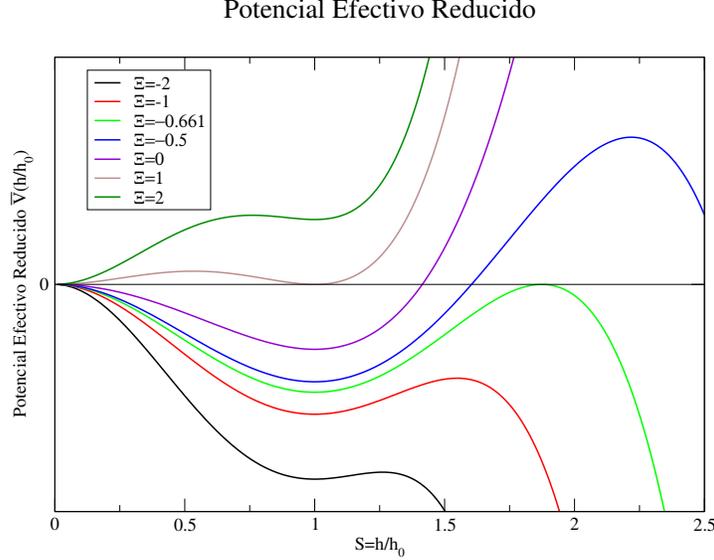


Figura 4.2: Potencial reducido $\bar{V}(S)$, en función de $S = h/h_0$

pero puesto que $A = \sum_{i=1}^3 A_i = \frac{6g^4}{1024\pi^2} + \frac{3(g^2+g'^2)^2}{1024\pi^2} - \frac{3y_t^4}{64\pi^2}$ y $h_0 = M_W^2/g^2$, tenemos que

$$\Xi \left(\frac{m_H}{M_W} 8\pi \right)^2 = \left(\frac{3}{2}g^4 + \frac{3}{4}(g^2 + g'^2)^2 - 12y_t^4 \right) \frac{1}{g^2}. \quad (4.34)$$

Teniendo en cuenta que $y_t^2 = \frac{g^2 m_t^2}{m_W^2}$, tenemos:

$$m_t^4 = \frac{4}{3} \frac{m_W^4}{g^4} \left(1.5g^4 + \frac{3}{4}(g^2 + g'^2)^2 - g^2 \Xi \left(\frac{m_H}{M_W} 8\pi \right)^2 \right). \quad (4.35)$$

Tomando $g^2 = 0.427257$, $g'^2 = 0.1256$ [29], $M_W = 80.425$ y $M_z = 91.186$ [144], tenemos:

$$m_t = 132.153 \left(0, 5 - 269\Xi \left(\frac{m_H}{M_W} \right)^2 \right)^{1/4}. \quad (4.36)$$

En la figura (4.3), se presenta la relación entre las masas del quark top m_t y del bosón de Higgs m_h dada por (4.36) para diferentes valores de Ξ , usando $M_W = 80.385 \text{ GeV}$ [151], (el valor promedio reportado para M_W es

$M_W = 80.385 \pm 0.015 \text{ GeV}$ [151]) Observamos que las curvas están en acuerdo con las presentadas por ([149, 152]).

En particular tomando en cuenta las condiciones de estabilidad para el potencial a partir de la gráfica (4.3), las condiciones de planitud del potencial para inflación, y tomando $\Xi \approx -0.005$ [149], podemos ver que la ecuación (4.36) se ajusta muy bien a la recta $m_t \approx 103.5 + 0.6m_H \text{ GeV}$, entonces tenemos que la masa del Higgs debe satisfacer la siguiente desigualdad:

$$m_H \gtrsim 1.7m_t - 172.5\text{GeV}, \quad (4.37)$$

donde m_H está en GeV , notamos que para los valores promedio reportados para las masas del quark top y del Higgs [151] ($m_t = 173.21 \pm 1.22 \text{ GeV}$, $m_H = 125.7 \pm .4 \text{ GeV}$) la cota dada por (4.37) está dentro del rango presentado por [29, 32]. La gráfica (4.4) muestra las cotas obtenidas por varios autores y la que se obtiene en este trabajo, se puede observar que la recta si acota las regiones permitidas para la masa del Higgs y el quark top [153].

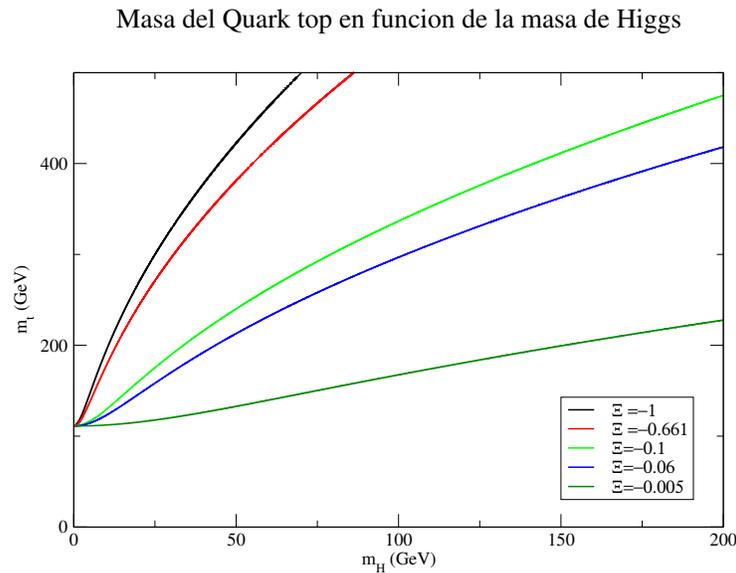


Figura 4.3: Masa del quark top m_t en función de la masa del Higgs m_H , dada por la ecuación (4.36), usando $M_W = 80.385\text{GeV}$ y para diferentes valores del parámetro $\Xi = -1, -0.661, -0.1, -0.06, -0.005$

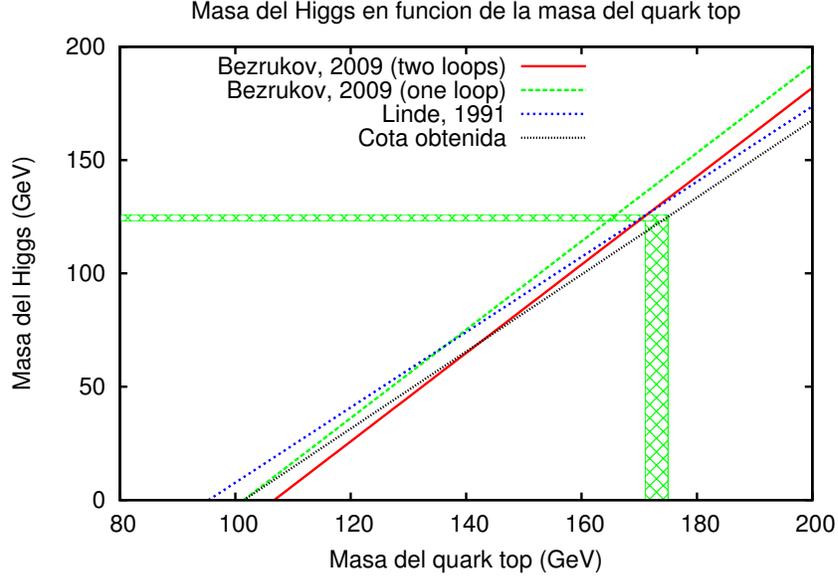


Figura 4.4: Cota de la Masa del Higgs m_H en función de la masa del quark top m_t , obtenidas por varios autores usando correcciones a uno o dos loops

4.3. Condiciones sobre el mínimo del potencial efectivo y la inflación

Como vimos en la sección (4.1), la corrección al potencial está dado por la ecuación (4.19). Notamos que el término de corrección tiende a ser constante cuando los valores son muy grandes (para la etapa de inflación), ecuación (4.21).

La gráfica (4.5), muestra la forma del término de corrección para el caso en que el potencial efectivo cumple las condiciones de estabilidad. Notamos que para valores de campo muy grandes el término tiende a cero por valores negativos y conserva la forma exponencialmente plana del potencial. Por tanto la corrección será significativa sólo para valores pequeños del campo. Los parámetros de slow roll con el potencial corregido a partir de (3.12,3.13) estarán dados por:

$$\varepsilon = \frac{M_p^2}{2} \left(\frac{U' + U_1'}{U + U_1} \right)^2, \quad \eta = M_p^2 \left(\frac{U'' + U_1''}{U + U_1} \right). \quad (4.38)$$

Puesto que para campos grandes la corrección es constante y mantiene la planitud del potencial, tendremos que en el rango de valores de interés para la inflación los potenciales corregidos y sin corregir son equivalentes. De este modo los parámetro de slow roll no presentan ningún cambio significativo y los valores para final de inflación se mantienen.

De acuerdo a lo anterior se debe analizar el comportamiento del potencial corregido para valores pequeños del campo, puesto que en ese rango es que se establecen las condiciones de estabilidad del potencial, que permiten mantener las condiciones de planitud necesarias para la inflación.

Teniendo en cuenta la gráfica (4.2) y de las ecuaciones (4.28) se pueden

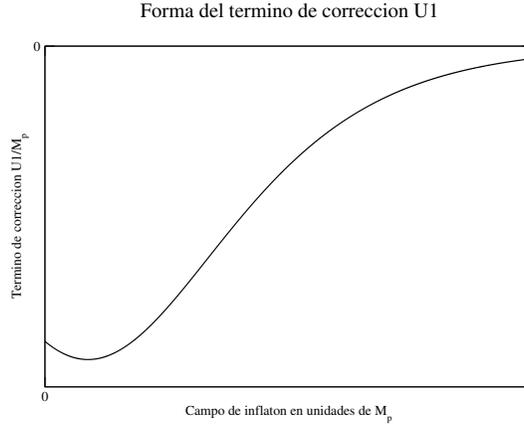


Figura 4.5: Término de corrección a primer orden para el potencial efectivo en función del campo de inflatón

establecer las siguientes condiciones sobre el mínimo del potencial, que permiten mantener las condiciones de estabilidad:

- $-\nu^2 + (\lambda + 2A)h_0^2 + 4A \ln\left(\frac{h_0^2}{\mu^2}\right) = 0,$

donde ν es el valor esperado en el vacío del campo de Higgs del MEE, λ es una constante de acoplamiento, μ es el punto de corte y A está dado por (4.24).

Esta condición que indica que h_0 es el mínimo en el potencial corregido y es obtenida a partir de la primera derivada dada en la ecuación (4.28), conduce a las siguientes relaciones entre los mínimos del potencial sin

corregir U y el potencial corregido $U + U_1$ (efectivo).

$$\begin{aligned} \left(\frac{\nu}{h_0}\right)^2 > \lambda + 2A &\Rightarrow \lambda > 2|A| \quad \text{si } A < 0, \\ \left(\frac{\nu}{h_0}\right)^2 < \lambda + 2A &\quad \text{si } A > 0, \end{aligned} \tag{4.39}$$

donde hemos usado el hecho que $h_0 < \mu$ para definir el signo del logaritmo en la primera derivada dada por (4.28). Esta relación indica que la relación entre los mínimos no puede tomar cualquier valor, sino que está restringida por los parámetro de acoplamiento de $SU(2)$, $U(1)$, la constante de Yukawa.

- $-\frac{1}{2}\nu^2 h_0^2 + \frac{1}{4}\lambda h_0^4 + A h_0^2 \ln\left(\frac{h_0^2}{\mu^2}\right) < 0;$

Esta condición es equivalente a decir que el mínimo del nuevo potencial es un mínimo absoluto, lo cual es requerido para conservar la forma del potencial. Notamos que de no ser así el campo una vez terminada la etapa de inflación oscilaría al rededor del nuevo mínimo, pero si en la primera oscilación el campo no transmite suficiente energía a las partículas recién creadas, se puede vencer la barrera de potencial y se saldría del régimen de oscilación afectando la etapa de recalentamiento. Esto implica que:

$$16y_t^4 \lesssim 3g^4 + 2g^2 g'^2 + g'^2. \tag{4.40}$$

- $-\nu^2 + 3\lambda h_0^2 + 12A h_0^2 \ln\left(\frac{h_0^2}{\mu^2}\right) + 14A h_0^2 = m_H^2;$ De esta condición obtenemos que:

$$A \approx \frac{m_H^2 - \nu^2}{h_0^2}, \tag{4.41}$$

donde A está dado por (4.28). Tomando en cuenta los resultados para la masa del Higgs [154, 153] concluimos que $A < 0$, lo cual también satisface las condiciones de estabilidad expuestas en la sección (4.1), siempre que el valor sea cercano a cero.

Capítulo 5

Recalentamiento en el modelo de inflación vía Higgs

Como vimos en el primer capítulo, la teoría de la inflación logra dar solución a muchos de los problemas de la cosmología estándar [8, 10, 12, 58, 110, 111].

Sin embargo otra etapa fundamental en el universo temprano, es la etapa de recalentamiento, que se presenta al final de la etapa de inflación [18], puesto que durante este proceso se crea la mayoría de la materia que constituye el universo durante la era posterior de radiación [46].

El recalentamiento se debe a la producción de partículas por la oscilación del campo escalar que conduce la inflación (inflatón), alrededor del mínimo de su potencial. Las partículas creadas, interactúan unas con otras, hasta alcanzar un equilibrio térmico [155].

La amplitud de las oscilaciones del campo decrece debido a la expansión del universo y a que el campo escalar transfiere su energía a las partículas creadas. Este proceso continúa hasta que casi toda la energía del campo escalar haya sido transferida [156].

Usualmente encontramos los términos *recalentamiento*, *precalentamiento* y *termalización* [155] (este último no es tratado aquí), asociados al proceso de creación de partículas, después de la etapa de inflación. A continuación se presenta una breve explicación comprensible sobre cada proceso y las diferencias que hay entre ellos.

5.1. Precaentamiento y recalentamiento

Durante la etapa de inflación la energía del campo que dirige la inflación está concentrada en la energía potencial asociada al campo, que es dominante sobre los términos cinéticos del potencial [20, 28, 117], como se vio en el capítulo anterior. Una vez terminada esta etapa, el campo empieza a oscilar alrededor del mínimo de su potencial y dependiendo de la cantidad de partículas producidas y de la tasa de producción, podemos dividir este proceso de oscilación del campo en dos etapas diferentes, que se presentan a continuación.

5.1.1. Precaentamiento

El término precaentamiento, fue usado primero por [46], para distinguir la etapa en la que el campo de inflatón pierde energía rápidamente y decae en bosones masivos debido a la resonancia paramétrica. Si la resonancia es muy ancha, el proceso es explosivo [46], durante este proceso el universo no se termaliza puesto que las partículas que son creadas decaen rápidamente [13].

La mayor tasa de producción de partículas durante este proceso explosivo puede ser relacionada con la temperatura efectiva de recalentamiento[40].

5.1.2. Recalentamiento

Después de la etapa de precaentamiento, viene una etapa que se considera un proceso suave [157], durante el cual el campo de inflatón decae clásicamente produciendo partículas. Este proceso puede ser descrito con la aproximación de Born [115, 155].

La temperatura de recalentamiento es del orden de 10^9 hasta 10^{13} GeV [46, 40, 158]. Sin embargo para algunos autores la única cota sobre la temperatura de recalentamiento viene desde la nucleosíntesis [38], y es del orden de 1MeV [37].

5.2. Evolución del campo después de la etapa de inflación sin tomar en cuenta interacciones con otros campos

Después de que la etapa de inflación termina, la evolución del campo escalar cambia significativamente, puesto que la energía potencial ya no es dominante sobre los términos cinéticos y el campo ya no evoluciona lentamente hacia el mínimo de su potencial, sino que oscila rápidamente alrededor de este valor mínimo.

Es esta sección revisamos la evolución del campo, cuando las condiciones de slow-roll ya no son cumplidas, sin tomar en cuenta el acoplamiento del campo escalar a otros campos. El comportamiento del campo ha sido trabajado por varios autores, usando potenciales de tipo ϕ^2 y ϕ^4 , en el marco de Jordan [155, 40]

Para nuestro caso trabajamos en el marco de Einstein y con un potencial tipo Higgs, con el mínimo desplazado de cero.

En el apéndice (B), se mostró que en el marco de Einstein el lagrangiano asociado al campo χ , es el correspondiente a un campo escalar y salvo el término asociado al potencial, está dado por:

$$S_E = \int d^4x \sqrt{\hat{g}} \left[-\frac{M_p^2 \hat{R}}{2} + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi \right], \quad (5.1)$$

tomando en cuenta el potencial asociado al campo tenemos que las ecuaciones de Einstein y la ecuación para el campo, en el marco de Einstein, son:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_p^2} \rho, \quad (5.2)$$

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} + U'(\chi) = 0, \quad (5.3)$$

donde $\rho = \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + U(\chi)$, es la densidad de energía, las primas denotan derivadas respecto al campo χ y los puntos derivadas respecto al tiempo en el marco de Einstein. Notamos que en las expresiones anteriores ninguna condición de slow roll ha sido tomada en cuenta, puesto que estamos ahora en un nuevo régimen que es cuando el campo oscila alrededor de su mínimo, para este caso asumimos que la pérdida de energía asociada a la inflación es muy pequeña comparada con la pérdida de energía por producción de partículas.

Derivando la densidad de energía, obtenemos:

$$\dot{\rho} = \dot{\chi}(\ddot{\chi} + U'(\chi)),$$

por tanto la ecuación para el campo puede ser escrita como:

$$3H\dot{\chi} + \frac{\dot{\rho}}{\dot{\chi}} = 0,$$

de esta forma obtenemos una relación entre las tasas de cambio de la densidad de energía ρ y el campo χ en función del campo:

$$\dot{\rho} = -3H\dot{\chi}^2. \quad (5.4)$$

Suponemos que $h^2 \ll M_p^2/\xi$, puesto que las condiciones de rodadura lenta ya no son satisfechas, en este caso los campos en los marcos de Jordan y Einstein son proporcionales como se vio en el capítulo 2: $\chi \approx \xi h$, por tanto el potencial toma la forma:

$$U(\chi) \approx \frac{\lambda}{4} \left(\left(\frac{\chi}{\xi} \right)^2 - \nu^2 \right)^2, \quad (5.5)$$

en este caso el potencial tiene un mínimo en $\chi = \xi\nu$, por tanto alrededor de este punto oscilará el campo y siguiendo a [40], podemos escribir la solución para $\chi(t)$ como:

$$\chi(t) = \xi\nu + \chi_0(t)\cos \int W(t)dt, \quad (5.6)$$

donde $W(t)$ es una función por determinar, que depende fuertemente de la forma del potencial y $\chi_0(t)$, esta definida tal que:

$$U(\chi_0) = \rho(t),$$

es decir $\chi_0(t)$ es una función envolvente, que también va depender de la forma del potencial.

A partir de la ecuación (5.6) y mediante el proceso mostrado en el apéndice (E), se obtiene para la función $W(t)$:

$$W(t) = \sqrt{\frac{2(\rho - U(\chi))}{\chi_0^2(t) - (\chi(t) - \xi\nu)^2}} \left[1 \pm \frac{6H}{4\sqrt{2\rho}} \sqrt{1 - \frac{U(\chi)}{\rho} \left(\frac{(\chi_0^2(t) - \xi^2\nu^2)(\chi(t) - \xi\nu)}{\chi_0^2(t)} \right)} \right], \quad (5.7)$$

donde el signo positivo es para $\dot{\chi} > 0$ y el signo negativo corresponde al caso $\dot{\chi} < 0$.

Notamos en esta expresión la correspondencia con el caso de potenciales cuadráticos o cuárticos en el campo. Sin embargo es importante anotar que en nuestro caso no podemos despreciar el término $\xi\nu$ comparada con $\chi(t)$, desde luego una situación diferente puede ser asumida para la función envolvente $\chi_0(t)$, dependiendo de la amplitud de oscilación que se este trabajando.

En este caso, como se mostró en el apéndice (E.1) se puede determinar que la función envolvente debe cumplir la condición:

$$\chi_0^2(t) \ll \frac{\sqrt{3}}{2\pi} M_p^2, \quad (5.8)$$

esta condición es equivalente a la condición inversa de inflación.

Con el objetivo de acotar los posible valores para el parámetro ξ , podemos asumir que $\chi_0(t) \gg \xi\nu$, es decir no estamos en un régimen de pequeñas oscilaciones porque el campo está lejos de su valor en el mínimo del potencial, es decir que el campo aún tiene energía para seguir oscilando. En este caso tenemos:

$$\nu^2 \xi^2 \ll \chi_0^2 \ll \frac{\sqrt{3}}{2\pi} M_p^2,$$

puesto que esta condición debe ser satisfecha para todo tiempo, podemos asumir que al inicio del proceso de recalentamiento es satisfecha, además podemos relacionar el valor inicial del campo en el racalentamiento con el valor final del campo al final de la inflación, con lo cual obtenemos la siguientes cotas para ξ :

$$10 \ll \xi \ll 10^{11}, \quad (5.9)$$

esta restricción está en el rango permitido para el caso de inflación por Higgs [28, 30], pero además observamos que $\xi \approx 10^4$ [132] encontrado en el capítulo 2, está dentro de este rango. Desde luego este rango puede ser más restringido cuando encontremos el comportamiento de la función envolvente y evaluemos esta para valores más lejanos del final de inflación, cuando la primera oscilación del campo ya haya sido superada.

Para este régimen, tenemos:

$$W(t) \approx \sqrt{\frac{2(\rho - U(\chi))}{\chi_0^2(t) - (\chi(t) - \xi\nu)^2}},$$

de esta última expresión podemos obtener la siguiente desigualdad que será muy útil:

$$\frac{\dot{\chi}_0}{\chi_0}(\chi(t) - \xi\nu) \ll W(t)\sqrt{\chi_0^2 - (\chi(t) - \xi\nu)^2}. \quad (5.10)$$

Por otra parte, de la ecuación (5.4), podemos obtener:

$$\frac{d\rho}{dt} = 6H(\rho - U(\chi)),$$

puesto que estamos interesados en conocer el comportamiento de la función envolvente, vamos a encontrar el promedio del cambio de la densidad de energía sobre un periodo de tiempo T igual al periodo de movimiento cuasiperiódico de $\chi(t)$:

$$\frac{\Delta\rho(T)}{T} = \frac{-6}{T} \int_0^T H(\rho - U(\chi))dt. \quad (5.11)$$

Ahora de la expresión para el campo χ , podemos ver:

$$\dot{\chi}(t) = \frac{\dot{\chi}_0}{\chi_0}\chi(t) - \sqrt{\chi_0^2 - (\chi(t) - \xi\nu)^2}W(t),$$

pero usando (5.10), podemos escribir el campo de manera aproximada como:

$$\dot{\chi}(t) \approx \sqrt{\chi_0^2 - (\chi(t) - \xi\nu)^2}W(t), \quad (5.12)$$

esta ecuación muestra que el campo $\chi(t)$ cambia significativamente dependiendo de $W(t)$, además durante una oscilación χ_0 , no cambia significativamente, pues es la función envolvente, de esta forma se puede ver de (5.3) que la densidad de energía tampoco cambiará de forma drástica durante una oscilación.

5.2.1. Consecuencias del corrimiento del mínimo del potencial sobre la evolución de campo

En esta sección tomamos una aproximación en (5.11), que nos permite analizar los efectos del corrimiento del mínimo del potencial sobre la ecuación de estado, la energía y la función envolvente, para el caso de la evolución del campo sin tomar en cuenta posibles interacciones de este con otros campos.

Los cálculos detallados de las expresiones obtenidas en esta parte, pueden ser vistos en el apéndice (E.2)

Tomando en cuenta (5.12), en la ecuación (5.11), podemos reemplazar todos los valores excepto χ por sus promedios, obteniendo:

$$\dot{\rho} = -4H\rho + \lambda\nu^4 H, \quad (5.13)$$

donde hemos asumido que usamos escalas de tiempo más grandes que el cuasiperiodo T . La ecuación anterior es semejante a la presentada por [40], para el caso $q = 4$ (radiación) para el cual se obtienen sólo el primer término en la ecuación (5.13), desde luego notamos que aún con una aproximación tan sencilla como la que hemos hecho, el mínimo desplazado del potencial, genera como esperábamos un término extra.

Podemos obtener la dependencia de la densidad de energía en función del factor de escala R , como:

$$\rho = \frac{1}{4}\lambda\nu^4 + CR^{-4}, \quad (5.14)$$

donde C es una constante que depende de las condiciones iniciales. De la ecuación anterior podemos notar que ahora la densidad de energía asociada al campo tiene un mínimo de energía diferente de cero, es decir, que sin tomar en cuenta ninguna interacción con otros campos, el campo de inflatón podría oscilar sin fin alrededor del mínimo de su potencial, produciendo nuevas partículas. Sin embargo, debemos tomar en cuenta que en este caso estamos tomando $\chi_0(t) \gg \xi\nu$, es decir no estamos analizando el caso de pequeñas oscilaciones.

De manera análoga a [40] podemos obtener una ecuación de estado para este caso como se muestra en el apéndice (E.2) y el comportamiento aproximado para la función envolvente $\chi_0(t)$:

$$P = \frac{\rho}{3} - \frac{\lambda\nu^4}{3}, \quad (5.15)$$

la ecuación anterior es muy interesante, puesto que tiene la forma de la ecuación de estado para la era dominada por radiación, sin embargo cuando $\rho = \lambda\nu^4$, la ecuación se transforma en la ecuación para la era dominada por la materia. Desde ese momento el comportamiento del factor de escala $R(t)$, respecto al tiempo cambia y no se puede asumir que el campo no interactúa, puesto que ahora lo dominante es la materia y por tanto la aproximación de

no interacción ya no es válida. Notamos además que este valor se da antes que ρ alcance su mínimo $\lambda\nu^4/4$. Por supuesto este sería un valor crítico para la aproximación.

Sin embargo del apéndice (E.2),(E.13), vemos que para la aproximación trabajada $\chi < \frac{\pi\xi}{4}(2\sqrt{\rho/\lambda} - \nu^4)$, tenemos la restricción $\rho > \frac{\lambda}{4}\nu^4$, es decir la densidad de energía no puede alcanzar su mínimo dentro de este rango, confirmando una vez más que estamos lejos del mínimo del potencial, pero con energías cinéticas comparables a la energía potencial, en el régimen de oscilación cuasiperiódica, pero lejos del caso de pequeñas oscilaciones. De las ecuaciones (5.14) y (5.15) se observa que debido al corrimiento en el mínimo el potencial hay un corrimiento consistente en la densidad de energía y en la presión.

Finalmente se establece el comportamiento de la función envolvente $\chi_0(t)$, en función del tiempo, como:

$$\dot{\chi}_0\chi_0^3 \approx -H\chi^4 + H\nu^2\xi^4, \quad (5.16)$$

notamos que en la última ecuación si $\nu = 0$ tenemos la ecuación para un potencial cuártico con mínimo en el origen, como esperábamos.

Resolviendo la ecuación para χ_0 , tenemos:

$$\chi_0(t) = (\xi^4\nu^4Ht - C)^{1/4}e^{-Ht}, \quad (5.17)$$

donde C es una constante de integración que depende de las condiciones iniciales. Podemos notar que esta expresión es semejante a la presentada por [40], para el caso de potencial cuártico, sin embargo notamos que en este caso hay un término lineal extra, debido básicamente al corrimiento del mínimo en el potencial.

La gráfica (5.2.1) muestra las funciones envolvente para los casos de potencial cuártico como la obtenida en [40] y el potencial tipo Higgs, se puede observar que el desplazamiento del mínimo genera un corrimiento en la energía, pero mantiene el mismo comportamiento decreciente de la función envolvente. Para esta gráfica se ha asumido que el valor inicial de la envolvente coincide con el valor del campo al final de la inflación y se ajusto el valor de la constante de integración C , de forma que ambos potenciales tengan el mismo valor crítico en $t = 0$, tomando el cero del tiempo justo en el instante en que inicia la etapa de recalentamiento. Desde luego se ha efectuado un corrimiento en el tiempo puesto que sabemos que la etapa de recalentamiento no inicia en el tiempo cero.

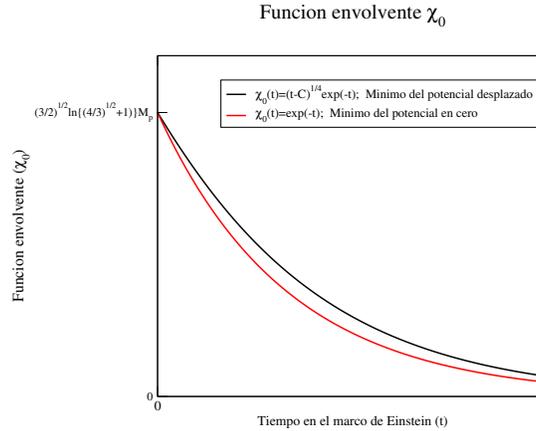


Figura 5.1: Comparación de la funciones envolvente para el caso de potencial cuártico con el mínimo de potencial en cero y con mínimo desplazado del origen

Tomando en cuenta que la función envolvente es siempre decreciente para esta etapa, podemos tomar la constante de integración como $C = \frac{\nu^4 \xi^4 H}{4}$, asumiendo que la función toma su máximo valor en $t = 0$. Para tomar en cuenta que el tiempo inicial de la etapa de recalentamiento es $t_0 \neq 0$, solo debemos ajustar la constante a las condiciones iniciales.

Notamos que con esta aproximación trabajamos un potencial de la forma $U(\chi) \propto (\chi - \nu)^4$, aún no hemos tomado en cuenta el término cuadrático, para tomarlo en cuenta debemos hacer una mejor aproximación.

5.2.2. Efectos del término cuadrático sobre la ecuación de estado

En la sección anterior vimos la consecuencias de mover el mínimo del potencial, pero ahora estamos interesados en hacer una mejor aproximación sobre la expresión (5.11), con el objetivo de observar los efectos de la mezcla de un potencial cuártico con uno cuadrático como en el potencial tipo Higgs, para esto hacemos una mejor aproximación sobre las integrales elípticas de primer y segundo tipo, tomando un rango de energías diferente.

En este caso tomamos en cuenta que el término cuadrático en el potencial genera un máximo en $\chi = 0$, tal que $U(0) = \frac{\lambda}{4} \nu^4$, por tanto tomamos energías menores que este máximo de potencial.

La gráfica (5.2), muestra la comparación entre los rangos de energía usados en la sección anterior ($\rho > \frac{\lambda}{4}\nu^4$), con el de esta sección ($\rho < \frac{\lambda}{4}\nu^4$). Observamos que tal restricción sobre la densidad de energía genera una restricción sobre la función envolvente, pero es mucho más débil, puesto que tomando en cuenta que $\rho(t) = U(\chi_0)$, tenemos que $\chi_0 < \sqrt{2}\xi\nu$, es decir aún estamos lejos del límite $\chi_0 = 0$, en el cual el campo deja de oscilar.

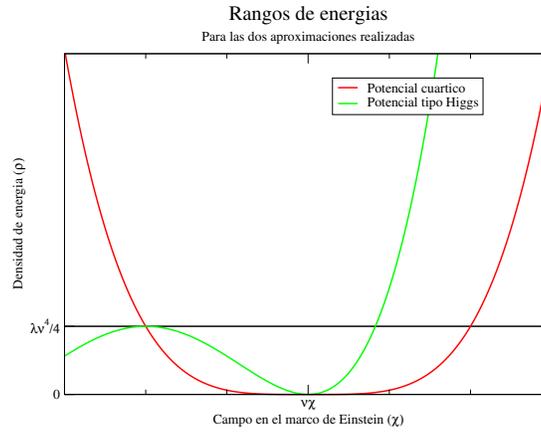


Figura 5.2: La gráfica muestra el potencial cuártico desplazado del origen, para el cual se trabaja con densidades de energía superiores a $U(0)$ y el potencial tipo Higgs, para el cual se trabaja en un rango de densidades de energía menores que $U(0)$

Procediendo de manera análoga a la presentada en la sección anterior para tomar cuenta el corrimiento en el mínimo del potencial, en este caso tomamos la siguiente aproximación para la integrales elípticas incompletas en (E.2), [159]:

$$\begin{aligned} E(\phi|m) &\approx (1 - m/4)\phi, \\ F(\phi|m) &\approx (1 + m/4)\phi, \end{aligned} \tag{5.18}$$

asumimos que $\rho < \frac{\lambda}{4}\nu^4$, bajo estas condiciones observamos que la integrales elípticas, tienen argumentos reales y sus gráficas se pueden ver en la figura 5.3 (Tomadas de [160]), en la cual se puede observar como $F(x|m)$ crece cuando m tiende a 1, mientras $E(x|m)$ decrece.

Para este caso obtenemos una ecuación para la densidad de energía en función

del factor de escala, de la forma:

$$\rho = C^2 \lambda R^{-4} - C \lambda \nu^2 R^{-2} + \frac{\lambda \nu^4}{4}, \quad (5.19)$$

donde C es una constante que dependen de las condiciones iniciales. De la ecuación (5.19), notamos que el primer término es equivalente a tener un potencial χ^4 , para la era de radiación, el tercer término surge del corrimiento del mínimo del potencial (como se vio en la sección anterior) y el segundo término es el aporte del término cuadrático en el potencial tipo Higgs.

Notamos que para este caso la energía tiende a $\frac{\lambda \nu^4}{4}$, cuando el factor de escala tiende a infinito, sin embargo la aproximación no se puede aplicar después que la densidad de energía sea cero, pues en este caso el estado de oscilación cuasiperiódica ha terminado ya que el campo ha cedido toda su energía las partículas recién creadas.

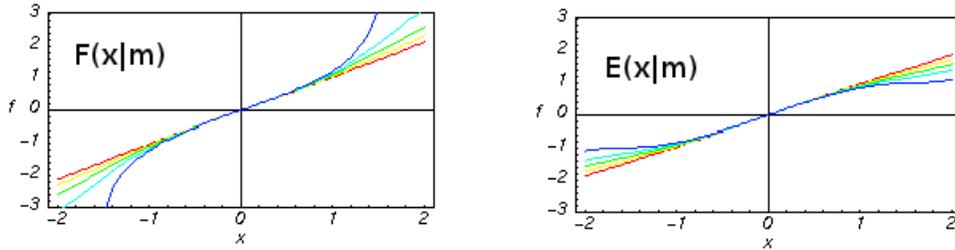


Figura 5.3: Funciones elípticas incompletas de primer y segundo tipo, para un argumento real, con m , aproximándose a 1, donde los diferentes colores representan diferentes valores para m . Tomadas de [160].

La gráfica (5.4) muestra el comportamiento de la densidad de energía en un régimen de oscilación cuasiperiódica, observamos que para este caso la densidad se comporta semejante a radiación, pero con una pendiente en el logaritmo mayor, lo que hace que la materia se vuelva dominante antes de lo que se volvería dominante en el caso de radiación.

En el valor en el que la materia se vuelve dominante la aproximación de oscilación cuasiperiódica ya no es sostenible, puesto que es imposible despreciar las interacciones del campo con otros campos o partículas con masa. Notamos también que la materia empieza a dominar antes de que el campo pierda toda su energía, es decir el campo sigue oscilando alrededor del mínimo de

su potencial produciendo partículas, pero ahora además de perder energía debido a la producción de partículas, se debe tomar en cuenta la presencia de materia.

Usando la semiecuación de estado (2.20), podemos obtener la relación entre la presión y la densidad de energía para este caso:

$$P = \frac{\rho}{3} - \frac{2\nu^2}{3} \sqrt{\lambda\rho} - \frac{4}{9} \lambda\nu^4. \quad (5.20)$$

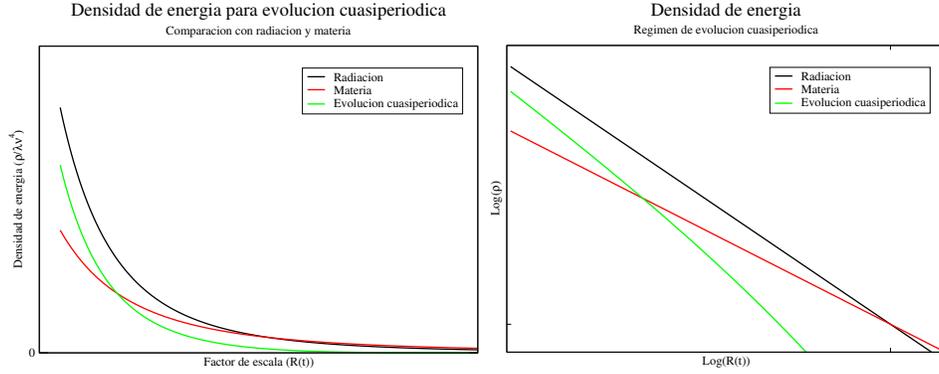


Figura 5.4: Comparación de la forma de la densidad de energía en función del factor de escala para el caso de etapas dominadas por radiación, materia y el caso de evolución cuasiperiódica del campo después de inflación

5.3. Producción de partículas

5.3.1. Aproximación de Born

Siguiendo el modelo presentado por [40], asumimos que el campo χ interactúa con otro campo escalar externo φ , de masa m_φ , mediante el siguiente lagrangiano de interacción:

$$L_{int} = (\sigma\chi + a\chi^2)\varphi^2, \quad (5.21)$$

donde a es una constante de acoplamiento adimensional, mientras σ es una constante de acoplamiento con dimensiones de masa. Escribiendo el campo χ evolucionando cuasiperiódicamente en armónicos [161]:

$$\chi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n \cos(n\omega t), \quad (5.22)$$

donde $\omega = 2\pi/T$, pero de (E.2), sabemos [40]:

$$T \approx \int \frac{d\chi}{\sqrt{2(\rho - U(\chi))}}, \quad (5.23)$$

donde asumimos que ρ no cambia significativamente durante un periodo y $U(\chi_0) = \rho$, con $U(\chi)$ dado por (5.5)

Por tanto podemos escribir el periodo como:

$$T \approx C \frac{2\chi_0}{\sqrt{2\rho}}, \quad (5.24)$$

donde C es una constante que depende de $\xi\nu$. Por tanto obtenemos la frecuencia de la evolución cuasiperiódica como:

$$\omega = \frac{C\sqrt{\lambda}}{2\xi^2}(\chi_0 - \xi^2\nu^2/\chi_0), \quad (5.25)$$

donde hemos usado el hecho que el coseno es una función par.

De la expresión anterior notamos que a medida que el campo χ pierde energía, la frecuencia cambia mas suavemente, por lo que el movimiento cerca del mínimo de potencial es cada vez más cercano a un movimiento periódico.

La tasa de producción de dos partículas φ (partículas producidas por unidad de volumen y por unidad de tiempo), esta dada a primer orden por[113]:

$$\Gamma_{2\varphi} \approx \frac{\sigma^2}{4\pi\omega} + \frac{(a\chi_0)^2}{4\pi\omega}, \quad (5.26)$$

Por tanto tenemos:

$$\Gamma_{2\varphi} \approx \frac{\sigma^2 + (a\chi_0)^2}{4\pi \frac{C\sqrt{\lambda}}{2\xi^2}(\chi_0 - \xi^2\nu^2/\chi_0)}. \quad (5.27)$$

5.3.2. Resonancia Paramétrica

Tomando en cuenta la interacción del campo χ , con partículas escalares φ de masa m_φ , tenemos que el lagrangiano asociado a las partículas masivas φ , puede ser escrito como [13]:

$$L = -\frac{1}{2}R^3 \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - R^3(\sigma\chi + a\chi^2)\varphi^2 - \frac{1}{2}R^3 m_\varphi^2 \varphi^2, \quad (5.28)$$

donde R es el factor de escala y el lagrangiano para φ , es el de un campo escalar más un término de interacción dado por (5.21).

Con el objetivo de despreciar correcciones de orden superior se asume que las masas y las constantes de acoplamiento son tan pequeñas que se cumple[40]:

$$m_\varphi^2 + a\overline{\chi^2} \ll \omega,$$

tomando $\varphi_k = \frac{Y_k}{R^{3/2}}$, obtenemos la siguiente ecuación para Y (como se muestra en el anexo (F.1)):

$$\ddot{Y}_k + (\omega^2 - g(\omega(t)))Y_k = 0, \quad (5.29)$$

donde,

$$\begin{aligned} \omega_k^2(t) &= \frac{k^2}{R^2} + m_\varphi^2 - \frac{3}{2}\dot{H} - \frac{9}{4}H^2 + 2a\overline{\chi^2}, \\ g(\omega(t)) &= 2\sigma\chi + 2a\chi^2 - 2a\overline{\chi^2} = \sigma\chi + 2a(\chi^2 - \overline{\chi^2}), \end{aligned}$$

pero de (5.22), vemos que [40]:

$$\chi^2 - \overline{\chi^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \cos(2n\omega t), \quad (5.30)$$

puesto que $\overline{\chi^2} \approx \chi_0^2/2$, si asumimos que [40]:

$$\sigma\chi + 2a(\chi^2 - \overline{\chi^2}) \ll \omega_k^2, \quad (5.31)$$

tenemos que en particular para los máximos del campo χ :

$$2\sigma\chi_0 + a\chi_0^2 \ll \omega_k^2. \quad (5.32)$$

Esta condición implica que:

$$2\sigma\chi_0 \ll \frac{k^2}{R^2} + m_\varphi^2 - \frac{3}{2}\dot{H} - \frac{9}{4}H^2 + a\overline{\chi_0^2}, \quad (5.33)$$

en la última ecuación notamos que para esta etapa el factor de escala debe cambiar suavemente, puesto que la densidad de energía del campo χ se disminuye predominantemente por la producción de partículas y no por la inflación del espacio.

De esta forma podemos aproximar $2\sigma\chi_0 - a\overline{\chi_0^2} \ll \frac{k^2}{R^2} + m_\varphi^2$, el segundo término puede ser asociado a la energía de la partícula masiva φ , mientras el

primer término es la diferencia de las energías asociadas a los dos procesos de decaimiento del campo χ .

Podemos decir que si (5.31) se satisface, $g(\omega(t))$, puede ser tomada como una pequeña perturbación en la ecuación (5.29), que puede ser reescrita como:

$$\ddot{Y} + (\omega_k^2 + \epsilon g(\omega t))Y = 0,$$

donde ϵ es un número pequeño, $g(\omega t)$ es una función periódica que puede ser desarrollada en series de Fourier[162]. La solución para Y sería de la forma [161, 163, 164]:

$$Y \approx e^{\mu_{\mp} t},$$

donde $\mu_{\mp} = \mp \frac{\epsilon}{s\omega} \sqrt{|g_n|^2 - \Delta}$, en la última expresión, g_n son los coeficientes de la serie de Fourier para $g(\omega t)$ y Δ está definida como $\epsilon\Delta = \omega_k - (\frac{n}{2}\omega)^2$, con $\omega_{res} = \frac{n}{2}\omega$.

Puesto que estamos interesados en obtener la tasa de producción de partículas φ en un modo k , con el objetivo de revisar el comportamiento de la densidad de energía, más que de resolver la ecuación para Y , nos enfocamos en obtener el número de ocupación media para las partículas φ generadas N_k , el cual está dado por [40, 164, 165]:

$$N_k \approx \sinh^2 \left(\int \mu_+ dt \right). \quad (5.34)$$

Además las siguientes consideraciones deben ser tomadas en cuenta, con el objetivo de obtener una ecuación para la evolución de la energía del campo χ en esta etapa:

- (a) $H \ll \omega$, puesto que en esta etapa el cambio en el factor de escala es muy suave y no es comparable con la frecuencia de oscilación del campo.
- (b) $2\sigma\chi_0 + a\chi_0^2 \ll \omega_k^2$.
- (c) $\frac{\dot{\chi}_0}{\chi_0} \ll W(t)$; que puede ser obtenida a partir de (5.10),

de (a)-(c), obtenemos que $\omega_k \propto R^{-1}$, relación que será de utilidad para establecer la relación entre la tasa de producción de paratículas Γ_{φ} y la frecuencia de resonancia ω_{res} y finalmente el comportamiento de la densidad de energía.

Tomando en cuenta que la densidad de energía del campo χ puede decrecer

por la producción de partículas y en menor proporción por la inflación del universo, tenemos[166]:

$$\dot{\rho}_\chi = -4H\rho - \Gamma_\varphi^{res} \rho, \quad (5.35)$$

de (5.5) y recordando $\rho(t) = U(\chi_0(t))$, tenemos:

$$\rho(t) = \frac{\lambda}{4\xi^4} (\chi_0^2 - \xi^2 \nu^2)^2, \quad (5.36)$$

por tanto tenemos:

$$\dot{\rho} = 4\rho \frac{\chi_0^2}{\chi_0^2 - \xi^2 \nu^2} \frac{\dot{\chi}_0}{\chi_0}, \quad (5.37)$$

usando (5.35), podemos obtener una ecuación para la función envolvente χ que toma en cuenta la energía perdida por la producción de partículas, dada por:

$$\dot{\chi}_0 = -(H + \frac{1}{4}\Gamma_\varphi^{res})\chi_0 + (H + \frac{1}{4}\Gamma_\varphi^{res})\frac{\xi^2 \nu^2}{\chi_0}. \quad (5.38)$$

En la ecuación anterior notamos que el primer términos es equivalente al presentado por [40], para el caso de potencial cuártico, mientras el segundo término es de la forma del caso de frontera para el potencial cuadrático, lo cual está de acuerdo con lo presentado en [46], para un potencial tipo Higgs. La gráfica (5.3.2) muestra la variación de la función envolvente respecto al tiempo a medida que la envolvente evoluciona, podemos observar que la envolvente decae rápidamente por lo que el campo está oscilando muy rápido lo que es característico de una etapa de precalentamiento, pero a partir de χ' el cambio de la envolvente es muy suave el campo oscila más despacio pero aún produce partículas, lo cual está de acuerdo con [13, 46, 40]

Por otra parte, sabemos que $\omega_k(t) \propto R^{-1}(t)$, pero tomando en cuenta que $H = \frac{\dot{R}}{R}$, podemos establecer la siguiente relación:

$$\frac{\delta\omega_k}{\delta t} \propto \frac{1}{R^2} \frac{\delta R}{\delta t} = H\omega_k,$$

entonces:

$$\frac{1}{\omega_k} \frac{\delta\omega_k}{\delta t} \propto H, \quad (5.39)$$

usando (5.25) tenemos:

$$\frac{\delta\omega_k}{\delta t} = \frac{C\sqrt{\lambda}}{2\xi^2} \frac{d\chi_0}{dt} + \frac{\xi^2 \nu^2}{\chi_0} \frac{\chi_0}{dt},$$

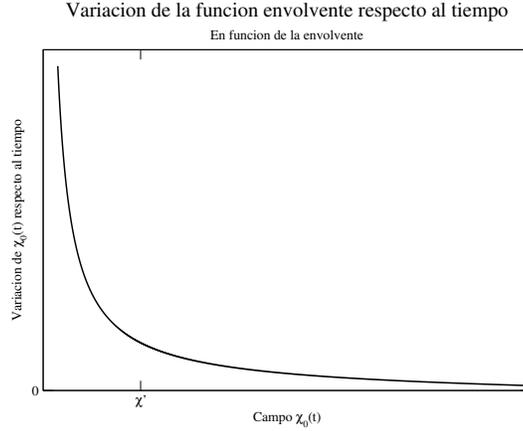


Figura 5.5: Variación de la función envolvente respecto al tiempo

por tanto tenemos: $\frac{d\omega}{dt} \propto \frac{d\chi_0}{dt}$. para la frecuencias de resonancias, usando las relaciones anteriores en (5.38), tenemos:

$$\frac{\delta\omega}{\delta t} \approx \left(\frac{1}{\omega_k} \frac{\delta\omega_k}{\delta t} + \Gamma_\varphi^{res} \right) \omega_{res}, \quad (5.40)$$

por lo que tenemos que:

$$\frac{\delta(\omega - \omega_k)}{\delta t} \approx \frac{1}{4} \Gamma_\varphi^{res} \omega_{res} \implies \left| \frac{d\Delta\omega_k}{dt} \right| \approx \frac{1}{4} \Gamma_\varphi^{res} \omega_{res}, \quad (5.41)$$

donde $\Delta\omega = \omega_k - \omega$.

Ahora recordamos que un elemento de volumen en el espacio de frecuencias está dado por [93]:

$$V = \frac{\omega_{res}^2}{2\pi^2} \left| \frac{d\Delta\omega_k}{dt} \right| \delta t, \quad (5.42)$$

donde hemos usado la ecuación (5.41) para reescribir $d\omega$ en la integral en el espacio de fase. Tomando N_k como el número de partículas por unidad de volumen en el estado k , tenemos que el cambio en la densidad de energía debido a la producción de partículas φ , está dado por:

$$\dot{\rho} = \sum_{Todas\ las\ bandas} \frac{\omega_{res}^3 N_k}{2\pi^2} \left| \frac{d\Delta\omega_k}{dt} \right|, \quad (5.43)$$

pero [166]:

$$\dot{\rho} = \Gamma_\varphi \rho,$$

se obtiene:

$$\Gamma_{\varphi}^{res} = \sum_{Todas\ las\ bandas} \frac{\omega_{res}^3 N_k}{2\pi^2 \rho} \left| \frac{d\Delta\omega_k}{dt} \right|. \quad (5.44)$$

Comparando la ecuaciones (5.41) y (5.44), tenemos:

$$\frac{4}{\omega_{res}} \approx \sum_{Todas\ las\ bandas} \frac{\omega_{res}^3 N_k}{2\pi^2 \rho}, \quad (5.45)$$

y usando (5.34), tenemos que el número de partículas en la frecuencia de resonancia está dado por:

$$\begin{aligned} N_{res} &\approx \sinh^2 \int \frac{1}{2\omega_{res}} \sqrt{|g_n|^2 - \Delta\omega_k^2 (\Delta\omega_k + 2\omega_{res})^2} dt, \\ &\approx \sinh^2 \frac{4|g_n|}{2\omega_{res}^2 \Gamma_{\varphi}^{res}} \int \sqrt{1 - \frac{\Delta\omega_k^2 (\Delta\omega_k + 2\omega_{res})^2}{g_n}} d\Delta\omega_k, \\ &\approx \sinh^2 \frac{\pi}{2} \frac{|g_n|^2}{\Gamma_{\varphi}^{res} \omega_{res}^3}, \end{aligned}$$

reemplazando en (5.45), tenemos:

$$\Gamma_{\varphi}^{res} \approx \frac{\pi |g_n|^2}{\omega_{res}^3} \log^{-1} \left(\frac{32\pi^2 \rho}{\omega_{res}^4} \right), \quad (5.46)$$

donde ω está dado por (5.25) y ρ es (5.5) evaluada en la función envolvente χ_0 .

5.3.3. Comparación de las tasas de producción de partículas

Usando (5.25) en las expresiones para las tasas de decaimiento del campo χ en partículas φ , podemos obtener las siguientes expresiones para los casos de decaimiento perturbativo y por resonancia respectivamente:

$$4\pi\Gamma_{\varphi\sigma} = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{4\pi \frac{\sqrt{\lambda}}{2\xi^2} (\chi_0 - \xi^2 \nu^2 / \chi_0)} & \text{si } \chi_0 < \frac{\sigma}{a}, \\ \frac{(a\chi_0)^2}{4\pi \frac{\sqrt{\lambda}}{2\xi^2} (\chi_0 - \xi^2 \nu^2 / \chi_0)} & \text{si } \chi_0 > \frac{\sigma}{a}, \end{cases} \quad (5.47)$$

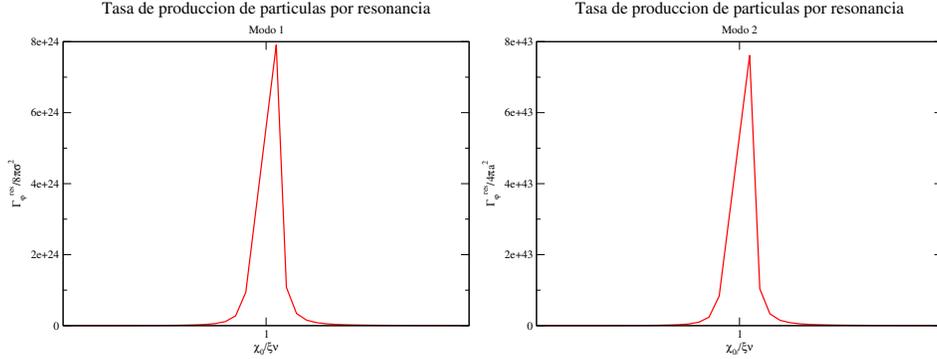


Figura 5.6: Tasa de decaimiento de partículas χ en partículas φ , para los dos primeros armónico de la serie de Fourier de $g(\omega t)$

$$\Gamma_{\chi}^{res} = \begin{cases} \frac{8\pi\sigma^2\chi_0^4}{\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2\xi^2}\right)^3 \left(\chi_0 - \frac{\xi^2\nu^2}{\chi_0}\right)^3} \log^{-1} \left(\frac{2048\pi^2\xi^4}{\lambda^4} \frac{(1-(\xi\nu/\chi_0)^2)^2}{(1-(\xi\nu/\chi_0)^2)^4} \right); & g_1 = \sigma\chi_0, \omega_{res} = \omega/2, \\ \frac{\pi a^2\chi_0^4}{4\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2\xi^2}\right)^3 \left(\chi_0 - \frac{\xi^2\nu^2}{\chi_0}\right)^3} \log^{-1} \left(\frac{128\pi^2\xi^4}{\lambda^4} \frac{(1-(\xi\nu/\chi_0)^2)^2}{(1-(\xi\nu/\chi_0)^2)^4} \right); & g_2 = \frac{h\chi_0^2}{2}, \omega_{res} = \omega, \end{cases} \quad (5.48)$$

Observamos que la tasa de producción de partículas por resonancia paramétrica es mucho mayor que la producción por oscilación clásica para valores de la envolvente cercanos a $\xi\nu$.

Las gráficas (5.6) muestran las tasas de producción de partículas para los modos de resonancia 1 y 2. Se puede observar como el ancho de resonancia va disminuyendo para cada modo, lo que está de acuerdo con [39], esto también permite justificar el hecho de no tomar mas armónicos en la serie de Fourier, puesto que el ancho disminuirá hasta desaparecer.

Notamos además que a diferencia del potencial cuártico sin acople a la gravedad presentado por [40], en este caso no es necesario que el parámetro de autointeracción sea extremadamente pequeño para que la producción por resonancia paramétrica sea importante en el proceso.

5.4. Estimación de la temperatura de Recalentamiento

Podemos resumir el comportamiento de la densidad de partículas producidas ρ_p y de la densidad del campo de inflatón oscilando ρ , mediante las

504. ESTIMACIÓN DE LA TEMPERATURA DE RECALENTAMIENTO

siguientes tres ecuaciones [40]:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_p^2}(\rho + \rho_p),$$

Que muestra el cambio en la ecuación de Einstein debida a la densidad de partículas producidas

$$\dot{\rho} = -(4H + \Gamma_\varphi^{res})\rho,$$

Donde se agrega la disminución de energía por decaimiento del campo en el canal correspondiente

$$\dot{\rho}_p = -4H\rho_p + \Gamma_\varphi^{res}\rho,$$

Que evidencia como la nuevas partículas ganan la energía que les cede el campo de inflatón

Podemos relacionar la temperatura de recalentamiento con la máxima densidad de partículas producidas [40], por tanto de las ecuaciones anteriores podemos ver que ρ_p será máxima cuando $4H \lesssim \Gamma_\varphi^{res}$.

Si $\chi_0 > \sigma/a$, de (5.48), tenemos:

$$\Gamma_\varphi^{res} \approx \frac{2\pi a^2 \xi^6 \chi_0}{\lambda^{3/2}} \log^{-1} \left(\frac{128\pi^2 \xi^4}{\lambda} \right), \quad (5.49)$$

donde hemos usado la aproximación $\chi_0 > \xi\nu$, con el objetivo de poder realizar una comparación con el caso de potencial cuártico presentado por [46, 40].

Por otro lado tenemos:

$$4H \approx 4\sqrt{\frac{8\pi}{3M_p^2}}\sqrt{\frac{\lambda}{4\xi^4}}\chi_0^2, \quad (5.50)$$

en el último caso también aproximamos a potencial cuártico, lo cual implica que no estamos cerca del final del régimen de oscilación del campo, pero desde luego no estamos tampoco en una etapa de inflación, por ello $\rho_p \lesssim \rho$, se debe cumplir en este punto. Reemplazando H en la condición para maximizar ρ_p tenemos:

$$\chi_0 \lesssim \frac{\pi a^2 \xi^8}{\lambda^2} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} M_p \log^{-1} \left(\frac{128\pi^2 \xi^4}{\lambda} \right), \quad (5.51)$$

puesto que hemos usado correcciones a primeros ordenes en los parámetros de acoplamiento a y σ , tenemos que se cumple:

$$a \frac{\sigma}{\chi_0} \ll \frac{\omega^2}{\chi_0^2}.$$

De (5.25), obtenemos:

$$\frac{4a\xi^4}{\lambda} \ll 1, \quad (5.52)$$

y tomando en cuenta la relación anterior, podemos tomar $\frac{4a\xi^4}{\lambda} \approx 10^{-1}$ y obtenemos:

$$\chi_o \lesssim \frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{48}\pi} 10^{-2} M_p \log^{-1} \left(\frac{128\pi^2 \xi^4}{\lambda} \right). \quad (5.53)$$

Por tanto la temperatura de recalentamiento está dada por:

$$T_{rh} \approx \left(\frac{\lambda}{4} \right)^{1/4} \frac{1}{\xi} \chi_o, \quad (5.54)$$

tomando en cuenta las cotas para la masa del Higgs presentadas en [154, 153], usamos $\lambda \approx 10^{-1}$ y de acuerdo con [39, 132], usamos $\xi \approx 10^4$ y $\xi \approx 10^5$, para los cuales obtenemos las siguientes temperaturas de recalentamiento:

$$\begin{aligned} T_{rh} &\approx 10^{12} GeV && \text{para } \xi = 10^4, \\ T_{rh} &\approx 10^{11} GeV && \text{para } \xi = 10^5, \end{aligned} \quad (5.55)$$

las cuales están en total acuerdo con lo presentado por [46, 40], para el caso de campo no acoplado a la gravedad, pero en aquellos casos los valores para la constante de acople λ , no permitían obtener inflación por Higgs, en cambio en nuestro caso obtenemos valores propicios para asociar el Higgs con el inflatón.

5.5. Paralelo entre la Teoría de Campos a Temperatura Finita y la evolución del campo en la etapa de recalentamiento

Trabajando con un campo escalar neutro, que represente las partículas generadas por la oscilación del campo de Higgs alrededor del mínimo de su potencial, tenemos que la densidad lagrangiana en el espacio de Minkowski se escribe como:

$$\mathcal{L} = R^3 \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - R^3 \frac{1}{2} m_\varphi^2 \varphi^2 + U_{int}(\varphi), \quad (5.56)$$

en el formalismo de tiempo imaginario la acción está dada por:

$$S_E(\beta) = \left(R^3 \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - R^3 \frac{1}{2} m_\varphi^2 \varphi^2 + U_{int}(\varphi) \right), \quad (5.57)$$

donde $(\partial_\mu \varphi)^2 = (\partial_\tau \varphi)^2 + (\nabla \varphi)^2$, el potencial de interacción generalmente es de la forma $\frac{1}{4} \lambda \varphi^4$, pero podría tomar cualquier forma con la única restricción que no dependa de las derivadas de φ [167]. Tenemos que la función de partición está dada por:

$$Z = N' \int \mathfrak{D}[\varphi] \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}(\mathbf{x}, \tau) \right\}, \quad (5.58)$$

con $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \tau)$ dado por 5.56. Integrando por partes 5.57 respecto al tiempo y la parte espacial, podemos obtener que la función de partición queda escrita como:

$$Z = N' \int \mathfrak{D}[\varphi] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \varphi \right\}. \quad (5.59)$$

En el espacio de frecuencias y momentos, aplicando la transformada de Fourier al campo escalar $\varphi(\mathbf{x}, \tau)$, tenemos:

$$\varphi(\mathbf{x}, \tau) = \left(\frac{\beta}{V} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\mathbf{p}} \exp \{ i\mathbf{p}\mathbf{x} + i\omega_n \tau \} \varphi_n(\mathbf{p}, \omega_n), \quad (5.60)$$

donde $\omega_n = 2\pi nT$ son las frecuencias de Matsubara. Sustituyendo 5.60 en 5.57 tenemos:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} \frac{\beta}{V} \sum_{n, n', \mathbf{p}, \mathbf{p}'} \phi_{n'}^*(\mathbf{p}', \omega_{n'}) (\omega_n^2 + p^2 + m^2) \phi_n(\mathbf{p}, \omega_n) \beta \delta_{n, n'} V \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}, \\ &= -\frac{1}{2} \beta^2 \sum_{n, \mathbf{p}} (\omega_n^2 + p^2 + m^2) |\phi_n(\mathbf{p}, \omega_n)|^2, \end{aligned} \quad (5.61)$$

por tanto la función de partición está dada por:

$$\begin{aligned} Z &= N' \int \prod_{i=1}^{\infty} d\phi_i \exp \left\{ -\frac{1}{2} \beta^2 \sum_{n, \mathbf{p}} (\omega_n^2 + \omega^2) \phi_n^2(\mathbf{p}, \omega_n) \right\}, \\ &= N' \prod_n \prod_{\mathbf{p}} (2\pi)^{1/2} [\beta^2 (\omega_n^2 + \omega^2)]^{1/2}, \end{aligned} \quad (5.62)$$

por tanto el logaritmo de la función de partición en el espacio de frecuencias y momentos está dado por:

$$\begin{aligned}\ln Z &= -\frac{1}{2} \sum_{n,\mathbf{p}} \ln(\beta^2 \omega_n^2 + \beta^2 \omega^2), \\ &= -\sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{1}{2} \beta \omega + \ln(1 - e^{(-\beta \omega)}) \right).\end{aligned}\quad (5.63)$$

A partir del $\ln Z$, podemos obtener que la densidad de energía y la presión del punto cero, están relacionadas por:

$$P_0 = -\rho_0, \quad (5.64)$$

a pesar que la ecuación anterior tiene la forma de la condición para inflación sobre el campo de inflatón, no debe ser confundida con esta, puesto que en este caso el campo φ no evoluciona en un potencial que nos permita establecer condiciones de inflación, más aún la ecuación de semiestado anterior (a temperatura cero), no surge del análisis del comportamiento del factor de escala R .

Sin embargo, si relacionáramos el término de autointeracción con un potencial cuadrático, vemos que el comportamiento análogo al tipo inflacionario para este caso, tiene sentido, puesto que aún no se ha tomado en cuenta un término disipativo que evidencie presencia de materia, por lo cual no se puede obtener un comportamiento de la forma $P = 0$, como el obtenido por [40] para este caso sin tomar en cuenta temperatura finita.

A temperatura diferente de cero, podemos obtener las siguientes relaciones (Como se muestra en (G.1)):

$$\rho_\varphi = \frac{\pi^2}{30} T^4 - \frac{m_\varphi^2}{24} T^2, \quad (5.65)$$

observamos que para la energía se obtiene un primer término equivalente a la ley de Stefan Boltzman, mientras el segundo es debido a que en este caso $\omega^2 = p^2 + m^2$, por tanto se necesita energía para generar la masa. Este término tiene una forma semejante a la presentada en (5.19), donde se asumió un término de fricción para mostrar la perdida de energía del campo de inflatón debida a la producción de partículas, en este caso notamos que al tomar en cuenta la temperatura finita, el campo escalar asociado a las partículas generadas, pierde energía debido a su autointeracción y lo hace en forma análoga

a como pierde energía el inflatón, cuando no se toma en cuenta la interacción con otros campos.

Lo anterior es consistente, puesto que en este caso el campo φ aún no está interactuando con otro campos y para la etapa de recalentamiento el potencial del campo de inflatón ya no es dominante.

Para la presión se puede obtener (G.1):

$$P = \frac{\pi^2}{90}T^4 - \frac{m_\varphi^2}{24}T^2, \quad (5.66)$$

de las ecuaciones (5.65) y (5.66), obtenemos la ecuación de estado:

$$P = \frac{1}{3}\rho_\varphi - \frac{1}{3}\frac{1}{12}m_\varphi^2T^2. \quad (5.67)$$

5.5.1. Interacción con el inflatón.

Cuando introducimos una interacción en la teoría, sin importar su forma, podemos expandir este en una serie de potencias, siempre que las constantes de acoplamiento sean pequeñas. Tenemos entonces que el sistema está descrito por una densidad lagrangiana de la forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I. \quad (5.68)$$

Las correcciones al logaritmo de la función de partición, están dadas como:

$$\ln Z = \ln Z_0 + \ln Z_I, \quad (5.69)$$

donde $Z_I = 1 + \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \langle S_I^n \rangle_0$, con lo que el problema es ahora calcular:

$$\langle S_I^n \rangle_0 = \frac{\int \mathfrak{D}[\phi] e^{S_0} S_I^n}{\int \mathfrak{D}[\phi] e^{S_0}}, \quad (5.70)$$

usando el modelo sencillo descrito por[40]:

$$\mathcal{L}_I = -R^3(\sigma\chi + a\chi^2)\varphi^2, \quad (5.71)$$

donde φ y χ son campos escalares, asociados con la partícula creadas y el campo de Higgs respectivamente. Reconocemos una interacción de campo escalar y notamos además que hemos ignorado el término de autointeracción asociado al campo χ , recordamos que este campo está débilmente acoplado,

incluso consigo mismo.

Para este caso la corrección a primer orden en el $\ln Z$ está dada por (ver anexo (G.2)):

$$\ln Z_{\phi^2\chi^2} = -6a\beta V \left[T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \wp_0^{-1}(\mathbf{q}, \omega_n) \right]^2, \quad (5.72)$$

donde $\wp_0^{-1}(\mathbf{q}, \omega_l) = \omega_l^2 + \mathbf{q}^2 + m^2$. Como sólo contribuye el término de orden par en el campo, podemos decir que el análogo sin tomar en cuenta la temperatura finita, sería el modo 2 en los armónicos de Fourier.

Para este caso la relación entre la presión y la densidad de energía para la primera corrección, está dada por:

$$P_1 = \rho_1 + f(m_\varphi, T^2, m_\chi), \quad (5.73)$$

donde $f(m_\varphi, T^2, m_\chi)$ es una función que depende de las masas de los campos φ y χ , notemos que la dependencia sobre m_χ , relaciona la expresión con una posible dependencia de ν, λ , lo cual estaría de acuerdo con resonancias a energías del orden de ν , para el campo χ .

Capítulo 6

Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos en el presente trabajo de tesis, se presentan a continuación un conjunto de conclusiones, que por motivos de organización se presentan de acuerdo lo presentado en los diferentes capítulos.

Con el objetivo de identificar el campo de Higgs del MEE con el campo de inflatón encargado de dirigir el proceso de inflación del universo y posteriormente de generar las partículas elementales mediante la oscilación alrededor del mínimo de su potencial en la etapa de recalentamiento, se deben cumplir la siguientes condiciones básicas:

- Para que la inflación se desarrolle lejos del mínimo del potencial, es decir en la parte plana del potencial en el marco de Einstein, se verificó que $\xi^2 \nu^2 \ll M_p^2$, donde ξ es el parámetro de acople con la gravedad del campo escalar (campo de Higgs del MEE) en el marco de Jordan, ν es el valor esperado en el vacío del campo de Higgs y M_p es la masa de Planck. Esta relación es equivalente a $\xi \ll 10^{34}$, que es además necesaria para mantenerse lejos del rango de gravedad inducida. Si el parámetro ξ no satisface esta relación el parámetro de masa M en el lagrangiano ya no sería del orden de M_p , el campo podría tener energías comparables a las de la etapa de inflación durante la etapa de recalentamiento y aún más la etapa de inflación terminaría a escalas de ν .

- Sin tener en cuenta los efectos del recalentamiento se ha obtenido en esta tesis que $\xi \ll 10^{34}$, lo cual ha sido obtenido a partir del análisis del comportamiento del campo en un régimen de oscilación cuasiperiódica, despreciando la interacción del campo con otros campos. Sin embargo, se obtuvo que al tener en cuenta la etapa de recalentamiento, que el parámetro de acople a la gravedad ξ , debe tomar valores en el rango $10 \ll \xi < 10^{11}$. Este resultado se ha obtenido imponiendo que el campo de Higgs satisfaga las condiciones que debe satisfacer un campo de inflatón oscilando alrededor de su mínimo en la etapa de recalentamiento. Consideramos que este resultado constituye un aporte novedoso que se obtiene en este trabajo de tesis.

- Asumiendo que la masa del bosón de Higgs del MEE corresponde a la masa reportada por LHC para el bosón escalar recientemente descubierto, lo cual implica un valor dado para el parámetro de acoplamiento λ presente en el potencial de Higgs, se encontró que el parámetro de acople a la gravedad en el marco de Jordan del campo de Higgs debe ser del orden de $\xi \approx 10^4 - 10^5$, valores que son centrales en el rango de validez del parámetro para la etapa de recalentamiento.

De los resultados obtenidos a partir de las condiciones de estabilidad sobre el potencial efectivo (corregido a un loop) y más específicamente sobre el potencial reducido, se verificaron las restricciones sobre el parámetro $\Xi = \frac{4Ah_0}{m_H^2}$, donde $A = \frac{6g^4}{1024\pi^2} + \frac{3(g^2+g'^2)^2}{1024\pi^2} - \frac{3y_t^4}{64\pi^2}$, siendo g y g' las constantes de acoplamiento de los grupos $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$ del MEE, y_t es la constante de Yukawa para el quark top y h_0 es el valor de campo donde el potencial efectivo (corregido) tiene un mínimo absoluto. A partir del cumplimiento de las condiciones de estabilidad sobre el potencial, se obtuvo una relación entre las masas del bosón de Higgs del MEE y del quark top dada por:

$$m_H \gtrsim 1.7m_t - 172.5(GeV), \quad (6.1)$$

donde m_H representa la masa del bosón de Higgs del MEE y m_t la masa del quark top. Esta relación es consistente con los rangos reportados en la literatura para el caso de potenciales de Higgs corregidos a uno y dos loops. A este

respecto, en esta tesis se presenta un aporte de tipo pedagógico para el entendimiento de las etapas de inflación y recalentamiento, puesto que a partir de una revisión extensa de la literatura, ha sido posible presentar de forma clara y en un mismo lugar, tanto los diferentes procedimientos matemáticos involucrados, como las condiciones físicas impuestas sobre el potencial que son necesarias para establecer una relación básica entre las masas del bosón de Higgs y la del quark top. Además se ha presentado una discusión con miras a aclarar las diferencias de trabajar en los marcos de Einstein y de Jordan a la hora de establecer la cota para la masa del bosón de Higgs del MEE a partir de inflación.

Teniendo en cuenta las condiciones de estabilidad que debe satisfacer el potencial efectivo para generar una etapa de inflación exitosa y preservar las condiciones necesarias para desarrollar una etapa de recalentamiento, se establecen las siguientes relaciones entre los parámetros de acoplamiento de los bosones vectoriales de la teoría electrodébil con el bosón de Higgs y los valores del mínimo en los potenciales sin corregir (U) y efectivo ($U + U_1$):

$$16y_t^4 \lesssim 3g^4 + 2g^2g'^2 + g'^2,$$

$$\left(\frac{\nu}{h_0}\right)^2 > \lambda + 2A \Rightarrow \lambda > 2|A|,$$

donde g, g' , son las constantes de acoplamiento de los grupos $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$ respectivamente, θ_W es el ángulo de mezcla electrodébil $\sin(\theta_W) = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}$, $\cos(\theta_W) = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}$, y_t es la constante de acoplamiento de Yukawa, h_0 es el valor de campo en el mínimo del potencial efectivo y ν es el valor esperado para el bosón de Higgs en el vacío. Estas relaciones son las que permiten que el potencial efectivo sea exponencialmente plano, condición necesaria para obtener inflación tipo slow-roll, y que el mínimo del potencial efectivo sea un mínimo absoluto, lo que permite tener una etapa de recalentamiento en el universo, en la que se generan las partículas elementales que posteriormente permiten la termalización del universo.

Asumiendo que el proceso de recalentamiento se produce después de una

etapa de inflación dirigida por el bosón de Higgs del MEE y suponiendo que el campo (χ) que oscila alrededor del mínimo del potencial durante la etapa de recalentamiento es el mismo que dirige la etapa de inflación y que interactúa con otro campo escalar masivo (φ), a través de un potencial de interacción de la forma $L_{int} = (\sigma\chi + a\chi^2)\varphi^2$, donde σ es una constante de acoplamiento con unidades de masa y a es una constante de acoplamiento adimensional, encontramos que la temperatura de recalentamiento efectivo, es del orden de

$$\begin{aligned} T_{rh} &\approx 10^{12} GeV && \text{para } \xi = 10^4, \\ T_{rh} &\approx 10^{11} GeV && \text{para } \xi = 10^5, \end{aligned}$$

valores de temperatura que están de acuerdo con los reportados en la literatura, y donde se han usado valores para el parámetro ξ , que se ajustan a las predicciones para la masa del bosón de Higgs. Estos resultados pueden ser vistos como un aporte de esta tesis, puesto que a partir de un modelo sencillo de campo acoplado minimalmente con la gravedad en el marco de Einstein y de la relación entre los campos en los dos marcos (Einstein-Jordan), se ha establecido una relación entre la temperatura de recalentamiento y el parámetro de acoplamiento a la gravedad ξ , que genera valores que están de acuerdo tanto con los valores reportados en la literatura para la temperatura de recalentamiento (en los casos en los que se ha trabajado con en mismo modelo para la interacción), como con los reportados para el parámetro de acoplamiento de acuerdo a los últimos datos para la masa del Higgs.

Otros resultados y aportes interesantes que se han obtenido en esta tesis se describen a continuación.

A partir del análisis detallado de la relación entre los campos h y χ , donde h representa el campo de Higgs del MEE que actúa como inflatón en el marco de Jordan y está acoplado a la gravedad mediante el parámetro ξ y χ representa el campo de inflatón en marco de Einstein, en el cual el campo no está acoplado a la gravedad, pero depende del parámetro ξ , mediante la relación con el campo h , se estableció que el valor para el final de inflación en el campo de Einstein es independiente del parámetro ξ y está dado por: $\chi_{end} = \sqrt{3/2} \ln(\sqrt{4/3} + 1) M_p$. Consideramos que este resultado es relevante

porque permite proponer un primer rango para el parámetro ξ , durante la etapa de recalentamiento.

Suponiendo que la inflación inicia cuando h es del orden M_p , usando la relación entre los campos h y χ y el valor encontrado anteriormente para χ_{end} , se establece una relación entre la duración de la etapa de inflación y los parámetros de acoplamiento ξ y λ , en el marco de Einstein. La relación es de la forma $\Delta t = \frac{\xi}{M_p} \sqrt{6\pi\xi/\lambda}$, para valores de ξ del orden de $10^4 - 10^5$. Con lo anterior se tiene que $\Delta t \approx 10^{-34} - 10^{-35} s$, lo cual es consistente con los rangos reportados en la literatura.

A partir del análisis del comportamiento del campo en un régimen con oscilación cuasiperiódica alrededor del mínimo de su potencial en el marco de Einstein, para la etapa de recalentamiento, en el caso en el que el campo χ no interactúa con otros campos, se pudo establecer que el comportamiento de la densidad de energía ρ en función del factor de escala R y la ecuación de estado, cuando se toma en cuenta los términos cuadrático e independiente en el potencial, tienen la siguiente forma:

$$\rho = C^2\lambda R^{-4} - C\lambda\nu^2 R^{-2} + \frac{\lambda\nu^4}{4},$$

$$P = \frac{\rho}{3} - \frac{2\nu^2}{3}\sqrt{\lambda\rho} - \frac{4}{9}\lambda\nu^4,$$

donde ν es el valor esperado en el vacío del campo de Higgs del MEE, λ es una constante de interacción y P representa la presión. Esta expresión, que consideramos es un aporte de esta tesis en el contexto del recalentamiento, contiene los casos particulares trabajados en la literatura con potenciales cuadráticos y cuárticos y además es consistente con la expresión de radiación para un campo con masa.

Finalmente, se ha realizado un paralelismo entre los resultados obtenidos en la etapa de recalentamiento, con los obtenidos haciendo uso de la teoría de campos a temperatura finita, para el caso de considerar como sistema

termodinámico el descrito por la densidad lagrangiana que define la inflación caótica. Este paralelismo, hasta donde conocemos, novedoso en la literatura, muestra que la densidad de energía ρ en función del factor de escala R y la ecuación de estado obtenidas en los dos formalismos (teoría de campos a temperatura finita y formalismo de cosmología estándar a temperatura cero) tienen la misma forma funcional.

Apéndice A

Ecuación de movimiento en el marco de Jordan

A partir de la densidad lagrangiana (3.1):

$$\mathcal{L} = (\mathcal{L}_{SM} - \frac{M^2}{2}R - \xi H^\dagger H R)\sqrt{-g}, \quad (\text{A.1})$$

donde g es el determinante del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ que es promovido a ser una variable dinámica y que junto con los campos de materia bajo el principio variacional nos proporcionan las ecuaciones de campo que obedecen estas variables [168] y $\mathcal{L}_{SM} = \frac{\partial_\mu h \partial^\mu h}{2} - \frac{\lambda}{4}(h^2 - v^2)^2$, podemos escribir:

$$\mathcal{L} = -a^3 \frac{(M^2 + \xi h^2)}{2} R - a^3 \frac{\lambda}{4} (h^2 - v^2)^2 + a^3 \frac{\partial_\mu h g^{\mu\sigma} \partial_\sigma h}{2}, \quad (\text{A.2})$$

donde a es el factor de escala que sale del determinante del tensor $g_{\mu\nu}$, y estamos sólo en el sector escalar.

De las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial h(x)} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu h)}, \quad (\text{A.3})$$

tenemos:

$$-a^3 \frac{\partial V}{\partial h} - a^3 \xi h R - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{1}{2} a^3 \partial_\mu h g^{\mu\sigma} \delta_{\mu\sigma} + \frac{1}{2} a^3 g^{\mu\sigma} \partial_\mu h \right) = 0, \quad (\text{A.4})$$

tomando en cuenta que el factor de escala sólo depende del tiempo:

$$a^3 \frac{\partial V}{\partial h} + a^3 \xi h R + 3a^2 \dot{a} \dot{h} + a^3 \ddot{h} - a^3 \nabla^2 h = 0, \quad (\text{A.5})$$

en términos del parámetro de Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$, tenemos:

$$\frac{\partial V}{\partial h} + \xi h R + 3H\dot{h} + \ddot{h} - \nabla^2 h = 0. \quad (\text{A.6})$$

Tomando condiciones de rodadura lenta y $\nabla^2 h = 0$, es decir asumiendo que el potencial es suficientemente plano para despreciar el término cinético y que el cambio del campo en las coordenadas espaciales es despreciable:

$$V'(h) + \xi h R + 3H\dot{h} = 0, \quad (\text{A.7})$$

con $V'(h) = \frac{\partial V}{\partial h} = a^3 \lambda (h^2 - \nu^2) h$.

Apéndice B

Transformación de la acción al marco de Einstein

El tensor de Ricci que es el tensor de segundo rango formado por una contracción en el tensor de curvatura de Riemman [79], en términos de los símbolos de Cristoffel, los cuales dependen del tensor métrico y sus derivadas o de su determinante [26], se puede escribir como [169]:

$$R_{\mu\rho} = \Gamma_{\mu\rho,\nu}^{\nu} - \Gamma_{\nu\rho,\mu}^{\mu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\nu}. \quad (\text{B.1})$$

Mientras la relación entre los símbolos de Cristoffel en las métricas g y \hat{g} [170]:

$$\hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \Omega^{-1}(\delta_{\beta}^{\alpha}\nabla_{\gamma}\Omega + \delta_{\gamma}^{\alpha}\nabla_{\beta}\Omega - g_{\beta\gamma}\nabla^{\alpha}\Omega). \quad (\text{B.2})$$

Mientras para el tensor de Ricci [171]:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\alpha\beta} = & R_{\alpha\beta} - (n-2)\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}(\ln\Omega) - g_{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}\nabla_{\rho}\nabla_{\sigma}(\ln\Omega) \\ & + (n-2)\nabla_{\alpha}(\ln\Omega)\nabla_{\beta}(\ln\Omega) - (n-2)g_{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}\nabla_{\rho}(\ln\Omega)\nabla_{\sigma}(\ln\Omega), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

donde n es el número de dimensiones del espacio.

Estamos interesados ahora en obtener la relación entre las constantes de Ricci en las dos métricas, puesto que son estas constantes las que se introducen en el acoplamiento en la acción 3.2 en el marco de Jordan. En la métrica \hat{g} tenemos [169]:

$$\hat{R} = \hat{g}^{\mu\nu}\hat{R}_{\mu\nu} = \Omega^{-2}g^{\alpha\beta}\hat{R}_{\alpha\beta}, \quad (\text{B.4})$$

donde hemos usado la transformación conformal 3.5. Escribiendo \hat{R} en términos de R , mediante el uso de B.3 tenemos:

$$\begin{aligned}\hat{R} &= \\ \Omega^{-2} &\left[R - (n-2)\square ln\Omega - n\square ln\Omega + \frac{(n-2)}{\Omega^2} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Omega \nabla_\beta \Omega - \frac{n(n-2)}{\Omega^2} g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \Omega \nabla_\sigma \Omega \right] \\ &= \Omega^{-2} \left[R - 2(n-1)\square ln\Omega - (n-1)(n-2)g^{\alpha\beta} \frac{\nabla_\alpha \Omega \nabla_\beta \Omega}{\Omega^{-2}} \right],\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

para $n = 4$ tenemos [170]:

$$\begin{aligned}\hat{R} &= \Omega^{-2} \left[R - 6\square ln\Omega - 6g^{\alpha\beta} \frac{\nabla_\alpha \Omega \nabla_\beta \Omega}{\Omega^{-2}} \right] \\ &= \Omega^{-2} \left[R - 6\nabla^\mu \left(\frac{1}{\Omega} \nabla_\mu \Omega \right) - \frac{\nabla^\beta \Omega \nabla_\beta \Omega}{\Omega^{-2}} \right] \\ &= \Omega^{-2} \left[R - 6\frac{\square \Omega}{\Omega} \right].\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

Ahora que tenemos las relaciones para R y g , podemos escribir la acción en términos de la métrica \hat{g} :

$$\begin{aligned}S_E &= \int d^4x \sqrt{\hat{g}} \left[-\left(\frac{M_p^2 + \xi h^2}{2} \right) \frac{\hat{R}}{\Omega^2} - \left(\frac{M_p^2 + \xi h^2}{2} \right) \frac{6\square \Omega}{\Omega^5} + \frac{\partial_\mu h \partial^\mu h}{2\Omega^4} \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{\hat{g}} \left[-\frac{M_p^2 \hat{R}}{2} - \frac{6M_p^2}{2\Omega^3} \square \Omega + \frac{\Omega^2 \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu h \partial_\nu h}{2\Omega^4} \right].\end{aligned}\quad (\text{B.7})$$

en la última línea hemos usado 3.5 y la relación entre Ω y el campo h dada por 3.6. Se puede ver que $\square \Omega = \frac{\xi h}{M_p^2} \square h + \frac{\xi}{M_p^2 \Omega} \nabla^\mu h \nabla_\mu h \left(1 - \frac{\xi h^2}{M_p^2 \Omega^2} \right)$, pero tomando en cuenta que $\nabla^\mu \nabla_\mu h^2 = 2(h \square h + \nabla^\mu h \nabla_\mu h)$, el D'Alambertiano será:

$$\square \Omega = \frac{\xi}{2M_p^2} \frac{\nabla^\mu \nabla_\mu h^2}{\Omega} - \frac{\xi^2 h^2}{M_p^4} \frac{\nabla^\mu h \nabla_\mu h}{\Omega^3},$$

y reemplazando en B.7 la acción toma la forma:

$$\begin{aligned}
 S_E &= \int d^4x \sqrt{\hat{g}} \left[-\frac{M_p^2 \hat{R}}{2} - \frac{6M_p^2}{2\Omega^3} \left(\frac{\xi}{2M_p^2} \frac{\nabla^\mu \nabla_\mu h^2}{\Omega} - \frac{\xi^2 h^2}{M_p^4} \frac{\nabla^\mu h \nabla_\mu h}{\Omega^3} \right) + \frac{\Omega^2 \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu h \partial_\nu h}{2\Omega^4} \right], \\
 &= \int d^4x \sqrt{\hat{g}} \left[-\frac{M_p^2 \hat{R}}{2} - \frac{1}{2\Omega^4} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu h \partial_\nu h \left(\Omega^2 + \frac{6\xi^2 h^2}{M_p^2} \right) - \frac{3\xi}{2\Omega^4} \nabla^\mu \nabla_\mu h^2 \right] \\
 &= \int d^4x \sqrt{\hat{g}} \left[-\frac{M_p^2 \hat{R}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dh} \right)^2 \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu h \partial_\nu h - \frac{3\xi}{2\Omega^4} \nabla^\mu \nabla_\mu h^2 \right], \quad (\text{B.8})
 \end{aligned}$$

en la última línea hemos usado la relación entre los campos h y χ dada por 3.7 y tomando en cuenta que el campo $\chi = \chi(h)$ es una función sólo del h , se tiene que $\partial_\mu \chi = \frac{\partial(\chi)}{\partial(h)} \partial_\mu h = \frac{d\chi}{dh} \partial_\mu h$. Por tanto, podemos escribir la acción en términos del nuevo campo χ en el marco de Einstein como:

$$S_E = \int d^4x \sqrt{\hat{g}} \left[-\frac{M_p^2 \hat{R}}{2} + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \frac{3\xi}{2\Omega^4} \nabla^\mu \nabla_\mu h^2 \right], \quad (\text{B.9})$$

pero el último término de esta expresión se puede escribir salvo una constante como: $\int d^4x \sqrt{\hat{g}} \frac{\nabla^\mu \nabla_\mu h^2}{\Omega^4} = \int d^4x \sqrt{\hat{g}} \partial^\mu \partial_\mu h^2$, que es un término de superficie y puede ser despreciado puesto que el campo está rodando suavemente hacia su mínimo y cumple que $\nabla^2 h = 0$. Por tanto, la acción en el marco de Einstein, salvo el término asociado al potencial, está dada por [28]:

$$S_E = \int d^4x \sqrt{\hat{g}} \left[-\frac{M_p^2 \hat{R}}{2} + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi \right]. \quad (\text{B.10})$$

Apéndice C

Campo χ en el marco de Einstein en función del campo de Higgs h

C.1. Solución exacta

De las ecuaciones (3.6) y (3.7) tenemos:

$$\frac{d\chi}{dh} = \frac{1}{1 + \frac{\xi h^2}{M_p^2}} \sqrt{1 + \frac{\xi h^2}{M_p^2} (1 + 6\xi)}, \quad (\text{C.1})$$

sea $a = \frac{\xi}{M_p^2}$ y $b = 1 + 6\xi$, tenemos que la ecuación de variables separables toma la forma:

$$d\chi = \frac{\sqrt{1 + abh^2}}{1 + ah^2} dh, \quad (\text{C.2})$$

haciendo la sustitución $h = \frac{\sinh(u)}{\sqrt{ab}}$, se obtiene $dh = \frac{\cosh(u)}{\sqrt{ab}} du$, en términos de u , tenemos:

$$\chi = \sqrt{\frac{b}{a}} \left[u + (1 - b) \int \frac{du}{b + \sinh^2(u)} \right], \quad (\text{C.3})$$

en la última ecuación hemos usado que $\cosh^2(u) - \sinh^2(u) = 1$. Ahora sabemos que [172]:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{d + e \sinh^2(x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{d(e-d)}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{e}{d}} - 1 \tanh(x) \right) \quad \left[\frac{e}{d} > 1 \right], \\
&= \frac{1}{\sqrt{d(d-e)}} \tanh^{-1} \left(\sqrt{1 - \frac{e}{d}} \tanh(x) \right) \quad \left[0 < \frac{e}{d} < 1 \vee \left(\frac{e}{d} < 0 \wedge \sinh^2(x) < -\frac{d}{e} \right) \right], \\
&= \frac{1}{\sqrt{d(d-e)}} \coth^{-1} \left(\sqrt{1 - \frac{e}{d}} \tanh(x) \right) \quad \left[\frac{e}{d} < 0 \wedge \sinh^2(x) > -\frac{d}{e} \right].
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Notamos que para nuestro caso $d = b = 1 + 6\xi$ y $e = 1$, por tanto $\frac{e}{d} = \frac{1}{1+6\xi}$, pero la condición para ξ es $1 \ll \xi \ll 10^{34}$, por tanto tenemos que $0 < \frac{e}{d} < 1$, de esta forma la solución estará dada por:

$$\chi = \sqrt{\frac{b}{a}} \left[u + \frac{(1-b)}{\sqrt{b(b-1)}} \tanh^{-1} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{b}} \tanh(u) \right) \right],$$

en términos de h y ξ , tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\chi}{M_p} &= \sqrt{\frac{1+6\xi}{\xi}} \sinh^{-1} \left(\sqrt{\xi(1+6\xi)} \frac{h}{M_p} \right) \\
&\quad - \sqrt{6} \tanh^{-1} \left(\frac{\sqrt{6\xi} h / M_p}{\sqrt{1 + \xi(1+6\xi)} \left(\frac{h}{M_p} \right)^2} \right),
\end{aligned}$$

en la última ecuación se uso:

$$\tanh(u) = \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)} = \frac{\sqrt{abh}}{\sqrt{1+abh^2}}.$$

Escalando por la masa de Planck, se define $X \equiv \frac{\chi}{M_p}$ y $Y \equiv \frac{h}{M_p}$ y se expresan la funciones hiperbólicas en términos de logaritmos, para obtener la ecuación

(3.18):

$$\begin{aligned}
 X = & \sqrt{\frac{1+6\xi}{\xi}} \ln \left(\sqrt{\xi(1+6\xi)}Y + \sqrt{\xi(1+6\xi)Y^2+1} \right) \\
 & - \frac{\sqrt{6}}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{1+\xi(1+6\xi)Y^2} + \sqrt{6\xi}Y}{\sqrt{1+\xi(1+6\xi)Y^2} - \sqrt{6\xi}Y} \right). \tag{C.5}
 \end{aligned}$$

C.2. Solución aproximada

De las ecuaciones (3.6) y (3.7) tenemos:

$$\frac{d\chi}{dh} = \sqrt{\frac{\Omega^2 + 6\xi(\Omega^2 - 1)}{\Omega^4}},$$

por tanto en función de Ω , se tiene:

$$\frac{d\chi}{d\Omega} = \pm \frac{\sqrt{\Omega^2 + 6\xi(\Omega^2 - 1)}}{\Omega} \frac{M_p}{\sqrt{\xi}\sqrt{\Omega^2 - 1}},$$

donde se ha usado que:

$$\frac{dh}{d\Omega} = \pm \frac{\Omega M_p^2}{\xi \sqrt{\frac{M_p^2(\Omega^2 - 1)}{\xi}}}.$$

Reescribiendo la ecuación anterior, obtenemos:

$$\frac{\sqrt{\xi}}{M_p} \frac{d\chi}{d\Omega} = \pm \frac{1}{\Omega} \frac{\sqrt{\Omega^2(1+6\xi) - 6\xi}}{\sqrt{\Omega^2 - 1}},$$

puesto que el parámetro ξ debe tener el mismo valor para cualquier etapa, pues es constante respecto al tiempo, tenemos que $1 \ll \sqrt{\xi} \ll 10^{17}$, es una condición que debe cumplirse sin importar el valor de campo. Por tanto para este régimen de ξ , tenemos que $1 + 6\xi \approx 6\xi$ y podemos escribir:

$$\frac{\sqrt{\xi}}{M_p} \frac{d\chi}{d\Omega} \approx \begin{cases} \frac{\sqrt{\Omega^2 + 6\xi(\Omega^2 - 1)}}{\sqrt{\Omega^2 - 1}} \approx \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 - 1}} & \text{si } \Omega \rightarrow 1, \\ \pm \frac{1}{\Omega} \frac{\sqrt{\Omega^2 6\xi - 6\xi}}{\sqrt{\Omega^2 - 1}} = \pm \frac{\sqrt{6\xi}}{\Omega} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

en la ecuación anterior se ha tomado en cuenta que para $\Omega \rightarrow 1$, $dh/d\Omega$ diverge, por lo que siempre se puede encontrar un valor de Ω que haga que $\Omega^2 \gg 6\xi(\Omega^2 - 1)$.

$$\frac{\chi}{M_p} \approx \begin{cases} \frac{\sqrt{\Omega^2-1}}{\sqrt{\xi}} & \text{si } \Omega \rightarrow 1, \\ \pm\sqrt{6}(\ln(\Omega) + \ln C) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

usando la ecuación (3.6), la relación entre los campos para los marcos de Einstein χ y Jordan h , será:

$$\frac{\chi}{M_p} \approx \begin{cases} \frac{h}{M_p} & \text{si } h \rightarrow 0 \text{ ó } h \ll \frac{M_p}{\sqrt{\xi}}, \\ \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \ln[C(\xi \frac{h^2}{M_p^2} + 1)] & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

definimos $X \equiv \frac{\chi}{M_p}$ y $Y \equiv \frac{h}{M_p}$, con lo que la última expresión toma la forma:

$$X \approx \begin{cases} Y & \text{si } Y \rightarrow 0 \text{ o } Y \ll \frac{1}{\sqrt{\xi}}, \\ \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \ln[\frac{1}{K^2}(\xi Y^2 + 1)] & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

en la última ecuación usamos K^2 para recalcar que C es positivo.

Apéndice D

Marco de Jordan

Los tiempos en los dos marcos están relacionados por[139]:

$$dt_E = \Omega dt_J, \quad (\text{D.1})$$

donde t_E es el tiempo en el marco de Einstein, y t_J es el tiempo en el marco de Jordan. Al reemplazar el factor conformal Ω dado por la ecuación (3.6) se obtiene

$$dt_J = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\xi h^2}{M_p^2}}} dt_E. \quad (\text{D.2})$$

Por otro lado, de la ecuación (3.19) sabemos que $\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\chi}{M_p} = \ln(1 + \xi h^2/M_p^2)$, por lo que el campo adimensional $Y = \frac{h}{M_p}$ en función del campo χ , está dado por:

$$Y^2 = \frac{1}{\xi} \left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}} X} - 1 \right), \quad (\text{D.3})$$

donde $X = \frac{\chi}{M_p}$.

Pero a partir de la ecuación (3.36), tenemos que $X = \frac{\chi}{M_p} = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln(C - M - p\sqrt{\lambda/6\pi\xi} t_E)$, con lo que, reemplazando esta relación en la ecuación para Y podemos obtener el campo h en función del tiempo de Einstein:

$$\left(\frac{h}{M_p} \right)^2 = Y^2(t_E) = \frac{1}{\xi} \left(C - M_p \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi\xi}} t_E \right). \quad (\text{D.4})$$

Reemplazando el campo h en (D.2) obtenemos:

$$t_J = \int \frac{1}{\sqrt{C - M_p \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi\xi}} t_E}} dt_E, \quad (\text{D.5})$$

donde C , es una constante asociada a las condiciones iniciales sobre los campos y surge de la integración para hallar la relación de los campos entre los dos marcos trabajados.

Resolviendo la integral, se obtiene:

$$C - M_p \frac{\lambda}{6\pi\xi} t_E = (t_J - K)^2, \quad (\text{D.6})$$

donde K es otra constante de integración.

El tiempo en el marco de Einstein en función del tiempo en el marco de Jordan será:

$$t_E = \frac{1}{M_p} \sqrt{\frac{6\pi\xi}{\lambda}} C - \frac{M_p}{24} \sqrt{\frac{6\lambda}{\pi\xi}} (t_J - K)^2, \quad (\text{D.7})$$

con lo que reemplazando esta ecuación en la expresión para Y en función de t_E , se obtiene:

$$\frac{h}{M_p} = Y = \mp \frac{1}{2\xi} \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} (t_J - K). \quad (\text{D.8})$$

D.1. Ecuación para el campo h

La acción en el marco de Jordan está dada por:

$$S = \int d^4x R^3 \left[\left(\frac{M^2 + \xi h^2}{2} \right) \left(\frac{R\ddot{R} + \dot{r}^2}{R^2} \right) + \frac{\partial_\mu h \partial^\mu h}{2} - U(h) \right], \quad (\text{D.9})$$

donde hemos usado la relación $\mathbf{R} = -6 \frac{R\ddot{R} + \dot{R}^2}{R^2}$ para el factor de escala en este marco[142].

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, obtenemos la ecuación diferencial

$$6\xi R h (R\ddot{R} + \dot{R}^2) - R^3 U'(h) - 3R^2 \dot{R} \dot{h} - R^3 \ddot{h} + R^3 \nabla^2 h = 0, \quad (\text{D.10})$$

Suponiendo que el campo h cambia lentamente en el tiempo, es decir que la energía dominante es la asociada al potencial, entonces $\dot{h} \ll h$. Si además suponemos que el campo es homogéneo, tenemos que $\nabla h = 0$, con lo que:

$$6\xi h \frac{\ddot{R}}{R} + 6\xi h H^2 - U'(h) - 3H\dot{h} = 0. \quad (\text{D.11})$$

Con miras a expresar estas relaciones en términos del parámetro de Hubble $H = \dot{R}/R$ solamente, tenemos que:

$$\dot{H} = \frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{\ddot{R}}{R} - H^2, \quad (\text{D.12})$$

entonces $\frac{\ddot{R}}{R} = \dot{H} + H^2$, por tanto la ecuación para h , en términos de H , es:

$$6\xi\dot{H}h + 12\xi H^2 h - 3H\dot{h} - U'(h) = 0. \quad (\text{D.13})$$

Apéndice E

Evolución del campo sin acoplamiento

E.1. Rango para el parámetro ξ en recalentamiento

Puesto que

$$\chi(t) = \xi\nu + \chi_0(t) \cos \int W(t)dt, \quad (\text{E.1})$$

derivando respecto al tiempo y usando la expresión para la densidad de energía $\rho = \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + U(\chi)$, podemos obtener:

$$|\dot{\chi}_0 \cos \int W(t)dt - \chi_0 W(t) \sin \int W(t)dt| = \sqrt{2(\rho - U(\chi))}. \quad (\text{E.2})$$

Si $\chi_0(t) > 0$, despejando la función $W(t)$, encontramos:

$$W(t) = \frac{\dot{\chi}_0(t) \cos \int W(t)dt}{\chi_0(t) \sin \int W(t)dt} - \frac{\sqrt{2(\rho - U(\chi))}}{\chi_0(t) \sin \int W(t)dt}, \quad (\text{E.3})$$

pero a partir de la ecuación (E.1) tenemos:

$$\frac{\chi(t) - \xi\nu}{\chi_0(t)} = \cos \int W(t)dt.$$

Usando la identidad trigonométrica fundamental, podemos obtener:

$$\sin \int W(t)dt = \frac{1}{\chi_0(t)} \sqrt{\chi_0^2(t) - (\chi(t) - \xi\nu)^2},$$

con lo que la función $W(t)$, toma la forma:

$$W(t) = \frac{\sqrt{2(\rho - U(\chi))}}{\sqrt{\chi_0^2(t) - (\chi(t) - \xi\nu)^2}} \left(-1 + \frac{\dot{\chi}_0}{\chi_0} \frac{\chi(t) - \xi\nu}{\sqrt{2(\rho - U(\chi))}} \right). \quad (\text{E.4})$$

Por otro lado, sabemos que $U(\chi_0(t)) = \rho(t)$, entonces la derivada respecto al tiempo de esta igualdad nos da $\frac{dU(\chi_0(t))}{d\chi_0} \dot{\chi}_0 = \dot{\rho}(t)$, con lo que derivando el potencial (5.5) respecto a la envolvente tenemos:

$$\frac{dU(\chi_0(t))}{d\chi_0} = 4 \frac{U(\chi_0)\chi_0^2}{(\chi_0^2 - \xi^2\nu^2)\chi_0}.$$

Usando la última ecuación, (5.4) y la expresión para la densidad de energía ρ , obtenemos:

$$4 \frac{\rho(t)\chi_0^2}{(\chi_0^2 - \xi^2\nu^2)} \frac{\dot{\chi}_0}{\chi_0} = \dot{\rho}(t) = -6H(\rho - U(\chi)),$$

y por tanto:

$$\frac{\dot{\chi}_0}{\chi_0} = \frac{-6H(\rho - U(\chi))}{4\rho} \frac{(\chi_0^2 - \xi^2\nu^2)}{\chi_0^2}. \quad (\text{E.5})$$

Reemplazando en la ecuación (E.4), tenemos:

$$W(t) = -\frac{\sqrt{2(\rho - U(\chi))}}{\sqrt{\chi_0^2(t) - (\chi(t) - \xi\nu)^2}} \left(1 + \frac{6H}{4\sqrt{2\rho}} \sqrt{1 - \frac{U(\chi)}{\rho} \frac{(\chi_0^2 - \xi^2\nu^2)(\chi - \xi\nu)}{\chi_0^2}} \right), \quad (\text{E.6})$$

y con un razonamiento análogo y tomando en cuenta que la función coseno es par, finalmente obtenemos:

$$W(t) = \frac{\sqrt{2(\rho - U(\chi))}}{\sqrt{\chi_0^2(t) - (\chi(t) - \xi\nu)^2}} \left(1 \pm \frac{6H}{4\sqrt{2\rho}} \sqrt{1 - \frac{U(\chi)}{\rho} \frac{(\chi_0^2 - \xi^2\nu^2)(\chi - \xi\nu)}{\chi_0^2}} \right), \quad (\text{E.7})$$

con el signo positivo para $\chi_0 > 0$ y negativo para $\chi_0 < 0$, respectivamente.

En la última ecuación podemos diferenciar varios escenarios:

- Si $U(\chi) = \rho$, es decir, si estamos sobre la envolvente $\chi(t) = \chi_0(t)$ se cumple, como esperábamos que $W(t) = 0$. Si estamos en las cercanías de la envolvente $U(\chi)$ tiende a ρ , con lo que el último término en (E.7) se anula.

- Si estamos en el mínimo de potencial, o en sus cercanías, $\chi \approx \xi\nu$, y el último término en (E.7) se anula.
- Finalmente, para valores de $\chi(t)$ intermedios, aún el último término se cancela porque ρ va como χ_0^4 , y por tanto tenemos un comportamiento de la forma χ/χ_0^2 , que aún puede ser despreciado.

Tomando en cuenta lo anterior tenemos que:

$$\frac{36H^2}{16 \times 2\rho} \left(1 - \frac{U(\chi)}{\rho}\right) \frac{(\chi_0^2 - \xi^2\nu^2)^2(\chi - \xi\nu)^2}{\chi_0^4} \ll 1, \quad (\text{E.8})$$

con lo que obtenemos la expresión aproximada para $W(t)$:

$$W(t) = \frac{\sqrt{2(\rho - U(\chi))}}{\sqrt{\chi_0^2(t) - (\chi(t) - \xi\nu)^2}}. \quad (\text{E.9})$$

Además, a partir de (E.8) y comparando con (E.4), notamos que:

$$\frac{\dot{\chi}_0}{\chi_0} \frac{\chi(t) - \xi\nu}{\sqrt{2(\rho - U(\chi))}} \ll 1,$$

Pero tomando en cuenta (E.9) en la última expresión, podemos obtener la aproximación (5.10).

Finalmente, para obtener las cotas sobre el parámetro de acoplamiento ξ , tomamos en cuenta que $H^2/\rho = 8\pi/3M_p^2$ en (E.8), entonces:

$$\left(1 - \frac{U(\chi)}{\rho}\right) \frac{(\chi_0^2 - \xi^2\nu^2)^2(\chi - \xi\nu)^2}{\chi_0^4} \ll \frac{M_P}{3\pi},$$

que en términos del campo y la envolvente puede escribirse como:

$$\left(1 - \frac{(\chi^2 - \xi^2\nu^2)^2}{(\chi_0^2 - \xi^2\nu^2)^2}\right) \frac{(\chi_0^2 - \xi^2\nu^2)^2(\chi - \xi\nu)^2}{\chi_0^4} \ll \frac{M_P}{3\pi}.$$

Suponiendo que $\chi_0^2 \gg \xi^2\nu^2$, podemos realizar la siguiente aproximación:

$$\left(1 - \frac{\chi^4}{\chi_0^4}\right) (\chi - \xi\nu)^2 \ll \frac{M_P}{3\pi}, \quad (\text{E.10})$$

que debe cumplirse para todos los valores del campo $\chi(t)$, en particular tenemos que un mínimo o un máximo de la función tiene que cumplir esta

condición.

Sea ahora $f(\chi) = f_1 + f_2 + f_3$, con $f_1 = \chi^2 - \chi^6/\chi_0^4$, $f_2 = 2\xi\nu(\chi^5/\chi_0^4 - \chi)$, $f_3 = \xi^2\nu^2(1 - \chi^4/\chi_0^4)$, con lo que:

$$f(\chi)_{max} \ll \frac{M_P}{3\pi},$$

pero para este caso podemos aproximar $f(\chi)_{max} \approx f_{1max} + f_{2max} + f_{3max}$, y de esta forma tenemos que:

$$\chi_0^2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{27}} \right) \ll \frac{M_P}{3\pi} + \xi^2\nu^2$$

De esta última obtenemos la relación (5.8):

$$\chi_0^2(t) \ll \frac{\sqrt{3}}{2\pi} M_p^2$$

E.2. Cálculo de la función envolvente

Tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^T (\rho - U(\chi)) dt &= \int \frac{(\rho - U(\chi))}{\dot{\chi}} d\chi, \\ &= \int \frac{(\rho - U(\chi))}{\sqrt{2(\rho - U(\chi))}} d\chi, \\ &\approx \frac{1}{2} \int \sqrt{2(\rho - U(\chi))} d\chi, \end{aligned}$$

donde hemos despejado $\dot{\chi}$ de la expresión para la densidad de energía ρ , y se ha tomado en cuenta que durante un periodo del movimiento cuasiarmónico la densidad de energía no varía mucho.

Por otra parte, sabemos que

$$T = \int_0^T dt = \int \frac{d\chi}{\dot{\chi}} \approx \int \frac{d\chi}{\sqrt{2(\rho - U(\chi))}},$$

y de las expresiones anteriores tenemos que:

$$\frac{1}{T} \int_0^T (\rho - U(\chi)) dt = \frac{\int \sqrt{(\rho - U(\chi))} d\chi}{\int \frac{d\chi}{\sqrt{(\rho - U(\chi))}}}. \quad (\text{E.11})$$

Para nuestro caso tenemos $U(\chi) \approx \frac{\lambda}{4} \left(\left(\frac{\chi}{\xi} \right)^2 - \nu^2 \right)^2$, con lo que se obtiene:

$$\frac{1}{T} \int_0^T (\rho - U(\chi)) dt \approx \frac{\int \sqrt{4\rho/\lambda - (u^2 - \nu^2)^2} du}{\int \frac{du}{\sqrt{4\rho/\lambda - (u^2 - \nu^2)^2}}}, \quad (\text{E.12})$$

donde $\chi = \xi u$.

Las integrales anteriores tienen la forma:

$$I_1 = \int (a^2 - (x^2 - b^2)^2)^{1/2} dx, \quad I_2 = \int (a^2 - (x^2 - b^2)^2)^{-1/2} dx,$$

donde $a^2 = 4\rho/\lambda$ y $b = \nu$, son constantes. Este tipo de integrales se encuentran listadas en [172], y se presentan a continuación:

$$\begin{aligned} I_1 = & \left\{ x \sqrt{\frac{1}{a-b^2}} (a^2 - [b^2 - x^2]^2) \right. \\ & - 2ia(a+b^2) \sqrt{\frac{a+b^2-x^2}{a+b^2}} \sqrt{\frac{a-b^2+x^2}{a-b^2}} F \left(i \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{1}{a-b^2}} x \right) \frac{b^2-a}{b^2+a} \right) \\ & \left. + 2ib^2(a+b^2) \sqrt{\frac{a+b^2-x^2}{a+b^2}} \sqrt{\frac{a-b^2+x^2}{a-b^2}} E \left(i \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{1}{a-b^2}} x \right) \frac{b^2-a}{b^2+a} \right) \right\} \\ & \div \left\{ 3 \sqrt{\frac{1}{a-b^2}} \sqrt{a^2 - (b^2 - x^2)^2} \right\}, \end{aligned}$$

$$I_2 = - \frac{i \sqrt{\frac{a+b^2-x^2}{a+b^2}} \sqrt{\frac{a-b^2+x^2}{a-b^2}} F \left(i \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{1}{a-b^2}} x \right) \frac{b^2-a}{b^2+a} \right)}{\sqrt{\frac{1}{a-b^2}} \sqrt{a^2 - (b^2 - x^2)^2}},$$

donde $E(x|m)$ y $F(x|m)$ son integrales elípticas de segundo y primer tipo, respectivamente.

De esta forma:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{x \sqrt{\frac{1}{a-b^2}} (a^2 - [b^2 - x^2]^2)}{i \sqrt{\frac{a+b^2-x^2}{a+b^2}} \sqrt{\frac{a-b^2+x^2}{a-b^2}} F \left(i \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{1}{a-b^2}} x \right) \frac{b^2-a}{b^2+a} \right)} + 2a(a+b^2) - 2b^2(a+b^2) \frac{E \left(i \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{1}{a-b^2}} x \right) \frac{b^2-a}{b^2+a} \right)}{F \left(i \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{1}{a-b^2}} x \right) \frac{b^2-a}{b^2+a} \right)} \right\}.$$

Pero $E(\phi|m) = \int_0^\phi \sqrt{(1-m \sin^2 \theta)} d\theta$ y $E(\phi|m) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{(1-m \sin^2 \theta)}} d\theta$, para este caso $m = \frac{b^2-a}{b^2+a}$, puesto que $\chi_o^2 \gg \xi^2 \nu^2$, entonces $\rho \gg \xi^4 \nu^4$, por tanto $\rho \gg \nu^2$ y tenemos que m tiende a -1 (recuérdense las expresiones para a y b), entonces podemos aproximar $E(\phi|m) \approx F(\phi|m)$, siempre que $\phi \in (0, \pi/4)$.

Estamos trabajando el caso $\frac{1}{a-b^2} x < \pi/4$, lo cual es equivalente a decir que:

$$\chi < \frac{\pi \xi}{4} \left(2 \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} - \nu^2 \right), \quad (\text{E.13})$$

y puesto que suponemos que el campo es positivo es obligatorio que $\rho > \lambda \nu^4/4$.

De los análisis anteriores obtenemos:

$$\frac{I_1}{I_2} \approx \frac{1}{3} [2a(a+b^2) - 2b(a+b^2)] = \frac{1}{3} (2a^2 - 2b^4),$$

y por tanto:

$$\int_0^T (\rho - U(\chi)) dt \approx \frac{1}{3} \left(8 \frac{\rho}{\lambda} - 2\nu^4 \right),$$

donde hemos reemplazado las constantes a y b .

Usando (5.11) y tomando escalas más grandes que el periodo T , obtenemos la ecuación (5.13):

$$\dot{\rho} = -4H\rho + \lambda \nu^4 H. \quad (\text{E.14})$$

Recordando que $H = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt}$, donde R es el factor de escala, podemos reescribir (E.14), como una ecuación diferencial lineal:

$$\frac{d\rho}{dR} + \frac{4}{R} \rho - \frac{\lambda \nu^4}{R} = 0,$$

que podemos resolver usando el método del factor integrante, que para este caso es R^4 , con lo que multiplicando e integrando obtenemos la relación (5.14):

$$\rho = \frac{1}{4}\lambda\nu^4 + CR^{-4}. \quad (\text{E.15})$$

Por otro lado, usando la ecuación (5.13) en la semi-ecuación de estado (2.20), obtenemos:

$$3HP = -\dot{\rho} - 3H\rho = 4H\rho - \lambda\nu^4 H - 3H\rho = H\rho - \lambda H\nu^4,$$

y a partir de la ecuación anterior obtenemos la ecuación de estado (5.15):

$$P = \frac{\rho}{3} - \frac{\lambda\nu^4}{3}.$$

Finalmente, para obtener la función envolvente en términos del tiempo, derivamos $U(\chi_0) = \rho(t)$ respecto al tiempo y tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= U'(\chi)\dot{\chi}, \\ -4H\rho + \lambda\nu^4 H &= U'(\chi)\dot{\chi}, \end{aligned}$$

donde las primas representan derivadas respecto al campo, y los punto derivadas respecto al tiempo. Despejando $\dot{\chi}$, reemplazando $U(\chi_0)$ por (5.5) y usando el hecho que $\chi_0^2 \gg \xi^2\nu^2$, podemos aproximar $U(\chi_0) \propto \chi_0^4$ y $U'(\chi_0) \propto \chi_0^3$, con lo que tendremos:

$$\dot{\chi}_0\chi_0^3 \approx -H\chi_0^4 + H\xi^4\nu^4. \quad (\text{E.16})$$

Haciendo la sustitución $u = \chi_0^4$, obtenemos la siguiente ecuación lineal para u :

$$\dot{u} + 4Hu = H\xi^4\nu^4,$$

que puede resolverse fácilmente, con lo que cambiando al campo obtenemos la relación (5.17):

$$\chi_0(t) = (\xi^4\nu^4 Ht - C)^{1/4} e^{-Ht}. \quad (\text{E.17})$$

Apéndice F

Resonancia

F.1. Ecuación para Y

Usamos las ecuaciones de Euler-Lagrange, a partir de la densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}R^3\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - R^3(\sigma\chi + a\chi^2)\varphi^2 - \frac{1}{2}R^3m_\varphi^2\varphi^2, \quad (\text{F.1})$$

para obtener:

$$(m_\varphi^2 + 2\sigma\chi + 2a\chi^2)\varphi + 3H\dot{\varphi} + \ddot{\varphi} - \frac{1}{R^2}\nabla^2\varphi = 0. \quad (\text{F.2})$$

Buscamos una solución de ondas planas de la forma

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left(\varphi_k^*(t) \hat{a}_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \varphi_k(t) \hat{a}_k^\dagger e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right), \quad (\text{F.3})$$

con lo que, reemplazando (F.3) en (F.2), obtenemos:

$$\begin{aligned} \int d^3k \left\{ (m_\varphi^2 + 2\sigma\chi + 2a\chi^2) \left(\varphi_k^*(t) \hat{a}_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \varphi_k(t) \hat{a}_k^\dagger e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) \right. \\ + 3H\dot{\varphi}_k^*(t) \hat{a}_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + 3H\dot{\varphi}_k(t) \hat{a}_k^\dagger e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ + \ddot{\varphi}_k^*(t) \hat{a}_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \ddot{\varphi}_k(t) \hat{a}_k^\dagger e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ \left. + \frac{k}{R^2} \varphi_k^*(t) \hat{a}_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \frac{k^2}{R^2} \varphi_k(t) \hat{a}_k^\dagger e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}. \end{aligned}$$

Separando las ecuaciones para \hat{a}_k y \hat{a}_k^\dagger tenemos que:

$$\left(m_\varphi^2 + 2\sigma\chi + 2a\chi^2 + \frac{k^2}{R^2} \right) \varphi_k(t) + 3H\dot{\varphi}_k(t) + \ddot{\varphi}_k(t) = 0, \quad (\text{F.4})$$

con una ecuación análoga para φ_k^* .

Con la transformación $\varphi_k = \frac{Y_k}{R^{3/2}}$, y tomando en cuenta que

$$\begin{aligned}\frac{d(Y_k R^{3/2})}{dt} &= \frac{1}{R^{3/2}} \left(\dot{Y}_k - \frac{3}{2} H Y_k \right), \\ \frac{d(Y_k R^{3/2})}{dt} &= \frac{1}{R^{3/2}} \left(-\frac{3}{2} H \dot{Y}_k + \ddot{Y}_k - \frac{9}{4} H^2 Y_k - \frac{3}{2} \dot{H} Y_k - \frac{3}{2} H \dot{Y}_k \right),\end{aligned}$$

obtenemos la siguiente ecuación para Y_k :

$$\left(m_\varphi^2 + 2\sigma\chi + 2a\chi^2 + \frac{k^2}{R^2} - \frac{3}{2}\dot{H} - \frac{9}{4}H^2 \right) Y_k + \ddot{Y}_k = 0. \quad (\text{F.5})$$

Esta ecuación puede ser reescrita en la forma de (5.29):

$$\ddot{Y}_k + (\omega^2 - g(\omega(t))) Y_k = 0, \quad (\text{F.6})$$

donde:

$$\omega_k^2(t) = \frac{k^2}{R^2} + m_\varphi^2 - \frac{3}{2}\dot{H} - \frac{9}{4}H^2 + 2a\overline{\chi^2}, \quad (\text{F.7})$$

$$g(\omega(t)) = 2\sigma\chi + 2a\chi^2 - 2a\overline{\chi^2} = \sigma\chi + 2a(\chi^2 - \overline{\chi^2}). \quad (\text{F.8})$$

Apéndice G

Temperatura finita

G.1. Energía y presión para un campo escalar

Energía:

A partir de (5.63), tenemos que:

$$\begin{aligned} E &= V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}} \omega e^{-\beta\omega}, \\ E &= \frac{4\pi V}{(2\pi)^3} \int \omega^2 \sqrt{\omega^2 - m^2} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}} \omega e^{-\beta\omega} d\omega, \end{aligned} \quad (\text{G.1})$$

donde hemos pasado a coordenadas esféricas y se ha usado la relación relativista momento-energía $\omega^2 = p^2 + m^2$.

Puesto que $\omega \gg m$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \omega^2 \sqrt{\omega^2 - m^2} &= \omega^3 \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}}, \\ &\approx \omega^3 - \frac{m^2}{2} \omega, \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

y por tanto:

$$\int \omega^2 \sqrt{\omega^2 - m^2} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}} \omega e^{-\beta\omega} d\omega = \int \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1} - \frac{m}{2} \int \frac{\omega}{e^{\beta\omega} - 1}, \quad (\text{G.3})$$

pero sabemos que [172]:

$$\int dx \frac{x^{2n-1}}{e^{bx} - 1} = (-1)^{n-1} \left(\frac{2\pi}{b} \right)^{2n} \frac{B_{2n}}{4n}, \quad (\text{G.4})$$

donde B_{2n} son números de Bernoulli.

Entonces:

$$\begin{aligned} \int \omega^2 \sqrt{\omega^2 - m^2} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}} \omega e^{-\beta\omega} d\omega &= \int \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1} - \frac{m}{2} \int \frac{\omega}{e^{\beta\omega} - 1}, \\ &= \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^4 \frac{1}{240} - \frac{m^2}{48} \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2, \\ &= \frac{(\pi k)^4}{15} T^4 - \frac{(\pi km)^2}{12} T^2, \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

Donde hemos usado los valores $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$ y $\beta = 1/kT$ [172]. Por tanto la densidad de energía $\rho = E/V$, tiene la forma dada en (5.65) si usamos $k = c = h = 1$.

Presión:

La presión puede obtenerse a partir de la función de partición en la forma [93]:

$$\begin{aligned} P &= T \frac{\partial}{\partial V} \ln Z = \frac{-4\pi T}{(2\pi)^3} \int dp p^2 \ln(1 - e^{\beta\sqrt{p^2+m^2}}), \\ &= \frac{-4\pi T}{(2\pi)^3} \int_m^\infty du u \sqrt{u^2 - m^2} \ln(1 - e^{\beta u}), \\ &= \frac{-4\pi}{3(2\pi)^3} \int_m^\infty du (u^2 - m^2)^{3/2} \frac{1}{e^{\beta u} - 1}, \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

donde $u^2 = p^2 + m^2$ y hemos integrado por partes en la segunda línea. Pero $(u^2 - m^2)^{3/2} \approx u^3 - \frac{3}{2}m^2u$, por tanto usando (G.4), podemos obtener la relación (5.66) para la presión.

G.2. Corrección a primer orden para $\ln Z$

La función de partición Z se escribe como:

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathfrak{D}[\varphi] \mathfrak{D}[\chi] e^S, \\ &= \int \mathfrak{D}[\varphi] \mathfrak{D}[\chi] e^{S_0} e^{S_I}, \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

con lo que, aplicando una transformada de Fourier a los campos escalares, para la acción libre, tenemos:

$$\begin{aligned}
 S_0 = & - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{\beta^2}{2} \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\mathbf{q}_1} \varphi_{-l_1}(-\mathbf{q}_1, -\omega_{l_1}) \varrho_0^{-1}(-\mathbf{q}_1, -\omega_{l_1}) \varphi_{l_1}(\mathbf{q}_1, \omega_{l_1}) \\
 & + \frac{\beta^2}{2} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \sum_{\mathbf{q}_2} \chi_{-l_2}(-\mathbf{q}_2, -\omega_{l_2}) \varrho_0^{-1}(-\mathbf{q}_2, -\omega_{l_2}) \chi_{l_2}(\mathbf{q}_2, \omega_{l_2}),
 \end{aligned} \tag{G.8}$$

donde:

$$\varrho_0^{-1}(\mathbf{q}, \omega_l) = \omega_l^2 + \mathbf{q}^2 + m^2, \tag{G.9}$$

$$\tag{G.10}$$

es el propagador para campo escalar libre.

Tenemos que la corrección a primer orden está dada por:

$$\ln Z_1 = \frac{\int \mathfrak{D}[\varphi] \mathfrak{D}[\chi] e^{S_0} S_I}{\int \mathfrak{D}[\varphi] \mathfrak{D}[\chi] e^{S_0}}. \tag{G.11}$$

Revisemos el numerador de la expresión, vemos que se puede escribir como:

$$\ln Z = \ln Z_{\varphi\chi} + \ln Z_{\varphi^2\chi^2}, \tag{G.12}$$

con:

$$\begin{aligned}
 \ln Z_{\varphi\chi} &= \int \mathfrak{D}[\varphi] \mathfrak{D}[\chi] e^{S_0} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \sigma \varphi \chi^2, \\
 \ln Z_{\varphi^2\chi^2} &= \int \mathfrak{D}[\varphi] \mathfrak{D}[\chi] e^{S_0} \int_0^\beta d\tau \int d^3x a \varphi^2 \chi^2.
 \end{aligned}$$

Para este caso las contribuciones a $\ln Z_0$ son:

$$\int \mathfrak{D}[\varphi] e^{S_{0\varphi}} = \prod_{l_1} \prod_{\mathbf{q}_1} \int d\tilde{\varphi}_{l_1} \exp\left\{-\frac{\beta^2}{2}(\omega_{l_1}^2 + \mathbf{q}_1^2 + m^2)\right\} \tilde{\varphi}_{-l_1}(-\mathbf{q}_1, -\omega_{l_1}) \tilde{\varphi}_{l_1}(\mathbf{q}_1, \omega_{l_1}), \tag{G.13}$$

$$\int \mathfrak{D}[\chi] e^{S_{0\chi}} = \prod_{l_2} \prod_{\mathbf{q}_2} \int d\tilde{\chi}_{l_2} \exp\left\{-\frac{\beta^2}{2}(\omega_{l_2}^2 + \mathbf{q}_2^2 + m^2)\right\} \tilde{\chi}_{-l_2}(-\mathbf{q}_2, -\omega_{l_2}) \tilde{\chi}_{l_2}(\mathbf{q}_2, \omega_{l_2}), \tag{G.14}$$

Para la unión, tomamos en cuenta que para los campos escalares $\tilde{\varphi}_{-l_1}(-\mathbf{q}_1, -\omega_{l_1}) = \tilde{\varphi}_{l_1}^* = \tilde{\varphi}_{l_1}$, y podemos escribir:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}[\varphi] \mathcal{D}[\chi] e^{S_0} &= \prod_{l,l'} \prod_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \int d[\tilde{\varphi}_l] d[\tilde{\chi}_{l'}] \times \exp\left\{-\frac{\beta^2}{2} \wp_0^{-1}(\mathbf{q}, \omega_l)\right\} \tilde{\varphi}_{l_1}^2(\mathbf{q}_1, \omega_{l_1}) \\ &\times \exp\left\{-\frac{\beta^2}{2} \wp_0^{-1}(\mathbf{q}, \omega_l)\right\} \tilde{\chi}_{l_1}^2(\mathbf{q}_2, \omega_{l_2}), \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

expresión para la cual desarrollaremos cada contribución por separado.

- Para el caso de la interacción de la forma $\varphi\chi^2$, tenemos que el término es de grado impar en un campo escalar, al integrar en este campo φ obtenemos una integral de la forma:

$$\int x e^{x^2} dx, \quad (\text{G.16})$$

por lo que la contribución a primer orden en este caso es cero.

- Para el término de interacción $\varphi^2\chi^2$ veremos que a primer orden la contribución es diferente de cero, lo cual se esperaba, puesto que el término es par en los campos escalares:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}[\varphi] \mathcal{D}[\chi] e^{S_0} \int_0^\beta d\tau \int d^3x a \varphi^2 \chi^2 &= \\ \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4 = -\infty}^{\infty} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4} \frac{\beta^2}{V^2} \tilde{\varphi}_{l_1}(-\mathbf{q}_1, -\omega_{l_1}) \tilde{\chi}_{l_2}(\mathbf{q}_2, \omega_{l_2}) \tilde{\varphi}_{l_3}(\mathbf{q}_3, \omega_{l_3}) \tilde{\chi}_{l_4}(\mathbf{q}_4, \omega_{l_4}) \\ \times \int_0^\beta d\tau \int d^3x e^{i(\omega_{l_1} + \omega_{l_2} + \omega_{l_3} + \omega_{l_4})\tau} e^{i(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4)x}. \end{aligned} \quad (\text{G.17})$$

Integrando la expresión anterior respecto al tiempo y a la posición obtenemos un factor de $\beta V \delta_{l_1, l_2, l_3, l_4} \delta_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4}$, con lo que obtenemos las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} l_1 &= -l_3, & l_2 &= -l_4, \\ \mathbf{q}_1 &= -\mathbf{q}_3, & \mathbf{q}_2 &= -\mathbf{q}_4. \end{aligned}$$

Observado la expresión para Z_0 , notamos que las integrales en los campos escalares toman la forma[172]:

$$\frac{\int dx e^{-1/2ax^2} x^2}{\int dx e^{-1/2ax^2}} = \frac{1}{a}, \quad (\text{G.18})$$

y por tanto tenemos que:

$$\ln Z_{\varphi^2\chi^2} = -6a\beta V \left[T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \wp_0^{-1}(\mathbf{q}, \omega_n) \right]^2, \quad (\text{G.19})$$

es decir, a primer orden sólo el último término contribuye.

Bibliografía

- [1] H. P. Robertson, “On the foundations of relativistic cosmology,” *Proc. N. A. S.*, vol. 15, pp. 822–829, (1929).
- [2] J. Barrow, “What is the principal evidence for the cosmological principle,” *Q. Jl R. astr. Soc.*, vol. 30, no.-, pp. 163–167, (1989).
- [3] K. Olive and G. Steigman, “Big-bang cosmology.” Universidad de Minnesota, (2001).
- [4] G. Lazarides, “Introduction to cosmology,” *PRHEP-Corfu98*, vol. 014, pp. 1–15, (1998).
- [5] k. S. Kelvin, O. Lahav, and M. J. Rees, “The large-scale smoothness of the universe,” *Nature*, vol. 397, pp. 225–230, (1999).
- [6] K. Olive and G. Steigman, “On the abundance of primordial helium,” *Astrophys. J. Suppl.*, vol. 97, no.-, pp. 49–58, (1995).
- [7] M. Turner, “Inflationary cosmology,” in *Relativistic astrophysics* (B. J. Jones and D. Markovic, eds.), Cambridge university press, (1996).
- [8] E. Kolb and M. Turner, *The early universe*. Adison-Wesley, (1990).
- [9] I. J.N, *An Introduction to Mathematical Cosmology*. Cambrige Univerty Press, (2001).
- [10] A. D. Linde, “Monopoles as big as a universe,” *Phys. Lett.B*, vol. 327, no. 3–4, pp. 208–213, (1994).
- [11] D. Lyth and A. Riotto, “Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation,” *Physics Reports*, vol. 314, no. 1, pp. 1–146, (1999).

-
- [12] A. Liddle and D. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale structure*. Cambridge, University Press, (2000).
- [13] R. Allahverdi, R. Brandenberger, F. Cyr-Racine, and A. Mazumdar, “Reheating in inflationary cosmology: Theory and applications.,” *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, vol. 60, no. 1, p. 27, (2010).
- [14] G. Borner, *The Early Universe, Facts and Fiction*. Springer-Verlag, (1993).
- [15] A. Guth, “A possible solution to the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems,” *Phys. Rev. D*, vol. 23, no. 2, pp. 347–356, (1981).
- [16] S. Nurmi, “Aspects of inflationary models at low energy scales.” University of Helsinki, Report series in physics, (2008). Disertación académica.
- [17] T. Vachaspati and M. Trodden, “Causality and cosmic inflation,” *Phys. Rev. D.*, vol. 61, pp. 023502–1–4, (1999).
- [18] A. Linde, *Particle Physics and inflationary cosmology*. CRC Press, (1990).
- [19] D. H. Perkins, *Particle Astrophysics*. Oxford University press, (2003).
- [20] A. D. Linde, “A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems,” *Phys. Lett.B*, vol. 108, no. 6, pp. 389–393, (1982).
- [21] P. J. Steinhardt and M. S. Turner, “Prescription for successful new inflation,” *Phys. Rev.*, vol. 29, no. 10, pp. 2162–2171, (1984).
- [22] S. Bonometto, *Modern Cosmology*. Institute of Physics Publishing,, (2002).
- [23] V. Mukhanov, *Physical foundations of cosmology*. Cambridge University Press, (2005).
- [24] A. Linde, “Chaotic inflation,” *Phys Lett B*, vol. 129, no. 3, pp. 117–181, (1983).
-

-
- [25] A. Linde, “Chaotic inflating universe,” *JETP Lett. (Engl. Transl.); (United States)*, vol. 38, no. 3, pp. 176–178, (1983).
- [26] J. W. Norbury, *General relativity and cosmology*. Unirversity of Wisconsin-Milwaukee, (1997).
- [27] A. Liddle, P. Parsons, and J. Barrow, “Formalizing the slow-roll approximation in inflation,” *Phys. Rev. D*, vol. 50, no. 12, pp. 7222–7232, (1994).
- [28] F. Bezrukov and M. Shaposhnikov, “The standard model higgs boson as the inflaton,” *Phys. Lett. B*, vol. 659, no. 3, pp. 703–706, (2008).
- [29] F. Bezrukov, A. Magnin, and M. Shaposhnikov, “Standard model higgs boson mass from inflation,” *Phys. Lett. B*, vol. 675, no. 1, pp. 88–92, (2009).
- [30] F. Bezrukov, “Non-minimal coupling in inflation and inflating with the higgs boson.” arXiv:0810.3165v1, Oct (2008).
- [31] F. Bezrukov, A. Magnin, M. Shaposhnikov, and S. Sibiryakov, “Higgs inflation consistency and generalisations,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2011, no. 1, pp. 1–26, (2011).
- [32] F. Bezrukov and M. Shaposhnikov, “Standard model higgs boson mass from inflation: two loop analysis,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2009, no. 07, p. 089, (2009).
- [33] F. Bezrukov and M. Shaposhnikov, “The standard model higgs boson as the inflaton,” *Physics Letters B*, vol. 659, no. 3, pp. 703–706, (2008).
- [34] V. Faraoni and E. Gunzig, “Einstein frame or Jordan frame?,” *International Journal of Theoretical Phys.*, vol. 38, no. 1, pp. 217–225, (1999).
- [35] C. Germani and A. Kehagias, “New model of inflation with nonminimal derivative coupling of standard model higgs boson to gravity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, no. 1, p. 011302, (2010).
- [36] G. Giudice, E. Kolb, and A. Riotto, “Largest temperature of the radiation era and its cosmological implications,” *Phys. Rev. D.*, vol. 64, no. 2, p. 023508, (2001).
-

-
- [37] M. Kawasaki and K. Kohri, “MeV-scale reheating temperature and thermalization of neutrino background,” *Phys. Rev. D.*, vol. 62, no. 2, p. 023506, (2000).
- [38] S. Hannestad, “What is the lowest possible reheating temperature?,” *Phys. Rev. D.*, vol. 7, no. 4, p. 043506, (2004).
- [39] J. a Bellido, D. Figueroa, and J. Rubio, “Preheating in the standard model with the higgs inflaton coupled to gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 79, no. 2, p. 063531, (2009).
- [40] Y. Shtanov, J. Traschen, and R. Branderberger, “Universe reheating after inflation,” *Phys. Rev. D*, vol. 51, no. 10, p. 5438, (1995).
- [41] C. P. Burgess, H. M. Lee, and M. Trott, “On higgs inflation and naturalness,” *JHEP*, vol. 2010, no. 7, pp. 1–10, (2010).
- [42] J. Barbon and J. Espinosa, “On the naturalness of higgs inflation,” *Phys. Rev. D*, vol. 79, no. 8, p. 081302, (2009).
- [43] M. Atkins and X. Calmet, “Remarks on higgs inflation,” *Phys. Lett. B*, vol. 697, no. 1, pp. 37–40, (2011).
- [44] A. D. Simone, M. Hertzberg, and F. Wilczek, “Running inflation in the standard model,” *Phys. Lett. B*, vol. 678, no. 1, pp. 1–8, (2009).
- [45] F. Bezrukov, D. Gorbunov, and M. Shaposhnikov, “On initial conditions for the hot big bang,” *JCAP*, vol. 2009, no. 6, p. 029, (2009).
- [46] L. Kofman, A. Linde, and A. Starobinsky, “Reheating after inflation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 73, no. 24, p. 3195, (1994).
- [47] M. S. Turner and F. Wilczek, “Inflationary axion cosmology,” *Physical review letters*, vol. 66, no. 1, p. 5, 1991.
- [48] A. Albrecht and P. Steinhardt, “Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking,” *Phys. Rev. Lett*, vol. 48, no. 17, p. 1220, (1982).
- [49] C. B. Collins and S. W. Hawking, “Why is the universe isotropic?,” *The Astrophysical Journal*, vol. 180, pp. 317–334, (1973).
-

-
- [50] J. A. Peacock, *Cosmological Physics*. Cambridge University press, (1999).
- [51] K. Rudnicki, “What are the empirical bases of the Hubble law?,” *Apeiron*, vol. 10, pp. 27–37, (1991).
- [52] W. L. Freedman and B. F. Madore, “The Hubble constant,” *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, vol. 48, pp. 1–80, (2010).
- [53] W. L. F. et. al, “Final results from the Hubble space telescope key project to measure the Hubble constant,” *The Astrophysical journal.*, vol. 553, no. 1, pp. 47–72, (2001).
- [54] Y. B. Zel’dovich and I. D. Novikov, *Relativistic astrophysics 2: the structure and evolution of the universe*. University of Chicago Press, (1983).
- [55] V. A. Rubakov, “Introduction to cosmology,” *Proc. Sci.*, vol. RTN, pp. 1–58, (2005).
- [56] A. J. Hamilton, “General relativity, black holes, and cosmology,” (2014). Lecture notes ASTR 3740 Relativity and cosmology, Colorado University.
- [57] P. Hoyle, *Relativistic Astrophysics and Cosmology*. Springer, (2006).
- [58] P. J. Peebles, *Physical cosmology*. Princeton University Press, (1991).
- [59] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications on the general theory of relativity*. John Wiley and Sons, Inc, (1972).
- [60] J. Rubio, *Teoría Cuántica de Campos y Cosmología*. Universidad Autónoma de Madrid, (2011). Nostas de clase.
- [61] A. Friedmann, “On the curvature of space,” *Zeitschrift fur physik*, vol. 10, pp. 377–386, (1922). Traducido por B. Doyle.
- [62] A. G. Lemaitre, “Expansion of the universe, a homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 91, pp. 483–490, (1931).
-

-
- [63] J. Plebański and A. Krasieński, *An Introduction to General Relativity and Cosmology*. Cambridge University press, (2006).
- [64] M. Davis, “Is the universe homogeneous on large scales?.” *astro-ph/9610149*., Oct. (1996).
- [65] R. Scaramella, G. Vettolani, and G. Zamorani, “The distribution of clusters of galaxies within 300 mpc h^{-1} and the crossover to an isotropic and homogeneous universe,” *The Astrophysical Journal*, vol. 376, pp. L1–L4, (1991).
- [66] E. Harrison, “The redshift-distance and velocity-distance laws,” *The Astrophysical Journal*, vol. 403, pp. 28–31, (1993).
- [67] A. B. Whiting, “The expansion of space,” *The Observatory*, vol. 124, pp. 174–189, (2004).
- [68] E. Hubble, “A relation between distance and radial velocity among extra galactic nebulae,” *Proc. N. A. S.*, vol. 15, pp. 168–173, (1929).
- [69] S. W. Hawking, R. Laflamme, and G. W. Lyons, “Origin of time asymmetry,” *Phys. Rev. D*, vol. 47, no. 12, pp. 5342–5356, (1993).
- [70] M. Castagnino, L. Lara, and O. Lombardi, “The cosmological origin of time asymmetry,” *Class. Quantum Grav.*, vol. 20, pp. 369–391, (2003).
- [71] A. I. Burshstein, *Introduction to thermodynamics and kinetic theory of matter*. WILEY-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, Weinheim, (2005).
- [72] S. Zumdahl, *Chemical principles*. Houghton Mifflin Company, (2005).
- [73] M. Szydlowski, A. Kurek, and A. Krawiec, “Top ten accelerating cosmological models,” *Phys. Lett. B*, vol. 642, pp. 171–178, (2006).
- [74] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, “Comparison of cosmological models using recent supernova data,” *Phys. Rev. D*, vol. 70, pp. 043531–1–11, (2004).
- [75] A. G. Lemaitre, “The expanding universe,” *General relativity and Gravitation*, vol. 29, no. 5, pp. 641–680, (1997).
-

-
- [76] P. Joshi, *Global Aspects in Gravitation and Cosmology*. Clarendon Press Oxford, (1993).
- [77] M. Roos, *Introduction to cosmology*. John Wiley and Sons, Ltd, (2003).
- [78] B. Carter, “Covariante theory of conductivity in ideal fluid or solid media,” in *Relativistic fluid dynamics* (A. Anile and Y. Choquet-Bruhat, eds.), Springer-Verlag, (1987).
- [79] J. D. Walecka, *Introduction to General relativity*. World Scientific Publishing, (2007).
- [80] N. K. Glendenning, *Special and General Relativity With Applications to White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes*. Springer, (2007).
- [81] P. Coles and F. Lucchin, *Cosmology The Origin and Evolution of Cosmic Structure*. John Wiley and Sons, Ltd, (2002).
- [82] K. Tamvakis, “An introduction to the physics of the early universe,” in *The Physics of the Early Universe* (E. Papantonopoulos, ed.), Springer, (2005).
- [83] A. Friedmann, “On the possibility of a world with constant negative curvature of space.,” *general relativity and gravitation*, vol. 31, no. 12, pp. 2001–2008, (1999). Originalmente publicado en *Zeitschrift fur Physik* 21 , 326-332 (1924), con el título *Uber die Moglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes*.
- [84] M. Berry, *Principles of Cosmology and gravitation*. Cambridge University Press, (1976).
- [85] W. Fowler, “The age of the observable universe,” *Q. Jl R. astro. Soc.*, vol. 28, pp. 87–108, (1987).
- [86] J. P. Henry, “A measurement of the density parameter derived from the evolution of cluster x-ray temperatures.,” *The astrophysical journal*, vol. 489, pp. L1–L5, (1997).
- [87] J. Wainwright and G. F. Ellis, “Friedmann-lemaitre universes,” in *Dynamical systems in cosmology* (J. Wainwright and G. F. Ellis, eds.), Cambridge university press, (1997).
-

-
- [88] M. White and J. Silk, “Observational constraints on open inflation models,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 77, no. 23, pp. 4704–4707, (1996).
- [89] L. J. A. as, A. Romero, and M. Sánchez, “Uniqueness of complete space-like hypersurfaces of constant mean curvature in generalized robertson-walker spacetimes,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 27, no. 1, pp. 71–84, (1995).
- [90] M. Kamionkowski, “The case of the curved universe: Open, closed, or flat?,” *Science*, vol. 280, no. 5368, pp. 1397–1398, (1998).
- [91] M. Kardar, *Statistical physics of particles*. Cambridge University Press, (2007).
- [92] S. Weinberg, “Entropy generation and the survival of protogalaxies in an expanding universe,” *The astrophysical journal*, vol. 168, pp. 175–194, (1971).
- [93] W. Greiner, L. Neise, and H. Stocker, *Thermodynamics an statistical mechanics*. Springer, (1995).
- [94] B. Gumjudpai, “Introduction to cosmology,” (2014). Lecture notes he Third Thai School on Cosmology: The Early Universe (TPCosmo III), Khon Kaen University, Khon Kaen, Thailand.
- [95] C. Grupen, *Astroparticle physics*. Springer, (2005).
- [96] C. Misner, K. Thorne, and J. Wheeler, *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, (1970).
- [97] D. Raine and E. Thomas, *An Introduction to the Science of Cosmology*. IOP Publishing Ltd, (2001).
- [98] E. Harrison, “Mining energy in an expanding universe,” *The Astrophysical Journal*, vol. 446, pp. 63–66, (1995).
- [99] J. Narlikar and T. Padmanabhan, “Standard cosmology and alternatives: A critical appraisal,” *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, vol. 39, pp. 11–48, (2001).
- [100] L. Ryder, *Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, (2009).
-

-
- [101] P. J. E. Peebles, D. N. Schramm, E. L. Turner, and R. G. Kron, “The case for the hot big bang cosmology,” *Nature*, vol. 352, pp. 769–776, (1991).
- [102] A. A. Penzias and R. W. Wilson, “A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s,” *The astrophysical journal*, vol. 142, no. 1, pp. 419–421, (1965).
- [103] A. A. Penzias and R. W. Wilson, “Measurement of the flux density of cas a at 4080 mc/s,” *The astrophysical journal*, vol. 142, no. 3, p. 1149, (1965).
- [104] R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll, and D. T. Wilkinson, “Cosmic black-body radiation,” *The astrophysical journal*, vol. 142, no. 1, pp. 414–419, (1965).
- [105] Y. B. Zel’dovich and I. D. Novikov, “The hypothesis of cores retarded during expansion and the hot cosmological model,” *Soviet astronomy-AJ*, vol. 10, no. 4, pp. 602–603, (1967). Traducido de astronomicheskii Zhurnal, Vol 43 No.4.
- [106] A. G. Doroshkevich, Y. B. Zel’dovich, and I. D. Novikov, “The origin of galaxies in an expanding universe,” *Soviet astronomy- AJ*, vol. 11, no. 2, pp. 233–239, (1967). Traducido de astronomicheskii Zhurnal, Vol 44 No.2.
- [107] J. A. Wheeler, “Geometrodynamics and the problem of motion,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 33, no. 1, pp. 63–78, (1961).
- [108] A. Mitra, “Why the big bang model cannot describe the observed universe having pressure and radiation,” *Journal of Modern Physics*, vol. 2, pp. 1436–1442, (2011).
- [109] I. Prigogine, “What is entropy,” *Naturwissenschaften*, vol. 76, no. 1, pp. 1–8, (1989).
- [110] H. Cho and R. Kantowski, “Measure on a subspace of frw solutions and the flatness problem of standard cosmology,” *Phys. Rev. D.*, vol. 50, no. 10, pp. 6144–6149, (1994).
-

-
- [111] A. Zee, “Horizon problem and the broken symmetric theory of gravity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 44, no. 11, pp. 703–706, (1979).
- [112] A. D. Linde, “Phase transitions in gauge theories and cosmology,” *Rep. Prog. Phys.*, vol. 42, pp. 390–437, (1979).
- [113] M. Peskin and D. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley publishing company, (1995).
- [114] A. Albrecht and R. Brandenberger, “Realization of new inflation,” *Phys. Rev. D*, vol. 31, no. 6, p. 1225, (1985).
- [115] M. Desroche, G. Felder, J. Kratochvil, and A. Linde, “Preheating in new inflation,” *Phys. Rev. D*, vol. 71, no. 10, p. 103516, (2005).
- [116] J. Bardeen, P. Steinhardt, and M. Turner, “Spontaneous creation of almost scale-free density perturbations in an inflationary universe,” *Phys. Rev. D*, vol. 28, no. 4, p. 679, (1998).
- [117] A. Linde, “Inflationary cosmology,” in *Inflationary cosmology* (M. Lemoine, J. Martin, and P. Peter, eds.), Springer, (2007).
- [118] G. Mazenko, W. Unruh, and R. Wald, “Does a phase transition in the early universe produce the conditions needed for inflation?,” *Phys. Rev. D*, vol. 31, no. 2, p. 273, (1985).
- [119] J. Lidsey, “Towards a solution of the omega-problem in power law and chaotic inflation,” *Class. Quantum Grav.*, vol. 8, pp. 923–933, (1991).
- [120] R. Fakir and W. Unruh, “Improvement on cosmological chaotic inflation through nonminimal coupling,” *Phys. Rev. D*, vol. 41, no. 6, pp. 1983–1971, (1990).
- [121] M. Madsen and P. Coles, “Chaotic inflation,” *Nuclear Physics B*, vol. 298, no. 4, pp. 701–725, (1988).
- [122] G. Bellido, “Astrophysics and cosmology.” No. hep-ph/0004188, (2000). Published version from CERN.
- [123] A. Linde, “Inflation and quantum cosmology,” *Physica scripta*, vol. T36, pp. 30–54, (1991).
-

-
- [124] R. Brandenberger, “Introduction to early universe cosmology.” arXiv preprint arXiv:1103.2271, (2011). Proceedings of science.
- [125] T. Damour and V. Mukhanov, “Inflation without slow roll,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 80, no. 16, pp. 3440–31443, (1998).
- [126] E. Copeland, E. A. Liddle, and J. Lidsey, “Reconstructing the inflaton potential: In principle and in practice,” *Phys. Rev. D*, vol. 48, no. 6, pp. 2529–2547, (1999).
- [127] L. Alabidi and D. Lyth, “Inflation models and observation,” *JCAP*, vol. 2006, no. 05, p. 016, (2006).
- [128] Y. Hu, M. Turner, and E. Weinberg, “Dynamical solutions to the horizon and flatness problems,” *Phys. Rev. D*, vol. 49, pp. 3830–3836, (1994).
- [129] R. Brawer, *Inflationary Cosmology and the Horizon and Flatness Problems: The Mutual Constitution of Explanation and Questions*. Massachusetts institute of technology, (1996).
- [130] D. Kaiser. arXiv:astro-ph/9507108v3, Nov (1995).
- [131] E. Komatsu and T. Futamase, “Complete constraints on a nonminimally coupled chaotic inflationary scenario from the cosmic microwave background,” *Phys. Rev. D*, vol. 59, no. 6, p. 064029, (1999).
- [132] C. D. Peralta and Y. Rodriguez, “Identificando el inflatón con el bosón de higgs del modelo estándar,” *Rev. Acad. Colomb. Cienc.*, vol. XXXVI, no. 138, pp. 25–36, (2012).
- [133] I. Garcia, “Predicciones para la búsqueda de Higgs supersimétricos en el LHC.” Universidad de Cantabria, Jun (2012).
- [134] A. Macias and A. Garcia, “Jordan frame or Einstein frame?,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 33, no. 5, pp. 889–899, (2001).
- [135] G. Giudice and H. Lee, “Unitarizing higgs inflation,” *Phys. Lett. B*, vol. 694, no. 4, pp. 294–300, (2011).
-

-
- [136] J. Yokoyama and K. Maeda, “On the dynamics of the power law inflation due to an exponential potential,” *Phys. Lett. B*, vol. 207, no. 1, pp. 31–35, (1988).
- [137] S. Kanno, J. Soda, and M. Watanabe, “Anisotropic power law inflation,” *JCAP*, vol. 2010, no. 12, p. 024, (2010).
- [138] S. Tsujikama, “Power-law inflation with a nonminimally coupled scalar field,” *Phys. Rev. D*, vol. 62, no. 4, p. 043512, (2000).
- [139] R. Lerner and J. McDonald, “Higgs inflation and naturalness,” *JCAP*, vol. 2010, no. 04, p. 015, (2010).
- [140] N. Makino and M. Sasaki, “The density perturbation in the chaotic inflation with non-minimal coupling,” *Progress of theoretical physics*, vol. 86, no. 1, pp. 103–118, (1991).
- [141] D. Kaiser, “Primordial spectral indices from generalized einstein theories.,” *Phys. Rev. D*, vol. 52, no. 8, p. 4295, (1995).
- [142] S. Capozziello, R. de Ritis, and A. Marino, “Some aspects of the cosmological conformal equivalence between the jordan frame and the einstein frame,” *Class. Quantum. Grav.*, vol. 14, no. 12, pp. 3243–3258, (1997).
- [143] A. Linde, “Chaotic inflation with constrained fields,” *Phys. Lett. B*, vol. 202, no. 2, pp. 194–197, (1988).
- [144] W. Cottingham and D. Greenwood, *An introduction to the standard model of particle physics*. Cambridge University Press, (2007).
- [145] C. Burgess and G. Moore, *The standard model: A primer*. Cambridge University Press, (2007).
- [146] T. Cheng, L. Li, and T. Cheng, *Gauge theory of elementary particle physics*. Clarendon press Oxford, (1984).
- [147] E. Shuryak, *The QCD vacuum, hadrons and superdense matter*, vol. 71. World Scientific, (2004).
- [148] S. Coleman and E. Weinberg, “Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking,” *Phys. Rev. D*, vol. 7, no. 6, p. 1888, (1973).
-

-
- [149] H. Politzer and S. Wolfram, “Bounds on particle masses in the weinberg-salam model,” *Phys. Lett.*, vol. 82, no. 2, pp. 242–246, (1979).
- [150] R. Flores and M. Sher, “Upper limits to fermion masses in the Glashow-Weinberg-Salam model,” *Phys. Rev. D*, vol. 27, no. 7, pp. 1679–1682, (1983).
- [151] K. Olive and et al. (Particle Data Group) *Chin. Phys.*, vol. C, no. 38, p. 090001, (2014).
- [152] M. Duncan, R. Philippe, and M. Sher, “Theoretical ceiling on quark masses in the standard model,” *Phys. Lett.*, vol. 253B, no. 3, pp. 165–168, (1985).
- [153] ATLAS Collaboration, “Combined search for the standard model higgs boson using up to $4.9fb^{-1}$ of pp collision data at $\sqrt{s}=7\text{TeV}$ with the ATLAS detector at the LHC,” *Phys. Lett. B*, vol. 710, no. 1, pp. 49–66, (2012).
- [154] LEP Collaboration, “Search for the standard model higgs boson at LEP,” *Phys. Lett. B*, vol. 565, no. 0, pp. 61–75, (2003).
- [155] L. Kofman, A. Linde, and A. Starobinsky, “Towards the theory of reheating after inflation,” *Phys. Rev. D*, vol. 56, no. 6, p. 3258, (1997).
- [156] L. Kofman, “The origin of matter in the universe: Reheating after inflation.” arXiv preprint astro-ph/9605155, (1996).
- [157] R. Micha and I. Tkachev, “Relativistic turbulence: A long way from preheating to equilibrium,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 90, no. 12, p. 121301, (2003).
- [158] D. Nanopoulos and K. Olive, “After primordial inflation,” *Phys. Lett. B.*, vol. 127, no. 1, pp. 30–34, (1983).
- [159] P. F. Byrd and M. D. Friedman, *HandBook of elliptic integrals for engineers and scientists*. Springer Verlag, (1971).
- [160] M. Boas, *Mathematical Methods in the physical sciences*. John Wiley and sons, (1983).
-

-
- [161] C. Zhang, “An introduction to averaging method,” *Dynamics at the Horsetooth, online*, vol. 2A, no. 676, (2010).
- [162] G. Arfken and H. Weber, *Mathematical methods for Physicists*. Elseiver Inc, (2005).
- [163] M. Brocca, “Métodos asintóticos en la teoría de oscilaciones no lineales de sistemas dinámicos con varios grados de libertad.” Universidad Nacional de ingeniería, Tesis de maestria, (2010).
- [164] N. Bogoliubov and Y. Mitropolsky, *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations*. Gordon and Breach science publishers, (1961).
- [165] S. Habib, C. Molina, and E. Mottola, “Energy-momentum tensor of particles created in an expanding universe,” *Phys. Rev. D*, vol. 61, no. 2, p. 024010, (1999).
- [166] A. Dolgov and D. Kirilova, “Production of particles by a variable scalar field,” (1990).
- [167] M. L. Bellac, *Thermal field Theory*. Cambridge University Press, (1996).
- [168] G. Hooft, *Perturbative Quantum Gravity*, vol. 40 of *The Subnuclear*, pp. 249–269. World Scientific Publishing, (2003). Tomado de From Quarks and Gluons To Quantum Gravity, editado por A. Zichiche.
- [169] N. Straumann, *General relativity and relativistic astrophysics*. Springer-Verlag, (1984).
- [170] J. Rubio, *La teoría escalar-Tensor como una alternativa plausible a la relatividad general*. Departamento de Física, Universidad Autónoma de Madrid, (2011). Notas de clase.
- [171] R. M. Wald, *General Relativity*. The Univesity of Chicago Press, (1984).
- [172] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*. Academic Press, (2007).
-