

*Enredamiento y emisión colectiva en sistemas  
tipo Dicke*

GUSTAVO DAVER CIPAGAUTA CUITIVA  
CÓDIGO: 01835375



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
BOGOTÁ D.C.  
NOVIEMBRE DE 2014

*Enredamiento y emisión colectiva en sistemas  
tipo Dicke*

GUSTAVO DAVER CIPAGAUTA CUITIVA

CÓDIGO: 01835375

DIRECTOR

KAREN MILENA FONSECA ROMERO

DOCTORA EN FÍSICA



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

BOGOTÁ D.C.

NOVIEMBRE DE 2014

---

---

## Agradecimientos

---

---

Al Grupo de Óptica e Información Cuántica de la Universidad Nacional de Colombia, concretamente a su directora la profesora Karen Fonseca Romero, quien a través del proyecto 12584 de la DIB-UNAL garantizó los recursos económicos que hicieron posible que le dedicara tiempo a elaborar este trabajo.

---

---

# Índice general

---

---

<b>Introducción</b>	<b>II</b>
<b>1. Efectos colectivos y enredamiento</b>	<b>1</b>
1.1. CONTEXTUALIZACIÓN . . . . .	2
1.2. DOS RADIADORES INTERACCIONANTES . . . . .	7
<b>2. Ejemplos de sistemas tipo Dicke</b>	<b>13</b>
2.1. DIPOLOS ATÓMICOS . . . . .	13
2.2. DIPOLOS SEMICONDUCTORES . . . . .	20
<b>Conclusiones</b>	<b>27</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>28</b>

---

---

# Introducción

---

---

Una de las áreas de mayor crecimiento en la física de las últimas décadas es la del procesamiento cuántico de la información. Entre los objetivos importantes del área está el diseño y la fabricación de computadores cuánticos, los cuales prometen la acometida y solución de problemas que son actualmente intratables por computadores clásicos, pues tienen una aceleración exponencial con respecto a los mejores algoritmos clásicos conocidos. Aunque se han construido algunos computadores cuánticos de unos pocos *qubits* sobre diferentes sistemas físicos, incluyendo moléculas manipuladas empleando resonancia magnética nuclear, átomos de Rydberg interaccionando con cavidades de microondas, trampas de iones y circuitos superconductores, entre otros, los sistemas deberían poder escalarse, de modo que se tenga un gran número de *qubits* en un espacio reducido, ojalá además pudiendo integrarse con dispositivos electrónicos actuales. Una de las propuestas vigentes que prometen escalabilidad e integrabilidad, es la de excitones de puntos cuánticos semiconductores embebidos en microcavidades o nanocavidades semiconductoras; esta propuesta aún se encuentra en un estadio incipiente. Una de las dificultades experimentales ha sido tener dos o más puntos cuánticos en el régimen de acoplamiento fuerte (entre los excitones y el campo electromagnético) en la misma cavidad. Sin embargo, reportes experimentales recientes [1, 2, 3] arrojan esperanza. Entre los objetivos a corto plazo estarían la demostración de enredamiento entre los excitones de un punto cuántico y el campo electromagnético, posiblemente al alcance de los recursos tecnológicos actuales [4], y la producción de enredamiento entre excitones de puntos diferentes. En este trabajo, en el capítulo 2, se muestra que en sistemas similares a los de la referencia [3] es posible producir y sostener estados enredados de dos excitones a partir de estados no enredados disponibles en la actualidad.

Uno de los mayores problemas en muchas de las tareas de procesamiento es la degradación producida por la decoherencia. En algunas de estas tareas, por ejemplo en el teletransporte, el recurso importante es el enredamiento. En estos casos, vale la pena preguntarse cuál familia de estados enredados es la más robusta ante la decoherencia. Entre las familias conocidas de estados enredados, se ha mostrado que los estados de Dicke son los más robustos ante algunos de los tipos más comunes de decoherencia. Aún más, se ha mostrado que la familia de estados de Dicke contiene subespacios de estados libres de decoherencia. Esta interesante propiedad de algunos estados de Dicke, tan atractiva para el procesamiento cuántico de información [5, 6, 7, 8, 9, 10], está estrechamente relacionada con los fenómenos de emisión cooperativa. Así, es natural preguntarse si en

---

los sistemas tipo Dicke existe una relación entre la emisión cooperativa y el enredamiento. En el capítulo 1 de esta tesis, en el ámbito del modelo de Dicke de dos radiadores (con interacción tipo Förster entre ellos) en una cavidad, se muestra que, si la dinámica se restringe al subespacio simétrico bajo la permutación de los radiadores, los efectos cooperativos se presentan justamente cuando el enredamiento entre los radiadores es grande.

Considerando diversas condiciones iniciales, mostramos que en general la relación entre enredamiento y cooperativismo, es intrincada. Una ventaja de nuestros análisis es que están sustentados por resultados analíticos explícitos, incluso si se toma en cuenta el efecto disipativo predominante en los sistemas cavidad-puntos cuánticos. El sistema que describimos, similar al de la referencia [3], carecía, hasta donde sabemos, de un examen teórico con resultados analíticos; los únicos que conocemos [11] son implícitos y no incluyen la disipación, decisiva en esta clase de sistemas.

---

---

## Efectos colectivos y enredamiento en sistemas de dos radiadores

---

---

En este capítulo se aborda el problema de la búsqueda de relaciones entre la aparición de efectos colectivos y el enredamiento en un sistema compuesto por dos radiadores idénticos, que interactúan entre ellos a través de un potencial tipo Förster, y que interactúan con un modo electromagnético de una cavidad. Suponiendo que la interacción electromagnética se puede describir en las aproximaciones dipolar y de onda rotativa, se demuestra que los estados de Dicke se pueden separar en dos subespacios: uno simétrico (ante la permutación de radiadores) y el otro antisimétrico. Finalmente, si la dinámica se restringe al sector simétrico, se demuestra que ambos fenómenos (cooperativismo y enredamiento) se presentan de manera simultánea: cuando la probabilidad de ocupación del estado superradiante de Dicke es grande, también es grande el enredamiento entre los dos radiadores. Este es uno de los resultados importantes de este trabajo. Este capítulo está dividido en dos partes: mientras en la primera parte se hacen comentarios generales y se motiva el modelo, en la segunda parte se encuentran los estados de Dicke y se demuestra la relación entre cooperativismo y enredamiento.

En la sección 1.1 de este capítulo veremos que algunos de los estados de Dicke son robustos ante la disipación y que, por lo tanto, pueden ser útiles en el área de procesamiento cuántico de la información. Después de hacer una sucinta presentación del problema de la emisión espontánea y del modelo de Dicke, en el vacío, se describe la particularización a un modelo que describe radiadores idénticos pero independientes en una cavidad electromagnética. Al final de la sección se comenta el hecho de que se han observado efectos cooperativos de emisión en sistemas semiconductores, a pesar de que, en este caso los radiadores *no* son idénticos, y por lo tanto no se esperarían tales efectos. Se señala que en la literatura ha habido propuestas que atribuyen estos efectos cooperativos a un término de interacción adicional, una interacción directa entre los radiadores (que puede ser debida al tunelamiento, a un término tipo Förster o a fuerza de Coulomb).

La sección 1.2 comienza encontrando los estados de Dicke correspondientes a un sistema que contiene dos radiadores idénticos que interactúan entre ellos a través de un potencial tipo Förster. Luego, se procede a incluir la interacción con uno de los modos de la cavidad en que se supone se encuentran los dos radiadores. Se muestra

enseguida que si el estado del sistema total se restringe al subespacio simétrico (para los radiadores) con máximo un fotón, entonces el enredamiento del estado de los radiadores, caracterizado por su concurrencia, coincide con la probabilidad de ocupación del estado superradiante de Dicke. Finalmente se muestran las limitaciones de este resultado, al considerar la dinámica en un caso en el que el estado inicial no pertenece al subespacio simétrico con máximo un fotón.

## 1.1. CONTEXTUALIZACIÓN

Uno de los rasgos distintivos de la teoría cuántica [12] es que las correlaciones estadísticas entre los resultados de algunas mediciones no necesariamente [13] satisfacen el principio de causalidad local [14]. Este fenómeno, conocido como *enredamiento*, es la base de la contingente ingeniería cuántica de la información (véanse las secciones XIV, XIX y XX de la monografía de la familia Horodecki [15]). De hecho, se ha llegado a decir que el enredamiento está en el corazón de la información cuántica [16].<sup>1</sup>

Existen diferentes modelos de computador cuántico (por ejemplo el modelo de compuertas, los computadores cuánticos topológicos y los computadores adiabáticos, entre otros [20].) El modelo de computación cuántica más popular es el modelo de compuertas. Su popularidad se disparó, cuando DiVincenzo y sus colaboradores demostraron que, para realizar cualquier circuito cuántico de  $N$  *qubits* basta con tener compuertas de un *qubit* y una compuerta de dos *qubits* que produzca enredamiento entre estos [21, 22]. Es decir, en el modelo de compuertas el procesamiento cuántico de información se lleva a cabo manipulando el enredamiento entre un par de *qubits* y conectando este par con otros pares [23].

La idea de la computación cuántica, a pesar de su belleza intrínseca, no está exenta de problemas. Uno de los problemas más importantes que enfrenta la implementación práctica de la computación cuántica es el aislamiento de los sistemas que constituyen los *qubits* sobre los cuales se ejecutan los algoritmos cuánticos. De hecho, es muy difícil tener sistemas cuánticos que se encuentren completamente aislados de su medio ambiente. En general, la interacción con grados de libertad sobre los cuales no se tiene control (comúnmente denominados medio ambiente) produce degradación del procesamiento cuántico de la información. Esta degradación tiene su origen en el establecimiento de correlaciones entre los *qubits* del computador cuántico y los grados de libertad del medio ambiente. Desde el punto de vista de los *qubits*, este proceso corresponde a la llamada *decoherencia*. Así, en la práctica, la ingeniería cuántica de la información pasa por resolver, entre otros, el problema de la identificación de familias de estados genuinamente enredados que ejecuten algoritmos cuánticos y que resistan la decoherencia [24].

---

<sup>1</sup>Vale la pena esclarecer que este no es un problema cerrado. Knill y Laflamme propusieron un computador cuántico que contiene un *qubit* en un estado puro y  $N$  *qubits* en un estado completamente mezclado [17]. Se ha podido demostrar que este computador puede realizar tareas de información cuántica con una aceleración exponencial con respecto a los algoritmos clásicos conocidos [18, 19].



Los estados de Dicke (véase la sección 3.4 de la monografía de Gühne y Tóth [25]) son una de las soluciones parciales del problema. Entre las familias más conocidas de estados, que incluyen los estados GHZ, W y *cluster* [25], la familia de estados de Dicke tiene la menor superposición posible con los estados sin enredamiento genuino [26]; en sistemas de cuatro *qubits*, es la más robusta al decaimiento exponencial de las coherencias del estado global del sistema [27]; además contiene subespacios libres de la decoherencia inducida por el vacío electromagnético en equilibrio térmico [28, 29].

Los estados de Dicke son los estados propios del problema de la emisión espontánea<sup>2</sup> cuando se cuenta con más de un radiador dipolar [30]. Un radiador dipolar es un sistema con dos estados propios de energía, a saber, el base  $|g\rangle$  de energía  $-\frac{1}{2}\omega_d$  y el excitado  $|e\rangle$  de energía  $\frac{1}{2}\omega_d$ . En el caso de un solo radiador dipolar, en el estado  $|\Psi\rangle$ , la tasa  $\tau^{(1)}$  de transferencia de energía al campo electromagnético es proporcional a la probabilidad de ocupación del estado excitado [31, 32]:

$$\tau^{(1)} = \gamma |\langle e | \Psi \rangle|^2 = \gamma \langle \Psi | e \rangle \langle g | g \rangle \langle e | \Psi \rangle = \gamma \langle \hat{J}_+^{(1)} \hat{J}_-^{(1)} \rangle.$$

Aquí,  $\gamma$  es el ancho de línea de la transición entre los estados  $|e\rangle$  y  $|g\rangle$  [33],  $\hat{J}_+^{(1)} = |e\rangle\langle g|$  y  $\hat{J}_-^{(1)} = |g\rangle\langle e|$ . En el caso de  $N$  radiadores idénticos, el principio de superposición de la electrodinámica conlleva a que la tasa total de transferencia de energía al campo se pueda escribir en términos de los operadores colectivos  $\hat{J}_+ = \sum_i^N \hat{J}_+^{(i)}$  y  $\hat{J}_- = \sum_i^N \hat{J}_-^{(i)}$  ( $i$  denota el  $i$ -ésimo radiador) como:

$$\tau^{(N)} = \gamma \langle \hat{J}_+ \hat{J}_- \rangle = \gamma \text{Tr} \left\{ \hat{J}_+ \hat{J}_- \hat{\rho} \right\},$$

en donde el valor medio se evalúa sobre  $\hat{\rho}$ , el operador densidad de los  $N$  radiadores (la función de densidad de probabilidad *conjunta* de los  $N$  radiadores). La interacción entre los radiadores y el campo electromagnético se puede reconstruir bajo la aproximación dipolar eléctrica, la cual supone que la magnitud del campo magnético es tan pequeña que puede ser omitida, y que el campo eléctrico es prácticamente constante en el espacio ocupado por el radiador [34, 35]; con estas suposiciones, el operador de Hamilton que describe la interacción campo-radiadores es:

$$\hat{H} = \omega_d \hat{J}_z + \boldsymbol{\wp} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} (\hat{J}_+ + \hat{J}_-), \quad (1.1)$$

en donde  $\hat{J}_z = \sum_i^N \hat{J}_z^{(i)}$ , con  $\hat{J}_z^{(i)} = \frac{1}{2} \{ |e_i\rangle\langle e_i| - |g_i\rangle\langle g_i| \}$ ,  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  es el campo eléctrico, y  $\boldsymbol{\wp}$  es el momento dipolar eléctrico de cada radiador<sup>3</sup>:

$$\boldsymbol{\wp} = \langle e | \hat{\boldsymbol{\wp}} | g \rangle, \quad \hat{\boldsymbol{\wp}} = \boldsymbol{\wp} (\hat{J}_+^{(1)} + \hat{J}_-^{(1)}).$$

Nótese que el campo eléctrico externo  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  está descrito clásicamente.

Basándose en la analogía entre el sistema de  $N$  radiadores dipolares y el sistema de  $N$  espines un medio [30], los estados propios del operador 1.1 —los estados de Dicke—

<sup>2</sup>Los estados de Dicke son los estados propios del problema de la emisión espontánea ignorando los grados de libertad del campo electromagnético.

<sup>3</sup>Los elementos diagonales  $\langle g | \hat{\boldsymbol{\wp}} | g \rangle$  y  $\langle e | \hat{\boldsymbol{\wp}} | e \rangle$  son nulos, pues  $|g\rangle$  y  $|e\rangle$  son estados propios del potencial de Coulomb. Por eso no aparecen en la definición de  $\hat{\boldsymbol{\wp}}$ .

se pueden construir tomando en cuenta que el cuadrado del “espín total”

$$\hat{J}^2 = \frac{1}{2}(\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+) + \hat{J}_z^2$$

es una cantidad conservada en la evolución temporal generada por el operador de Hamilton 1.1. Desde el punto de vista físico, la conservación de  $\hat{J}^2$  está asociada a la simetría de permutación entre radiadores, pues estos se han supuesto idénticos e igualmente acoplados al campo electromagnético, y bajo estas circunstancias las emisiones individuales son indiscernibles [36]. Obsérvese que la *simetría de permutación* de la función de distribución de probabilidad (estado) se sigue de la suposición de que los radiadores son idénticos, y no del *postulado de simetrización*: los radiadores no son descritos ni como bosones ni como fermiones.<sup>4</sup> Las consecuencias de esta simetría se acusan si la dinámica se restringe a los estados completamente simétricos (aquellos con “espín total” máximo), pues para algunos de ellos  $\tau^{(N)} > \gamma N$ , esto es, los  $N$  radiadores pueden transferir su energía al campo más intensamente que un número igual de radiadores estadísticamente independientes. Esta emisión cooperativa [30] es, históricamente, el primer ejemplo de un fenómeno colectivo [36, 37] que no puede ser reducido a un régimen dinámico clásico [38, 39, 40, 41, 42, 43] y que tiene una intrincada relación con el enredamiento [44].

A guisa de ejemplo, citemos el caso de cinco radiadores. Empecemos listando los estados de Dicke completamente simétricos del sistema. En general, un sistema de  $N$  radiadores tiene  $N + 1$  de estos estados; denotémoslos como  $|N_e, N_g\rangle$ , con  $N_e$  el número de en el estado excitado y  $N_g$  el número de radiadores en el estado base. Entonces, para  $N = 5$  los estados completamente simétricos son:

$$\begin{aligned} |0, 5\rangle &\equiv |ggggg\rangle \\ |1, 4\rangle &\equiv \frac{|egggg\rangle + |geggg\rangle + |ggegg\rangle + |gggeg\rangle + |gggge\rangle}{\sqrt{5}} \\ |2, 3\rangle &\equiv \frac{|gggee\rangle + |ggeeg\rangle + |geegg\rangle + |eeggg\rangle + |egegg\rangle + |eggeg\rangle + |eggge\rangle + |ggege\rangle + |gegeg\rangle + |gegge\rangle}{\sqrt{10}} \\ |3, 2\rangle &\equiv \frac{|eeegg\rangle + |eegge\rangle + |eggee\rangle + |ggeee\rangle + |gegee\rangle + |geege\rangle + |geeeg\rangle + |eegeg\rangle + |egege\rangle + |egeeg\rangle}{\sqrt{10}} \\ |4, 1\rangle &\equiv \frac{|geeee\rangle + |egeee\rangle + |eegee\rangle + |eeege\rangle + |eeeeg\rangle}{\sqrt{5}} \\ |5, 0\rangle &\equiv |eeeeee\rangle. \end{aligned}$$

Obsérvese que se ha empleado la notación  $|N_e, N_g\rangle$  para los estado de Dicke. Por otro lado, partiendo de la definición de los operadores colectivos  $\hat{J}_+$  y  $\hat{J}_-$  se tiene que:

$$\tau^{(N)} = \gamma \langle N_e, N_g | \hat{J}_+ \hat{J}_- | N_e, N_g \rangle = \gamma N_e (N_g + 1).$$

Así pues, si inicialmente los cinco radiadores están excitados, ocupando el estado  $|5, 0\rangle$ , se tiene que  $\tau^{(5)} = 5\gamma$ ; más tarde, el sistema ocupará con alguna probabilidad (eventualmente grande) el estado  $|3, 2\rangle$ , para el cual  $\tau^{(5)} = 9\gamma$ ; finalmente, cuando el sistema haya perdido su energía se hallará en el estado  $|0, 5\rangle$  y entonces  $\tau^{(5)} = 0$ . La superradiancia es

<sup>4</sup>Las diferencias, de jerarquía por ejemplo, entre estos principios, se exponen en el capítulo 17 del libro de L. Ballentine [34].

este comportamiento no monótonamente decreciente de la tasa de emisión de energía, que implica pasar de un estado sin correlaciones a uno altamente correlacionado.

De manera fidedigna al sentido en que acaba de ser expuesta, la emisión cooperativa se ha observado con átomos de Rydberg, átomos alcalinos, iones y *qubits* superconductores [45] actuando como radiadores dipolares. Desde los estudios pioneros de Purcell [46], es idóneo llevar a cabo estos experimentos en cavidades cuánticas electrodinámicas, porque en ellas se puede apreciar la esencia de la emisión cooperativa y de otros fenómenos relacionados con la interacción entre la materia y el campo electromagnético [47]. El campo de una cavidad cuántica se puede describir como un conjunto de osciladores armónicos desacoplados, con diferentes frecuencias; son los modos de la cavidad. En particular, al modo casi resonante con los radiadores dipolares se le asocia el operador campo eléctrico

$$\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger),$$

en donde  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  son los operadores “de creación y destrucción de fotones”, análogos a los operadores escalera de subida y de bajada del problema del oscilador armónico simple. Entonces, el operador de Hamilton 1.1 queda:

$$\hat{H} = \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_a \hat{J}_z + \boldsymbol{\wp} \cdot \mathcal{E}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{J}_+ + \hat{J}_-),$$

en donde el primer término da cuenta del modo relevante (de frecuencia  $\omega_0$ ). Si se satisface que  $|\omega_0 - \omega_a| \ll \omega_0$ , la aproximación de onda rotativa [35] permite reducir el tercer término del lado derecho de la anterior igualdad y obtener:

$$\hat{H} = \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_a \hat{J}_z + \boldsymbol{\wp} \cdot \mathcal{E}(\hat{a} \hat{J}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{J}_-),$$

o, definiendo:

$$\Delta = \omega_0 - \omega_a \quad \text{y} \quad g = \boldsymbol{\wp} \cdot \mathcal{E},$$

se obtiene finalmente [48]:

$$\hat{H} = \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + (\omega_0 - \Delta) \hat{J}_z + g(\hat{a} \hat{J}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{J}_-). \quad (1.2)$$

El operador de Hamilton 1.2 predice el intercambio casi periódico de energía entre los radiadores y el modo relevante de la cavidad [39]. Pero, por otro lado, cualquier cavidad real no está perfectamente aislada, de modo que pierde energía. Esta pérdida de energía puede ser modelada como una interacción con grados de libertad sobre los cuales no se tiene control. De manera alternativa, es posible pensar que los modos del campo electromagnético de la cavidad pueden describirse en términos de los modos del campo electromagnético del “universo”. En esta descripción parecería que el modo relevante de la cavidad interacciona con el campo electromagnético exterior, cediéndole energía. En cualquiera de las dos descripciones, si la intensidad de esta interacción irreversible es mucho mayor que la de la interacción reversible descrita por 1.2 —régimen sobreamortiguado—, los radiadores quedan efectivamente acoplados al campo exterior [40, 41] y pueden emitir cooperativamente.

La emisión cooperativa también se observó con puntos cuánticos semiconductores actuando como radiadores [2]. Sin embargo, a diferencia de los sistemas atómicos y superconductores antes mencionados, los puntos cuánticos no satisfacen la suposición básica del modelo de Dicke, cual es la indistinguibilidad entre los radiadores; situación esta inherente a los métodos de fabricación de puntos cuánticos. Por tanto, la existencia de efectos cooperativos entre puntos cuánticos debe involucrar un mecanismo que compensa la inhomogeneidad del arreglo de los radiadores semiconductores. El mecanismo propuesto es el acoplamiento directo de corto alcance entre los puntos, bien por superposición espacial de las funciones de distribución de probabilidad de puntos cercanos, bien por fuerzas de Coulomb entre estos [49, 50, 51, 52, 53]. Si suponemos que los radiadores están localizados espacialmente en los puntos 1 y 2, estas interacciones se representan mediante el operador de Hamilton [54, 55]:

$$\hat{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{R}|^3} \left\{ \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}_2 - 3 \left\{ \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 \cdot \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \right\} \left\{ \hat{\boldsymbol{\rho}}_2 \cdot \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \right\} \right\},$$

en donde  $\mathbf{R}$  es el vector que va dirigido del punto 1 hacia el punto 2. Tomando en cuenta la forma del operador momento dipolar eléctrico ( $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\rho}(\hat{J}_+^{(1)} + \hat{J}_-^{(1)})$ ), si se define la cantidad escalar

$$\Gamma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{R}|^3} \left\{ \boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_2 - 3 \left\{ \boldsymbol{\rho}_1 \cdot \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \right\} \left\{ \boldsymbol{\rho}_2 \cdot \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \right\} \right\},$$

el operador  $\hat{V}$  se puede escribir como:

$$\hat{V} = \Gamma(\hat{J}_+^{(1)} + \hat{J}_-^{(1)})(\hat{J}_+^{(2)} + \hat{J}_-^{(2)}).$$

Finalmente, empleando la aproximación de onda rotativa para esta interacción, tenemos

$$\hat{V} = \Gamma(\hat{J}_+^{(1)}\hat{J}_-^{(2)} + \hat{J}_-^{(1)}\hat{J}_+^{(2)}). \quad (1.3)$$

Algunos efectos muy puntuales de la interacción dipolo-dipolo 1.3 sobre el modelo de Dicke fueron estudiados por grupos en la India y la China a comienzos de los años noventas del siglo pasado; la modificación del fenómeno de colapsos-renacimientos de las probabilidades [56], la absorción resonante de dos fotones [57], y el apantallamiento de la interacción directa para radiadores preparados en un estado con coherencias parciales pero sin coherencias globales [58], fueron algunos de los efectos encontrados entonces. Un tratamiento más general del problema de la interacción de radiadores *cercanos* con el continuo electromagnético<sup>5</sup> vino de un par de grupos en Polonia [59, 53]; en la primera referencia se extiende el modelo de Dicke al caso de radiadores dispares acoplados directamente, y en la segunda se demuestra que si la intensidad del acoplamiento es comparable

<sup>5</sup>En este caso el campo electromagnético debe representarse por el operador

$$\hat{\mathcal{E}} = \sum_{\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}} (\hat{a}_{\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}} + \hat{a}_{\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}}^\dagger),$$

en donde  $\mathbf{k}$  y  $\omega_{\mathbf{k}}$  representan respectivamente el vector de onda y la frecuencia de los modos en que se expande el campo.

con la diferencia entre las frecuencias de transición de los radiadores, entonces se recuperan los efectos cooperativos. El caso en que los radiadores se hallan en una cavidad no ha sido abordado con este grado de generalidad; los únicos resultados analíticos que conocemos provienen de un grupo en México [11] que ha solucionado el problema ignorando la disipación pero incluyendo la interacción de Ising entre los radiadores, para el estado inicial de la forma  $\{\cos \phi |eg\rangle + \sin \phi |ge\rangle\} |n\rangle$ , en donde  $|n\rangle$  denota que el modo de la cavidad está en el estado de Fock con  $n$  excitaciones elementales (fotones). En nuestro trabajo, abordamos el mismo problema de la referencia [11], pero: (i) sin incluir la interacción de Ising entre los radiadores pero sí incluyendo los efectos disipativos, y (ii) considerando otro tipo de condiciones iniciales. La primera elección está justificada por el estado actual de los experimentos, especialmente en el ámbito de los semiconductores, donde no se ha reportado interacción de Ising (en la clase de muestras que pretendemos describir) y empero sí es notable el papel que juega la disipación de energía a través de las paredes de la cavidad. La segunda elección está motivada por la búsqueda de la relación entre enredamiento y cooperativismo; además, como veremos al final del capítulo 2, el tipo de condiciones iniciales que examinamos nos ha conllevado a proponer un esquema de preparación de pares de excitones enredados, que puede ser realizado en las condiciones experimentales actuales.

## 1.2. DOS RADIADORES INTERACCIONANTES

Para iniciar, ignoremos los grados de libertad del modo electromagnético relevante de la cavidad, es decir, consideremos el operador de Hamilton asociado a dos radiadores idénticos con un acoplamiento del tipo 1.3,

$$\hat{H}_0 = \omega_d (\hat{J}_z^{(1)} + \hat{J}_z^{(2)}) + \Gamma (\hat{J}_+^{(1)} \hat{J}_-^{(2)} + \hat{J}_-^{(1)} \hat{J}_+^{(2)}).$$

Eligiendo la base “desnuda”  $\{|gg\rangle, |eg\rangle, |ge\rangle, |ee\rangle\}$  y redefiniendo el origen de la energía para que coincida con la energía del estado base  $|g\rangle$ , el operador  $\hat{H}_0$  se representa por la matriz

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma & 0 \\ 0 & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\omega_d \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Los estados de Dicke del sistema son pues los vectores propios de esta matriz, los cuales presentamos a continuación con sus respectivos valores propios:

$$\begin{aligned} E_G &= 0, & |G\rangle &= |gg\rangle \\ E_S &= \Gamma, & |S\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |eg\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |ge\rangle \\ E_A &= -\Gamma, & |A\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |eg\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |ge\rangle \\ E_E &= 2\omega_d, & |E\rangle &= |ee\rangle. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Los tres estados completamente simétricos del sistema son, recordando la notación de la sección anterior,  $|0, 2\rangle = |G\rangle$ ,  $|1, 1\rangle = |S\rangle$  y  $|2, 0\rangle = |E\rangle$ . Si la probabilidad de ocupación del estado  $|S\rangle$  es relativamente grande, se tendrá que  $\tau^{(2)} = 2\gamma$ , que es una tasa de emisión tan grande como la de dos radiadores excitados pero estadísticamente independientes. Esta señal de cooperativismo está acompañada del enredamiento entre los radiadores, pues  $|S\rangle$  es uno de los estados máximamente enredados de dos *qubits* (estados de Bell).

Establezcamos la relación entre el grado de enredamiento del operador de estado  $\hat{\rho}$  de los radiadores y la probabilidad de ocupación del estado  $|S\rangle$  para el caso en que el sistema transita por la escalera de estados de Dicke completamente simétricos. Incluyamos los grados de libertad del modo relevante de la cavidad para que los resultados que obtengamos se puedan aplicar más adelante en la solución de la dinámica del problema. El operador de Hamilton del sistema modo-radiadores es:

$$\hat{H} = \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_d (\hat{J}_z^{(1)} + \hat{J}_z^{(2)}) + g (\hat{a} (\hat{J}_+^{(1)} + \hat{J}_+^{(2)}) + \hat{a}^\dagger (\hat{J}_-^{(1)} + \hat{J}_-^{(2)})) + \Gamma (\hat{J}_+^{(1)} \hat{J}_-^{(2)} + \hat{J}_-^{(1)} \hat{J}_+^{(2)}). \quad (1.6)$$

Este operador conmuta con el operador número total de excitaciones  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + |e\rangle_1 \langle e| + |e\rangle_2 \langle e|$ , con lo que resulta muy útil representar el espacio de estados del sistema como la suma directa de los subespacios vectoriales propios del operador  $\hat{n}$ . Denotemos con  $\Lambda_n$  al subespacio asociado al valor propio  $n$  de  $\hat{n}$ . Cada  $\Lambda_n$  es generado por un conjunto (pequeño) ortogonal de vectores de estado; explícitamente:

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \text{gen}\{|gg, 0\rangle\}, \\ \Lambda_1 &= \text{gen}\{|gg, 1\rangle, |eg, 0\rangle, |ge, 0\rangle\}, \\ \Lambda_n &= \text{gen}\{|gg, n\rangle, |eg, n-1\rangle, |ge, n-1\rangle, |ee, n-2\rangle\}, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

En los vectores de las igualdades anteriores, la tercera etiqueta denota un estado de Fock del modo electromagnético; por ejemplo, el estado  $|eg, n-1\rangle$  es el estado en el que el primer radiador se encuentra en el estado  $|e\rangle$ , el segundo en el estado  $|g\rangle$  y el modo relevante del campo electromagnético está en el estado de Fock  $|n-1\rangle$ . Supongamos que el estado inicial del sistema modo-radiadores es una superposición —coherente o estadística— de estados del subespacio  $\Lambda_1$ . Entonces, la conservación del número total de excitaciones  $\hat{n}$ , implica que en presencia de disipación el operador de estado  $\hat{\rho}$  del sistema modo-radiadores es la suma directa de sus restricciones a los subespacios  $\Lambda_0$  y  $\Lambda_1$ , y que en ausencia de aquella, se limita a  $\Lambda_1$ . Si suponemos además que sólo son accesibles los estados completamente simétricos, lo cual también depende de la condición inicial, la forma más general del operador de estado del sistema modo-radiadores se puede escribir en la base de Fock-Dicke  $\{|G, 0\rangle, |G, 1\rangle, |S, 0\rangle, |A, 0\rangle\}$  como:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{G0,G0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{G1,G1} & \rho_{S0,G1} & 0 \\ 0 & \rho_{G1,S0} & \rho_{S0,S0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

El operador de estado de los radiadores se obtiene tomando la traza parcial sobre el modo,  $\hat{\rho} = \text{Tr}_M\{\hat{\rho}\}$ . Incorporando la condición de normalización del estado  $\hat{\rho}$ , en la base desnuda resulta:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 1 - \rho_{S_0, S_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\rho_{S_0, S_0} & \frac{1}{2}\rho_{S_0, S_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\rho_{S_0, S_0} & \frac{1}{2}\rho_{S_0, S_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

La concurrencia [60, 61] de 1.9 cuantifica el enredamiento del estado de los dos radiadores. El operador 1.9 pertenece a una clase de operadores de estado llamados estados “X”, cuya forma general es:

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & w \\ 0 & b & z & 0 \\ 0 & z^* & c & 0 \\ w^* & 0 & 0 & d \end{pmatrix},$$

y cuya concurrencia se calcula explícitamente a través de la fórmula [62, 63]:

$$\mathcal{C}(\hat{X}) = 2 \max\{0, |z| - \sqrt{ad}, |w| - \sqrt{bc}\}.$$

Aplicando esta fórmula al estado “X” 1.9 se encuentra que:

$$\mathcal{C}(\hat{\rho}) = \rho_{S_0, S_0}. \quad (1.10)$$

Esta relación justifica nuestra afirmación previa sobre la ocurrencia simultánea de enredamiento y de efectos cooperativos entre los dos radiadores si la probabilidad de ocupación del estado  $|S\rangle$  es grande.<sup>6</sup>

Claro está que la validez de 1.10 se supedita a que la dinámica se restrinja a los estados completamente simétricos de los subespacios vectoriales  $\Lambda_0$  y  $\Lambda_1$ ; a su vez, esto depende exclusivamente de la condición inicial del sistema. La relación entre enredamiento y efectos cooperativos se complica si el estado inicial del sistema no es completamente simétrico, por ejemplo:

$$|\text{eg}, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |A, 0\rangle.$$

De acuerdo con 1.6, la probabilidad de ocupación del estado  $|A, 0\rangle$  permanece constante en el tiempo, pues éste es un estado propio de aquel. En efecto, tomando la base dada

<sup>6</sup>Por otro lado, del resultado 1.10 se sigue que bajo las condiciones supuestas no ocurre muerte súbita del enredamiento, fenómeno que se podría presentar a la luz de la fórmula general para  $\mathcal{C}(\hat{X})$ . Esto se debe a que la ocupación del estado fundamental crece y solamente llega a uno de manera asintótica (para tiempos muy grandes).

en 1.7 para el subespacio  $\Lambda_1$ , el operador de Hamilton 1.6 se representa por la matriz

$$\hat{H} = \{\omega_0 - \Delta\} \hat{1} + \begin{pmatrix} \Delta & \frac{1}{\sqrt{2}}g & \frac{1}{\sqrt{2}}g \\ \frac{1}{\sqrt{2}}g & 0 & \Gamma \\ \frac{1}{\sqrt{2}}g & \Gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

y se encuentra fácilmente que sus estados propios, con los correspondientes valores propios, son:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}\Gamma + \Omega_0 + \frac{1}{2}\Delta, & |E_1\rangle &= \sin \alpha |S, 0\rangle + \cos \alpha |G, 1\rangle \\ E_2 &= \frac{1}{2}\Gamma - \Omega_0 + \frac{1}{2}\Delta, & |E_2\rangle &= \cos \alpha |S, 0\rangle - \sin \alpha |G, 1\rangle \\ E_3 &= -\Gamma, & |E_3\rangle &= |A, 0\rangle \end{aligned} \quad (1.12)$$

en donde:

$$k = \frac{\Delta - \Gamma}{2}, \quad \Omega^2 = g^2 + k^2, \quad \tan 2\alpha = \frac{g}{k}. \quad (1.13)$$

Por otro lado, en este caso la restricción del operador de estado del sistema modoradiadores a los subespacios  $\Lambda_0$  y  $\Lambda_1$ , en la base de Fock-Dicke, es:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{G0,G0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{G1,G1} & \rho_{S0,G1} & \rho_{A0,G1} \\ 0 & \rho_{G1,S0} & \rho_{S0,S0} & \rho_{A0,S0} \\ 0 & \rho_{G1,A0} & \rho_{S0,A0} & \rho_{A0,A0} \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

y el correspondiente operador de estado de los radiadores, en la base desnuda, se puede escribir como:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \rho_{S0,S0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\rho_{S0,S0} + \rho_{A0,S0}^r & -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\rho_{S0,S0} + i\rho_{A0,S0}^i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\rho_{S0,S0} - i\rho_{A0,S0}^i & \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\rho_{S0,S0} - \rho_{A0,S0}^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

en donde  $\rho_{A0,S0}^r$  y  $\rho_{A0,S0}^i$  son, respectivamente, las partes real e imaginaria de la coherencia  $\rho_{A0,S0}$ . Al escribir el operador 1.15 hemos tomado en cuenta que en cualquier instante del tiempo  $\rho_{A0,A0} = \frac{1}{2}$ . Como vemos en 1.15, además del cambio, con respecto a 1.9, de la distribución de las probabilidades por los estados desnudos, el estado antisimétrico introduce la coherencia  $\rho_{A0,S0}$ . La concurrencia del estado "X" 1.15 refleja estas dos modificaciones:

$$\mathcal{C}(\hat{\rho}) = \sqrt{4 \left[ \rho_{A0,S0}^i \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} - \rho_{S0,S0} \right]^2}. \quad (1.16)$$

De una parte, vemos que el grado de enredamiento entre los radiadores es proporcional a —la parte imaginaria de— la coherencia  $\rho_{A0,S0}$ , y de otra, vemos que  $\mathcal{C}(\hat{\rho}) \geq \frac{1}{2}$ , lo cual es una consecuencia de que  $|A\rangle$  sea un estado propio del operador de Hamilton del



sistema. Como antes (véase 1.10), el enredamiento es proporcional a la probabilidad de ocupación del estado  $|S\rangle$ , pero ahora la relación es matemáticamente más compleja y está mediada por la parte imaginaria de la coherencia  $\rho_{A0,S0}$ .

Pasemos ahora a examinar el comportamiento de la tasa de emisión de energía de los radiadores cuando la condición inicial es  $|eg, 0\rangle$ . Como se mencionó en la sección anterior, para ello es necesario incluir la interacción entre el sistema modo-radiadores y el campo electromagnético exterior a la cavidad, inclusión que se puede hacer a través del formalismo de las ecuaciones maestras de Lindblad [47]. Semejante procedimiento no había sido necesario para analizar los efectos cooperativos en el caso en que la dinámica se restringe a los estados completamente simétricos porque entonces nuestros razonamientos se basaban en la fórmula explícita de  $\tau^{(N)}$  para ese caso. Si se asume que el campo electromagnético exterior (el ambiente) está en equilibrio termodinámico a temperatura  $T = 0\text{K}$ , la ecuación maestra de Lindblad adecuada es:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H}, \hat{\rho}] + \mathcal{L}_\kappa[\hat{\rho}] + \mathcal{L}_\gamma[\hat{\rho}], \quad (1.17)$$

en donde  $\mathcal{L}_\kappa[\hat{\rho}]$  da cuenta de la interacción irreversible a la tasa  $\kappa$  entre el modo relevante de la cavidad y el ambiente:

$$\mathcal{L}_\kappa[\hat{\rho}] = \frac{\kappa}{2} (2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}),$$

y  $\mathcal{L}_\gamma[\hat{\rho}]$  da cuenta de la interacción irreversible a la tasa  $\gamma$  entre los radiadores y el ambiente:

$$\mathcal{L}_\gamma[\hat{\rho}] = \frac{\gamma}{2} (2\hat{J}_- \hat{\rho} \hat{J}_+ - \hat{J}_+ \hat{J}_- \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{J}_+ \hat{J}_-).$$

Nótese que  $\mathcal{L}_\gamma[\hat{\rho}]$  incluye los operadores colectivos  $\hat{J}_+$  y  $\hat{J}_-$ , y no es una suma de términos asociados a cada radiador. Para esclarecer la diferencia, tomemos por ejemplo el término proporcional a  $\hat{\rho} \hat{J}_+ \hat{J}_-$  de la ecuación anterior; se tiene que:

$$\hat{\rho} \hat{J}_+ \hat{J}_- = \hat{\rho} \sum_i \hat{J}_+^{(i)} \sum_i \hat{J}_-^{(i)} \neq \hat{\rho} \sum_i \hat{J}_+^{(i)} \hat{J}_-^{(i)}.$$

Vemos pues que la diferencia radica en que la expresión del lado derecho de la desigualdad anterior no contiene los términos cruzados  $\hat{J}_+^{(k)} \hat{J}_-^{(l)}$ ; justamente estos términos son el origen de los efectos cooperativos.<sup>7</sup> Hecha esta anotación, escribamos explícitamente la ecuación de movimiento 1.17 para el operador 1.14, agrupando las ecuaciones resultantes según la interdependencia que exista entre ellas:

$$\dot{\rho}_{G0,G0} = \kappa\rho_{G1,G1} + 2\gamma\rho_{S0,S0}, \quad \left. \vphantom{\dot{\rho}_{G0,G0}} \right\} \quad (1.18a)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho}_{G1,G1} &= ig\{\rho_{G1,S0} - \rho_{S0,G1}\} - \kappa\rho_{G1,G1}, \\ \dot{\rho}_{S0,S0} &= ig\{\rho_{S0,G1} - \rho_{G1,S0}\} - 2\gamma\rho_{S0,S0}, \\ \dot{\rho}_{S0,G1} &= ig\{\rho_{S0,S0} - \rho_{G1,G1}\} + i\{\Delta - \Gamma + i\gamma + \frac{i}{2}\kappa\}\rho_{S0,G1}, \end{aligned} \right\} \quad (1.18b)$$

<sup>7</sup>De paso se ha mostrado que en el tratamiento original de Dicke como en el basado en la ecuación maestra de Lindblad, la causa última de los efectos cooperativos entre los radiadores es el principio de superposición de la electrodinámica.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho}_{S_0,G_0} &= -ig\rho_{G_1,G_0} - i\{\Gamma - i\gamma\}\rho_{S_0,G_0}, \\ \dot{\rho}_{G_1,G_0} &= -ig\rho_{S_0,G_0} - i\{\Delta - \frac{i}{2}\kappa\}\rho_{G_1,G_0}, \end{aligned} \right\} \quad (1.18c)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho}_{A_0,S_0} &= ig\rho_{A_0,G_1} + i\{2\Gamma + i\gamma\}\rho_{A_0,S_0}, \\ \dot{\rho}_{A_0,G_1} &= ig\rho_{A_0,S_0} + i\{\Delta + \Gamma + \frac{i}{2}\kappa\}\rho_{A_0,G_1}, \end{aligned} \right\} \quad (1.18d)$$

$$\dot{\rho}_{A_0,G_0} = i\Gamma\rho_{A_0,G_0}, \quad \left. \right\} \quad (1.18e)$$

$$\dot{\rho}_{A_0,A_0} = 0. \quad \left. \right\} \quad (1.18f)$$

La segunda de las ecuaciones 1.18b y la ecuación 1.18f reflejan los dos extremos del comportamiento colectivo del sistema de radiadores. La primera indica que si los radiadores se hallan en el estado  $|S\rangle$  decaen a la tasa  $\tau^{(2)} = 2\gamma$ , resultado que ya conocíamos; la segunda muestra que si los radiadores se hallan en el estado  $|A\rangle$ , la tasa de decaimiento es nula, resultado conocido como subradiancia [30]. Para la condición inicial  $|eg, 0\rangle$ , dado que la probabilidad de ocupación del estado  $|S\rangle$  es siempre menor o igual que un medio, mientras que la probabilidad de ocupación del estado  $|A\rangle$  es siempre igual a un medio, se observará con mayor nitidez un comportamiento subradiante, aunque en general, como sucede con el grado de enredamiento entre los radiadores, el cooperativismo tiene un curso complejo.

---



---

## Ejemplos de sistemas tipo Dicke

---



---

### 2.1. DIPOLOS ATÓMICOS

Los átomos de rubidio, y más generalmente, los átomos alcalinos (litio, sodio, potasio, rubidio y cesio), tienen una estructura simple que permite prepararlos en estados con momento dipolar atómico grande; en efecto, su único electrón de valencia se halla a una distancia media del núcleo mucho mayor que las de los restantes electrones, formándose así un núcleo efectivo de carga neta  $e$  que ejerce sobre el distante electrón de valencia una fuerza que en una muy buena aproximación es central. Se trata pues de una estructura que simula la del átomo de hidrógeno. El momento dipolar atómico es grande si el estado del electrón de valencia tiene número cuántico principal  $\nu$  grande; en los experimentos actuales  $\nu \sim 50$ , con lo cual la distancia media del electrón al núcleo es del orden de  $\nu^2 a_0 = 2500 a_0$ , mientras que el núcleo efectivo tiene un tamaño del orden de  $a_0$  ( $a_0$  es el radio de Bohr). Si además el átomo se prepara en el estado con los valores máximos de los números cuánticos orbital  $\ell$  y magnético  $m$ , a saber,  $\ell = \nu - 1$  y  $|m| = \nu - 1$ , la función de distribución de probabilidad indica que el electrón de valencia se encuentra altamente confinado alrededor de una órbita casi circular (la dispersión radial es del orden de  $\nu^{-1/2}$ ). Semejantes estados han sido llamados estados de Rydberg circulares.

La magnitud del momento dipolar atómico entre dos estados de Rydberg circulares contiguos es, para  $\nu = 50$ , aproximadamente

$$|\mathcal{D}| \sim \nu^2 e a_0 = 2500 e a_0.$$

Por otro lado, sobre la base de que si son grandes los números cuánticos asociados a un sistema, entonces este se ciñe a las leyes de la dinámica de Newton [34], se puede demostrar que, para una transición entre dos estados de Rydberg circulares alrededor de  $\nu \sim 50$ , la frecuencia angular de la transición y la tasa de emisión espontánea son, respectivamente [47]:

$$\omega_d = \frac{2R_{rb}}{\hbar} \frac{1}{n^3} = 5,11 \times 10^9 \text{ Hz}$$

$$\gamma = \frac{4R_{rb}}{3\hbar} \frac{\beta^3}{n^5} = 28 \text{ Hz},$$

en donde  $R_{rb}$  es la constante de Rydberg y  $\beta = 137^{-1}$  es la constante de estructura fina. El factor de calidad de este radiador casi clásico es pues

$$Q = \frac{\omega_d}{\gamma} = \frac{3n^2}{2\beta^3} \approx 10^{10},$$

lo que significa que el átomo puede realizar unas  $10^{10}$  transiciones antes de ceder su energía completamente al campo electromagnético. Se puede decir entonces que la tasa de emisión espontánea de los átomos alcalinos preparados en estados de Rydberg circulares es baja.

Dado que la frecuencia  $\omega_d$  pertenece al rango de las microondas, las paredes de la cavidad están hechas de algún metal en fase superconductora (generalmente niobio, que es superconductor por debajo de 9.2K), pues estos son los mejores reflectores de las microondas. En el intervalo de temperaturas en el que se llevan a cabo los experimentos actuales (0.8K a 1.5K), la tasa de decaimiento  $\kappa$  y el factor de calidad  $Q_c$  del modo relevante de la cavidad se hallan, respectivamente, en los intervalos

$$\frac{1}{115\text{ms}} \leq \kappa \leq \frac{1}{1\text{ms}}, \quad 3 \times 10^8 \leq Q_c \leq 3 \times 10^{10}.$$

Finalmente, reseñemos el orden de magnitud de la constante  $g$  de interacción entre cada radiador y el modo relevante de la cavidad. Como se vio en el capítulo anterior,  $g$  depende de la magnitud del momento dipolar del radiador y de la constante  $|\mathcal{E}|$  que aparece en la definición del operador campo eléctrico  $\hat{\mathcal{E}}$  del modo de la cavidad<sup>1</sup>. En los experimentos actuales del grupo de la Escuela Normal Superior de París [47] se tiene que:

$$|\mathcal{E}| \sim 1,5 \times 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{m}},$$

de donde

$$g \sim \frac{1}{20\mu\text{s}}.$$

Los enormes factores de calidad tanto de los átomos como de la cavidad permiten suponer que la dinámica del sistema transcurre como si este estuviera perfectamente aislado, y así lo haremos durante el resto de la sección. Solucionemos la ecuación de movimiento 1.17, que se reduce entonces a la ecuación de Liouville-von Neumann del operador de estado  $\hat{\rho}$ , para la condición inicial

$$|\Psi(0)\rangle = \sin \theta |G, 1\rangle + \cos \theta |S, 0\rangle. \quad (2.1)$$

Como esta condición inicial es una combinación lineal de estados completamente simétricos del subespacio vectorial  $\Lambda_1$ , las simetrías contenidas en el operador de Hamilton 1.6 implican que los únicos estados accesibles son  $|G, 1\rangle$  y  $|S, 0\rangle$ , es decir, el sistema modo-radiadores se comporta como un sistema de dos niveles. Además, este es un caso particular del primero que investigamos en la sección 1.2, y vimos entonces que el estado  $\hat{\rho}$  se puede escribir en la forma 1.9 y que la concurrencia solo depende de la probabilidad

<sup>1</sup>La constante  $|\mathcal{E}|$  es la desviación estándar del operador campo eléctrico de la cavidad.

$\rho_{S_0, S_0}$  (véase la ecuación 1.10). La integración de las ecuaciones de movimiento 1.18 conlleva a que:

$$\mathcal{C}(t) = \bar{C}_0 + C_0 \cos 2\Omega t \quad (2.2)$$

en donde  $\bar{C}_0$  y  $C_0$  vienen dadas por:

$$\bar{C}_0 = \cos^2 \theta - C_0, \quad C_0 = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \sin \{2\alpha + 2\theta\}, \quad (2.3)$$

y las constantes  $\alpha$  y  $\Omega$ , que ya fueron definidas (véanse las ecuaciones 1.13), las volvemos a citar aquí para facilitar la lectura:

$$k = \frac{\Delta - \Gamma}{2}, \quad \Omega^2 = g^2 + k^2, \quad \tan 2\alpha = \frac{g}{k}.$$

El resultado 2.2 muestra que la concurrencia oscila armónicamente con un periodo que depende de los parámetros del sistema y con una amplitud que depende tanto de los parámetros del sistema como del estado inicial de este. Recuerdese que para una condición inicial como 2.1, el estado  $\hat{\rho}$  de los radiadores

Examinemos el comportamiento de la amplitud de la concurrencia en función del parámetro adimensional

$$\eta = \frac{k}{g} = \frac{\Gamma - \Delta}{2g}. \quad (2.4)$$

Para empezar tomemos las condiciones iniciales  $|S, 0\rangle$  y  $|G, 1\rangle$ , que corresponden a  $\theta = 0$  y  $\theta = \frac{\pi}{2}$  respectivamente. En estos casos, la ecuación 2.3 indica que la amplitud de la concurrencia es igual a uno (que es el máximo valor que puede tomar) para  $\eta = 0$ . Además se deduce que la amplitud de la concurrencia tiende a cero rápidamente cuando  $\eta$  aumenta; en efecto, la amplitud de la concurrencia ha decaído a la mitad de su valor máximo apenas para  $\eta = \frac{2}{\sqrt{2}} \approx 1,4$ , es decir, para  $\Gamma - \Delta \approx 3g$ . La siguiente gráfica sintetiza el resultado analítico.

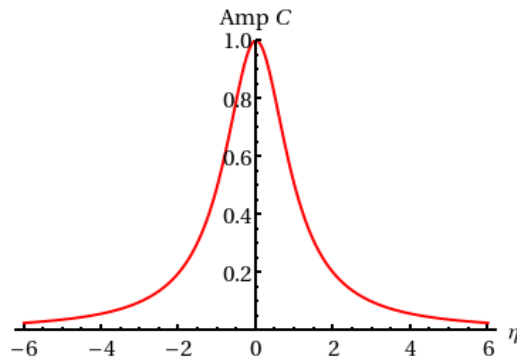


Figura 1. Amplitud de la concurrencia del estado de los radiadores, para las condiciones iniciales  $|S, 0\rangle$  y  $|G, 1\rangle$ , en función del parámetro  $\eta$ .

Explicamos el comportamiento de la concurrencia para valores “grandes” de  $\eta$  sobre la siguiente base:

- si  $\Gamma$  es “grande” comparada con  $g$ , predomina el intercambio de energía entre los radiadores sobre el intercambio de energía entre estos y el modo electromagnético,
- si  $\Delta$  es “grande” comparada con  $g$ , queda suprimido de manera efectiva el mecanismo de intercambio de energía entre el modo y los radiadores.

En ambos casos los radiadores no interactúan con el modo de la cavidad, la transferencia de energía ocurre entre un radiador y el otro. Dado que la interacción entre los dos radiadores es invariante bajo permutación entre ellos, el estado de los mismos permanecerá invariable en el tiempo, y entonces la amplitud de las oscilaciones de la concurrencia es pequeña. Es evidente pues, que en este caso la media temporal de la concurrencia es aproximadamente igual a la concurrencia inicial; a su vez, ésta depende exclusivamente del estado inicial.

Pasemos ahora a la interpretación del resultado cuando  $\eta$  se acerca a cero. En este caso,  $\Gamma \sim \Delta$ , esto es, los dos efectos que acabamos de describir compiten y terminan por cancelarse mutuamente, así que sin importar el valor de  $g$ , la interacción entre los radiadores y el modo de la cavidad es significativa. Luego, el estado de los radiadores variará apreciablemente: la amplitud de las oscilaciones de la concurrencia es grande.

Las siguientes gráficas ilustran la evolución temporal de la concurrencia bajo las diferentes condiciones que acabamos de examinar.

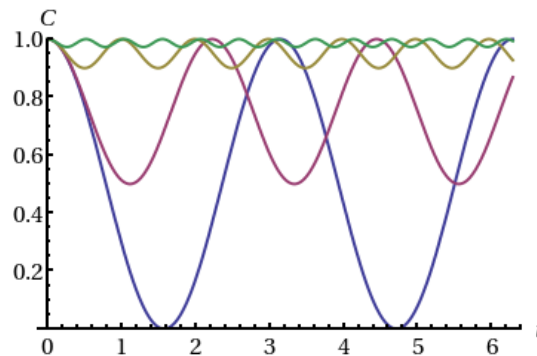


Figura 2. Concurrencia del estado de los radiadores en función del tiempo para la condición inicial  $|S, 0\rangle$  y para  $\eta = 0$  (azul),  $\eta = 1$  (morado),  $\eta = 3$  (oliva), y  $\eta = 6$  (verde).

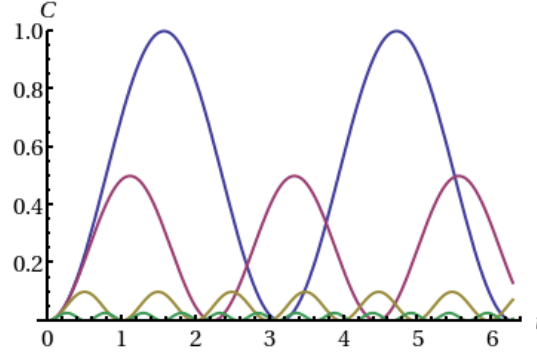


Figura 3. Concurrencia del estado de los radiadores en función del tiempo para la condición inicial  $|G, 1\rangle$  y para  $\eta = 0$  (azul),  $\eta = 1$  (morado),  $\eta = 3$  (oliva), y  $\eta = 6$  (verde).

Estudiemos ahora lo que sucede si inicialmente la probabilidad se distribuye equitativamente entre los estados  $|G, 1\rangle$  y  $|S, 0\rangle$ , esto es, si el estado inicial es  $2^{-1/2}(|G, 1\rangle \pm |S, 0\rangle)$ , que corresponde a  $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$ . Como para las condiciones iniciales ya analizadas, cuando  $\eta$  crece, la amplitud de las oscilaciones de la concurrencia disminuye porque los radiadores se desacoplan efectivamente del modo de la cavidad y retienen su estado inicial.

Las diferencias, con respecto a la evolución temporal de las condiciones que acabamos de analizar, aparecen cuando  $\eta$  tiende a cero. Por un lado, cuando  $\eta = 0$ , de la ecuación 2.4 y las ecuaciones 1.13 se deduce que  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , y entonces, de las ecuaciones 1.12, se encuentra que el vector propio  $|E_1\rangle$  del operador de Hamilton del sistema toma la forma:

$$|E_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |G, 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |S, 0\rangle.$$

Por otro lado, el estado inicial 2.1 para el caso que estamos estudiando,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , es:

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |G, 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |S, 0\rangle.$$

Las últimas dos ecuaciones muestran que cuando  $\eta$  se aproxima a cero, el estado inicial se aproxima a uno de los estados propios del sistema, y por lo tanto, la distribución de probabilidad permanecerá invariable en el tiempo; así mismo la hará la concurrencia: su amplitud de oscilaciones será nula. Las siguientes gráficas resumen este comportamiento.

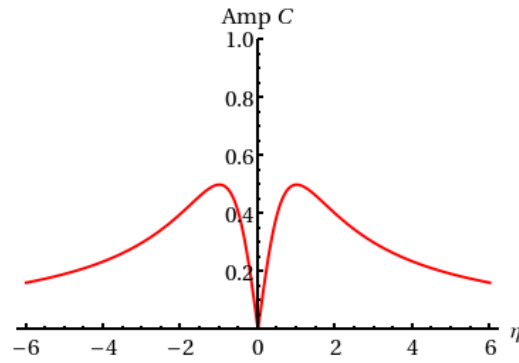


Figura 4. Amplitud de la concurrencia del estado de los radiadores, para la condición inicial  $2^{-1/2}(|G, 1\rangle \pm |S, 0\rangle)$ , en función del parámetro  $\eta$ .

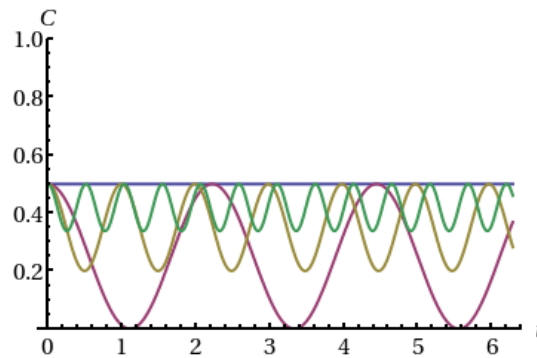


Figura 5. Concurrencia del estado de los radiadores en función del tiempo para la condición inicial  $2^{-1/2}(|G, 1\rangle \pm |S, 0\rangle)$  y para:  $\eta = 0$  (azul),  $\eta = 1$  (morado),  $\eta = 3$  (oliva), y  $\eta = 6$  (verde).

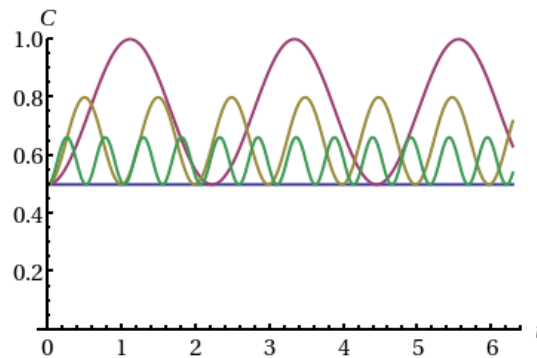


Figura 6. Concurrencia del estado de los radiadores en función del tiempo para la condición inicial  $2^{-1/2}(|G, 1\rangle \pm |S, 0\rangle)$  y para:  $\eta = 0$  (azul),  $\eta = 1$  (morado),  $\eta = 3$  (oliva), y  $\eta = 6$  (verde).



Consideremos brevemente otros tipos de condiciones iniciales. Empecemos con  $|eg, 0\rangle$ , discutida en el capítulo anterior. Además de las constantes 1.13, la solución de la ecuación de movimiento para este estado inicial involucra la cantidad

$$\mu = \frac{3\Gamma + \Delta}{2}. \quad (2.5)$$

Los elementos matriciales del operador de estado para este caso (véase 1.15) son

$$\begin{aligned} 2\rho_{s_0, s_0} &= 1 - \frac{g^2}{\Omega^2} \sin^2 \Omega t, \\ 2\rho_{A_0, s_0} &= e^{i\mu t} \left[ \cos \Omega t - \frac{iV}{\Omega} \sin \Omega t \right], \\ 2\rho_{A_0, G_1} &= e^{i\mu t} \frac{ig}{\Omega} \sin \Omega t, \end{aligned} \quad (2.6)$$

y la concurrencia, dada por 1.16, es

$$\mathcal{C}(t) = \sqrt{\left\{ \frac{\sin \mu t}{\tan 2\alpha} \right\}^2 + \frac{1}{4} \left\{ \frac{\sin \Omega t}{\csc 2\alpha} \right\}^2} |\sin 2\alpha \sin \Omega t|. \quad (2.7)$$

Finalmente, consideremos la condición inicial  $|gg, n\rangle$ , con  $n \geq 2$ . Empleando la notación

$$\rho_{s_0, s_0} = \text{tr}\{\hat{\rho}|S\rangle\langle S|\}, \quad w = \text{tr}\{\hat{\rho}[|E\rangle\langle E| - |G\rangle\langle G|]\}, \quad (2.8)$$

para la población del estado simétrico  $|S, 0\rangle$  y para la inversión de población, respectivamente, el operador de estado de los radiadores, en la base desnuda, se puede poner en la forma

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - w - \rho_{s_0, s_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{s_0, s_0} & \rho_{s_0, s_0} & 0 \\ 0 & \rho_{s_0, s_0} & \rho_{s_0, s_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + w - \rho_{s_0, s_0} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Las formas explícitas de la población del estado  $|S, 0\rangle$  y de la inversión de población son:

$$\rho_{s_0, s_0} = \frac{2ng^2}{\Omega_n^2} \sin^2 \Omega_n t \quad (2.10)$$

$$w = -1 + b_+ \sin^2 \left[ \frac{\Omega_n + \Gamma}{2g} t \right] + b_- \sin^2 \left[ \frac{\Omega_n - \Gamma}{2g} t \right] - b \sin^2 [\Omega_n t]. \quad (2.11)$$

Aquí, los parámetros

$$b_{\pm} = \frac{4n(n-1)}{(2n-1)^2} \left[ 1 \pm \frac{\Gamma}{\tilde{\Omega}_n} \right], \quad \text{y} \quad b = \frac{2n}{2n-1} \left[ \frac{ng^2}{\tilde{\Omega}_n^2} + \frac{(2n-1)g^2}{\Omega_n^2} \right],$$

dependen de las frecuencias:

$$\Omega_n^2 = \Gamma^2 + 2(2n - 1)g^2, \quad \text{y} \quad \tilde{\Omega}_n^2 = \Gamma^2 + (2n - 1)g^2. \quad (2.12)$$

Por su parte, la concurrencia entre los dos radiadores

$$\mathcal{C}(t) = \text{máx} \left\{ 0, \rho_{s_0, s_0} - [(1 - \rho_{s_0, s_0})^2 - w^2]^{1/2} \right\},$$

también puede escribirse como una función de la población del estado simétrico  $|S, 0\rangle$  y de la inversión de población.

## 2.2. DIPOLOS SEMICONDUCTORES

La inhomogeneidad de la muestra de puntos cuánticos significa, en general, diferentes energías de transición y diferentes constantes de interacción con el modo relevante de la cavidad. Como en el capítulo anterior, para iniciar ignoremos el modo de la cavidad y concentrémonos en los radiadores. Escribamos la energía de transición de cada punto, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} \omega_{d1} &= \omega_0 - \Delta_1, \\ \omega_{d2} &= \omega_0 - \Delta_2. \end{aligned}$$

Para simplificar, asumamos que  $\Delta_1 = -\Delta_2 = \delta$ . En lugar de 1.4, el operador de Hamilton de los radiadores, en la *nueva* base desnuda  $\{|g_1 g_2\rangle, |e_1 g_2\rangle, |g_1 e_2\rangle, |e_1 e_2\rangle\}$ , se representa mediante la matriz:

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & \Gamma & 0 \\ 0 & \Gamma & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\omega_0 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Entonces, los estados de Dicke de los radiadores son:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_G &= 0, & |\tilde{G}\rangle &= |g_1 g_2\rangle, \\ \tilde{E}_S &= \sqrt{\Gamma^2 + \delta^2}, & |\tilde{S}\rangle &= \sin \beta |e_1 g_2\rangle + \cos \beta |g_1 e_2\rangle, \\ \tilde{E}_A &= -\sqrt{\Gamma^2 + \delta^2}, & |\tilde{A}\rangle &= \cos \beta |e_1 g_2\rangle - \sin \beta |g_1 e_2\rangle, \\ \tilde{E}_E &= 2\omega_0, & |\tilde{E}\rangle &= |e_1 e_2\rangle, \end{aligned} \quad (2.14)$$

en donde  $\tan 2\beta = \Gamma/\delta$ . Como se ve, ni el estado  $|\tilde{S}\rangle$  es completamente simétrico, ni el estado  $|\tilde{A}\rangle$  es completamente antisimétrico. Tampoco coinciden con estados máximamente enredados de los dos *qubits*.

Consideremos ahora que las las energías de transición de los puntos son iguales pero que las constantes de interacción radiador-modo son diferentes. Definiendo:

$$\begin{aligned} g_1 &= g + g_\varepsilon, \\ g_2 &= g - g_\varepsilon, \end{aligned}$$

podemos representar el operador de Hamilton del sistema modo-radiadores, volviendo a la base desnuda  $\{|gg\rangle, |eg\rangle, |ge\rangle, |ee\rangle\}$  —pertinente si las energías de transición de los puntos son iguales— como:

$$\hat{H} = \{\omega_0 - \Delta\} \hat{1} + \begin{pmatrix} \Delta & \frac{1}{\sqrt{2}}g & \frac{1}{\sqrt{2}}g \\ \frac{1}{\sqrt{2}}g & 0 & \Gamma \\ \frac{1}{\sqrt{2}}g & \Gamma & 0 \end{pmatrix} + \frac{g_\varepsilon}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Asumamos que el tercer término del lado derecho de la igualdad anterior es una perturbación con respecto a los dos primeros. Estos dos términos constituyen el operador 1.11. Aplicando el método de Rayleigh-Schrödinger para el cálculo aproximado de los valores propios de 2.15, se encuentra que hasta la primera corrección no nula,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 &= E_1 + \left\{ \frac{\cos^2 \alpha}{\Omega + \mu} \right\} g_\varepsilon^2, \\ \tilde{E}_2 &= E_2 - \left\{ \frac{\sin^2 \alpha}{\Omega - \mu} \right\} g_\varepsilon^2, \\ \tilde{E}_3 &= E_3 - \left\{ \frac{2\Gamma}{\Omega^2 - \mu^2} \right\} g_\varepsilon^2, \end{aligned} \quad (2.16)$$

en donde  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  son los valores propios de 1.11. Por el mismo método de aproximación se encuentra que los vectores propios de 2.15 son:

$$\begin{aligned} |\tilde{E}_1\rangle &= |E_1\rangle + \left\{ \frac{\cos \alpha}{\Omega + \mu} \right\} g_\varepsilon |E_3\rangle, \\ |\tilde{E}_2\rangle &= |E_2\rangle + \left\{ \frac{\sin \alpha}{\Omega - \mu} \right\} g_\varepsilon |E_3\rangle, \\ |\tilde{E}_3\rangle &= |E_3\rangle - \left\{ \frac{\cos \alpha}{\Omega + \mu} \right\} g_\varepsilon |E_1\rangle - \left\{ \frac{\sin \alpha}{\Omega - \mu} \right\} g_\varepsilon |E_2\rangle. \end{aligned} \quad (2.17)$$

En los únicos dos experimentos [1, 3], de los que tenemos conocimiento, en que se ha tenido certeza que *dos* puntos cuánticos embebidos en una cavidad interactúan con el modo de esta, se tiene que

$$g_\varepsilon \sim 0,07g.$$

Por tanto, a la luz de los resultados que acabamos de derivar, el efecto debido a la disparidad de las constantes de acoplamiento radiador-modo, es una corrección que en un primer acercamiento al problema puede ser ignorada. No sucede así con el efecto de la disparidad de las frecuencias de transición de los puntos, pues de hecho, en el

experimento más reciente, esta se modifica a través de un campo electrostático externo desde una condición en que  $\Delta_1 \approx -\Delta_2$  hasta otra en que  $\Delta_1 = \Delta_2$ ; durante el cambio, la diferencia entre  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  es comparable con  $g$ , y entonces no puede ser ignorada.

Finalmente, dejemos iguales tanto las energías de transición de los dipolos como sus acoplamientos con el modo de la cavidad, para concentrarnos en el efecto de la tasa de cesión de energía de la cavidad al ambiente,  $\kappa$  (véase la ecuación 1.17). En los experimentos aducidos, se tiene que  $\kappa$  es mucho mayor que  $\gamma$  —la tasa de cesión de energía de los radiadores al ambiente—:

$$\kappa \sim 1500\gamma.$$

Es justo pues, en un primer acercamiento al problema, reducir las ecuaciones 1.18 a:

$$\dot{\rho}_{G_0,G_0} = \kappa\rho_{G_1,G_1}, \quad \left. \vphantom{\dot{\rho}_{G_0,G_0}} \right\} \quad (2.18a)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho}_{G_1,G_1} &= ig\{\rho_{G_1,S_0} - \rho_{S_0,G_1}\} - \kappa\rho_{G_1,G_1}, \\ \dot{\rho}_{S_0,S_0} &= ig\{\rho_{S_0,G_1} - \rho_{G_1,S_0}\}, \\ \dot{\rho}_{S_0,G_1} &= ig\{\rho_{S_0,S_0} - \rho_{G_1,G_1}\} + i\{\Delta - \Gamma + \frac{i}{2}\kappa\}\rho_{S_0,G_1}, \end{aligned} \right\} \quad (2.18b)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho}_{S_0,G_0} &= -ig\rho_{G_1,G_0} - i\Gamma\rho_{S_0,G_0}, \\ \dot{\rho}_{G_1,G_0} &= -ig\rho_{S_0,G_0} - i\{\Delta - \frac{i}{2}\kappa\}\rho_{G_1,G_0}, \end{aligned} \right\} \quad (2.18c)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho}_{A_0,S_0} &= ig\rho_{A_0,G_1} + 2i\Gamma\rho_{A_0,S_0}, \\ \dot{\rho}_{A_0,G_1} &= ig\rho_{A_0,S_0} + i(\Delta + \Gamma + \frac{i}{2}\kappa)\rho_{A_0,G_1}, \end{aligned} \right\} \quad (2.18d)$$

$$\dot{\rho}_{A_0,G_0} = i\Gamma\rho_{A_0,G_0}, \quad \left. \vphantom{\dot{\rho}_{A_0,G_0}} \right\} \quad (2.18e)$$

$$\dot{\rho}_{A_0,A_0} = 0. \quad \left. \vphantom{\dot{\rho}_{A_0,A_0}} \right\} \quad (2.18f)$$

Solucionemos analíticamente los sistemas de ecuaciones 2.18b, 2.18c y 2.18d. Para ello, reescribámoslos respectivamente como:

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{L}_1 \mathbf{v}_1, \quad \dot{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{L}_2 \mathbf{v}_2, \quad \dot{\mathbf{v}}_3 = \mathbf{L}_3 \mathbf{v}_3,$$

en donde:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \rho_{S_0,G_1} + \rho_{G_1,S_0} \\ \rho_{S_0,G_1} - \rho_{G_1,S_0} \\ \rho_{S_0,S_0} - \rho_{G_1,G_1} \\ \rho_{S_0,S_0} + \rho_{G_1,G_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_1 = 2i \begin{bmatrix} 0 & \delta & 0 & 0 \\ \delta & 0 & g & 0 \\ 0 & g & 0 & -i\kappa/4 \\ 0 & 0 & -i\kappa/4 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \rho_{S_0,G_0} \\ \rho_{G_1,G_0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = -i \begin{bmatrix} \Gamma & g \\ g & \Delta - i\kappa/2 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \rho_{A_0,G_1} \\ \rho_{A_0,S_0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_3 = i \begin{bmatrix} \Delta + \Gamma + i\kappa/2 & g \\ g & 2\Gamma \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Si  $\{\omega_{1i}\}$ ,  $\{\omega_{2j}\}$  y  $\{\omega_{3l}\}$  son, respectivamente, los valores propios de  $\mathbf{L}_1$ ,  $\mathbf{L}_2$  y  $\mathbf{L}_3$ , la solución general de cada sistema es

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{M}_1 \mathbf{u}_1, & [\mathbf{u}_1]_i &= u_{1i} e^{\omega_{1i} t}, & i &= 1, 2, 3, 4 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{M}_2 \mathbf{u}_2, & [\mathbf{u}_2]_j &= u_{2j} e^{\omega_{2j} t}, & j &= 1, 2 \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{M}_3 \mathbf{u}_3, & [\mathbf{u}_3]_l &= u_{3l} e^{\omega_{3l} t}, & l &= 1, 2 \end{aligned}$$

en donde  $\{u_{1i}\}$ ,  $\{u_{2j}\}$  y  $\{u_{3l}\}$  son constantes determinadas por las condiciones iniciales, y  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$  y  $\mathbf{M}_3$  son matrices cuyos coeficientes se obtienen al poner estas soluciones en los sistemas originales.

Empleando este método se encuentra que en la solución para la condición inicial

$$|\Psi(0)\rangle = \sin \theta |G, 1\rangle + \cos \theta |S, 0\rangle$$

intervienen as dos frecuencias

$$\begin{aligned} 2\Omega_1^2 &= \left[ \Omega^4 - \frac{\kappa^2}{16} \left\{ 2g^2 - 2k^2 - \frac{\kappa^2}{16} \right\} \right]^{1/2} + \Omega^2 - \frac{\kappa^2}{16}, \\ 2\Omega_2^2 &= \left[ \Omega^4 - \frac{\kappa^2}{16} \left\{ 2g^2 - 2k^2 - \frac{\kappa^2}{16} \right\} \right]^{1/2} - \Omega^2 + \frac{\kappa^2}{16}. \end{aligned}$$

Basados en lo que hemos dicho sobre la relación en que están los parámetros involucrados, se concluye que  $\Omega_1 \approx \Omega$  y que  $\Omega_2 \approx 0$ . Análogamente a como se hizo en ausencia de disipación, ecuación 2.1, el grado de enredamiento entre los radiadores se puede escribir como

$$\mathcal{C}(t) = e^{-\frac{\kappa t}{2}} \{ \bar{C} + C \cos 2\Omega_1 t + c \}. \quad (2.22)$$

Aquí,  $\bar{C}$  y  $C$  son funciones del tiempo

$$\bar{C} = \xi(t) \cos^2 \theta - C, \quad C = \zeta(t) C_0, \quad (2.23)$$

siendo  $C_0$  la amplitud de la concurrencia sin disipación, ecuación 2.2. Las funciones  $\zeta(t)$  y  $\xi(t)$

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}} \cosh 2\Omega_2 t, \\ \xi(t) &= \left[ \frac{\Omega_1^2 + \frac{\kappa^2}{16}}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} \right] \cosh 2\Omega_2 t + \left[ \frac{\Omega_2^2 - \frac{\kappa^2}{16}}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} \right] \cos 2\Omega_1 t. \end{aligned}$$

son tales que, si los parámetros están en la relación que hemos indicado más arriba, se tiene que  $\zeta(t) \approx 1$  y que  $\xi(t) \approx 1$ . Finalmente, la función  $c$  que aparece en 2.20 es

$$c = \frac{\kappa}{4} \left[ p \frac{\sinh 2\Omega_2 t}{\Omega_2} + q \frac{\sin 2\Omega_1 t}{\Omega_1} \right] \cos \theta,$$

en donde

$$p = \frac{\{\Omega_2^2 + k^2\} \cos\theta - gk \sin\theta}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}, \quad q = \frac{\{\Omega_1^2 - k^2\} \cos\theta + gk \sin\theta}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}.$$

Se puede igualmente mostrar que  $c \approx 0$ . Por lo tanto, podemos concluir que contando con la disipación provocada por la imperfección de las paredes de la cavidad, el grado de enredamiento entre los radiadores es aproximadamente:

$$\mathcal{C}(t) = e^{-\frac{\kappa t}{2}} \mathcal{C}(t; \kappa = 0), \quad (2.24)$$

en donde  $\mathcal{C}(t; \kappa = 0)$  es la concurrencia en ausencia de disipación, dada por la ecuación 2.2.

Ahora que tenemos una idea clara del efecto de la disipación sobre el enredamiento entre los radiadores, volvamos momentáneamente sobre el resultado sin disipación 2.2. El valor máximo de la concurrencia, en ese caso, es

$$\mathcal{C}_{\max} = \begin{cases} \cos^2\theta & \text{si } \cot 2\theta \leq \eta \\ \cos^2\theta - 2C_0 & \text{si } \cot 2\theta > \eta \end{cases} \quad (2.25)$$

Así pues, vale la pena notar que existen valores de  $\Delta$  y  $\Gamma$  para los cuales el enredamiento máximo *sólo* depende del estado inicial; en estos casos el enredamiento máximo es igual al enredamiento inicial. Cuando  $\theta$  disminuye, haciéndose menos enredado el estado inicial, el enredamiento máximo empieza a depender de  $\Delta$  y  $\Gamma$ , de tal forma que el máximo enredamiento es siempre mayor que el enredamiento inicial; de hecho en estos casos es posible hacer que  $\mathcal{C}_{\max} = 1$  haciendo

$$\eta^{(1)} = \tan\theta \quad (2.26)$$

Los valores máximos del enredamiento como función del parámetro  $\eta$  y del ángulo  $\theta$ , que define la condición inicial, se encuentran dibujados en el lado derecho de la Figura 7, y corresponden a la región roja. En la figura se observan dos curvas en blanco, las cuales definen las dos regiones en que valen los máximos dados por la ecuación (2.25).

Por otro lado, la amplitud  $C_0$  de las oscilaciones del enredamiento, dependen tanto de  $\theta$  como de  $\Delta$  y  $\Gamma$ ; el hecho más relevante que encontramos es que es posible reducir a cero esta amplitud y entonces tener un valor (requerido) constante en el tiempo del enredamiento escogiendo

$$\eta^{(2)} = \cot 2\theta \quad (2.27)$$

El comportamiento de la amplitud de la concurrencia se ha dibujado en el lado izquierdo de la Figura 7.

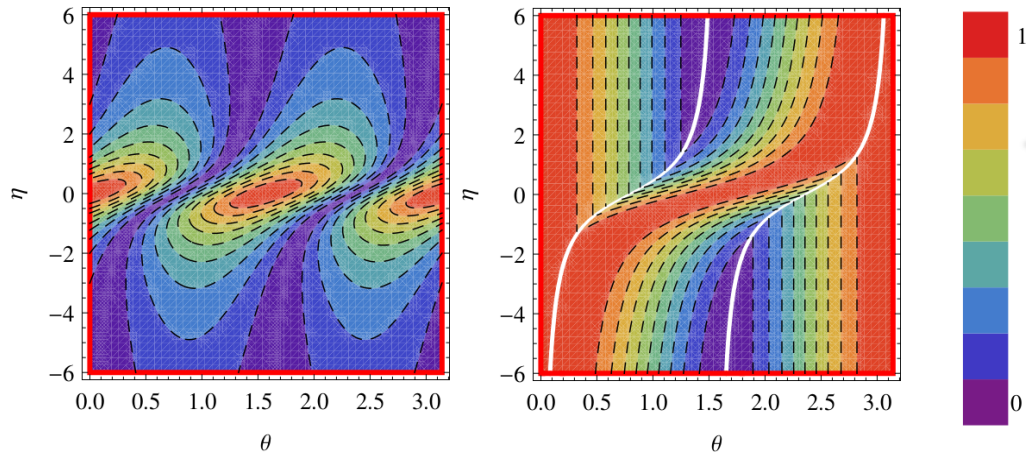


Figura 7. Concurrencia del estado de los radiadores en función del tiempo para la condición inicial  $\frac{1}{\sqrt{2}} |G, 1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |S, 0\rangle$  y para  $\eta = 0$  (azul),  $\eta = 1$  (morado),  $\eta = 3$  (oliva), y  $\eta = 6$  (verde).

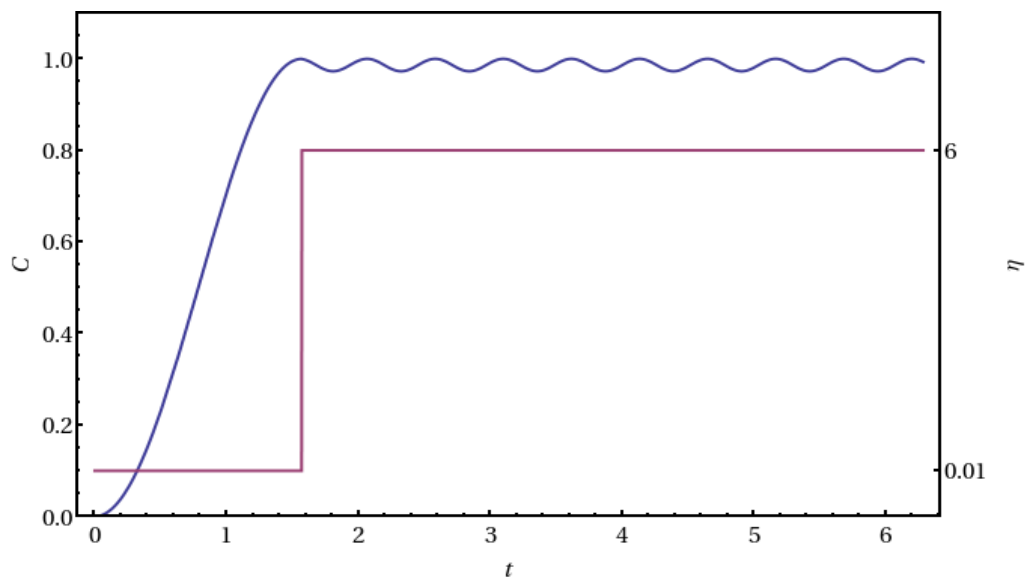


Figura 8. Concurrencia del estado de los radiadores en función del tiempo para la condición inicial  $\frac{1}{\sqrt{2}} |G, 1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |S, 0\rangle$  y para:  $\eta = 0$  (azul),  $\eta = 1$  (morado),  $\eta = 3$  (oliva), y  $\eta = 6$  (verde).

Veamos que estas dos gráficas nos permiten idear un esquema de manipulación del estado conjunto de los dos radiadores, en el cual podemos partir de un valor nulo de enredamiento, ir a un estado con un valor alto de enredamiento, y enseguida cambiar el parámetro  $\eta$ , de manera que el enredamiento ahora no cambie, o cambie muy poco. Un ejemplo de tal esquema de control se muestra en la Figura 8. Allí vemos cómo debe cambiarse el parámetro de control,  $\eta$ , como función del tiempo (línea morada) para que el enredamiento (línea azul) pase de un valor cero a un valor próximo a la unidad. En el momento en el cual el sistema de los radiadores alcanza su máximo valor

de enredamiento se cambia el parámetro de control de manera que la amplitud de la oscilación del enredamiento se torna pequeña.

Como se mencionó en el primer capítulo, es necesario disponer de mecanismos de preparación de pares de *qubits* semiconductores enredados para llevar a cabo tareas de procesamiento cuántico de información. Este esquema que se ha bosquejado en el párrafo anterior es un ejemplo, relativamente realista, de un esquema en el que se produce enredamiento cercano al máximo posible. El estado creado podría ser utilizado, justo después de ser producido, para teletransportar un estado, por ejemplo.

Algunos efectos no fueron tenidos en cuenta para hacer este análisis; la disipación se ignoró, como también se ignoró el hecho de que los puntos cuánticos, al menos con la tecnología actual de fabricación, no se pueden considerar iguales. Sin embargo, estos efectos pueden tenerse en cuenta a posteriori. Nuestros cálculos preliminares muestran que, suponiendo parámetros realistas, es posible utilizar un campo eléctrico aplicado a los puntos para cambiar el valor del parámetro de control, de manera que efectivamente se puede manipular el enredamiento entre los excitones correspondientes a los dos puntos, para que comiencen en un valor nulo y vayan a un valor cercano a uno. Después de esto, ocurren unas pequeñas oscilaciones sobre una envolvente que decae. El tiempo de decaimiento del enredamiento depende, por supuesto, del valor de la constante  $\kappa$ , la cual mide la tasa a la cual el campo de la cavidad pierde energía.

Este trabajo teórico y los experimentos recientes [3], muestran que es posible utilizar puntos cuánticos en microcavidades para hacer tareas de procesamiento cuántico de la información.



---

---

## Conclusiones

---

---

- Se encontraron los estados de Dicke de un sistema de dos radiadores interaccionantes, con sus respectivas energías propias.
- Se demostró analíticamente que, para el caso de radiadores idénticos igualmente acoplados al modo de una cavidad y cuya dinámica se restringe al subespacio invariante bajo permutaciones de los radiadores, existe una relación simple directa entre el grado de enredamiento radiador-radiador y los efectos cooperativos.
- Se demostró analíticamente que la relación entre enredamiento y cooperativismo no es directa en general. Por ejemplo, cuando la dinámica no se restringe al subespacio simétrico, dicha relación intervienen los elementos de fuera de la diagonal del operador de estado.
- Se encontró la evolución temporal del enredamiento para un sistema de dos radiadores idénticos, para cuatro tipos de condiciones iniciales. En particular, para el caso de una condición inicial completamente simétrica, se analizaron los regímenes dinámicos del enredamiento y su relación con el estado inicial del sistema.
- Se cuantificaron los efectos de tener energías de transición diferentes de los radiadores, de acoplamientos radiador-modo diferentes, y de la pérdida irreversible de energía a través de las paredes de la cavidad. Tomando como prototipo el sistema de puntos cuánticos semiconductores, discutimos cuál de estos efectos es más relevante; en ese caso, se solucionó analíticamente la ecuación de movimiento, haciendo posible encontrar una expresión explícita para el grado de enredamiento entre los dipolos semiconductores.
- Se propuso un esquema de generación de pares de excitones enredados, basado en tecnología al alcance de los experimentos actuales.

---

---

## Bibliografía

---

---

- [1] S. Reitzenstein, A. Loeffler, C. Hofman, A. Kubanek, M. Kamp, J. P. Reithmaier, A. Forchel, V. D. Kulakovskii, L. V. Keldysh, I. V. Ponomarev, y T. L. Reinecke. Coherent photonic coupling of semiconductor quantum dots. *Opt. Lett.*, 31:1738, 2006.
- [2] M. Scheibner, T. Schmidt, L. Worschech, A. Forchel, G. Bacher, T. Passow y D. Hommel. Superradiance of quantum dots. *Nat. Phys.*, 3:106, 2007.
- [3] A. Laucht, J. M. Villas-Bôas, S. Stobbe, N. Hauke, F. Hofbauer, G. Böhm, P. Lodahl, M.-C. Amann, M. Kaniber, y J. J. Finley. Mutual coupling of two semiconductor quantum dots via an optical nanocavity. *Phys. Rev. B*, 82:075305, 2010.
- [4] D. G. Suárez-Forero, G. Cipagauta, H. Vinck-Posada, K. M. Fonseca-Romero, y B. A. Rodríguez. Can the exciton–polariton regime be defined by its quantum properties? *arXiv:12052719*, 2012.
- [5] G.M. Palma, K. Suominen, y A.K. Ekert. Quantum Computers and Dissipation. *Proc. R. Soc. A*, 452:567, 1996.
- [6] L.-M. Duan y G.-C. Guo. Preserving Coherence in Quantum Computation by Pairing Quantum Bits. *Phys. Rev. Lett.*, 79:1953, 1997.
- [7] P. Zanardi y M. Rasetti. Noiseless Quantum Codes. *Phys. Rev. Lett.*, 79:3306, 1997.
- [8] D.A. Lidar, I.L. Chuang, y K.B. Whaley. Decoherence-Free Subspaces for Quantum Computation. *Phys. Rev. Lett.*, 81:2594, 1998.
- [9] D.A. Lidar et al. . *Phys. Rev. A*, 61:052307, 2000.
- [10] J. Kempe, D. Bacon, D. A. Lidar, y K. B. Whaley. Theory of decoherence-free fault-tolerant universal quantum computation. *Phys. Rev. A*, 63:042307, 2000.
- [11] J. M. Torres, E. Sadurn y T. H. Seligman. Two interacting atoms in a cavity: exact solutions, entanglement and decoherence. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 43:192002, 2010.

- 
- [12] E. Schrödinger. Discussion of probability relations between separated Systems. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31:555, 1935.
- [13] J. S. Bell. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics*, 1:195, 1964.
- [14] A. Einstein, B. Podolski y N. Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Phys. Rev.*, 47:777, 1935.
- [15] Ryszard Horodecki, Pawel Horodecki, Michal Horodecki y Karol Horodecki. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, 81:865, 2009.
- [16] D. Bruss. Characterizing entanglement. *J. Math. Phys.*, 43:4237, 2002.
- [17] E. Knill, y R. Laflamme. Power of one bit of quantum information. *Phys. Rev. Lett.*, 81:5672–5675, Dec 1998.
- [18] J. Emerson, S. Lloyd, D. Poulin, y D. Cory. Estimation of the local density of states on a quantum computer. *Phys. Rev. A*, 69:050305, May 2004.
- [19] D. Poulin, R. Blume-Kohout, R. Laflamme, y H. Ollivier. Exponential speedup with a single bit of quantum information: Measuring the average fidelity decay. *Phys. Rev. Lett.*, 92:177906, Apr 2004.
- [20] M. A. Nielsen y I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, October 2000.
- [21] D. P. DiVincenzo. Two bit-gates are universal for quantum computation. *Phys. Rev. A*, 51:1015, 1995.
- [22] A. Barenco, C. H. Bennett, R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. A. Smolin, y H. Weinfurter. Universal gates for quantum computation. *Phys. Rev. A*, 52:3457, 1995.
- [23] D. Bouwmeester, A. Ekert y A. Zeilinger. *The Physics of Quantum Information*. Springer Verlag, 2000.
- [24] M. Schlosshauer. Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 76:1267, 2005.
- [25] O. Gühne y G. Tóth. Entanglement detection. *Phys. Rep.*, 474:1, 2009.
- [26] G. Tóth. Detection of multipartite entanglement in the vicinity of symmetric Dicke states. *J. Opt. Soc. Am. B*, 24:275, 2007.
- [27] O. Gühne, F. Bodoky y M. Blaauboer. Multiparticle entanglement under the influence of decoherence. *Phys. Rev. A*, 78:060301(R), 2008.
- [28] J. P. Clemens, L. Horvath, B. C. Sanders y H. J. Carmichael. Collective spontaneous emission from a line of atoms. *Phys. Rev. A*, 68:023809, 2003.
- [29] R. I. Karasik, K. P. Marzlin, B. C. Sanders y K. B. Whaley. Multiparticle decoherence-free subspaces in extended systems. *Phys. Rev. A*, 76:012331, 2007.

- 
- [30] R. H. Dicke. Coherence in spontaneous radiation processes. *Phys. Rev.*, 93:99, 1954.
- [31] A. Einstein. On the quantum theory of radiation. *Z Phys.*, 18:121, 1917.
- [32] V. F. Weisskopf y E. Wigner. . *Z Phys.*, 63:54, 1930.
- [33] M. Sargent III, M. O. Scully y W. E. Lamb Jr. *Laser Physics*. Addison Wesley, 1985.
- [34] L. Ballentine. *Quantum Mechanics: A Modern Development*. World Scientific Publishing, 1998.
- [35] M. O. Scully y M. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [36] M. Gross y S. Haroche. Superradiance: an essay on the theory of collective spontaneous emission. *Phys. Rep.*, 93:301, 1982.
- [37] T. Brandes. Coherent and collective quantum optical effects in mesoscopic systems. *Phys. Rep.*, 408:315, 2005.
- [38] N. E. Rehler y J. H. Eberly. Superradiance. *Phys. Rev. A*, 3:1735, 1971.
- [39] R. Bonifacio y G. Preparata. Coherent Spontaneous Emission. *Phys. Rev. A*, 2:336, 1970.
- [40] R. Bonifacio, P. Schwendimann y F. Haake. Quantum Statistical Theory Of Superradiance. I. *Phys. Rev. A*, 4:302, 1971.
- [41] R. Bonifacio, P. Schwendimann y F. Haake. Quantum Statistical Theory Of Superradiance. II. *Phys. Rev. A*, 4:854, 1971.
- [42] R. Bonifacio y L. A. Lugiato. Cooperative radiation processes in two-level systems: Superfluorescence. *Phys. Rev. A*, 11:1507, 1975.
- [43] A. A. Svidzinsky, J.-T. Chang y M. O. Scully. Cooperative spontaneous emission of N atoms: Many-body eigenstates, the effect of virtual Lamb shift processes, and analogy with radiation of N classical oscillators. *Phys. Rev. A*, 81:053821, 2010.
- [44] E. Wolfe y S. F. Yelin. Certifying Separability in Symmetric Mixed States of N Qubits, and Superradiance. *Phys. Rev. Lett.*, 112:140402, 2014.
- [45] B. M. Garraway. The Dicke model in quantum optics: Dicke model revisited. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 369:1137, 2011.
- [46] E. M. Purcell. Spontaneous emission probabilities at radio frequencies. *Phys. Rev.*, 69:681, 1946.
- [47] S. Haroche and J. M. Raimond. *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities and Photons*. Oxford University Press, 2006.

- 
- [48] M. Tavis y F. W. Cummings. Approximate Solutions for an N-Molecule-Radiation-Field Hamiltonian. *Phys. Rev.*, 188:692, 1969.
- [49] A. Sitek y P. Machnikowski. Collective fluorescence and decoherence of a few nearly identical quantum dots. *Phys. Rev. B*, 75:035328, 2007.
- [50] A. Sitek y P. Machnikowski. Interplay of coupling and superradiant emission in the optical response of a double quantum dot. *Phys. Rev. B*, 80:115319, 2009.
- [51] A. Sitek y P. Machnikowski. Theory of nonlinear optical response of ensembles of double quantum dots. *Phys. Rev. B*, 80:115301, 2009.
- [52] A. Sitek y P. Machnikowski. Vacuum-induced coherence in quantum dot systems. *Phys. Rev. B*, 86:205315, 2012.
- [53] M. Kozub, L. Pawicki, y P. Machnikowski. Enhanced spontaneous emission from inhomogeneous ensembles of quantum dots is induced by short-range couplings. *Phys. Rev. B*, 86:12135, 2012.
- [54] B. W. Lovett, J. H. Reina, A. Nazir, y G. A. D. Briggs. Optical schemes for quantum computation in quantum dot molecules. *Phys. Rev. B*, 68:205319, 2003.
- [55] A. Nazir, B. W. Lovett, S. D. Barrett, J. H. Reina, y G. D. Briggs. Anticrossings in Foerster coupled quantum dots. *Phys. Rev. B*, 71:045334, 2005.
- [56] A. Joshi, R. R. Puri, y S. V. Lawande. Effect of the dipole interaction and phase-interrupting collision on the collapse-and-revival phenomenon in the jaynes-cummings model. *Phys. Rev. A*, 44:2135, 1991.
- [57] Varada, G. V. y Agarwal, G. S. Two-photon resonance induced by the dipole-dipole interaction. *Phys. Rev. A*, 45:6721, 1992.
- [58] Peng, Jin y Li, Gao. Effects of dipole-dipole interaction on dynamics properties and atomic coherent trapping of a two-atom system. *Phys. Rev. A*, 47:4212, 1993.
- [59] Z. Ficek, y R. Tanaś. Entangled states and collective nonclassical effects in two-atom systems. *Phys. Rep.*, 372:369, 2002.
- [60] S. Hill y W.K. Wootters. Entanglement of a Pair of Quantum Bits. *Phys. Rev. Lett.*, 78:5022, 1997.
- [61] W.K. Wootters. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2245, 1998.
- [62] Ting Yu y J. H. Eberly. Evolution from entanglement to decoherence of bipartite mixed X states. arXiv:quant-ph/0503089, 2007.
- [63] S. M. Hashemi Rafsanjani, M. Huber, C. J. Broadbent, y J. H. Eberly. Genuinely multipartite concurrence of N-qubit X matrices. *Phys. Rev. A*, 86:062303, 2012.
- [64] B. Schumacher. Quantum coding. *Phys. Rev. A*, 51:2738, 1995.

- 
- [65] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh y V. Vedral. Entanglement in many-body systems.  
*Rev. Mod. Phys.*, 80:517, 2008.