



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Estudio Computacional de la Respuesta Operacional de un Ducto Convergente-Divergente Bajo Condiciones de Flujo Compresible, Turbulento

Oscar Mauricio Ochoa Alvarez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica
Bogotá, Colombia
2015

Estudio Computacional de la Respuesta Operacional de un Ducto Convergente-Divergente Bajo Condiciones de Flujo Compresible, Turbulento

Oscar Mauricio Ochoa Alvarez

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ingeniería Mecánica

Director:

Ph.D. Carlos Alberto Duque Daza

Línea de Investigación:

Ingeniería Térmica y Fluidos

Grupo de Investigación:

Grupo de Modelado y Métodos Numéricos en Ingeniería

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica

Bogotá, Colombia

2015

Para los que todavía creen en los sueños:
Persígales. Persígales hasta que se queden sin
alientos. Luego, sigan corriendo.

Agradecimientos

A Dios porque todo lo que tengo viene de Él. A mi padre y mis hermanos, por todo el apoyo y paciencia. A mi director de tesis, por no rendirse nunca conmigo. A mis compañeros de maestría, por hacer amenos muchos momentos amargos. A mis amigos, por su paciencia y estar pendiente de mí.

Resumen

Se realiza es estudio numérico de algunas estadísticas de la turbulencia de un flujo compresible pasando a través de una tobera De Laval con una condición de entrada de presión oscilante. Para esto, se utiliza el software de código abierto OpenFOAM. Se hace la validación del solucionador *rhoCentralFoam* para flujo supersónico en condiciones similares a las reportadas en trabajos experimentales. Se diseña el modelo numérico con un dominio bidimensional y las condiciones iniciales y de frontera que se aproximan más a lo reportado experimentalmente. La validación de este modelo frente a los datos reportados muestra variaciones inferiores al 1 % para la condición de flujo críticamente expandido. Las simulaciones en condiciones de flujo sobre-expandido muestra una variación mayor en la medida en que disminuye el valor del NPR. Se observa la asimetría de las ondas de choque en la sección divergente de la tobera para valores de NPR muy bajos, efecto que ha sido reportado experimentalmente por otros autores. Al realizar simulaciones con dominio tridimensional no se logra establecer el ancho del dominio adecuado debido a la falta de mayores recursos computacionales. Sin embargo, las estadísticas de la turbulencia mantienen el comportamiento de las simulaciones bidimensionales. Al imponer una condición de presión oscilante a la entrada se observa un incremento en la turbulencia principalmente en la sección de la tobera donde inicia la parte divergente, despues de la garganta. El análisis del efecto de la compresibilidad en la turbulencia muestra que este se puede despreciar para el caso de estudio. La hipótesis de Morkovin no se cumple para este caso dado que al aplicar la transformada de Van Driest el comportamiento del flujo compresible turbulento no se ajusta a uno incompresible similar. Las curvas de lo valores de los RMS muestran un comportamiento típico. En forma similar a lo observado por otros autores, el aumento de la sección divergente de la tobera lleva a una mitigación de la turbulencia en esta sección.

Palabras clave: Propulsión. Estadísticas de Turbulencia. Flujo Compresible. Tobera De Laval. .

Abstract

A numerical study is performed of some statistics of the turbulence of a compressible flow passing through a Laval nozzle with an oscillating pressure input condition. To do this, the open source software OpenFOAM is used. Validation of the supersonic flow solver *rhoCentralFoam* is made with similar conditions to those reported in experimental work. The numerical model with a two-dimensional domain and the initial and boundary conditions that are closer to those reported experimentally is design. Validation of this model against the data reported shows variations below 1% for critically expanded flow condition. Simulations of over-expanded flow conditions show greater variation in the extent that decreases the value of NPR. The asymmetry of the shock waves in the diverging section of the nozzle for very low values of NPR is observed, an effect that has been reported in experiments by other authors. In the simulations with three-dimensional domain it is not possible to establish the appropriate domain width due to the lack of greater computational resources. However, the statistics of the turbulence maintain the behaviour of two-dimensional simulations. By imposing a boundary oscillating pressure condition in the inlet, increased turbulence is observed mainly in the section of the nozzle where the diverging section begins, after throat. The analysis of the effect of compressibility in the turbulence shows that this can be neglected for this study case. The hypothesis of Morkovin does not hold for this case since applying Van Driest transform the behaviour of compressible turbulent flow does not conform to one similar incompressible. The curves of the RMS values show a typical behaviour. Similar to that observed by other authors, increasing the diverging section of the nozzle leads to mitigation of turbulence in this section.

keywords: Propulsion. Turbulence Statistics. Compressible Flow. De Laval Nozzle. .

Contenido

Agradecimientos	VII
Resumen	IX
Lista de símbolos	XIX
1. Introducción	1
2. Modelo Matemático y Numérico del Sistema Físico	3
2.1. Principios Físicos	3
2.1.1. Propulsión de Cohetes	3
2.1.2. Ducto Propulsivo - Tobera De Laval	4
2.1.3. Oscilación de la presión en la cámara de combustión	5
2.1.4. Turbulencia	7
2.2. Modelo Matemático	9
2.2.1. Propulsión	9
2.2.2. Ducto Convergente-Divergente	11
2.2.3. Oscilación de la presión:	16
2.2.4. Ecuaciones de flujo turbulento:	16
2.3. Métodos Numéricos	17
2.3.1. Método de los Volúmenes Finitos	17
2.3.2. Propulsión	19
2.3.3. Modelos de Turbulencia	19
3. Validación del Modelo Computacional	22
3.1. Validación del Solucionador	22
3.1.1. Especificación del problema y parámetros del caso de validación.	24
3.1.2. Validación de los valores obtenidos frente a los valores teóricos.	26
3.2. Validación del Modelo Computacional para la Geometría tobera De Laval.	29
3.2.1. Especificación del problema y parámetros del caso.	29
3.2.2. Estudio de independencia de malla para condiciones de diseño del ducto.	32
3.2.3. Validación frente a valores experimentales	33
4. Características del Flujo Turbulento Compresible en la Sección Divergente	41
4.1. Estudio del efecto de la compresibilidad en la turbulencia	42
4.2. Comparación con la Ley de la Pared en flujos incompresibles	52
4.3. Comportamiento de Re_{δ^*} , Re_θ y Re_τ	55

4.4.	Perfiles de los valores de RMS	64
4.5.	Estudio de las características del flujo turbulento para el NPR de diseño en simulaciones tridimensionales	71
4.5.1.	Correlaciones de dos puntos en la dirección <i>spanwise</i>	71
4.5.2.	Comparación de las simulaciones en tres dimensiones con los valores experimentales	75
4.5.3.	Estudio del efecto de la compresibilidad en la turbulencia	76
4.5.4.	Comparación con la Ley de la Pared en flujos incompresibles	79
4.5.5.	Comportamiento de Re_{δ^*} , Re_{θ} y Re_{τ}	82
4.5.6.	Perfiles de los valores de RMS	85
5.	Características del Flujo Turbulento Compresible para Condición de Frontera de Presión Oscilante a la Entrada	88
5.1.	Estudio del efecto de la compresibilidad en la turbulencia	94
5.2.	Comparación con la Ley de la Pared en flujos incompresibles	96
5.3.	Comportamiento de Re_{δ^*} , Re_{θ} y Re_{τ}	97
5.4.	Perfiles de los valores de RMS	100
6.	Conclusiones	104
A.	Descomposición de Reynolds de las Ecuaciones de Navier-Stokes Utilizando Promedios de Favre	107
	Bibliografía	108

Lista de Figuras

2-1.	Motor cohete de propelente líquido. Tomado de [4]	4
2-2.	Motor cohete de propelente sólido. Tomado de [4]	4
2-3.	Comportamiento de una tobera convergente-divergente para diferentes NPR. Los casos del a al h muestran la tobera trabajando en régimen sobre-expandido; el caso j muestra el régimen críticamente expandido; el caso k muestra el régimen sub-expandido. Tomado de [3]	6
2-4.	Diagrama simplificado donde se muestran dos periodos de combustión inestable. La línea de cadena muestra la operación de no darse estas inestabilidades. Como se puede observar el tiempo de quemado es menor en el caso en que se presenten estas oscilaciones. Tomado de [3]	7
2-5.	Perfil de velocidad turbulento el interior de la capa límite. Tomado de [11]	8
2-6.	Presiones que actúan en las superficies internas y externas del motor cohete. Tomado de [3]	9
2-7.	Procedimiento para el cálculo del empuje. Tomado de [12]	10
2-8.	Comportamiento de las diferentes variables a lo largo del eje de la tobera según las ecuaciones del proceso isoentrópico cuasiunidimensional. Tomado de [3]	12
3-1.	(a) Comparación de presiones en la pared de la tobera. (b) Comparación de los valores de eficiencia del empuje. Los puntos indican los valores para las simulaciones, la línea horizontal muestra el valor reportado experimentalmente.	34
3-2.	Onda de choque asimétrica para simulación con NPR = 2.008	35
4-1.	Secciones transversales en las que se analiza el comportamiento de las propiedades del flujo.	41
4-2.	RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 8.78 y 100,000 celdas en el dominio	46
4-3.	RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 8.78 y 232,000 celdas en el dominio	47
4-4.	RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 8.78 y 387,000 celdas en el dominio	47
4-5.	RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 8.78	49
4-6.	RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 8.037	49
4-7.	RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 5.423	50

4-8. RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 3.014	50
4-9. RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 2.008	51
4-10. RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 1.255	51
4-11.(a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para NPR = 8.78 y 100,000 celdas en el dominio	53
4-12.(a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para NPR = 8.78 y 232,000 celdas en el dominio	53
4-13.(a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para NPR = 8.78 y 387,000 celdas en el dominio	54
4-14.(a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para NPR = 8.78	55
4-15.(a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para NPR = 8.037	56
4-16.(a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para NPR = 5.423	56
4-17.(a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para NPR = 3.014	57
4-18.(a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para NPR = 2.008	57
4-19.(a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para NPR = 1.255	58
4-20. Espesor de desplazamiento δ^* y espesor de la cantidad de movimiento θ , a lo largo de la sección divergente para diferente cantidad de celdas en el dominio	59
4-21. Número de Reynolds con respecto al espesor de desplazamiento Re_{δ^*} y número de Reynolds con respecto al espesor de la cantidad de movimiento Re_{θ} , a lo largo de la sección divergente para diferente cantidad de celdas en el dominio	60
4-22.(a) Espesor de desplazamiento δ^* y (b) espesor de la cantidad de movimiento θ , a lo largo de la sección divergente para diferentes valores de NPR	62
4-23.(a) Número de Reynolds con respecto al espesor de desplazamiento Re_{δ^*} y (b) Número de Reynolds con respecto al espesor de la cantidad de movimiento Re_{θ} , a lo largo de la sección divergente para diferentes valores de NPR	62
4-24. Promedio espacial a lo largo de todo el ducto de las correlaciones de dos puntos para la componente de la velocidad en la dirección x_1	72
4-25. Promedio espacial a lo largo de todo el ducto de las correlaciones de dos puntos para la componente de la velocidad en la dirección x_2	72
4-26. Promedio espacial a lo largo de todo el ducto de las correlaciones de dos puntos para la componente de la velocidad en la dirección x_3	73
4-27. Promedio espacial a lo largo de todo el ducto de las correlaciones de dos puntos para la presión.	73
4-28. Promedio espacial a lo largo de todo el ducto de las correlaciones de dos puntos para la densidad.	74
4-29. Promedio espacial a lo largo de todo el ducto de las correlaciones de dos puntos para la temperatura.	74
4-30. RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 8.78 y ancho de dominio = $1h_t$	76
4-31. RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 8.78 y ancho de dominio = $2h_t$	77

4-32.RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 8.78 y ancho de dominio = $3h_t$	77
4-33.RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 8.78 y ancho de dominio = $4h_t$	78
4-34.RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 8.78 y ancho de dominio = $5h_t$	78
4-35.(a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para NPR = 8.78 y ancho de dominio = $1h_t$	79
4-36.(a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para NPR = 8.78 y ancho de dominio = $2h_t$	80
4-37.(a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para NPR = 8.78 y ancho de dominio = $3h_t$	80
4-38.(a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para NPR = 8.78 y ancho de dominio = $4h_t$	81
4-39.(a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para NPR = 8.78 y ancho de dominio = $5h_t$	81
4-40.Espesor de desplazamiento δ^* y espesor de la cantidad de movimiento θ , a lo largo de la sección divergente para diferente cantidad de anchos del dominio en la dirección <i>spanwise</i>	82
4-41.Número de Reynolds con respecto al espesor de desplazamiento Re_{δ^*} y número de Reynolds con respecto al espesor de la cantidad de movimiento Re_{θ} , a lo largo de la sección divergente para diferente cantidad de anchos del dominio en la dirección <i>spanwise</i>	83
4-42.RMS de la temperatura, densidad y presión en secciones de la parte divergente de la tobera, para las simulaciones con longitud de dominio en la dirección <i>spanwise</i>	86
5-1. Comparación de la posición de la onda de choque incidente sobre la pared. Los círculos corresponden a los valores reportados por Toufique Hasan[9], los cuadrados corresponden a las simulaciones del presente trabajo.	89
5-2. Comparación de la posición de la onda de choque normal (Mach stem). Los círculos corresponden a los valores reportados por Toufique Hasan[9], los cuadrados corresponden a las simulaciones del presente trabajo.	90
5-3. Puntos de medición de datos en la señal oscilante de la presión.	91
5-4. Presión en la pared para 4 fracciones de ciclo de oscilación de la presión.	92
5-5. Cintas. Nomenclatura: + 0 , $\times 1/2\pi$, $* \pi$ y $\square 3/2\pi$	93
5-6. RMS de Ma y Mach turbulento	95
5-7. U^+ en función de y^+ y U_c^+ en función de y^+	96
5-8. Espesor de desplazamiento y espesor de la cantidad de momento en flujo compresible	97
5-9. Espesor de desplazamiento y espesor de la cantidad de momento en diferentes posiciones a lo largo del eje axial, para diferentes fases de oscilación. Análisis bajo un enfoque de flujo incompresible	98

5-10. Números de Reynolds respecto a el espesor de desplazamiento y espesor de la cantidad de momento en flujo incompresible	99
5-11. Número de Reynolds de fricción y Esfuerzo cortante en la pared	99
5-12. RMS Temperatura, presión y densidad. Nomenclatura: + 0 , $\times 1/2\pi$, * π y $\square 3/2\pi$	102
5-13. RMS componentes de la velocidad. Nomenclatura: + 0 , $\times 1/2\pi$, * π y $\square 3/2\pi$	103

Lista de Tablas

3-1. Solucionadores para flujo compresible [13].	23
3-2. Izquierda: Configuración de la cuña. Derecha: Malla computacional en el dominio usado para el flujo supersónico sobre una cuña.	24
3-3. Condiciones de frontera.	25
3-4. Valores de variación del ángulo de la onda de choque (θ_w)	26
3-5. Valores de variación del número de Mach aguas abajo Ma_2	27
3-6. Valores de variación de la relación de presión (p_2/p_∞).	27
3-7. Valores de variación de la relación de temperatura (T_2/T_∞).	28
3-8. Izquierda: Dimensiones de la tobera. Derecha: Discretización del dominio, ambos según Hunter[15].	29
3-9. Izquierda: Discretización del dominio. Derecha: detalle de la sección de la tobera.	30
3-10. Condiciones de frontera.	31
3-11. Estudio de Independencia de Malla.	32
3-12. Comparación de las discretizaciones del dominio.	33
3-13. Características de las dos discretizaciones del dominio.	34
3-14. Validación de curvas de presión en la pared para NPR = 8.037 (arriba) y NPR = 5.423 (abajo)	37
3-15. Validación de curvas de presión en la pared para NPR = 3.014 (arriba) y NPR = 2.008 (abajo)	38
3-16. Validación de curvas de presión en la pared para NPR = 1.255 (arriba) y validación de eficiencia para diferentes NPRs (abajo)	39
3-17. Movimiento y asimetría de las ondas de choque para simulación con NPR = 2.008	40
4-1. Comportamiento en las secciones transversales de diferentes posiciones de la parte divergente de la tobera para las siguientes propiedades (de arriba a abajo): número de Mach (Ma), presión (p/\bar{p}), temperatura (T/\bar{T}) y densidad ($\rho/\bar{\rho}$)	43
4-2. Comportamiento del número de Mach (Ma), la presión (p/\bar{p}), la temperatura (T/\bar{T}) y la densidad ($\rho/\bar{\rho}$) para diferentes NPRs en la sección transversal de diferentes posiciones de la parte divergente de la tobera.	44
4-3. Gráficas del gradiente de densidad (contornos en blanco y negro) superpuestas sobre el campo de presión (color), para diferentes valores de NPR.	45
4-4. Parámetros de la Ley Logarítmica para las simulaciones del estudio de independencia de malla.	54

4-5. Comportamiento del número de Reynolds de fricción (Re_τ) y el esfuerzo cortante en la pared normalizado con el valor de la garganta ($\tau_w/\tau_{w,o}$) a lo largo de la parte divergente de la tobera.	61
4-6. Comportamiento del número de Reynolds de fricción (Re_τ) y el esfuerzo cortante en la pared normalizado con el valor de la garganta ($\tau_w/\tau_{w,o}$) a lo largo de la parte divergente de la tobera para diferentes valores de NPR.	63
4-7. RMS de la temperatura, densidad y presión en secciones de la parte divergente de la tobera, para diferentes cantidades de celdas.	65
4-8. RMS de las componentes de la velocidad en la dirección del flujo y normal a la pared en secciones de la parte divergente de la tobera, para diferentes cantidades de celdas.	66
4-9. RMS de la temperatura, densidad y presión en secciones de la parte divergente de la tobera, para diferentes valores de NPR.	67
4-10. RMS de la temperatura, densidad y presión en secciones de la parte divergente de la tobera, para diferentes valores de NPR.	68
4-11. RMS de las componentes de la velocidad en la dirección del flujo y perpendicular a la pared en secciones de la parte divergente de la tobera, para diferentes valores de NPR.	69
4-12. RMS de las componentes de la velocidad en la dirección del flujo y perpendicular a la pared en secciones de la parte divergente de la tobera, para diferentes valores de NPR.	70
4-13. Comparación de curvas de presión en la pared y eficiencia para simulaciones en tres dimensiones.	75
4-14. Comportamiento del número de Reynolds de fricción (Re_τ) y el esfuerzo cortante en la pared normalizado con el valor de la garganta ($\tau_w/\tau_{w,o}$) a lo largo de la parte divergente de la tobera.	84
4-15. RMS de cada una de las componentes de la velocidad en secciones de la parte divergente de la tobera, para las simulaciones con longitud de dominio en la dirección <i>spanwise</i>	87

Lista de símbolos

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término
A	Área
a	Velocidad del sonido
d_{ij}	Tensor esfuerzo cortante
e	Energía específica
F	Empuje
f	Frecuencia de oscilación
h	Entalpía
k	Conductividad térmica
M	Número de Mach
m	Masa
\dot{m}	Flujo másico
p	Presión
R	Constante específica del gas
S_{ij}	Tensor rata de deformación
T	Temperatura
t	Tiempo
U	Velocidad
q	Flujo de calor

Abreviaturas

Abreviatura	Término
NPR	Relación de presión en tobera

1. Introducción

Los sistemas actuales de propulsión de cohetes se basan exclusivamente en métodos termodinámicos para convertir la energía contenida en un combustible en la energía cinética que desarrolla el impulso. En los sistemas motor-cohete, esta transformación de energía se lleva a cabo gracias a la forma característica de los allí utilizados, y ductos conocidos como toberas De Laval. En ellas la energía acumulada en el combustible y liberada gracias a su combustión se convierte en empuje debido a la dinámica propia de los flujos compresibles, en este caso, los gases resultantes de la combustión moviéndose a alta velocidad.

El aprovechamiento de este principio ha llevado al diseño y construcción de los cohetes que han permitido el inicio de la carrera espacial por parte de las naciones que cuentan con los recursos para ello. Durante los últimos cincuenta años la humanidad ha sido testigo de logros como la llegada del primer ser humano a la luna, el fortalecimiento de los medios de comunicación gracias a la cada vez más extensa red de satélites que orbitan la Tierra, la ampliación del conocimiento del planeta y del espacio gracias a las imágenes satelitales, etc., todos estos logros han sido alcanzados con dispositivos tipo cohete, y los cuales se basan en el principio mencionado. Esto ha promovido una continua investigación en la forma de aumentar la eficiencia (y disminución de las pérdidas) de los motores-cohete.

En Colombia este tipo de tecnología ha tenido problemas en su desarrollo, debido principalmente al conflicto armado de los últimos cincuenta años. Sin embargo, algunos investigadores han podido avanzar lentamente en el entendimiento y experimentación de los principios básicos de la coherería de propelente sólido. Dentro de estos avances se encuentran las tesis de maestría realizadas por los ingenieros Carlos Duque y Diego Garzón en la Universidad de los Andes. Como resultado de las tesis mencionadas se logró diseñar, construir y probar un pequeño motor cohete.

En la actualidad uno de los tópicos que son objeto de una profunda y extensa investigación es el fenómeno de oscilación que se presenta al interior de la cámara de combustión. A pesar de que este se conoce y se ha estudiado desde hace más de cuarenta años ([1] [2]), no se tiene un entendimiento completo de las causas de estas oscilaciones. Además de poner en peligro la estructura del cohete y de las instalaciones cercanas, dichas oscilaciones alteran la distribución del empuje en el tiempo, lo cual afecta el diseño de la misión para la cual se está usando el cohete.

La investigación en el área de propulsión de cohetes se realiza actualmente desde dos enfoques complementarios:

- Experimentación con modelos a escala natural o escala reducida, con combustión de

propelente o con gases fríos (aire o nitrógeno a temperatura atmosférica). Dentro de las ventajas que ofrece este enfoque está el poder analizar el comportamiento real del sistema con todas las variables asociadas. La mayor desventaja de este enfoque es la limitada capacidad de obtener información de lo que pasa al interior de la cámara de combustión y de la tobera, debido principalmente a las altas presiones, temperaturas y velocidades que se presentan; por ello se suelen realizar experimentos simplificados con gases fríos. Otra de las desventajas más notorias son los altos costos de estos experimentos.

- Simulaciones numéricas con modelos computacionales que aprovechan la comprensión matemática de los procesos físicos que se desarrollan dentro del motor-cohete. El entendimiento a priori de lo que sucede en el sistema es esencial para su simulación. Dentro de las ventajas podemos señalar la capacidad de extraer y analizar la información de cualquiera de las variables del sistema, la principal desventaja es la dependencia total del conocimiento y experticia que tenga el investigador sobre el sistema, y la cantidad de recurso computacional disponible.

Como se dijo anteriormente, y como se observa en la gran mayoría de artículos publicados sobre el tema, los dos enfoques se suelen usar de forma complementaria, ya sea realizando experimentos que permitirán verificar y ajustar modelos computacionales que ayudan a tratar de entender lo que sucede dentro del flujo, o haciendo pruebas numéricas para obtener un rango de parámetros válidos para diseñar los experimentos.

El presente estudio busca caracterizar el flujo turbulento compresible que pasa a través de un ducto convergente-divergente específico, con y sin oscilaciones en la presión prescritas a la entrada de este. Para lo anterior se realiza un modelo computacional del sistema el cual es validado en múltiples etapas con datos experimentales publicados. Una vez validado, se analizan algunas variables de turbulencia para diferentes condiciones de operación de la tobera y valores de entrada de presión oscilante.

El documento que se presenta a continuación se divide en las siguientes secciones: en el capítulo 2 se plantea y se explica el comportamiento del sistema físico, los modelos matemáticos con los cuales se describe este y los métodos numéricos utilizados; en el capítulo 3 se describe el modelo computacional utilizado para las simulaciones y se presenta la validación; en el capítulo 4 se presentan las características del flujo turbulento compresible para la condición de diseño y para condiciones de flujo sobre-expandido en la tobera usada; en el capítulo 5 se presentan las características del flujo turbulento compresible para la condición de presión oscilante a la entrada de la tobera usada; en el capítulo 6 se presentan las conclusiones de esta investigación, así como las recomendaciones para futuros desarrollos en esta área.

2. Modelo Matemático y Numérico del Sistema Físico

Los tres elementos esenciales para la simulación numérica de un suceso natural son (1) el entendimiento de los principios físicos que están actuando, (2) el modelo matemático que describe el comportamiento de estos principios físicos, y (3) los métodos numéricos diseñados para poder solucionar el modelo matemático. A continuación se describirán cada uno de estos elementos utilizados en la presente investigación.

2.1. Principios Físicos

2.1.1. Propulsión de Cohetes

La propulsión de cohetes abarca todos aquellos sistemas que producen empuje expulsando material almacenado, el cual se suele llamar *propelente*. El principio básico del funcionamiento de estos sistemas es la Segunda Ley de Movimiento de Newton, la cual para este caso puede expresarse como la reacción que experimenta la estructura del cohete debido a la expulsión de materia a alta velocidad.

Clasificación de los Motores Cohete

Los sistemas propulsivos se pueden clasificar de acuerdo al tipo de fuente de energía (química, nuclear o solar), su función (la etapa, control de altitud, control orbital, etc.), el tipo de vehículo (aeronave, misil, despegue asistido, vehículo espacial, etc.), el tamaño, el tipo de propelente, el tipo de construcción, ó el método de producir empuje [3].

Según su fuente de energía se definen:

- Energía Química: la energía se suministra de la reacción exotérmica de un combustible.
- Energía Nuclear: la energía se extrae de la reacción nuclear controlada resultante de la fisión de isótopos fisibles.
- Energía Solar: la energía se obtiene de la radiación solar directamente.

Una vez definidas las fuentes de energía, los motores cohete se pueden clasificar también según el método de producir empuje. El método más usado en la actualidad es la expansión termodinámica de un gas, donde la energía interna de este se convierte en energía cinética de un flujo de escape, y el empuje se produce en la superficie interna del motor expuesta a

la presión de estos gases.

Dentro de los diferentes tipos de motores cohete que usan energía química y una expansión termodinámica para generar el empuje los que más se usan en la actualidad son los de propelente líquido y los de propelente sólido. En los primeros un combustible y un oxidante en estado líquido son suministrados a la cámara de combustión donde se realiza una reacción exotérmica (Figura 2-1). En los segundos el combustible y el oxidante están combinados en forma sólida dentro de la cámara de combustión (Figura 2-2).

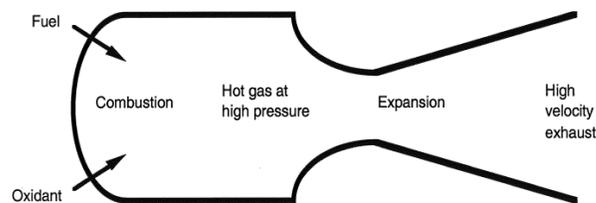


Figura 2-1.: Motor cohete de propelente líquido. Tomado de [4]

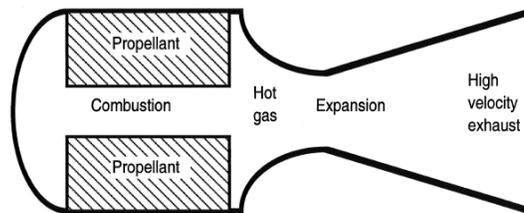


Figura 2-2.: Motor cohete de propelente sólido. Tomado de [4]

2.1.2. Ducto Propulsivo - Tobera De Laval

Una vez liberada la energía del propelente a través de la combustión del mismo dentro de la cámara, los gases a alta temperatura y alta presión salen del motor pasando por un ducto propulsivo de forma definida, el cual se conoce como tobera De Laval. La geometría de esta tobera es básicamente la de un ducto convergente-divergente, en donde el gas proveniente de la cámara a baja velocidad es acelerado en la sección convergente hasta llegar a la velocidad local del sonido, y luego continúa la aceleración de los gases en la sección divergente a velocidades supersónicas.

La relación entre la presión de estancamiento en la cámara y la presión atmosférica instantánea se conoce como la relación de presión en la tobera (NPR, por sus siglas en inglés *Nozzle Pressure Ratio*). Todo motor cohete se diseña para un único valor de NPR (tobera de geometría fija), sin embargo, a medida que el cohete asciende por la atmósfera la presión

externa va disminuyendo, haciendo que este trabaje a diferentes condiciones de NPR, y por tanto en puntos de operación, generalmente, de menor eficiencia.

Cuando el NPR de operación es igual al de diseño, la presión de los gases a la salida de la tobera es igual a la presión del medio que rodea al motor, el flujo es supersónico y está totalmente expandido. Esta condición se denomina régimen *críticamente expandido*. Esta condición se presenta de manera esquemática en el caso *j* de la Figura 2-3.

Si el NPR de trabajo esta por encima del valor de diseño, la presión de los gases a la salida de la tobera es superior a la presión del medio que rodea al motor, el flujo es supersónico pero la tobera es físicamente demasiado pequeña para que el fluido se expanda totalmente. En este caso la presión de los gases de escape iguala la presión externa en algún punto despues de la salida de la tobera, generando por tanto una pérdida de eficiencia. Esta condición suele llamarse régimen *sub-expandido*, y se puede apreciar en el caso *k* de la Figura 2-3.

Para un NPR de trabajo inferior al de diseño, la presión de los gases a la salida de la tobera es inferior a la presión del medio que rodea al motor, la tobera es físicamente demasiado larga para que el fluido se expanda totalmente, y una recompresión del fluido se da afuera de la tobera a través de una série de ondas de choque. Este mecanismo irreversible de compresión genera una pérdida de eficiencia. Este régimen se conoce como *externamente sobre-expandido*, y se puede ver en los casos *g* y *h* de la Figura 2-3.

Cuando el NPR de trabajo esta muy por debajo del de diseño la recompresión se da a través de una onda de choque en el interior de la sección divergente de la tobera. Esta condición suele llamarse régimen *internamente sobre-expandido*, y se puede ver en el caso *d* de la Figura 2-3.

2.1.3. Oscilación de la presión en la cámara de combustión

Cuando se presenta combustión inestable en motores cohete de propelente sólido la presión al interior de la cámara oscila en un rango entre el 5 % y el 30 %. Estas oscilaciones causan un aumento en el calor transferido a la paredes del motor, en la rata de quemado y en el empuje, a su vez el tiempo de operación disminuye. El cambio en la curva de empuje en función del tiempo causa alteraciones significativas en la trayectoria de vuelo, lo cual en casos extremos puede llevar a abortar la misión del cohete (Figura 2-4).

Dentro de los trabajos experimentales realizados, Ballereau et. al. [5] reporta frecuencias de oscilación entre 15 Hz y 20 Hz, Fabignon et. al. [6] entre 12 Hz y 16 Hz, Tengli et. al. [7] entre 54.29 Hz y 55.17 Hz, y Mason et. al. [8] entre 20 Hz y 22 Hz. Todos los trabajos anteriores se realizaron con geometrías de tobera diferentes a la del presente trabajo. El trabajo numérico de Toufique Hasan [9], el cual usa la misma geometría del presente, utilizó frecuencias entre 50 Hz y 200Hz, aunq no justifica la selección de estos valores.

Dado lo anterior, resulta claro que fenómenos de oscilación en la cámara tienen efectos, gene-

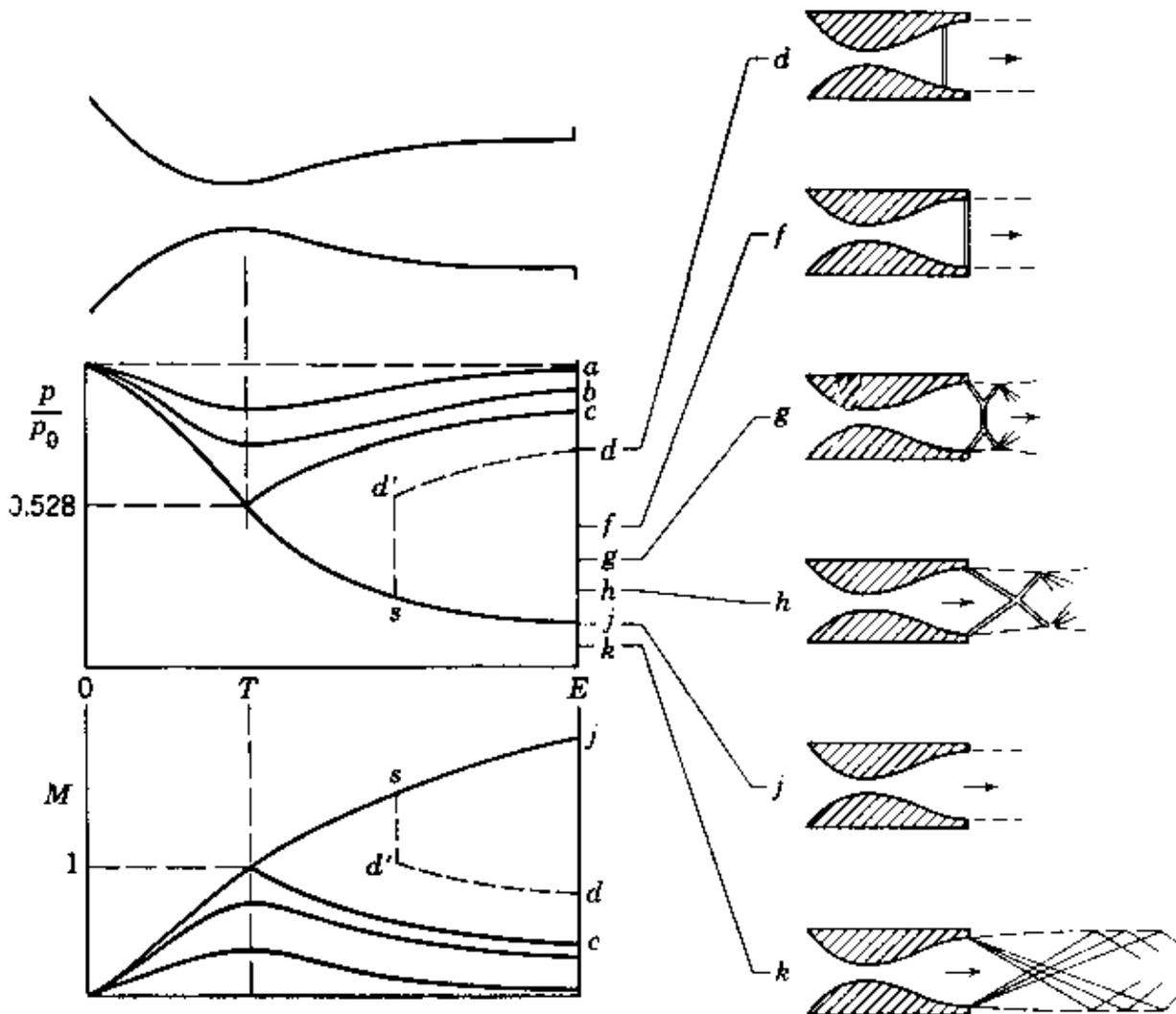


Figura 2-3.: Comportamiento de una tobera convergente-divergente para diferentes NPR. Los casos del a al h muestran la tobera trabajando en régimen sobre-expandido; el caso j muestra el régimen críticamente expandido; el caso k muestra el régimen sub-expandido. Tomado de [3]

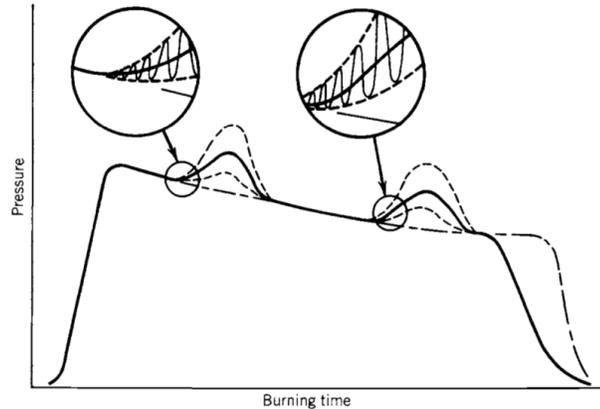


Figura 2-4.: Diagrama simplificado donde se muestran dos periodos de combustión inestable. La línea de cadena muestra la operación de no darse estas inestabilidades. Como se puede observar el tiempo de quemado es menor en el caso en que se presenten estas oscilaciones. Tomado de [3]

ralmente negativos, en términos del empuje total, impulso específico, tiempos de operación, y en general desempeño del motor-cohete.

2.1.4. Turbulencia

Se entiende por turbulencia aquel movimiento de un fluido que se caracteriza por poseer una vorticidad tridimensional aparentemente aleatoria y caótica. Igualmente, muchos investigadores han reconocido otras características físicas presentes en todo flujo turbulento: alta sensibilidad a las condiciones iniciales, la presencia de un rango muy grande de escalas temporales y espaciales, niveles elevados de difusión y disipación, intermitencia espacial y temporal, entre otras [10].

Existen dos tipos distintivos y muy generales de flujos turbulentos: flujos internos o confinados y flujos externos. Ejemplos de flujos internos o confinados son tuberías, canales y ductos; ejemplos de flujos externos son chorros y olas. Para un flujo confinado totalmente desarrollado, donde se asume la condición de no deslizamiento en la pared, el esfuerzo cortante en la misma es proporcional al gradiente de la velocidad,

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w. \quad (2-1)$$

Para caracterizar las capas que se presentan en un flujo desarrollado (figura 2-5) se define una velocidad característica llamada *velocidad de fricción*,

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad (2-2)$$

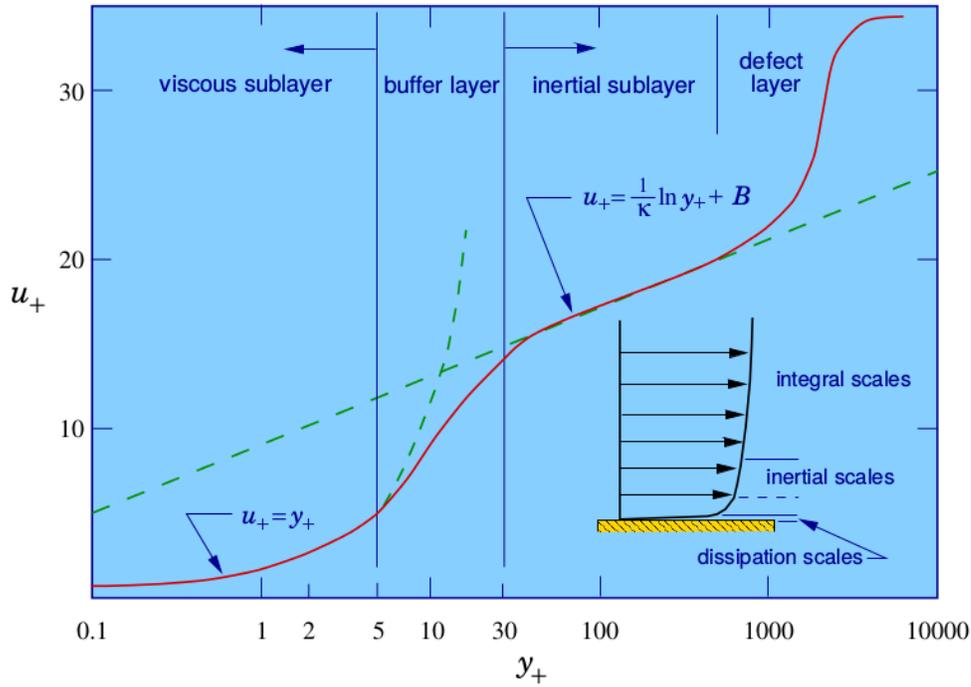


Figura 2-5.: Perfil de velocidad turbulento el interior de la capa límite. Tomado de [11]

y una longitud característica,

$$y^* = \frac{\nu}{u_\tau}. \quad (2-3)$$

Con la velocidad y la longitud característica se pueden definir las unidades adimensionales de velocidad,

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}, \quad (2-4)$$

y las unidades adimensionales de pared:

$$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu}. \quad (2-5)$$

Con respecto a la Figura 2-5, la cual presenta el perfil de velocidad turbulento, se pueden distinguir tres regiones o capas principales al interior de la capa límite. La primera capa es llamada *capa viscosa*. En esta los esfuerzos viscosos predominan sobre los esfuerzos inerciales y el perfil de velocidad es lineal ($u^+ = y^+$). La siguiente se denomina *capa intermedia*, la cual conecta física y matemáticamente la capa viscosa con la *capa inercial o logarítmica* ($u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B$). En esta última capa los efectos viscosos son despreciables y se da la conexión con la región lejana.

Esta descripción del perfil de velocidad y de las capas presentes en este para un flujo sobre una pared recibe el nombre de *Ley de la Pared* en la teoría clásica de la turbulencia.

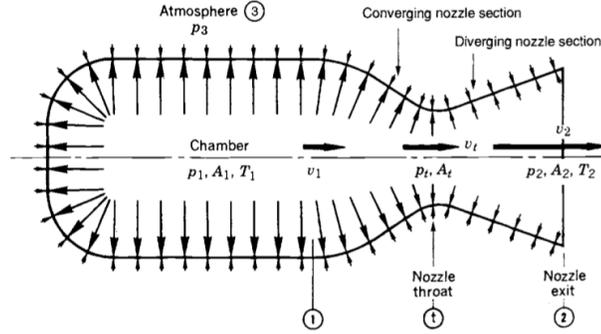


Figura 2-6.: Presiones que actúan en las superficies internas y externas del motor cohete. Tomado de [3]

2.2. Modelo Matemático

2.2.1. Propulsión

Matemáticamente la Segunda Ley de Movimiento de Newton se puede expresar,

$$\mathbf{F} = \frac{dm}{dt} \mathbf{U}, \quad (2-6)$$

para el caso de un motor cohete \mathbf{F} es el empuje sobre este, $\frac{dm}{dt}$ y \mathbf{U} son respectivamente el flujo másico y la velocidad del material expulsado. Se debe tener en cuenta que esta ecuación es válida solamente cuando la presión de salida del motor cohete iguala la presión del ambiente.

La presión en los alrededores del motor cohete da lugar a un segundo término en la ecuación para el cálculo del empuje. Este se puede obtener integrando todas las presiones que actúan en un plano normal al eje de la tobera. La ecuación del empuje para un instante determinado es (según la Figura 2-6),

$$\mathbf{F} = \frac{dm}{dt} \mathbf{U} + (p_2 - p_3) A_2 \hat{\mathbf{n}}, \quad (2-7)$$

donde A_2 es el área de la salida de la tobera (como se muestra en la figura 2-6) y $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal al plano de salida de la tobera [3].

En el presente trabajo, para la medición de la eficiencia del empuje, se sigue el procedimiento establecido por Papamoschou et. al. [12], el cual se describe a continuación. El empuje en una tobera es igual a la integral de las componentes axiales de las fuerzas que actúan en las paredes internas y externas de esta y de la cámara de combustión. Se tomaron solo las fuerzas debidas a la presión.

$$F = \int_o^e (p - p_a) \sin\theta ds \quad (2-8)$$

Donde s es la coordenada a lo largo de la superficie de la tobera (Figura 2-7), p_a es la presión externa a la tobera la cual es constante para nuestras simulaciones, y θ es el ángulo local de

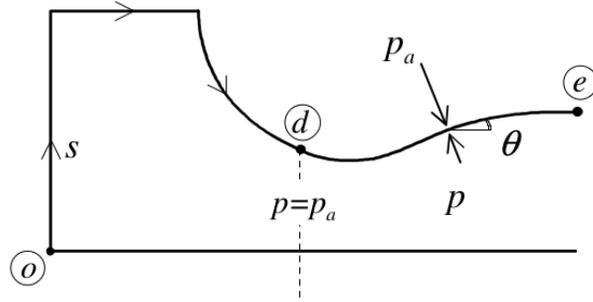


Figura 2-7.: Procedimiento para el cálculo del empuje. Tomado de [12]

la superficie.

Esta integral se puede dividir en dos partes: la contribución de la presión aguas arriba del punto de diseño, y la contribución de la misma aguas abajo de dicho punto:

$$F = \int_o^d (p - p_a) \sin\theta ds + \int_d^e (p - p_a) \sin\theta ds \quad (2-9)$$

La primera integral representa el empuje ideal, el cual es equivalente al momento transferido por unidad de área de un flujo críticamente expandido:

$$F_i = \int_o^d (p - p_a) \sin\theta ds = \dot{m} U_d \quad (2-10)$$

Donde \dot{m} es el flujo másico y U_d es la velocidad de diseño. Por lo tanto:

$$F = \dot{m} U_d + \int_d^e (p - p_a) \sin\theta ds \quad (2-11)$$

y la eficiencia del empuje se puede expresar como,

$$\frac{F}{F_i} = 1 - \frac{1}{\dot{m} U_d} \int_d^e (p - p_a) \sin\theta ds \quad (2-12)$$

La rata de flujo másico se calcula con respecto a las condiciones del flujo en la tobera:

$$\dot{m} = A_t \lambda \frac{p_{01}}{a_0} \left(\frac{\lambda + 1}{2} \right)^{\frac{\lambda+1}{1-\lambda}} \quad (2-13)$$

donde $a_0 = \sqrt{\gamma R T_0}$ es la velocidad del sonido en la cámara de combustión, γ es el coeficiente de dilatación adiabática, p_{01} es la presión en la cámara de combustión, T_0 es la temperatura del gas en la cámara de combustión y A_t es el área de la garganta de la tobera. La velocidad de diseño es:

$$U_d = a_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left(1 - NPR^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right)} \quad (2-14)$$

La integral se realiza desde el punto "d", donde $p = p_a$, y termina en la salida de la tobera.

2.2.2. Ducto Convergente-Divergente

Modelo cuasiunidimensional - isoentrópico

El análisis termodinámico de un flujo compresible pasando por una tobera convergente-divergente permite entender el funcionamiento de esta. La mayoría de libros de termodinámica técnica y de mecánica de fluidos simplifican este análisis bajo los siguientes supuestos [3]:

1. El gas es homogéneo e invariante en su composición a lo largo de la tobera.
2. No hay fricción en el flujo, por lo cual el proceso se considera reversible.
3. No hay transferencia de calor con el entorno, por lo cual el proceso es adiabático.
4. El flujo de los gases es estacionario y constante.
5. El gas puede ser considerado un gas ideal dado las altas temperaturas y altas presiones a las cuales está sometido.
6. La velocidad de los gases a la salida de la tobera es en la dirección axial de la misma.
7. La velocidad del gas es uniforme a través de cualquier sección transversal al eje de la tobera.

Estas simplificaciones permiten que se pueda usar el modelo matemático de un proceso isoentrópico cuasiunidimensional. El análisis matemático del proceso de flujo en la tobera bajo los anteriores supuestos arroja las siguientes ecuaciones para el comportamiento de las variables a lo largo de la tobera, la variación de la velocidad,

$$\frac{dU}{U} = \frac{-1}{(1 - M^2)} \frac{dA}{A}, \quad (2-15)$$

la variación de la presión,

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma M^2}{(1 - M^2)} \frac{dA}{A}, \quad (2-16)$$

la variación de la temperatura,

$$\frac{dT}{T} = \frac{(\gamma - 1) M^2}{(1 - M^2)} \frac{dA}{A}, \quad (2-17)$$

donde M es el número de Mach, y p , U y T , como anteriormente se planteó, son la presión, velocidad y temperatura.

Comportamiento de las diferentes variables a lo largo del eje de la tobera según las ecuaciones planteadas se puede apreciar en la Figura 2-8.

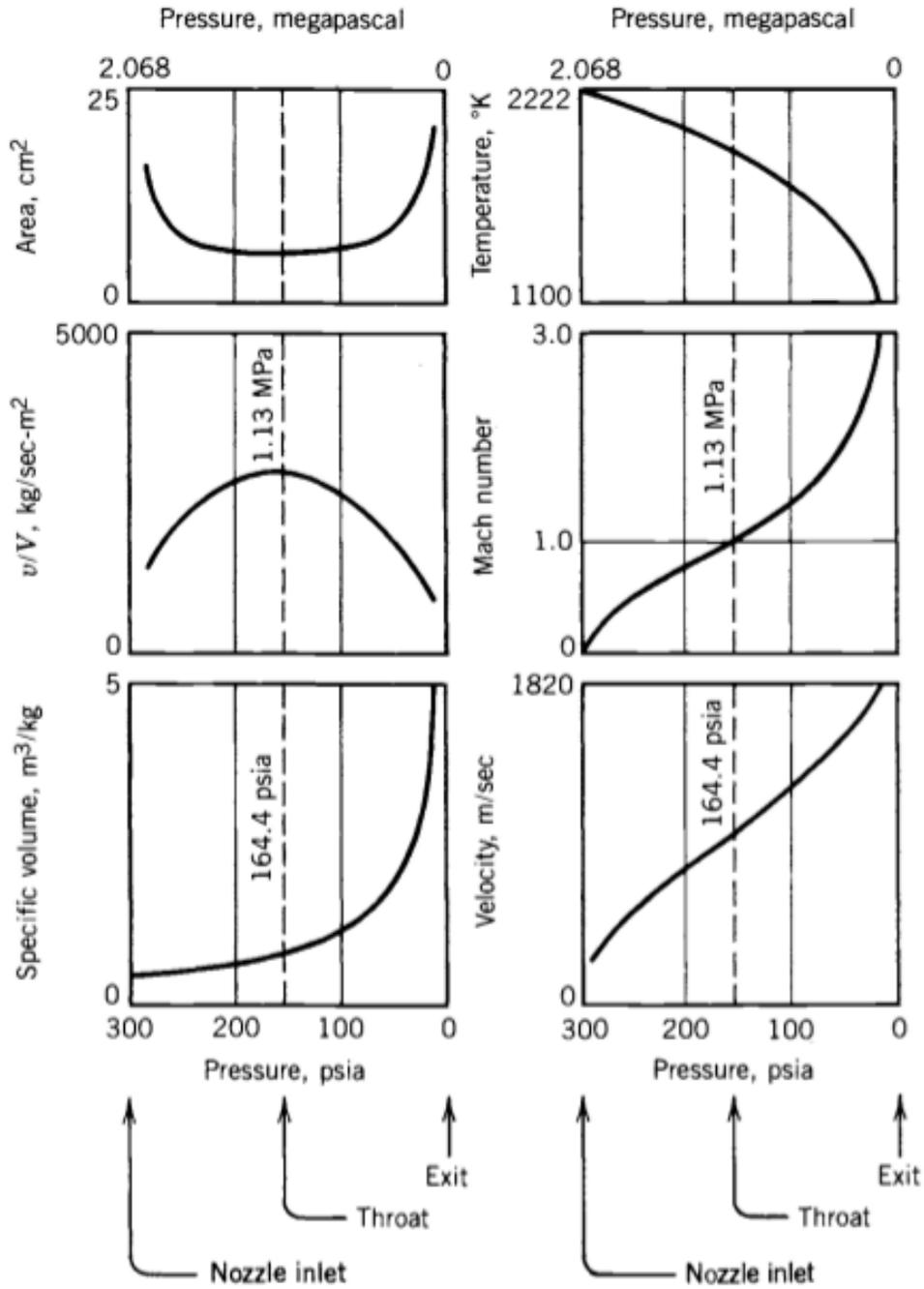


Figura 2-8.: Comportamiento de las diferentes variables a lo largo del eje de la tobera según las ecuaciones del proceso isoentrópico cuasiunidimensional. Tomado de [3]

Leyes de Conservación - Ecuaciones de Navier-Stokes

Se sabe que un flujo compresible moviéndose a un número de Mach bajo y números de Reynolds altos (de forma que el número de Knudsen se mantiene por debajo de 10^{-2}) obedece las leyes de la mecánica del medio continuo.

El número de Mach es una medida de velocidad relativa que se define como la relación entre la velocidad del flujo y la velocidad del sonido en este. El número de Reynolds es un factor adimensional que relaciona las fuerzas inerciales con las fuerzas viscosas del flujo. El número de Knudsen es una medida adimensional definida como la proporción entre la longitud del camino libre molecular promedio y una escala de longitud física representativa.

Cuando la proporción dada por el número de Knudsen está por debajo de un valor dado, el comportamiento del flujo puede ser descrito en términos de sus propiedades macroscópicas como son presión, densidad y velocidad. Este comportamiento puede ser determinado completamente por las leyes de conservación, junto con ecuaciones constitutivas y un conjunto de condiciones de frontera.

Las ecuaciones del modelo matemático que describen el comportamiento del flujo a través de la tobera son (en notación tensorial): la ecuación de continuidad, la cual expresa el principio de conservación de masa para flujo compresible,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j}{\partial x_j} = 0; \quad (2-18)$$

las ecuaciones de momentum, las cuales plantean el principio de conservación de la cantidad de momento para flujo compresible y viscoso,

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2-19)$$

donde τ_{ij} es el tensor de esfuerzo que representa las fuerzas de superficie, las fuerzas de flotación así como otras fuerzas de cuerpo se suelen despreciar en casos de flujos a alta velocidad, este se puede representar,

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + d_{ij}, \quad (2-20)$$

donde δ es el operador delta de Kronecker, y d_{ij} es el tensor de esfuerzo cortante, dado por

$$d_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right). \quad (2-21)$$

Para un flujo Newtoniano e isotrópico el tensor esfuerzo cortante se puede escribir como,

$$d_{ij} = \lambda S_{kk} \delta_{ij} + 2\mu S_{ij}, \quad (2-22)$$

donde μ es la viscosidad dinámica, $\lambda = \mu'' - \frac{2}{3}\mu$, μ'' es la viscosidad de masa y S_{ij} es el tensor rata de deformación:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2-23)$$

Por lo tanto la ecuación constitutiva de esfuerzo para un flujo Newtoniano es,

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu'' S_{kk}\delta_{ij} + 2\mu \left(S_{ij} - \frac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij} \right), \quad (2-24)$$

con lo cual la ecuación 2-19 puede ser re-escrita como

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j}. \quad (2-25)$$

La ecuación de energía la cual plantea el principio de conservación de la cantidad de energía para flujo compresible y viscoso,

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{1}{2}V^2 \right) + \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(e + \frac{1}{2}V^2 \right) = \frac{\partial \tau_{ij} u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}, \quad (2-26)$$

donde $V^2 = u_i^2$. El lado izquierdo de la ecuación representa la tasa de cambio de la energía total por unidad de volumen de una partícula de fluido, y el lado derecho de la ecuación es la suma de la tasa de trabajo hecha sobre el flujo por las fuerzas de superficie y la tasa de calor agregado por conducción. El trabajo realizado por las fuerzas de cuerpo es despreciado porque los efectos de la flotación no suelen ser importantes en flujos a alta velocidad. Así mismo las diferencias de temperatura se asumen que son suficientemente pequeñas para despreciar la transferencia de calor por radiación.

La energía total es la suma de la energía interna e y la energía cinética $\frac{1}{2}V^2$.

El primer término de la derecha en la ecuación de conservación de energía es la tasa de trabajo realizada por las fuerzas de superficie, y la cual se puede describir como:

$$\frac{\partial \tau_{ij} u_i}{\partial x_j} = u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2-27)$$

La primera parte del lado derecho de la igualdad proviene de las pequeñas diferencias en el esfuerzo en lados opuestos del elemento diferencial de fluido, y contribuye a incrementar la energía cinética general del movimiento del flujo. La segunda parte se asocia con pequeñas diferencias de velocidad en lados opuestos del elemento diferencial de fluido, y representa la tasa de trabajo utilizada para deformar este sin cambiar la velocidad general. Este último término es el único que contribuye a incrementar la energía interna.

q es el flujo de calor por conducción que entra del elemento infinitesimal de fluido. Este contribuye al cambio de energía interna y no aporta energía cinética. Se asume que el flujo de calor se da según la ley de Fourier:

$$q_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (2-28)$$

Esta es una ecuación constitutiva que relaciona el flujo de calor con el gradiente de temperatura válida únicamente para conducción. k es la conductividad térmica la cual es una

propiedad del fluido y depende de la temperatura y de la presión.

En muchas aplicaciones es conveniente expresar la ecuación de energía en términos de la entalpía h , donde $h = e + p/\rho$, o la entalpía total h_0 :

$$h_0 = h + \frac{1}{2}V^2 \quad (2-29)$$

Usando la ecuación de continuidad se puede escribir una expresión para la conservación de la entalpía total:

$$\rho \frac{\partial h_0}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial h_0}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{\partial d_{ij} u_i}{\partial x_j} \quad (2-30)$$

Podemos ver que la entalpía total puede variar a través de la acción de la transferencia de calor, variaciones de presión inestables, o difusión de la energía cinética turbulenta.

La ecuación anterior se puede simplificar para obtener una ecuación para la entalpía:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial h}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial t} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + d_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2-31)$$

Reemplazando $\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j}$ la cual es la derivada total o material de la presión, y la ecuación de la Ley de Fourier, tendríamos:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial h}{\partial x_j} = \frac{Dp}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + d_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (2-32)$$

la cual es la expresión común para la estimación de la energía.

Ecuaciones constitutivas:

Junto con las ecuaciones de conservación planteadas para flujo compresible, es necesario establecer ecuaciones constitutivas las cuales relacionan variables termodinámicas del flujo. Las temperaturas y presiones de las simulaciones del presente trabajo se mantienen en rangos en los que el flujo se puede considerar como gas ideal (Factor de compresibilidad $Z \cong 1$), para los cuales la ecuación de estado es,

$$p = \rho RT, \quad (2-33)$$

donde R es la constante específica del gas a simular.

De forma similar se puede seleccionar la Ley de Sutherland la cual relaciona la viscosidad dinámica y la temperatura absoluta para gases ideales en un rango de temperaturas desde $100K$ a $1900K$,

$$\mu = \mu_{ref} \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^{3/2} \frac{T_{ref} + S}{T + S}, \quad (2-34)$$

donde $\mu_{ref} = 1,716 \times 10^{-5} \frac{kg}{m.s}$, $T_{ref} = 273,15K$ y $S = 110,4K$ son valores de referencia particulares para cada gas, en este caso se muestran los del aire.

En el presente trabajó las velocidades del flujo se mantienen en los rango subsónico ($0,3 < Ma < 1$) y supersónico ($1 < Ma < 5$), por lo que se consideró que no se presenta disociación molecular ni ionización del gas.

2.2.3. Oscilación de la presión:

Para modelar matemáticamente la oscilación de la presión se usa una función coseno como condición de frontera a la entrada:

$$p_{oscilante} = NPR p_a (1 \pm \text{Cos}(2\pi ft)), \quad (2-35)$$

donde p_a es la presión ambiental en los alrededores del ducto, y f es la frecuencia de oscilación deseada.

2.2.4. Ecuaciones de flujo turbulento:

El comportamiento turbulento del flujo se presenta en un amplio rango de escalas espaciales y temporales. Diferentes enfoques analíticos y numéricos han buscado reducir el nivel de complejidad de este fenómeno considerando solamente las propiedades estadísticas de los campos escalares y vectoriales del flujo. De esta forma, las ecuaciones de movimiento quedan escritas en términos de las magnitudes de los promedios.

Para el análisis estadístico de la turbulencia se suele usar la *descomposición de Reynolds*, también llamada *promedios de Reynolds*, para separar una parte fluctuante del promedio temporal. Matemáticamente se describe de la siguiente forma:

$$f = \bar{f} + f' \quad (2-36)$$

donde f' es la fluctuación con respecto al promedio temporal.

Al aplicar la descomposición de Reynolds a las ecuaciones de conservación las expresiones resultantes contienen más incógnitas que ecuaciones, lo cual se conoce como el *problema de cierre* (*closure problem*, en inglés). El proceso de *cerrar* el sistema de ecuaciones se denomina *Modelado de la turbulencia*.

Los promedios que se requieren para estas ecuaciones se pueden encontrar por promedio ensamble (*ensemble average* en inglés) (para flujos en los que se presentan grandes variaciones temporales) o por promedios temporales (para flujos donde no se presentan grandes variaciones temporales). La definición de promedio ensamble es,

$$\hat{f} \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_1^N n f_n, \quad (2-37)$$

donde N es la cantidad de puntos tomados. En el caso en el que el flujo se estadísticamente estable es posible usar la *hipótesis de ergodicidad* para reemplazar los promedios generales por promedios temporales. La definición de promedios temporales es:

$$\bar{f} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f dt \quad (2-38)$$

Aplicando la descomposición de Reynolds con promedios temporales a las ecuaciones de conservación éstas quedan de la siguiente manera: la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} u_j + \overline{\rho' u_j'}) = 0, \quad (2-39)$$

las ecuaciones de momentum,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} u_j + \overline{\rho' u_j'}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u_i u_j} + \overline{u_i \rho' u_j'}) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \overline{u_j \rho' u_i'} - \overline{\rho u_i' u_j'} - \overline{\rho' u_i' u_j'}). \quad (2-40)$$

También se suele utilizar, en especial para flujo compresible, promedios ponderados con respecto a la densidad, más conocidos como promedios de Favre,

$$f = \tilde{f} + f'' \quad (2-41)$$

donde $\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}$ es el promedio ponderados con respecto a la densidad y f'' es la fluctuación con respecto al promedio anterior.

Para el presente trabajo no se utilizaron promedios de Favre para realizar la descomposición de Reynolds de las ecuaciones de Navier-Stokes. Esto debido a que estos no están implementados en el solucionador del software empleado. Una modificación del algoritmo de este solucionador para aplicar dichos promedios estaba por fuera del alcance del presente trabajo. En el Anexo A se presenta, solo a nivel informativo, la descomposición de Reynolds con promedios de Favre a las ecuaciones de conservación.

2.3. Métodos Numéricos

El método de discretización utilizado en la simulaciones de este trabajo fue el de volúmenes finitos, el cual se explica brevemente a continuación.

2.3.1. Método de los Volúmenes Finitos

Las ecuaciones de Navier Stokes en forma integral obtenidas para un volumen de control fijo en el espacio están expresadas en forma conservativa. Esto permite evitar dificultades numéricas que se dan en algunos flujos como los que presentan ondas de choque. Esta forma también permite expresar las ecuaciones de continuidad, momento y energía bajo una misma

forma genérica.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} U d\Omega + \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} Q_v d\Omega + \iint_S Q_S dS \quad (2-42)$$

Donde U representa una variable que puede ser acumulada dentro del volumen de control, $d\Omega$ es el diferencial de volumen, y dS es el diferencial de superficie. \vec{F} representa el flujo a través de la frontera asociado con la variable U que tiende a incrementar o disminuir la cantidad de la misma. Q_v representa todas las posibles fuentes de U dentro del dominio, y Q_S representa todas las posibles fuentes de U en la frontera.

En el caso de la ecuación de continuidad U es ρ , \vec{F} es $\rho\vec{V}$ y $Q_v = Q_S = 0$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho d\Omega + \iint_S \rho\vec{V} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2-43)$$

Las ecuaciones de momento en las tres direcciones principales serían:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} (\rho u) d\Omega + \iint_S (\rho u \vec{V}) \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} (\rho f_x) d\Omega + \iint_S (-p \vec{n} \cdot \vec{i} + \sigma_n \vec{n} \cdot \vec{i} + \sigma_s \vec{m} \cdot \vec{i}) dS \quad (2-44)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} (\rho v) d\Omega + \iint_S (\rho v \vec{V}) \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} (\rho f_y) d\Omega + \iint_S (-p \vec{n} \cdot \vec{j} + \sigma_n \vec{n} \cdot \vec{j} + \sigma_s \vec{m} \cdot \vec{j}) dS \quad (2-45)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} (\rho w) d\Omega + \iint_S (\rho w \vec{V}) \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} (\rho f_z) d\Omega + \iint_S (-p \vec{n} \cdot \vec{k} + \sigma_n \vec{n} \cdot \vec{k} + \sigma_s \vec{m} \cdot \vec{k}) dS \quad (2-46)$$

donde \vec{n} es un vector unitario normal a la superficie de control infinitesimal dS y \vec{m} es un vector unitario tangente a la superficie apuntando en la dirección del esfuerzo cortante viscoso.

La primera componente de izquierda a derecha de estas ecuaciones representa la rata de cambio en el tiempo del momento debida a fluctuaciones inestables de las propiedades del flujo dentro del volumen de control, el término que le sigue a la derecha representa el flujo neto de momento a través de la superficie S . Los términos a la derecha de la igualdad representan las fuerzas que actúan sobre el flujo a medida que pasa por el volumen de control. El primero de ellos a la izquierda representa las fuerzas de cuerpo, mientras que el último a la derecha representa las componentes de las fuerzas de superficie compuestas por fuerzas debidas a la presión y a la viscosidad.

La forma integral de la ecuación de energía quedaría:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} (E_t) d\Omega + \iint_S (E_t \vec{V}) \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} (\rho \vec{q} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V}) d\Omega + \iint_S (-\vec{q} \cdot \vec{n} - p \vec{n} \cdot \vec{V} + \sigma_n \vec{n} \cdot \vec{V} + \sigma_s \vec{m} \cdot \vec{V}) dS \quad (2-47)$$

Donde el vector \vec{q} representa la rata volumétrica de adición de calor por unidad de masa, y \vec{q}_c representa el vector de conducción de calor.

Para poder discretizar estas ecuaciones por el método de volúmenes finitos es necesario dividir el dominio físico en una malla de celdas. Los dos tipos de mallas más usados son estructuradas y no estructuradas. En las primeras los puntos de la malla están en las intersecciones de las familias de líneas. Las segundas están formadas por la combinación de celdas triangulares y cuadrilaterales, y los puntos de la malla no se identifican con líneas coordenadas. Mallas estructuradas se suelen usar para geometrías sencillas, mientras que para geometrías complejas se usan, generalmente, mallas no estructuradas.

Considerando un volumen de control Ω_{ij} y evaluando la ecuación 2-42 sobre este volumen tendríamos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} U d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} (U_{ij} \Omega_{ij}) \quad (2-48)$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \sum_{\text{lados}} (\vec{F} \cdot \vec{S}) \quad (2-49)$$

$$\iiint_{\Omega} Q_v d\Omega = (Q_v)_{ij} \Omega_{ij} \quad (2-50)$$

$$\iint_S Q_S dS = \sum_{\text{lados}} (Q_S)_{ij} S_{ij} \quad (2-51)$$

La ecuación 2-42 discretizada quedaría:

$$\frac{\partial}{\partial t} (U_{ij} \Omega_{ij}) + \sum_{\text{lados}} (\vec{F} \cdot \vec{S}) = (Q_v)_{ij} \Omega_{ij} + \sum_{\text{lados}} (Q_S)_{ij} S_{ij} \quad (2-52)$$

2.3.2. Propulsión

Para el cálculo de la eficiencia del empuje en las simulaciones numéricas se tomó la ecuación 2-12 y se reescribió en forma discreta:

$$\frac{F}{F_i} = 1 - \frac{1}{\dot{m} U_d} \int_d^e (p - p_a) \sin \theta ds \equiv 1 - \frac{1}{\dot{m} U_d} \sum_{n=d}^e (p_n - p_a) \sin \theta_n \Delta s_n \quad (2-53)$$

Donde n es la superficie de cada celda localizada en la frontera definida como la pared de la tobera. Los valores de \dot{m} y U_d se calculan con las ecuaciones 2-13 y 2-14 respectivamente.

2.3.3. Modelos de Turbulencia

Tal como se mencionó anteriormente, el modelado de la turbulencia se usa para *cerrar* el sistema de ecuaciones resultante de aplicar la descomposición de Reynolds a las ecuaciones de Navier-Stokes. Cuando se modela la totalidad del sistema a simular se usan los métodos llamados RANS (por la sigla en inglés de *Reynolds Average Navier Stokes*).

La principal ventaja de los métodos RANS es el bajo requerimiento computacional. La principal desventaja es que los resultados se dan promediados en el tiempo.

Sin embargo, una discretización espacial y temporal muy fina permitiría capturar el comportamiento turbulento del flujo directamente de las ecuaciones de Navier-Stokes. Esto evitaría la necesidad de usar la descomposición de Reynolds, y con ella, el problema del cierre de las ecuaciones. Estos métodos se conocen como DNS (por la sigla en inglés de *Direct Numerical Simulation*).

En forma contraria a los métodos RANS, DNS exige un alto requerimiento computacional, por lo que los estudios se deben limitar a geometrías sencillas y número de Reynolds relativamente bajos. La ventaja de los métodos DNS es que se obtiene la totalidad de la información de la turbulencia hasta las escalas de disipación viscosa, asociadas a la escala de Kolmogorov, y la cual puede ser hasta 3 órdenes de magnitud más pequeña que la escala característica del fenómeno.

Un método intermedio entre RANS y DNS es hacer simulación completa las ecuaciones de Navier-Stokes para las escalas grandes de la turbulencia, y para las escalas pequeñas utilizar un modelo. Estos métodos se denominan LES (por la sigla en inglés de *Large Eddy Simulation*).

En el presente trabajo se utilizó una malla fina sin modelo de turbulencia en las simulaciones con dominio en dos dimensiones. A pesar de no ser un método DNS, se capturó la información suficiente para caracterizar el flujo turbulento compresible simulado. Para las simulaciones con el dominio en tres dimensiones se utilizó un método LES con el modelo de subgrilla de Smagorinsky.

Por simplicidad se muestra a continuación la obtención de las ecuaciones del método LES con modelo de subgrilla de Smagorinsky para un flujo incompresible. Partiendo de las ecuaciones de continuidad y momento respectivamente,

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2-54)$$

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{U} \quad (2-55)$$

se aplica la descomposición de Reynolds,

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \quad (2-56)$$

donde $\tilde{\mathbf{u}}$ es el promedio ensamblado de la variable, y \mathbf{u}' es la fluctuación con respecto al promedio. Aplicando esta descomposición a la ecuación de continuidad tendríamos,

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 = \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \quad (2-57)$$

donde podemos deducir las siguientes relaciones

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (2-58)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (2-59)$$

A continuación aplicamos la descomposición a la ecuación de momento,

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\widetilde{\mathbf{U}\mathbf{U}}) = -\nabla \tilde{p} + \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}} \quad (2-60)$$

el segundo término de la parte izquierda de la igualdad se puede expandir de la siguiente forma,

$$\nabla \cdot (\widetilde{\mathbf{U}\mathbf{U}}) = \nabla \cdot \left((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \widetilde{(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')} \right) \quad (2-61)$$

donde esto representa,

$$(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \widetilde{(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')} = \begin{pmatrix} (\tilde{u}_i + u'_i) \widetilde{(\tilde{u}_i + u'_i)} & (\tilde{u}_i + u'_i) \widetilde{(\tilde{u}_j + u'_j)} & (\tilde{u}_i + u'_i) \widetilde{(\tilde{u}_k + u'_k)} \\ (\tilde{u}_j + u'_j) \widetilde{(\tilde{u}_i + u'_i)} & (\tilde{u}_j + u'_j) \widetilde{(\tilde{u}_j + u'_j)} & (\tilde{u}_j + u'_j) \widetilde{(\tilde{u}_k + u'_k)} \\ (\tilde{u}_k + u'_k) \widetilde{(\tilde{u}_i + u'_i)} & (\tilde{u}_k + u'_k) \widetilde{(\tilde{u}_j + u'_j)} & (\tilde{u}_k + u'_k) \widetilde{(\tilde{u}_k + u'_k)} \end{pmatrix} \quad (2-62)$$

Para la presente explicación solo tomamos el primer término de la matriz mostrada el cual equivale a,

$$(\tilde{u}_i + u'_i) \widetilde{(\tilde{u}_j + u'_j)} = \widetilde{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} + \widetilde{\tilde{u}_i u'_j} + \widetilde{u'_i \tilde{u}_j} + \widetilde{u'_i u'_j}, \quad (2-63)$$

estos términos agrupados se suelen conocer como *tensor de esfuerzo de Leonard*

$$L_{ij} \equiv \widetilde{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j, \quad (2-64)$$

tensor de esfuerzo de Cross

$$C_{ij} \equiv \widetilde{\tilde{u}_i u'_j} + \widetilde{u'_i \tilde{u}_j}, \quad (2-65)$$

tensor de esfuerzo de Reynolds

$$R_{ij} \equiv \widetilde{u'_i u'_j}. \quad (2-66)$$

A partir de las definiciones anteriores el modelo de subgrilla de Smagorinsky es

$$\tau_{SGS,ij} \equiv L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}, \quad (2-67)$$

reemplazando este término en la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}}) = -\nabla \tilde{p} + \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \tau_{SGS}. \quad (2-68)$$

Smagorinsky planteó que el modelo de subgrilla se puede considerar proporcional al tensor rata de deformación,

$$\tau_{SGS} = -2\nu_{SGS} \tilde{\mathbf{S}}, \quad (2-69)$$

donde $\nu_{SGS} = (C_s \Delta)^2 |\tilde{\mathbf{S}}|$ es la viscosidad de los vórtices, C_s es la constante de Smagorinsky y Δ es el filtro de subgrilla.

Una vez presentado los principios físicos del sistema, el modelo matemático que describe el comportamiento de estos, y los métodos numéricos con los que se soluciona el modelo matemático, se procedió a realizar la validación del modelo computacional, la cual se presenta en el siguiente capítulo.

3. Validación del Modelo Computacional

Para las simulaciones del presente trabajo se decidió utilizar el software de código abierto *OpenFOAM*, el cual es ampliamente utilizado para investigaciones en el área de la mecánica de fluidos computacional (CFD siglas en inglés de *Computational Fluid Dynamics*). Este software está basado en el método de los volúmenes finitos descrito en el capítulo anterior. En particular, en el presente trabajo se utilizaron subrutinas dedicadas a la solución de las ecuaciones de conservación para flujos compresibles. En las siguientes secciones se presentan la selección del solucionador más adecuado para el presente trabajo y detalles del modelo computacional utilizado.

3.1. Validación del Solucionador

Se entiende por solucionador cualquier software usado para modelar, analizar o calcular (numérica o simbólicamente), y al final resolver, un problema matemático. En el caso particular del software CFD los solucionadores tienen como objetivo resolver problemas de la dinámica de fluidos bajo la modelación de la mecánica del medio continuo.

En el caso de flujo compresible se usan dos estrategias en métodos numéricos para la solución de las ecuaciones que describen el comportamiento físico de flujos en régimen compresible: el primero se denomina *basado en presión*, y el segundo *basado en densidad*. En ambos métodos la velocidad es obtenida de la ecuación de momento. En el caso *basado en densidad*, se usa la ecuación de continuidad para obtener la densidad, mientras que la presión se obtiene de la ecuación de estado. Por su parte, en el método *basado en presión*, la presión total se extrae solucionando una ecuación de corrección la cual se obtiene mediante la manipulación de las ecuaciones de continuidad y momento.

Dentro de las múltiples aplicaciones para las cuales OpenFOAM tiene solucionadores, los que se usan para modelar y resolver flujo compresible se listan en la Tabla **3-1**.

De las descripciones presentadas en la Tabla **3-1** podemos extraer dos solucionadores apropiados para modelar flujo compresible a alta velocidad, *rhoCentralFoam* y *sonicFoam*. El método usado en el solucionador *sonicFoam* usa la presión y la velocidad como variables dependientes en un algoritmo PISO (siglas en inglés de Pressure Implicit with Splitting of Operators). Por su parte, *rhoCentralFoam* usa un método basado en densidad con los esquemas upwind-centrales planteados por Kurganov y Tadmor [14].

Para validar y seleccionar el solucionador a usar en el presente estudio, se hicieron simu-

Solucionador	Descripción
<i>rhoCentralFoam</i>	Solucionador de flujo compresible basado en densidad el cual usa los esquemas upwind-centrales planteados por Kurganov y Tadmor.
<i>rhoPimpleFoam</i>	Solucionador transitorio para flujo compresible, laminar o turbulento, para aplicaciones HVAC y aplicaciones similares.
<i>rhoSimplecFoam</i>	Solucionador SIMPLEC de estado estacionario para flujos compresibles, laminares o turbulentos, con modelado de la turbulencia RANS.
<i>rhoSimpleFoam</i>	Solucionador SIMPLE de estado estacionario para flujos compresibles, laminares o turbulentos, con modelado de la turbulencia RANS.
<i>sonicFoam</i>	Solucionador transitorio para flujo transonico o supersónico, laminar o turbulento, de un gas compresible

Tabla 3-1.: Solucionadores para flujo compresible [13].

laciones para el caso de flujo supersónico sobre una cuña tal como se muestra en la figura izquierda de la tabla **3-2**. La ventaja de utilizar este caso es que el mismo cuenta con solución analítica. En particular, la ecuación de esta solución para el ángulo de la onda de choque es,

$$\tan\theta_w = 2\cot\theta_s \frac{M_\infty^2 \sin^2\theta_s - 1}{M_\infty^2 (\lambda + \cos 2\theta_s) + 2}, \quad (3-1)$$

en tanto que la relación de presiones entre la entrada y la salida, se puede determinar como:

$$\frac{p_2}{p_\infty} = 1 + \frac{2\lambda}{\lambda + 1} (M_\infty^2 \sin^2\theta_s - 1), \quad (3-2)$$

para la relación de densidades entre la entrada y la salida, como

$$\frac{\rho_2}{\rho_\infty} = \frac{(\lambda + 1)M_\infty^2 \sin^2\theta_s}{(\lambda - 1)M_\infty^2 \sin^2\theta_s + 2}, \quad (3-3)$$

para la relación de temperaturas entre la entrada y la salida,

$$\frac{T_2}{T_\infty} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} \quad (3-4)$$

y finalmente para el número de Mach a la salida,

$$M_2 = \frac{1}{\sin(\theta_s - \theta_w)} \sqrt{\frac{1 + \frac{\lambda-1}{2} M_\infty^2 \sin^2\theta_s}{\lambda M_\infty^2 \sin^2\theta_s - \frac{\lambda-1}{2}}} \quad (3-5)$$

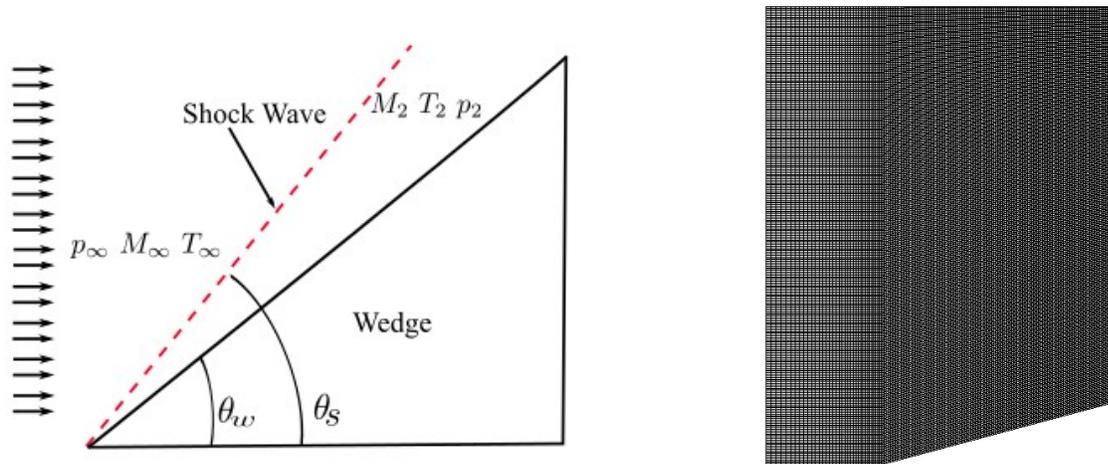


Tabla 3-2.: Izquierda: Configuración de la cuña. Derecha: Malla computacional en el dominio usado para el flujo supersónico sobre una cuña.

donde θ_s es el ángulo de la cuña, θ_w es el ángulo de la onda de choque, M_∞ es el número de Mach del flujo en la corriente que incide sobre la cuña. Todos los subíndices 2 indican se miden después de la onda de choque como se muestra en la figura izquierda de la tabla 3-3.

La calidad de los resultados obtenidos con cada solucionador se determinó a partir de los niveles de precisión con que cada uno predijo el ángulo de la onda de choque (θ_s) y las condiciones del flujo aguas abajo para un ángulo de cuña dado (θ_w).

3.1.1. Especificación del problema y parámetros del caso de validación.

Dominio de la solución:

Se utilizó un dominio bidimensional discretizado con 50,100 volúmenes, y extendido en la dirección vertical para abarcar la totalidad de la onda de choque para números de Mach menores. Se puede observar la forma del dominio en la figura derecha de la tabla 3-2. El ángulo de la cuña se establece similar al de la tobera seleccionada para el presente trabajo en su sección divergente ($\theta_w = 11$).

Propiedades termodinámicas del flujo simulado:

Se usa un modelo termo-físico de gas normalizado en el cual la velocidad de sonido $c = \sqrt{\gamma RT} = 1$ m/s, de tal forma que las velocidades son equivalentes al número de Mach. En forma similar la presión y la temperatura son normalizadas. Se simula aire en condiciones de gas ideal con coeficiente de dilatación adiabática: $\lambda = 1,4$.

Condiciones iniciales:

Se establece presión atmosférica y temperatura normalizadas $p = 1 \text{ kg/m s}^2$ y $T = 1 \text{ K}$. Estas condiciones solo se aplicaron al caso de prueba. Para realizar la validación se toman siete valores diferentes de velocidad del flujo:

- $\mathbf{U}_1 = (1,65 \ 0 \ 0) \text{ m/s}$
- $\mathbf{U}_2 = (1,75 \ 0 \ 0) \text{ m/s}$
- $\mathbf{U}_3 = (2,00 \ 0 \ 0) \text{ m/s}$
- $\mathbf{U}_4 = (2,25 \ 0 \ 0) \text{ m/s}$
- $\mathbf{U}_5 = (2,50 \ 0 \ 0) \text{ m/s}$
- $\mathbf{U}_6 = (3,00 \ 0 \ 0) \text{ m/s}$
- $\mathbf{U}_7 = (3,50 \ 0 \ 0) \text{ m/s}$

Vale la pena resaltar que, como se indicó de manera breve anteriormente, al ser velocidad normalizada por la velocidad local del sonido, cada valor de velocidad equivale al número de Mach.

Condiciones de frontera:

Las condiciones en las fronteras del dominio se muestran en la tabla **3-3**.

	Fronteras del dominio			
	Entrada	Salida	Arriba y abajo	Cuña
velocidad	mismos valores de condiciones iniciales	$\nabla \mathbf{U} \cdot \hat{n} = 0$	plano de simetría	deslizante
presión	$p = 1 \text{ kg/m s}^2$	<i>waveTransmissive</i>	plano de simetría	$\nabla p \cdot \hat{n} = 0$
temperatura	$T = 1 \text{ K}$	$\nabla T \cdot \hat{n} = 0$	plano de simetría	$\nabla T \cdot \hat{n} = 0$

Tabla 3-3.: Condiciones de frontera.

Solucionadores:

Tal como se determinó los solucionadores de OpenFOAM a validar fueron *rhoCentralFoam* y *sonicFoam*.

3.1.2. Validación de los valores obtenidos frente a los valores teóricos.

En la Tablas 3-4, 3-5, 3-6 y 3-7 se pueden observar las variaciones porcentuales de los resultados obtenidos frente a los valores calculados con las ecuaciones de la solución analítica. La gráfica que acompaña a cada tabla muestra los puntos de la simulación con cada solucionador, y la solución analítica como una línea continua.

Ma_{inf}	<i>rhoCentralFoam</i>	<i>sonicFoam</i>
1.65	-0.01 %	4.70 %
1.75	-0.12 %	2.67 %
2	-0.43 %	1.71 %
2.25	-0.69 %	1.66 %
2.5	-0.62 %	1.64 %
3	-0.72 %	1.81 %
3.5	-1.02 %	2.81 %

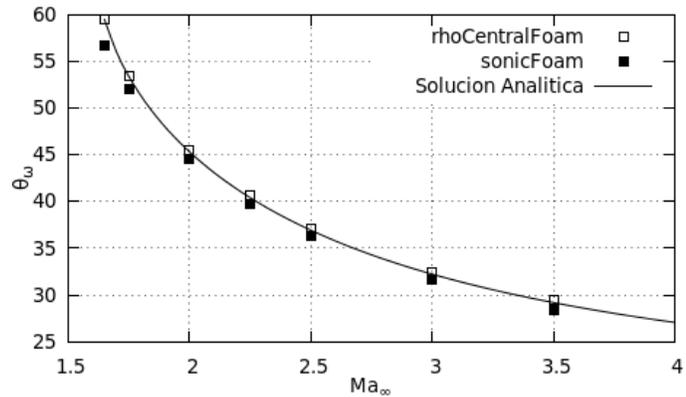


Tabla 3-4.: Valores de variación del ángulo de la onda de choque (θ_w)

Observando los valores de las tablas 3-4 a la 3-7 se distingue una clara diferencia en la predicción de los valores de las variables: en el caso del solucionador *rhoCentralFoam* la variación frente a la solución analítica esta por debajo del 1 %, mientras que el solucionador *sonicFoam* arroja diferencias entre 1 % y 7 %. De esta forma, se seleccionó como solucionador principal *rhoCentralFoam*, para las simulaciones numéricas de este trabajo, independiente del tratamiento de la turbulencia en cada uno de los casos estudiados.

Ma_{inf}	$\rho_{\text{CentralFoam}}$	$\rho_{\text{sonicFoam}}$
1.65	0.05 %	-6.74 %
1.75	0.04 %	-2.00 %
2	0.05 %	-2.27 %
2.25	0.06 %	-2.30 %
2.5	0.06 %	-2.50 %
3	0.09 %	-3.47 %
3.5	0.11 %	-4.37 %

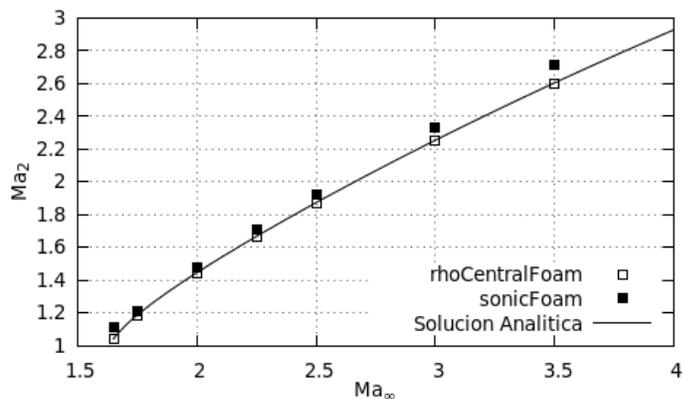


Tabla 3-5.: Valores de variación del número de Mach aguas abajo Ma_2 .

Ma_{inf}	$\rho_{\text{CentralFoam}}$	$\rho_{\text{sonicFoam}}$
1.65	-0.03 %	6.31 %
1.75	-0.04 %	3.83 %
2	-0.04 %	2.39 %
2.25	-0.03 %	1.87 %
2.5	-0.09 %	1.90 %
3	-0.02 %	2.05 %
3.5	0.01 %	2.34 %

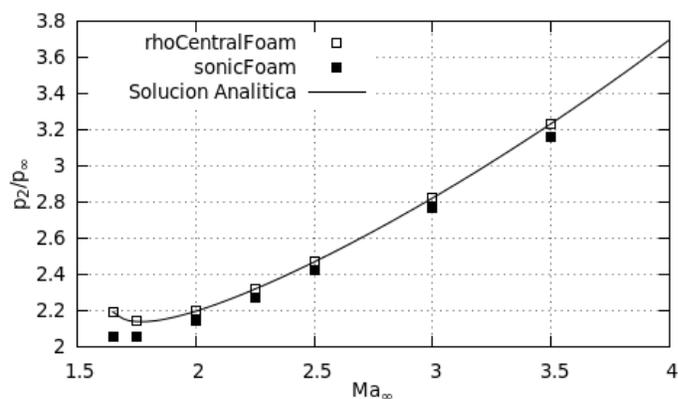


Tabla 3-6.: Valores de variación de la relación de presión (p_2/p_∞).

Ma_{inf}	$\rho_{CentralFoam}$	$\rho_{sonicFoam}$
1.65	0.00 %	3.62 %
1.75	-0.01 %	2.75 %
2	-0.01 %	2.44 %
2.25	-0.01 %	2.58 %
2.5	-0.03 %	2.95 %
3	0.02 %	3.89 %
3.5	-0.02 %	5.29 %

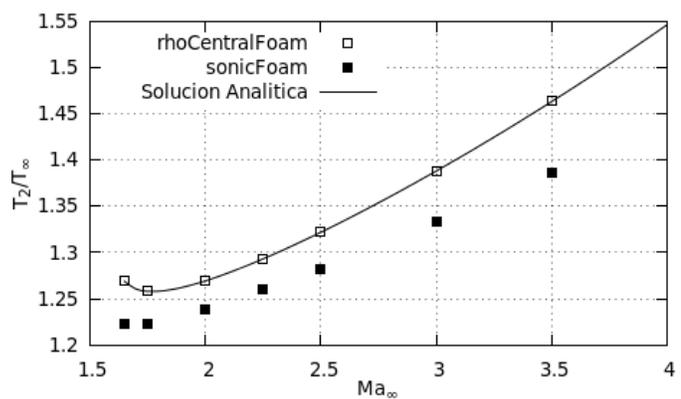


Tabla 3-7.: Valores de variación de la relación de temperatura (T_2/T_{∞}).

3.2. Validación del Modelo Computacional para la Geometría tobera De Laval.

En el presente proyecto se estudia el desempeño de un ducto propulsivo tipo tobera De Laval. La geometría específica se seleccionó con base en un trabajo experimental realizado por Hunter[15] el cual ha sido tomado como caso base para otros estudios numéricos [9][16].

El NPR de diseño del ducto seleccionado es de 8,78, el número de Mach a la salida es de 2,07 para un número de Reynolds de $3,2 \times 10^6$. El ángulo de la pared a la salida es de 11 grados. Tanto la longitud de la sección convergente como la de la sección divergente equivalen exactamente a dos veces el ancho de la garganta. El radio de expansión es de $A_e/A_t = 1,797$. Los experimentos se realizaron con aire seco a $T_a = 294,44K$. El flujo másico de aire en los experimentos fue hasta de $6,8kg/s$

3.2.1. Especificación del problema y parámetros del caso.

Domínio de la solución:

Se diseñó un dominio bidimensional siguiendo las medidas utilizadas para los experimentos y pruebas numéricas en Hunter[15] las cuales se muestran en la tabla 3-8.

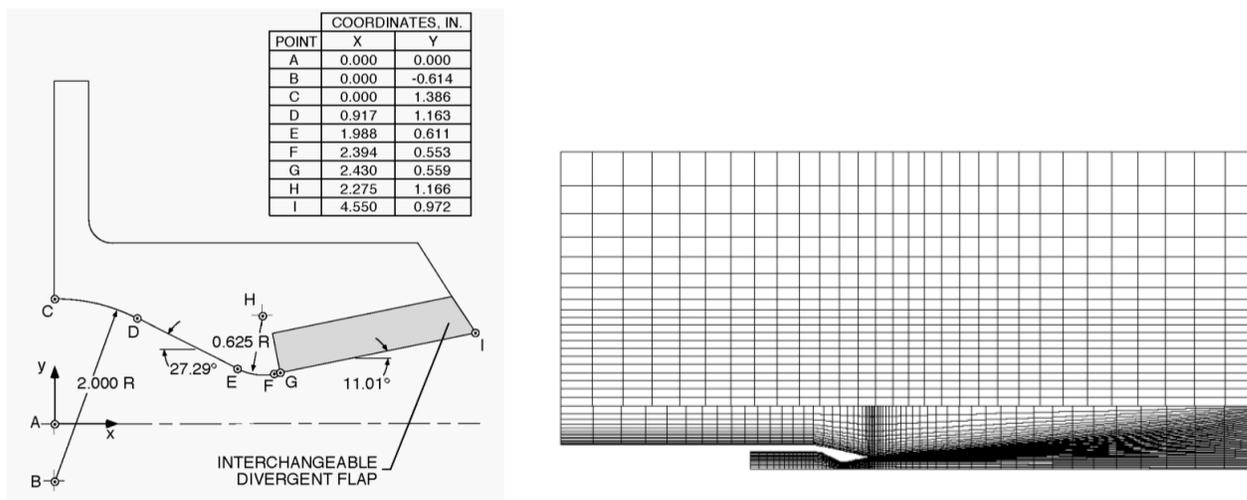


Tabla 3-8.: Izquierda: Dimensiones de la tobera. Derecha: Discretización del dominio, ambos según Hunter[15].

La designación de las direcciones principales de los ejes coordenados se hace siguiendo la figura de la izquierda de la tabla 3-8: la dirección x es en la misma en la que se desplaza el fluido, la dirección y es en normal a x y normal a la pared de la tobera localmente.

El dominio se ha extendido aproximadamente 30 veces el ancho de la garganta de la tobera en la dirección x , 25 veces en y en ambas direcciones. Todo lo anterior respecto al origen de coordenadas establecido en la entrada de la tobera.

A diferencia de lo realizado por Hunter, en este trabajo se utilizó un dominio completo, y no partido por la línea de simetría horizontal (ver figuras de las tablas 3-8 y 3-9). Dadas las características geométricas del dominio, se optó por una enmallado tipo estructurado.

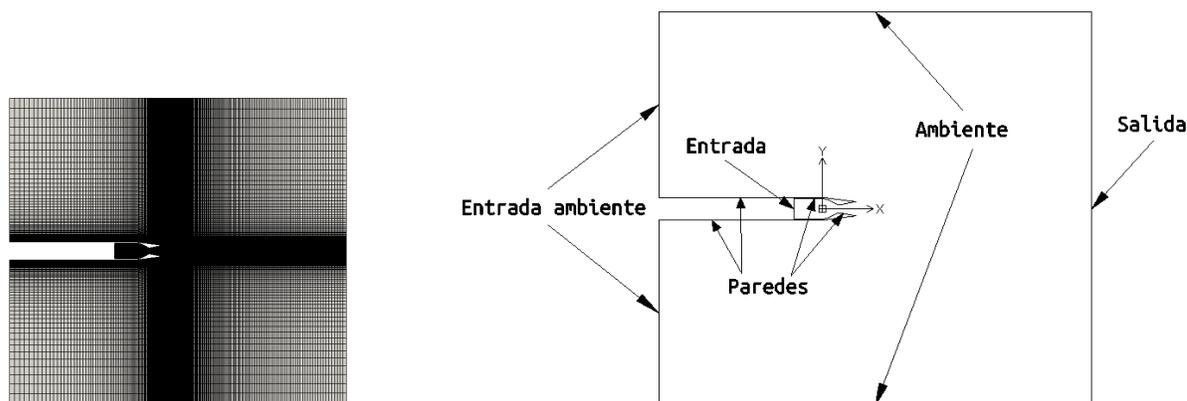


Tabla 3-9.: Izquierda: Discretización del dominio. Derecha: detalle de la sección de la tobera.

Condiciones iniciales:

En todo el dominio se establecieron condiciones iniciales que concuerdan con lo reportado por Hunter[15] en los experimentos que realizó:

- $\mathbf{U} = (8,601 \ 0 \ 0)\text{m/s}$
- $p = 102387,1458 \text{ kg/m s}^2$
- $T = 294,44 \text{ K}$

Condiciones de frontera:

En la frontera del dominio a la entrada de flujo en la tobera (*Entrada* en la figura de la tabla 3-9) se escogieron condiciones de presión total y temperatura total que concuerdan con las condiciones reportadas experimentalmente por Hunter[15]. Al inicio de las simulaciones se impone una condición de presión total incremental. Esta inicia desde la presión ambiente hasta la deseada (según el NPR de la simulación) en un tiempo de 2 milésimas de segundo. Esto permitió evitar fuertes gradientes locales de presión, los cuales pueden generar ondas de choque. Tales ondas de choque se reflejan en la sección convergente de la tobera.

En las simulaciones se utilizaron las condiciones de frontera tipo *uniformTotalPressure* y *totalTemperature*, disponibles en OpenFOAM. En particular, con tales condiciones de frontera, OpenFOAM calcula automáticamente los valores de velocidad en esta frontera según la relación $p_0 = p + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{U}|^2$, donde p_0 es la presión total.

En la frontera denominada *Entrada Ambiente* (tabla 3-9) se establecen condiciones de entrada subsónica, haciendolas coincidir con los valores dados por Hunter[15]: $\mathbf{U} = (8,601 \ 0 \ 0)\text{m/s}$, $p = 102387,1458 \text{ kg/m s}^2$ y $T = 294,44 \text{ K}$.

En las fronteras denominadas *Ambiente* y *Salida* (tabla 3-9) se escoge una condición que evita la reflexión de las ondas de choque. Se decidió usar una condición de frontera denominada *waveTransmissive* disponible en OpenFOAM. Para la temperatura y la velocidad se establecen condiciones de flujo totalmente desarrollado indicando que el gradiente de estas es cero ($\nabla T \cdot \hat{n} = 0$ y $\nabla \mathbf{U} \cdot \hat{n} = 0$). Para lo anterior OpenFOAM dispone de una condición denominada *zeroGradient*.

En las fronteras del dominio que actúan como *Paredes* (tabla 3-9) se imponen condiciones de no deslizamiento para la velocidad ($\mathbf{U} = (0 \ 0 \ 0)\text{m/s}$), condición adiabática para la temperatura ($\nabla T \cdot \hat{n} = 0$) y de gradiente cero para la presión ($\nabla p \cdot \hat{n} = 0$).

Un resumen de las condiciones de frontera seleccionadas se puede observar en la tabla 3-10.

Frontera	Condición para Velocidad	Condición para Presión	Condición para Temperatura
Entrada	Se calcula según la presión total	presión total con rampa de incremento	temperatura total $T_0 = 294,44 \text{ K}$
Salida	$\nabla \mathbf{U} \cdot \hat{n} = 0$	no reflectiva $p = 102387,1458 \text{ kg/m s}^2$	$\nabla T \cdot \hat{n} = 0$
Ambiente	$\nabla \mathbf{U} \cdot \hat{n} = 0$	no reflectiva $p = 102387,1458 \text{ kg/m s}^2$	$\nabla T \cdot \hat{n} = 0$
Entrada Ambiente	$\nabla \mathbf{U} \cdot \hat{n} = 0$	no reflectiva $p = 102387,1458 \text{ kg/m s}^2$	$\nabla T \cdot \hat{n} = 0$
Paredes	$\mathbf{U} = (0 \ 0 \ 0)\text{m/s}$	$\nabla p \cdot \hat{n} = 0$	$\nabla T \cdot \hat{n} = 0$

Tabla 3-10.: Condiciones de frontera.

Solucionador:

Siguiendo lo establecido en la sección anterior, el solucionador utilizado en todas las simulaciones es *rhoCentralFoam*.

Propiedades termodinámicas:

El fluido a simular es aire y, tal como se indicó en el capítulo anterior, se asume comportamiento de gas ideal para este. El coeficiente de dilatación adiabática para este fluido es $\lambda = 1,4$. En forma similar, se usa un modelo termo-físico que aplica la ley de Sutherland para el cálculo de la viscosidad cinemática.

3.2.2. Estudio de independencia de malla para condiciones de diseño del ducto.

Para el estudio de independencia de malla se analizó el comportamiento de la curva de presión a lo largo de la pared de la tobera, y la eficiencia del empuje. Se inicia con un dominio que contiene una cantidad de celdas cercana a lo usado por Toufique Hasan[9]. A continuación se hicieron simulaciones con mayor cantidad de celdas. En total se probaron tres casos con 110140, 232680 y 387800 celdas.

La variación de la presión en la pared superior, en la pared inferior, y de la eficiencia del empuje se muestran en la tabla **3-11** para discretizaciones del dominio con mayor cantidad de volúmenes. Dado que se trabajó con un dominio completo, a diferencia de lo realizado por Hunter[15] y otros trabajos, se tuvo especial atención en el comportamiento de estas propiedades en la pared superior y en la pared inferior de manera independiente.

Volúmenes	y^+	Variación de la Presión		
		Pared Superior	Pared Inferior	Variación del empuje
110,140	66.5			
232,680	61.1	0.27 %	0.28 %	0.0064 %
387,800	46.5	0.12 %	0.12 %	0.0034 %

Tabla 3-11.: Estudio de Independencia de Malla.

Para las cantidades de celdas utilizadas en la discretización del dominio se observa que la variación de la presión y de la eficiencia del empuje están por debajo del 1 %. En la tabla también se muestran los valores de y^+ de la primera celda desde la pared en la garganta para cada una de las mallas del estudio.

Para mirar el comportamiento del sistema para una malla refinada solo en la pared de la tobera se corrió una simulación con 246,640 volúmenes y un $y^+ \cong 6$ de la primera celda desde la pared en la garganta (figura **3-13**). El resultado fue una variación de 0.72 % y 0.73 % en

la presión en la pared superior e inferior respectivamente, y de 0.0571 % en el empuje.

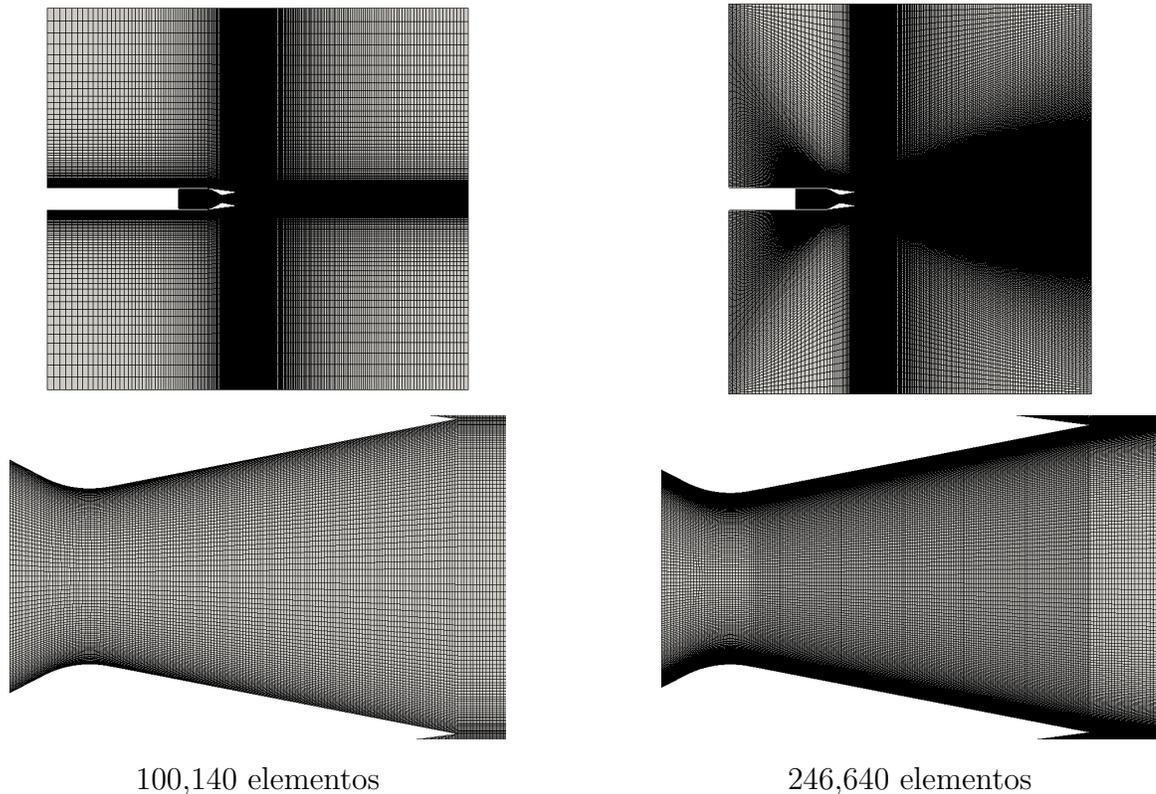


Tabla 3-12.: Comparación de las discretizaciones del dominio.

El estudio de independencia de malla concluye que incrementar la cantidad de volúmenes en la discretización del dominio por encima de 110,140 no incrementará significativamente la calidad de la respuesta de la presión en las paredes y de la eficiencia del empuje, para el caso bidimensional.

Sin embargo, vale la pena aclarar que esto no es igualmente válido para otras propiedades del estudio. Por ejemplo, como se mostrará más adelante, para valores de NPR muy por debajo del NPR de diseño, la presencia de asimetrías en las ondas de choque dentro de la sección divergente de la tobera es fuertemente afectada por el número de celdas disponibles para resolver la posición de las ondas de choque, y la interacción de estas con la capa límite.

3.2.3. Validación frente a valores experimentales

En la figura 3-1 (a) se muestra la comparación de los valores de presión de la simulaciones frente a los valores experimentales reportados por Hunter[15] para $NPR = 8,78$ (NPR de

Cantidad de Elementos Dominio	Cantidad de elementos en la dirección normal a la pared	Δy (10^{-6}m)	y^+
100,140	50	34	30
246,640	150	1.2	6

Tabla 3-13.: Características de las dos discretizaciones del dominio.

diseño de la tobera). Como se puede observar se obtuvo una muy buena aproximación del modelo numérico usado en el presente trabajo, con respecto a los valores experimentales.

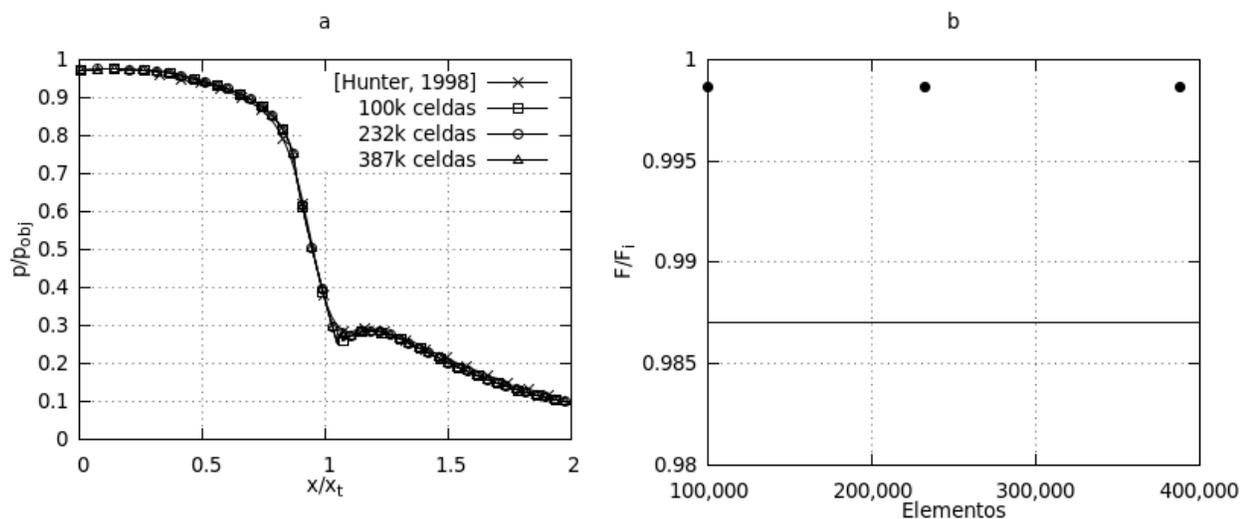


Figura 3-1.: (a) Comparación de presiones en la pared de la tobera. (b) Comparación de los valores de eficiencia del empuje. Los puntos indican los valores para las simulaciones, la línea horizontal muestra el valor reportado experimentalmente.

En la figura 3-1 (b) se puede observar la comparación de los valores de la eficiencia del empuje de las simulaciones frente al valor experimental reportado. A pesar de que los valores de las simulaciones no se ajustan a lo reportado, la diferencia es apenas de 1.18 %, lo cual se consideró aceptable para el presente estudio.

A continuación se realizaron simulaciones con cinco valores de NPR reportados experimentalmente, estos fueron: $\text{NPR}=1.255$, $\text{NPR}=2.008$, $\text{NPR}=3.014$, $\text{NPR}=5.423$ y $\text{NPR}=8.037$. Para estos también se realizaron pruebas de validación de las curvas de presión en la pared y la eficiencia del empuje. Estas simulaciones se realizaron con el dominio discretizado con 246,640 volúmenes y un $y^+ \cong 6$ de la primera celda desde la pared en la garganta (figura 3-13).

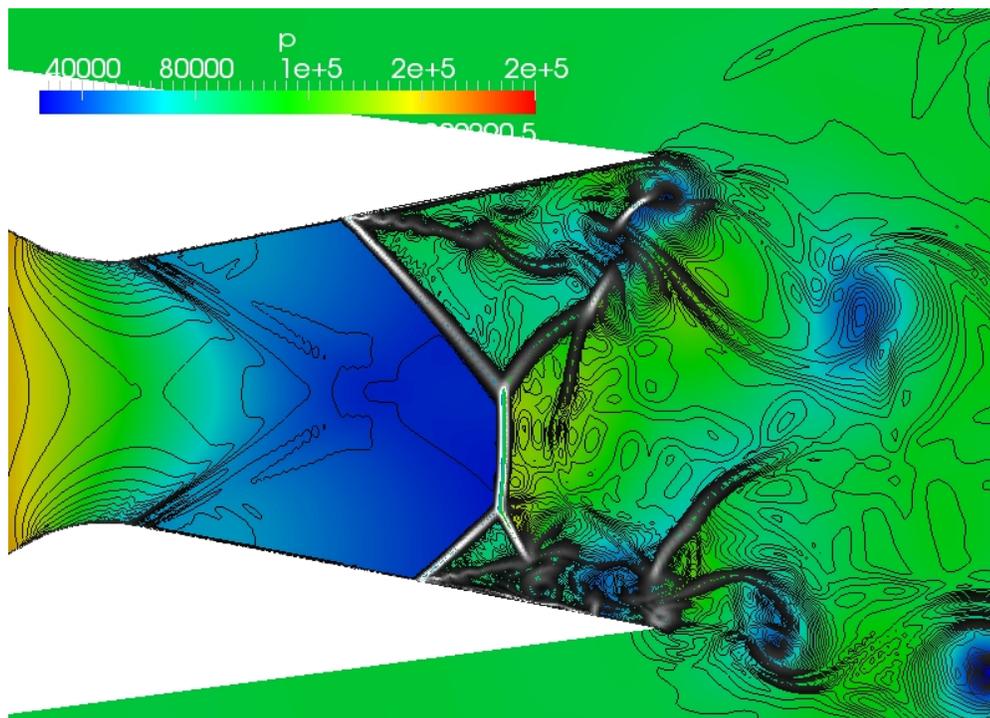


Figura 3-2.: Onda de choque asimétrica para simulación con $NPR = 2.008$

Las figuras de las tablas **3-14**, **3-15** y **3-16** muestran la comparación de las curvas de presión reportadas experimentalmente contra los datos obtenidos en las simulaciones.

Se observó (Figuras de las tablas **3-15** y **3-16**) que hay una diferencia entre las curvas de presión de la pared superior y de la pared inferior para los valores de NPR 2.008 y 3.014. Este comportamiento no se reporta en las simulaciones numéricas realizadas por Hunter[15] ni por Toufique Hasan[9], ni por otros trabajos que usan la misma geometría de dominio y condiciones iniciales y de frontera como el de Balabel[17].

Se sabe que este comportamiento es típico de las toberas convergentes-divergentes como se puede observar en los experimentos realizados por Papamoschou[12]. Según el trabajo de Papamoschou, la capa límite se separa asimétricamente en un rango entre $1,5 < NPR < 2,4$ para toberas convergentes-divergentes con una relación de áreas entre la salida y la garganta de $\frac{A_e}{A_t} > 1,4$, tal como la usada en el presente estudio.

La figura **3-2** presenta una vista ampliada de las ondas de choque en los isocontornos del gradiente de densidad, y el campo de presión en color. Se puede observar la asimetría entre las ondas de choque incidentes en cada una de las paredes de la tobera.

Las figuras de la tabla **3-17** muestran las ondas de choque en la sección divergente de la

tobera en diez instantes de tiempo sucesivos de la simulación para $NPR = 2.008$. Como ya se mencionó, se presenta asimetría de las ondas de choque incidentes en las paredes. Papamoschou[12] observó en sus experimentos que esta asimetría tiende a una de las dos paredes (variando en cada experimento) y se queda inclinada hacia esta pared. Esto se puede observar, de manera exitosa, en las figuras desde $t = 0,0294$ hasta $t = 0,0298$.

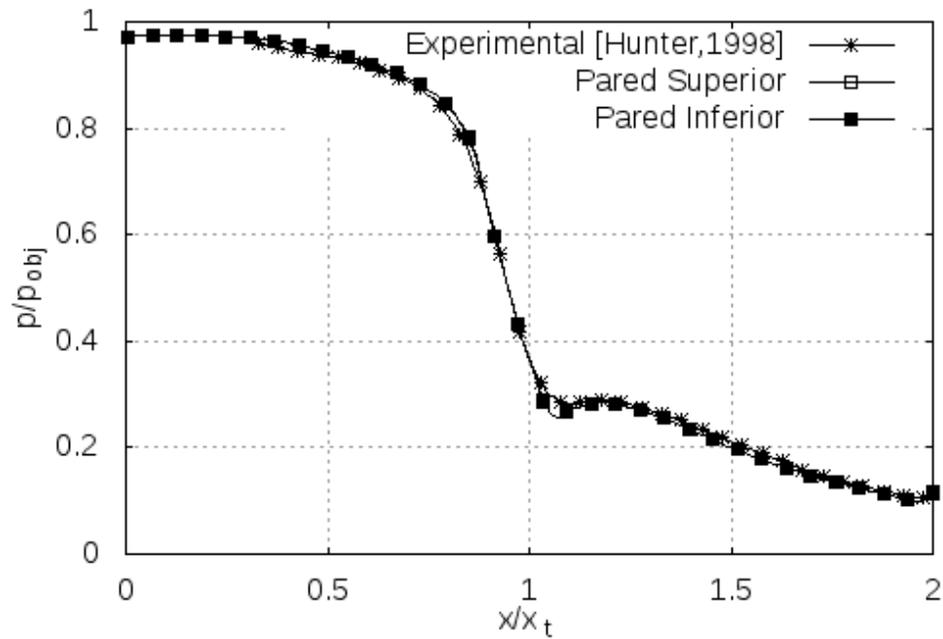
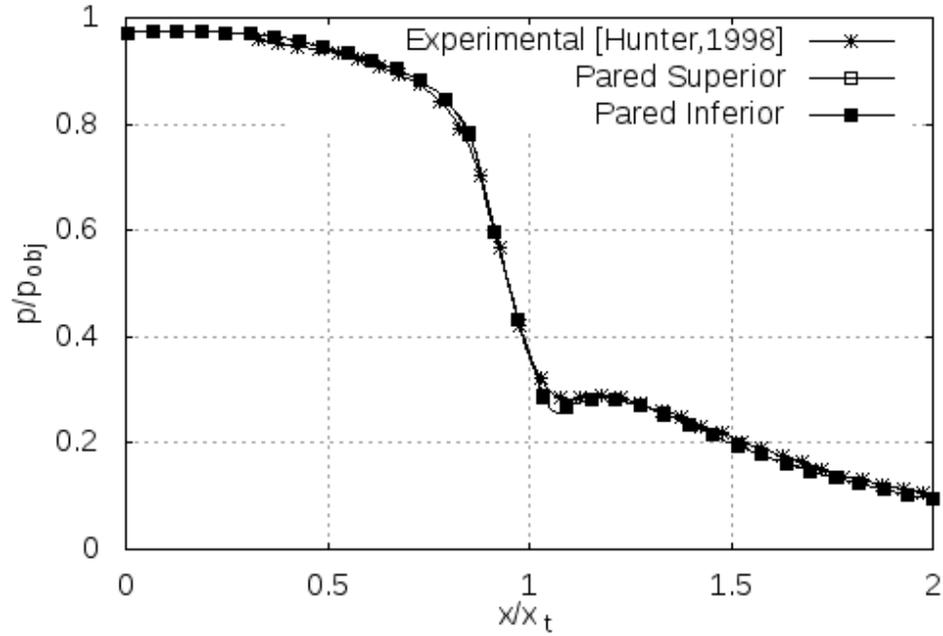


Tabla 3-14.: Validación de curvas de presión en la pared para $NPR = 8.037$ (arriba) y $NPR = 5.423$ (abajo)

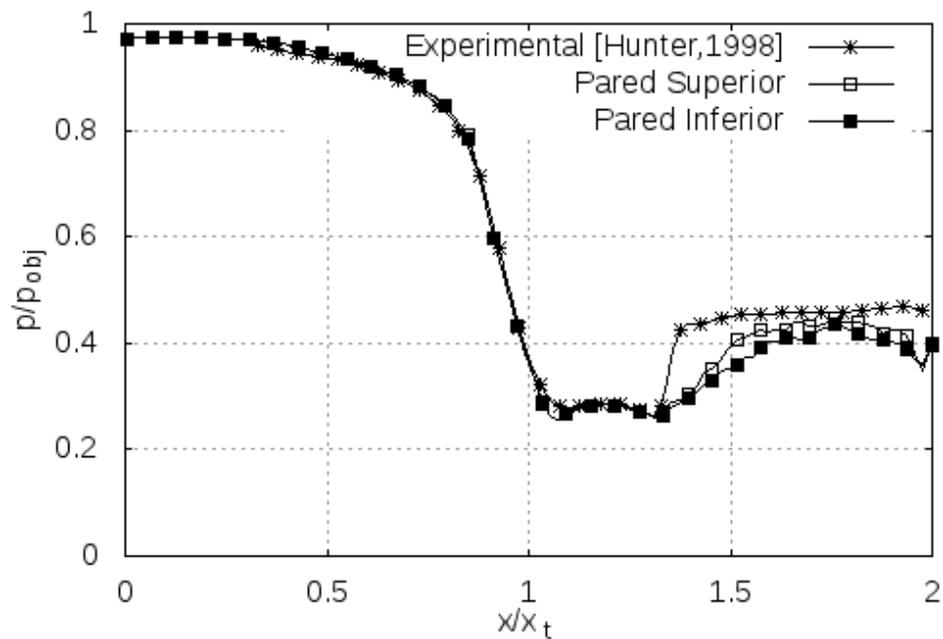
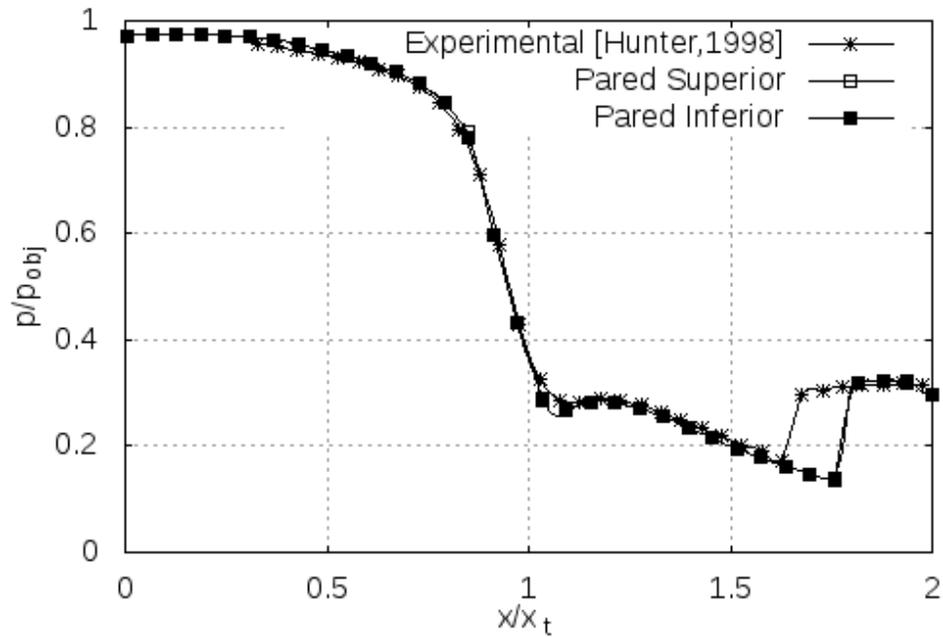


Tabla 3-15.: Validación de curvas de presión en la pared para NPR = 3.014 (arriba) y NPR = 2.008 (abajo)

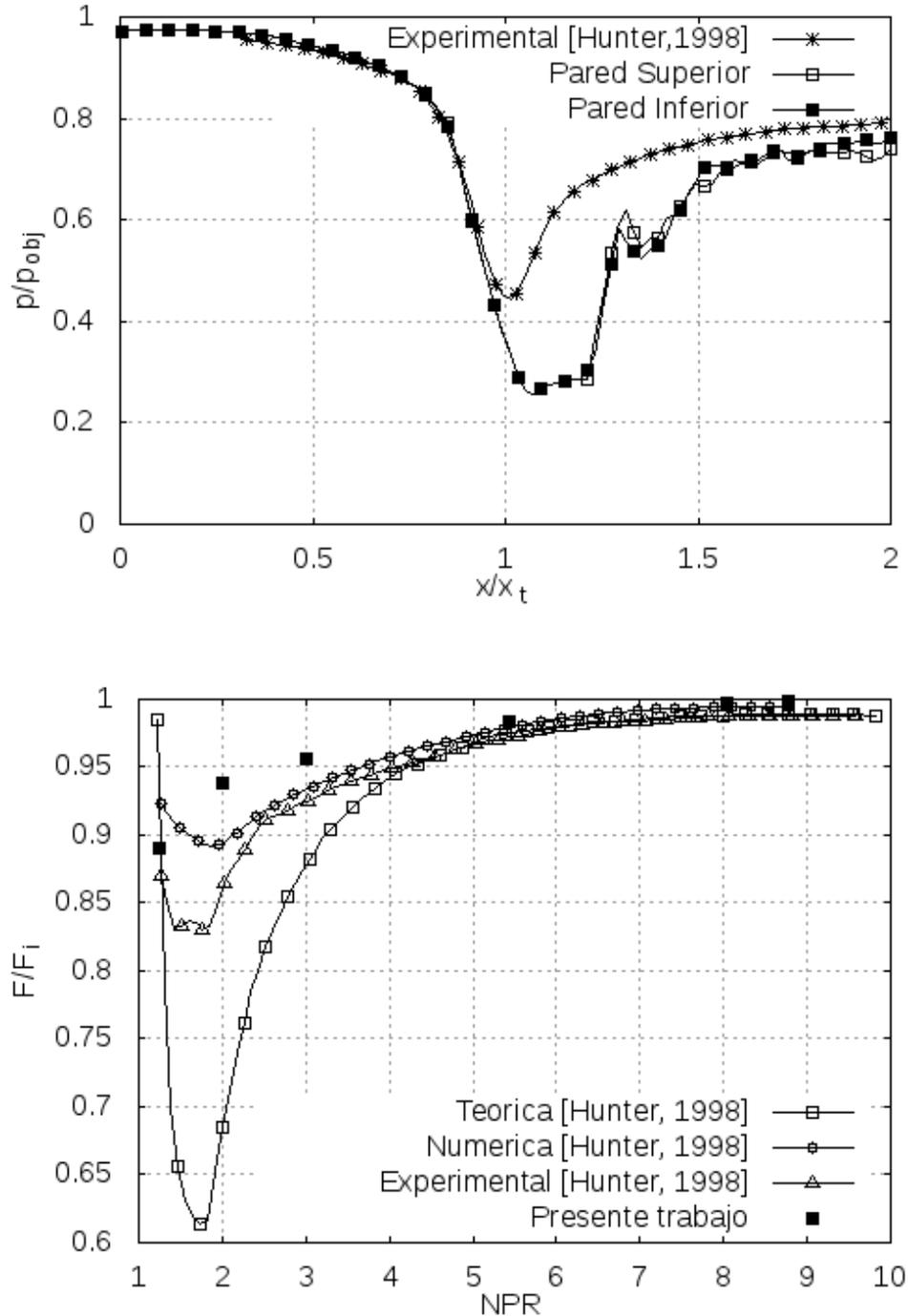


Tabla 3-16.: Validación de curvas de presión en la pared para $NPR = 1.255$ (arriba) y validación de eficiencia para diferentes NPRs (abajo)



Tabla 3-17.: Movimiento y asimetría de las ondas de choque para simulación con $NPR = 2.008$

4. Características del Flujo Turbulento Compresible en la Sección Divergente

En el presente capítulo se presenta el análisis de comportamiento turbulento del flujo compresible en la tobera seleccionada. En primer lugar se analizan las simulaciones realizadas para el estudio de independencia del malla presentado en el capítulo 3, las cuales se realizaron a la condición de diseño ($NPR = 8.78$). A continuación se hace un estudio similar con las simulaciones en condición sobre-expandida que se presentaron en el el capítulo 3 ($NPR = 1.255, 2.008, 3.014, 5.423, 8.037$ y 8.780).

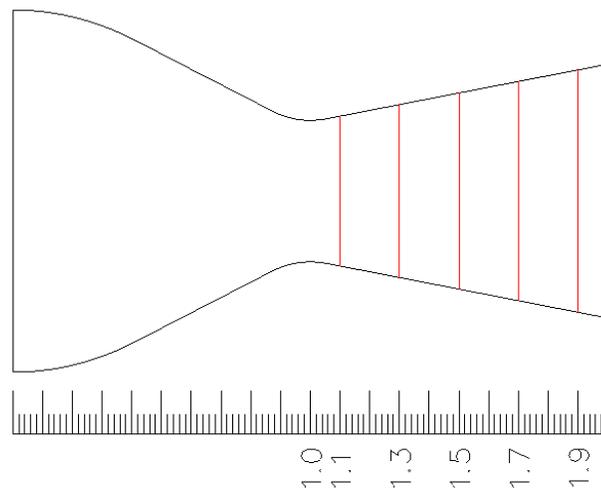


Figura 4-1.: Secciones transversales en las que se analiza el comportamiento de las propiedades del flujo.

A continuación se presentan y analizan los resultados de una simulación en condición de diseño aplicando una condición de entrada de presión oscilante. Por último, se presenta el análisis de simulaciones en tres dimensiones.

Dado que el perfil de la tobera convergente-divergente es variable a lo largo de la dirección del flujo, se decidió seleccionar secciones transversales para la toma de datos de las características del flujo turbulento. La sección de mayor interés en la tobera es la sección divergente, al menos desde el punto de vista de formación de ondas de choque, así como de la aparición de fenómenos tales como separación de capa límite entre otros.

Por esta razón se seleccionaron unas posiciones fijas, a lo largo del eje de la tobera para el estudio de las características turbulentas del flujo en la sección divergente. Estas secciones son: $x/x_t = 1,1$, $x/x_t = 1,3$, $x/x_t = 1,5$, $x/x_t = 1,7$ y $x/x_t = 1,9$, tal como se muestra en la figura 4-1.

En primer lugar se analizó el comportamiento del número de Mach, la presión, la temperatura y la densidad. Los últimos tres han sido normalizados por el valor promedio de cada propiedad en la sección transversal estudiada.

En las gráficas de la tabla 4-1 se muestran los resultados para tres tamaños de mallas diferentes, (110,140 celdas, 232,680 celdas y 387,800 celdas) para el NPR de diseño. Estos tamaños de malla corresponden a los usados en el estudio de independencia de malla presentado en el capítulo 3.

En las gráficas de la tabla 4-2 se muestran los resultados de las mismas variables para las simulaciones en condición sobre-expandida a valores de NPR = 1.255, 2.008, 3.014, 5.423, 8.037 y 8.780. Como se esperaba las gráficas para el número de Mach en la sección más cercana a la garganta ($x/x_t = 1,1$) colapsan. A medida que las secciones avanzan en la parte divergente de la tobera se va observando como los casos más sobre-expandidos tienen separación de la capa límite (NPR = 1.255 en $x/x_t = 1,3$ y NPR = 2.008 en $x/x_t = 1,5$).

Para la presión, la temperatura y la densidad tenemos un comportamiento común en la región cercana a la pared ($y/h \rightarrow 0$) para los diferentes NPR. Sin embargo, en la región central de la tobera ($y/h \rightarrow 1$) se observan variaciones debidas a la fluctuación de la densidad en esta región. Tales fluctuaciones se aprecian en las figuras de la tabla 4-3.

4.1. Estudio del efecto de la compresibilidad en la turbulencia

Según la hipótesis de Morkovin la dinámica del comportamiento de la capa límite en un flujo compresible se aproxima al comportamiento de la misma en un flujo incompresible siempre y cuando el número de Mach fluctuante (M_{RMS}) se mantenga por debajo de 0.3 [18].

Esto se puede entender también como un efecto bajo de la compresibilidad del flujo sobre su comportamiento turbulento. Si la hipótesis de Morkovin es valida, el flujo compresible se puede estudiar como si fuera incompresible, teniendo en cuenta el efecto de la variación local de la densidad.

Se realizó un estudio del efecto de la compresibilidad en la turbulencia. Para esto se obtuvo el comportamiento del número de Mach fluctuante. Tal cantidad se calcula como la raíz media cuadrática (conocida como *RMS*, siglas del término en inglés *Root Mean Square*) de

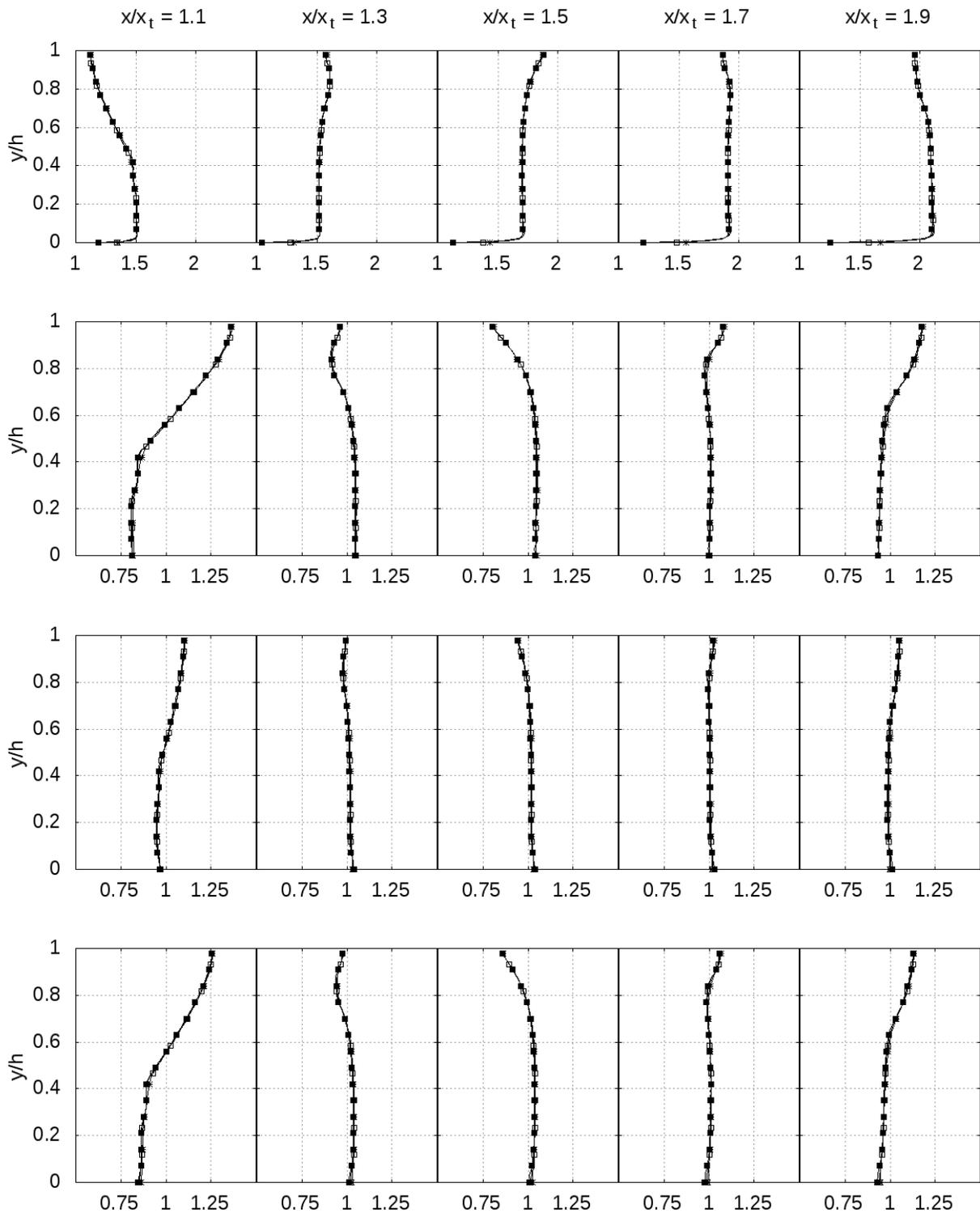


Tabla 4-1.: Comportamiento en las secciones transversales de diferentes posiciones de la parte divergente de la tobera para las siguientes propiedades (de arriba a abajo): número de Mach (Ma), presión (p/\bar{p}), temperatura (T/\bar{T}) y densidad ($\rho/\bar{\rho}$).

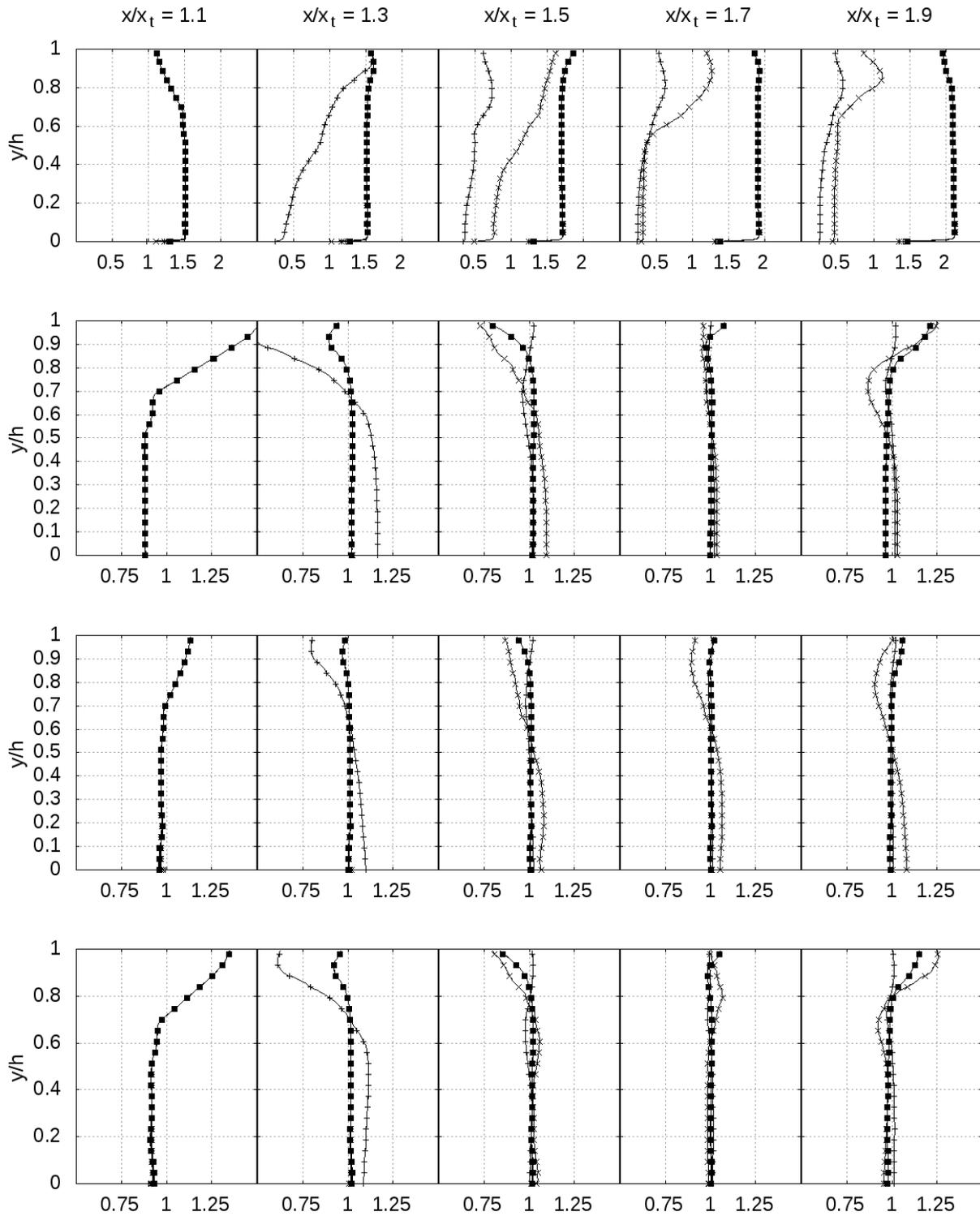


Tabla 4-2.: Comportamiento del número de Mach (Ma), la presión (p/\bar{p}), la temperatura (T/\bar{T}) y la densidad ($\rho/\bar{\rho}$) para diferentes NPRs en la sección transversal de diferentes posiciones de la parte divergente de la tobera.

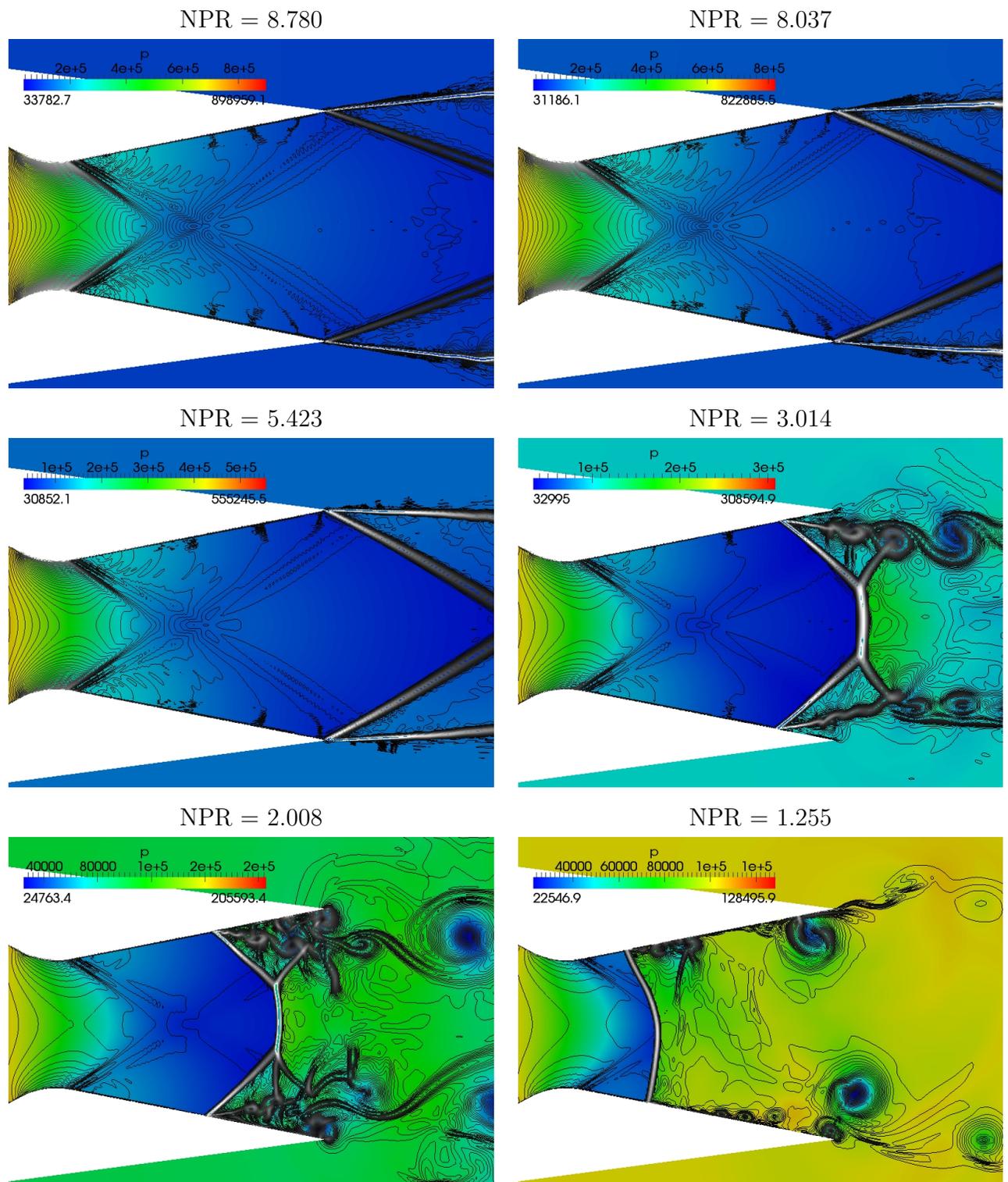


Tabla 4-3.: Gráficas del gradiente de densidad (contornos en blanco y negro) superpuestas sobre el campo de presión (color), para diferentes valores de NPR.

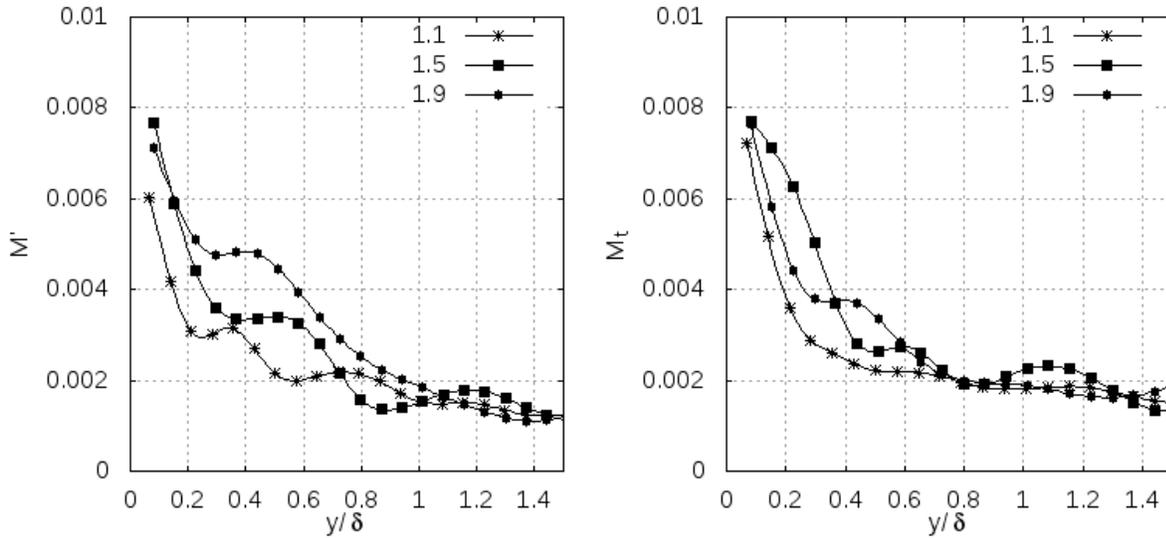


Figura 4-2.: RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 8.78 y 100,000 celdas en el dominio

las fluctuaciones del número de Mach,

$$M_{RMS} = \sqrt{\overline{M'^2}}. \quad (4-1)$$

Un término alternativo que se puede utilizar para determinar tal efecto es el número de Mach turbulento (M_t). El M_t se define como el RMS de la velocidad dividido por el promedio de la velocidad del sonido local,

$$M_t = \frac{\sqrt{\overline{U'^2}}}{\bar{a}}. \quad (4-2)$$

Las gráficas 4-2 (100k celdas), 4-3 (232k celdas) y 4-4 (387k celdas) muestran el comportamiento de estos números de Mach para las estaciones seleccionadas en la sección divergente de la tobera y NPR de diseño.

Como se puede observar en las gráficas 4-2, 4-3 y 4-4 todos los valores de los números de Mach descritos están por debajo de 0.3, lo cual indica que las fluctuaciones de la turbulencia no tienen un efecto de compresibilidad que cambie las propiedades locales de la misma.

Para las simulaciones con diferentes NPRs se realizó un estudio de compresibilidad similar. Se recuerda que las simulaciones para diferentes NPR se realizaron con una discretización de dominio que concentra más celdas en la región cercana a la pared (figura 3-13).

Las figuras 4-5, 4-6, 4-7, 4-8, 4-9 y 4-10 muestran el comportamiento del RMS del número de Mach (M_{RMS}) y del número de Mach turbulento (M_t) para cada uno de los valores de NPR simulados.

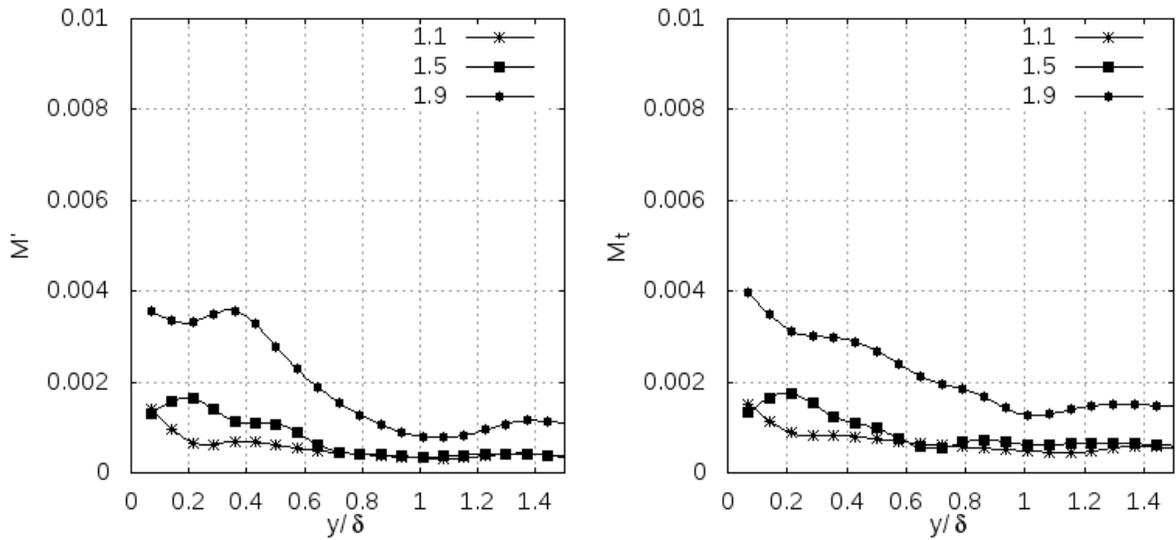


Figura 4-3.: RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para $NPR = 8.78$ y 232,000 celdas en el dominio

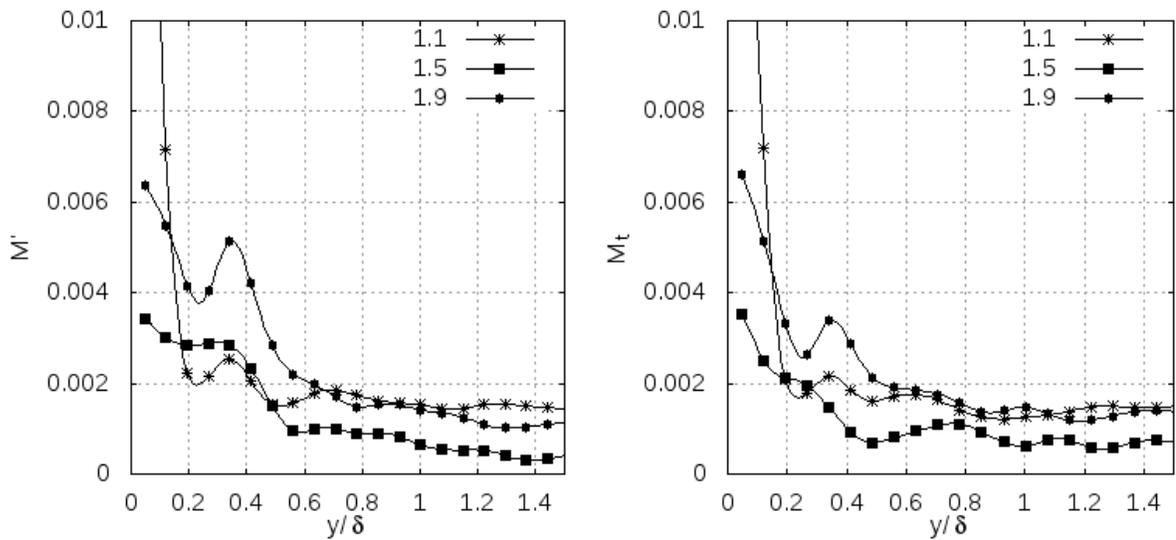


Figura 4-4.: RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para $NPR = 8.78$ y 387,000 celdas en el dominio

Como se puede observar las gráficas para cada sección de la tobera colapsan y los valores están muy por debajo de 0.3, lo cual indica que las fluctuaciones de la turbulencia no son afectadas por efectos de compresibilidad que cambien las propiedades globales de la misma.

En la región más cercana a la pared ($y/\delta \rightarrow 0$) se tiene un pico en todas las gráficas el cual es debido al fuerte gradiente de velocidad que se da por la condición de no deslizamiento impuesta en las paredes de la tobera. Este pico incrementa su valor en la medida que disminuye el NPR indicando que los efectos de la compresibilidad en la turbulencia son más incluyentes para gradientes de presión más bajos.

La figura 4-7 que muestra los resultados para $\text{NPR} = 5.423$ presenta un comportamiento diferente a las de los demás valores. Las figuras de las siguientes secciones para este valor de NPR muestran una tendencia similar. En particular, las curvas de los RMS de las variables analizadas (M_{RMS} y M_t en la figura 4-7, T_{RMS}/\bar{T} , p_{RMS}/\bar{p} y $\rho_{RMS}/\bar{\rho}$ en las figuras de la tabla 4-9; y $U_{x,RMS}$, $U_{y,RMS}$ en las figuras de la tabla 4-11) muestran el mismo comportamiento: valores muy grandes en la sección cercana a la garganta y un descenso abrupto aproximadamente en el 60% de la capa límite para todas las secciones en la parte divergente de la tobera.

Dado que en las simulaciones con los demás valores de NPR no se presenta este comportamiento, y que el valor de $\text{NPR} = 5.423$ está alejado de los demás valores analizados (como se puede apreciar en la figura de eficiencia de empuje en la tabla 3-16), se propone la hipótesis de que este comportamiento es propio de los valores de NPR cercanos a 5.423 en la tobera seleccionada. Dentro de las recomendaciones del presente trabajo se plantea estudiar este comportamiento.

Del estudio de compresibilidad se concluyó inicialmente que el comportamiento de la capa límite en el flujo compresible del presente trabajo se aproxima al comportamiento de la misma en un flujo incompresible en condiciones de flujo similares.

Vale la pena resaltar que, sin embargo, la divergencia de la geometría altera las principales características de la capa límite en comparación con otros flujo canónicos, como por ejemplo, el de un canal turbulento, como se mostrará a continuación.

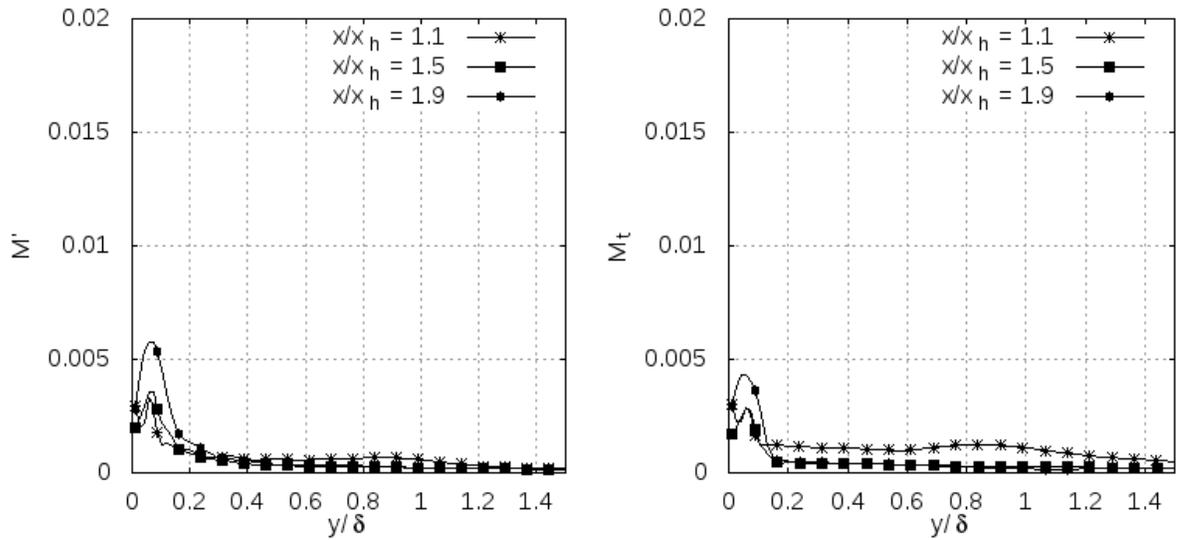


Figura 4-5.: RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 8.78

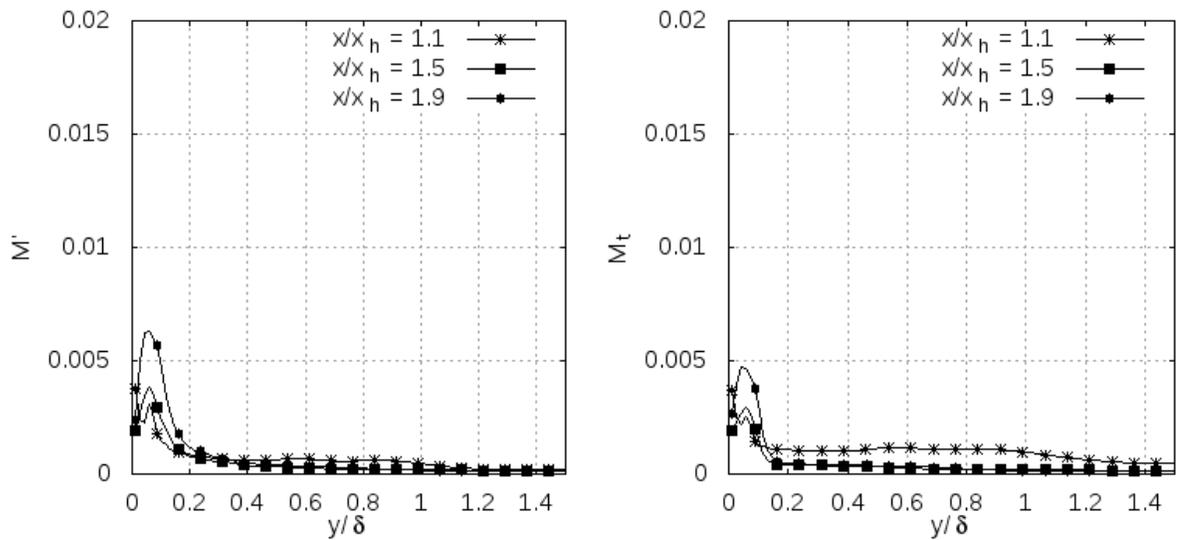


Figura 4-6.: RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 8.037

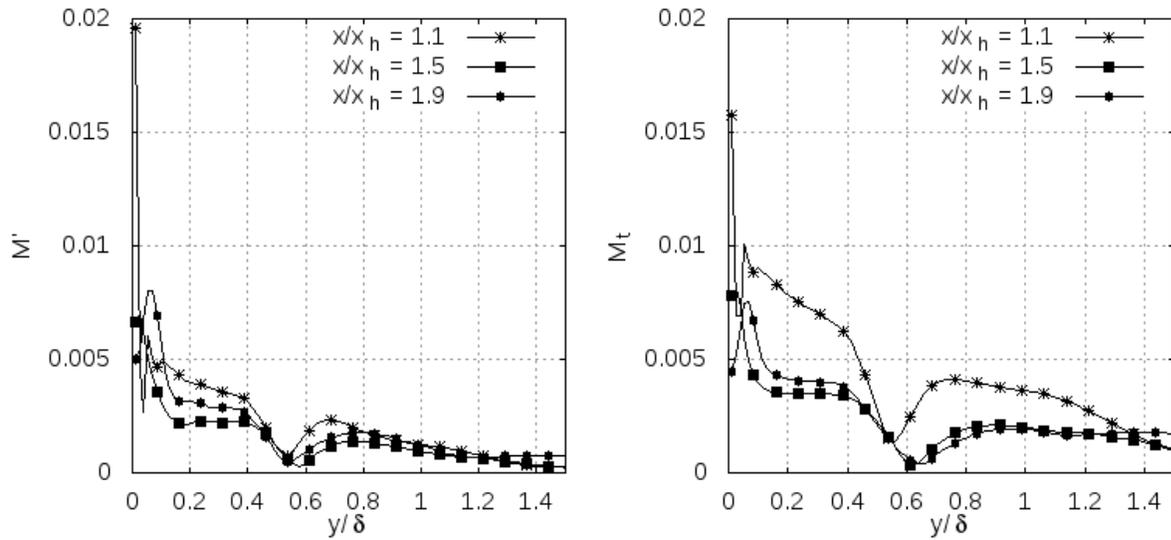


Figura 4-7.: RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para $NPR = 5.423$

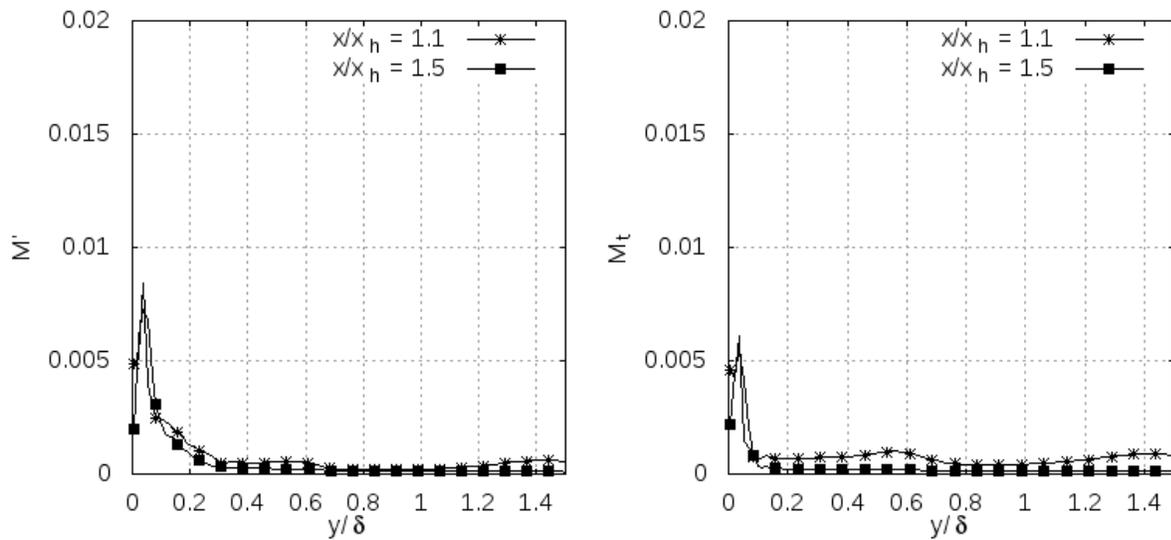


Figura 4-8.: RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para $NPR = 3.014$

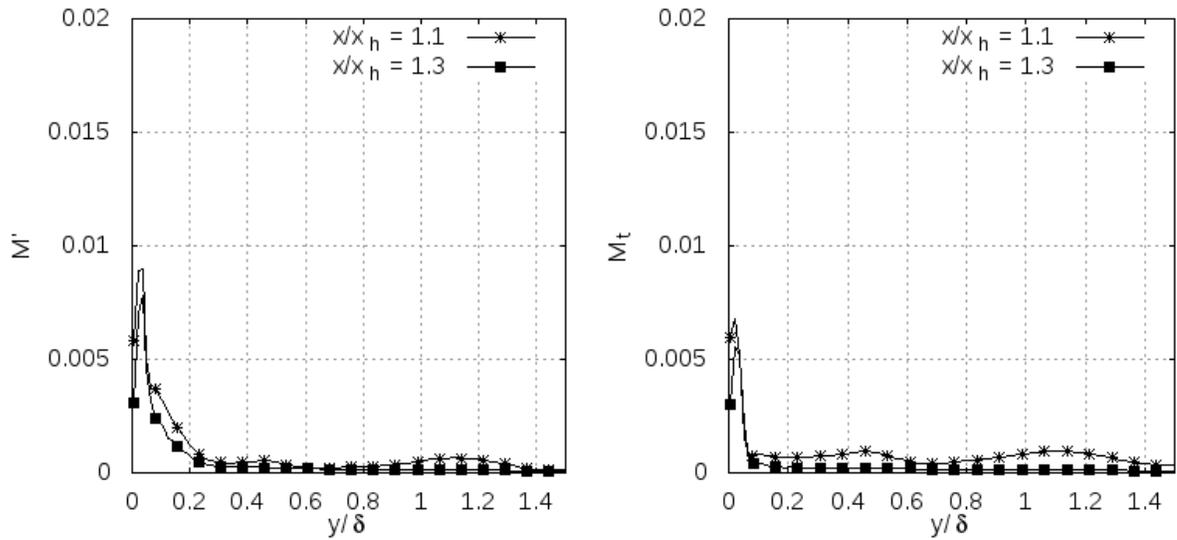


Figura 4-9.: RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 2.008

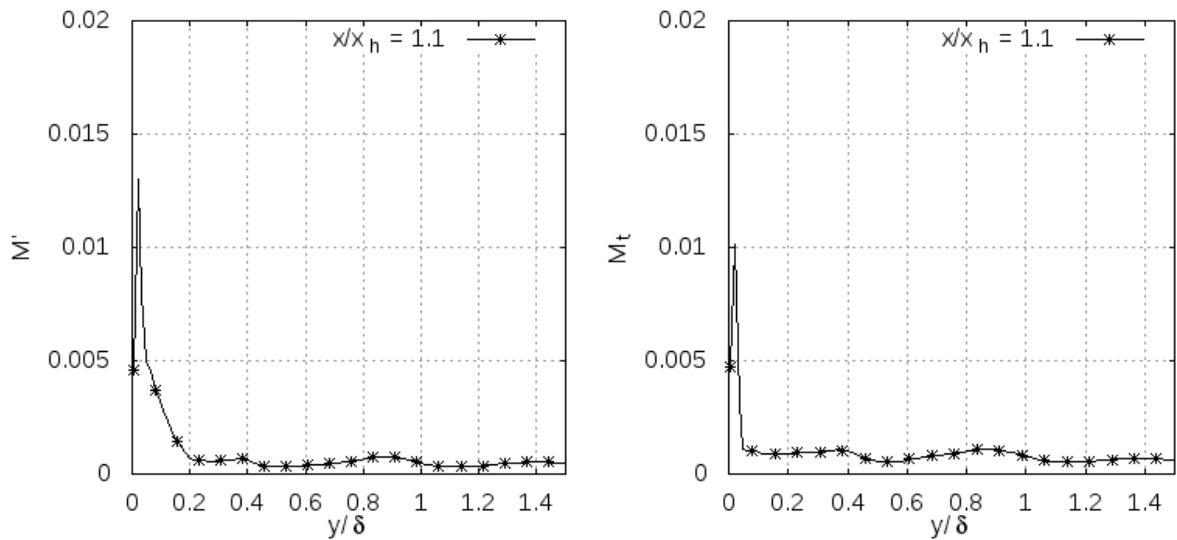


Figura 4-10.: RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 1.255

4.2. Comparación con la Ley de la Pared en flujos incompresibles

Es ampliamente aceptado que la hipótesis de Morkovin no aplica a flujos bajo la influencia de gradientes de presión longitudinal favorables o adversos [19]. Para poder definir si esta hipótesis es válida en las simulaciones del presente trabajo, se compararon las gráficas de la magnitud de la velocidad adimensional en unidades de pared (U^+). Este análisis se realizó tanto con como sin consideración del efecto de la variación local de la densidad.

Se graficó el comportamiento de la velocidad en unidades de pared (normalizada por la velocidad de fricción) con respecto a la distancia normal a la pared en unidades de pared (y^+). Al mismo tiempo se graficó la velocidad normalizada usando la transformada de Van Driest.

$$U_c = \int_0^{\bar{u}} \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_w} \right)^{\frac{1}{2}} d\bar{u}. \quad (4-3)$$

La Transformada de Van Driest permite ponderar la densidad en el flujo compresible (observarse que para flujo incompresible el factor $\frac{\bar{\rho}}{\rho_w}$ es igual a 1). Esta velocidad se normaliza también con la velocidad de fricción y se grafica con respecto a la distancia normal a la pared en unidades de pared (y^+) de forma similar.

Estudios numéricos como los de [19], [20], [21] han mostrado que al aplicar esta transformación a simulaciones con flujos supersónicos sin gradientes de presión las curvas de U_c^+ en función de y^+ cumplen con los parámetros de la Ley de la Pared introducida por Von Karman y Prandtl.

En las figuras **4-11**, **4-12** y **4-13** se muestran las gráficas descritas en los párrafos anteriores para las simulaciones del estudio de independencia de malla del capítulo 3. Se trazan en estas las líneas para $U^+ = y^+$ y para la Ley Logarítmica siguiendo los lineamientos de la Ley de la Pared para flujos incompresibles.

Se observa en las figuras **4-11**, **4-12** y **4-13** que el tamaño de las celdas más cercanas a la pared no permite captar información del comportamiento turbulento del flujo en la capa viscosa.

En el caso de las gráficas de U^+ se logra observar una sección (en la capa inercial $y^+ \cong 100$) donde las curvas cumplen la Ley Logarítmica. Esta sección va descendiendo en la medida que se aumenta la cantidad de celdas con las que se discretiza el dominio. Los valores de los parámetros de la Ley Logarítmica para esta sección se listan en la tabla **4-4**.

En el caso de las gráficas de U_c^+ las curvas se alejan de lo descrito en la Ley de la Pared.

Para las simulaciones con diferentes NPR se realizó igualmente la comparación con la Ley de la Pared en flujos incompresibles. Valores de NPR bajos significan gradientes favorables

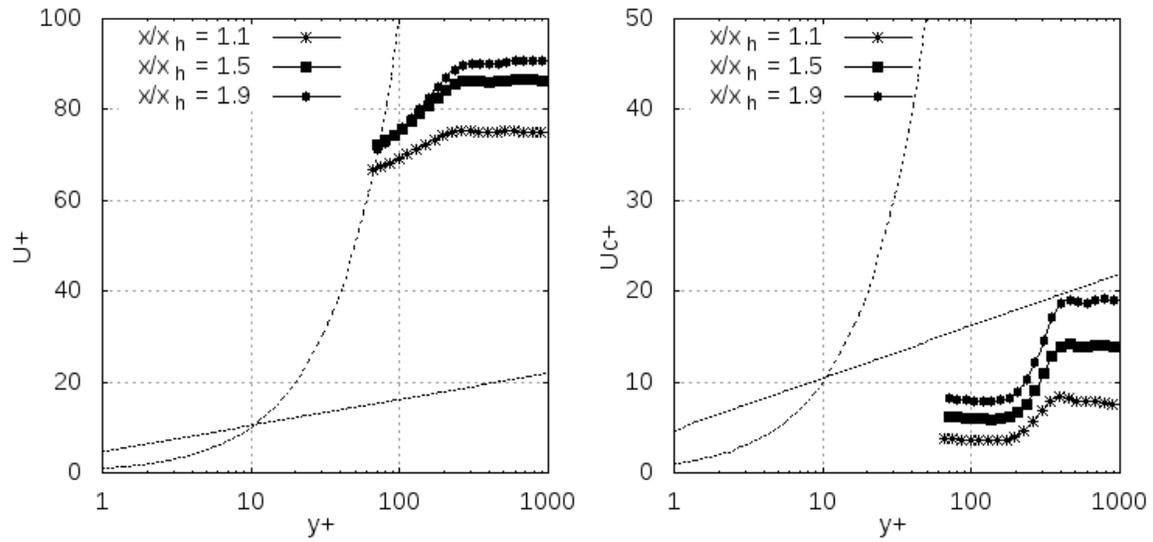


Figura 4-11.: (a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para $NPR = 8.78$ y 100,000 celdas en el dominio

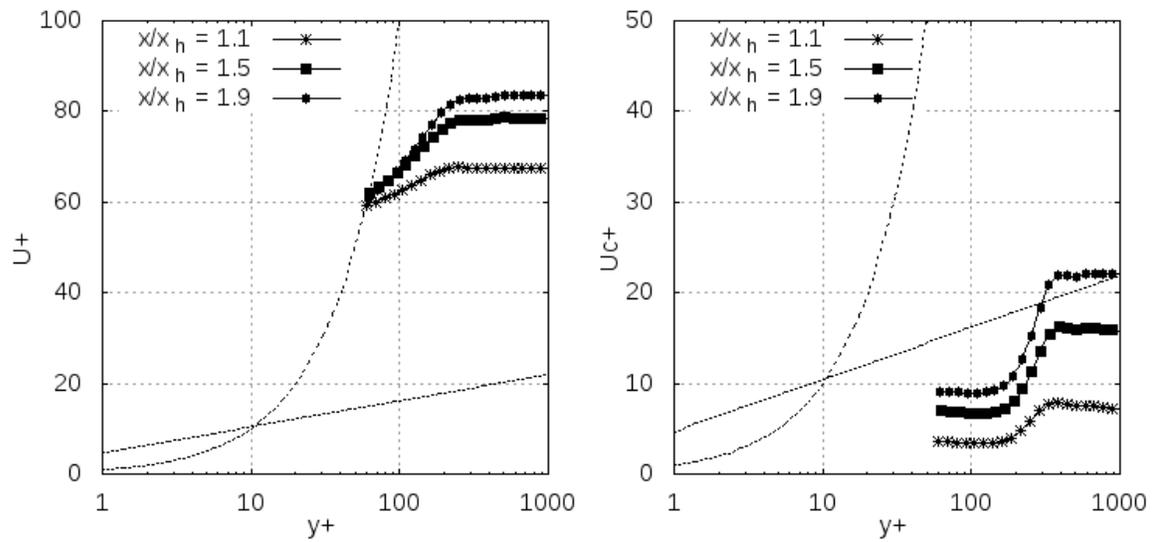


Figura 4-12.: (a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para $NPR = 8.78$ y 232,000 celdas en el dominio

Celdas	k	B
110, 140	0.1	30
232,680	0.088	15
387,800	0.065	-15

Tabla 4-4.: Parámetros de la Ley Logarítmica para las simulaciones del estudio de independencia de malla.

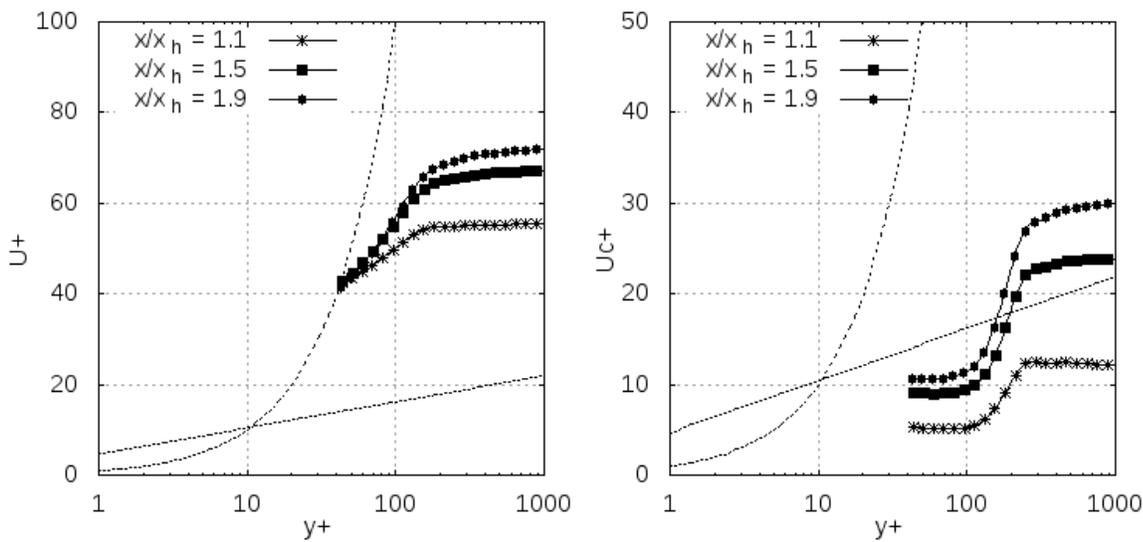


Figura 4-13.: (a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para $\text{NPR} = 8.78$ y 387,000 celdas en el dominio

de presión longitudinal bajos. Por lo anterior se esperaría que la hipótesis de Morkovin fuera válida para simulaciones con NPR bajos.

Para poder definir si esta hipótesis es válida en las simulaciones con diferente NPR, se compararon las gráficas de la magnitud de la velocidad adimensional (U^+) teniendo en cuenta y sin tener en cuenta el efecto de la variación local de la densidad.

Se graficó el comportamiento de la velocidad adimensionalizada por la velocidad de fricción ($U^+ = \frac{u}{u_*}$ donde u_* es la velocidad de fricción) con respecto a la distancia normal a la pared en unidades de pared (y^+). Al mismo tiempo se graficó la velocidad afectada por la transformada de Van Driest ($U_c^+ = \frac{U_c}{u_*}$).

Las figuras 4-14, 4-15, 4-16, 4-17, 4-18 y 4-19 muestran las gráficas descritas en los párrafos anteriores. Se trazan en estas las líneas para $U^+ = y^+$ y para la Ley Logarítmica ($k=0.4$

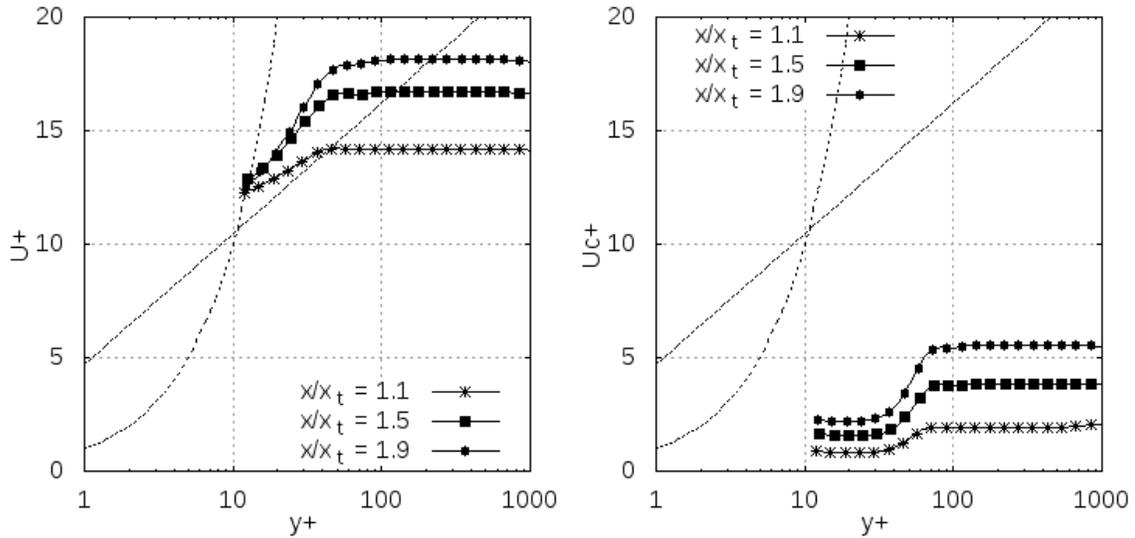


Figura 4-14.: (a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para $NPR = 8.78$

y $B=4.7$) siguiendo los lineamientos de la Ley de la Pared para flujos incompresibles.

Como se puede observar en estas gráficas el comportamiento es muy similar a lo observado en las simulaciones con NPR de diseño. Cabe aclarar que la discretización del dominio con mayor cantidad de celdas en el estudio de independencia de malla tenía 387k celdas, en las simulaciones para los diferentes valores de NPR se usó una malla de 246k celdas. Por este motivo las gráficas de la figura 4-14 empiezan en $y^+ \cong 12$ y $U^+ \cong 12$, mientras que las de la figura 4-13 empiezan en $y^+ \cong 40$ y $U^+ \cong 40$ a pesar de estar simulando el mismo NPR.

En las figuras 4-14 a la 4-19 se observa que al ir disminuyendo el valor de NPR el punto donde empiezan las curvas se acerca al origen. Esto indica que con la misma malla se capta mejor el comportamiento de la turbulencia en la región cercana a la pared para NPR bajos.

En forma similar a lo obtenido en las simulaciones con NPR de diseño para estas gráficas, la transformada de Van Driest falla al tratar de aproximar el comportamiento del flujo compresible al de uno homogéneo en el rango de flujo incompresible.

4.3. Comportamiento de Re_{δ^*} , Re_θ y Re_τ

A continuación se analizaron los números de Reynolds medidos con respecto al espesor de desplazamiento de la capa límite (δ^*) y al espesor de la capa límite basado en la cantidad de movimiento (θ).

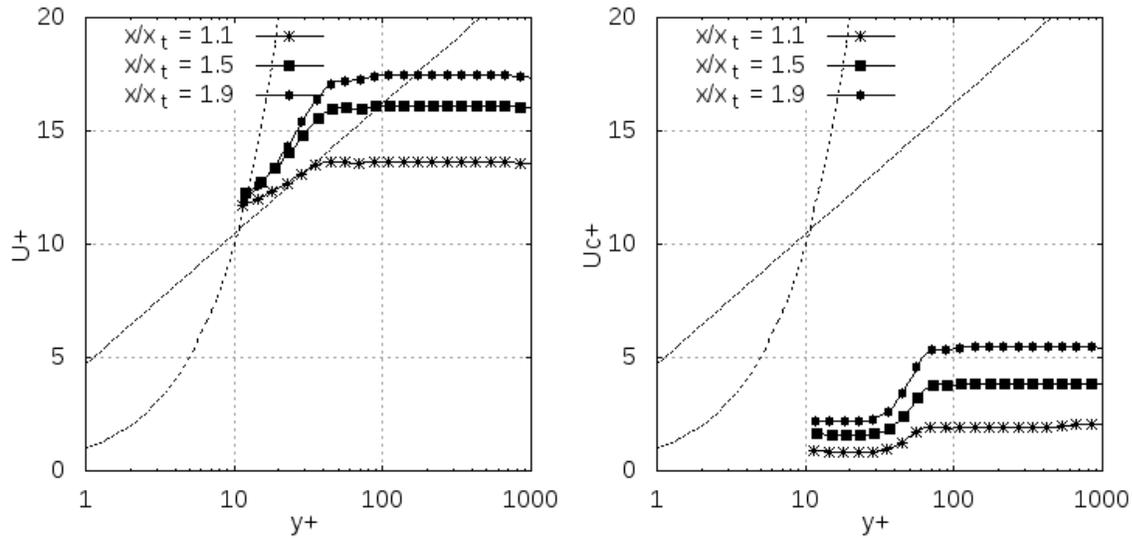


Figura 4-15.: (a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para NPR = 8.037

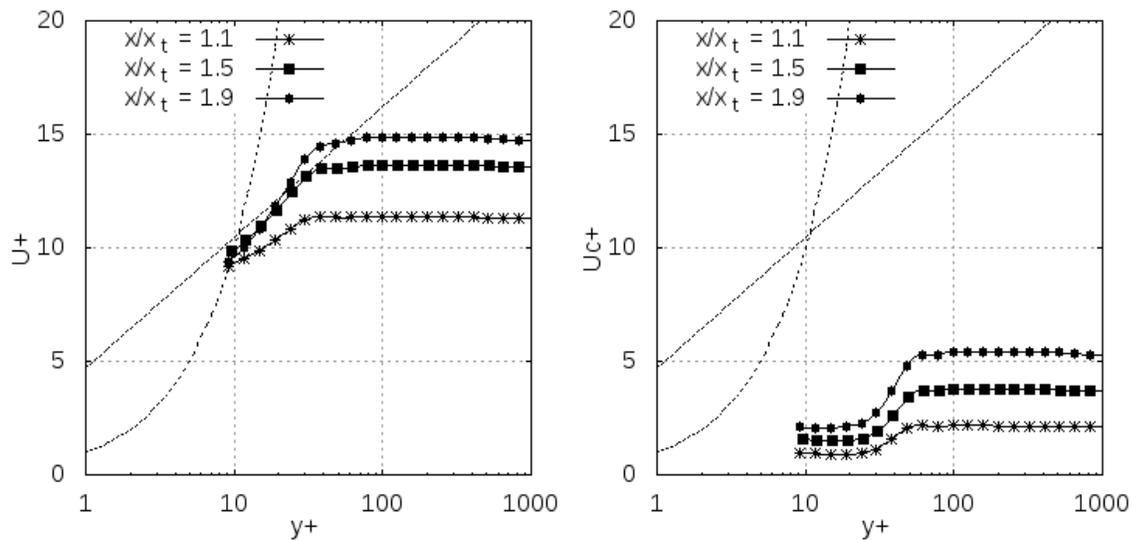


Figura 4-16.: (a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para NPR = 5.423

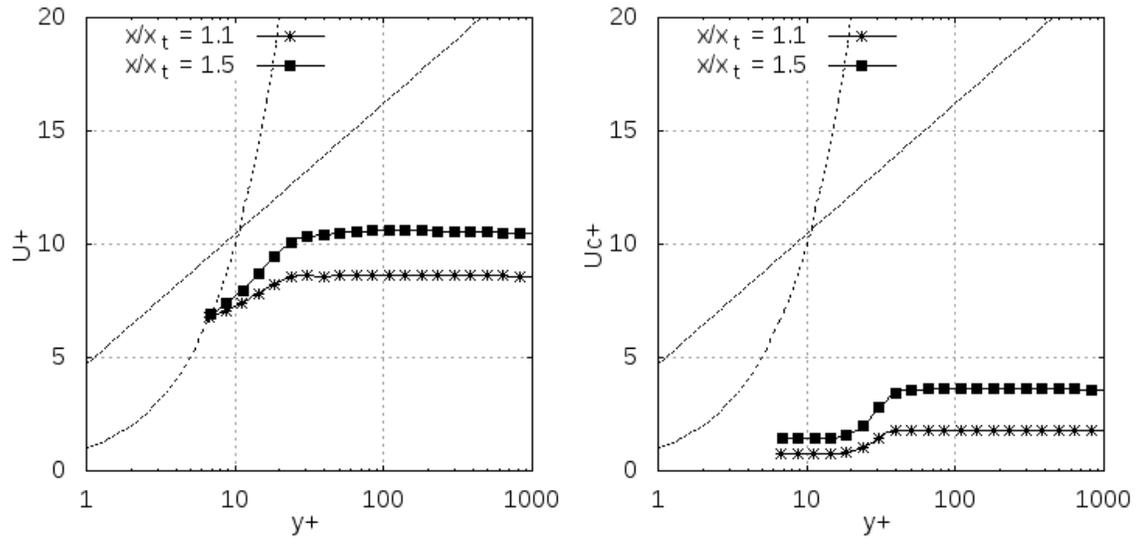


Figura 4-17.: (a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para $NPR = 3.014$

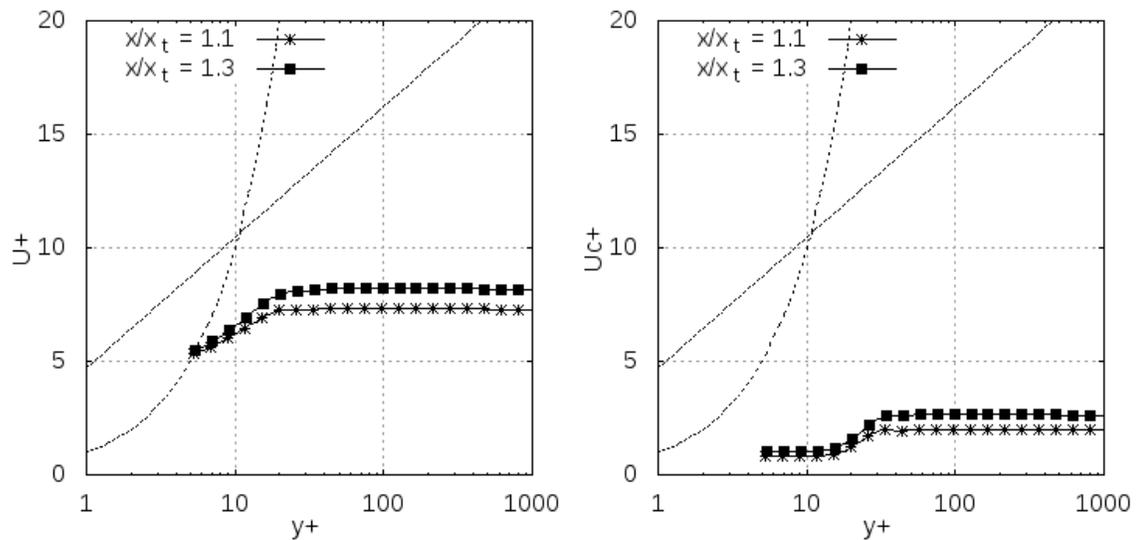


Figura 4-18.: (a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para $NPR = 2.008$

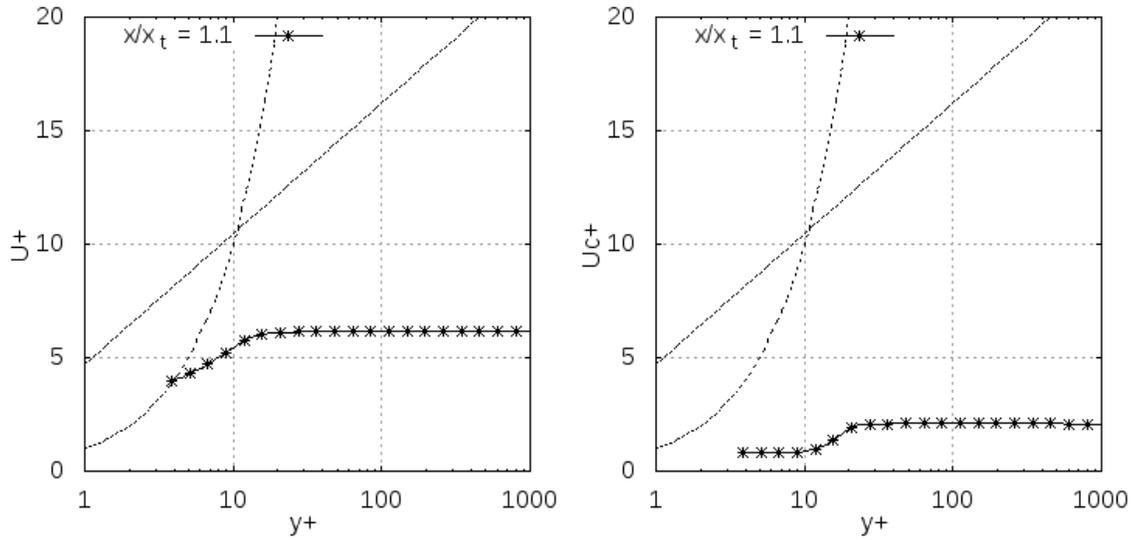


Figura 4-19.: (a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para $NPR = 1.255$

El espesor de desplazamiento de la capa límite se puede interpretar como la diferencia entre el grosor de la capa límite y el espesor de una corriente que tuviese la misma velocidad que la corriente exterior y transportase la misma masa de fluido (caudal) que la capa límite real.

Para un flujo compresible el espesor de desplazamiento de la capa límite es

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho(y)U(y)}{\rho_e U_e} \right) dy, \quad (4-4)$$

donde δ es el grosor de la capa límite y U_e y ρ_e son la velocidad y la densidad en la corriente exterior respectivamente. El número de Reynolds con respecto al espesor de desplazamiento de la capa límite es

$$Re_{\delta^*} = \frac{U_e \delta^*}{\nu_e}, \quad (4-5)$$

donde ν_e es la viscosidad cinemática en la corriente exterior.

El espesor de la capa límite basado en la cantidad de movimiento se puede interpretar como el espesor de una corriente fluida que tenga la misma velocidad que la corriente exterior, y la misma cantidad de movimiento que la debida a la fuerza de arrastre de la capa límite real.

Para un flujo compresible el espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite es

$$\theta = \int_0^\delta \frac{\rho(y)U(y)}{\rho_e U_e} \left(1 - \frac{U(y)}{U_e} \right) dy. \quad (4-6)$$

El número de Reynolds con respecto al espesor de la cantidad de movimiento de la capa

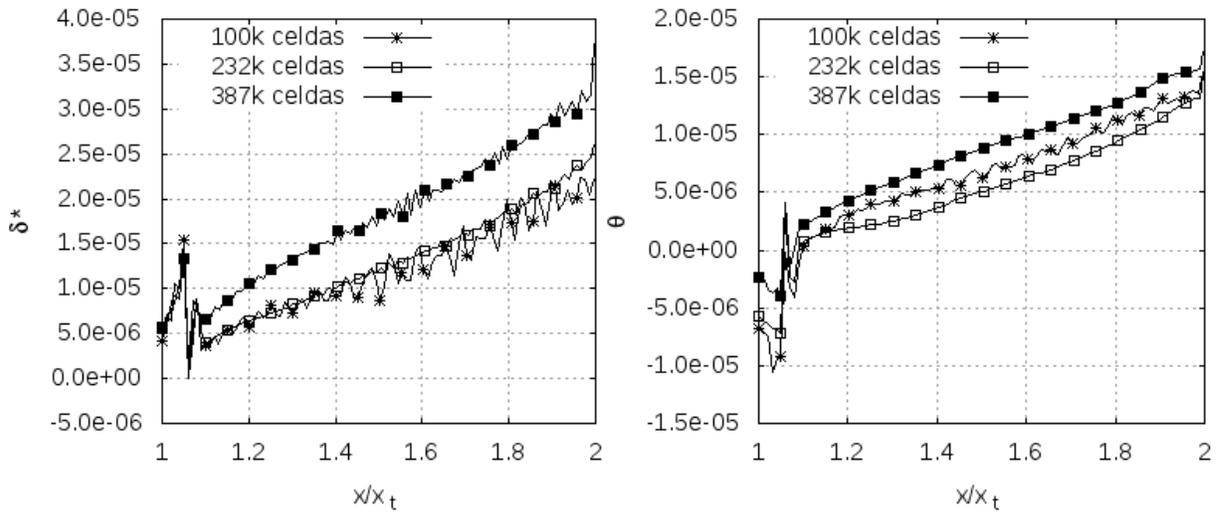


Figura 4-20.: Espesor de desplazamiento δ^* y espesor de la cantidad de movimiento θ , a lo largo de la sección divergente para diferente cantidad de celdas en el dominio

límite es

$$Re_\theta = \frac{U_e \theta}{\nu_e}. \quad (4-7)$$

En las figuras 4-20 se muestra el comportamiento de δ^* y θ a lo largo de la sección divergente de la tobera para las simulaciones con mallas de 100k, 232k y 387k celdas. Como se observa en estas gráficas, los espesores representados por δ^* y θ aumentan en la medida que va avanzando la sección divergente de la tobera. Esto indica que la cantidad de masa de fluido y la cantidad de movimiento en la capa límite aumentan en la misma dirección.

Los valores negativos que presenta θ cerca a la garganta se deben a las fuerte fluctuación de la densidad en esta sección.

En las figuras 4-21 se muestra el comportamiento de los número de Reynolds Re_{δ^*} y Re_θ a lo largo de la sección divergente de la tobera para las simulaciones del estudio de independencia de malla del capítulo 3. Como se puede observar los números de Reynolds aumentan proporcionalmente al aumento del espesor de desplazamiento de la capa límite y del espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite.

El número de Reynolds de fricción Re_τ relaciona las fuerzas inerciales en la capa límite (velocidad de fricción y grosor de capa límite) con las fuerzas viscosas

$$Re_\tau = \frac{u_\tau \delta}{\nu}. \quad (4-8)$$

La tabla 4-5 muestra el comportamiento del número de Reynolds de fricción a lo largo de la parte divergente de la tobera. Como se observa las gráficas para las simulaciones de 232k

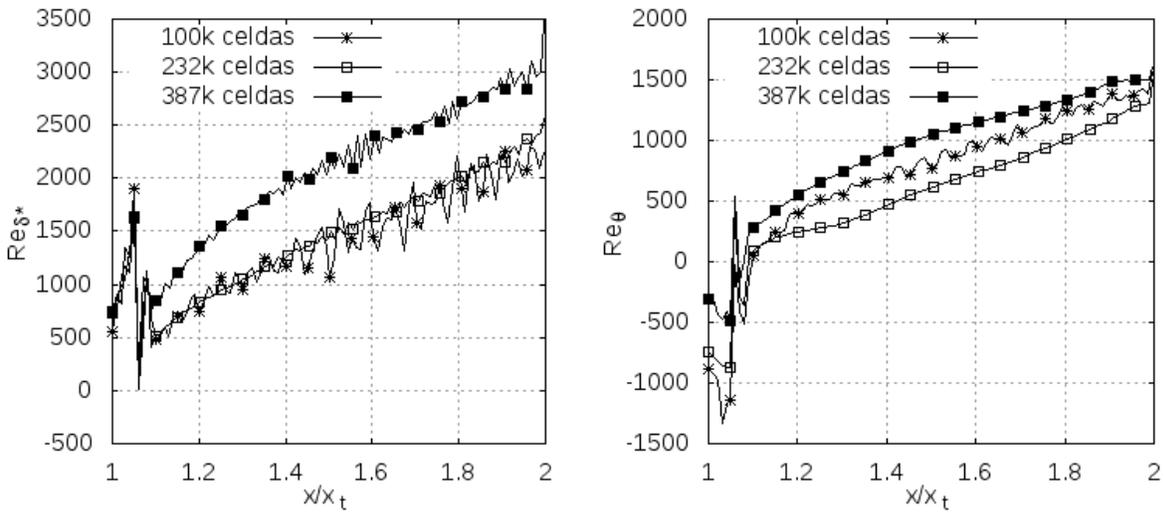


Figura 4-21.: Número de Reynolds con respecto al espesor de desplazamiento Re_{δ^*} y número de Reynolds con respecto al espesor de la cantidad de movimiento Re_{θ} , a lo largo de la sección divergente para diferente cantidad de celdas en el dominio

celdas y 387k celdas colapsan y el valor de Re_{τ} se mantiene alrededor de 900. Al igual que para el espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite, cerca a la garganta las fluctuaciones de la densidad y del esfuerzo cortante en la pared (tabla 4-5) hacen que los valores de Re_{τ} oscilen fuertemente.

Las figuras 4-22 muestran el comportamiento del espesor de desplazamiento y del espesor de la cantidad de movimiento para las simulaciones con diferentes valores de NPR. Como se puede observar el comportamiento del espesor de desplazamiento es ascendente en la dirección en que aumenta la sección divergente de la tobera. Este mismo comportamiento se observa para las simulaciones con el NPR de diseño, sin embargo, en las de NPR diferentes las curvas están dos órdenes de magnitud por debajo. Esta diferencia se debe a la mayor cantidad de celdas en la capa límite de las simulaciones para diferentes NPR (3-13)

También se observa que para la simulación de $NPR = 5.423$ la curva del grosor de desplazamiento disminuye. Este comportamiento también debe ser analizado en el estudio recomendado como continuación del presente trabajo.

A diferencia del espesor de desplazamiento, la tendencia de las curvas del espesor de la cantidad de movimiento es a disminuir en la medida que aumenta la sección divergente de la tobera. Esto es contrario a lo observado en las simulaciones con el NPR de diseño y se puede atribuir al mayor refinamiento de la malla en la sección cercana a las paredes.

Las figuras 4-23 muestran el comportamiento los números de Reynolds con respecto al es-

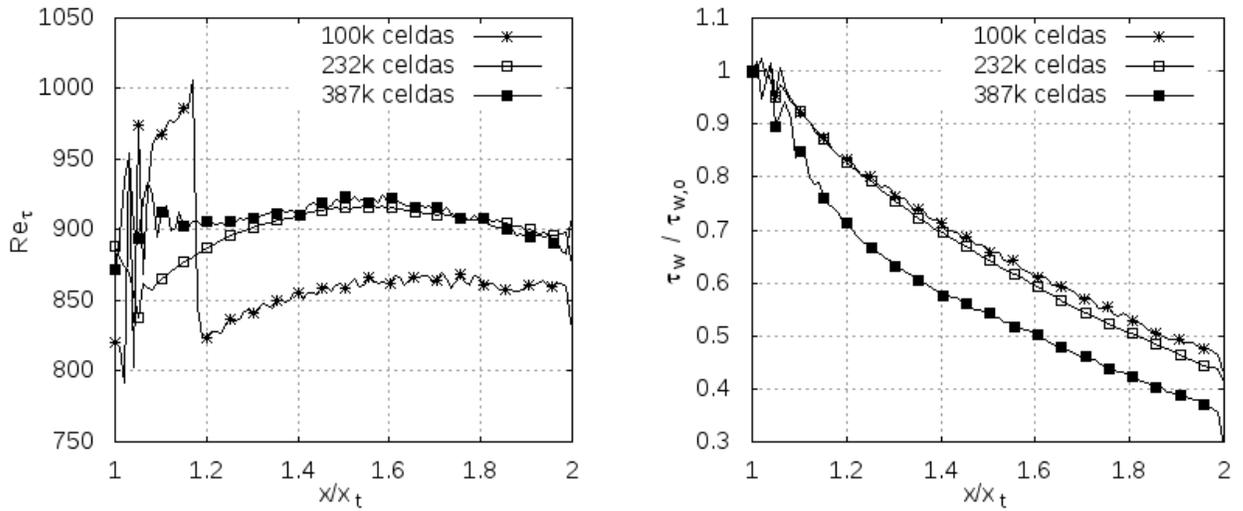


Tabla 4-5.: Comportamiento del número de Reynolds de fricción (Re_τ) y el esfuerzo cortante en la pared normalizado con el valor de la garganta ($\tau_w/\tau_{w,o}$) a lo largo de la parte divergente de la tobera.

pesor de desplazamiento y al espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite, para las simulaciones con diferentes valores de NPR. Estas siguen el comportamiento del espesor de desplazamiento y del espesor de la cantidad de movimiento respectivamente.

En todas las figuras de esta sección se muestran los valores de las variables a lo largo de la sección transversal. Para aquellos valores de NPR en los que se presenta separación de capa límite, solo se presenta la gráfica hasta el punto donde se da esta separación.

Las figuras de la tabla 4-6 muestran el comportamiento del número de Reynolds de fricción y del esfuerzo cortante en la pared para las simulaciones con diferentes valores de NPR. El primero (Re_τ) muestra un comportamiento similar al presentado en las simulaciones del estudio de independencia de malla. Sin embargo, el valor promedio en este caso es de $Re_\tau \cong 970$ lo cual se puede atribuir a la mayor cantidad de celdas presentes en la capa límite en estas simulaciones.

Para la figura del esfuerzo cortante en la pared, las gráficas colapsan y muestran la misma tendencia que el de las simulaciones que se realizaron para el NPR de diseño.

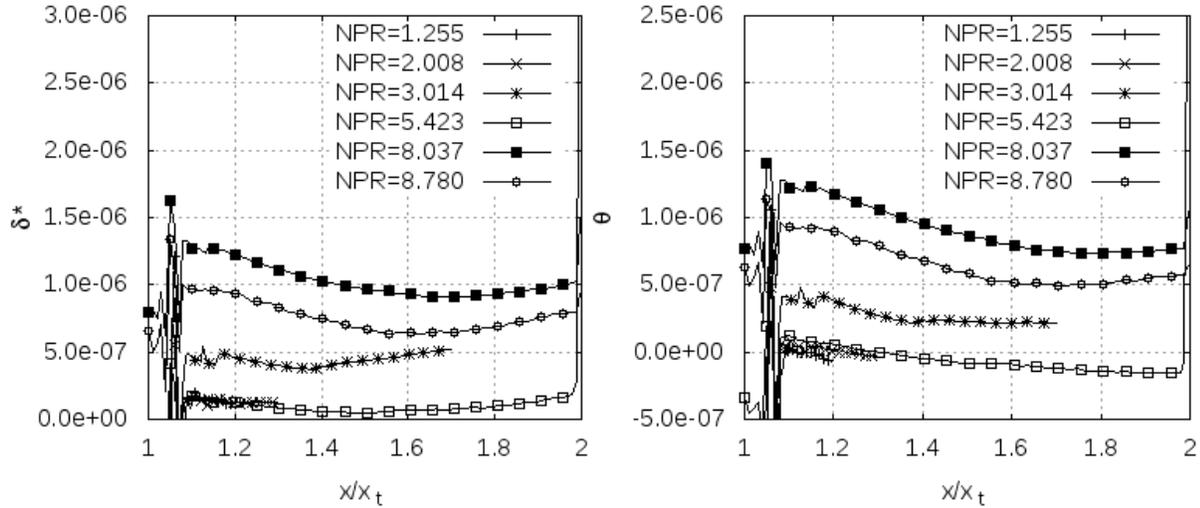


Figura 4-22.: (a) Espesor de desplazamiento δ^* y (b) espesor de la cantidad de movimiento θ , a los largo de la sección divergente para diferentes valores de NPR

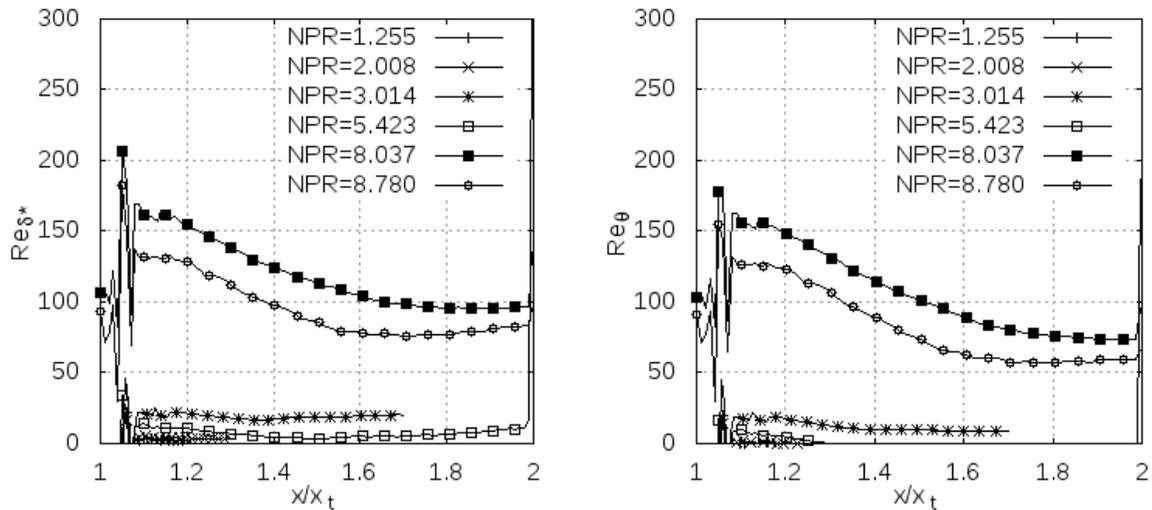


Figura 4-23.: (a) Número de Reynolds con respecto al espesor de desplazamiento Re_{δ^*} y (b) Número de Reynolds con respecto al espesor de la cantidad de movimiento Re_{θ} , a los largo de la sección divergente para diferentes valores de NPR

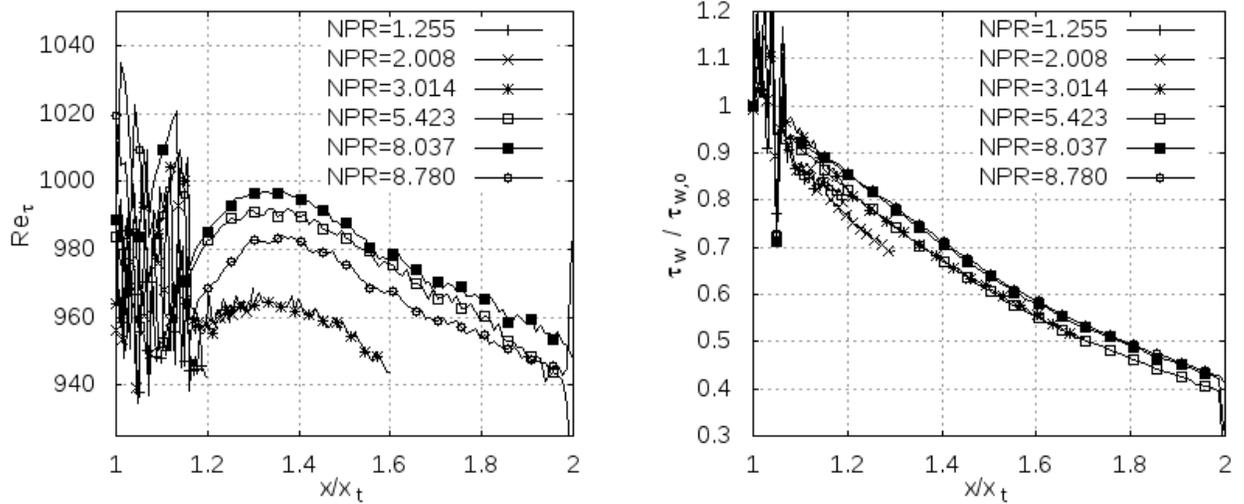


Tabla 4-6.: Comportamiento del número de Reynolds de fricción (Re_τ) y el esfuerzo cortante en la pared normalizado con el valor de la garganta ($\tau_w/\tau_{w,0}$) a lo largo de la parte divergente de la tobera para diferentes valores de NPR.

4.4. Perfiles de los valores de RMS

Las figuras de la tabla 4-7 muestran los valores de los RMS de la temperatura, la densidad y la presión para las simulaciones con el NPR de diseño, en las diferentes secciones transversales de la parte divergente de la tobera.

Las figuras de la tabla 4-8 muestran los valores de los RMS de las componentes de la velocidad en la dirección del flujo y normal a la pared, para las simulaciones del estudio de independencia de malla, en las diferentes secciones transversales de la parte divergente de la tobera.

Se observa en todas estas gráficas que la cantidad de celdas utilizadas no permite capturar el comportamiento de las fluctuaciones de todas estas propiedades del flujo.

Las figuras de las tablas 4-9 y 4-10 muestran los valores de los RMS de la temperatura, la densidad y la presión para las simulaciones con diferentes valores de NPR, en las diferentes secciones transversales de la parte divergente de la tobera.

Las figuras de las tablas 4-11 y 4-12 muestran los valores de los RMS de las componentes de la velocidad en la dirección del flujo y normal a la pared, para las simulaciones con diferentes valores de NPR, en las diferentes secciones transversales de la parte divergente de la tobera.

En estas figuras se puede observar un pico en la región cercana a la pared, comportamiento típico de los valores de RMS en simulaciones de flujo compresible. Para todas las figuras las curvas de RMS en las secciones $x/x_t > 1,5$ colapsan, y están por debajo de las secciones cercanas a la garganta. Esto indica que la turbulencia se reduce en la medida en que aumenta la sección divergente de la tobera. Resultados similares han sido observados por trabajos que han utilizado DNS para simular flujo compresible en toberas [19].

En las figuras para las simulaciones donde se presenta separación de capa límite solo se presentan curvas en secciones transversales donde este fenómeno no se está presentando.

En las figuras para $\text{NPR} = 5.423$ se presenta un comportamiento diferente al de los demás valores. Esto se analizó en la sección del estudio del efecto de la compresibilidad en la turbulencia.

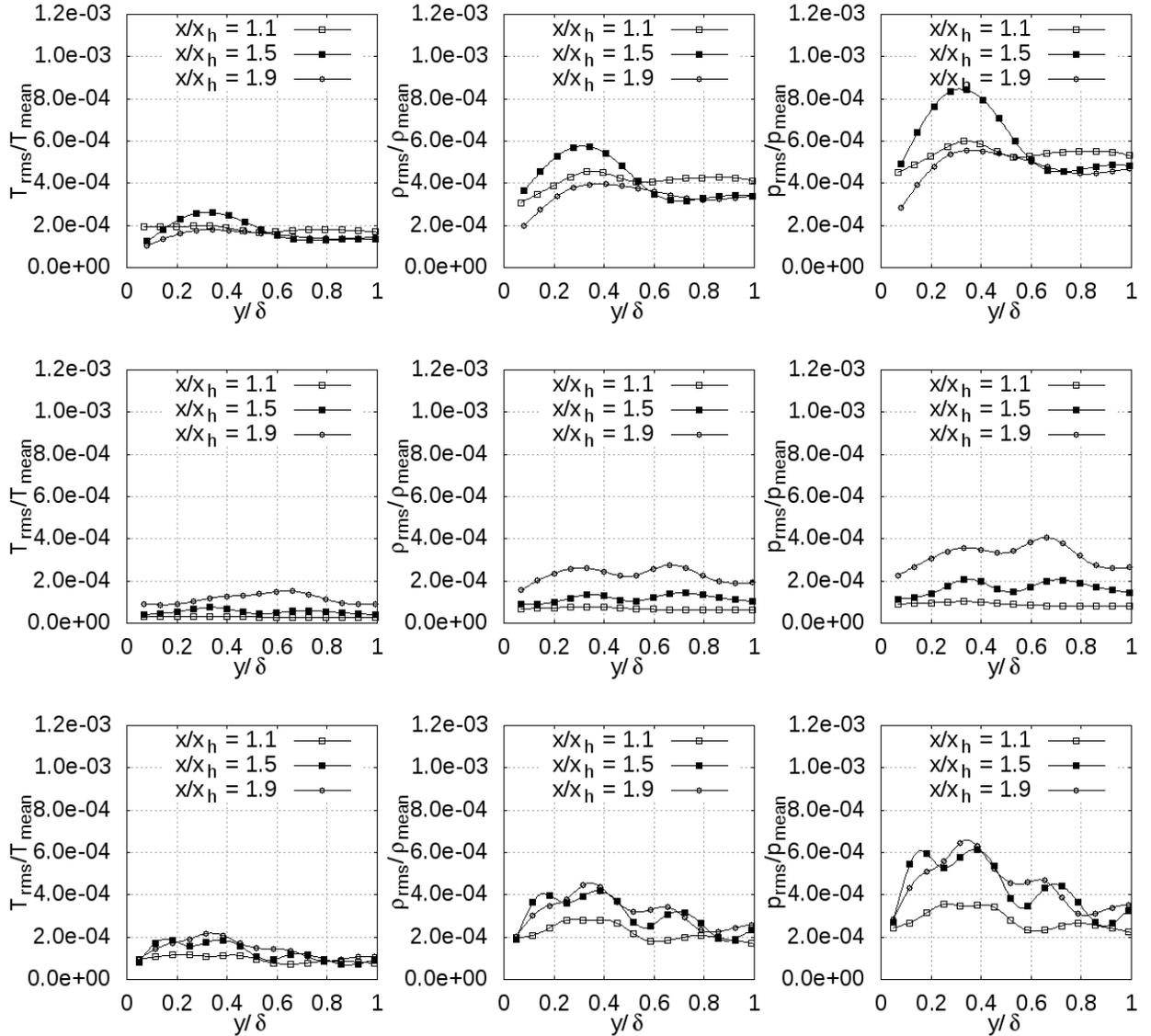


Tabla 4-7.: RMS de la temperatura, densidad y presión en secciones de la parte divergente de la tobera, para diferentes cantidades de celdas.

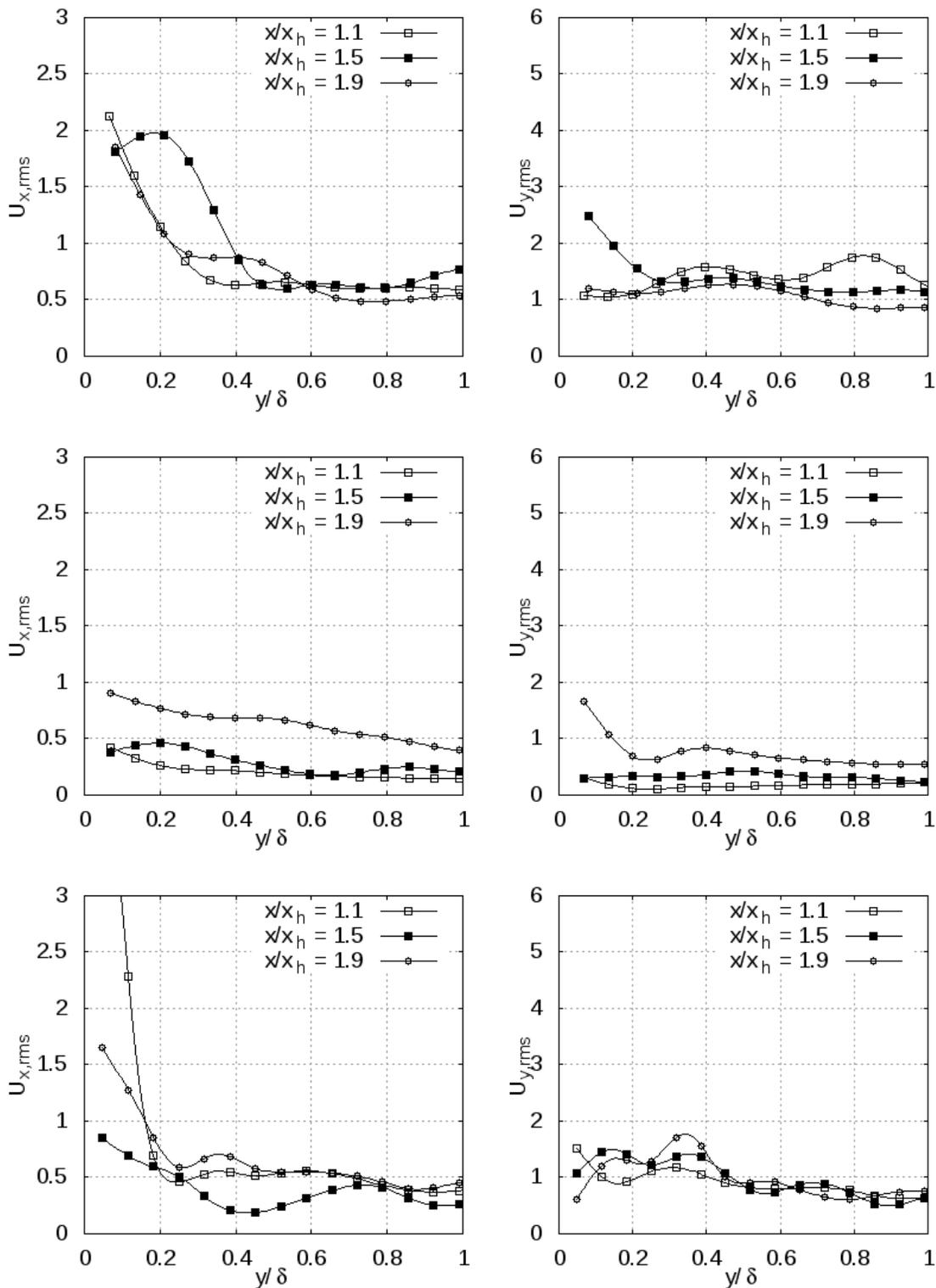


Tabla 4-8.: RMS de las componentes de la velocidad en la dirección del flujo y normal a la pared en secciones de la parte divergente de la tobera, para diferentes cantidades de celdas.

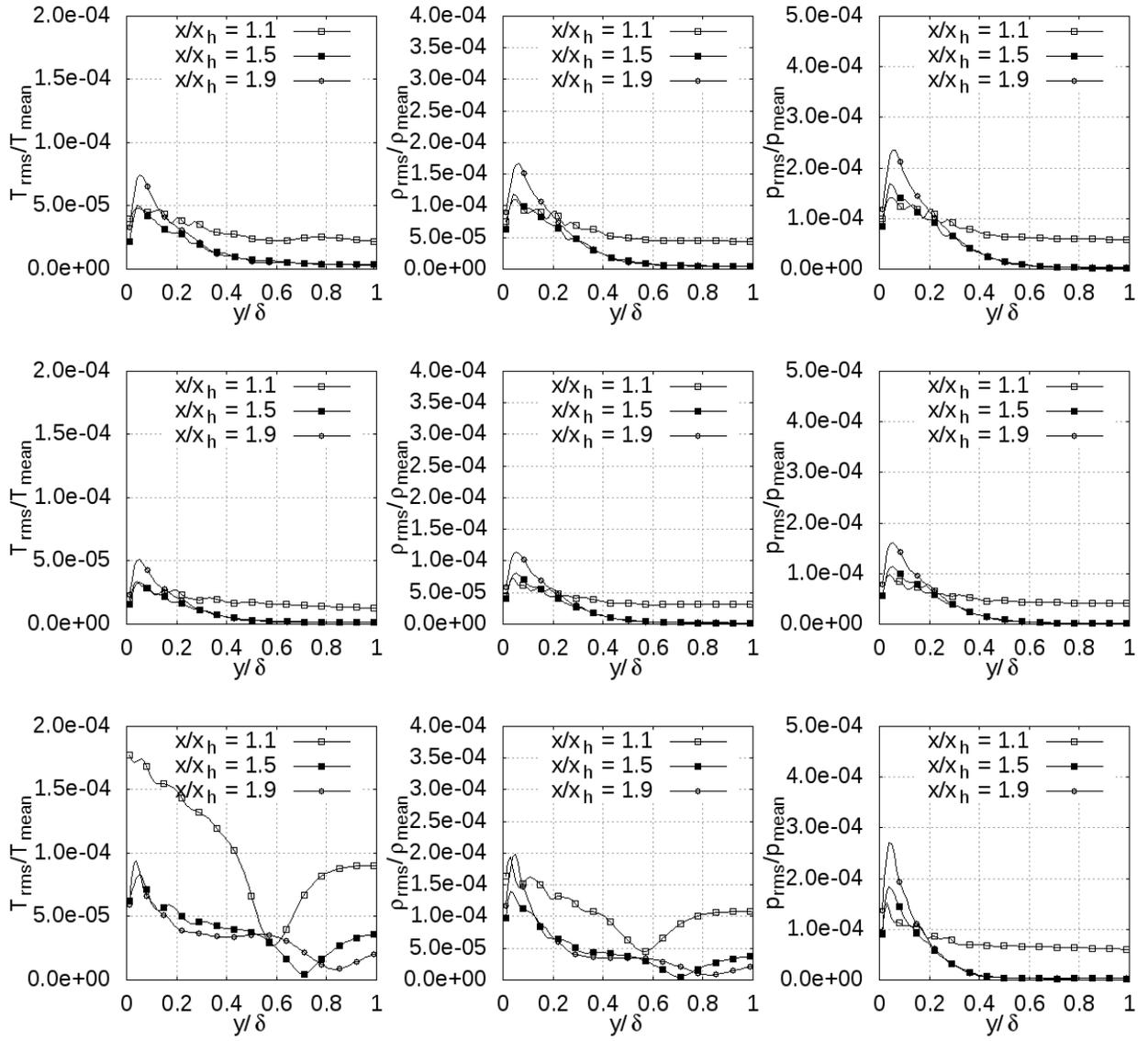


Tabla 4-9.: RMS de la temperatura, densidad y presión en secciones de la parte divergente de la tobera, para diferentes valores de NPR.

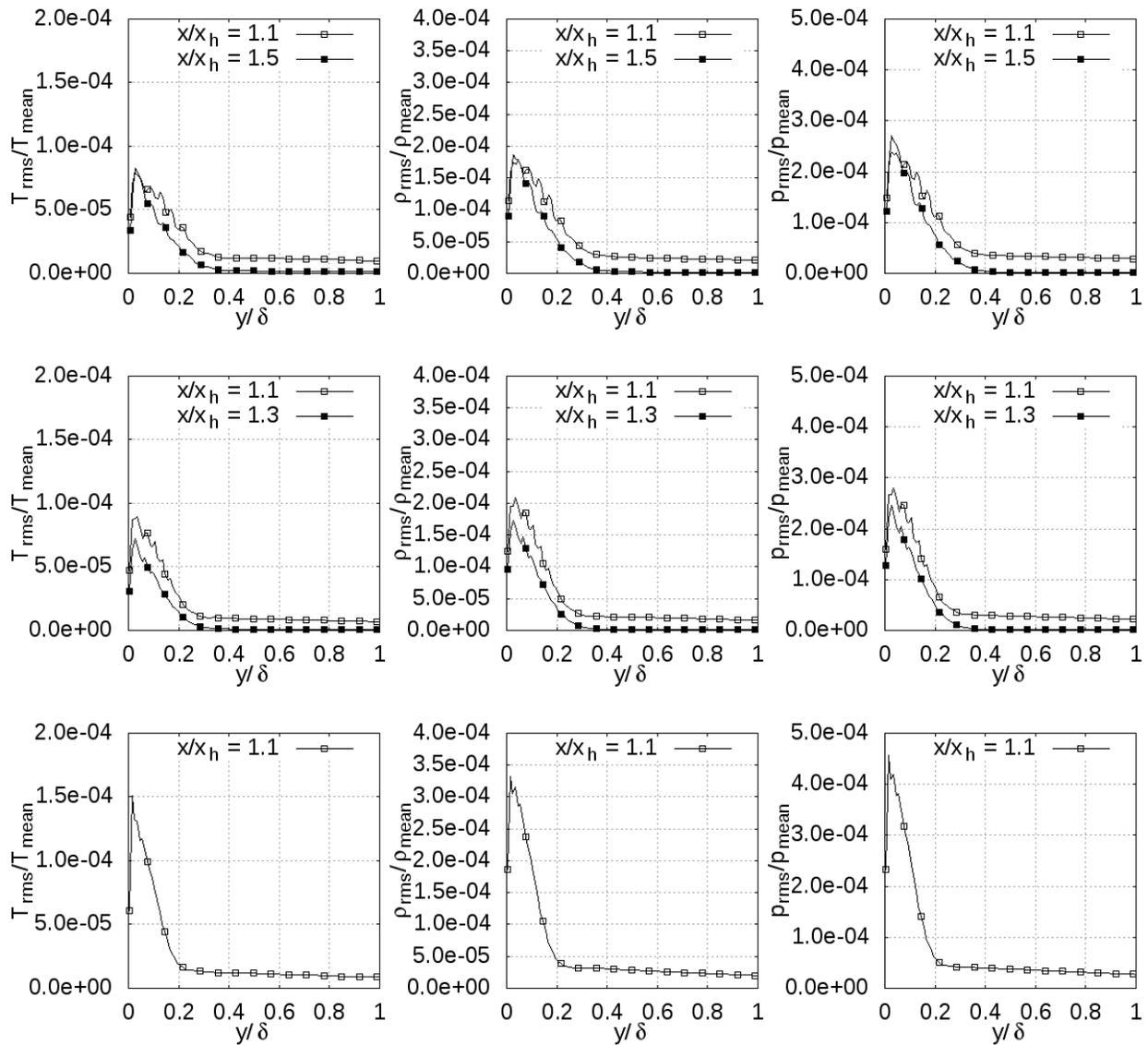


Tabla 4-10.: RMS de la temperatura, densidad y presión en secciones de la parte divergente de la tobera, para diferentes valores de NPR.

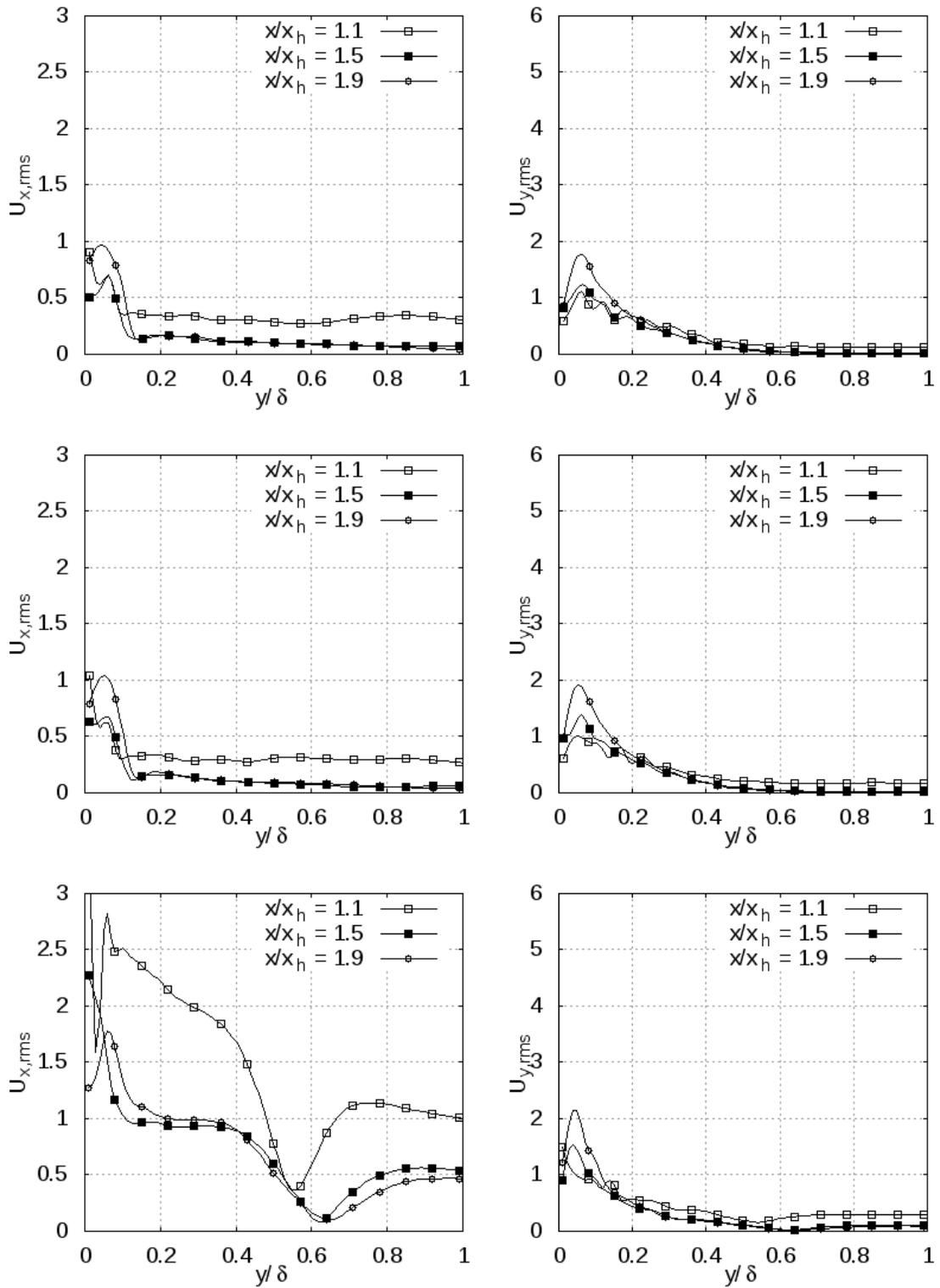


Tabla 4-11.: RMS de las componentes de la velocidad en la dirección del flujo y perpendicular a la pared en secciones de la parte divergente de la tobera, para diferentes valores de NPR.

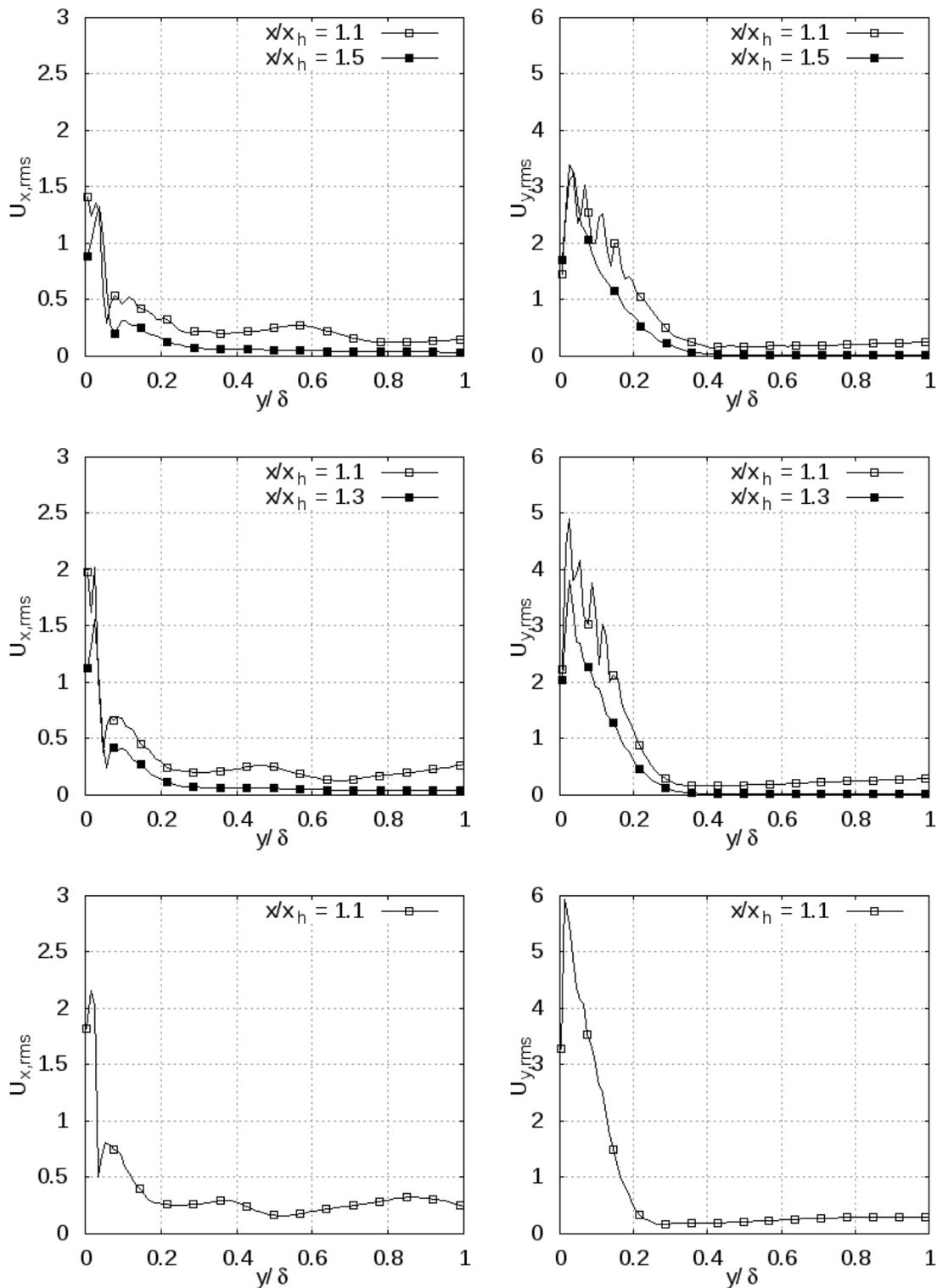


Tabla 4-12.: RMS de las componentes de la velocidad en la dirección del flujo y perpendicular a la pared en secciones de la parte divergente de la tobera, para diferentes valores de NPR.

4.5. Estudio de las características del flujo turbulento para el NPR de diseño en simulaciones tridimensionales

Una vez estudiadas las características del flujo turbulento para los diferentes casos descritos en un modelo computacional bidimensional, se procedió a extender el alcance de este para simular procesos turbulentos tridimensionales.

Se decidió utilizar condiciones de frontera cíclicas en aquellas que delimitan la nueva dimensión del modelo (la cual se llamará *spanwise* en adelante), lo cual permite tratarlas como si estuvieran físicamente conectadas. El uso de condiciones de frontera cíclicas se puede justificar si la longitud del dominio en la dirección *spanwise* se escoge de tal forma que incluya los eddies más grandes en el flujo. Para esto, esta longitud se ajusta para asegurar que las fluctuaciones turbulentas no esten correlacionadas en una separación igual a la mitad de la longitud *spanwise* en esta misma dirección [22].

4.5.1. Correlaciones de dos puntos en la dirección *spanwise*

Para realizar el estudio de la longitud del dominio tridimensional en la dirección *spanwise*, se diseñaron simulaciones con las mismas condiciones del modelo bidimensional validado, pero incrementando sistemáticamente la longitud en esta dirección. Como parámetro para la normalización de esta longitud se tomo el ancho de la garganta de la tobera h_t . Los dominios diseñados van desde $1 h_t$ hasta $5 h_t$.

En las figuras 4-24, 4-25 y 4-26 se puede ver el comportamiento de la correlación de dos puntos de las componentes de la velocidad en la dirección del flujo (x), en la dirección normal a la pared (y) y en la dirección *spanwise* (z), respectivamente. Cada figura muestra el promedio de las correlaciones a lo largo de todo el ducto convergente-divergente. Así mismo, cada figura muestra las correlaciones para la celda más cercana a la pared ($y^+ = 10$) y para una celda en la capa límite ($y^+ = 165$).

En las figuras 4-27, 4-28 y 4-29 se puede ver el comportamiento de la correlación de dos puntos de la presión, la densidad y la temperatura, respectivamente.

Como se puede observar en las figuras mencionadas en los párrafos anteriores, la cantidad de celdas utilizadas en las dirección *spanwise* no fue la suficiente para lograr establecer la longitud del dominio mínima para que las fluctuaciones turbulentas no esten correlacionadas en una separación igual a la mitad de esta longitud en dicha direcció. Un aumento de la cantidad de celdas en la dirección nombrada fue prohibitivo computacionalmente.

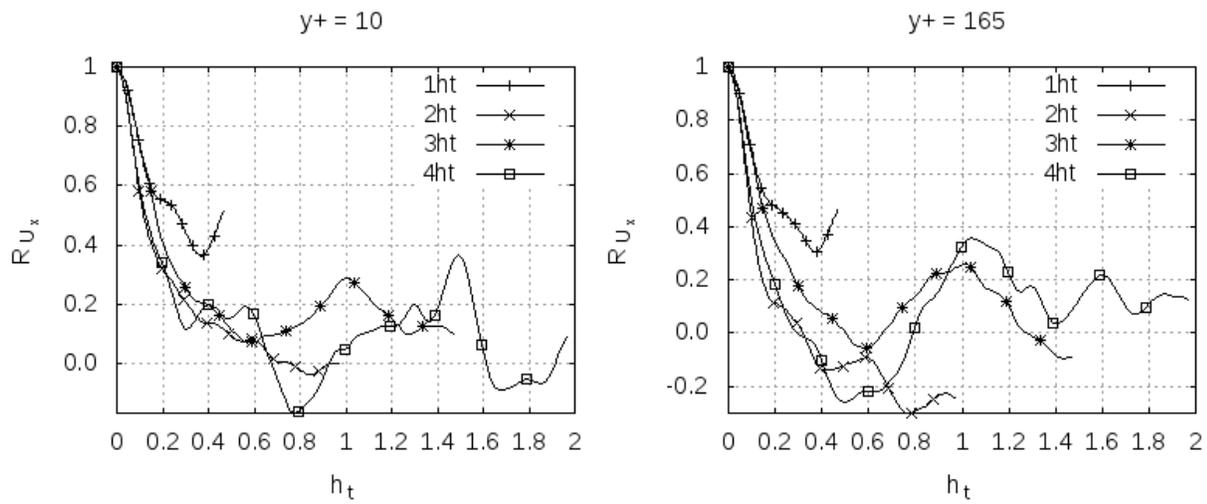


Figura 4-24.: Promedio espacial a lo largo de todo el ducto de las correlaciones de dos puntos para la componente de la velocidad en la dirección x_1 .

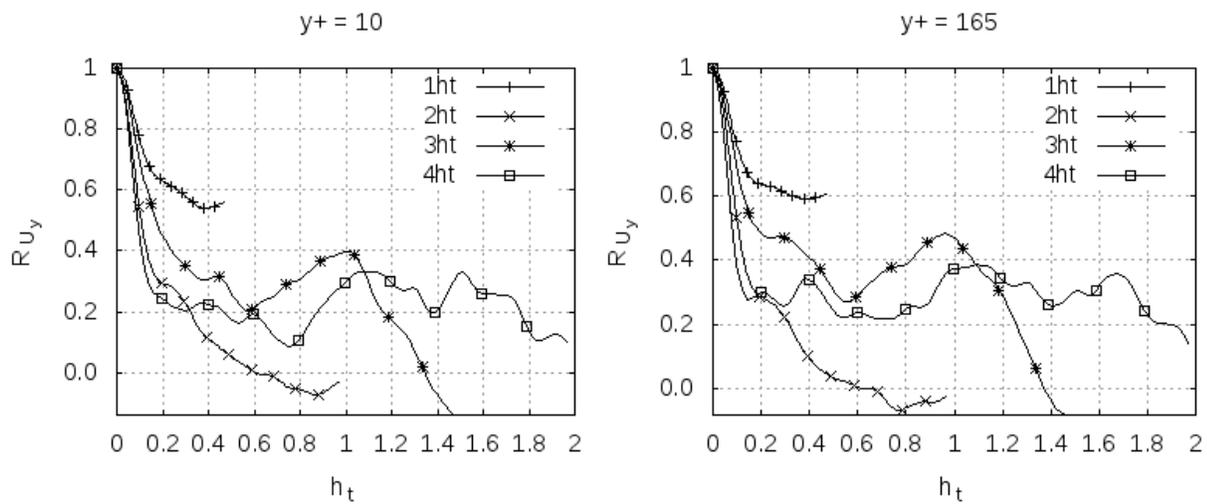


Figura 4-25.: Promedio espacial a lo largo de todo el ducto de las correlaciones de dos puntos para la componente de la velocidad en la dirección x_2 .

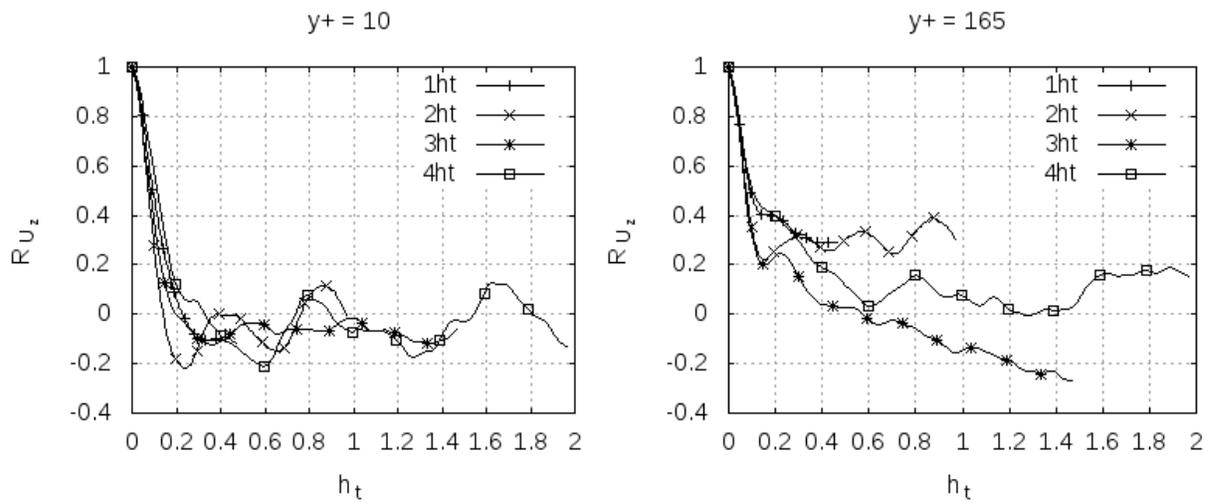


Figura 4-26.: Promedio espacial a lo largo de todo el ducto de las correlaciones de dos puntos para la componente de la velocidad en la dirección x_3 .

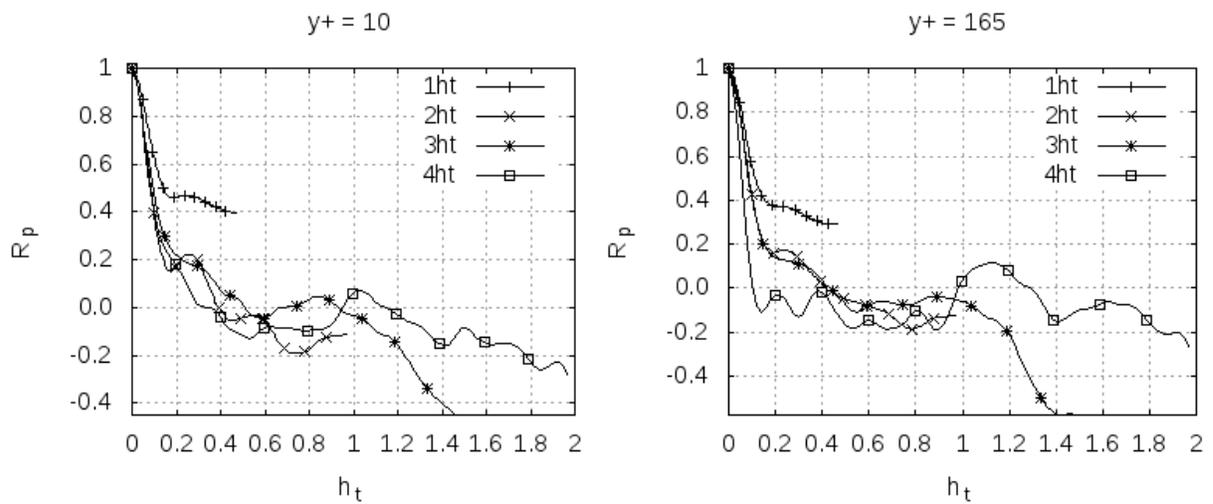


Figura 4-27.: Promedio espacial a lo largo de todo el ducto de las correlaciones de dos puntos para la presión.

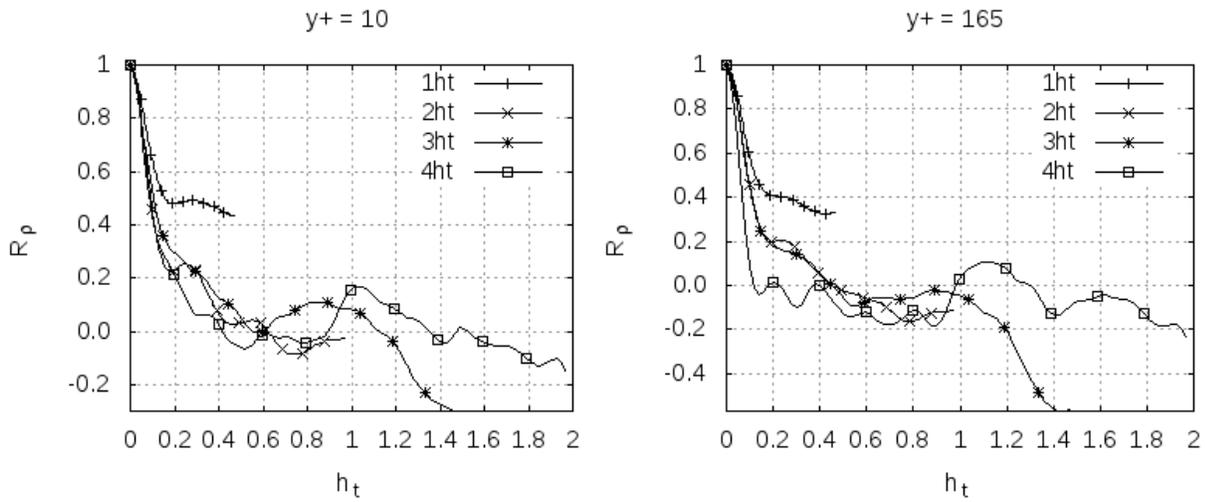


Figura 4-28.: Promedio espacial a lo largo de todo el ducto de las correlaciones de dos puntos para la densidad.

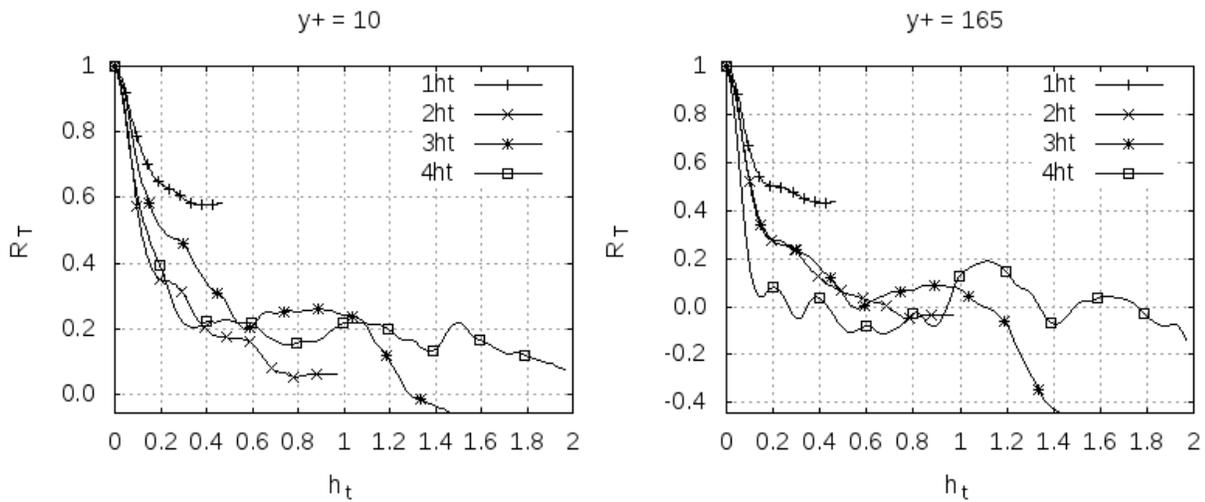


Figura 4-29.: Promedio espacial a lo largo de todo el ducto de las correlaciones de dos puntos para la temperatura.

4.5.2. Comparación de las simulaciones en tres dimensiones con los valores experimentales

Para las simulaciones en tres dimensiones realizadas se realizó también la comparación con los valores experimentales reportados por Hunter[15]. Las figuras de la tabla 4-13 muestran dichos resultados.

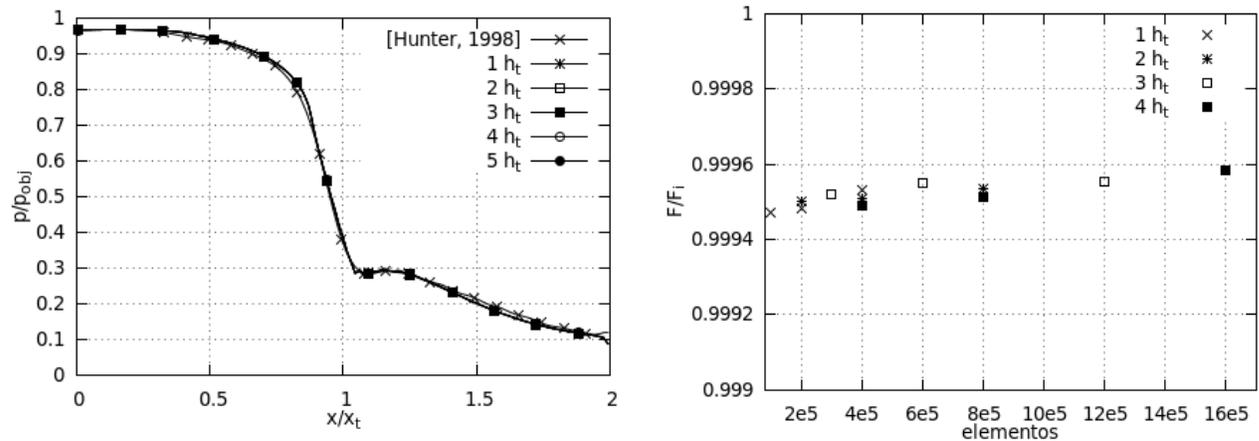


Tabla 4-13.: Comparación de curvas de presión en la pared y eficiencia para simulaciones en tres dimensiones.

La gráfica de la izquierda muestra la comparación de las curvas de presión en la pared. Estas gráficas colapsan sobre la gráfica de los valores experimentales.

La gráfica de la derecha muestra los puntos de eficiencia de empuje para simulaciones realizadas con diferentes longitudes de dominio en la dirección *spanwise*. Como se puede observar la variación de la eficiencia de empuje está por debajo de 0.5 % en todos los casos.

4.5.3. Estudio del efecto de la compresibilidad en la turbulencia

Las figuras 4-30, 4-31, 4-32, 4-33 y 4-34 muestran el M_{RMS} y el M_t para las simulaciones con longitud de dominio en la dirección *spanwise* de 1, 2, 3, 4 y 5 anchos de garganta respectivamente. Como se observa en estas gráficas todos los valores están por debajo de 0.3, lo cual indica un efecto despreciable de la compresibilidad sobre la turbulencia.

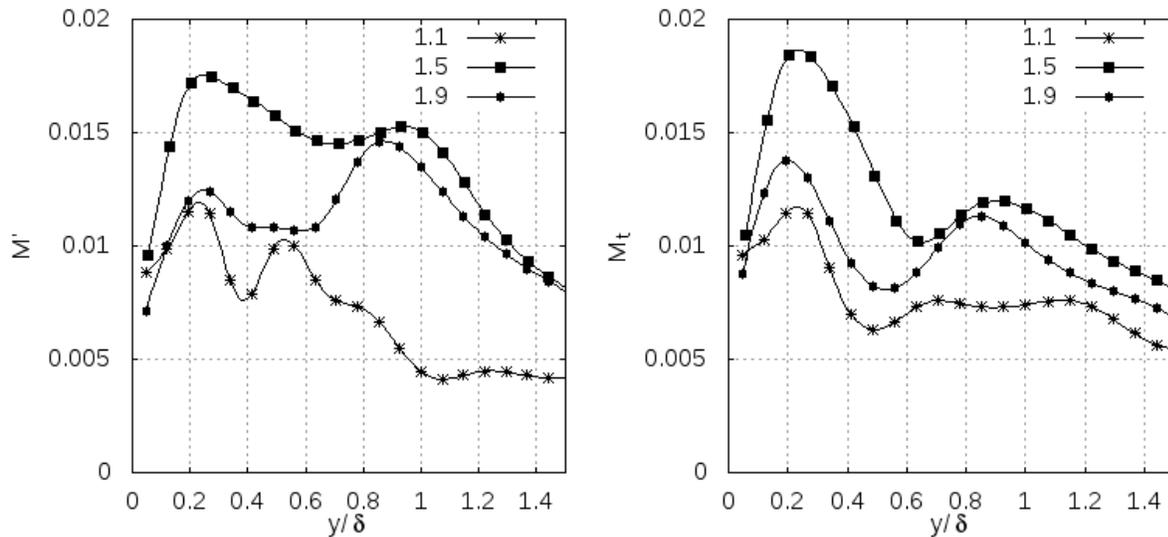


Figura 4-30.: RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 8.78 y ancho de dominio = $1h_t$

Se puede ver también en estas figuras que los valores de M_{RMS} y de M_t disminuyen en la medida que se aumenta el tamaño del dominio en la dirección *spanwise*, con lo cual se puede plantear la conclusión de que los efectos de la compresibilidad son menores en la medida en que el tamaño del dominio en la dirección *spanwise* es mayor. Sin embargo, para establecer esta conclusión se deben realizar simulaciones aumentando la cantidad de elementos en esta dirección hasta que las fluctuaciones no estén correlacionadas.

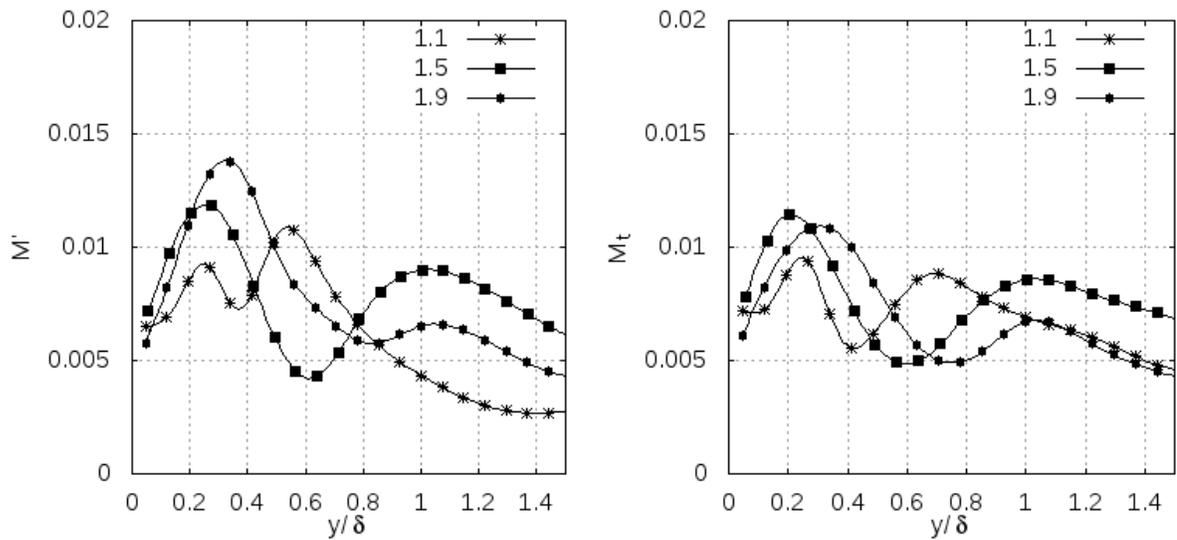


Figura 4-31.: RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 8.78 y ancho de dominio = $2h_t$

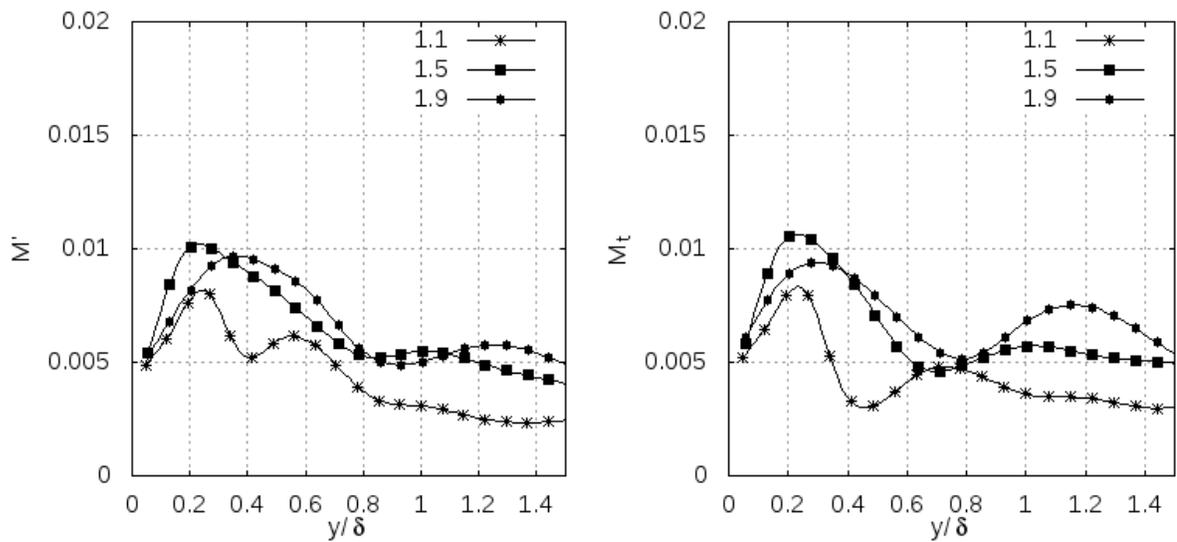


Figura 4-32.: RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para NPR = 8.78 y ancho de dominio = $3h_t$

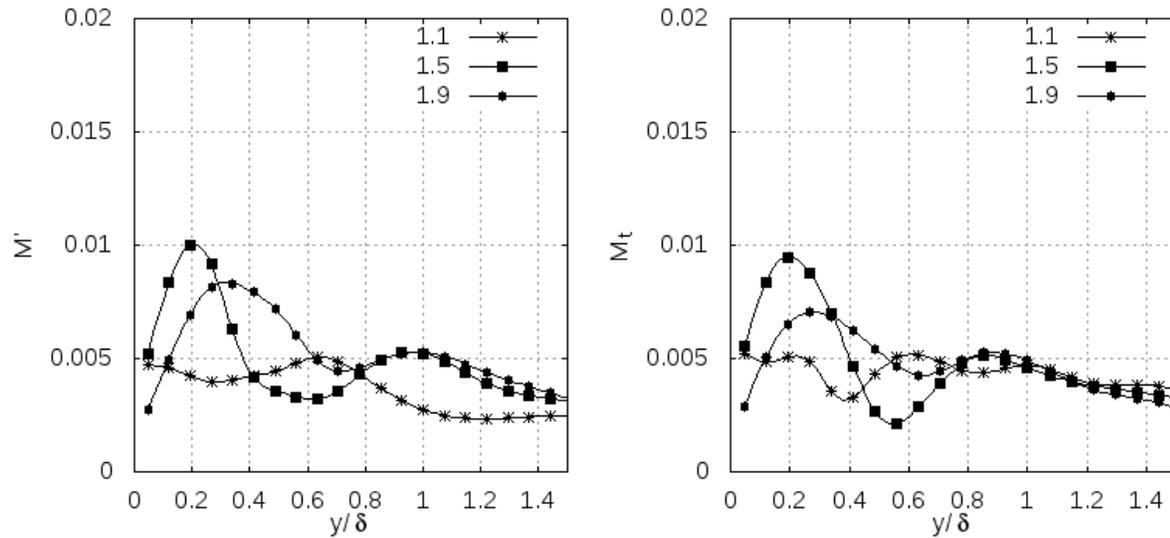


Figura 4-33.: RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para $NPR = 8.78$ y ancho de dominio = $4h_t$

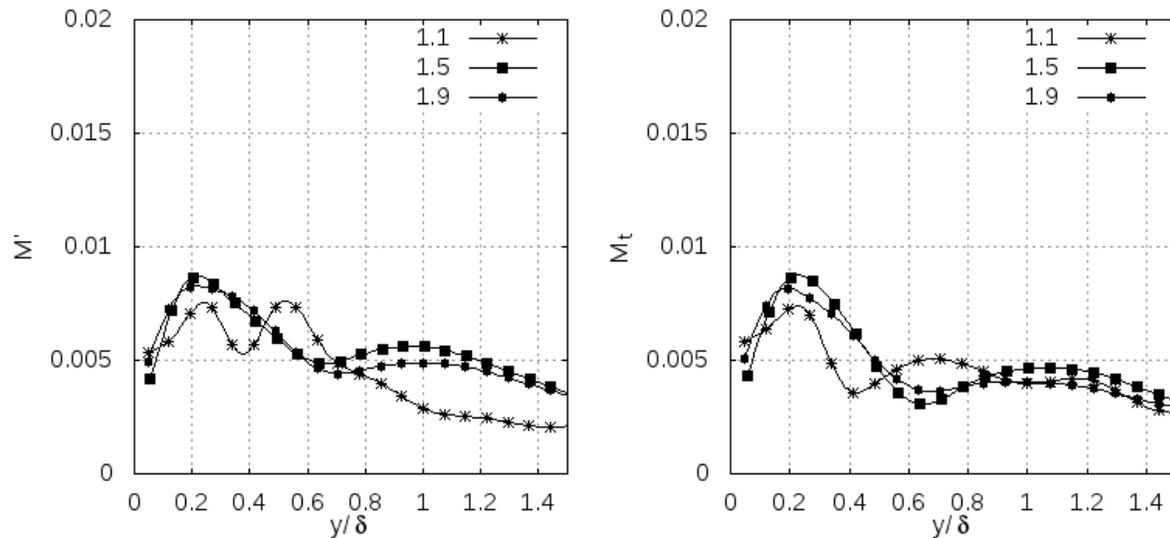


Figura 4-34.: RMS del número de Mach (M_{RMS}), y número de Mach turbulento (M_t) para $NPR = 8.78$ y ancho de dominio = $5h_t$

4.5.4. Comparación con la Ley de la Pared en flujos incompresibles

Las figuras 4-35, 4-36, 4-37, 4-38 y 4-39 muestran las gráficas de la velocidad adimensionalizada en unidades de pared (U^+) y la misma despues de aplicar la transformada de Van Driest (U_c^+), para las simulaciones con longitud de dominio en la dirección *spanwise* de 1, 2, 3, 4 y 5 anchos de garganta respectivamente.

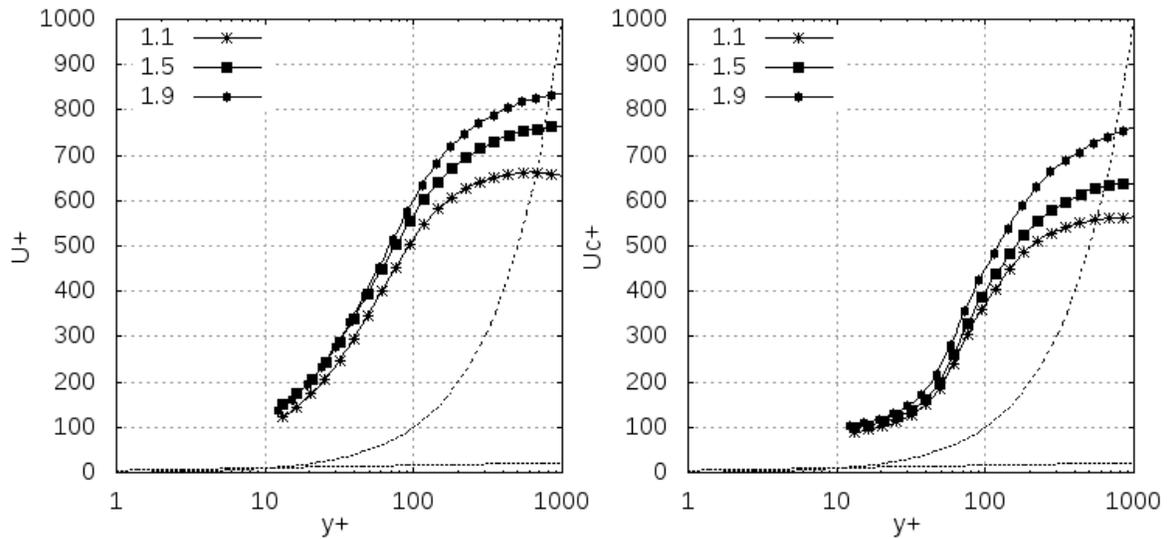


Figura 4-35.: (a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para NPR = 8.78 y ancho de dominio = $1h_t$

Como se puede observar no hay cambio significativo en estas gráficas al aumentar la longitud nombrada. Se puede concluir que las curvas de velocidad adimensionalizada en unidades de pared no se ve afectada por la longitud de dominio en la dirección *spanwise*.

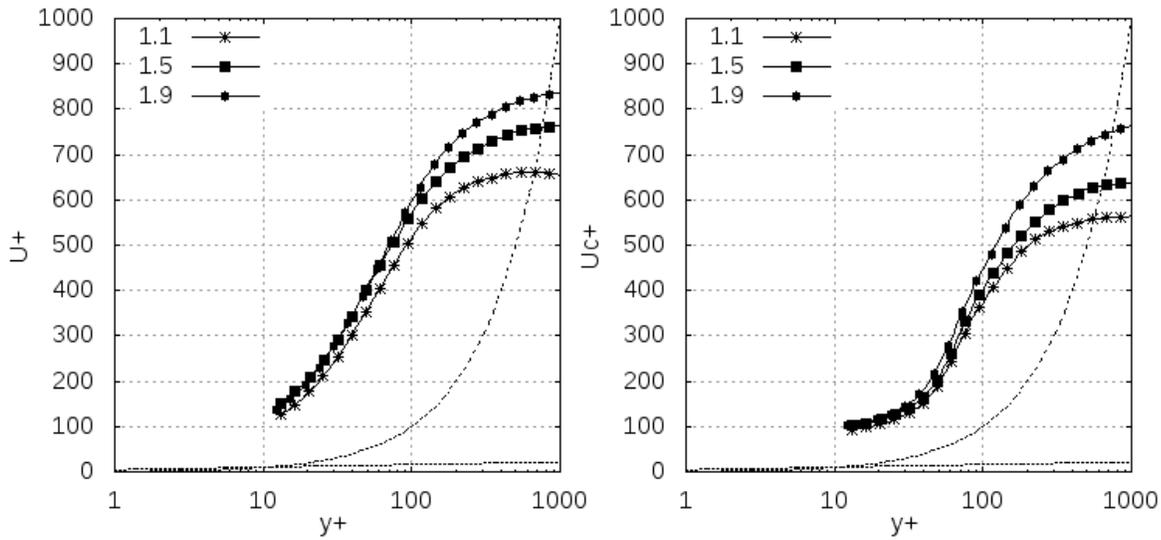


Figura 4-36.: (a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para $\text{NPR} = 8.78$ y ancho de dominio $= 2h_t$

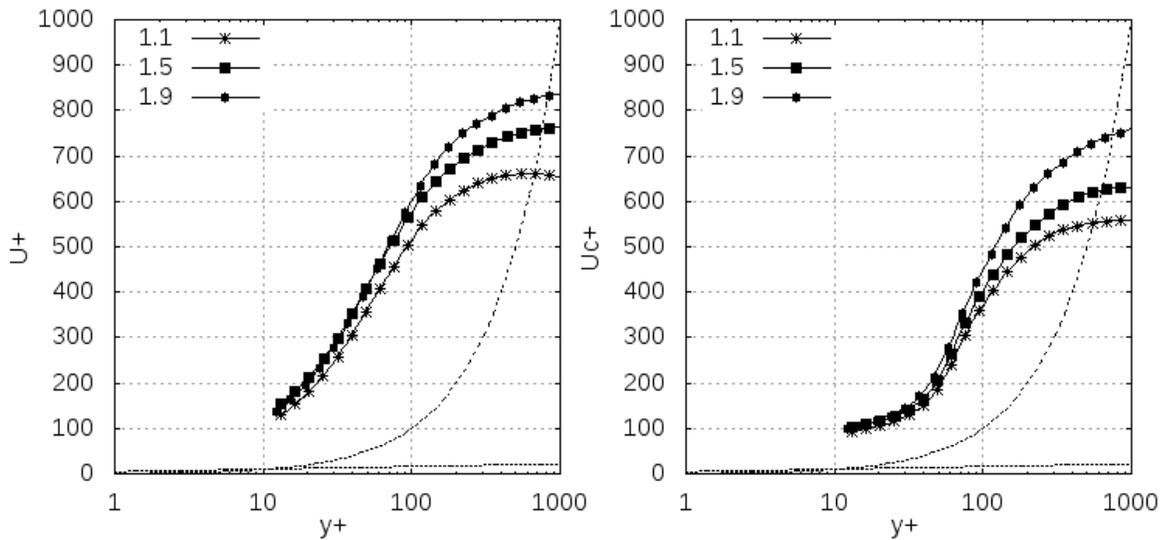


Figura 4-37.: (a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para $\text{NPR} = 8.78$ y ancho de dominio $= 3h_t$

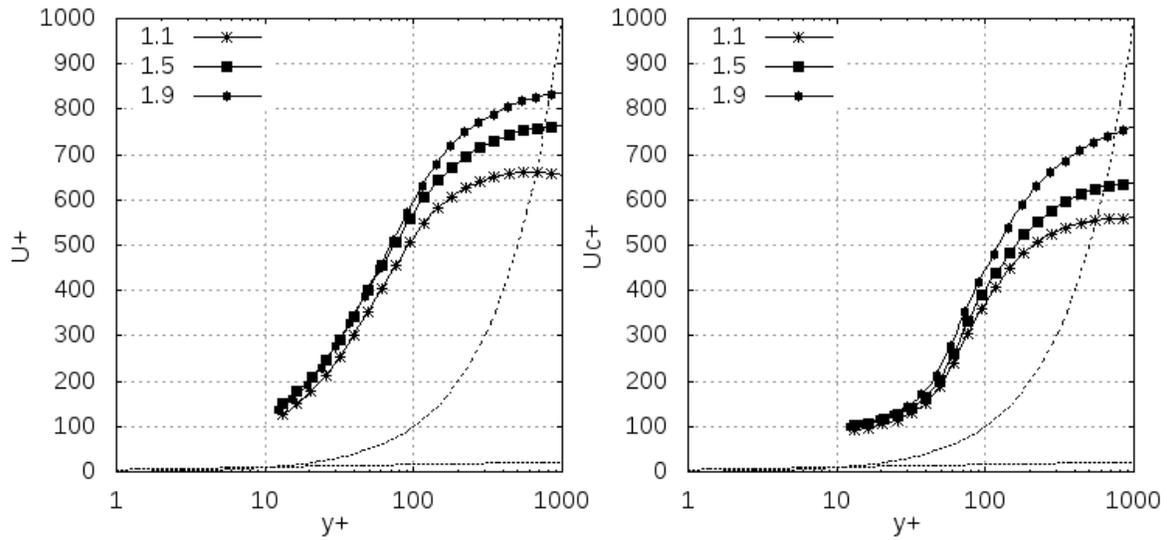


Figura 4-38.: (a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para $NPR = 8.78$ y ancho de dominio = $4h_t$

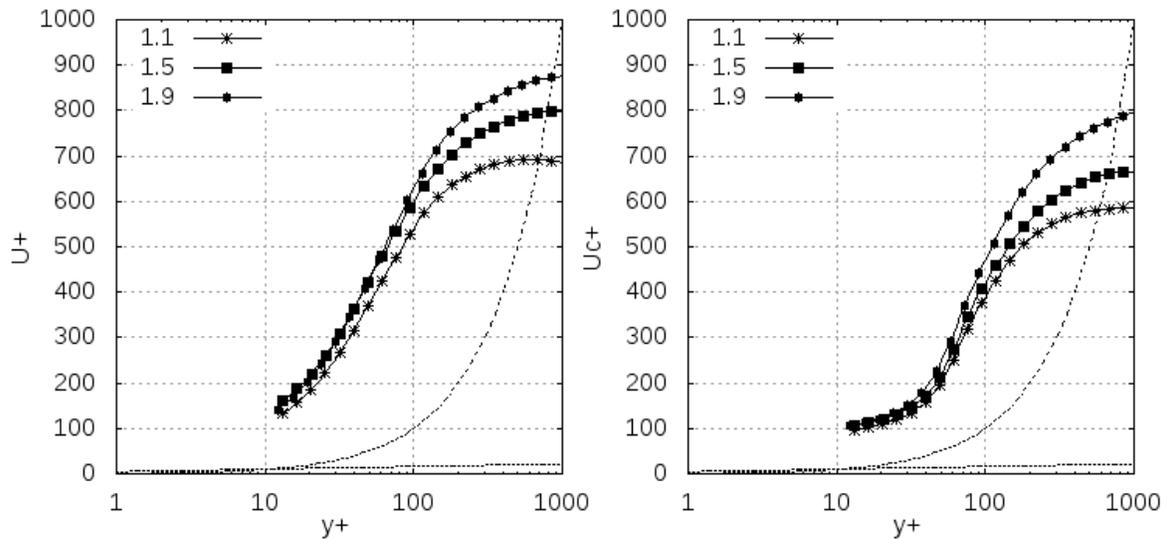


Figura 4-39.: (a) U^+ en función de y^+ y (b) U_c^+ en función de y^+ , ambas para $NPR = 8.78$ y ancho de dominio = $5h_t$

4.5.5. Comportamiento de Re_{δ^*} , Re_{θ} y Re_{τ}

En la figura 4-40 se puede observar el espesor de desplazamiento y el espesor de la cantidad de movimiento, para las simulaciones con longitud de dominio en la dirección *spanwise* de 1, 2, 3, 4 y 5 anchos de garganta respectivamente.

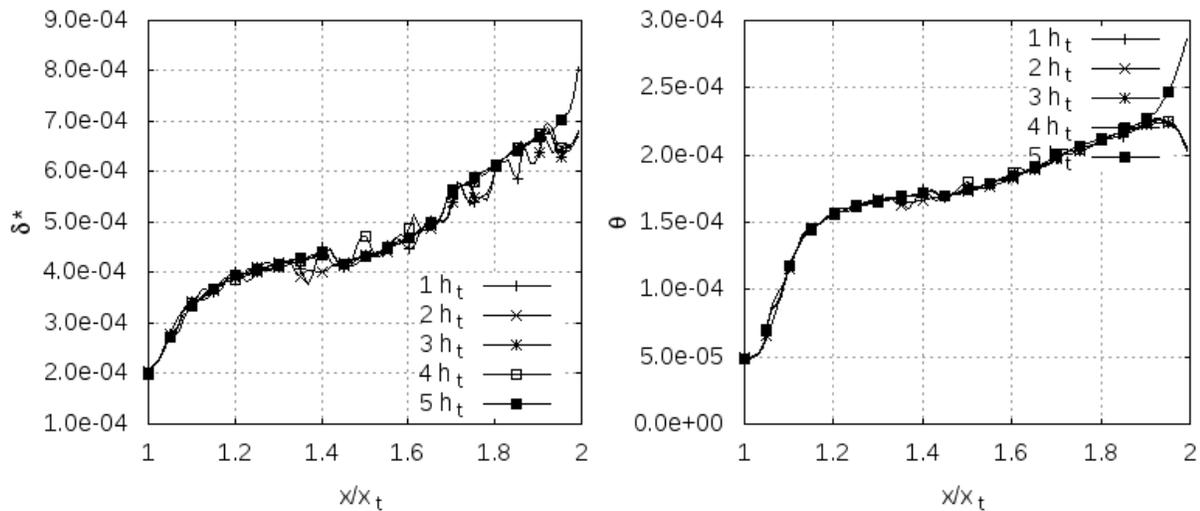


Figura 4-40.: Espesor de desplazamiento δ^* y espesor de la cantidad de movimiento θ , a lo largo de la sección divergente para diferente cantidad de anchos del dominio en la dirección *spanwise*

Las curvas del espesor de desplazamiento y el espesor de la cantidad de movimiento para diferentes longitudes en el dirección *spanwise* colapsan y aumentan en la medida en que aumenta la sección divergente de la tobera. Un comportamiento similar se observó en las simulaciones para el NPR de diseño con diferente cantidad de celdas en la discretización del dominio (Figura 4-20).

Sin embargo, en las figuras similares para diferentes NPR (Figura 4-22) se observó un comportamiento diferente como se detalló en secciones anteriores. La malla utilizada para las simulaciones tridimensionales tienen una discretización del dominio similar en el plano $x - y$ a la utilizada para las simulaciones bidimensionales del NPR de diseño. Esto explica porque las gráficas del espesor de desplazamiento y del espesor de la cantidad de movimiento se asemejan más a las del estudio de independencia de malla que a las de diferentes NPR.

La figura 4-41 presenta el número de Reynolds respecto al espesor de desplazamiento Re_{δ^*} y respecto al espesor de la cantidad de movimiento Re_{θ} , para las simulaciones con longitud de dominio en la dirección *spanwise* de 1, 2, 3, 4 y 5 anchos de garganta respectivamente. El comportamiento de estos sigue el comportamiento de las gráficas de la figura 4-40.

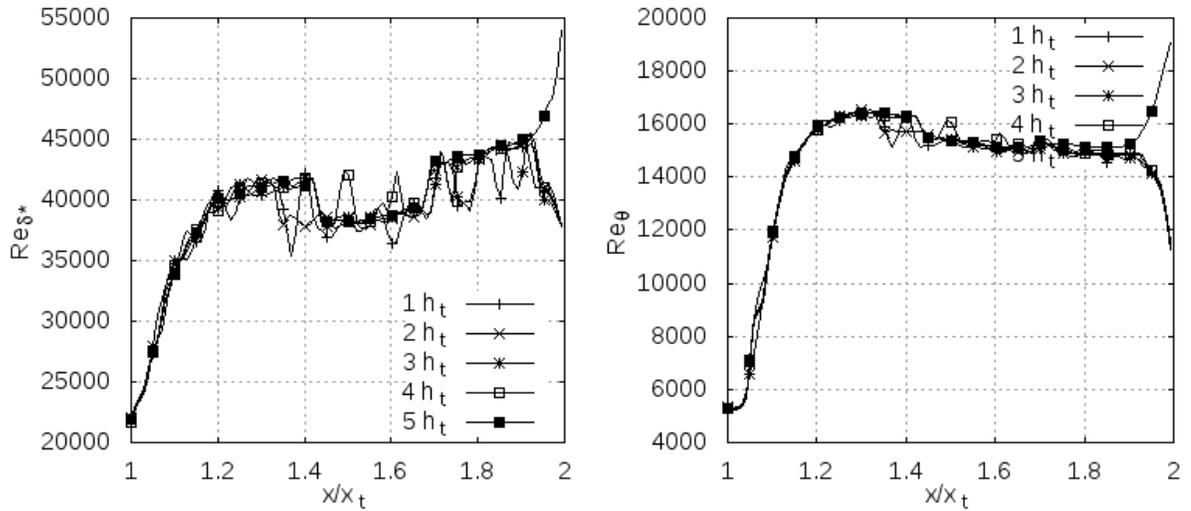


Figura 4-41.: Número de Reynolds con respecto al espesor de desplazamiento Re_{δ^*} y número de Reynolds con respecto al espesor de la cantidad de movimiento Re_{θ} , a lo largo de la sección divergente para diferente cantidad de anchos del dominio en la dirección spanwise

Las figuras de la tabla 4-14 muestran el número de Reynolds de fricción Re_{τ} y el esfuerzo cortante en la pared normalizado con el valor de la garganta $\tau_w/\tau_{w,o}$, para las simulaciones con longitud de dominio en la dirección *spanwise* de 1, 2, 3, 4 y 5 anchos de garganta respectivamente.

Las gráficas de Re_{τ} colapsan y mantienen un valor promedio de 800. Su comportamiento es muy similar al presentado para el NPR de diseño (Tabla 4-5) y para diferentes valores de NPR (Tabla 4-6). Un comportamiento similar se observa en la gráfica de $\tau_w/\tau_{w,o}$ frente a la presentada para el NPR de diseño (Tabla 4-5) y para diferentes valores de NPR (Tabla 4-6).

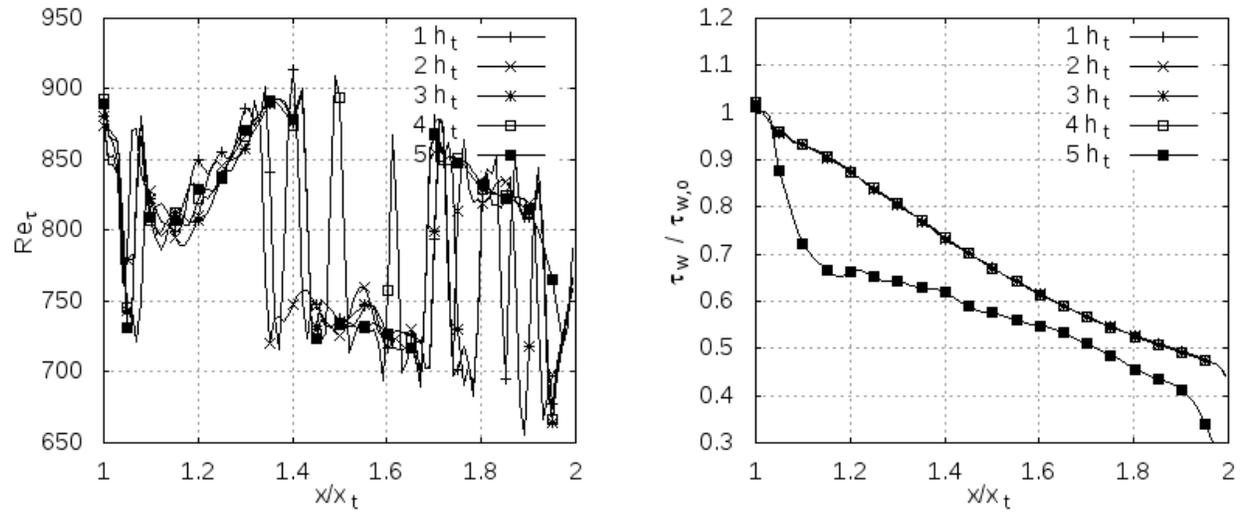


Tabla 4-14.: Comportamiento del número de Reynolds de fricción (Re_τ) y el esfuerzo cortante en la pared normalizado con el valor de la garganta ($\tau_w/\tau_{w,0}$) a lo largo de la parte divergente de la tobera.

4.5.6. Perfiles de los valores de RMS

La figura 4-42 muestran las gráficas para los valores de los RMS de la temperatura, la densidad y la presión para las simulaciones con longitud de dominio en la dirección *spanwise* de 1, 2, 3 y 4 anchos de garganta respectivamente.

La columna de figuras de la izquierda muestra las curvas de T_{RMS}/\bar{T} , la columna central muestra $\rho_{RMS}/\bar{\rho}$, y la columna de la derecha muestra p_{RMS}/\bar{p} . La primera fila de figuras equivale a la simulación con longitud de dominio en la dirección *spanwise* de 1 ancho de garganta, la segunda fila de figuras a 2 anchos de garganta, y así sucesivamente.

Para la gráficas de $\rho_{RMS}/\bar{\rho}$ y p_{RMS}/\bar{p} se puede observar que las fluctuaciones de la densidad disminuyen en la medida en que avanza la posición en la sección divergente de la tobera partiendo de la garganta y hacia la salida de la misma. Para estas e incluyendo T_{RMS}/\bar{T} , todas las gráficas colapsan a partir de la mitad de la capa límite indicando un comportamiento isotrópico de las fluctuaciones de la densidad, la presión y la temperatura en esta sección.

Las figuras de la tabla 4-8 muestran los valores de los RMS de las componentes de la velocidad en la dirección del flujo ($U_{x,RMS}$), normal a la pared ($U_{y,RMS}$) y *spanwise* ($U_{z,RMS}$), para las simulaciones con longitud de dominio en la dirección *spanwise* de 1, 2, 3 y 4 anchos de garganta respectivamente.

La columna de figuras de la izquierda muestra las curvas de $U_{x,RMS}$, la columna central muestra $U_{y,RMS}$, y la columna de la derecha muestra $U_{z,RMS}$. La primera fila de figuras equivale a la simulación con longitud de dominio en la dirección *spanwise* de 1 ancho de garganta, la segunda fila de figuras a 2 anchos de garganta, y así sucesivamente.

En estas figuras se puede observar un pico en la región cercana a la pared, comportamiento típico de los valores de RMS en simulaciones de flujo compresible. Para todas las figuras las curvas de RMS en las secciones $x/x_t > 1,5$ colapsan, y están por debajo de las secciones cercanas a la garganta. Esto indica que la turbulencia se reduce en la medida en que aumenta la sección divergente de la tobera. Resultados similares han sido observados por trabajos que han utilizado DNS para simular flujo compresible en toberas [19].

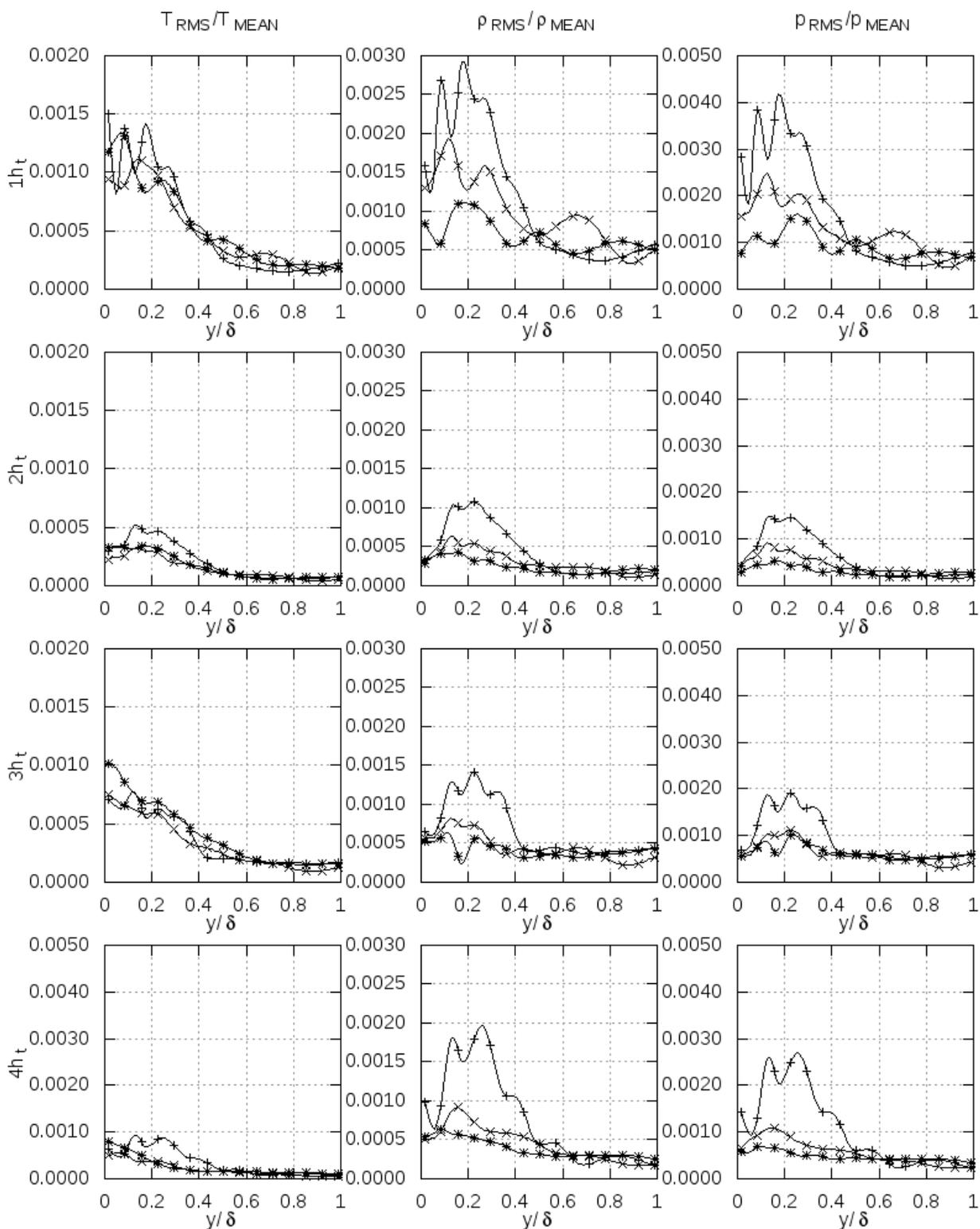


Figura 4-42.: RMS de la temperatura, densidad y presión en secciones de la parte divergente de la tobera, para las simulaciones con longitud de dominio en la dirección *spanwise*.

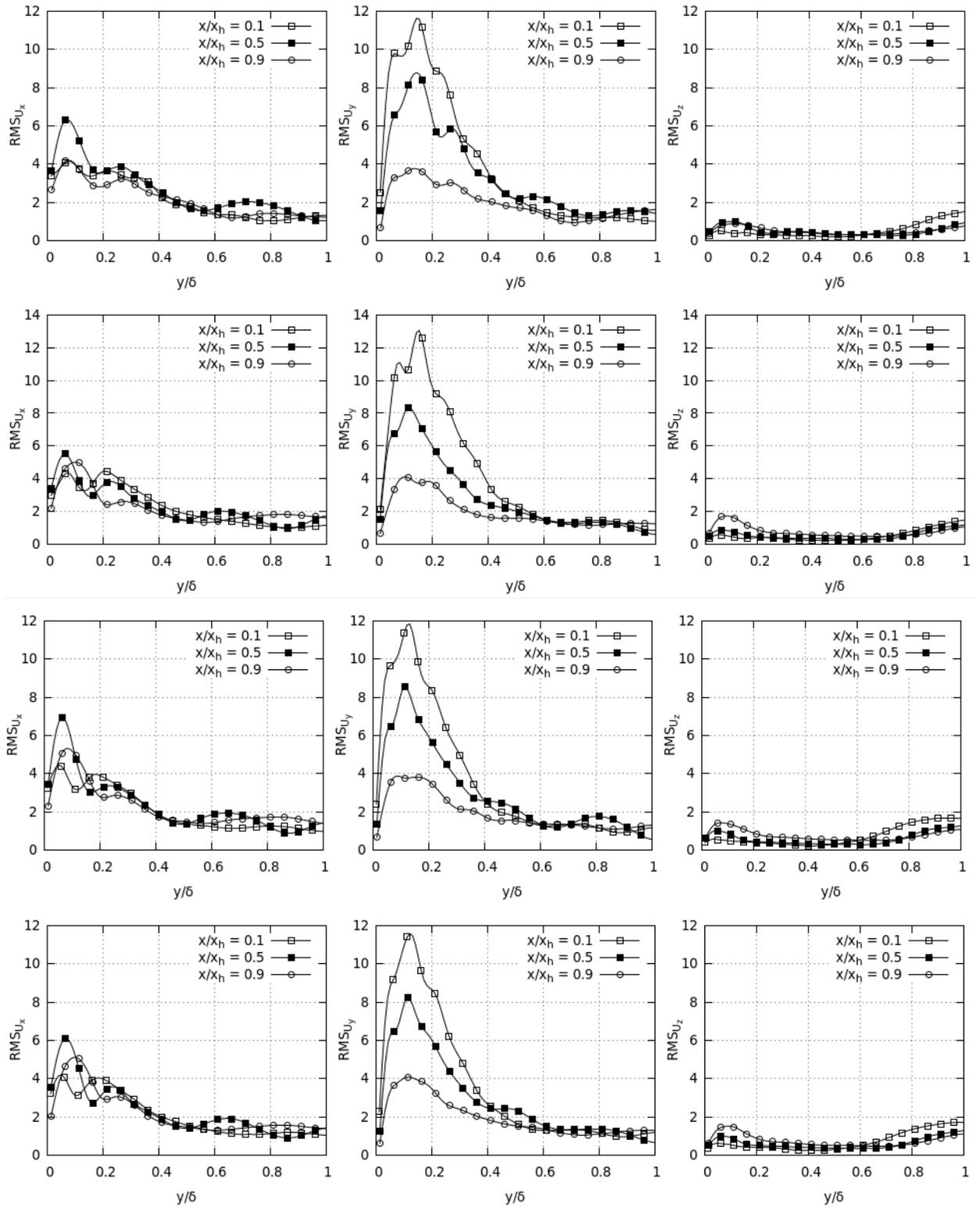


Tabla 4-15.: RMS de cada una de las componentes de la velocidad en secciones de la parte divergente de la tobera, para las simulaciones con longitud de dominio en la dirección *spanwise*.

5. Características del Flujo Turbulento Compresible para Condición de Frontera de Presión Oscilante a la Entrada

En este capítulo se presenta el análisis de las simulaciones del flujo turbulento compresible que pasa por el ducto convergente-divergente seleccionado, y bajo una condición de presión oscilante a la entrada del dominio. Las simulaciones se realizaron con un dominio bidimensional discretizado con 232k celdas.

Inicialmente se escogieron cuatro frecuencias: 50 Hz, 100 Hz, 150 Hz y 200 Hz y una amplitud de 1 NPR variando entre $\text{NPR} = 2$ y $\text{NPR} = 3$, siguiendo el trabajo numérico realizado por Toufique Hasan[9]. Como se observó en el capítulo 3, en el régimen de NPR seleccionado el ducto trabaja en modo sobre-expandido con presencia de ondas de choque en la sección divergente de la tobera

La figura 5-1 muestra el desplazamiento de la onda de choque incidente sobre la pared, en función del NPR en un ciclo de oscilación. Los resultados presentados por Toufique Hasan[9] se indican en las líneas con círculos, los resultados del presente trabajo en las líneas con cuadrados.

En la figura 5-2 se muestra el desplazamiento de la onda de choque frontal en el eje de la tobera. Los resultados presentados por Toufique Hasan[9] se indican en las líneas con círculos, los resultados del presente trabajo en las líneas con cuadrados.

Como se puede observar en las figuras mencionadas, el modelo de este trabajo captura parte del comportamiento del ciclo de histéresis reportado por Toufique Hasan[9]. Sin embargo, las curvas del presente trabajo se encuentran desplazadas con respecto a las de la referencia. Algunos puntos se desvían del comportamiento general, lo cual se explica por la presencia de las asimetrías entre las ondas de choque en las dos paredes que el presente modelo es capaz de capturar. Se cree que este comportamiento no fue observado por Toufique Hasan[9] dado que las simulaciones de tal trabajo se realizaron usando solo medio dominio computacional, tomando como plano de simetría la línea horizontal del eje de la tobera. En el presente trabajo se tomó el dominio completo.

Dado que el efecto de las ondas de choque sobre la capa límite turbulenta se salía del alcance

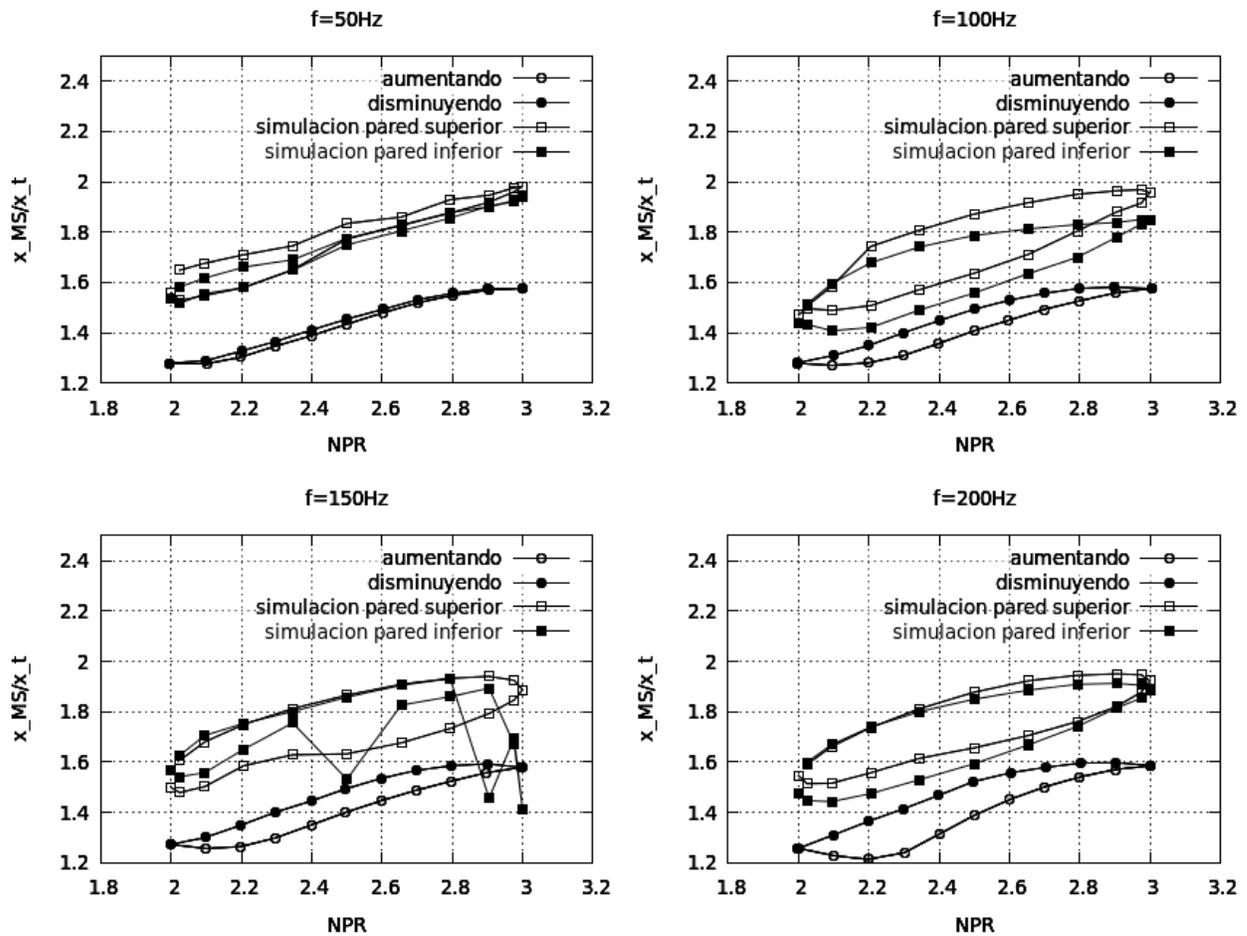


Figura 5-1.: Comparación de la posición de la onda de choque incidente sobre la pared. Los círculos corresponden a los valores reportados por Toufique Hasan[9], los cuadrados corresponden a las simulaciones del presente trabajo.

del presente trabajo, se decidió escoger una frecuencia y rango de oscilación de la presión que no estuvieran en un modo trabajo sobre-expandido de la tobera.

Para las pruebas adicionales, se realizó una nueva selección de frecuencia y amplitud de las oscilaciones, con base en los trabajos experimentales realizados por [6][7][8]. De los valores reportados se escogió una frecuencia de 100 Hz y una amplitud del 1% de la presión de operación. Se observó que estas oscilaciones de la presión se presenta principalmente a valores de NPR cercanos a los de diseño del motor cohete.

El análisis de las características del flujo turbulento se realizó midiendo y promediando las variables necesarias en cuatro puntos de fase de la onda de la señal oscilante de presión a la entrada. Siendo la fase completa de una oscilación equivalente a 2π , los cuatro puntos seleccionados se tomaron fracciones de un periodo de oscilación en $P1 = 0$, $P2 = \frac{1}{2}\pi$, $P3 = \pi$ y

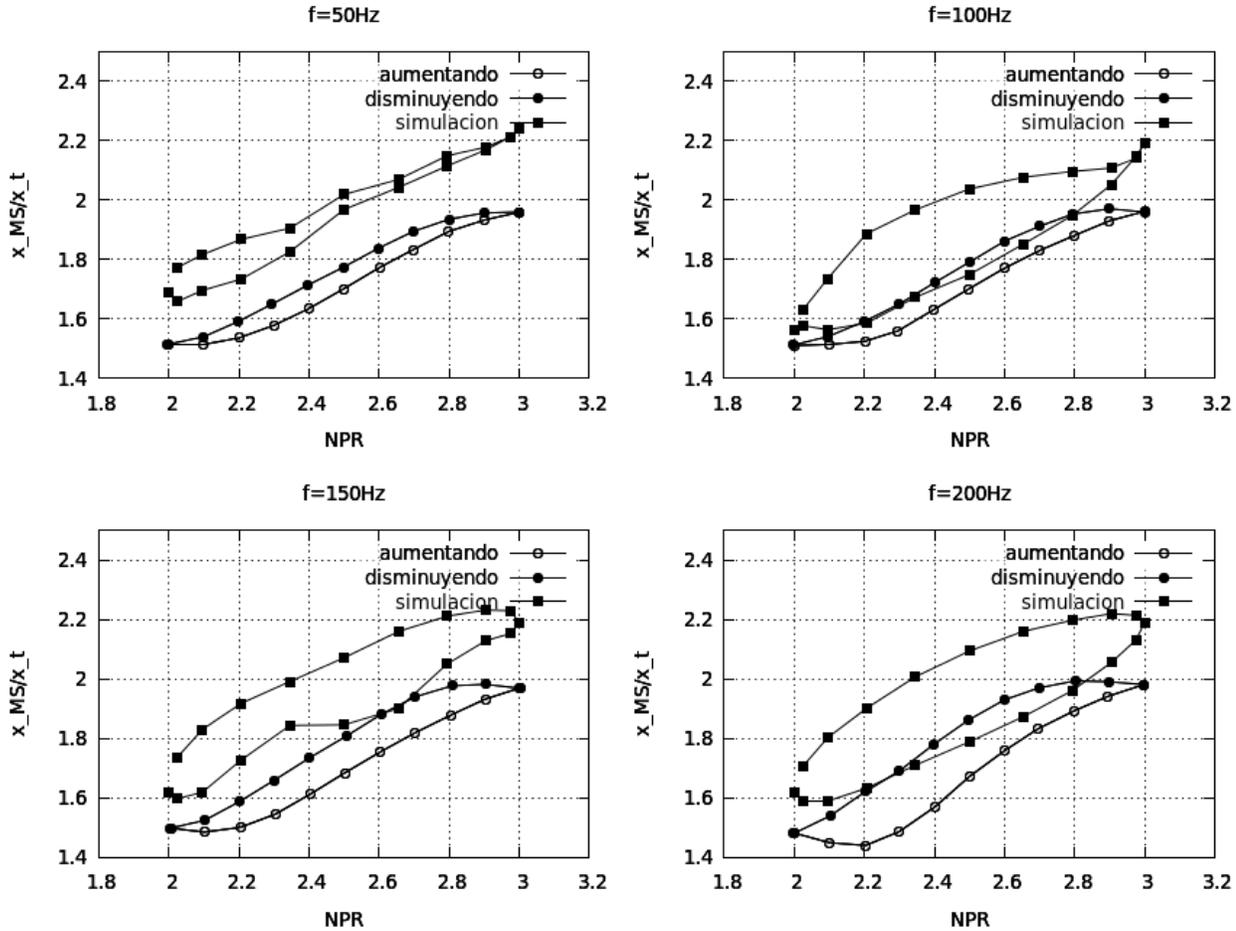


Figura 5-2.: Comparación de la posición de la onda de choque normal (Mach stem). Los círculos corresponden a los valores reportados por Toufique Hasan[9], los cuadrados corresponden a las simulaciones del presente trabajo.

$P4 = \frac{3}{2}\pi$, tal como se muestra en la figura 5-3.

En primer lugar se revisó la curva de presión en la pared de la tobera (figura 5-4). Es claro que en la sección convergente de la tobera se mantiene el comportamiento presentado en las simulaciones para NPR de diseño y validado contra los valores experimentales de Hunter[15] (figura 3-1). Sin embargo, en la sección divergente se puede observar una variación frente a dichos valores. En la figura de la derecha de 5-4 se muestra un detalle de la presión en la pared solo en la primera mitad de la sección divergente. No se puede deducir un patrón entre las diferentes fases analizadas, al menos desde el punto de vista de la presión en la pared.

En las gráficas de la figura 5-5 se muestra el número de Mach (Ma) (primera fila), la presión (p/\bar{p}) (segunda fila), la temperatura (T/\bar{T}) (tercera fila) y la densidad ($\rho/\bar{\rho}$) (cuarta fila), las últimas tres normalizadas por el valor promedio en el corte transversal. Por columnas las

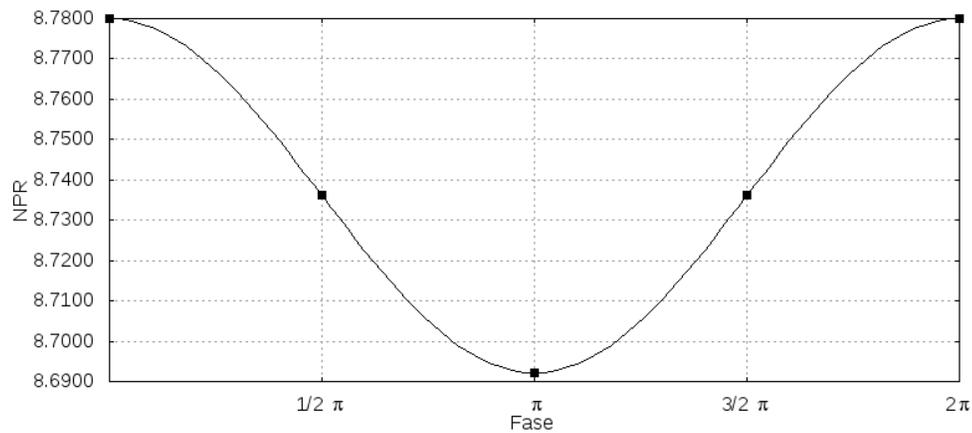


Figura 5-3.: Puntos de medición de datos en la señal oscilante de la presión.

figuras representan cada uno de los puntos, a lo largo del eje axial, de la sección divergente de la tobera como se mostró en la figura 4-1.

Similar a lo observado en la figura 5-4 la presión presenta la variación a lo largo de toda la sección divergente. Se observa que esta variación disminuye con respecto al promedio local en la medida que x/x_t aumenta. También se puede ver que estas variaciones se presentan solo en la región cercana a la pared.

La densidad presenta un comportamiento similar al de la presión. Para la temperatura la variación es menor con respecto al promedio local. En las gráficas del número de Mach la variación es casi imperceptible. Es importante anotar, sin embargo, que para las condiciones de oscilación prescrita, los perfiles siempre colapsan por encima de $y/h = 0,4$, independientemente de la fase.

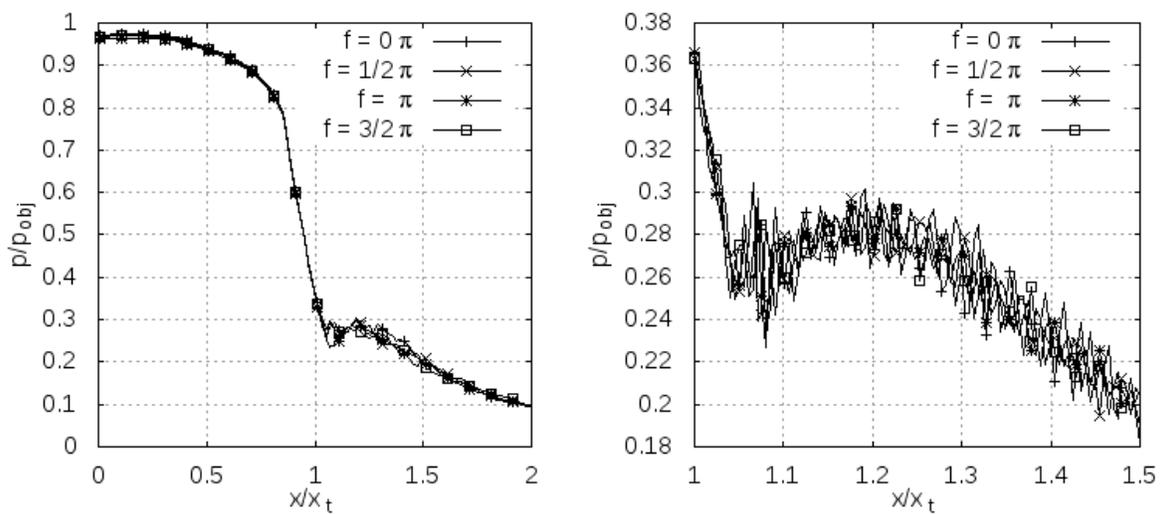


Figura 5-4.: Presión en la pared para 4 fracciones de ciclo de oscilación de la presión.

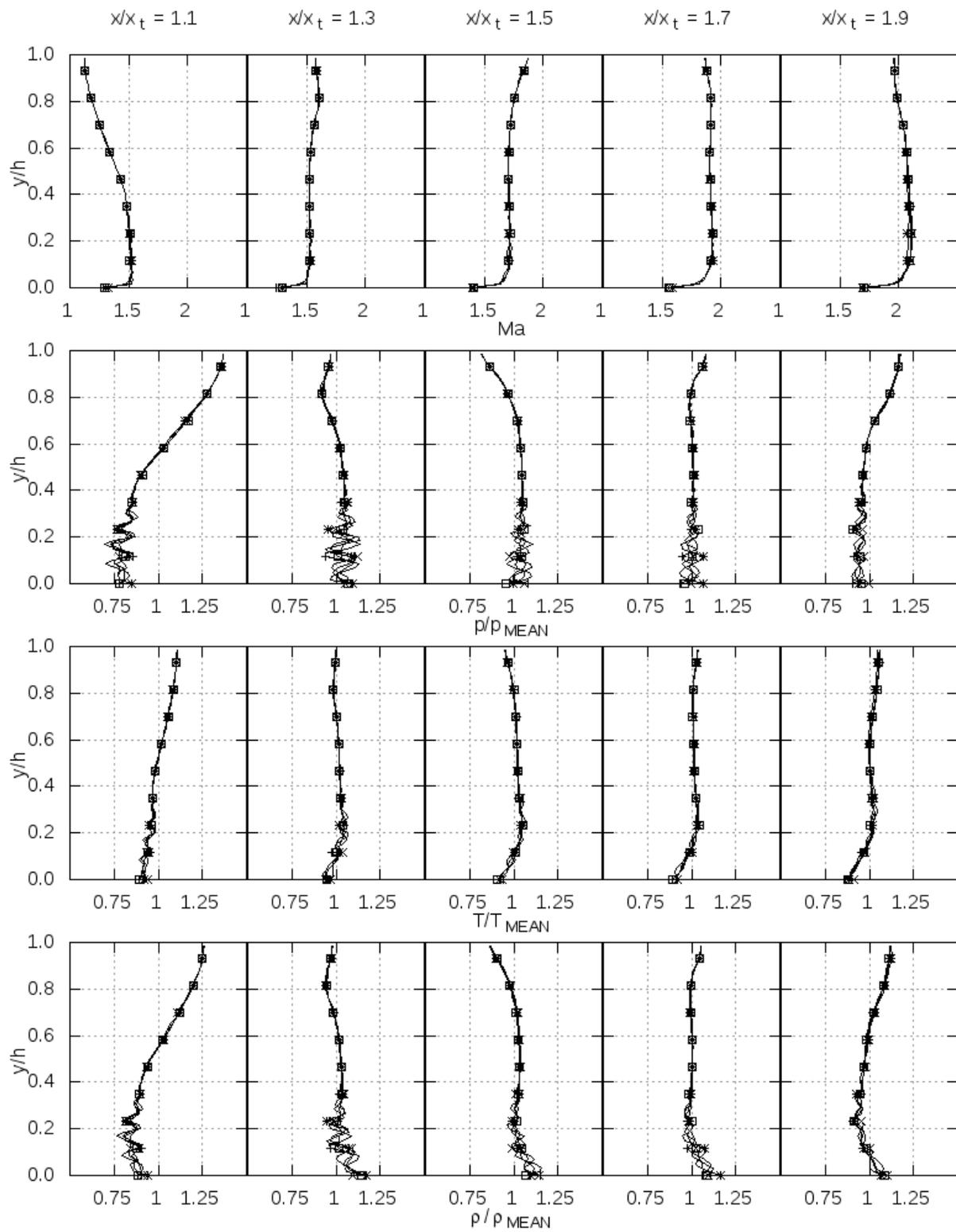


Figura 5-5.: Cintas. Nomenclatura: + 0, \times $1/2\pi$, * π y \square $3/2\pi$

5.1. Estudio del efecto de la compresibilidad en la turbulencia

En las gráficas de la figura 5-6 muestran el comportamiento del RMS del número de Mach (M_{RMS} gráficas de la columna izquierda) y del número de Mach turbulento (M_t gráficas de la columna derecha). Por filas, las figuras representan los cortes transversales de la sección divergente de la tobera como se mostró en la figura 4-1.

Todos los valores de M_{RMS} y de M_t se mantienen por debajo de 0.3, indicando que los efectos de la compresibilidad son mínimos desde el punto de vista de la turbulencia. Sin embargo, comparando estas gráficas con las del caso sin oscilaciones de presión (figura 4-4) se observa un aumento de un orden de magnitud en todos los valores. También se observan múltiples picos en la mitad de la capa límite más alejada de la pared. Estos picos no se observaron en las gráficas del caso sin oscilaciones.

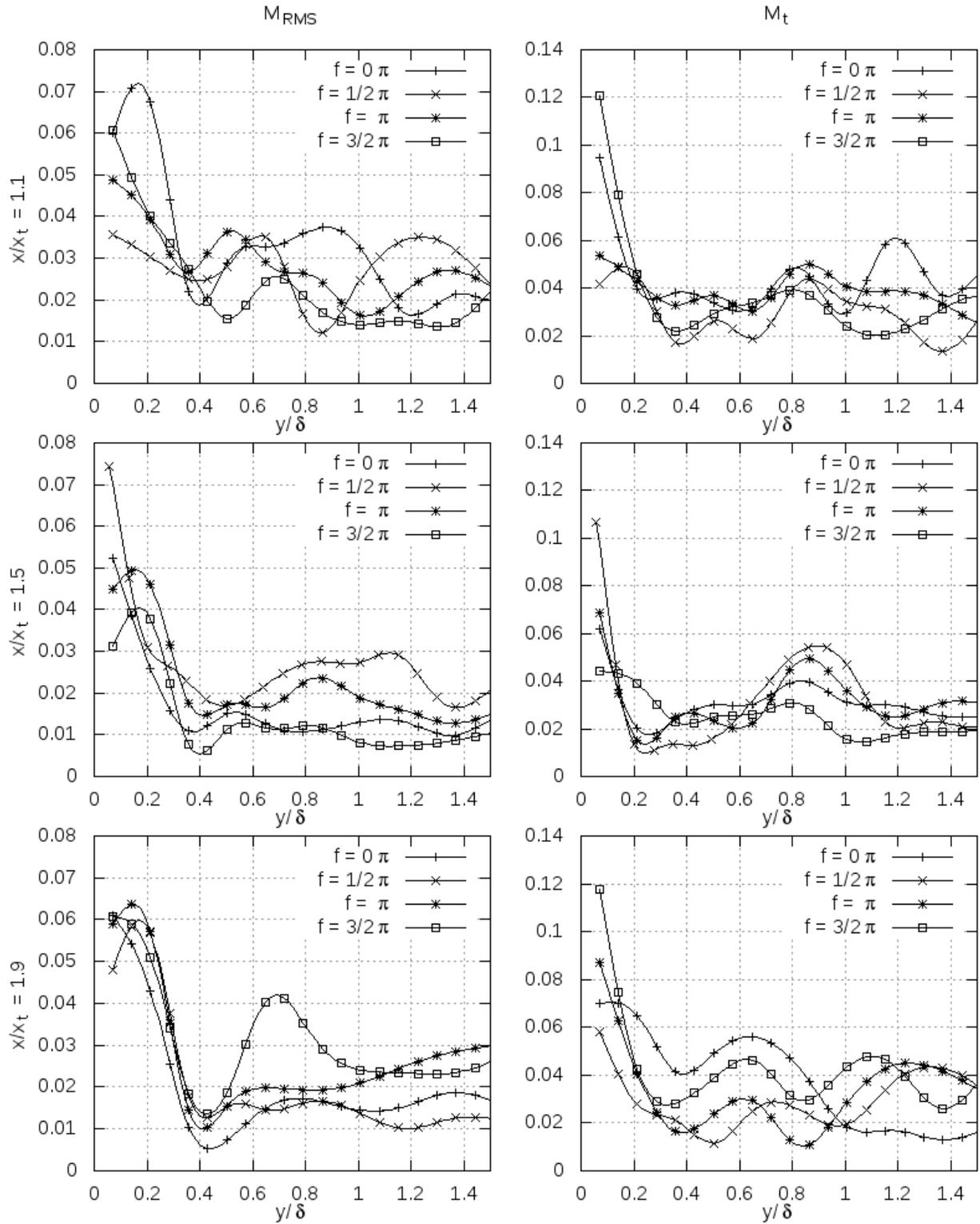


Figura 5-6.: RMS de Ma y Mach turbulento

5.2. Comparación con la Ley de la Pared en flujos incompresibles

La figura 5-7 muestra los valores de la velocidad adimensionalizada en unidades de pared (U^+) para tres secciones transversales de las parte divergente de la tobera. Se observa que las curvas en las tres secciones mostradas no colapsan y describen parte de la Ley Logarítmica en $y^+ \cong 100$.

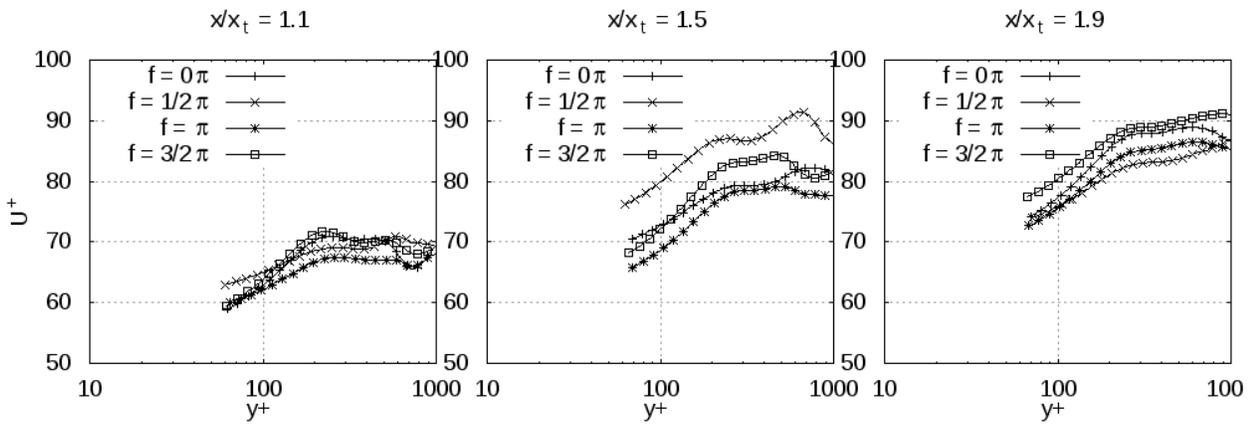


Figura 5-7.: U^+ en función de y^+ y U_c^+ en función de y^+

En las tres secciones las cuatro curvas de U^+ parecen seguir un movimiento oscilatorio independiente de la oscilación de la presión impuesta. En $x/x_t = 1,1$ la velocidad adimensionalizada desciende de $f = 0\pi$ hasta $f = \pi$, y asciende en $f = 3/2\pi$. Por su parte, en $x/x_t = 1,5$ esta misma velocidad asciende de $f = 0\pi$ hacia $f = 1/2\pi$, desciende en $f = \pi$ y vuelve ascender en $f = 3/2\pi$. Por último, en $x/x_t = 1,9$ U^+ desciende de $f = 0\pi$ hacia $f = \pi$, y vuelve ascende hasta $f = 3/2\pi$.

5.3. Comportamiento de Re_{δ^*} , Re_θ y Re_τ

En la figura 5-8 se presenta el espesor de desplazamiento y el espesor de la cantidad de movimiento a lo largo de toda la sección divergente de la tobera. Las cuatro curvas para cada fase del ciclo de oscilación se han superpuesto en cada gráfica.

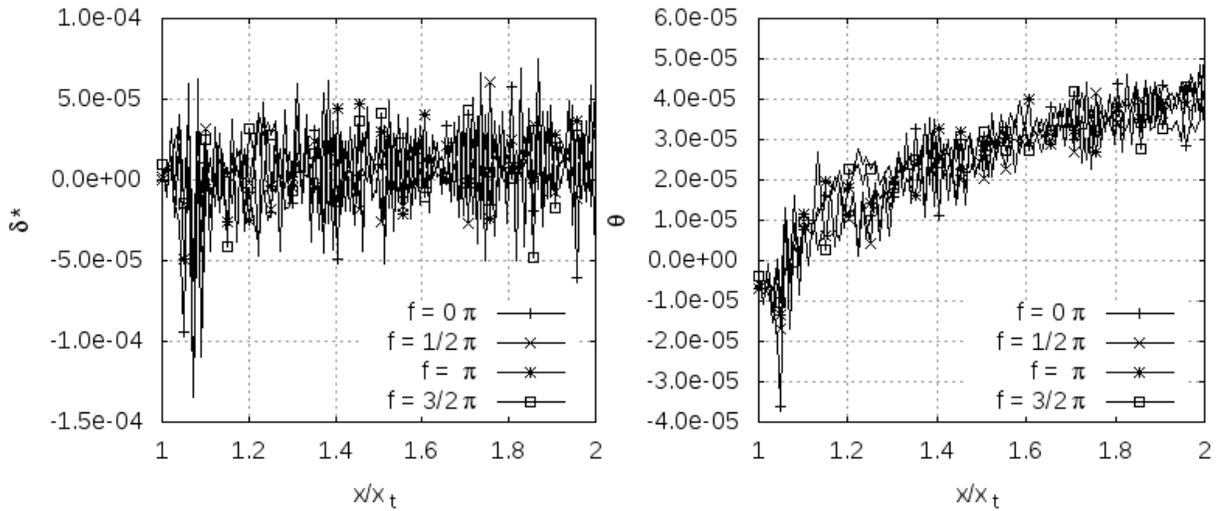


Figura 5-8.: Espesor de desplazamiento y espesor de la cantidad de momento en flujo compresible

Para la figura del espesor de desplazamiento no se observa ningún patron oscilatorio distinguible. La tendencia parece ser continua con una media cercana a cero. Sin embargo, al graficar el mismo factor pero sin tener en cuenta el efecto de la densidad, esto es

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{U(y)}{U_e}\right) dy, \quad (5-1)$$

como se presenta en la figura 5-9, las curvas para el espesor de desplazamiento presentan el comportamiento incremental observado en el capítulo anterior. Este análisis es justificable dada la baja o casi nula afectación del flujo por efectos de compresibilidad (mencionado anteriormente).

Para el flujo turbulento compresible en la sección divergente el espesor de desplazamiento con respecto a la rata de flujo másico presenta un comportamiento promedio continuo y cercano a cero. El mismo espesor con respecto a la rata de flujo volumétrico tiene un comportamiento incremental en la medida que avanza la sección divergente de la tobera. En ambos análisis la oscilación de la presión impuesta genera fluctuaciones en las curvas para todos los puntos de la fase estudiados, aunque no hay una clara distinción de los efectos de las oscilaciones en cada fase. Los resultados de cada fase parecen superponerse unos sobre otros en las diferentes

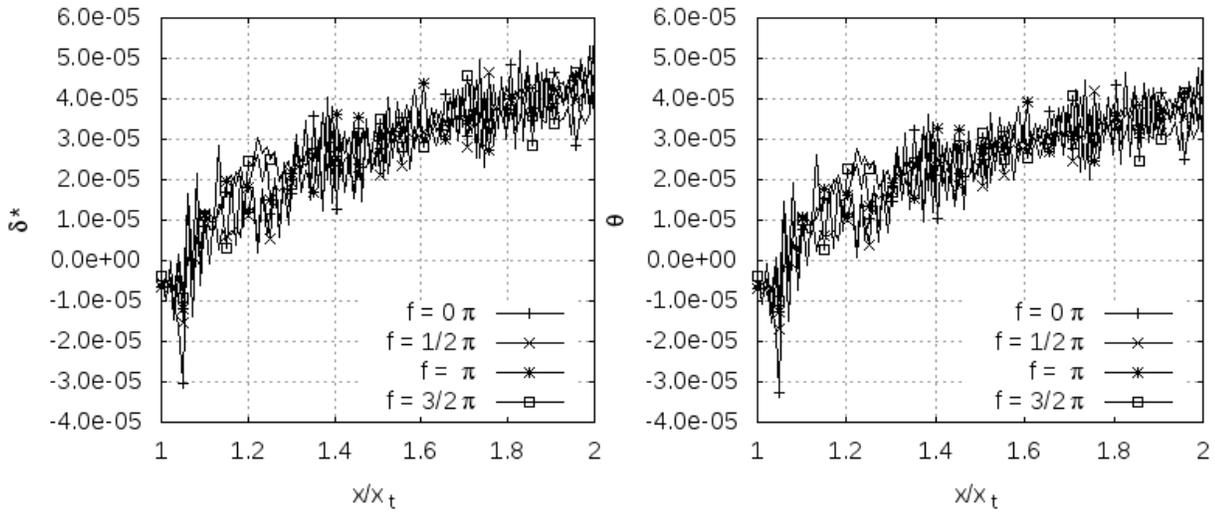


Figura 5-9.: Espesor de desplazamiento y espesor de la cantidad de momento en diferentes posiciones a lo largo del eje axial, para diferentes fases de oscilación. Análisis bajo un enfoque de flujo incompresible

posiciones x/x_t

En la figura 5-10 se muestran los números de Reynolds con respecto al espesor de desplazamiento y al espesor de la cantidad de movimiento, estos últimos con base en la rata de flujo volumétrico. Ambos siguen la tendencia de la figura 5-9. Según estos parámetros el flujo es turbulento en estos espesores a partir del 20 % de la sección divergente.

En la figura 5-11 se presenta el comportamiento del número de Reynolds de fricción (Re_τ) y el esfuerzo cortante en la pared normalizado con el valor en la garganta ($\tau_w/\tau_{w,0}$), a lo largo de toda la sección divergente de la tobera.

Para Re_τ se tienen valores que varían alrededor de 1000 en toda la sección divergente. El esfuerzo cortante en la pared muestra en promedio un descenso similar al observado en las simulaciones analizadas en el capítulo 3. En los valores de ambas gráficas la oscilación de la presión impuesta genera fluctuaciones en las curvas para todos los puntos de la fase estudiados.

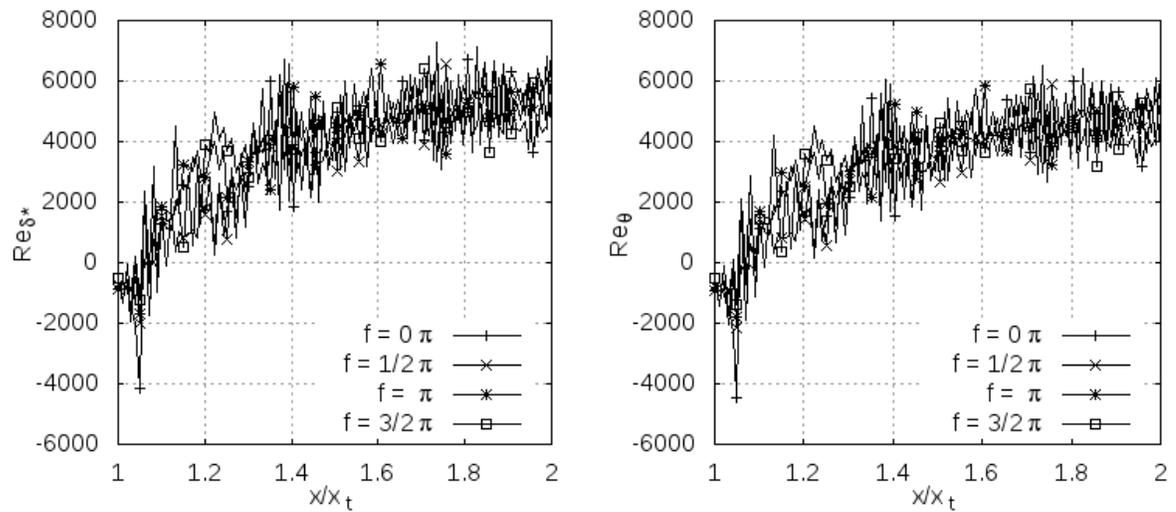


Figura 5-10.: Números de Reynolds respecto a el espesor de desplazamiento y espesor de la cantidad de momento en flujo incompresible

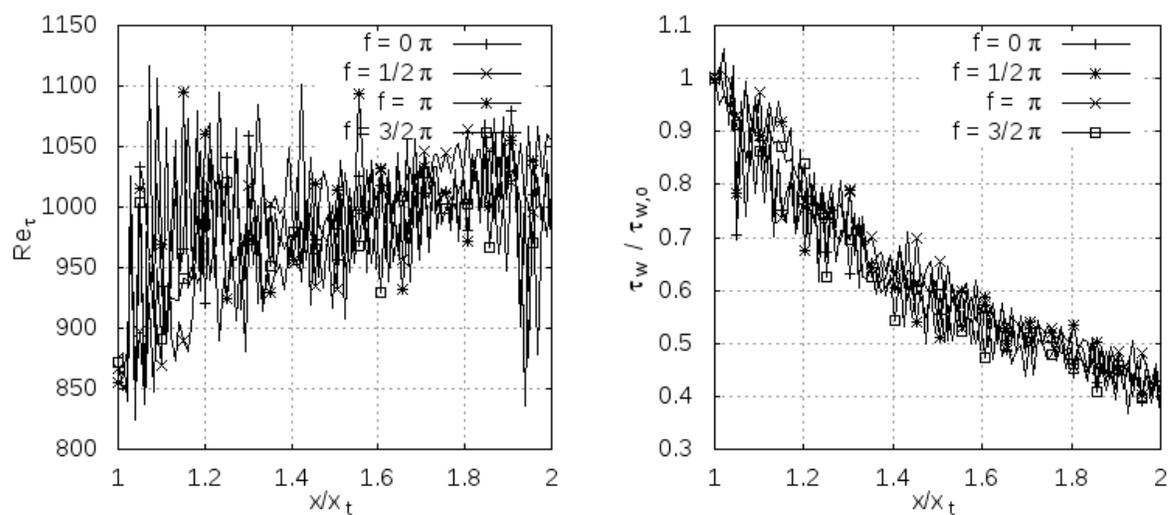


Figura 5-11.: Número de Reynolds de fricción y Esfuerzo cortante en la pared

5.4. Perfiles de los valores de RMS

La figura 5-12 muestran las gráficas para los valores de los RMS de la temperatura, la densidad y la presión para la simulación con condición de frontera oscilante.

La columna de figuras de la izquierda muestra las curvas de T_{RMS}/\bar{T} , la columna central muestra $\rho_{RMS}/\bar{\rho}$, y la columna de la derecha muestra p_{RMS}/\bar{p} . La primera fila de figuras equivale a la sección transversal de la parte divergente de la tobera en $x/x_t = 1,1$, la segunda fila a $x/x_t = 1,5$ y la tercera fila a $x/x_t = 1,9$.

Para todos los casos mostrados de T_{RMS}/\bar{T} , $\rho_{RMS}/\bar{\rho}$ y p_{RMS}/\bar{p} los valores están un orden de magnitud por encima de lo observado en simulaciones sin la oscilación de la presión impuesta. Esto es similar a lo que se analizó para el RMS del número de Mach y el número de Mach turbulento en la figura 5-6.

En las tres propiedades mostradas se observa un alejamiento del comportamiento típico de las gráficas de RMS, donde se suele tener un pico cercano a la pared y un valle plano en la mitad de la capa límite más alejada de la pared (como lo presentado en el capítulo anterior). En el presente caso se observan picos y valles distribuidos no uniformemente a lo ancho de toda la capa límite. De la mano con lo analizado en la figura 5-5, estos picos y valles tienen mayor amplitud para $\rho_{RMS}/\bar{\rho}$ y p_{RMS}/\bar{p} , y menores para T_{RMS}/\bar{T} .

Todas las gráficas de la figura 5-12 parecen tener un movimiento oscilatorio independiente de la oscilación de la presión impuesta, siguiendo el análisis realizado en la figura 5-7.

A diferencia de lo presentado en el capítulo anterior para simulaciones sin oscilación de la presión a la entrada, en las gráficas de T_{RMS}/\bar{T} , $\rho_{RMS}/\bar{\rho}$ y p_{RMS}/\bar{p} no se observa claramente que las fluctuaciones de estas propiedades disminuyan en la medida en que avanza la posición en la sección divergente de la tobera partiendo de la garganta y hacia la salida de la misma.

La figura 5-13 muestra los valores de los RMS de las componentes de la velocidad en la dirección del flujo ($U_{x,RMS}$) y normal a la pared ($U_{y,RMS}$), para la simulación con condición de frontera oscilante. La columna de figuras de la izquierda muestra las curvas de $U_{x,RMS}$, la columna de la derecha muestra $U_{y,RMS}$. La primera fila de figuras equivale a la sección transversal de la parte divergente de la tobera en $x/x_t = 1,1$, la segunda fila a $x/x_t = 1,5$ y la tercera fila a $x/x_t = 1,9$.

De forma similar a las gráficas de RMS de temperatura, densidad y presión, los valores del RMS de las componentes de la velocidad están un orden de magnitud por encima de los resultados presentados para las simulaciones sin la condición de presión oscilante. Las curvas de $U_{x,RMS}$ muestran aproximadamente un comportamiento típico (pico cerca a la pared y valle plano alejado de ella), indicando que las fluctuaciones de velocidad del flujo en la dirección principal del movimiento de este se ven menos afectadas por la condición de presión oscilante. Las curvas del RMS de la componente de la velocidad normal a la pared no

muestran este comportamiento típico. Sin embargo, se alcanza a distinguir una disminución de la dispersión de estas fluctuaciones en la medida en que avanza la sección divergente de la tobera.

De forma similar a lo ya expuesto, las gráficas de la figura **5-13** parecen tener un movimiento oscilatorio independiente de la oscilación de la presión impuesta.

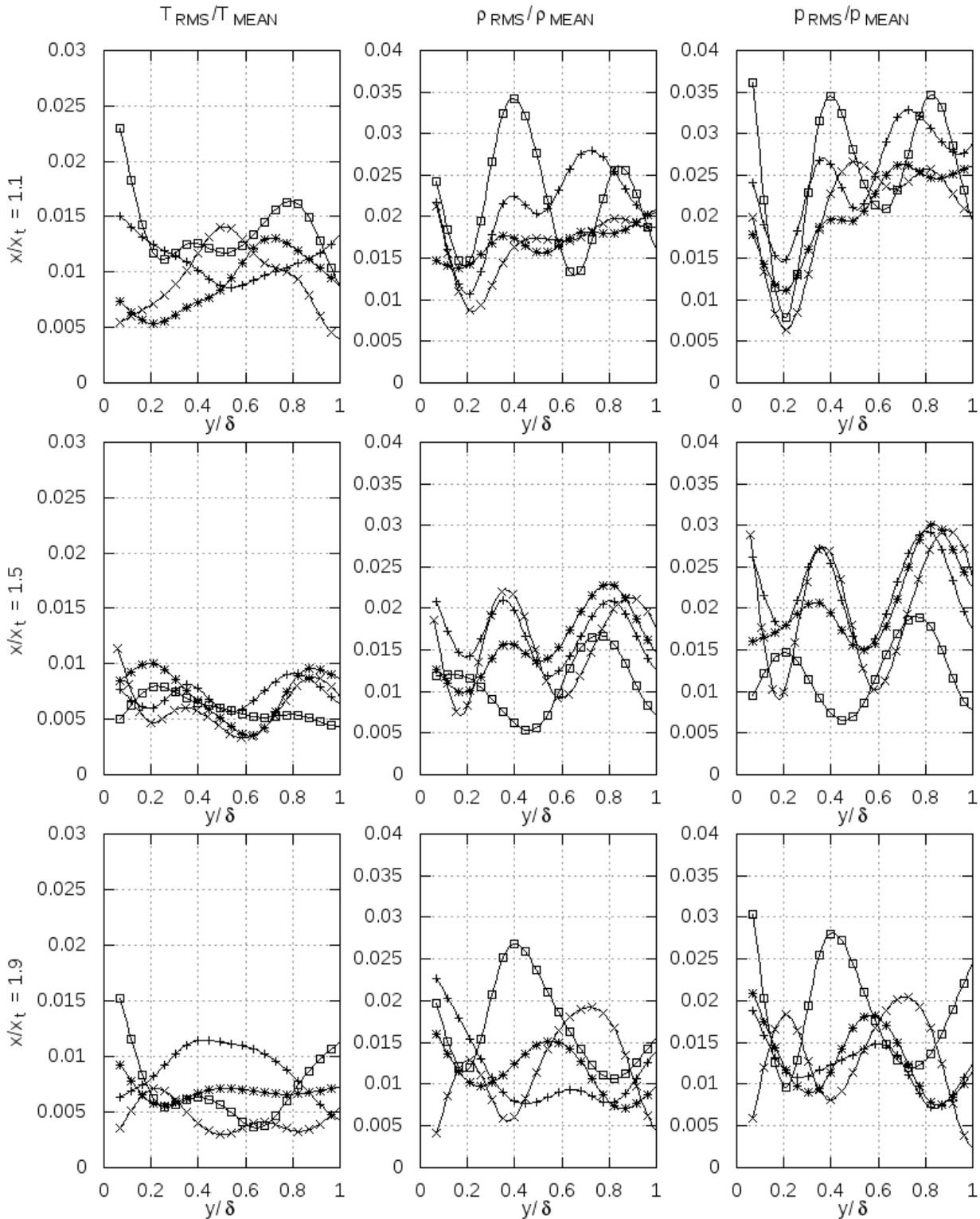


Figura 5-12.: RMS Temperatura, presión y densidad. Nomenclatura: + 0 , \times $1/2\pi$, * π y \square $3/2\pi$

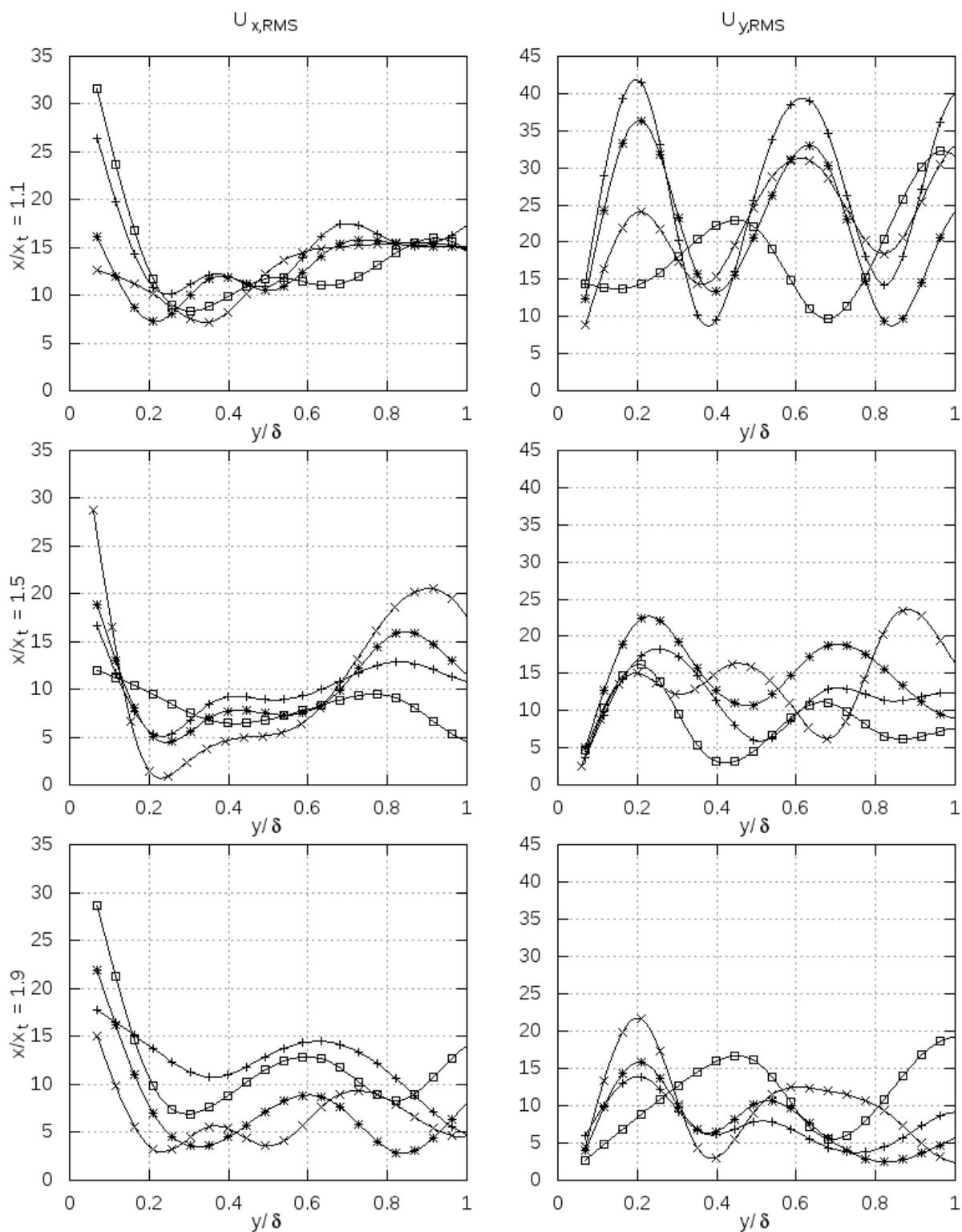


Figura 5-13.: RMS componentes de la velocidad. Nomenclatura: + 0 , x $1/2\pi$, * π y \square $3/2\pi$

6. Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo fue determinar mediante un modelo computacional la respuesta operacional de un flujo compresible turbulento en un ducto convergente-divergente, y evaluar el efecto de prescribir una condición de presión oscilante a la entrada.

Mediante un número de experimentos numéricos se hizo la evaluación de varios solucionadores de flujo compresible disponibles en OpenFOAM. Al evaluar la exactitud de las predicciones de posición de las ondas de choque, así como de los perfiles de temperatura, presión y número de Mach en la región posterior a la onda de choque, se decidió usar como base del modelo computacional del presente trabajo el solucionador tipo *rhoCentralFOAM*. En particular, las predicciones obtenidas mediante este algoritmo, presentaron siempre un margen de error, respecto a los valores teóricos esperados, inferior al 1 %.

El primer modelo computacional evaluado en el presente trabajo, como se discutió en el capítulo 3, consistió de un dominio bidimensional del ducto convergente-divergente seleccionado. Un proceso de validación centrado en aspectos como los perfiles de presión en la pared a lo largo del ducto, y de los valores de eficiencia de empuje, para varios NPR, indicó que el modelo estaba siendo exitoso en reproducir los resultados experimentales y numéricos de otros autores, con errores menores al 1 %. Dado que la condición de flujo era claramente turbulenta, se requirió decidir acerca del uso o no de algún modelo de turbulencia. A diferencia de lo empleado por otros autores, en el presente trabajo se decidió optar por un elevado nivel de discretización del dominio, particularmente en la región cercana a las paredes, con el fin de resolver los fenómenos más importantes en las regiones de capa límite.

A pesar de que el modelo logra captar exitosamente el comportamiento de perfiles de presión y eficiencia del empuje, así como aspectos tales como puntos de separación de capa límite, perfiles de presión a lo largo de la tobera, posición de las ondas de choque dentro de la sección divergente, entre varios otros, el modelo no logro capturar de manera totalmente satisfactoria otros aspectos fuertemente relacionados con la dinámica de flujo en la región cercana a la pared. En particular, los perfiles de velocidad turbulento solo fueron resueltos a partir de la posición $y^+ \approx 10$. De esta manera fue claro que el modelo del presente trabajo no fue capaz de captar aspectos originados en la capa viscosa.

El modelo computacional se validó para diferentes valores de NPR en el régimen sobreexpandido para la tobera seleccionada. Se observó que para aquellos valores de NPR muy inferiores al de diseño, el punto de separación de la capa límite y de los valores de la presión en las paredes despues de este punto diferian ligeramente de lo reportado en los trabajos experimentales usados como referencia. Esto parece indicar que el nivel de refinamiento de la

mallas seleccionadas para la región cercana a las paredes no fue el suficiente para capturar la interacción entre las ondas de choque y las fluctuaciones en la capa límite. Esto explicaría las diferencias apreciadas con respecto a los resultados experimentales. No obstante, es importante resaltar que para los demás valores de NPR el modelo computacional fue exitoso en la predicción de los aspectos asociados con la posición del punto de separación de la capa límite.

La gran mayoría de estudios computacionales de este tipo de ductos se han realizado asumiendo un comportamiento simétrico alrededor de la línea central de la tobera. Esto ha permitido que tales trabajos realicen análisis con relativamente bajos requerimientos computacionales. Precisamente por este enfoque, tales modelos no permiten observar comportamientos asimétricos del flujo. En el presente trabajo, a diferencia de dichos estudios, el modelo computacional se construyó con base en el dominio completo de estudio. Esto permitió capturar el comportamiento asimétrico de las ondas de choque en el interior de la sección divergente de la tobera para los casos más sobre-expandidos. Mas aun, se pudo apreciar que dicho efecto asimétrico presentaba un comportamiento altamente dinámico, mostrando oscilaciones en la posición y variaciones en la forma de las ondas de choque presentes. Este aspecto es también inexistente en estudios de dominio reducido.

El estudio de compresibilidad para las simulaciones con NPR de diseño y aquellas en el régimen sobre-expandido, mostró que las fluctuaciones de la turbulencia no son afectadas por efectos de compresibilidad que cambien significativamente las propiedades globales de la misma. A esta misma conclusión se llegó realizando este estudio para las simulaciones tridimensionales y las que tuvieron una condición de presión oscilante a la entrada.

Con el fin de determinar si la hipótesis de Morkovin era aplicable al flujo estudiado, se determinaron los perfiles de velocidad normalizados en unidades de pared, usando la transformada de Van Driest como mecanismo de ponderación de las fluctuaciones de densidad. Los perfiles de velocidad obtenidos mediante esta metodología distaron del comportamiento observado en el flujo incompresible. Por ejemplo, aún cuando se pudo distinguir una región de tipo logarítmico en tales perfiles, los valores de las constantes de ajuste fueron muy diferentes a los observados comúnmente en flujos incompresibles. De esta forma se concluyó que para las condiciones de flujo presentes en el ducto convergente-divergente, es inapropiado tratar de realizar análisis de características turbulentas siguiendo el enfoque de flujo incompresible. Lo mismo se pudo observar en todas las simulaciones con NPR de diseño, en aquellas en régimen sobre-expandido, así como en todas las simulaciones tridimensionales.

Se analizó el espesor de desplazamiento y el espesor de la cantidad de movimiento para todas las simulaciones del presente trabajo. Para las simulaciones con NPR de diseño, aquellas en el régimen sobre-expandido y las de tres dimensiones, la tendencia de estos factores es a aumentar en la medida que aumenta la sección divergente de la tobera. Los números de Reynolds que se calcularon con respecto a estas cantidades siguen la misma tendencia. Para las simulaciones con condición de presión oscilante a la entrada, el espesor de desplazamiento medido con respecto al flujo másico presenta un comportamiento promedio continuo y cercano a cero. Al calcular el espesor de desplazamiento medido con respecto al flujo vo-

lumétrico se observó la misma tendencia de los casos sin esta condición a la entrada.

Los valores del número de Reynolds de fricción presentan una tendencia general (para todas las simulaciones) a aumentar en el primer 40 % de la sección divergente de la tobera, y luego a disminuir en la sección restante. El valor medio de este factor para las simulaciones con NPR de diseño fue de 900, en las simulaciones con régimen sobre-expandido fue de 970, en las de tres dimensiones fue de 800, y para las simulaciones que tuvieron una condición de presión oscilante a la entrada fue de 1000.

En todas las simulaciones el esfuerzo cortante en la pared tuvo un comportamiento similar, un máximo en la garganta de la tobera, y disminuyendo en la medida en que avanza la sección divergente de la tobera. Al llegar a la salida de la tobera el esfuerzo cortante en este punto es aproximadamente el 40 % del que se presentaba en la garganta.

Los valores de los RMS calculados muestran un comportamiento típico (un pico cercano a la pared y un valle plano en la mitad de la capa límite más lejana de la pared), esto para las simulaciones en el régimen sobre-expandido y las de tres dimensiones. En estos casos se pudo observar una disminución de las fluctuaciones de las variables analizadas en la medida en que se estudiaban posiciones en la tobera que se alejaban de la garganta. Para las simulaciones que tuvieron una condición de presión oscilante a la entrada los valores de los RMS estuvieron un orden de magnitud por encima de los mismos factores para casos sin oscilación. Esto se puede entender como una amplificación de la turbulencia por la oscilación de la presión impuesta a la entrada. Esta amplificación fue más fuerte en las fluctuaciones de la presión, de la densidad y de la componente de la velocidad normal a la pared. La amplificación es menos notoria en las fluctuaciones de la temperatura, y menor aún en las fluctuaciones del número de Mach y de la componente de la velocidad en la dirección en que se mueve el fluido.

A. Descomposición de Reynolds de las Ecuaciones de Navier-Stokes Utilizando Promedios de Favre

Al aplicar la descomposición de Reynolds con promedios de Favre a las ecuaciones de conservación éstas quedan de la siguiente manera: la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (\text{A-1})$$

las ecuaciones de momentum,

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho u_i'' u_j''}), \quad (\text{A-2})$$

para la ecuación de energía tomamos la ecuación de entalpía total:

$$h_0 = h + \frac{1}{2} u_i u_i \quad (\text{A-3})$$

y aplicando los promedios tendríamos,

$$\tilde{h}_0 = \tilde{h} + \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho u_i u_i}}{\bar{\rho}}, \quad (\text{A-4})$$

ampliando los términos,

$$\tilde{h}_0 = \tilde{h} + \frac{1}{2} \tilde{u}_i \tilde{u}_i + \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{\bar{\rho}}, \quad (\text{A-5})$$

donde $\tilde{h}_0 = \overline{\rho h_0} / \bar{\rho}$ y $\tilde{h} = \overline{\rho h} / \bar{\rho}$. Usando los conceptos dados para la ecuación de energía en la sección anterior tendríamos,

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{h}_0}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{h}_0}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\overline{\rho u_j'' h_0''} + \overline{u_i d_{ij}} - \bar{q}_j) \quad (\text{A-6})$$

La entalpía total se expande en términos de la velocidad y la densidad,

$$h_0'' = h'' + \tilde{u}_i u_i'' + \frac{1}{2} \left(u_i'' u_i'' - \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{\bar{\rho}} \right), \quad (\text{A-7})$$

y finalmente,

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{h}_0}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{h}_0}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{u}_i \overline{d_{ij}} + \overline{u_i'' d_{ij}} - \tilde{u}_i \bar{\rho} u_i'' u_j'' - \frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i'' u_j''} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{q}_j + \overline{\rho u_j'' h''}). \quad (\text{A-8})$$

Bibliografía

- [1] Kuentzmann P. Combustion instabilities. *AGARD LS-180*, 1991.
- [2] Culick F.E.C. and Yang V. Prediction of the stability of unsteady motions in solid propellant rocket motors. *AIAA*, 143:719–779, 1992.
- [3] G.P. Sutton and O. Biblarz. *Rocket Propulsion Elements*. John Wiley Sons, Inc., 2001.
- [4] M.J.L. Turner. *Rocket And Spacecraft Propulsion*. Springer, 2005.
- [5] S. Ballereau, F. Godfroy, s. Gallier, O. Orlandi, and Thepenier J. Evaluation method of thrust oscillations in large srm - application to segmented srm[®]s. *AIAA*, 2011.
- [6] Y. Fabignon, J. Dupays, G. Avalon, F. Vuillot, N. Lupoglazoff, G. Casalis, and M. Prévost. Instabilities and pressure oscillations in solid rocket motors. *Aerospace Science and Technology*, 7:191–200, 2003.
- [7] P. N. TENGLI, C.S. RAMESH, K. VISWANATHAN, and R. SARAVANAN. Frequency analysis of instability observed in a large segmented solid rocket motor. *Indian J.Sci.Res.*, 3(1):65–71, 2012.
- [8] D.R. Mason, R A. Morstadt, S. M. Cannon, E. G. Grossg, and D. B. Nielsen. Pressure oscillations and structural vibrations in space shuttle rsm and etm-3 motors. *AIAA*.
- [9] A.B.M Toufique Hasan. Characteristics of overexpanded nozzle flows in imposed oscillating condition. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 46:70–83, 2014.
- [10] S.B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.
- [11] J.M. McDonough. *Introductory Lectures on Turbulence*. University of Kentucky, 2007.
- [12] D. Papamoschou and A. Zill. Fundamental investigation of supersonic nozzle flow separation. *AIAA*, 2004.
- [13] OpenFOAM Foundation. *OpenFOAM User Guide*. 2010.
- [14] A. Kurganov and E. Tadmor. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection diffusion equations. *Journal of Computational Physics*, 160:241–282, 2000.
- [15] C.A. Hunter. Experimental, theoretical, and computational investigation of separated nozzle flows. *AIAA*, 1998.

-
- [16] A. Balabe, A.M. Hegab, S. Wilson, M. Nasr, and S. El-Behery. Numerical simulation of turbulent gas flow in a solid rocket motor nozzle. *ASAT-13*, 2009.
- [17] A. Balabel, A.M. Hegab, M. Nasr, and Samy M. El-Behery. Assessment of turbulence modeling for gas flow in two-dimensional convergent–divergent rocket nozzle. *Applied Mathematical Modelling*, 35:3408–3422, 2011.
- [18] E.F. Spina, A.J. Smits, and S.K. Robinson. The physics of supersonic turbulent boundary layers. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 26:287–319, 1994.
- [19] S. Ghosh. *Direct and large-eddy simulation of supersonic turbulent flow in pipes, nozzles and diffusers*. Tesis de doctorado, Technische Universität München, München, 2007.
- [20] S.E. Guarini, R.D. Moser, K. Shariff, and Wray A. Direct numerical simulation of a supersonic turbulent boundary layer at mach 2.5. *Fluid Mechanics*, 414:1–33, 2000.
- [21] M. Lagha, J. Kim, J.D. Eldredge, and Zhong X. A numerical study of compressible turbulent boundary layers. *Physics of Fluids*, 32:015106 1–12, 2011.
- [22] J. Kim, P. Moin, and R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number. *Fluid Mechanics*, 177:133–166, 1987.