



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# **Aplicación de la estadística funcional en el estudio de algunos atributos hidrofísicos del suelo**

**Diego Leonardo Cortés Delgadillo**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola  
Bogotá, Colombia  
2015



# **Aplicación de la estadística funcional en el estudio de algunos atributos hidrofísicos del suelo**

**Diego Leonardo Cortés Delgadillo**

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título  
de:

**Magister en Ingeniería Agrícola**

Director (a):

Ph. D. Jesús Hernán Camacho Tamayo

Codirector (a):

Ph. D. Ramón Giraldo Henao

Línea de Investigación:

Adecuación de tierras y manejo sostenible

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola

Bogotá, Colombia

2015



*Vuela tan alto como desees y elévate por encima de cualquier limitación. No postergues tus ansias de volar. Trasciende, remóntate a grandes alturas y podrías observar desde allí que eres tú la línea divisoria entre el cielo y la tierra.*

*A. Fernández.*



## **Agradecimientos**

Agradezco a DIOS y LA VIRGEN por mantenerme de pie ante la adversidad.

A mis PADRES por su apoyo constante e incondicional.

Inmensas gracias a los profesores JESÚS HERNÁN CAMACHO TAMAYO y RAMÓN GIRALDO HENAO por su dirección y orientación oportunas en la realización de este trabajo, la consecución de este logro y por hacerme comprender que crecer no tiene límites ni fronteras.

Al DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL Y AGRÍCOLA y a la profesora MARTHA HENAO de la Facultad de CIENCIAS AGRARIAS por el préstamo de los equipos para el desarrollo de la etapa de campo.

Al Laboratorio Nacional de Suelos del INSTITUTO GEOGRÁFICO AGUSTÍN CODAZZI por facilitar la utilización de sus instalaciones en la etapa de laboratorio.

A mis TIOS y PRIMOS por el apoyo y la ayuda brindada en las etapas de campo.

A mis AMIGOS quienes son mi patrimonio, por sus consejos de cada día.

A VIVIANA MARCELA VARÓN RAMÍREZ por recordarme que hacer que valga la pena se puede lograr.



## Resumen

El conocimiento de los suelos agrícolas es el factor predominante para el desarrollo óptimo de las actividades agropecuarias. Usualmente su estudio inicia con el análisis de datos obtenidos a partir del muestreo en un conjunto finito de sitios dentro de la región de interés. Las variables medidas en cada sitio pueden ser escalares (propiedades químicas) o funcionales (p.e., curvas de infiltración ( $I_a$ ), de resistencia mecánica a la penetración (RP) o de retención de agua (CRA)). En este trabajo se hizo el análisis de datos de un Andisol, RP en un Oxisol y CRA en los dos tipos de suelo, en áreas cuya actividad principal es la ganadería. Para cada caso se utilizó una malla regular de 75 sitios. Los datos de cada sitio fueron convertidos en curvas mediante el uso de técnicas no paramétricas de suavizado. Posteriormente se evaluó, a través de análisis de validación cruzada, la aplicabilidad de la geoestadística funcional (GF) como herramienta de predicción espacial de atributos hidrofísicos del suelo explicados mediante curvas y sus resultados fueron comparados con métodos de predicción espacial clásicos (geoestadística univariada) generalmente empleados para el estudio de esta información. Los resultados permiten concluir que el uso de la GF da la posibilidad de tener una visión más general del comportamiento espacial de estos atributos y facilita la predicción de datos funcionales en sitios no muestreados.

**Palabras clave:** Compactación, variabilidad espacial, datos funcionales, kriging funcional, geoestadística, infiltración acumulada, retención de agua

## Abstract

Knowledge of agricultural soils is the predominant factor for the optimum development of agricultural activities. Study usually begins with an analysis of data obtained from the sampling in a finite set of sites in the region of interest. The variables measured at each site can be scalar (chemical properties) or functional (e.g., infiltration curves (Ia), mechanics resistance to penetration (RP) or water retention (CRA)). In this work was made the analysis in an Andisol, RP in an Oxisol and CRA in the two soil types, in areas whose main activity is livestock. In each case, a regular mesh was used 75 sites. The data from each site were converted into curves by using nonparametric smoothing techniques. Subsequently to be evaluated through cross-validation analysis, the applicability of functional geostatistics (GF) as a tool for spatial prediction of hydrophysical soil attributes explained by curves and its results were compared with traditional methods of spatial prediction (univariate geostatistics) generally employed for the study of this information. The results show that the use of GF gives the possibility to have a broader view of the spatial behavior of these attributes and facilitates prediction of functional data in non-sampling sites.

**Keywords:** compaction, spatial variability, functional data, functional Kriging, geostatistics, cumulative infiltration, water retention

## **Objetivos**

### **General**

Evaluar el comportamiento espacial de algunos atributos hidrofísicos del suelo mediante los conceptos de geoestadística y el análisis de datos funcionales.

### **Específicos**

Aplicar las técnicas de análisis de datos funcionales en el estudio y comportamiento de las propiedades físicas del suelo.

Establecer el comportamiento espacial de las propiedades del suelo mediante el uso de la geoestadística.



# Contenido

Pág.

Resumen .....	IX
Objetivos.....	XI
Lista de figuras.....	XIV
Lista de tablas .....	XVI
<b>1 Marco conceptual.....</b>	<b>1</b>
<b>2 Predicción espacial de resistencia mecánica a la penetración usando geoestadística funcional.....</b>	<b>7</b>
2.1 Introducción .....	7
2.2 Materiales y métodos.....	8
2.3 Resultados y discusión .....	12
2.4 Conclusiones .....	20
2.5 Bibliografía.....	21
<b>3 Predicción espacial de la infiltración mediante geoestadística funcional .....</b>	<b>25</b>
2.1 Introducción .....	25
2.2 Materiales y métodos.....	26
2.3 Resultados y discusión .....	30
2.4 Conclusiones .....	37
2.5 Bibliografía.....	37
<b>4 Análisis y predicción espacial de curvas de retención de agua en dos tipos de suelo.....</b>	<b>40</b>
2.6 Introducción .....	40
2.7 Materiales y métodos.....	41
2.8 Resultados y discusión .....	44
2.9 Conclusiones .....	53
2.10 Bibliografía.....	53
<b>5 Consideraciones finales .....</b>	<b>55</b>

## Lista de figuras

Figura 2-1: Curva media de resistencia mecánica a la penetración del área de estudio..	12
Figura 2-2: (a) Datos de resistencia mecánica a la penetración registrados en 75 sitios de una región dedicada a la ganadería en Puerto López, Meta, Colombia (las curvas mostradas son interpoladas). (b). Suavizado de estos datos por medio de una base de B-Splines.....	15
Figura 2-3: Curvas obtenidas a partir de un suavizado por B-Splines de datos de RP registrados cada mm en una zona de Puerto López, Meta, Colombia (curvas grises) y predicción de la curva de RP hallada por Kriging funcional (curva negra).....	16
Figura 2-4: (a) superposición de curvas observadas y predicciones; (b) Validación cruzada funcional, mediciones observadas vs predicciones.....	17
Figura 2-5: Mapas de contorno obtenidos a partir de valores observados in situ (Izquierda) y predichos (Derecha) mediante geoestadística funcional de RP a profundidades de 1 cm, 10 cm, 20 cm y 30 cm. ....	19
Figura 2-6: Validación cruzada de valores de RP a profundidades de 1 cm, 10 cm, 20 cm y 30 cm. ....	20
Figura 3-1: Distribución de sitios de observación e identificación de sitio aleatorio para predicción de curva de infiltración acumulada (I <sub>a</sub> ).....	27
Figura 3-2: Curva de infiltración acumulada en sitio de coordenadas 984475 (W) y 1009685 (N).....	31
Figura 3-3: (a) Curvas de infiltración acumulada registradas en los 75 sitios. (b) Curvas predichas en cada sitio mediante Kriging funcional. ....	32
Figura 3-4: Validación cruzada funcional de la lámina de infiltración (I <sub>a</sub> ). ....	33
Figura 3-5: Mapas de contorno observados (Izquierda) y predichos (Derecha) para (A-B) infiltración básica (I <sub>b</sub> ); (C-D) infiltración acumulada (I <sub>a</sub> ); (E-F) conductividad hidráulica saturada (K <sub>s</sub> ); (G-H) Sortividad (S).....	36
Figura 4-1: Lotes de estudio (a) Centro Agropecuario Marengo, Mosquera, Cundinamarca; (b) Puerto López, Meta. Sitios seleccionados para predicción funcional.	42
Figura 4-2: Curva media de retención de agua (a) Andisol; (b) Oxisol. ....	45
Figura 4-3: Curvas de retención de agua observadas, (a) a 10 cm; (c) a 20 cm, Curvas de retención de agua predichas mediante Kriging funcional, (b) a 10 cm; (d) a 20 cm. En el Andisol.....	47

---

Figura 4-4: Curvas de retención de agua observadas, (a) a 10 cm; (c) a 20 cm, Curvas de retención de agua predichas mediante Kriging funcional, (b) a 10 cm; (d) a 20 cm. En el Oxisol .....	48
Figura 4-5: Validación cruzada lámina de agua aprovechable. Andisol (a) 10 cm; (b) 20 cm; Oxisol (c) 10 cm; (d) 20 cm.....	49
Figura 4-6: Mapas de distribución de lámina de agua aprovechable en Andisol A LAA observada a 10 cm; B LAA predicha a 10 cm; C LAA observada a 20 cm; D LAA predicha a 20 cm. ....	51
Figura 4-7: Mapas de distribución de lámina de agua aprovechable en Oxisol A LAA observada a 10 cm; B LAA predicha a 10 cm; C LAA observada a 20 cm; D LAA predicha a 20 cm. ....	52

## Lista de tablas

Tabla 2-1. Medidas descriptivas de datos de Resistencia Mecánica a la Penetración (RP) tomados en una zona de Puerto López, Meta, Colombia. ....	14
Tabla 2-2. Parámetros de modelos teóricos del semivariograma ajustado para valores observados y predichos a profundidades de 1, 10, 20 y 30 cm. ....	18
Tabla 3-1. Parámetros de los modelos de Kostiakov y Philip en el sitio de coordenadas 984475 (W) y 1009685 (N).....	31
Tabla 3-2. Medidas descriptivas de parámetros de Kostiakov y Philip estimados a partir de datos observados (Obs) y predichos (Pre) .....	34
Tabla 3-3. Parámetros de modelos teóricos del semivariograma ajustado para valores observados (Obs) y predichos (Pre) de Infiltración básica (Ib), infiltración acumulada (Ia), sortividad (S) y conductividad hidráulica saturada (Ks) .....	35
Tabla 4-1. Medidas descriptivas de CC y PMP a profundidades de 0 a 10 cm y 10 a 20 cm en Andisoles y Oxisoles. ....	46
Tabla 4-2. Parámetros teóricos del semivariograma ajustado para valores de lámina de agua aprovechable, observados y predichos para horizontes de 0 a 10 cm y 10 a 20 cm. ....	50

# 1 Marco conceptual

La base de la agricultura de precisión es el conocimiento de la variabilidad de algunos factores del suelo y su relación con la producción, siendo así fundamental para establecer sistemas de producción con mayor sostenibilidad y de mayor eficiencia (Valbuena Calderón et al., 2008), pues la producción de los cultivos oscila como efecto de la variación de estos factores (Godwin & Miller, 2003), adicionalmente, éstos al tener alta variabilidad espacial pueden intervenir en el estudio de los efectos sobre el desgaste de implementos agrícolas (Arango, 2004) al igual que en el desarrollo de cultivos.

Diferentes atributos interactúan de manera compleja y su entendimiento es esencial, para favorecer la sostenibilidad y mejorar la capacidad productiva del suelo (Parr et al., 1992). Estos atributos varían continuamente en el espacio y el tiempo, donde algunas zonas presentan dificultades o restricciones para ser estudiadas. Por otra parte, muestreos intensivos son limitados por costos altos y tiempos prolongados para la obtención de la información. Una solución al problema descrito es la implementación de herramientas geoestadísticas las cuales permitan la evaluación de la variabilidad espacial de los atributos del suelo (Webster, 1985; Juan et al., 2011).

Por lo general, en estos estudios el muestreo es un conjunto finito de datos en una región, calculando las cantidades de las variables de interés. En la mayoría de los casos, los datos del suelo se pueden considerar como variables regionalizadas y dentro de un proceso continuo espacialmente, pues presentan estructura de autocorrelación (Cressie, 1993). A menudo los resultados de estas mediciones se reflejan mediante curvas siendo así, datos funcionales. A pesar de que la obtención de esta información es limitada, el análisis de datos funcionales ha permitido construir curvas a partir de un conjunto discreto de observaciones, mediante técnicas de suavizado e interpolación (Caballero, 2011).

En el presente trabajo se pretende analizar atributos hidrofísicos del suelo que según Cucunuba et al. (2011) presentan alta variabilidad debido a la intensidad de los procesos formadores del suelo y factores antrópicos. Es de vital importancia entender el comportamiento y distribución espacial de estos atributos, para un mejor entendimiento de sus relaciones y ayuda en la toma de decisiones con el fin determinar prácticas específicas a través de zonas de manejo (Cruz et al., 2010).

La productividad de los cultivos está relacionada con la aptitud y calidad físicas del suelo, las cuales se consideran a partir de atributos que afectan directamente el desarrollo de las plantas como el movimiento y retención del agua, el oxígeno, la resistencia a la penetración y la temperatura, y por atributos que tienen relación indirecta, como la textura, la estabilidad de agregados, la porosidad total, el tamaño de poros y partículas y la densidad. (Letey 1985; Topp et al., 1997; Schoenholtz et al., 2000; Singer & Ewing, 2000). De esta manera, el seguimiento de los indicadores de calidad del suelo en distintos agrosistemas, permite proponer diferentes alternativas de uso del suelo de acuerdo con los principios de sostenibilidad (Freitas et al., 2012).

Existen métodos de conservación del recurso suelo entre ellos la siembra directa, sin embargo se han presentado resultados en donde su implementación provoca la compactación inicial de los suelos (Draghi et al., 2005), que en general es causada por el tránsito repetitivo y excesivo de maquinaria agrícola y por el pisoteo de animales en actividades agropecuarias y pastoriles (Medina et al., 2012) e influye en el nivel de la calidad física del suelo.

Doran & Parkin (1994) sostienen que un buen indicador de la calidad del suelo es aquel que es fácil de medir e interpretar, además ser sensible al manejo. La resistencia mecánica a la penetración cumple con estos requisitos y a su vez se correlaciona con otros atributos del suelo como estructura y contenido de agua del suelo (Tormena et al., 2007). El conocimiento del grado de compactación del suelo permitiría el control en cuanto al rendimiento de cultivos e inundaciones en periodos de lluvia. Usualmente, la cuantificación del grado de compactación del suelo consiste en la medición de la resistencia mecánica a la penetración (RP), indirectamente la fuerza que requieren las raíces para deformar la estructura del suelo o penetrar los poros (Medina et al., 2012), con el fin de absorber nutrientes y agua y para dar soporte adecuado a los cultivos.

Los niveles críticos de RP son bastante discutidos, algunos trabajos han establecido rangos de RP para los cuales existirían restricciones para el normal desarrollo de raíces.

Bowen et al., (1994) citan valores entre 0,9 a 1,5 MPa como límites para impedir el crecimiento satisfactorio de las raíces. Threadgill (1982) fija 1,5 MPa y 2,5 MPa. En general se asume 2 MPa como valor limitante del desarrollo y de la dificultad en la elongación radicular (Hakansson & Lipiec, 2000).

La excesiva compactación del suelo además de influir en el desarrollo de raíces, se ve representada por la formación de una capa homogénea relativamente impermeable (Islam et al., 2011) y por el aumento de la densidad del suelo, la disminución de los espacios porosos, encostramiento superficial, disminución de la velocidad de infiltración en el suelo, lo que favorece la escorrentía y acumulación de agua en la superficie. El agua entra en el suelo a través de grietas y poros y se mueve a través de los perfiles del suelo por acción de la gravedad, hasta ser retenida. Parte del agua que se acumula en el espacio poroso es aprovechada por las plantas, otra, en especial la que se encuentra en la parte superior del suelo, retorna a la atmósfera mediante la evapotranspiración, o desplazada a lo largo del suelo por drenaje o percolación.

El atributo hidrodinámico que contempla el movimiento vertical y horizontal del agua en el suelo, estrechamente relacionada con los procesos de capilaridad y de fuerzas asociadas con la adhesión y cohesión de las partículas del suelo (Forero, 2000) se denomina infiltración y es uno de los parámetros básicos para el diseño e implementación de sistemas de irrigación (Chowdary et al., 2006; Machiwal et al., 2006; Silva, 2007).

El conocimiento de la infiltración y de manera específica de la tasa de infiltración respecto al tiempo, permite controlar la erosión o procesos de degradación en los suelos, establecer la disponibilidad de agua para los cultivos, el movimiento de sustancias en el suelo y plantear estrategias de manejo de cuencas (Orjuela-Matta et al., 2010).

Para la determinación de la infiltración existen diferentes métodos, entre los cuales se encuentran los cilindros infiltrómetros, simuladores de lluvia, así como el desarrollo de varios modelos empíricos que estiman la infiltración como una función del tiempo o de algunos parámetros físicos del suelo (Philip, Horton, Kostiakov, entre otros). El método del Philips (1957), derivado de la ecuación de Richards para conductividad hidráulica, es uno de los más utilizados para la determinación de la infiltración y evidencia que tanto la conductividad hidráulica como la sortividad del agua en el suelo, varían con el contenido de agua. A su vez, el modelo de Kostiakov (1932) es una ecuación empírica del comportamiento potencial del agua en el suelo, partiendo del método de anillos concéntricos para la evaluación de la infiltración (Rodríguez-Vásquez et al., 2008).

El estudio e identificación de la variabilidad espacial del suelo parte del muestreo y evaluación localizada de sus atributos. Particularmente, la resistencia a la penetración se expresa como una fuerza requerida a una profundidad determinada y la infiltración se da como una tasa o velocidad de incorporación del agua en el suelo. En estos casos se considera un conjunto de datos limitados y distribuidos en una superficie, de forma aleatoria o con algún grado de dependencia.

Ya que el suelo está estructurado en capas u horizontes, la resistencia a la penetración no podría considerarse como una función continua respecto a la profundidad del suelo. No obstante, mediante herramientas de estadística espacial y multivariada (Delicado et al., 2010) y métodos de suavizado y regresión no paramétrica (Giraldo et al., 2011) se permitiría la agrupación de datos en pocos intervalos significativos, facilitando la identificación de posibles correlaciones de la RP en diferentes profundidades o entre puntos observados, eliminando la redundancia que se obtiene al analizar los datos por separado (Stelluti et al., 1998). Por consiguiente, la geoestadística para datos funcionales daría la respuesta para identificación del grado de dependencia espacial y la predicción de funciones de atributos suelo.

En efecto, la RP, la tasa de infiltración y la retención de agua del suelo, pueden ser representados mediante modelos o estructuras de datos funcionales. El análisis de datos funcionales consideraría estas estructuras como la unidad básica de información (Giraldo, 2009), con el fin de identificar su grado de dependencia espacial, al igual que predecir datos funcionales en lugares donde no se ha realizado muestreo (Giraldo et al., 2011).

El análisis de datos funcionales es en general una forma de pensamiento, donde la unidad básica de información es una función y no una serie de números u observaciones (Giraldo, 2009; Ramsay & Silverman, 2001). Gracias al aporte de Ramsay & Silverman (2005), ha aumentado el interés en el desarrollo de modelos para datos funcionales a través de nuevas herramientas estadísticas como el análisis exploratorio y descriptivo de datos (Ramsay & Silverman, 2005), modelos lineales (Cardot et al., 1999; Ramsay & Silverman, 2005), métodos no paramétricos (Ferraty & Vieu, 2006) o técnicas multivariadas (Goulard & Voltz 1993; Silverman, 1995; Ferraty & Vieu, 2003). Sin embargo, estas técnicas no son adecuadas puesto que no consideran la dependencia entre las funciones en el análisis, y por ello otro tipo de metodologías como el análisis

geoestadístico y las series de tiempo se han adaptado al contexto funcional (Giraldo et al., 2010).



## **2 Predicción espacial de resistencia mecánica a la penetración usando geoestadística funcional**

### **2.1 Introducción**

Los suelos agrícolas se comportan como un sistema complejo que almacena y transmite aire, agua, nutrientes y calor a microorganismos y plantas (Tormena et al., 2002). La resistencia mecánica a la penetración (RP) es un buen indicador de la calidad física del suelo, ya que es fácil de medir e interpretar y se correlaciona con otros atributos del mismo (Tormena et al., 2007). Su conocimiento permite el control en cuanto al rendimiento de cultivos e inundaciones en periodos de lluvia. La cuantificación del grado de compactación del suelo consiste en la medición de la RP, que mide indirectamente la fuerza que requieren las raíces para deformar la estructura del suelo o penetrar los poros (Medina et al., 2012), con el fin de absorber nutrientes y agua y para dar soporte adecuado a los cultivos.

El estudio de las propiedades del suelo en zonas agrícolas parte del muestreo de estas, en un conjunto finito de sitios dentro de la región de interés. Para su análisis se requiere emplear técnicas estadísticas que tengan en cuenta la estructura de dependencia espacial presente en los datos. Comúnmente, el análisis de datos se lleva a cabo a partir del cálculo de medidas descriptivas univariadas (de localización y dispersión), de la obtención de gráficos de distribución (histogramas y diagramas de caja), de la realización de análisis multivariados (correlación, clasificación y componentes principales) y finalmente a través de análisis geoestadísticos univariados (estimación de variogramas, predicción Kriging y obtención de mapas). Con estas herramientas se logra describir el comportamiento espacial (Medina et al., 2012) y se determinan zonas de manejo para la producción agrícola (Camacho-Tamayo et al., 2013). En el caso particular de RP se tiene

en cuenta la profundidad como fuente adicional de variabilidad y generalmente se realizan los análisis geoestadísticos para cada uno de los niveles de esta misma (o con los valores medios de cada sitio). Estas aproximaciones, aunque válidas, permiten tener solo una visión parcial del comportamiento de la RP en función de la profundidad y hacen complejo el proceso de predicción en niveles de profundidad distintos a los considerados.

Recientemente han surgido, en trabajos de análisis geoestadístico, diversas alternativas para hacer predicción espacial, cuando para cada sitio de observación se tienen una curva en vez de un dato. Estos métodos se conocen con el nombre de geoestadística funcional (Giraldo et al., 2010). Para usar estas metodologías es necesario aplicar, como fase previa, técnicas no paramétricas de suavizado (p. ej. regresión kernel o regresión por bases de B-splines) para convertir los datos discretos de cada sitio en funciones.

A partir de análisis geoestadísticos funcionales es posible hacer interpolación espacial de curvas, es decir predecir curvas (en vez de variables) en sitios donde no hay información. Estas metodologías han sido usadas, entre otras áreas, en meteorología para predecir curvas de temperatura en regiones donde no hay estaciones climáticas (Giraldo et al., 2010) y en biología marina para predecir curvas de salinidad en zonas no muestreadas de un estuario (Reyes et al., 2013).

En este trabajo se aplica geoestadística funcional a datos de RP con el objetivo de evaluar su capacidad predictiva y su potencial como herramienta para la descripción de la variabilidad espacial de este tipo de datos. Con este fin, se llevó a cabo un análisis de validación cruzada (predicción en sitios donde ya hay información) para estimar errores de predicción y compararlos con los obtenidos con métodos clásicos de predicción univariada, tradicionalmente usados para el análisis de este tipo de datos.

## **2.2 Materiales y métodos**

El área seleccionada para este estudio se encuentra en el municipio de Puerto López, Meta, Colombia, en las coordenadas  $4^{\circ}22'38,50''$  de latitud norte y  $72^{\circ}13'24,53''$  de

longitud oeste, a una altura aproximada de 156 msnm. Los suelos predominantes en la zona son los Oxisoles y Ultisoles. De acuerdo a la clasificación de Köppen, la región es Aw-intertropical de sabana. La precipitación de la zona presenta un régimen monomodal, con una media anual de 2375 mm, concentrada en épocas lluviosas entre abril y noviembre, temperatura media de 27°C y humedad relativa de 75% (Jaimes et al., 2003). El suelo predominante en la zona es un Typic Haplustox, con una capa gruesa sobre suelo de textura fina franco limosa y pendiente ligeramente inclinada (<5%), susceptibilidad a la degradación física, en virtud de ganadería extensiva con pastizales nativos. Sin embargo, ha habido incorporación progresiva en los últimos años a la producción agrícola mediante la inclusión de cultivos como arroz, maíz y soya.

La unidad experimental fue de 37 ha, la cual se encontraba bajo un cultivo de maíz al momento del muestreo. Las lecturas de RP fueron tomadas mediante el diseño de una red rígida, con puntos de muestreo cada 70 m, para un total de 75 sitios. La medición se realizó con penetrológico marca Eijkelkamp, hasta una profundidad de 0.35 m, equipo que entrega una lectura cada milímetro, es decir que en total se obtuvieron 350 medidas de RP para cada uno de los 75 sitios. Esto sin duda es una limitante práctica para la aplicación de métodos geoestadísticos univariados (Cressie, 1993), puesto que implica realizar 350 análisis de predicción espacial (estimar 350 funciones de semivarianza y llevar a cabo 350 veces el proceso de predicción Kriging. Es también carente de sentido usar geoestadística multivariada (Hoef & Cressie, 1993) puesto que debería estimarse un modelo lineal de correogionalización (Myers, 1982) con un gran número de variables, lo cual es computacionalmente inviable. En esta situación el análisis geoestadístico funcional ofrece una posibilidad de modelación mucho más sencilla (Giraldo et al., 2010). Esta consiste en convertir los 350 datos de cada sitio en una función continua (p.e, a través de la estimación de una función suave por medio del ajuste de bases de funciones) y posteriormente hacer un solo análisis geoestadístico tomando como insumo las curvas estimadas de cada sitio. Esto no solo facilita el trabajo computacional, sino que permite obtener predicciones suaves en función de la profundidad. En el trabajo se acudió al uso de bases de B-splines (Ramsay & Silverman, 2005) para estimar las curvas de RP de cada uno de los 75 sitios. Una vez estimadas las curvas se empleó Kriging funcional (Giraldo, 2009) para hacer, a manera de ilustración, predicción en un sitio no observado y para llevar a cabo un análisis de validación cruzada (leave-one-out cross-validation), que consistió en retirar la curva de cada sitio y con las restantes 74 realizar Kriging funcional para hacer predicción en este mismo, obteniéndose así, para cada sitio,

una curva “observada” (la estimada a través del ajuste de una base de B-splines) y una curva predicha por Kriging funcional. Este procedimiento es útil para evaluar la calidad del método (a menor diferencia entre estimación y predicción, mejor es el método) y para comparar la propuesta con la alternativa clásica.

El predictor Kriging funcional está definido por (Giraldo, 2010),

$$\hat{\chi}(s_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi(s_i); \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad (\text{Ecuación 2-1})$$

donde  $\hat{\chi}(s_0)$  es la predicción de la curva en el sitio  $s_0$ ,  $\chi(s_i)$  corresponde a la curva observada en el sitio  $s_i, i = 1, 2, \dots, n$  y  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ , son los parámetros que dan la influencia de cada curva observada sobre cada curva a predecir.

Los parámetros  $\lambda_i$  son estimados mediante la solución del siguiente sistema de ecuaciones (Giraldo et al., 2010),

$$\begin{pmatrix} \int_T \gamma_t(\|s_1 - s_1\|) dt & \cdots & \int_T \gamma_t(\|s_1 - s_n\|) dt & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \int_T \gamma_t(\|s_n - s_1\|) dt & \cdots & \int_T \gamma_t(\|s_n - s_n\|) dt & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_T \gamma_t(\|s_0 - s_1\|) dt \\ \vdots \\ \int_T \gamma_t(\|s_0 - s_n\|) dt \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\text{Ecuación 2-2})$$

donde las integrales corresponden a la función traza-variograma (Giraldo et al., 2010) evaluada para las distancias entre los sitios de observación (matriz del lado izquierdo de la igualdad) y para las distancias entre los sitios de observación y el sitio de predicción (vector del lado derecho de la igualdad). Estas integrales son calculadas a través de la estimación de la función traza-variograma dada por la expresión (Giraldo et al., 2010),

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2|N(h)|} \sum_{i,j \in N(h)} \int_T (\chi_t(s_i) - \chi_t(s_j))^2 dt, \quad (\text{Ecuación 2-3})$$

donde  $N(h) = \{(s_i, s_j): \|s_i - s_j\| = h\}$  corresponde al número de parejas de sitios separados por una distancia  $h$  y del posterior ajuste de un modelo paramétrico de semivarianza clásico (esférico, exponencial, Gaussiano, Matern) a esta misma.

Se compararon los resultados obtenidos por Kriging funcional con los hallados a través de Kriging univariado en las profundidades de 1, 10, 20 y 30 cm (estos valores fueron escogidos para comparar las predicciones en superficie, en profundidades intermedias y a la mayor profundidad considerada). Para hacer el análisis clásico se tomaron los valores de RP en las profundidades mencionadas y se calculó en cada caso la función de semivarianza dada por (Cressie, 1993).

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{n(\mathbf{h})} [z(\mathbf{x}_i) - z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h})]^2, \quad (\text{Ecuación 2-4})$$

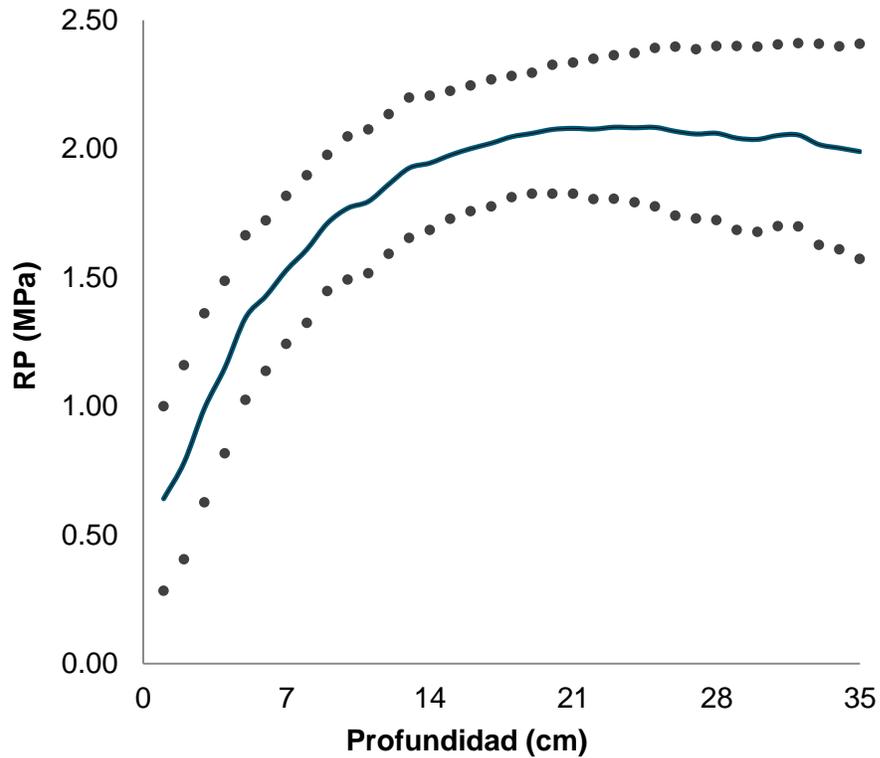
donde,  $z(\mathbf{x}_i)$  corresponde al valor de RP en el punto  $\mathbf{x}_i$ ,  $z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h})$  es el valor del mismo atributo en un punto separado del anterior una distancia  $h$ , y  $N(\mathbf{h})$  es el número de pares de datos separados por la distancia  $h$ . El semivariograma anterior es posteriormente ajustado a través de algún modelo teórico de semivarianza de los antes mencionados. Para seleccionar el mejor modelo se consideran varios criterios: el coeficiente de determinación ( $R^2$ ), la menor suma de las diferencias al cuadrado (SQR) y el coeficiente de variación cruzada (CVC). Los parámetros comunes a los modelos de semivarianza teóricos son la pepita ( $C_0$ ) que es una discontinuidad del semivariograma en el origen, la varianza del proceso ( $C$ ) y el alcance ( $a$ ) que es la distancia hasta la cual hay correlación espacial. Suele usarse también como criterio de selección del modelo la relación nugget-varianza  $C/(C_0+C)$  que establece el grado de dependencia espacial (GDE) que presenta el atributo estudiado. Cambardella (1994) afirma que si ésta es superior al 75% se considera que la dependencia es fuerte, moderada para valores entre 25% y 75% y débil cuando es inferior al 25%

## 2.3 Resultados y discusión

El área de estudio en general, presenta restricciones a un óptimo desarrollo radicular a partir de los 10 cm de profundidad (Figura 2-1) que aunque algunos autores como Bowen et al., (1994) fijan valores críticos que oscilan entre 0,9 y 1,5 MPa, se considera que suelos con valores de RP cercanos a 2,0 MPa son calificados como suelos con excesiva compactación y además de influir en la libre penetración de las raíces en el suelo (Chan et al., 2006; Hakansson & Lipiec, 2000; Hamza & Anderson, 2005), favorecen la escorrentía y la acumulación de agua en la superficie, debido a la disminución de los espacios porosos y la formación de una capa relativamente impermeable (Islam et al., 2011).

Valores descriptivos de RP en la región considerada (para profundidades de 1, 10, 20 y 30 cm) son presentados en la Tabla 2-1. Dentro de cada nivel de profundidad, los valores de media y mediana son muy similares y los coeficientes de simetría son cercanos a cero. Esto revela que las distribuciones de frecuencias son simétricas y que en consecuencia podría asumirse estacionariedad (en términos de la media) en el proceso estocástico subyacente. En otras palabras es posible concluir que el nivel medio de RP fluctúa de manera aleatoria dentro de la región y que no hay una tendencia de cambio claramente marcada en el nivel medio de RP en la zona (una vez fijado nivel de profundidad). Cuando aumenta la profundidad es claro que aumenta la RP (Figura 2-2).

Figura 2-1: Curva media de resistencia mecánica a la penetración del área de estudio.



Valores descriptivos de RP en la región considerada (para profundidades de 1, 10, 20 y 30 cm) son presentados en la Tabla 2-1. Dentro de cada nivel de profundidad, los valores de media y mediana son muy similares y los coeficientes de simetría son cercanos a cero. Esto revela que las distribuciones de frecuencias son simétricas y que en consecuencia podría asumirse estacionariedad (en términos de la media) en el proceso estocástico subyacente. En otras palabras es posible concluir que el nivel medio de RP fluctúa de manera aleatoria dentro de la región y que no hay una tendencia de cambio claramente marcada en el nivel medio de RP en la zona (una vez fijado nivel de profundidad). Cuando aumenta la profundidad es claro que aumenta la RP (Figura 2-2).

Cabe mencionar que la simetría en el contexto de datos espaciales no es necesariamente indicadora de que los datos siguen un modelo de probabilidad normal, solo refleja que el nivel medio de la variable no cambia en una dirección particular o muestra que no hay zonas con valores considerablemente distintos a las restantes. Es común en estudios de suelos asociar la simetría (asimetría) con la presencia (falta) de normalidad. Esto es, en general carente de sentido, puesto que desconoce el hecho de que se analizan datos de un proceso estocástico y no de una variable aleatoria particular.

Es así que puede tenerse asimetría en la distribución de frecuencias de los datos observados cuando el proceso estocástico del cuál provienen los datos es normal multivariado.

Los valores relativamente bajos del CV (menores del 20%) en las profundidades de 10, 20 y 30 cm (Tabla 2-1) indican que en estas profundidades no hay zonas o áreas dentro de la región con valores de RP considerablemente alejados de los restantes. En la profundidad de 1 cm el CV es del 55.9%. Estos resultados reflejan que cuando aumenta la profundidad hay más homogeneidad de los suelos en términos de RP. El hecho de que la variabilidad en la RP sea mayor en la profundidad de 1 cm, puede ser consecuencia de las actividades antrópicas (especialmente labranza y procesos culturales) y de procesos de intemperismo que son fuertemente asociados en esta zona a fuertes precipitaciones.

Tabla 2-1. Medidas descriptivas de datos de Resistencia Mecánica a la Penetración (RP) tomados en una zona de Puerto López, Meta, Colombia.

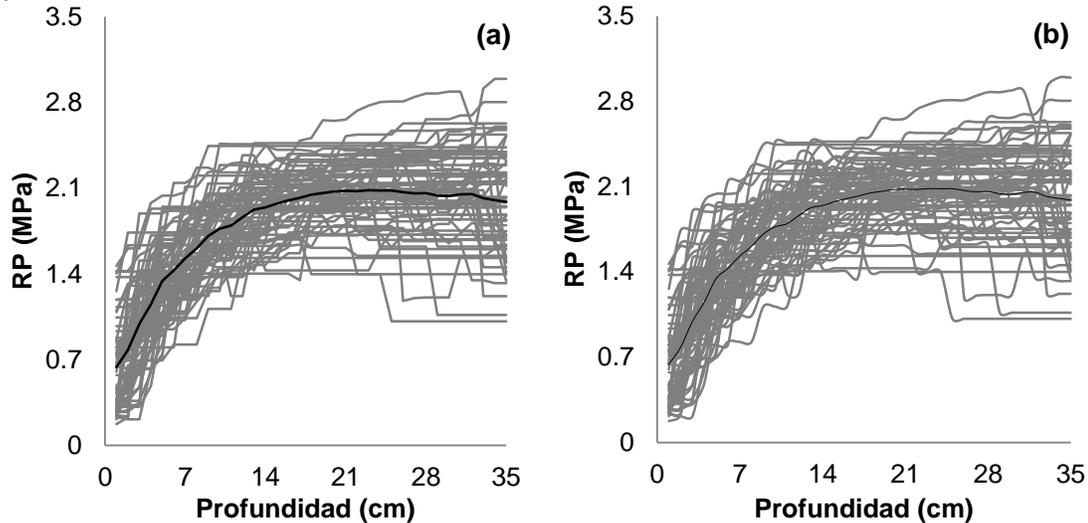
Profundidad (cm)	Media	Mediana	CV, %	Máximo	Mínimo	Asimetría	Curtosis
1	0,64	0,62	55,9	1,47	0,18	0,72	-0,44
10	1,77	1,74	15,7	2,47	1,12	0,26	-0,06
20	2,08	2,10	12,0	2,65	1,40	-0,50	0,30
30	2,04	2,09	17,7	2,89	1,02	-0,49	0,75

Los valores de RP de cada sitio fueron registrados cada mm para profundidades entre 0 y 35 cm. Se presentan los valores descriptivos solo para 4 profundidades.

Los resultados arriba descritos son dados solo para algunos niveles de profundidad. Aunque sin duda estos permiten establecer tendencias generales en el comportamiento de la RP, no muestran un panorama detallado de la variación en el comportamiento de esta misma respecto a la profundidad. Una visión más completa del patrón de comportamiento de la RP en función de la profundidad se presenta en la Figura 2-2, tanto con los datos registrados (A) como con los obtenidos después de llevar a cabo un suavizado por medio del uso de una base de B-Splines (B). La observación de estas curvas permite concluir, desde una perspectiva descriptiva, que hay mayor variabilidad en la RP para profundidades menores. Nótese que cerca al origen el rango de variabilidad de RP fluctúa entre valores cercanos a 0 MPa y 2,5 MPa, mientras que para profundidades superiores a 10 cm (cuando las pendientes de las curvas son cercanas a cero) esta fluctuación tiende a estar entre 1,5 y 2,5 MPa. De la Figura 2-2 también es evidente que hay algunas curvas de RP que son atípicas (alejadas de las restantes) en

profundidades mayores de 15 cm (aproximadamente). Esto no es detectable en la Tabla 1-1.

Figura 2-2: **(a)** Datos de resistencia mecánica a la penetración registrados en 75 sitios de una región dedicada a la ganadería en Puerto López, Meta, Colombia (las curvas mostradas son interpoladas). **(b)**. Suavizado de estos datos por medio de una base de B-Splines

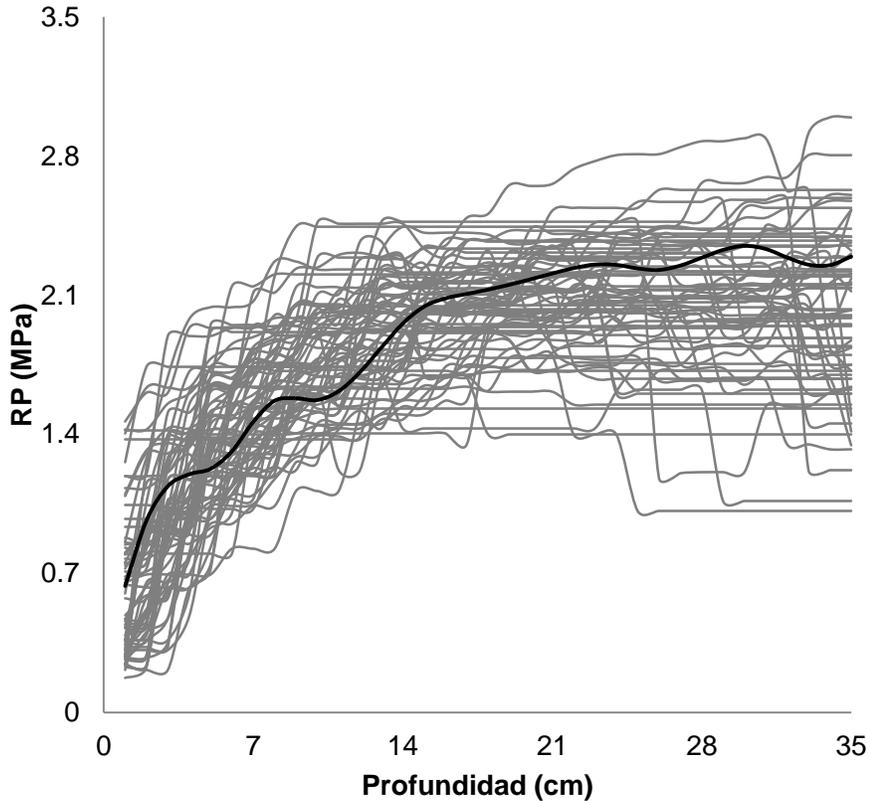


Una vez realizado esta primera aproximación a los datos a través del cálculo de medidas descriptivas y de la exploración del patrón de variación de las curvas, se realizó siguiendo las etapas descritas en la sección anterior, un análisis geoestadístico funcional. Inicialmente a manera de ejemplo de aplicación de esta metodología se muestra la predicción de la curva de RP obtenida en el sitio con coordenadas 952075 (W) y 1141025 (N) (Figura 2-3). Para hacer la predicción se estimó inicialmente la función de traza-semivarianza empleando la Ecuación 2-3 y a partir de esta y usando el sistema de ecuaciones 2-2, se estimaron los parámetros  $\lambda_i$  del predictor Kriging funcional definido en la Ecuación 2-1. Los resultados de la estimación de la Ecuación 2-3 y del ajuste de un modelo teórico de semivarianza a esta función no son incluidos por simplicidad en la presentación.

La curva predicha es coherente con el patrón de comportamiento de las observaciones y permite concluir que el sitio considerado tiene suelo que presenta restricción potencial al crecimiento de las raíces de cultivos (Carr et al., 2007; Ramírez-López et al., 2008) puesto que a partir de los 15 cm de profundidad los niveles de compactación son

superiores a 2MPa de RP, considerado el límite crítico para el crecimiento de raíces (Chan et al., 2006; Hakansson & Lipiec, 2000; Hamza & Anderson, 2005).

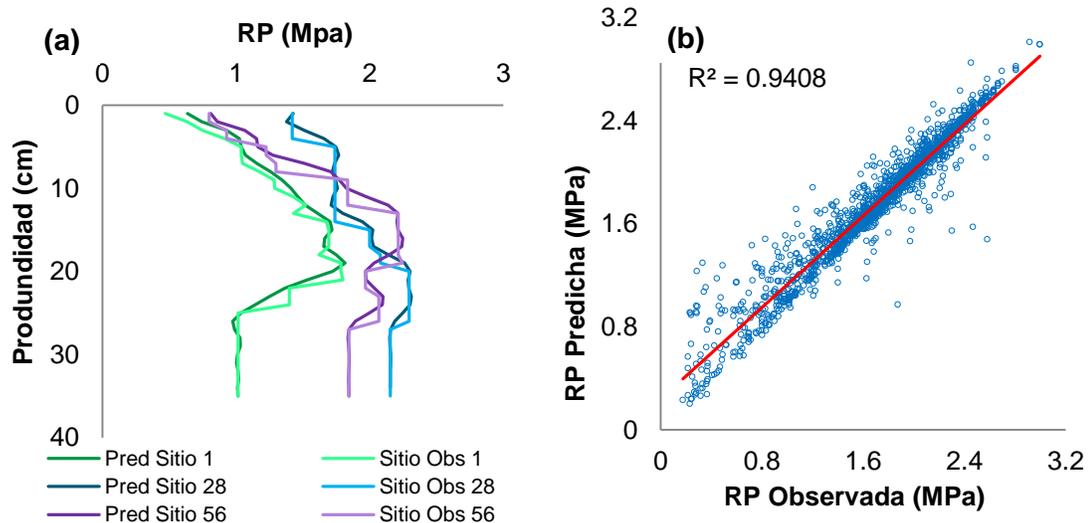
Figura 2-3: Curvas obtenidas a partir de un suavizado por B-Splines de datos de RP registrados cada mm en una zona de Puerto López, Meta, Colombia (curvas grises) y predicción de la curva de RP hallada por Kriging funcional (curva negra)



Para evaluar la bondad de ajuste del predictor Kriging funcional se seleccionaron aleatoriamente 3 sitios para los cuales se tenía información (sitios 1, 28 y 56) y se llevó a cabo un proceso de validación cruzada. La curva de cada uno de estos fue retirada y posteriormente predicha con base en el predictor Kriging funcional y las curvas de los 74 sitios restantes. Las curvas de cada uno de estos sitios y las predicciones obtenidas son presentadas en la Figura 2-4 (a). En los tres casos se evidencia buen ajuste (las curvas predichas están muy cercanas a las suavizadas). Para obtener un indicador numérico de la bondad de ajuste se realizó una regresión lineal simple para comparar los 350 valores observados de cada sitio con las 350 predicciones (valores de las curvas predichas en cada profundidad registrada en los datos muestrales). La regresión obtenida se muestra en la Figura 2-4 (b). Es evidente que hay alta correlación entre las observaciones y las

predicciones. El coeficiente de determinación es muy bueno (94%,  $P < 0,001$ ) indicando que más del 90% de la variabilidad en los datos de RP observados son explicados por el predictor propuesto. De esta misma Figura se observa que el predictor funciona mejor para valores de RP mayores a 1,0 MPa. Esto es consecuencia de la alta variabilidad en las curvas de RP para profundidades cercanas a cero (cuando la RP tiene mayor variabilidad).

Figura 2-4: (a) superposición de curvas observadas y predicciones; (b) Validación cruzada funcional, mediciones observadas vs predicciones



Algunos autores obtuvieron ajuste de modelos teóricos del semivariograma para RP con mayor tendencia a modelos exponenciales (Ramírez-López et al., 2008; Veronese Junior et al., 2006). Por su parte Medina et al., (2012) indican ajuste a modelos esféricos de RP a profundidades 1 y 20 cm y exponenciales a profundidades de 10 y 30 cm. El análisis geoestadístico indicó que la RP a profundidades de 1 y 30 cm se ajusta a modelos exponenciales, y profundidades de 10 y 20 cm se ajustan a modelos esféricos (Tabla 2-2), resultado que se aproxima a lo reportado por diferentes autores.

Valores de  $C_0$  próximos a cero en todas las profundidades estudiadas indican fuerte dependencia espacial, también evidenciada mediante el grado de dependencia espacial al ser superior al 75% (Cambardella, 1994).

Tabla 2-2. Parámetros de modelos teóricos del semivariograma ajustado para valores observados y predichos a profundidades de 1, 10, 20 y 30 cm.

<b>Profundidad</b>	<b>Modelo</b>	<b>Co</b>	<b>Co + C</b>	<b>Alcance, m</b>	<b>CVC</b>	<b>GDE</b>
<b>RP1<sub>Obs</sub></b>	Exponencial	0,025	0,331	143,70	0,80	0,92
<b>RP1<sub>Pre</sub></b>	Exponencial	0,014	0,266	130,80	0,78	0,95
<b>RP10<sub>Obs</sub></b>	Esférico	0,002	0,025	151,00	0,69	0,94
<b>RP10<sub>Pre</sub></b>	Esférico	0,002	0,024	138,70	0,63	0,92
<b>RP20<sub>Obs</sub></b>	Esférico	0,000	0,011	110,50	0,73	1,00
<b>RP20<sub>Pre</sub></b>	Esférico	0,000	0,012	128,10	0,67	1,00
<b>RP30<sub>Obs</sub></b>	Exponencial	0,003	0,031	158,40	0,60	0,89
<b>RP30<sub>Pre</sub></b>	Exponencial	0,000	0,021	99,60	0,60	1,00

Con el propósito de verificar la aplicabilidad de la geoestadística funcional en la predicción de los datos de RP se elaboraron mapas de distribución espacial para valores observados y predichos para las profundidades de 1, 10, 20 y 30 cm (Figura 2-5). Se evidencia un buen ajuste, dado el apreciable decrecimiento o crecimiento irregular de la RP en algunas zonas, comportamiento observado tanto en los mapas obtenidos a partir de datos observados como los obtenidos por las predicciones.

A su vez, como finalidad de evaluar la técnica de predicción funcional se realizó regresión lineal simple para comparar los 75 valores observados con las 75 predicciones de RP en cada profundidad. Se encontró que hay alta correlación entre las observaciones y las predicciones, representada por los coeficientes de determinación que son mayores conforme aumenta la profundidad del suelo, demostrando que en términos de RP existe mayor homogeneidad en el suelo y mejor ajuste de la aplicabilidad de predicción funcional.

Figura 2-5: Mapas de contorno obtenidos a partir de valores observados in situ (Izquierda) y predichos (Derecha) mediante geoestadística funcional de RP a profundidades de 1 cm, 10 cm, 20 cm y 30 cm.

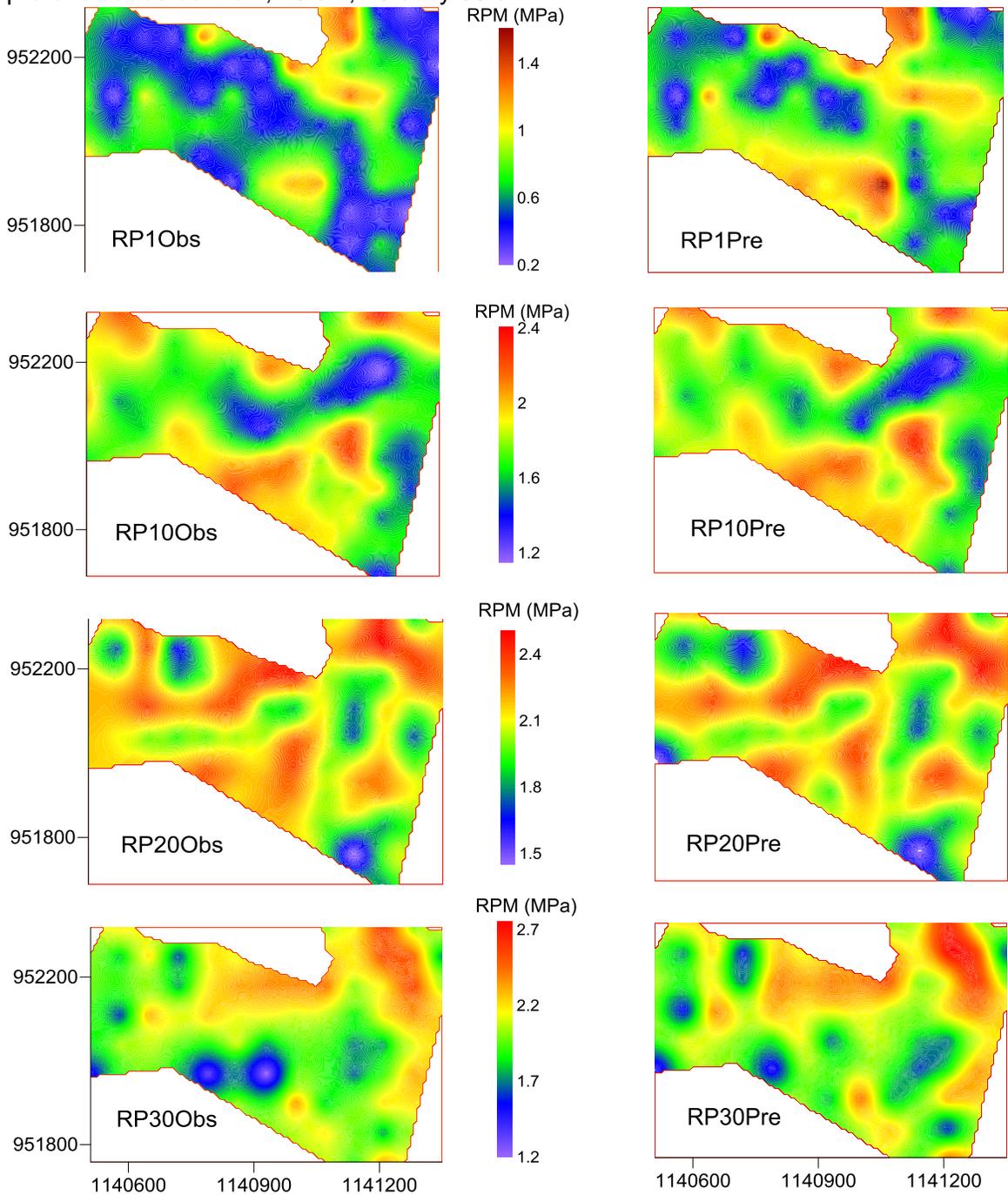
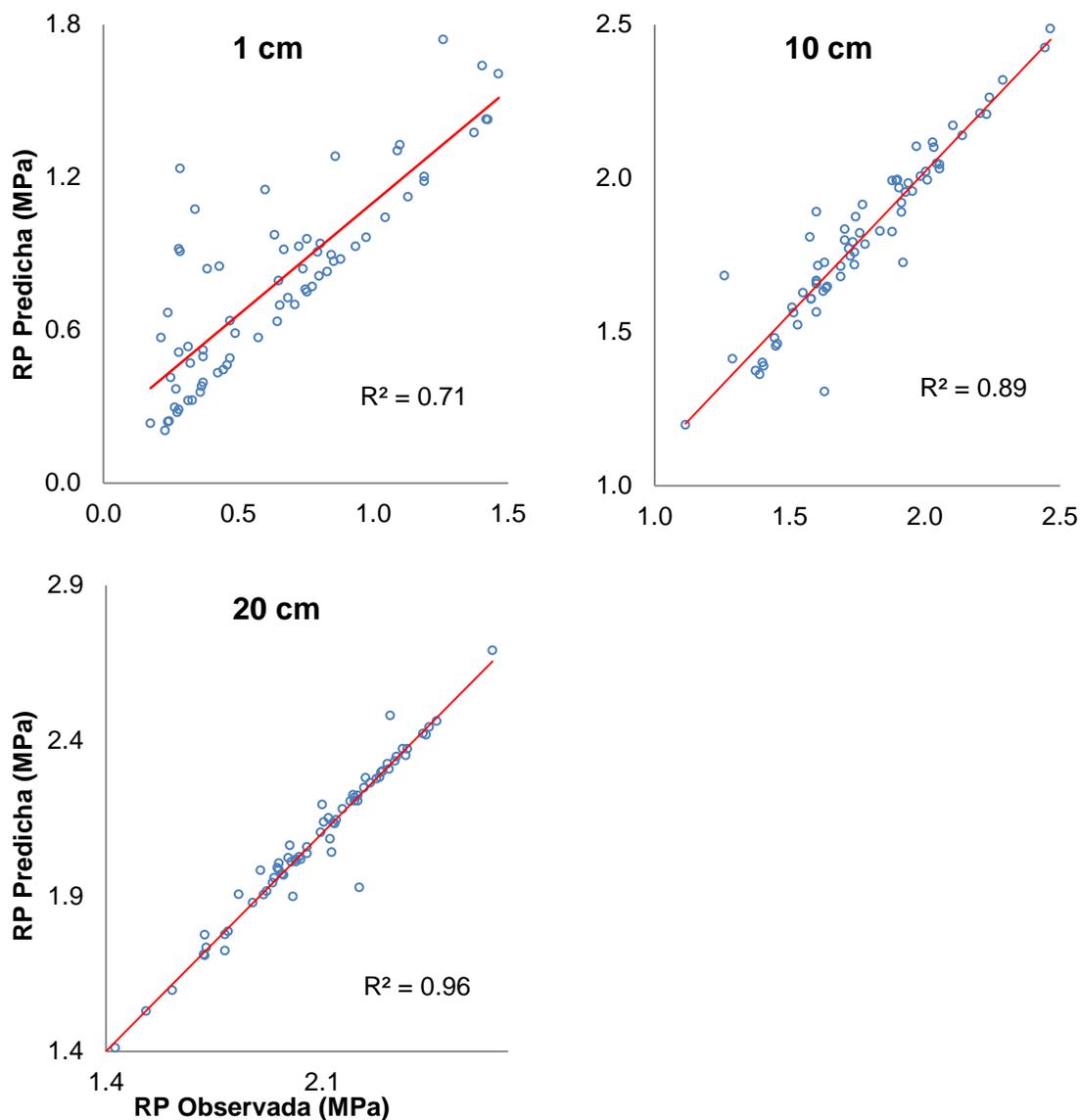


Figura 2-6: Validación cruzada de valores de RP a profundidades de 1 cm, 10 cm, 20 cm y 30 cm.



## 2.4 Conclusiones

A pesar de que en la zona de estudio la restricción al desarrollo radicular se presenta a partir de los 10 cm de profundidad, con valores de RP cercanos a 2 MPa, un CV de 15,7% evidencia que existen sitios donde la restricción puede efectuarse a menor o mayor profundidad.

La predicción de curvas de RP mediante GF en lugares no muestreados resulta ser confiable, dado que la curva obtenida, a manera de ejemplo, mostró ser coherente con el patrón de las curvas observadas en la zona de estudio. Igualmente, el análisis de validación cruzada evidenció alta correlación entre las observaciones y las predicciones con un  $R^2$  de 94%, además de que el ajuste de validación cruzada se hace mayor conforme aumenta la profundidad.

Mediante el análisis geoestadístico convencional se permitió observar que la aplicabilidad de la GF para la predicción de curvas de RP es confiable, dado que los valores de RP a las profundidades estudiadas se ajustaron a los modelos teóricos del semivariograma y los parámetros obtenidos son cercanos para las predicciones y las observaciones, entre sí.

La elaboración de los mapas de distribución espacial de RP permitió visualizar con claridad las diferencias existentes entre sitios, asimismo comportamientos similares para datos observados y predicciones, notando que existe mejor ajuste y más homogeneidad en profundidades mayores.

## 2.5 Bibliografía

Bowen, H.D., Garner, T.H. & Vaughn, D.H. 1994. Advances in soil-plant dynamics. In: ASAE. Advances in soil dynamics. St. Joseph. 255-280.

Camacho-Tamayo, J.H., Rubiano Sanabria, Y. & Santana, L.M. 2013. Management units based on the physical properties of an Oxisol. *J. Soil Sci. Plant Nutr.* 13,767-785.

Cambardella, C.A., Moorman, T.B., Novak, J.M., Parkin, T.B.; Karlen, D.L., Turco, R.F. & Konopka, A.E. 1994. Field-scale variability of soil properties in Central Iowa Soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 58,1501-1511.

Chan, K., Oates, A., Swan, A., Hayes, R., Dear, B. & Peoples, M., 2006. Agronomic consequences of tractor wheel compaction on a clay soil. *Soil & Tillage Research.* 89, 13–21.

Cressie, N. 1993, *Statistics for spatial data*

Hakansson, I. & Lipiec, J. 2000. A review of the usefulness of relative bulk density values in studies of soil structure and compaction. *Soil & Tillage Research*. 53, 71-85.

Hamza M. & Anderson W. 2005. Soil compaction in cropping systems A review of the nature, causes and posible solutions. *Soil & Tillage Research*. 82, 121-145.

Hoef, J. & Cressie, N.1993. Multivariable spatial prediction, *Mathematical Geology*. 25, 219-240

Islam, M.M., Saey, T., Meerschman, E., Smedt, P., Meeuws, F., Vijver, E. & Meirvenne, M. 2011. Delineating water management zones in a paddy rice field using a floating soil sensing system. *Agri. Water Management*. 102, 8-12.

Jaimes, W., Navas, G., Salamanca, C. & Conde, A. 2003. Estudio detallado de suelos de la estación experimental de Corpoica "Sabanas" en la Altilanura Colombiana. Corpoica, C. I. La Libertad, Villavicencio, Colombia. 62.

Giraldo, R. 2009. Geostatistical analysis of functional data. Barcelona. PhD Thesis submitted to Universitat Politècnica de Catalunya

Giraldo, R., Delicado, P. & Mateu, J. 2010. Continuous time-varying Kriging for spatial prediction of funtional data: na environmental application. *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*. 15, 66–82.

Medina, C., Camacho-Tamayo, J.H. & Cortes, C. 2012. Soil penetration resistance analysis by multivariate and geostatistical methods. *Bras. Eng. Agríc*. 32, 91-101

Myers, D. 1982. Matrix formulation of co-kriging, *Mathematical Geology*. 14, 249-257

Ramírez-López L., Reina A. & Camacho-Tamayo J.H. 2008. Variabilidad espacial de atributos de un Typic Haplustox de los llanos orientales de Colombia, *Eng, Agríc*. 28, 55-63.

Ramsay, J. & Silverman, B. 2005, *Functional data analysis 2*. New York; Springer.

Reyes, A., Giraldo, R. & J. Mateu. 2012. Residual kriging for functional spatial prediction of salinity curves. *Communications in Statistics. Theory and Methods*.

Tormena, C.A. 2002. A compactação do solo em agroecossistemas agrícolas. Reunion Brasileira de manejo e conservação do solo e da agua, 14.

Tormena, C., Araújo, M.A. & Fildalski, J.M. 2007. Variação temporal do intervalo hídrico ótimo de um Latossolo Vermelho distrófico sob sistemas de plantio direto. Rev. Bras. Ciênc. Solo. 31, 211-219.

Veronese Júnior, V., Carvalho, M.P., Dafonte, J., Freddi, O.S., Vidal Vázquez, E. & Ingaramo, O.E. 2006. Spatial variability of soil water content and mechanical resistance of Brazilian ferralsol. Soil & Tillage Research, Amsterdam. 85, 166-177.



# **3 Predicción espacial de la infiltración mediante geoestadística funcional**

## **2.1 Introducción**

Usualmente el manejo del suelo se hace desconociendo las particularidades del terreno y las condiciones de sus propiedades físicas, por lo que es importante realizar una evaluación dentro de los conceptos de sostenibilidad (Martins et al., 2010). En sistemas de producción agrícolas eficientes y sustentables es importante conocer el comportamiento del agua en el suelo con el fin de hacer uso racional de este recurso.

La infiltración es el atributo hidrodinámico que contempla el movimiento del agua y está estrechamente relacionado con los procesos de capilaridad y de las fuerzas asociadas con la adhesión y cohesión de las partículas del suelo (Orjuela-Matta et al., 2010). Además, es uno de los parámetros básicos para el diseño e implementación de sistemas de irrigación (Chowdary et al., 2006; Machiwal et al., 2006). Otros atributos asociados al movimiento de agua en el suelo son la conductividad hidráulica y la sortividad, donde la primera está asociada a la resistencia de los poros del suelo respecto del suelo y es utilizada para la solución de problemas de drenaje y conservación del suelo y depende no solo de las propiedades del suelo sino del contenido de agua, y la sortividad explica el movimiento del agua en el suelo como efecto de su potencial matricial.

Conocer su comportamiento y de manera específica la tasa de infiltración respecto al tiempo, permite controlar la erosión o procesos de degradación en los suelos, establecer la disponibilidad de agua para los cultivos, el movimiento de sustancias en el suelo y plantear estrategias de manejo de cuencas (Orjuela-Matta et al., 2010).

Por lo general el estudio de la infiltración en un suelo, parte de la realización de ensayos experimentales en un conjunto finito de sitios dentro del área de interés, seguido del ajuste a modelos teóricos como Kostiakov, Lewis, Horton o Philip, entre otros, así como

de la determinación de los parámetros empíricos de cada uno y finalmente del cálculo de medidas descriptivas univariadas (de localización y dispersión), de la obtención de gráficos de distribución (histogramas y diagramas de caja), de la realización de análisis multivariados (correlación, clasificación y componentes principales) y finalmente a través de análisis geoestadísticos univariados (estimación de variogramas, predicción kriging y obtención de mapas). Con estas herramientas se logra describir el comportamiento espacial (Camacho-Tamayo et al., 2013) y se determinan zonas de manejo para la producción agrícola (Cucunubá-Melo et al., 2011).

Recientemente se han realizado trabajos mediante el uso de análisis geoestadístico, a través de diversas alternativas para hacer predicción espacial, cuando para cada sitio de observación se tiene una curva en vez de un dato. Estos métodos se conocen con el nombre de geoestadística funcional (Giraldo et al., 2010). Para usar estas metodologías es necesario aplicar, como fase previa, técnicas no paramétricas de suavizado (p. ej. regresión kernel o regresión por bases de funciones) para convertir los datos discretos de cada sitio en funciones. A partir de análisis geoestadísticos funcionales es posible hacer interpolación espacial de curvas, es decir predecir curvas (en vez de variables) en sitios donde no hay información.

En este trabajo se aplica geoestadística funcional a curvas de infiltración con el fin de evaluar su capacidad predictiva, llevando a cabo análisis de validación cruzada para estimar errores de predicción y compararlos con los obtenidos con métodos clásicos de predicción univariada, tradicionalmente usados para el análisis de este tipo de datos, para ello fueron considerados los parámetros de modelos de Kostiajov y Philip dado que están altamente relacionados con las propiedades hidrofísicas del suelo.

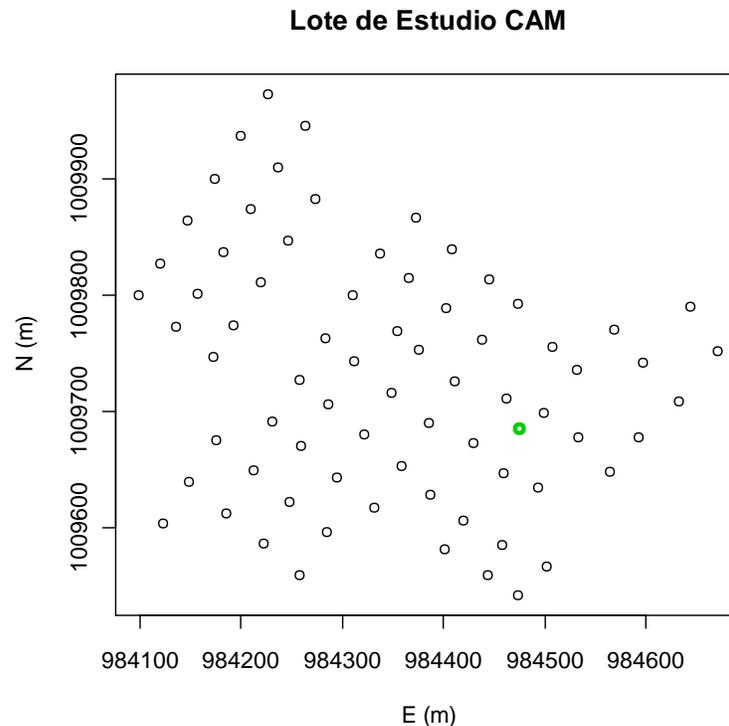
## **2.2 Materiales y métodos**

El estudio se realizó en el Centro Agropecuario Marengo, ubicado en el municipio de Mosquera (Cundinamarca), en las coordenadas 4° 42' N y 74° 12' W y una altitud de 2543 m. La zona presenta temperatura media anual de 13,1 °C y precipitación media anual de 665 mm (registro climático de la Universidad Nacional de Colombia).

El área de estudio comprende los lotes 1, 2, 3 y 16 cuyo cultivo predominante es el pasto kikuyo. (*Pennisetum clandestinum*). Acorde con Ordoñez & Bolívar (2014) el lote uno está caracterizado por el suelo Aquandic Epiaquolls, superficial limitado por nivel freático y de texturas finas sobre medias y en los lotes 2, 3 y 16 predomina el suelo Humic Haplustands, profundo, de texturas medias y con características de buen drenaje natural.

Se estableció una grilla regular rígida de 75 sitios (Figura 3-1), en un área experimental de 16 ha, su ubicación se hizo mediante la utilización de un receptor GPS Garmin Etrex 20 en tiempo real vía satélite. En cada sitio, mediante el uso de infiltrómetros de doble anillo, se midió la lámina de agua infiltrada en un lapso de 150 minutos (1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 30, 45, 60, 90, 120, y 150 minutos), con carga variable, evitando que la diferencia entre la lectura máxima y mínima no superara los 100 mm.

Figura 3-1: Distribución de sitios de observación e identificación de sitio aleatorio para predicción de curva de infiltración acumulada (Ia).



Los resultados obtenidos en campo se ajustaron a los modelos teóricos de infiltración de Kostiakov (1932) (Ecuación 3-1) y Philip (1957) (Ecuación 3-4), mediante optimización de variables en el software R obteniendo los parámetros de sortividad (S), conductividad

hidráulica saturada ( $K_s$ ), infiltración básica ( $I_b$ ) e infiltración acumulada ( $I_a$ ), parámetros con los cuales se realizó análisis estadístico y geoestadístico convencional.

### Modelo de Kostiakov

$$I(t) = a \cdot t^b \quad (\text{Ecuación 3-1})$$

donde,

$I(t)$ : lámina de infiltración acumulada, (cm);

$t$ : tiempo transcurrido, (min);

$a$  y  $b$ : coeficientes empíricos de ajuste, (adimensional).

$$-600(b - 1) = t_{básico} \quad (\text{Ecuación 3-2})$$

$$I_b = 60 \cdot a \cdot b \cdot t_{básico}^{b-1} \quad (\text{Ecuación 3-3})$$

con  $I_b$  la infiltración básica ( $\text{cm h}^{-1}$ ).

### Modelo de Philip

$$I(t) = S \cdot t^{1/2} + K_s \cdot t \quad (\text{Ecuación 3-4})$$

donde,

$S$ : Sortividad del suelo, dependiendo de las condiciones de la humedad inicial ( $\text{cm h}^{-1/2}$ )

$K_s$ : Conductividad hidráulica saturada del suelo ( $\text{cm h}^{-1}$ )

En este contexto el análisis geoestadístico funcional brinda una metodología alternativa de predicción de información más sencilla (Giraldo et al., 2010) que consiste en convertir los datos de cada sitio en una función continua (Ramsay & Silverman, 2005) y posteriormente realizar un solo análisis geoestadístico tomando como insumo las curvas en cada sitio, con el propósito de obtener predicciones en sitios no observados. Para ello se retiró una de las 75 curvas estimadas y con las 74 restantes se aplicó Kriging funcional (Giraldo, 2009) obteniendo así, la predicción en el sitio no observado y de la

misma forma con cada una de las 75 curvas, de tal manera, que para cada sitio se obtuvo una curva “observada” y una curva predicha por Kriging funcional, y así realizar un análisis de validación cruzada evaluando la calidad del método y comparando con la metodología convencional.

El predictor Kriging funcional está definido por (Giraldo, 2010),

$$\hat{\chi}(s_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi(s_i); \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad (\text{Ecuación 3-5})$$

donde,  $\hat{\chi}(s_0)$  es la predicción de la curva en el sitio  $s_0$ ,  $\chi(s_i)$  corresponde a la curva observada en el sitio  $s_i, i = 1, 2, \dots, n$  y  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ , son los parámetros que dan la influencia de cada curva observada sobre cada curva a predecir.

Los parámetros  $\lambda_i$  son estimados mediante la solución del siguiente sistema de ecuaciones (Giraldo et al, 2010),

$$\begin{pmatrix} \int_T \gamma_t(\|s_1 - s_1\|) dt & \dots & \int_T \gamma_t(\|s_1 - s_n\|) dt & \mathbf{1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \int_T \gamma_t(\|s_n - s_1\|) dt & \dots & \int_T \gamma_t(\|s_n - s_n\|) dt & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \dots & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_T \gamma_t(\|s_0 - s_1\|) dt \\ \vdots \\ \int_T \gamma_t(\|s_0 - s_n\|) dt \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (\text{Ecuación 3-6})$$

donde, las integrales corresponden a la función traza-variograma (Giraldo et al., 2010) evaluada para las distancias entre los sitios de observación (matriz del lado izquierdo de la igualdad) y para las distancias entre los sitios de observación y el sitio de predicción (vector del lado derecho de la igualdad). Estas integrales son calculadas a través de la estimación de la función traza-variograma dada por la expresión (Giraldo et al., 2010),

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2|N(h)|} \sum_{i,j \in N(h)} \int_T (\chi_t(s_i) - \chi_t(s_j))^2 dt, \quad (\text{Ecuación 3-7})$$

donde  $N(h) = \{(s_i, s_j): \|s_i - s_j\| = h\}$  corresponde al número de parejas de sitios separados por una distancia  $h$  y del posterior ajuste de un modelo paramétrico de semivarianza clásico (esférico, exponencial, gaussiano, matern) a esta misma.

La evaluación de la metodología se realizó mediante la comparación de resultados, una vez los datos obtenidos por Kriging funcional y los observados fueron analizados por los

métodos convencionales. Para ello se consideraron los parámetros,  $l_b$ ,  $l_a$ ,  $S$  y  $K_s$  de los modelos teóricos de infiltración. El análisis clásico se desarrolló mediante la determinación de medidas descriptivas y el cálculo en cada caso de la función de semivarianza dada por Cressie (1993).

$$\hat{\chi}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{n(h)} [z(x_i) - z(x_i + h)]^2 \quad (\text{Ecuación 3-8})$$

donde,  $z(x_i)$  corresponde al valor de cada parámetro en el punto  $x_i$ ,  $z(x_i + h)$  es el valor del mismo atributo en un punto separado del anterior una distancia  $h$ , y  $N(h)$  es el número de pares de datos separados por la distancia  $h$ . El semivariograma anterior es posteriormente ajustado a través de algún modelo teórico de semivarianza de los antes mencionados. Para seleccionar el mejor modelo se consideran varios criterios: el coeficiente de determinación ( $R^2$ ), la menor suma de las diferencias al cuadrado (SQR) y el coeficiente de variación cruzada (CVC). Los parámetros comunes a los modelos de semivarianza teóricos son la pepita ( $C_0$ ) que es una discontinuidad del semivariograma en el origen, la varianza del proceso ( $C$ ) y el alcance ( $a$ ) que es la distancia hasta la cual hay correlación espacial. Suele usarse también como criterio de selección del modelo la relación nugget-varianza  $C/(C_0+C)$ , que establece el grado de dependencia espacial (GDE) que presenta el atributo estudiado. Cambardella (1994) afirma que si ésta es superior al 75% se considera que la dependencia es fuerte, moderada para valores entre 25% y 75% y débil cuando es inferior al 25%.

## 2.3 Resultados y discusión

Se realizó análisis geoestadístico funcional en donde inicialmente, a manera de ejemplo de aplicación de esta metodología se muestra la predicción de la curva obtenida (Figura 3-2) en el sitio con coordenadas 984475 (W) y 1009685 (N) (Figura 3-1). Para hacer la predicción se estimó inicialmente la función de traza-semivarianza empleando la Ecuación 3-7 y a partir de esta y usando la Ecuación 3-6, se estimaron los parámetros  $\lambda_i$  del predictor Kriging funcional definido en la Ecuación 3-5. Los resultados obtenidos a partir de la Ecuación 3-7 y del ajuste de un modelo teórico de semivarianza a esta función, no son incluidos por simplicidad en la presentación. Adicionalmente, para la

curva predicha se determinaron los parámetros (Tabla 3-1) de los modelos teóricos de Kostiakov y Philip.

La curva predicha es coherente con el patrón de comportamiento de las observaciones. Se puede inferir que a partir de los 60 minutos la tasa de entrada de agua en el suelo o velocidad de infiltración se hace constante, como efecto del aumento del potencial matricial del suelo. De acuerdo con Montenegro & Malagón (1990), en el sitio no observado, la velocidad de infiltración es rápida ( $12,7 - 25,4 \text{ cm h}^{-1}$ ), que puede deberse a una mayor presencia de macroporos (Richmon & Rillo, 2006) con respecto a los sitios de menor infiltración, lo que también repercute en un valor alto de  $K_s$ .

Figura 3-2: Curva de infiltración acumulada en sitio de coordenadas 984475 (W) y 1009685 (N)

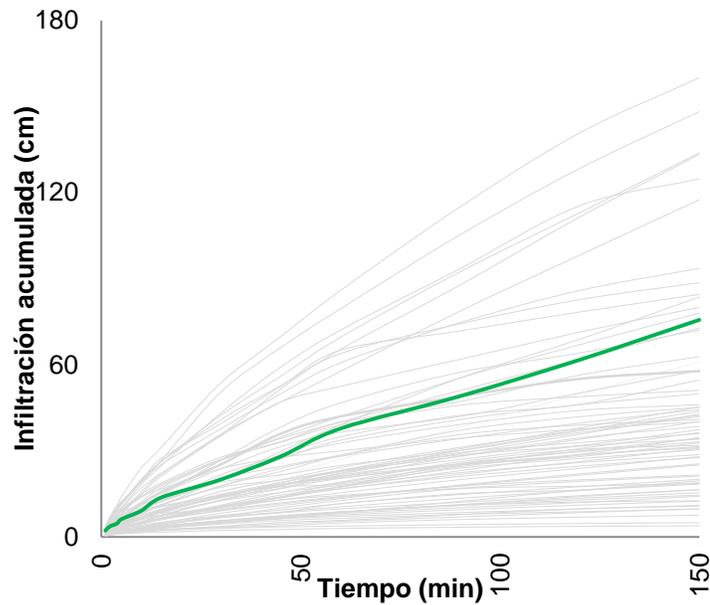
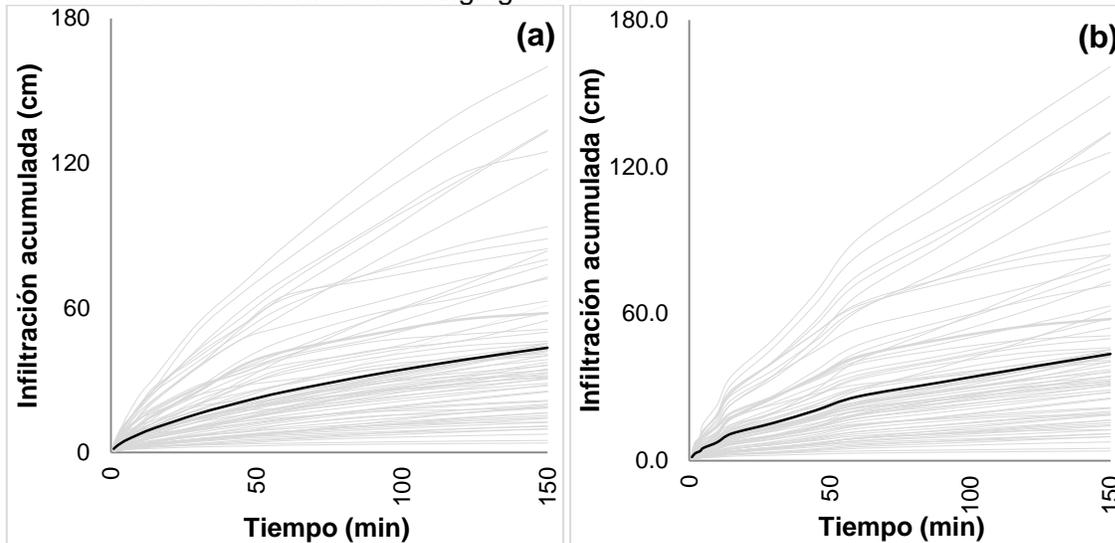


Tabla 3-1. Parámetros de los modelos de Kostiakov y Philip en el sitio de coordenadas 984475 (W) y 1009685 (N)

a	1,53
b	0,78
$I_b \text{ (cm h}^{-1}\text{)}$	23,66
$I_a \text{ (cm)}$	75,64
$S \text{ (cm h}^{-1/2}\text{)}$	15,25
$K_s \text{ (cm h}^{-1}\text{)}$	20,48

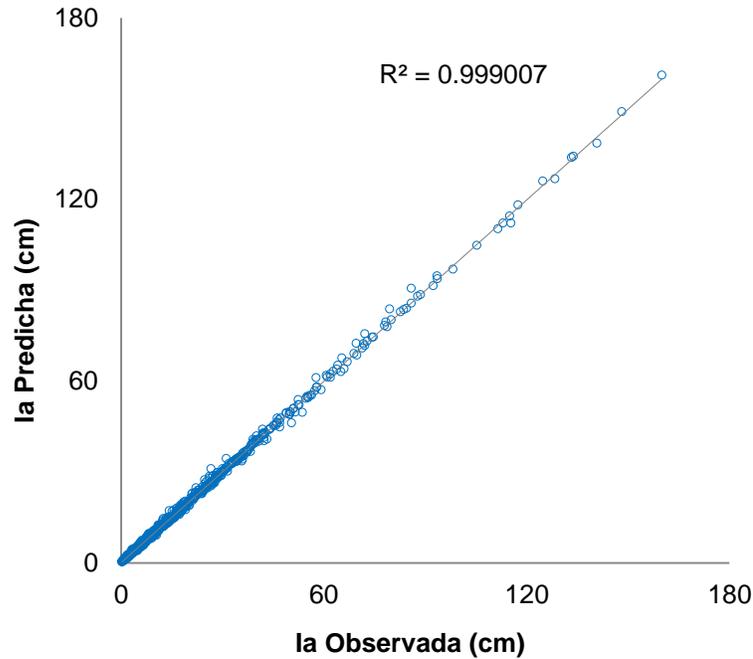
Las curvas de infiltración acumulada obtenidas y las predicciones de cada sitio son presentadas en la Figura 3-3. Se observa que dentro de la zona de estudio existen sitios cuyo comportamiento respecto a  $I_a$  esta considerablemente alejado de los demás, es decir se presenta alta variabilidad espacial del suelo en términos de la infiltración, tanto para las curvas registradas (a) como para las curvas predichas (b).

Figura 3-3: (a) Curvas de infiltración acumulada registradas en los 75 sitios. (b) Curvas predichas en cada sitio mediante Kriging funcional.



Para obtener un indicador numérico del comportamiento del ajuste se realizó una regresión lineal simple para comparar los valores observados de cada sitio con los valores de las curvas predichas. La regresión obtenida se muestra en la Figura 3-4. Es evidente que hay una alta correlación entre las observaciones y las predicciones. El coeficiente de determinación es alto (0,99%,  $P < 0,0001$ ) indicando que más del 99% de la variabilidad en los datos observados son explicados por el predictor propuesto.

Con la finalidad de evaluar la aplicabilidad de la geoestadística funcional en la predicción de los datos de infiltración, fue conveniente determinar las medidas descriptivas (Tabla 3-2), parámetros geoestadísticos (Tabla 3-3) y elaborar mapas de distribución espacial (Figura 3-5), para valores de  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $K_s$  y  $S$ , calculados a partir de los datos observados como de los obtenidos mediante el predictor propuesto.

Figura 3-4: Validación cruzada funcional de la lámina de infiltración ( $I_a$ ).

En general, las medidas descriptivas calculadas con los datos observados son similares con las calculadas a partir de los resultados de Kriging funcional. En ambos casos, los parámetros  $I_b$  e  $I_a$  y los parámetros de Philip no son simétricos, debido a que hay diferencias considerables entre los valores de media y mediana, además el coeficiente de asimetría está alejado de cero.

Es preciso mencionar que la simetría en datos espaciales no siempre corresponde a una distribución normal, pues muestra que no hay zonas con valores significativamente distintos a las restantes. Usualmente la simetría (asimetría) es asociada a la presencia (falta) de normalidad en los estudios de suelos. Esto en general, carece de sentido puesto que desconoce el hecho de que se analizan datos de un proceso estocástico y no de una variable aleatoria particular. Es así que puede tenerse asimetría en la distribución de frecuencias de los datos observados cuando el proceso estocástico del cuál provienen los datos es normal multivariado.

Se observó que la media de  $I_b$  representa una velocidad de infiltración moderadamente rápida de acuerdo con Montenegro & Malagón (1990). Sin embargo, en el área de estudio la  $I_b$  varía desde moderadamente lenta hasta muy rápida. Algunas velocidades de infiltración altas son representativas de suelos relativamente secos dado el estrés hídrico al que están siendo sometidos. Además los valores altos de CV (mayores al 60%) indican

que a nivel general existen áreas o sitios dónde el comportamiento de la infiltración está alejado de los restantes (Rodríguez-Vásquez et al., 2008; Martins et al., 2010).

Tabla 3-2. Medidas descriptivas de parámetros de Kostiakov y Philip estimados a partir de datos observados (Obs) y predichos (Pre)

Modelo	Parámetro	Media	Mediana	CV, %	Curtosis	Asimetría	Mínimo	Máximo
Kostiakov	a <sub>Obs</sub>	2,09	1,59	70,87	0,54	1,13	0,34	6,44
	a <sub>Pre</sub>	2,09	1,60	70,82	0,52	1,13	0,34	6,43
	b <sub>Obs</sub>	0,61	0,60	16,08	0,48	0,07	0,36	0,86
	b <sub>Pre</sub>	0,61	0,60	16,08	0,48	0,07	0,36	0,86
	l <sub>b</sub> <sub>Obs</sub>	10,65	7,51	97,78	3,43	1,98	0,33	45,16
	l <sub>b</sub> <sub>Pre</sub>	10,62	7,49	97,78	3,42	1,98	0,33	45,09
	l <sub>a</sub> <sub>Obs</sub>	45,08	35,35	77,82	2,12	1,55	3,90	160,00
	l <sub>a</sub> <sub>Pre</sub>	45,19	35,35	77,96	2,16	1,56	3,91	160,97
Philip	S <sub>Obs</sub>	17,50	14,01	67,29	0,54	1,07	3,37	53,46
	S <sub>Pre</sub>	18,03	14,25	67,12	0,26	1,00	3,40	53,44
	K <sub>s</sub> <sub>Obs</sub>	5,14	3,59	138,19	7,73	2,44	-7,65	36,16
	K <sub>s</sub> <sub>Pre</sub>	5,12	3,58	138,40	7,70	2,44	-7,68	36,02

Los parámetros geoestadísticos encontrados, en ambos casos, son similares entre sí, lo que da veracidad a la bondad de ajuste del predictor funcional, utilizado en este estudio. Se encontró que los parámetros de los modelos de infiltración, tanto para datos experimentales como para los obtenidos mediante Kriging funcional, se ajustaron a los modelos teóricos del semivariograma, esférico para  $l_b$ , también encontrado por Martins et al. (2010), y exponenciales para los restantes. Algunos autores reportan que no todos los parámetros del modelo de Kostiakov y de Philip se ajustan a modelos teóricos de semivariograma. Rodríguez-Vásquez et al. (2008) encontraron que S no se ajustó a modelos geoestadísticos y  $K_s$  se ajustó al modelo gaussiano.

Adicionalmente, se observa que la dependencia espacial es moderada para  $l_a$  e  $l_b$  con valores entre 25 y 75%, comportamiento similar al reportado por Martins et al. (2010). Para el caso de  $K_s$  y S, se obtuvieron valores de  $C_0$  próximos a cero, indicando fuerte dependencia espacial, lo cual también es reportado por Rodríguez-Vásquez et al. (2008) en el mismo tipo de suelo, para el caso de  $K_s$ .

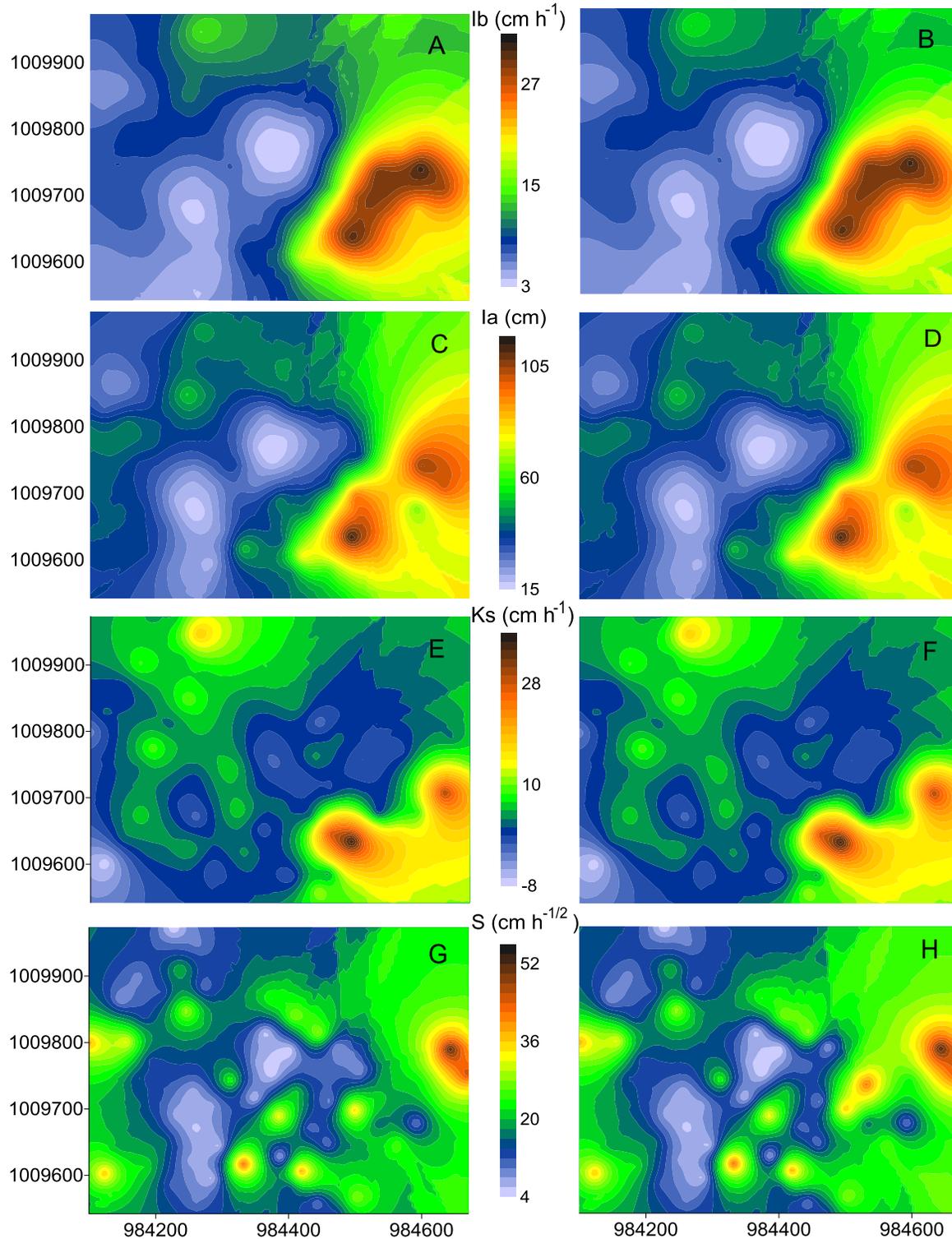
Tabla 3-3. Parámetros de modelos teóricos del semivariograma ajustado para valores observados (Obs) y predichos (Pre) de Infiltración básica ( $I_b$ ), infiltración acumulada ( $I_a$ ), sortividad ( $S$ ) y conductividad hidráulica saturada ( $K_s$ )

Parámetro	Modelo	$C_o$	$C_o + C$	Alcance, m	CVC	GDE
$I_{b_{Obs}}$	Esférico	35,5	103,8	247,9	0,90	0,66
$I_{b_{Pre}}$	Esférico	35,3	103,8	248,0	0,90	0,66
$I_{a_{Obs}}$	Exponencial	393	1122	290,7	0,91	0,65
$I_{a_{Pre}}$	Exponencial	404	1133	294,3	0,91	0,64
$S_{Obs}$	Exponencial	0,10	124,9	94,20	0,79	1,00
$S_{Pre}$	Exponencial	0,10	131,2	100,5	0,78	1,00
$K_{s_{Obs}}$	Exponencial	0,10	53,20	268,5	0,82	0,99
$K_{s_{Pre}}$	Exponencial	0,10	52,90	267,6	0,82	0,99

Los mapas muestran que existe alta variabilidad espacial del suelo en términos de las propiedades estudiadas (Figura 3-5). Se observa que los mapas elaborados a partir de los valores determinados mediante Kriging funcional, son coherentes y conservan una distribución espacial muy cercana a la de los datos observados, evidenciado por las mínimas diferencias presentes en cada caso. Por otra parte, se observa una fuerte correlación y relación directa en la distribución espacial entre estos atributos, donde zonas con alta  $I_b$ , corresponde a zonas que presentan la mayor  $I_a$ .

Los mapas de contorno elaborados con los parámetros estimados del modelo de Philip se observa que al igual que  $I_b$  e  $I_a$  hay alta correlación entre los mapas obtenidos a partir de los datos observados y los predichos mediante Kriging funcional. Adicionalmente, los sitios donde  $K_s$  es mayor, corresponden a los sitios donde  $I_b$  e  $I_a$  también son altos. Valores altos de  $K_s$  se deben a que en el tiempo los poros en el suelo están saturados con agua y la tasa de infiltración alcanza un valor constante ( $I_b$ ) la cual es muy similar a la  $K_s$  (Gil, 2002) y en consecuencia el suelo es capaz de drenar mayor cantidad de agua aumentando así los valores de  $I_a$ .

Figura 3-5: Mapas de contorno observados (Izquierda) y predichos (Derecha) para (A-B) infiltración básica ( $I_b$ ); (C-D) infiltración acumulada ( $I_a$ ); (E-F) conductividad hidráulica saturada ( $K_s$ ); (G-H) Sortividad ( $S$ ).



## 2.4 Conclusiones

La validación cruzada mostró alta correlación entre las observaciones y las predicciones con un  $R^2$  de 99%, lo que da confianza sobre el uso de la GF en la predicción de curvas de infiltración en lugares no observados, además la curva que a manera de ilustración fue obtenida con esta metodología, es similar con las curvas observadas.

Mediante el análisis estadístico tradicional se permitió observar que la aplicabilidad de la GF para la predicción de curvas de infiltración es confiable, puesto que para los datos observados y las predicciones las medidas descriptivas de los parámetros de los modelos teóricos de infiltración, son similares, incluso cuando, en general, estos parámetros fueron de alta variabilidad espacial. Adicionalmente, se ajustaron a los modelos teóricos del semivariograma y los parámetros obtenidos son, de igual forma, cercanos entre sí.

La elaboración de mapas de contorno de  $I_b$ ,  $I_a$ ,  $K_s$  y  $S$  tanto para los datos observados y predichos permitió visualizar con claridad que los rangos para cada uno de los parámetros son amplios, sin embargo, estos mostraron el mismo patrón de comportamiento lo que comprueba la congruencia entre los modelos estudiados y la eficacia en la predicción de los mismos mediante GF.

## 2.5 Bibliografía

Camacho-Tamayo, J.H., Rubiano Sanabria, Y. & Santana, L.M. 2013. Management units based on the physical properties of an Oxisol. *J. Soil Sci. Plant Nutr.* 13,767-785.

Cambardella, C.A., Moorman, T.B., Novak, J.M., Parkin, T.B.; Karlen, D.L., Turco, R.F. & Konopka, A.E. 1994. Field-scale variability of soil properties in Central Iowa Soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 58,1501-1511.

Chowdary, V.M., Damodhara Rao, M. & Jaiswal, C.S. 2006. Study of infiltration process under different experimental conditions. *Agr. Water Management*. 83, 69-78.

Cressie, N. 1993, *Statistics for spatial data*

Cucunubá-Melo, J.R., Alvarez Herrera, J.G. & Camacho-Tamayo, J.H. 2011. Identification of agronomic management units based on physical attributes of soil. *J. Soil Sci.* 11, 87- 99.

Gil, R.C. 2002. *El comportamiento físico-funcional de los suelos*. Buenos Aires: Instituto de Suelos. Inta Castelar, 19.

Giraldo, R. 2009. *Geostatistical analysis of functional data*. Barcelona. PhD Thesis submitted to Universitat Politècnica de Catalunya

Giraldo, R., Delicado, P. & Mateu, J. 2010. Continuous time-varying Kriging for spatial prediction of functional data: an environmental application. *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*. 15, 66–82.

Machiwal, D., Jha, M. & Mal, B.C. 2006. Modelling infiltration and quantifying spatial soil variability in a wasteland of Kharagpur, India. *Biosystems Engineering*. 95, 569-582.

Martins, A.L., Gomes DE Moura, E. & Camacho-Tamayo, J.H. 2010. Variabilidad espacial de la infiltración y su relación con algunas propiedades físicas. *Ing. Investig.* 30, 116-123.

Montenegro H. & Malagón D. 1990. *Propiedades físicas de los suelos*. Colombia: Instituto Geográfico Agustín Codazzi.

Ordoñez N. & Bolívar A. 2014. *Levantamiento agrológico del Centro Agropecuario Marengo (CAM)*. Instituto Geográfico Agustín Codazzi.

Orjuela-Matta, H.M., Rubiano-Sanabria, Y. & Camacho-Tamayo, J.H. 2010. Comportamiento de la infiltración en un Oxisol. *Rev. U.D.C.A Act. & Div. Cient.* 13, 31-39.

Ramsay, J. & Silverman, B. 2005, *Functional data analysis 2*. New York; Springer.

Richmond, P. & Rillo S., 2006. Evaluación del efecto de la compactación por el rodado de máquinas sobre algunas propiedades físicas del suelo y el cultivo de trigo en siembra directa. Argentina: INPOFOS Informaciones agronómicas. 32.

Rodríguez-Vásquez, A.F., Aristizábal-Castillo, A.M. & Camacho-Tamayo, J.H. 2008. Variabilidad espacial de los modelos de infiltración de Philip y Kostiakov en un suelo ándico., Eng. Agríc. 28, 64-75.

# 4 Análisis y predicción espacial de curvas de retención de agua en dos tipos de suelo

## 2.6 Introducción

Los suelos agrícolas se comportan como un sistema complejo que almacena y transfiere aire, agua, nutrientes y calor a microorganismos y plantas (Tormena et al., 2002). La porosidad es un factor clave para la capacidad de almacenamiento de agua de cualquier suelo, entre más pequeño sea el tamaño de los poros llenos de agua, mayor será la fuerza que las plantas deban ejercer para extraerla (Montenegro & Malagón, 1990).

El estudio de la curva de retención de agua (CRA) del suelo establece la relación entre el contenido agua y la fuerza con que el agua es retenida. Los niveles críticos de contenido de agua en el suelo, usualmente estudiados son capacidad de campo (CC), que se logra después de que el suelo ha perdido agua de forma gravitacional, y punto de marchitez permanente (PMP), que se obtiene una vez que el agua es utilizada por las plantas y éstas no son capaces de absorberla.

En la actualidad se han realizado trabajos que dan a conocer diferentes opciones de análisis espacial, mediante las cuales, es posible realizar predicciones espaciales cuando para cada sitio de observación tiene una curva y no un dato. Éstas metodologías se conocen con el nombre de geoestadística funcional (Giraldo et al., 2010). Su aplicación requiere, como fase previa, la implementación de técnicas de suavizado para convertir los datos de cada sitio en funciones. Mediante el análisis de GF es posible realizar la interpolación espacial de curvas.

En este trabajo se aplica GF a CRA obteniendo valores de lámina de agua aprovechable, con el objetivo de evaluar su capacidad predictiva y su potencial como herramienta para la descripción de la variabilidad espacial de este tipo de datos. Para este fin, se llevó a cabo un análisis de validación cruzada (predicción en sitios donde ya hay información),

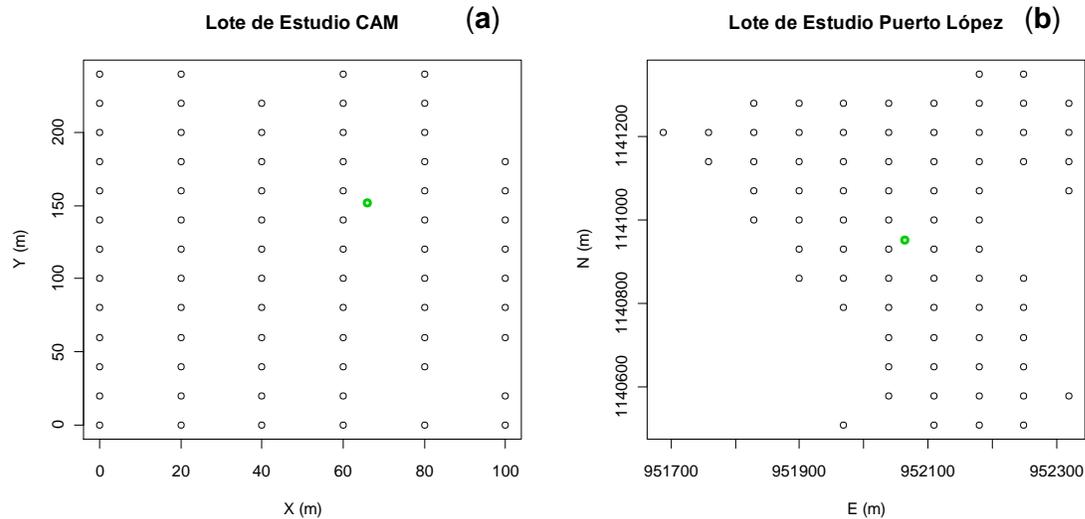
para estimar errores de predicción y compararlos con los obtenidos con métodos clásicos de predicción univariada, tradicionalmente usados para el análisis espacial.

## 2.7 Materiales y métodos

Para este estudio se seleccionaron dos áreas experimentales. La primera ubicada en el municipio de Mosquera (Cundinamarca) en las coordenadas geográficas 4° 42' N, 74° 12" y una altitud de 2543 m. La zona presenta temperatura media anual de 13,1 °C y precipitación media anual 670 mm. Pertenece la cuenca del río Bogotá, que presenta suelos de la serie Marengo y corresponde a la unidad taxonómica Typic Melanudand, con texturas franco limosas y franco arcillosas, con pendientes inferiores al 1%. Son suelos pertenecientes al Centro Agropecuario Marengo CAM El suelo es un Andisol con horizonte Ap espeso y oscuro, originado de sedimentos lacustres, con aspersiones de cenizas volcánicas y aportes de arcillas aluviales, con un drenaje natural pobre e imperfecto, problemas de salinidad y bajos contenidos de sodio. La unidad experimental fue de 3,1 ha de uso agrícola y ocupación pastoreo (Figura 4-1 (a)).

La segunda zona de muestreo se encuentra en el municipio de Puerto López, Meta, Colombia, en las coordenadas 4°22'38,50" de latitud norte y 72°13'24,53" de longitud oeste, a una altura aproximada de 156 msnm. La precipitación de la zona presenta un régimen monomodal, con una media anual de 2375 mm, temperatura media de 27°C y humedad relativa de 75% (Jaimes et al., 2003). Los suelos predominantes son Typic Haplustox, con una capa gruesa sobre suelo de textura fina franco limosa, pendiente ligeramente inclinada (<5%), susceptibilidad a la degradación física, en virtud de ganadería extensiva con pastizales nativos. La unidad experimental fue de 37 ha, la cual se encontraba bajo un cultivo de maíz al momento del muestreo (Figura 4-2 (b)).

Figura 4-1: Lotes de estudio (a) Centro Agropecuario Marengo, Mosquera, Cundinamarca; (b) Puerto López, Meta. Sitios seleccionados para predicción funcional.



En ambas zonas de estudio el muestreo se realizó a dos profundidades de 0 a 10 cm y 10 a 20 cm respectivamente, en una grilla regular de 75 sitios.

Para la determinación de la curva de retención de agua del suelo en cada sitio a las dos profundidades, se utilizó el equipo de membranas y ollas de presión, aplicando presiones de 0,1; 0,3; 0,5; 1; 3; 5; 10 y 15 bar, además del punto de saturación (0 bar) y determinando el contenido de agua en el suelo, para cada presión.

Se determinó la curva media por profundidad y por tipo de suelo y se calculó la diferencia entre los valores de la CRA de cada sitio y los valores medios, obteniendo así una 'curva error' en cada sitio.

En el trabajo se acudió al uso de bases de B-splines (Ramsay & Silverman, 2005) para estimar la curva error en cada uno de los 75 sitios. Una vez estimadas las curvas se empleó Kriging funcional (Giraldo, 2009) que consistió en retirar la curva error de cada sitio y con las restantes 74, realizar Kriging funcional para predecir en este mismo, (predicción en un sitio no visitado) obteniéndose así, para cada sitio, una curva error "observada" (la estimada a través del ajuste de una base de B-splines) y una curva predicha por Kriging funcional. Ahora bien, la determinación de la CRA en cada sitio se realizó ajustando la curva promedio calculada, en cada caso, mediante corrección con la curva 'error' predicha en cada sitio. De esta manera, se obtuvo un conjunto de 75 CRA observadas y 75 CRA predichas mediante Kriging funcional, con el fin de llevar a cabo un

análisis de validación cruzada (leave-one-out cross-validation). Este procedimiento es útil para evaluar la calidad del método (a menor diferencia entre estimación y predicción, mejor es el método) y para comparar la propuesta con la alternativa clásica.

El predictor Kriging funcional está definido por (Giraldo, 2010),

$$\hat{\chi}(s_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi(s_i); \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad (\text{Ecuación 4-1})$$

donde  $\hat{\chi}(s_0)$  es la predicción de la curva en el sitio  $s_0$ ,  $\chi(s_i)$  corresponde a la curva observada en el sitio  $s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , son los parámetros que dan la influencia de cada curva observada sobre cada curva a predecir.

Los parámetros  $\lambda_i$  son estimados mediante la solución del siguiente sistema de ecuaciones (Giraldo et al., 2010),

$$\begin{pmatrix} \int_T \gamma_t(\|s_1 - s_1\|) dt & \cdots & \int_T \gamma_t(\|s_1 - s_n\|) dt & \mathbf{1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \int_T \gamma_t(\|s_n - s_1\|) dt & \cdots & \int_T \gamma_t(\|s_n - s_n\|) dt & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_T \gamma_t(\|s_0 - s_1\|) dt \\ \vdots \\ \int_T \gamma_t(\|s_0 - s_n\|) dt \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

(Ecuación 4-2)

donde, las integrales corresponden a la función traza-variograma (Giraldo et al., 2010) evaluada para las distancias entre los sitios de observación (matriz del lado izquierdo de la igualdad) y para las distancias entre los sitios de observación y el sitio de predicción (vector del lado derecho de la igualdad). Estas integrales son calculadas a través de la estimación de la función traza-variograma dada por la expresión (Giraldo et al., 2010),

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2|N(\mathbf{h})|} \sum_{i,j \in N(\mathbf{h})} \int_T (\chi_t(s_i) - \chi_t(s_j))^2 dt, \quad (\text{Ecuación 4-3})$$

donde,  $N(\mathbf{h}) = \{(s_i, s_j): \|s_i - s_j\| = \mathbf{h}\}$  corresponde al número de parejas de sitios separados por una distancia  $\mathbf{h}$  y del posterior ajuste de un modelo paramétrico de semivarianza clásico (esférico, exponencial, gaussiano, matern) a esta misma.

Considerando las curvas observadas y las curvas obtenidas mediante la predicción funcional, se determinó para cada sitio la lámina de agua aprovechable LAA del suelo en estudio, que está definida como la diferencia entre los puntos de CC y PMP, cuyo

contenido de agua se da a presiones de 0,3 y 15 bar respectivamente. (Fernández & Trillo, 2005).

Se compararon los resultados obtenidos por Kriging funcional con los hallados a través de Kriging univariado en las dos profundidades. Para hacer el análisis clásico se tomaron los valores de LAA y se calculó en cada caso la función de semivarianza dada por (Cressie, 1993)

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{n(h)} [z(x_i) - z(x_i + h)]^2 \quad (\text{Ecuación 4-4})$$

donde,  $z(x_i)$  corresponde al valor LAA de en el punto  $x_i$ ,  $z(x_i + h)$  es el valor del mismo atributo en un punto separado del anterior una distancia  $h$ , y  $N(h)$  es el número de pares de datos separados por la distancia  $h$ . El semivariograma anterior es posteriormente ajustado a través de algún modelo teórico de semivarianza de los antes mencionados. Para seleccionar el mejor modelo se consideran varios criterios: el coeficiente de determinación ( $R^2$ ), la menor suma de las diferencias al cuadrado (SQR) y el coeficiente de variación cruzada (CVC). Los parámetros comunes a los modelos de semivarianza teóricos son la pepita ( $C_0$ ) que es una discontinuidad del semivariograma en el origen, la varianza del proceso ( $C$ ) y el alcance ( $a$ ) que es la distancia hasta la cual hay correlación espacial. Suele usarse también como criterio de selección del modelo la relación nugget-varianza  $C/(C_0+C)$ , que establece el grado de dependencia espacial (GDE) que presenta el atributo estudiado. Cambardella (1994) afirma que si ésta es superior al 75% se considera que la dependencia es fuerte, moderada para valores entre 25% y 75% y débil cuando es inferior al 25%.

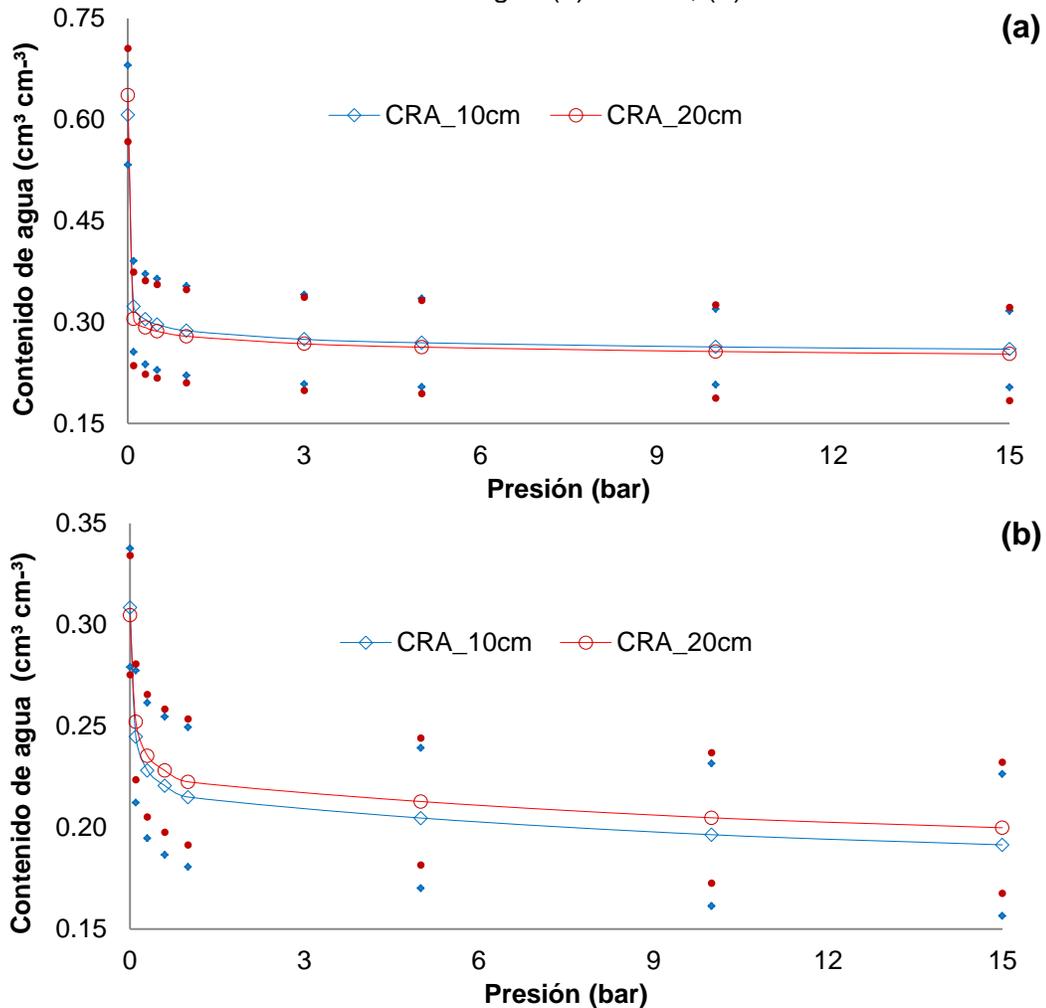
## 2.8 Resultados y discusión

Se evaluó el comportamiento general del suelo, en términos de retención de agua, en las zonas de estudio mediante la obtención de la CRA media a cada profundidad (Figura 4-2), se encontró que para ambos casos, los suelos estudiados presentan CRA aplanadas y de comportamientos similares en cada profundidad estudiada, con reducida diferencia entre CC y PMP, lo que representa una mayor presencia de microporos que evidencia compactación en suelo (Gómez-Rodríguez 2012). Las curvas obtenidas en ambos tipos

de suelo son comunes de suelos francos, según lo encontrado por Jara & Valenzuela (1998), en dónde los valores de CC y PMP en el Oxisol son de  $0,23 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$  y  $0,19 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$  y para el Andisol de  $0,30 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$  y  $0,26 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$  en ambas profundidades, valores cercanos a los reportados por Montenegro & Malagón (1990), Meza & Geissert (2003), y Gómez-Rodríguez et al., (2013).

En la figura 4-3 se observa que las CRA obtenidas para ambos suelos no tienen una tendencia generalizada, mostrando que no hay homogeneidad en los datos, es decir, dentro de la zona de estudio existen sitios cuyo comportamiento respecto a la retención de agua está alejado de los demás, sin embargo las curvas si cuentan con un mismo patrón de aplanamiento en la zona de desaturación a partir de CC.

Figura 4-2: Curva media de retención de agua (a) Andisol; (b) Oxisol.



Para tener una visión un poco más clara del comportamiento de las zonas de estudio, se determinaron las medidas descriptivas de los valores de CC y PMP (Tabla 4-1), encontrando que en ambos suelos la CRA se comporta de manera similar a las dos profundidades. Así, en el Andisol los valores de CC varían aproximadamente de  $0,13 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$  hasta  $0,55 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$  y en el Oxisol oscilan desde  $0,06 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$  hasta  $0,40 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$ , notándose que la diferencia entre CC y PMP es mayor en el Andisol, lo que representa mayor disponibilidad de agua en el suelo en el área de estudio.

Se encontró que los contenidos de agua a CC y PMP presentan variabilidad media en ambas profundidades con CV entre 12 y 60%, de acuerdo con lo establecido por Warrick & Nielsen (1980), lo cual puede ser atribuido a grado de disturbio al que ha sido sometido el suelo.

Tabla 4-1. Medidas descriptivas de CC y PMP a profundidades de 0 a 10 cm y 10 a 20 cm en Andisoles y Oxisoles.

	Profundidad (cm)	Media	Mediana	CV, %	Min	Max
CC	10 <sub>And</sub>	0,31	0,30	21,9	0,15	0,55
	20 <sub>And</sub>	0,29	0,29	22,1	0,13	0,43
	10 <sub>Ox</sub>	0,23	0,24	14,7	0,12	0,29
	20 <sub>Ox</sub>	0,24	0,23	12,8	0,15	0,29
PMP	10 <sub>And</sub>	0,25	0,25	22,6	0,11	0,40
	20 <sub>And</sub>	0,25	0,24	26,5	0,06	0,40
	10 <sub>Ox</sub>	0,19	0,20	18,3	0,09	0,25
	20 <sub>Ox</sub>	0,20	0,20	16,1	0,11	0,26

Se realizó la predicción de las CRA en los 75 sitios, en cada tipo de suelo, las curvas observadas y las predicciones de cada sitio para el Andisol son presentadas en las Figura 4-3 y para el Oxisol son presentadas en la Figura 4-4, para ambos casos se encontraron pequeñas diferencias entre las curvas.

Se determinó, con los datos observados y con los datos de las curvas predichas en cada sitio, el valor de la lámina de agua aprovechable LAA, a partir de la diferencia entre los contenidos de agua en CC y en PMP. De esta forma se obtuvo un indicador numérico del comportamiento del ajuste, realizando una regresión lineal simple para comparar los valores observados de cada sitio con los valores predichos. Así fue posible identificar en

qué tipo de suelo es más confiable el uso de la GF para el análisis de CRA. Las regresiones (figura 4-5) muestran una alta correlación entre las observaciones y las predicciones. Se encontró que el coeficiente de determinación es más alto en el Andisol (0,99) en las dos profundidades, con respecto al Oxisol (0,94), en dónde hay mayor dispersión de los datos, aunque presenta un  $R^2$  alto. Esto indica que más del 99% de los datos observados en el Andisol y del 94% de los datos en el Oxisol, son explicados por el predictor propuesto.

Figura 4-3: Curvas de retención de agua observadas, (a) a 10 cm; (c) a 20 cm, Curvas de retención de agua predichas mediante Kriging funcional, (b) a 10 cm; (d) a 20 cm. En el Andisol

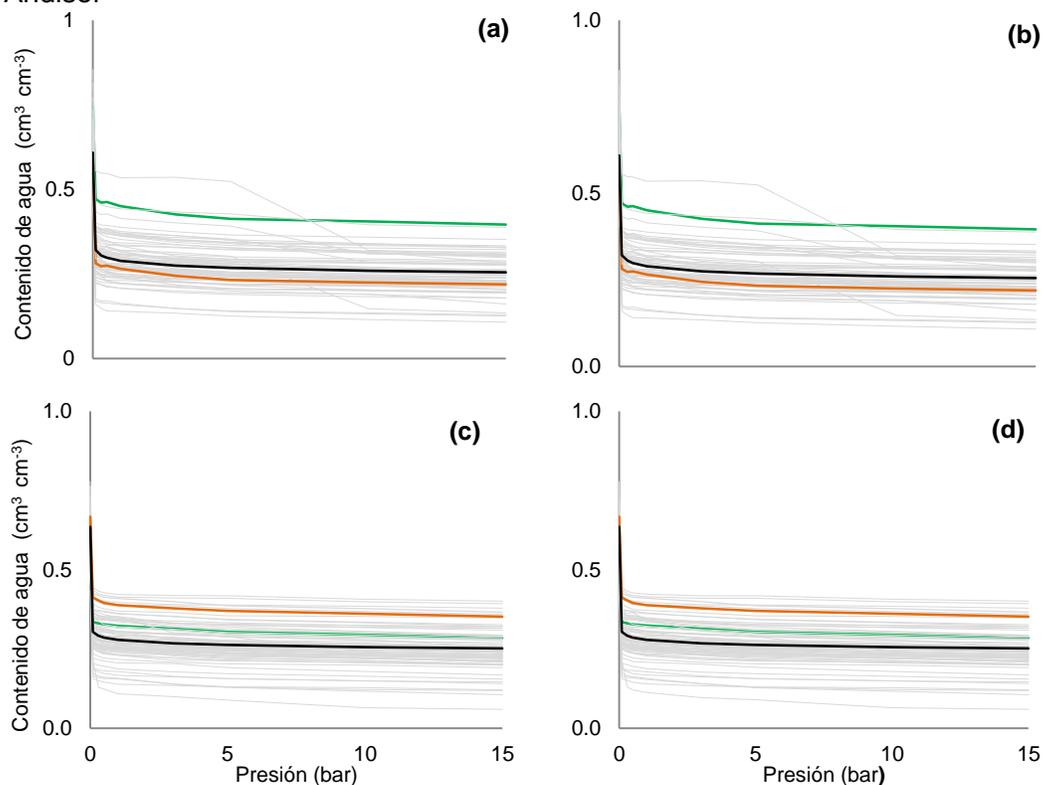
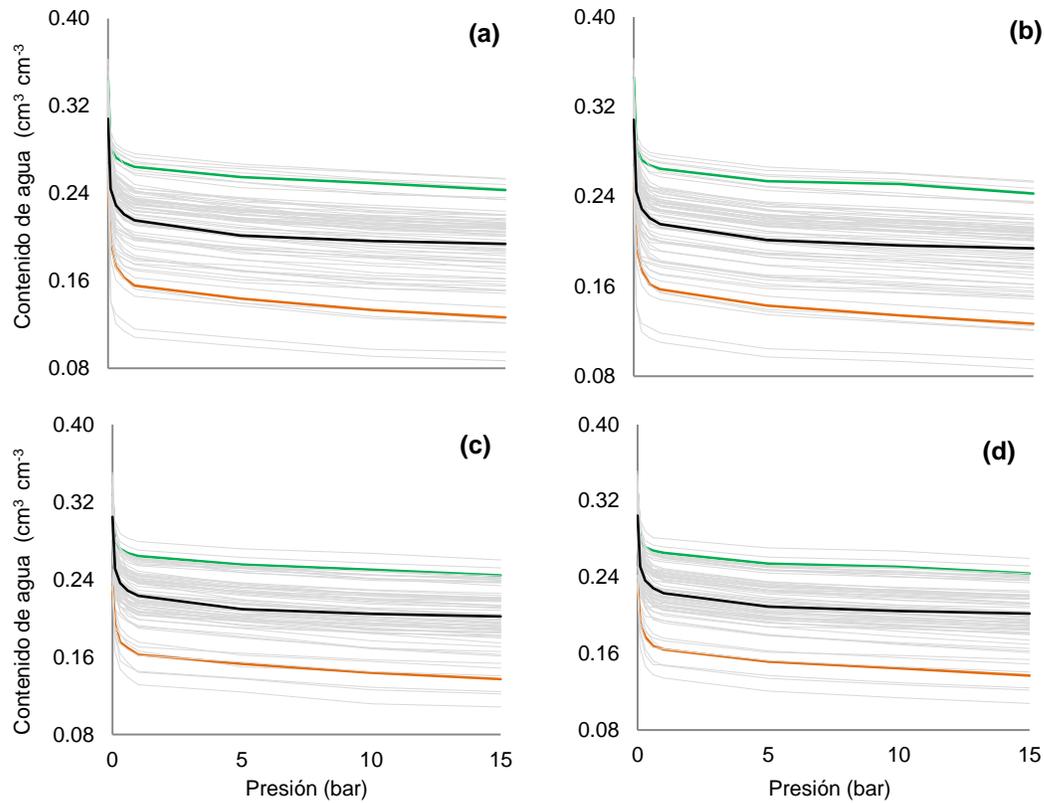


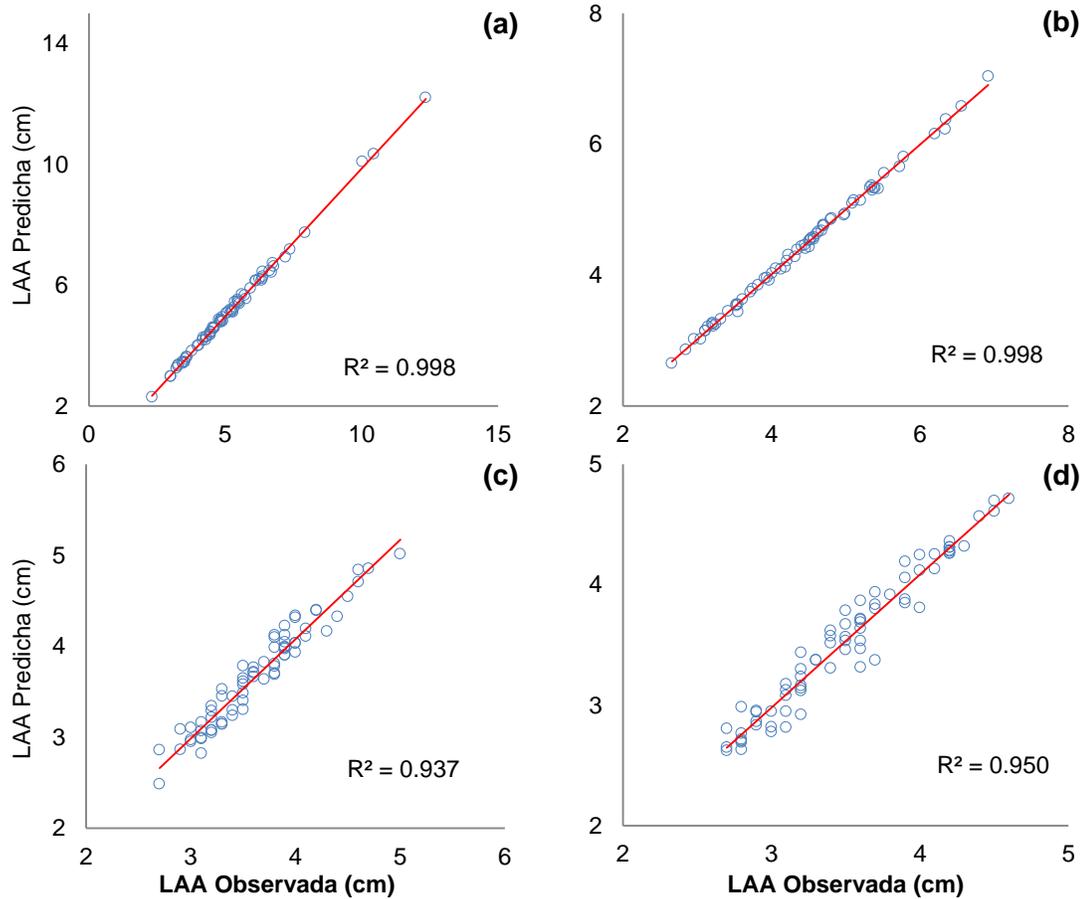
Figura 4-4: Curvas de retención de agua observadas, (a) a 10 cm; (c) a 20 cm, Curvas de retención de agua predichas mediante Kriging funcional, (b) a 10 cm; (d) a 20 cm. En el Oxisol



Para evaluar la aplicabilidad de la geoestadística funcional en la predicción de datos de curvas de retención de agua, fue conveniente determinar parámetros geoestadísticos (Tabla 4-2) y elaborar mapas de distribución espacial (Figura 4-6 y 4-7), para valores de LAA calculados a partir de tanto los datos observados como los obtenidos mediante el predictor propuesto.

Los parámetros geoestadísticos encontrados, en ambos casos y profundidades son similares entre sí, lo muestra la bondad del predictor funcional, utilizado en este estudio. Se encontró que los datos de LAA, tanto para datos experimentales como para los obtenidos mediante Kriging funcional, se ajustaron a los modelos teóricos del semivariograma, en el Andisol se ajustaron a modelos esféricos y para el Oxisol a modelos exponenciales, en ambas profundidades.

Figura 4-5: Validación cruzada lámina de agua aprovechable. Andisol (a) 10 cm; (b) 20 cm; Oxisol (c) 10 cm; (d) 20 cm



En el caso de la LAA en la profundidad de 0 – 10 cm en el Andisol, se encontró que existe un GDE moderado. Además, se obtuvieron valores de  $C_o$  alejados de cero. En contraste, en la profundidad de 10 – 20 cm, y en ambas profundidades del Oxisol, se obtuvieron valores de  $C_o$  muy cercanos a cero, lo que indica que existe fuerte dependencia espacial, también evidenciado por valores de GDE por encima a 75% (Cambardella, 1994).

Los mapas muestran que existe alta variabilidad espacial del suelo en términos de la lámina de agua aprovechable (Figuras 4-6 y 4-7). Se observa que los mapas elaborados a partir de los valores determinados mediante Kriging funcional, son coherentes y conservan una distribución espacial cercana a la de los datos observados, evidenciado por las mínimas diferencias presentes en cada caso. Para el caso del Oxisol son más

notables las diferencias entre los mapas, explicado además por un CVC de 0,94 menor que el obtenido en el Andisol.

Tabla 4-2. Parámetros teóricos del semivariograma ajustado para valores de lámina de agua aprovechable, observados y predichos para horizontes de 0 a 10 cm y 10 a 20 cm.

Suelo		Modelo	Co	Co + C	Alcance (m)	CVC	GDE
Andisol	LAA <sub>o_10</sub>	Esférico	1,386	2,975	98,0	0,99	0,53
	LAA <sub>p_10</sub>	Esférico	1,307	2,862	96,9	0,99	0,54
	LAA <sub>o_20</sub>	Esférico	0,007	0,951	30,3	0,65	0,99
	LAA <sub>p_20</sub>	Esférico	0,006	0,934	31,9	0,63	0,99
Oxisol	LAA <sub>o_10</sub>	Exponencial	0,000	0,204	163,8	0,92	1,00
	LAA <sub>p_10</sub>	Exponencial	0,000	0,250	169,2	0,85	0,99
	LAA <sub>o_20</sub>	Exponencial	0,000	0,243	313,5	0,99	1,00
	LAA <sub>p_20</sub>	Exponencial	0,026	0,352	560,4	1,03	0,93

Figura 4-6: Mapas de distribución de lámina de agua aprovechable en Andisol A LAA observada a 10 cm; B LAA predicha a 10 cm; C LAA observada a 20 cm; D LAA predicha a 20 cm.

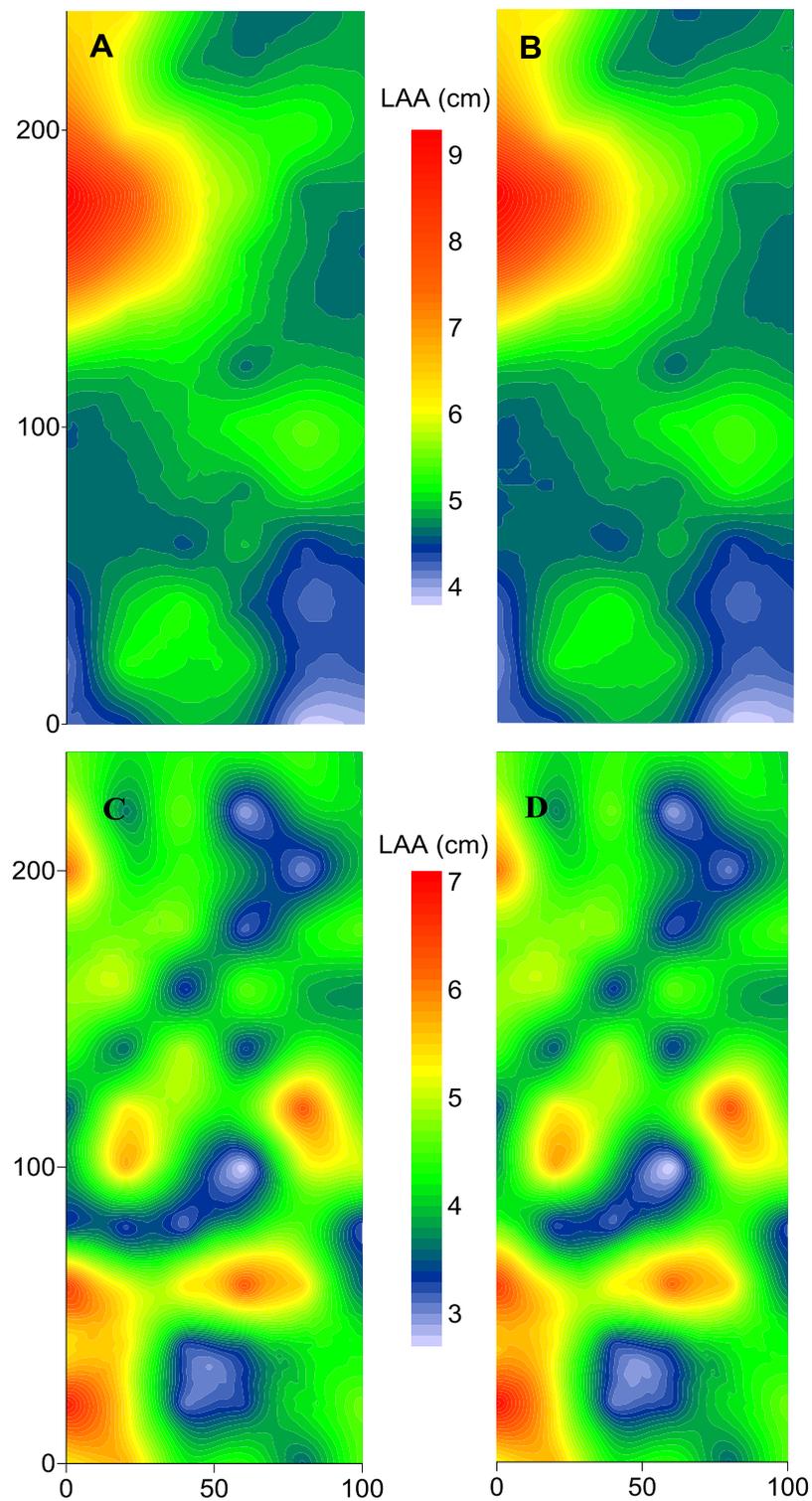
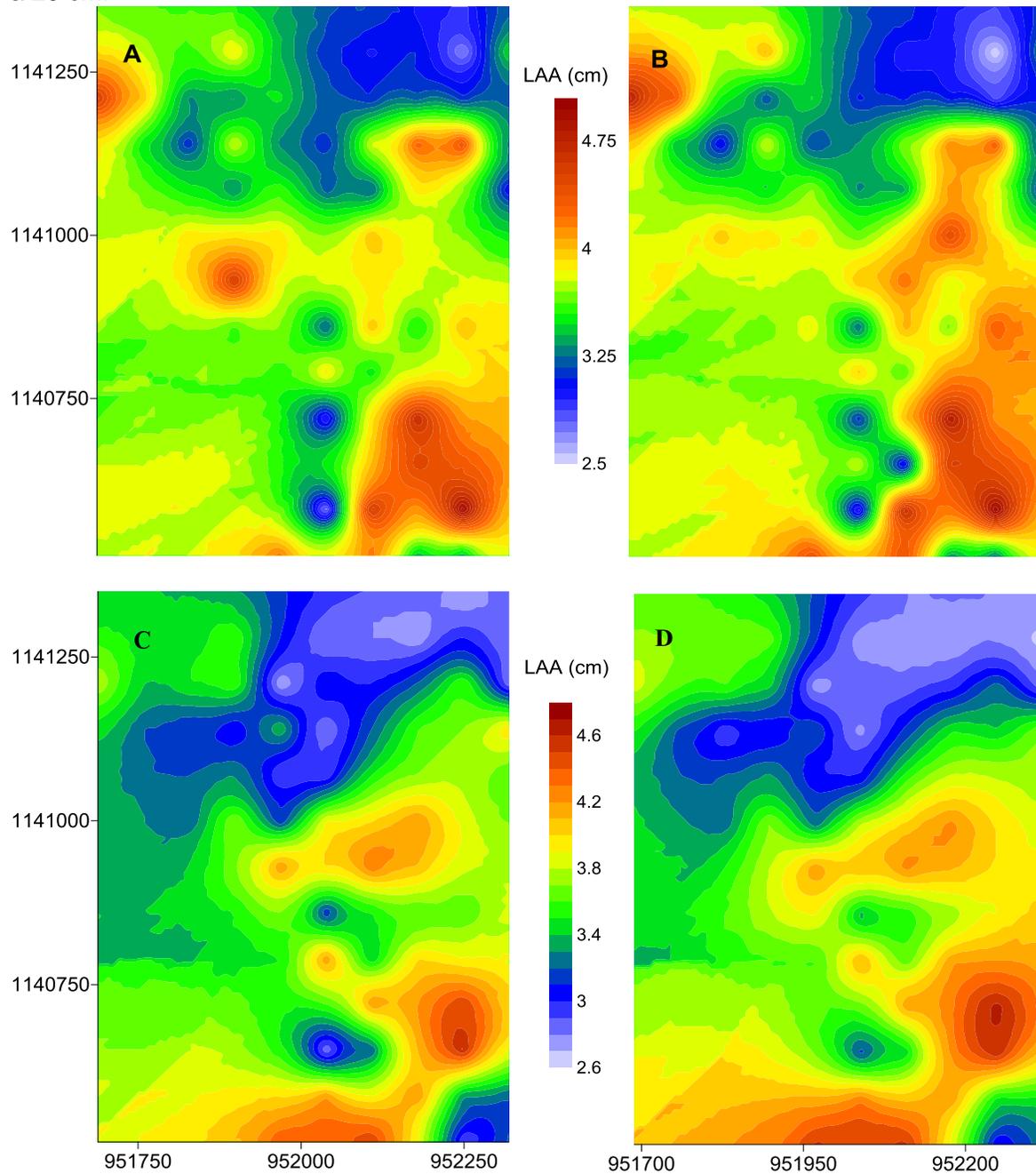


Figura 4-7: Mapas de distribución de lámina de agua aprovechable en Oxisol A LAA observada a 10 cm; B LAA predicha a 10 cm; C LAA observada a 20 cm; D LAA predicha a 20 cm.



## 2.9 Conclusiones

En general las zonas de estudio presentan altos niveles de compactación y mayor presencia de microporos, esto se infiere dado el patrón de las curvas de retención de agua en el suelo por su comportamiento y forma aplanada, con una reducida diferencia entre CC y PMP.

Los resultados de validación cruzada mostraron que el uso de GF tiene mejor ajuste para el Andisol, dado que la correlación entre los valores de LAA obtenida con los datos observados y la obtenida con las predicciones, fue alta con un  $R^2$  de 99%, sin embargo para el Oxisol la metodología propuesta también es confiable al obtenerse un  $R^2$  de 94%, en las 2 profundidades estudiadas.

Los mapas de LAA elaborados a partir de las predicciones conservan una distribución cercana a la de los datos observados, además permiten observar que el mejor ajuste se da para el Andisol, pues las diferencias entre los mapas son pocas respecto a los correspondientes al Oxisol donde las diferencias son marcadas con mayor claridad.

## 2.10 Bibliografía

Cambardella, C.A., Moorman, T.B., Novak, J.M., Parkin, T.B.; Karlen, D.L., Turco, R.F. & Konopka, A.E. 1994. Field-scale variability of soil properties in Central Iowa Soils. Soil Sci. Soc. Am. J. 58,1501-1511.

Cressie, N. 1993, Statistics for spatial data

Fernández R. & Trillo N. 2005. La textura del suelo como fuente de heterogeneidad; sus efectos sobre la oferta de agua para las plantas. Argentina: UBA-CONICET Facultad de agronomía.

Giraldo, R. 2009. Geostatistical analysis of functional data. Barcelona. PhD Thesis submitted to Universitat Politècnica de Catalunya

Giraldo, R., Delicado, P. & Mateu, J. 2010. Continuous time-varying Kriging for spatial prediction of functional data: an environmental application. *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*. 15, 66–82.

Gómez-Rodríguez, K. 2011. Incidencia de la compactación ocasionada por el tractor en las propiedades físicas en un Andisol. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C.

Gómez-Rodríguez, K., Camacho-Tamayo, J.H. & Vélez-Sánchez, J.E. 2013. Changes in water availability in the soil due to tractor traffic. *Eng. Agric.* 33, 1156-1164.

Jaimes, W., Navas, G., Salamanca, C. & Conde, A. 2003. Estudio detallado de suelos de la estación experimental de Corpoica “Sabanas” en la Altillanura Colombiana. Corpoica, C. I. La Libertad, Villavicencio, Colombia. 62.

Meza E. & Geissert D. 2003. Estructura, agregación y porosidad en suelos forestales y cultivados de origen volcánico del Cofre de Perote, Veracruz, México: *Foresta Veracruzana*. 1405-7247.

Montenegro H. & Malagón D. 1990. *Propiedades físicas de los suelos*. Colombia: Instituto Geográfico Agustín Codazzi.

Ramsay, J. & Silverman, B. 2005, *Functional data analysis 2*. New York; Springer.

Tormena, C.A. 2002. A compactação do solo em agroecossistemas agrícolas. *Reunión Brasileira de manejo e conservação do solo e da água*, 14.

Warrick, A.W. & Nielsen, D.R. 1980. Spatial variability of soil physical properties in field. In: HILLEL, D.(Ed.). *Applications of soil physics*. New York: Academic Press. 385.

## 5 Consideraciones finales

Los resultados permiten inferir que es conveniente que las prácticas y manejo del suelo, en particular las concernientes a la implementación de sistemas de riego, sean localizados, desde la concepción del uso racional del agua y la agricultura de precisión, conceptos que permitirían la disminución de costos de producción, al igual que la minimización de los riesgos de degradación de suelos en la producción de cultivos.

Convendría, que las labores de mecanización en el área de estudio en el oxisol fuesen localizadas, como una consecuencia de la variabilidad en la RP. Además, con el objetivo de disminuir el desgaste de los aperos utilizados, la aplicación de agua antes de las actividades de labranza también sean de forma localizada, para garantizar la humedad óptima de mecanización en toda el área.

La evaluación de la metodología de GF realizada en este estudio, para diferentes atributos del suelo, ha permitido conocer su grado de confianza pues los resultados obtenidos en la validación cruzada funcional indican su buen desempeño para la interpolación en sitios no observados, además las comparaciones hechas con los resultados de métodos clásicos infieren que estas técnicas pueden ser utilizadas para diferentes datos funcionales aunque estos presenten alta variabilidad espacial.