



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

**DEPENDENCIA EN EL TIEMPO DE LAS SERIES DE
TIEMPO DE LOG-RETORNOS DIARIOS EN LOS
MERCADOS BURSÁTILES INTERNACIONALES**

Tathiana Yesenia Coy Mondragón

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá, Colombia
Septiembre 2015

**DEPENDENCIA EN EL TIEMPO DE LAS SERIES DE
TIEMPO DE LOG-RETORNOS DIARIOS EN LOS
MERCADOS BURSÁTILES INTERNACIONALES**

Tathiana Yesenia Coy Mondragón

Tesis como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Física

Director:
Ph.D. Carlos José Quimbay Herrera

Línea de Investigación:
Econofísica
Grupo de Investigación:
Econofísica y sociofísica

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá, Colombia
Septiembre 2015

“Ahora me desplazo entre los infinitos universos porque quiero conservar tu sonrisa”. *Steins;Gate*

Agradecimientos

A Dios creador del universo y dueño de mi vida por permitirme construir otros mundos mentales posibles!!!.

Este trabajo fue desarrollado gracias a la colaboración de varias personas que han influenciado y contribuido en mi formación profesional.

Agradezco a mi director Carlos Quimbay por permitirme incursionar en el maravilloso mundo de la econofísica; además por su confianza en mí, comprensión, disposición y paciencia durante este tiempo de aprendizaje que me permitió el desarrollo y culminación de este trabajo.

Muy en especial a mis padres Pablo y Martha por respetar mis decisiones sin importar los sacrificios, a mi hermana Diana por acompañarme a descubrir el mundo de la ciencia y a mi hermano Germán.

Extiendo mis agradecimientos, a todos aquellos que en estos años de vivencia han permitido, favorecido y propiciado mi aprendizaje y me han enseñado que, por encima de las diferencias, siempre estarán las personas.

Resumen

En esta tesis se realiza un estudio de la dependencia en el tiempo de las series de tiempo de log-retornos diarios de algunos índices bursátiles internacionales asociados a mercados consolidados y emergentes, mediante la variación en el tiempo de los exponentes de Hurst local y de la volatilidad. Para realizar lo anterior, en la primera parte de esta tesis se considera toda la ventana de observación para cada una de las series de tiempo y se calculan tanto los parámetros de ajuste de las distribuciones estables de frecuencia de los log-retornos, así como los exponentes de Hurst globales de las series de tiempo de log-retornos. En la segunda parte de la tesis, se realiza el estudio de la variación en el tiempo tanto de los exponentes de Hurst local como de la volatilidad considerando una ventana de tiempo constante que cubra toda la ventana de observación para cada una de las series de tiempo consideradas. A partir de la variación en el tiempo de los exponentes de Hurst, se encuentra que independientemente del mercado bursátil considerado, todos los mercados tienden a comportarse de una manera eficiente durante los últimos años. Adicionalmente, a partir de la variación en el tiempo de la volatilidad, se encuentra que los mercados eficientes se distinguen claramente de los mercados emergentes. Finalmente, se encuentra que los mercados se ven afectados por la crisis del Lunes Negro e Hipotecaria.

Palabras clave: Series de tiempo financieras, econofísica, exponente de Hurst, R/SC, DFA, Volatilidad.

Contenido

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
1. Introducción	2
2. Series de tiempo como procesos estocásticos	7
2.1. Procesos estocásticos	7
2.1.1. Proceso de Markov	9
2.1.2. Proceso de Wiener	9
2.1.3. Movimiento browniano simple (MBS)	11
2.1.4. Movimiento browniano fraccional (mBf)	13
2.2. Distribución de los procesos estocásticos	16
2.2.1. Distribuciones de vuelos de Lévy	17
2.3. Correlación temporal	19
2.3.1. Función de correlación	19
2.3.2. Dependencia de corto rango	21
2.3.3. Dependencia de largo rango	21
2.3.4. Exponente de Hurst	23
2.3.5. Metodo de rango reescalado clásico (R/SC)	24
2.3.6. Método de análisis de fluctuaciones sin tendencias (DFA)	28
2.3.7. Dinámica del exponente de Hurst $H(t)$	32
2.4. Volatilidad	33
2.4.1. Volatilidad	33
2.4.2. Modelo de Black-Sholes	34
3. Mercados bursátiles	36
3.1. Mercados financieros	36
3.2. Hipótesis del mercado eficiente	37
3.3. Crisis financieras	38
3.3.1. Crisis del lunes negro	39
3.3.2. Crisis hipotecaria	40
3.4. Una perspectiva econofísica de las finanzas	40

4. Distribución de frecuencias de algunos índices bursátiles	45
4.1. Históricos y log-retornos	45
4.1.1. Norteamérica	46
4.1.2. Europa	49
4.1.3. Asia	52
4.1.4. Latinoamérica	54
4.2. Distribución de frecuencias	59
5. Exponentes de Hurst de las series de tiempo de log-retornos	63
5.1. Exponentes de Hurst usando el metodo R/SC	63
5.2. Exponentes de Hurst usando el método R/SG	67
5.3. Exponentes de Hurst usando el método DFA	69
5.4. Cálculo de la dimensión fractal a partir de H	72
6. Estudio de la variación en el tiempo de las series de tiempo de log-retornos	74
6.1. Variación en el tiempo del exponente de Hurst local $H(t)$	74
6.2. Variación en el tiempo de la volatilidad local $Var(t)$	88
7. Propagación de las crisis financieras	93
7.1. Propagación a partir de $H(t)$	93
7.1.1. Correlación entre las series de $H(t)$	97
7.2. Propagación a partir de $Var(t)$	100
7.2.1. Correlación entre las series de $Var(t)$	103
8. Conclusiones	106

Lista de Figuras

2-1.	Camino aleatorio de un borracho (Caricatura dibujada por George Gamow, de Gamow, 1961.	12
2-2.	Movimiento browniano de partículas de polen suspendidas en agua; caminata aleatoria.	13
2-3.	Distribuciones asimétricas con respecto a su eje de simetría. En la primera se observa la curva orientada a lado derecho del eje de simetría (asimetría negativa), en la segunda la curva es totalmente simétrica, mientras que en la última la curva es asimétrica positiva).	17
2-4.	Tres diferentes casos del coeficiente de curtosis K , que caracterizan diferentes tipos de distribuciones: 1) La distribución leptocúrtica ($K > 3$) presenta un elevado grado de concentración alrededor de los valores centrales de la variable; 2) la distribución mesocúrtica ($K = 3$) presenta un grado de concentración medio alrededor de los valores centrales de la variable (lo mismo sucede para una distribución normal); 3) la distribución platicúrtica ($K < 3$) presenta un reducido grado de concentración alrededor de los valores centrales de la variable.	18
2-5.	Función de autocovariancia típica para un proceso con memoria finita, a partir de $C(0) = \sigma^2$ y finalizando en $C(\tau) \simeq 0$. Figura tomada de la referencia [1].	20
2-6.	Formas de las funciones de autocorrelación para un ruido $1/f^\eta$, para $\eta = 0, 1$ y $\eta = 2$. Figura tomada de la referencia [2].	22
3-1.	Datos empíricos de índice bursátil estadinense S&P500: La primera describe el comportamiento del precio de cierre $P(t)$, la segunda el retorno o tasa de cambio $R(t)$ y la tercera el log-retorno $S(t)$ en función del tiempo, para un periodo comprendido entre 1975-2013.	43
3-2.	Serie de tiempo aleatoria de 3000 pasos tiempo (gráfica superior) y la serie temporales del índice S&P500 de 8938 pasos de tiempo (gráfica inferior).	44
4-1.	Datos empíricos entre 1977-2013 del índice bursátil estadounidense Dow Jones. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).	47
4-2.	Datos empíricos entre 1977-2013 del índice bursátil estadounidense S&P500. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).	47

4-3.	Datos empíricos entre 1977-2013 del índice bursátil estadounidense Nasdaq. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).	48
4-4.	Datos empíricos entre 1984-2013 del índice bursátil canadiense S&P/TSX. Se representas los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).	49
4-5.	Datos empíricos entre 1984-2013 del índice bursátil británico FTSE100. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).	49
4-6.	Datos empíricos entre 1900-2013 del índice bursátil francés CAC40. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).	50
4-7.	Datos empíricos entre 1900-2013 del índice bursátil español IBEX35. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).	51
4-8.	Datos empíricos entre 2000-2013 del índice bursátil alemán DAX 30. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).	51
4-9.	Datos empíricos entre 1984-2013 del índice bursátil japonés Nikkei225. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).	52
4-10.	Datos empíricos entre 1986-2013 del índice bursátil asiático HSI. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).	53
4-11.	Datos empíricos entre 1987-2013 del índice bursátil asiático STI. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).	53
4-12.	Datos empíricos entre 1997-2013 del índice bursátil coreano Kospi. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).	54
4-13.	Datos empíricos entre 1984-2013 del índice bursátil brasileño Bovespa. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).	55
4-14.	Datos empíricos entre 1991-2013 del índice bursátil mexicano IPC. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).	55
4-15.	Datos empíricos entre 1996-2013 del índice bursátil argentino Merval. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).	56

4-16. Datos empíricos entre 1996-2013 del índice bursátil chileno IPSA. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).	56
4-17. Datos empíricos entre 1997-2013 del índice bursátil peruano IGBVL. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).	57
4-18. Datos empíricos entre 2001-2013 del índice bursátil colombiano IGBC. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).	58
4-19. Distribución de frecuencias para la serie de log-retornos diarios asociadas a los 18 índices bursátiles de estudio, a partir de un ajuste de vuelos de Lévy estables.	60
5-1. Relación entre el exponente de Hurts (H) y el número mínimo de paquetes (a) usando el método R/SC, para las 18 series de tiempo de log-retornos estudiadas. Cada curva $H(a)$ evidencia la dependencia del valor de H con respecto al valor de a	64
5-2. Relación entre H y el número mínimo de paquetes a usando DFA para los 18 índices bursátiles estudiados. Cada uno de los índices bursátiles, evidencian la dependencia del valor del exponente H con respecto al tamaño de ventana.	70
6-1. Estimación de $H(t)$ para los cuatro índices bursátiles norteamericanos DOW JONES, S&P/500, Nasdaq y S&P/TSX, a partir de los métodos R/SG (superior) y DFA (inferior). Para cada uno de los índices, se evidencia la dependencia de H con el tiempo. Adicionalmente se señala con una línea roja, la tendencia de comportamiento de H cerca de la crisis del lunes negro y de la crisis hipotecaria.	77
6-2. Estimación de $H(t)$ para los cuatro índices bursátiles europeos DFTSE 100, CAC 40, IBEX 35 y DAX 30, a partir de los métodos R/SG (superior) y DFA (inferior). Para cada uno de los índices, se evidencia la dependencia de H con el tiempo. Adicionalmente se señala con una línea roja, la tendencia de comportamiento de H cerca de la crisis del lunes negro y de la crisis hipotecaria.	78
6-3. Estimación de $H(t)$ para los cuatro índices bursátiles asiáticos Nikkei 225, HSI, STI y KOSPI; a partir de los métodos R/SG (superior) y DFA (inferior). Para cada uno de los índices, se evidencia la dependencia de H con el tiempo. Adicionalmente se señala con una línea roja, la tendencia de comportamiento de H cerca de la crisis del lunes negro y de la crisis hipotecaria.	79

6-4. Estimación de $H(t)$ para los seis índices bursátiles latinoamericanos Bovespa, IPC, Merval, IPSA, IGBVL e IGBC, a partir de los métodos R/SG (superior) y DFA (inferior). Para cada uno de los índices, se evidencia la dependencia de H con el tiempo. Adicionalmente se señala con una línea roja, la tendencia de comportamiento de H cerca de la crisis del lunes negro y de la crisis hipotecaria.	80
6-5. Distribución de frecuencias con ajuste gaussiano de los valores del exponente de Hurst local estimado usando el método R/SG (gráfica izquierda) y DFA (gráfica derecha), para los cuatro índices bursátiles norteamericanos DOW JONES, S&P/500, Nasdaq y S&P/TSX. Se presentan los valores de $H(t)$ desde el 22 de septiembre de 2003 hasta el 29 de abril de 2013 (aproximadamente 10 años).	84
6-6. Distribución de frecuencias con ajuste gaussiano de los valores del exponente de Hurst local estimado usando el método R/SG (gráfica izquierda) y DFA (gráfica derecha), para los cuatro índices bursátiles europeos FTSE 100, CAC 40, IBEX 35 y DAX 30. Se presentan los valores de $H(t)$ desde el 22 de septiembre de 2003 hasta el 29 de abril de 2013 (aproximadamente 10 años).	85
6-7. Distribución de frecuencias con ajuste gaussiano de los valores del exponente de Hurst local estimado usando el método R/SG (gráfica izquierda) y DFA (gráfica derecha), para los cuatro índices bursátiles asiáticos Nikkei 225, HSI, STI y KOSPI. Se presentan los valores de $H(t)$ desde el 22 de septiembre de 2003 hasta el 29 de abril de 2013 (aproximadamente 10 años).	86
6-8. Distribución de frecuencias con ajuste gaussiano de los valores del exponente de Hurst local estimado usando el método R/SG (gráfica izquierda) y DFA (gráfica derecha), para los seis índices bursátiles latinoamericanos Bovespa, IPC, Merval, IPSA, IGBVL e IGBC. Se presentan los valores de $H(t)$ desde el 22 de septiembre de 2003 hasta el 29 de abril de 2013 (aproximadamente 10 años).	87
6-9. Patrón 1, que se encuentra para los índices bursátiles DOW JONES, S&P500, Nasdaq, S&P/TSX, FTS100, CAC40, IBEX 35, DAX30, Nikkei 225, Bovespa e IPC.	90
6-10. Patrón 2, que se encuentra para los índices bursátiles HSI, STI, KOSPI, Merval, IPSA e IGBVL.	91
6-11. Patrón 3, que se encuentra para el índice bursátil IGBC.	91
7-1. Evolución en el tiempo del exponente de Hurst local $H(t)$, el cual es estimado usando el método R/SG, para los 18 índices bursátiles estudiados. Mediante la línea amarilla, se pretende evidenciar la tendencia que tiene el valor de H antes y después de la crisis hipotecaria. Se señala con un línea punteada los casos en los que el valor de H local tiende a 0,5.	95

7-2. Evolución en el tiempo del exponente de Hurst local ($H(t)$), el cual es estimado usando el método DFA, para los 18 índices bursátiles estudiados. Las flechas rojas evidencian el surgimiento de las crisis del lunes negro e hipotecaria, mientras que las líneas amarillas evidencian la tendencia que tiene el valor de H local antes y después de las crisis.	96
7-3. Coeficientes de correlación entre el exponente de Hurst local, estimado con el método R/SG para los 18 índices bursátiles de estudio	98
7-4. Coeficientes de correlación entre el exponente de Hurst local, estimado con el método DFA para los 18 índices bursátiles de estudio	99
7-5. Evolución en el tiempo de la volatilidad histórica calculada a partir de la varianza ($Var(t)$) para los cuatro índices bursátiles norteamericanos DOW JONES, S&P500, Nasdaq y S&P/TSX.	101
7-6. Evolución en el tiempo de la volatilidad histórica calculada a partir de la varianza ($Var(t)$) para los cuatro índices bursátiles europeos FTSE 100, CAC 40, IBEX 35 y DAX 30.	101
7-7. Evolución en el tiempo de la volatilidad histórica calculada a partir de la varianza ($Var(t)$) para los cuatro índices bursátiles asiáticos Nikkei 225, HSI, STI y KOSPI.	102
7-8. Evolución en el tiempo de la volatilidad histórica calculada a partir de la varianza ($Var(t)$) para los seis índices bursátiles latinoamericanos Bovespa, IPC, Merval, IPSA, IGBVL e IGBC.	102
7-9. Coeficientes de correlación entre la volatilidad estimada para los 18 índices bursátiles internacionales calculado por R/SG	105

Lista de Tablas

4-1.	Datos históricos de los índices bursátiles estudiados. En la segunda columna se presenta la fecha de inicio del respectivo índice (de acuerdo con la disponibilidad de datos) y en la última columna el número de datos.	46
4-2.	Parámetros de ajuste a una distribución de vuelos de Levy estables de las distribuciones de frecuencias de los log-retornos diarios de los 18 índices bursátiles considerados.	61
5-1.	Exponentes de Hurst estimados usando el método R/SC, tomando como tamaño óptimo mínimo de paquete el valor $a = 140$, para las series de tiempo de log-retornos diarios de los 18 índices bursátiles estudiados.	66
5-2.	Exponentes de Hurst estimados usando el método R/SG, tomando como tamaño óptimo mínimo de paquete el valor $a = 140$, para las series de tiempo de log-retornos diarios de los 18 índices bursátiles estudiados.	68
5-3.	Exponentes de Hurst estimados usando los métodos DFA0, DFA1 y DFA2 tomando como tamaño óptimo mínimo de paquete el valor $a = 140$, para las series de tiempo de log-retornos diarios de los 18 índices bursátiles estudiados.	71
5-4.	Exponente de Hurst promedio $H_{promedio}$ y dimensión fractal D estimados con un valor de tamaño óptimo de paquete $a = 140$, para las series de tiempo de log-retornos diarios de los 18 índices bursátiles estudiados.	73
6-1.	Resumen de los $H(t)$ para los índices bursátiles estudiados. En la segunda y tercera columna se presenta el intervalo en que varía $H(t)$ usando los métodos R/SG y DFA, respectivamente, y en la cuarta y la última columna el ancho de cada intervalo.	82

1 Introducción

La caracterización del tipo de memoria en las series de tiempo financieras se ha estudiado implementando algunos métodos de mecánica estadística [1], con el objetivo de determinar la existencia de correlación temporal de largo rango (o memoria larga) en dichas series. La memoria larga, también llamada persistencia de largo rango, se asocia con leyes de potencia del tipo $c(h) \sim |h|^{-\beta}$, y es medida frecuentemente en términos del exponente de Hurst (H) [3, 4, 5]. Este tipo de correlación temporal de largo rango se caracteriza por seguir una ley de potencia, que para algunos casos específicos se puede escribir a través de un parámetro de escala o dimensión fractal (D) [6, 7]. Por ejemplo, para el caso de una serie de tiempo autosimilar y autoafín, la dimensión fractal D está relacionada con el exponente de Hurst H [3]. Sin embargo, es importante resaltar que en general D y H son parámetros independientes, que tienen diferente naturaleza: Mientras que la dimensión fractal representa una propiedad local, la correlación temporal de largo rango representa una propiedad global. Para el caso de procesos autoafines, estos dos parámetros están estrechamente vinculados, tal como sucede con el ruido gaussiano fraccional y con el movimiento browniano fraccional [8] [9]. Para tal caso, debido a que las propiedades locales se reflejan en las propiedades globales, estos dos parámetros están relacionados como $D + H = n + 1$, siendo n una constante [6]. En el caso específico en el que $n = 1$, la relación entre D y H toma la forma $D = 2 - H$.

El primer modelo desarrollado en matemáticas financieras fue propuesto por Bachelier en 1900 al estudiar las variaciones de los precios de un tipo particular de activo financiero (bonos del estado francés), encontrando que estas variaciones se distribuyen normalmente [10]. Lo establecido por Bachelier en el contexto financiero resultó equivalente a lo encontrado por Einstein en 1905 [11], quien al proponer una explicación sobre el origen del movimiento browniano simple (observado por Brown en 1927 [12]), determinó que los desplazamientos de las partículas brownianas también se distribuían normalmente. Usando un lenguaje contemporáneo, en la descripción del desplazamiento de una partícula browniana durante un intervalo de tiempo t , se encuentra que existe un exponente de autosimilaridad $H = 1/2$, que cumple con la relación $X(t) = a^{1/2}X(t)$ [13]. Desde esta perspectiva, en el modelo pionero de Bachelier [10] no se consideró la posible existencia de correlación temporal de largo rango. Precisamente, en el contexto financiero, la aleatoriedad que caracteriza al movimiento browniano simple se entiende como la hipótesis de mercado eficiente [14]. Un modelo mucho más flexible, en el que el exponente de autosimilaridad (H) puede tomar valores $H \neq 1/2$, es el movimiento browniano fraccional [8] [9], entendido como un proceso estocástico caracterizado por $\{B_t, t \geq 0\}$. Para este proceso estocástico, propuesto por Kolmogorov en 1940

[15], se cumple la relación $X(t) = a^H X(t)$, con $H \in [0, 1]$.

De acuerdo con lo anterior, la caracterización de la correlación temporal de largo rango en una serie de tiempo se realiza a partir de estimar el exponente de autosimilaridad de la serie o exponente de Hurst H . El primer método implementado para estimar H , usando una relación empírica llamada de rango reescalado (R/S) (en inglés Rescaled-Range), fue desarrollado por Harold Edwin Hurst en 1951 [3]. Este método, que en esta tesis es llamado método de rango escalado clásico (R/SC), es uno de los más populares para estimar H . Sin embargo, se ha demostrado que el método R/SC presenta algunas limitaciones, especialmente cuando la serie de tiempo no es lo suficientemente larga [16]. Por esta razón, han sido propuestas varias modificaciones del método R/SC para solucionar el anterior problema. Una posible solución, en la que se realiza un procedimiento de tipo geométrico [16], permite que la sobreestimación de H proveniente de tener pocos datos en la serie de tiempo sea corregida [16]. El método tipo R/S, que incluye al mencionado procedimiento geométrico, es llamado en esta tesis método de rango reescalado geométrico (R/SG). Otro de los métodos más populares para estimar H es el llamado método DFA (Detrended Fluctuation Analysis), el cual fue propuesto por Peng en 1992 [17], y que fue empleado para estudiar la existencia de posibles correlaciones temporales en secuencias de moléculas de DNA [18]. Teniendo en cuenta que una posible fuente adicional de sobreestimación de H es la presencia de tendencias en las series de tiempo, se propuso una generalización del método DFA que permite realizar un análisis de fluctuaciones sin tendencia (DFAm) [19]. Este método, llamado DFAm o método de remoción de tendencias dependiente del grado del polinomio m , conduce a un análisis jerárquico de las fluctuaciones y permite que la correlación temporal sea medida a través de la estimación de H , pero eliminando la influencia de las tendencias [19]. El valor específico de H , para el caso particular de una serie de tiempo de log-retornos diarios de índices bursátiles, es interpretado de la siguiente manera: si $H = 1/2$, los log-retornos son completamente independientes, por lo que no existe correlación temporal entre ellos y la serie se comporta como un proceso estocástico tipo movimiento browniano simple [11]; si $1/2 \leq H < 1$, la serie es persistente, con lo cual existe memoria de largo rango y los log-retornos presentan correlación temporal [20]; si $0 < H \leq 1/2$, la serie es anti-persistente, lo cual indica un comportamiento caótico de los log-retornos y la serie se comporta como una serie fractal.

Al estudiar la distribución de probabilidad de las series de tiempo financieras se encuentra que estas son leptocurticas y asimétricas [1], de tal forma que no pueden ser descritas por una distribución normal [21]. Las series de tiempo financieras empíricas están caracterizadas por sus distribuciones de probabilidad que se ajustan bastante bien a distribuciones de vuelos de Lévy estables [21], lo cual implica la existencia de la propiedad de autosimilitud. Esta propiedad, también conocida como invariancia bajo transformaciones de escala, da lugar a que la forma de la distribución de probabilidad no dependa de la escala de tiempo con la que se esté observando la serie de tiempo. Este hecho fue señalado por primera vez por Mandelbrot [8] [9], al estudiar las series de tiempo asociadas con variaciones grandes de los precios del algodón ocurridas en días, semanas, meses o años, es decir Mandelbrot observó

una invariancia de escala para las variaciones grandes, que denominó escalamiento en el tiempo.

El estudio de las crisis en los mercados bursátiles internacionales ha sido motivo de interés, tanto desde el punto de vista financiero [22, 23], cómo desde el punto de vista econofísico [24, 25, 26]. Debido a la existencia de mercados económicos globalizados, se observa que las causas locales que propician la generación de caídas bruscas de los índices bursátiles de un determinado mercado financiero en un país dado, también ocasionan caídas bruscas en los índices de mercados bursátiles de otros países. Ejemplos de este tipo de crisis son: la crisis financiera de octubre de 1987, originada en Nueva York y llamada la crisis del lunes negro; la crisis financiera de octubre de 2008, originada en los Estados Unidos de América y llamada la crisis hipotecaria. Como se observa en estos ejemplos, las crisis mencionadas se originaron en un momento dado en un determinado país debido a razones marcadamente locales, pero sus efectos se propagaron con el transcurrir de los días y se manifestaron con fuertes caídas en todos los mercados bursátiles del mundo [27, 28].

El objetivo general de esta tesis es estudiar la dependencia en el tiempo de las series de tiempo de log-retornos diarios de algunos índices bursátiles internacionales, a partir de determinar la variación en el tiempo de los exponentes de Hurst locales $H(t)$ y de las volatilidades locales $Var(t)$ asociadas con cada una de las series de tiempo estudiadas. Los diferentes índices bursátiles que se consideran, fueron seleccionados con el fin de poder diferenciar algunas características de mercados financieros consolidados y emergentes de diferentes regiones del mundo. Específicamente, los índices bursátiles que se estudian son: DOW JONES (USA), S&P500(USA), Nasdaq (USA), S&P/TSX (Canadá), FTSE100 (Reino Unido), CAC40 (Francia), IBEX35 (España), DAX 30 (Alemania); Nikkei 225 (Japón); STI (Singapur), HSI (Hong Kong), KOSPI (Corea del Sur), Bovespa (Brasil), IPC (Méjico), Merval (Argentina), IPSA (Chile), IGBVL (Perú) e IGBC (Colombia). Estos índices bursátiles son estudiados usando ventanas de observación locales de 500 datos, lo cual permite ver por separado los efectos de las crisis financieras del lunes negro e hipotecaria, en la medida en que lo anterior sea posible, si se tiene en cuenta la diferencia de antigüedad de los mercados bursátiles y la disponibilidad de datos. Los exponentes de Hurst son estimados usando los métodos R/SC, R/SG y DFAM, mientras que la volatilidad es estudiada a través del cálculo de la varianza.

Para cumplir el objetivo general se siguen los pasos que se describen a continuación. *Primero*: Inicialmente se encuentran los parámetros de ajuste para la distribución de frecuencias de las series de tiempo de log-retornos. Para realizar lo anterior, se considera la ventana completa de observación para cada una de las series de tiempo estudiadas y se ajustan las distribuciones de frecuencia respectivas a distribuciones tipo vuelos de Levy estable [21], enfocando el interés en el valor del parámetro de ajuste α , con el fin de poder determinar cuáles de los mercados bursátiles estudiados tienen un comportamiento más cercano al eficiente. *Segundo*: Considerando nuevamente la ventana completa de observación, para todas las series de tiempo de log-retornos estudiadas, se estima el exponente de Hurst H global.

Los exponentes de Hurst son estimados usando los métodos R/SC [3], R/SG [16] y DFAM (con $m = 0, 1, 2$), considerando un tamaño óptimo de paquete $a = 140$, el cual es obtenido a partir de un análisis gráfico del comportamiento de H en función del tamaño de paquete (a). Este método gráfico, que permite encontrar el tamaño óptimo del paquete, fue implementado con anterioridad en el desarrollo de dos trabajos de grado en los que se estudiaron series de tiempo de variaciones diarias de temperaturas [29] y series de tiempo sísmicas [30],[31]. En estos trabajos de grado se estimaron exponentes de Hurst, considerando el efecto de tamaño óptimo de paquete para series de tiempo cortas. *Tercero:* A diferencia de lo realizado en los dos pasos anteriores, donde se ha considerado la ventana completa de observación, ahora se estudia la variación en el tiempo de los exponentes de Hurst locales $H(t)$ y de la volatilidad (varianza) $Var(t)$, considerando una ventana de tiempo constante, correspondiente a $n = 500$ (aproximadamente 2 años), haciendo que la ventana corra sobre toda la serie de tiempo hasta abarcar toda la ventana de observación. Esta ventana constante, fue elegida variando su tamaño en intervalos de cien datos, desde $n = 200$ hasta $n = 1000$, de tal forma que a partir de las gráficas de volatilidad y de los exponentes de Hurst locales (estimados con los métodos R/SG y DFA0), se encuentra que la ventana de $n = 500$ presenta un mejor comportamiento o reacción a la presencia de crisis financieras. *Cuarto:* A partir de la variación de H local en el tiempo, se evidencia de forma novedosa que existen ciertos patrones de variación de $H(t)$ que reflejan la existencia de las crisis financieras consideradas (lunes negro e hipotecaria), además de encontrar, como es reportado en la literatura [32, 16], que los mercados bursátiles tienden a la eficiencia debido a que el valor de H local tiende a $H \sim 0,5$. Este último resultado es encontrado a partir de ajustar a una distribución gaussiana los valores de H locales correspondientes a los últimos diez años, para cada una de las series de log-retornos estudiadas. Por otra parte, a partir de la evolución temporal de la volatilidad $Var(t)$, también se encuentra que existe un patrón de variación muy particular de los valores de la volatilidad durante las crisis financieras consideradas. Es decir, con lo anterior se encuentra, como contribución relevante de esta tesis, que ciertos patrones para los valores de los $H(t)$ y las $Var(t)$ para tiempos posteriores a la ocurrencia de las crisis financieras pueden ser usados como evidencia de la existencia y propagación de las crisis financieras. Concretamente, para el caso de las $Var(t)$, se encuentra que existen tres patrones diferentes, que permiten diferenciar el mercado, definidos a partir de su similitud gráfica y del valor del coeficiente de correlación. *Quinto:* Finalmente, a partir de los valores de los $H(t)$ locales y de las $Var(t)$ locales, se encuentra que existen patrones de propagación de las crisis financieras consideradas (lunes negro e hipotecaria) para los diferentes mercados bursátiles estudiados. Vale aclarar, que en el estudio de la variación temporal de los valores de H y $Var(t)$ locales (pasos tercero, cuarto y quinto) fue necesario depurar las series de tiempo (no considerando algunos datos), con el fin de unificar fechas y de esta forma poder establecer comparaciones entre los resultados obtenidos para los diferentes mercados bursátiles estudiados. El contenido de esta tesis se presenta de la siguiente manera. En el capítulo 2 se realiza un estudio de las series de tiempo desde una perspectiva de los procesos estocásticos, estudiando

las distribuciones de probabilidad, su correlación temporal y su volatilidad. El capítulo 3 se enfoca en presentar algunas características generales de los mercados bursátiles, presentando aspectos de la hipótesis de mercado eficiente y de las crisis financieras desde una perspectiva econofísica. En el capítulo 4 se presentan las distribuciones de frecuencias de los log-retornos diarios de los índices bursátiles estudiados, considerando toda la ventana de observación, las cuales son ajustadas a distribuciones tipo vuelos de Levy estables. En el capítulo 5 se estiman los exponentes de Hurst para cada una de las series de tiempo de log-retornos estudiadas, considerando toda la ventana de observación y usando los métodos R/SC, R/SG y DFAM. En el capítulo 6 se realiza el estudio de las variaciones en el tiempo de los valores de H y Var locales, a partir de estimar los exponentes de Hurst y la volatilidad (varianza) usando una ventana local de observación de 500 datos, que se corre sobre toda la serie de tiempo hasta abarcar toda la ventana de observación. En el capítulo 7 se muestra a partir de los valores de $H(t)$ y $Var(t)$ en tiempos cercanos a las crisis financieras, el surgimiento y manifestación de la propagación de las crisis financieras consideradas (lunes negro e hipotecaria) para todos los mercados bursátiles estudiados. Finalmente, en el capítulo 8, se presentan las conclusiones más importantes provenientes de los resultados obtenidos en esta tesis.

2 Series de tiempo como procesos estocásticos

En este capítulo se presenta una descripción de los procesos estocásticos, desde una perspectiva en la que los procesos estocásticos son tomados como una herramienta para el estudio y caracterización de las series de tiempo. Se muestran algunas características del movimiento browniano simple y del movimiento browniano fraccional (una generalización del movimiento browniano simple), los cuales son dos procesos estocásticos ampliamente estudiados en la mecánica estadística y además empleados en el análisis de series de tiempo. Adicionalmente se muestra que una de las características de los procesos estocásticos es su distribución de probabilidad. También se muestra que de acuerdo al tipo de memoria presente en el proceso estocástico, se puede establecer la existencia de persistencia en la serie de tiempo que se esté estudiando. Así mismo, se muestra que una forma en la que se puede establecer el tipo de memoria de una serie de tiempo es a través de la estimación del exponente de Hurst, el cual da información sobre la existencia o no de correlación temporal de largo rango (memoria larga) en la serie de tiempo. Finalmente, se presentan algunos aspectos sobre el estudio de la volatilidad en las series de tiempo.

2.1. Procesos estocásticos

Un proceso estocástico X es una sucesión de variables estocásticas indexadas x_t , donde el índice puede ser discreto o continuo [33, 34]. Cualquier cantidad Y puede definirse como función de X y representa cualquier clase de objeto matemático. Por lo anterior, un proceso estocástico, que corresponde simplemente una función f de dos variables, una de ellas x y la otra el tiempo t , está definido por [35]:

$$Y_X(t) = f(x, t), \quad (2-1)$$

donde la expresión (2-1) representa una *realización* del proceso. En términos físicos, se considera que el proceso estocástico es un conjunto (*o ensamble*) de estas realizaciones, al promediar la densidad de probabilidad $P_X(x)$ de x [36], para la nueva variable $Y(t)$

$$\langle Y(t) \rangle = \int Y_X(t) P_X(x) dx. \quad (2-2)$$

Generalizando para $n = 2, 3, 4, \dots$, se tiene

$$\langle Y(t_1)Y(t_2)\dots Y(t_n) \rangle = \int y_1 \dots y_n P_n(y_1, t_1; \dots; y_n, t_n) dy_1 \dots dy_n, \quad (2-3)$$

donde la densidad de probabilidad $P_n(y_1, t_1; y_2, t_2; \dots; y_n, t_n)$ está definida sólo para diferentes tiempos y satisface las siguientes condiciones

1. $P_n(y_1, t_1; \dots, y_n, t_n) \geq 0$.
2. $P_n(y_1, t_1; \dots, y_n, t_n)$ no cambia ante el intercambio de pares (y_k, t_k) y (y_l, t_l) .
3. $\int P_n(y_1, t_1; y_2, t_2; \dots, y_n, t_n) dy_n = P_{n-1}(y_1, t_1; y_2, t_2; \dots, y_{n-1}, t_{n-1})$.
4. $\int P_1(y_1, t_1) dy_1 = 1$.

Para un proceso estocástico dado, la cantidad $P(y_2, t_2 | y_1, t_1)$ representa la probabilidad condicional de que Y pase de un estado y_1 en un tiempo t_1 a un estado y_2 en el tiempo t_2 . Esta cantidad es no negativa y está normalizada como

$$\int P(y_2, t_2 | y_1, t_1) dy_2 = 1. \quad (2-4)$$

Proceso estocástico estacionario

Un proceso estocástico $X(t)$ es un proceso estacionario si su distribución de probabilidad es invariante bajo cambios de escala. Lo anterior significa que las variables estocásticas son independientes e idénticamente distribuidas (IID) [33]. El proceso estocástico $X(t)$ es estacionario si la función densidad de probabilidad cumple [36]

$$f(x(t)) = f(x(t + \tau)), \quad (2-5)$$

donde $\tau = t_2 - t_1$ es un intervalo de tiempo. Además, teniendo en cuenta que un proceso estocástico estacionario cumple $E[x_t^2] \equiv \mu$, entonces la varianza del proceso está dada por

$$Var[x_t] = E[x_t^2 - \mu^2]. \quad (2-6)$$

Si el proceso cumple con (2-6), donde la $Var[x_t]$ es independiente del tiempo, entonces se dice que el proceso estocástico es estacionario.

Procesos autosimilares

El concepto de autosimilitud fue introducido inicialmente por Kolmogorov en el año 1941 en un contexto teórico [15]. Posteriormente Mandelbrot y Wallis en 1969, introdujeron este concepto en estadística [15]. La autosimilaridad es definida en términos de la distribución del proceso de la siguiente manera [15]

- Sea X_t un proceso estocástico con parámetro temporal continuo t . X_t es llamado un proceso autosimilar, con parámetro de autosimilaridad H , si para cualquier factor c el proceso reescalado con escala de tiempo ct , $c^{-H}X_t$, tiene la misma distribución que el proceso original X_t [5].

Para un proceso autosimilar X_t , con parámetro de autosimilaridad H , se cumple

$$X_t =_d t^H X_1, \quad (2-7)$$

para $t > 0$ y en donde $=_d$ significa igualdad en la distribución. El parámetro de autosimilaridad H es también llamado exponente de Hurst.

2.1.1. Proceso de Markov

Es un proceso estocástico discreto [37] donde la función de probabilidad condicionada no depende de la historia del proceso, por lo cual para este tipo de proceso el futuro no depende del pasado sino solamente del presente. El proceso de Markov se define como un proceso estocástico con una propiedad característica, para cualquier conjunto de tiempos sucesivos, donde $(t_1 < t_2 < \dots < t_n)$, cumpliéndose que [38]

$$P(y_n, t_n \mid y_1, t_1; y_2, t_2; \dots; y_{n-1}, t_{n-1}) = P(y_n, t_n \mid y_{n-1}, t_{n-1}). \quad (2-8)$$

Dado que esta ecuación puede tomarse como la definición misma del proceso de Markov, entonces para caracterizarlo es necesario conocer solamente $P(y_n, t_n \mid y_{n-1}, t_{n-1})$ y $P(y_n, t_n)$. Estas funciones no pueden elegirse de manera arbitraria, sin embargo ellas deben cumplir con las siguientes dos identidades [39]

1. Distribución según la ecuación de Chapman-Kolmogorov.
2. $P(y_2, t_2) = \int P(y_2, t_2 \mid y_1, t_1) P_1(y_1, t_1) dy_1$.

Recíprocamente si dos funciones no negativas $P_1(y_1, t_1)$ y $P(y_2, t_2 \mid y_1, t_1)$ cumplen con estas dos condiciones, entonces definen unívocamente un proceso de Markov [40, 39].

2.1.2. Proceso de Wiener

Un proceso de Wiener es un proceso de Markov, el cual es denotado por $\mathbf{W}(t)$ [41]. Este proceso estocástico no estacionario está caracterizado por la densidad de probabilidad [42]:

$$P1(\omega, t = 0) = \delta(\omega), \quad (2-9)$$

que tiene cómo propagador una densidad gaussiana

$$P(\omega_2, t_2 \mid \omega_1, t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \exp\left(\frac{-(\omega_2 - \omega_1)^2}{2(t_2 - t_1)}\right), \quad (2-10)$$

con una densidad de probabilidad en $t \neq 0$ dada por

$$P(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-\omega^2}{2t}\right). \quad (2-11)$$

El proceso de Wiener $\mathbf{W}(t)$, que como se dijo es un proceso de Markov, se define con las siguientes propiedades [42]

- $\mathbf{W}(0) = 0$.
- $\mathbf{W}(t)$ es una función continua.
- Los incrementos son independientes y están distribuidos con varianza proporcional al tiempo de incremento y media cero.
- La distribución de probabilidad es del tipo *normal* o *gaussiana*.

Movimiento browniano estándar

Un riguroso tratamiento matemático sobre el movimiento browniano fue desarrollado por Wiener en 1923 [41], lo cual justifica que el movimiento browniano estándar también sea conocido como proceso de Wiener $\{\mathbf{W}(t), \geq 0\}$. El movimiento browniano estándar es un proceso de Markov, que queda definido a través de las siguientes propiedades:

- $\mathbf{W}(0) = 0$.
- Los incrementos $\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(s)$ son estacionarios e independientes.
- Para $t > s$, $\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(s)$ está normalmente distribuido $N(0, \sqrt{t-s})$.
- Las trayectorias son continuas.

La condición de estacionaridad implica que la función distribución de probabilidad para $\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(s)$ sólo depende de la diferencia $(t-s)$. De acuerdo con las propiedades anteriores, el movimiento browniano estándar es un proceso gaussiano, que está totalmente caracterizado por su media y su covarianza [42]. Aunque la derivada de $\mathbf{W}(t)$ no existe en un proceso estocástico, es posible darle un significado matemático a $d\mathbf{W}/dt$ y considerar a esta derivada como un proceso generalizado (en el sentido de función o distribución). La derivada de $\mathbf{W}(t)$ recibe el nombre de ruido blanco (white noise process) y se relaciona con el proceso de Wiener, debido a que puede ser caracterizado completamente conociendo su valor esperado y su correlación [42]

$$\langle \xi(t) \rangle = 0. \quad (2-12)$$

$$\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = \delta(t-s). \quad (2-13)$$

La δ de Dirac en la correlación en (2-13) indica el carácter singular del ruido blanco, es decir $\xi(t)$ no es realmente una función aleatoria usual de argumento t , cómo sucede con

un proceso estocástico en el contexto ordinario. No obstante, las ecuaciones (2-12) y (2-13) definen completamente el ruido gaussiano blanco [43]. El proceso de Wiener se relaciona con el ruido gaussiano blanco mediante la ecuación integral

$$\int d\mathbf{W}(t) = \int \xi(t)dt. \quad (2-14)$$

Suele escribirse esta ecuación en forma diferencial, como

$$\frac{d\mathbf{W}(t)}{dt} = \xi(t). \quad (2-15)$$

Esta ecuación diferencial puede advertir la presencia de un coeficiente que es un proceso estocástico [35], ya que si se conocen las propiedades estadísticas de $\xi(t)$, entonces se conocen las propiedades estadísticas de $d\mathbf{W}$.

Puesto que la derivada $d\mathbf{W}/dt$ diverge como $1/\sqrt{dt}$, entonces este sencillo argumento sugiere una integral de la forma

$$I(t) = \int_0^t g(t')\xi(t')dt'. \quad (2-16)$$

Para solucionar (2-16) se tiene que hacer uso de las integrales estocásticas de Ito [43], introducidas por primera vez por el matemático japonés Kiyoshi Ito, reescribiendo (2-16) en términos de un proceso de Wiener $\mathbf{W}(t)$

$$I(t) = \int_0^t g(t')d\mathbf{W}(t'). \quad (2-17)$$

Dado que la integral de Ito no obedece las reglas usuales provenientes del cálculo determinista, estas integrales permiten introducir adecuadamente el formalismo de las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE), con una forma general dada por [44]

$$dX = a(X, t) dt + b(X, t) d\mathbf{W}, \quad (2-18)$$

donde $a(X, t)$ y $b(X, t)$ son funciones conocidas. Para el movimiento browniano estándar, la ecuación (2-18) toma la siguiente forma

$$dX = \mu dt + \sigma d\mathbf{W}, \quad (2-19)$$

de tal forma que integrando, se obtiene

$$X(t) = \mu t + \mathbf{W}(t). \quad (2-20)$$

2.1.3. Movimiento browniano simple (MBS)

El concepto de movimiento browniano simple se desarrolló a partir de la observación y estudio de la hoy llamada “partícula browniana”, observada por el botánico escocés Robert Brown en

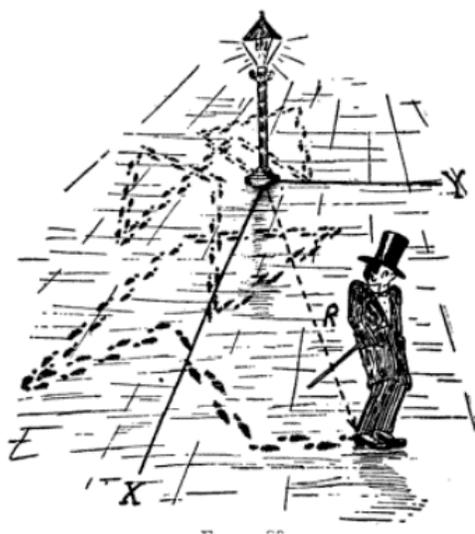


Figura 2-1 Camino aleatorio de un borracho (Caricatura dibujada por George Gamow, de Gamow, 1961).

1827 [12]. Los resultados de sus estudios los presentó principalmente en un artículo publicado en 1829 titulado *Sobre la existencia general de moléculas activas en cuerpos orgánicos e inorgánicos* [12], pero no fueron concluyentes [45]. Durante la década de los ochenta del siglo XIX, varios físicos realizaron la suposición de que las observaciones realizadas por Brown podían ser causadas por las continuas colisiones entre granos de polen y moléculas del fluido agitadas por su movimiento. En 1905 Albert Einstein propuso un modelo para explicar el movimiento browniano simple [11], a partir de la suposición de que este tipo de movimiento se origina por colisiones del grano de polen con las moléculas que constituyen el fluido [46]. Además, se destacó la importancia de este modelo en muchos campos del conocimiento. Por ejemplo, el caso bidimensional de una caminata aleatoria se toma cómo una caminata aleatoria de un borracho, la cual se representa en la Figura 2-1.

El modelo de Einstein del movimiento browniano observado por Brown es presentado en los artículos [11, 47, 46], donde la “partícula browniana” tiene un tamaño aproximado de una micra y está rodeada de moléculas, con velocidades típicas de varias decenas de metros por segundo, que la golpean por todas direcciones, produciendo un movimiento herrático, ahora entendido como una variable aleatoria, como se puede observar en la Figura 2-2. El estudio del movimiento browniano simple realizado por Einstein condujo de forma indirecta a la confirmación de la existencia de átomos y moléculas, y adicionalmente Einstein y Smoluchowski proporcionaron la herramienta matemática para explicar y describir el movimiento browniano. En 1908, Paul Langevin propuso una ecuación fenomenológica, la cual lleva su nombre (ecuación de Langevin), correspondiente a una ecuación diferencial estocástica que describe el movimiento browniano simple. En 1925, los fundamentos matemáticos del mo-

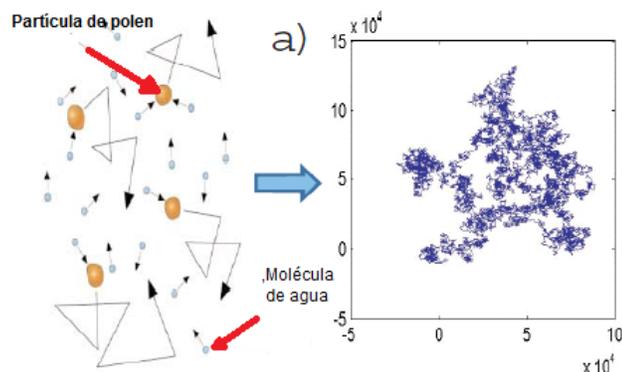


Figura 2-2 Movimiento browniano de partículas de polen suspendidas en agua; caminata aleatoria.

El movimiento browniano fue introducido por Norbert Wiener [41], seguido por el estudio de sus propiedades analíticas desarrollado por Paul Lévy y finalmente en el año 1950 se consolidan dichos estudios en el cálculo estocástico, realizado por Kiyoshi Ito [43].

MBS visto como un proceso estocástico

Un proceso estocástico $\{X_t, t > 0\}$ tiene incrementos independientes si para cualquier $m \geq 1$ y para cualquier partición $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m$, $X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_m) - X(t_{m-1})$ son independientes, con una distribución conjunta de $\{X(t+h) - X(h), t \geq 0\}$ que es independiente de $h \geq 0$. El movimiento browniano simple visto como un proceso estocástico $\{X(t), t > 0\}$ satisface las siguientes propiedades [35, 33]:

1. $X(0) = 0$.
2. Tiene incrementos independientes y estacionarios.
3. Para cada $t > 0$, $X(t)$ tiene una distribución gaussiana con promedio cero.
4. Los caminos de las muestra son continuos.

Retomando la propiedad de autosimilaridad, el movimiento browniano simple cumple

$$X(at) = a^H X(t), \quad (2-21)$$

donde $H = 1/2$.

2.1.4. Movimiento browniano fraccional (mBf)

En 1968 Mandelbrot introdujo una generalización del proceso de Wiener con el nombre *The fractional Brownian motion (mBf)* [8], dando la posibilidad de modelar objetos estadísticamente autosimilares (llamados procesos autosimilares) mediante la generalización de la

función aleatoria $X(t)$, que permite cambiar el exponente de Hurst $H = 1/2$, por algún número entero entre $0 < H < 1$ en (2-7) y (2-21), tal como fue realizado por Mandelbrot y Van Ness en [8]. Posteriormente Mandelbrot en 1982 denotó la función como $R_H(t)$ [6]. Cambiando $B_H(t)$ por $X(t)$, como la posición de una partícula para un proceso browniano fraccional con incremento promedio cero, se tiene que

$$\langle B_H(t) - B_H(t_0) \rangle, \quad (2-22)$$

y la varianza de incremento $V(t - t_0)$ está dada por

$$V(t - t_0) = 2D\tau (|(t - t_0) / \tau|) \sim |t - t_0|^{2H}. \quad (2-23)$$

Tanto el movimiento browniano simple como el fraccional tienen varianzas que divergen en el tiempo. Una importante propiedad del movimiento browniano fraccional es que tiene infinitas correlaciones de largo rango. Su función de correlación para los incrementos futuros $B_H(t)$ con incremento pasados $-B_H(-t)$ puede escribirse como [7]

$$C(t) = \frac{\langle -B_H(-t)B_H(t) \rangle}{\langle B_H(t)^2 \rangle} = 2^{2H-1} - 1, \quad (2-24)$$

donde se ha normalizado la varianza de B_H . Para el caso en que $H = 1/2$, la función de correlación entre los incrementos del pasado y el futuro desaparece para todo t , cómo es requerido para un proceso estocástico independiente. Para el caso en que $H \neq 1/2$, la correlación es $C \neq 0$, siendo *independiente* de t , lo cual es una característica notable del movimiento browniano fraccional, que conduce a la *persistencia* o *antipersistencia*[7]. Mandelbrot y Van Ness definieron la función aleatoria $B_H(t)$, con media cero, como [8]

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^t (t - t')^{H-1/2} dB(t'), \quad (2-25)$$

donde $\Gamma(H)$ es la función gama. El valor esperado de la función aleatoria, en un tiempo t , depende de todos los incrementos anteriores $dB(t')$, mientras que para un tiempo $t' < t$, depende de un proceso aleatorio gaussiano ordinario $B(t)$, con media cero y varianza unidad [7]. El incremento $dB(t')$ para un proceso gaussiano independiente puede escribirse $n^{-1/2}\xi_i$, donde ξ_i es una variable aleatoria gaussiana discreta, de media cero y varianza unidad. El factor $n^{-1/2}$ se encarga del cambio de escala para los incrementos brownianos, de tal forma que aproximando la expresión (2-25), se obtiene

$$B_H(t) \simeq \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \sum_{i=-\infty}^{nt} \left(t - \frac{1}{n}\right)^{H-1/2} n^{-1/2}\xi_i. \quad (2-26)$$

Dado que esta suma no existe y que la integral en la ecuación (2-26) es divergente, como $t' \rightarrow -\infty$, entonces para $B_H(t = 0)$ después de sustituir la definición aproximada por una definición más precisa que fue utilizada por Mandelbrot y Van Ness [8], se tiene que

$$B_H(t) - B_H(0) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^t K(t - t')dB(t'), \quad (2-27)$$

donde $K(t - t') = (t - t')^{H-1/2}$ es el kernel de ley de potencia. Al reemplazar por el kernel modificado, se obtiene

$$K(t - t') = (t - t')^{H-1/2}; 0 \leq t' \leq t, \quad (2-28)$$

$$K(t - t') = \left\{ (t - t')^{H-1/2} - (-t')^{H-1/2} \right\}; t' \leq 0. \quad (2-29)$$

La ecuación (2-29) tiene la forma de una respuesta lineal general, con un incremento gaussiano independiente $dB(t')$ y de magnitud unidad en el momento t' . La función de respuesta lineal $K(t - t')$ da la contribución para la posición de una partícula browniana fractal $B_H(t)$ en un tiempo posterior t [7]. La característica inusual de $K(t)^{H-1/2}$, es que sigue una ley de potencia, la cual no tiene ninguna escala intrínseca de tiempo o de unidad de tiempo. En la referencia [7] se encuentra la forma de escala para la ecuación (2-29), cambiando la escala de tiempo por un factor b y se obtiene [7]

$$B_H(bt) - B_H(0) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^t K(bt - t') dB(t'), \quad (2-30)$$

donde se introduce una nueva variable de integración $t' = b\hat{t}$, habiendo usando el resultado para un proceso gaussiano independiente $dB(t' = b\hat{t}) = b^{1/2}dB(\hat{t})$. Usando la relación $K(bt - b\hat{t}) = b^{H-1/2}K(t - \hat{t})$, se tiene que el incremento para la posición de una partícula browniana fraccional es

$$B_H(bt) - B_H(0) = b^H \{B_H(t) - B_H(0)\}, \quad (2-31)$$

lo cual es válido en la distribución para cualquier valor de b . En particular, para $t = 1$ y $\Delta t = bt$, se obtiene que los incrementos de la posición de la partícula browniana está dada por

$$B_H(\Delta t) - B_H(0) = |\Delta t|^H \{B_H(1) - B_H(0)\} \sim |\Delta t|^H, \quad (2-32)$$

lo cual es proporcional a $|\Delta t|^H$ [7].

mBf visto cómo un proceso estocástico

Un proceso gaussiano central $B^H = \{B_t, t \geq 0\}$ es llamado movimiento browniano fraccional (mBf), con un parámetro de Hurst $H \in (0, 1)$, si se tiene la siguiente función de covarianza [8]

$$R_H(t, s) = E(B_t^H, B_s^H) = \frac{1}{2} (s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H}). \quad (2-33)$$

El mBf tiene la siguiente propiedad de autosimilaridad: Para $b > 0$ constante, los procesos $\{b^{-H} B_{bt}^H, t \geq 0\}$ y $\{B_{bt}^H, t \geq 0\}$ tienen la misma distribución, lo cual es consecuente con el hecho de que la función de covarianza es homogénea y de orden $2H$. La varianza de un incremento del proceso, en un intervalo $[s, t]$, está dada por

$$E(|B_t^H - B_s^H|^2) = |t - s|^{2H}, \quad (2-34)$$

lo cual implica que el mBf tiene incrementos estacionarios, con las siguientes propiedades [35]

- $B_0^H = 0$ y $E[B_t] = 0$ para todo $t \geq 0$.
- B_t^H tiene incrementos homogéneos, ya que $B_{t+s}^H - B_s^H$ se comporta igual que B_t^H , lo cual corresponde a un proceso gaussiano y $E[(B_t^H)^2] = t^{2H}$, $t \geq 0$, para todo $H \in (0, 1)$.
- B_t^H tiene trayectorias continuas.

El mBf está dividido en tres familias, que corresponden a $0 < H < 1/2$, $H = 1/2$ y $1/2 < H < 1$, que caracterizan el tipo de memoria del movimiento.

2.2. Distribución de los procesos estocásticos

Momentos de una variable estocástica

El momento l -ésimo de una variable estocástica continua x mide la localización del valor central de la distribución y se define de la siguiente manera [33]

$$m'_l = E[x^l] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^l F(x) dx. \quad (2-35)$$

El primer momento representa la *media* del proceso estocástico

$$\mu_x = m'_1 = E[x] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x F(x) dx. \quad (2-36)$$

El segundo momento central mide la *variancia* del proceso estocástico

$$\sigma_x^2 = m_2 = E[(x - \mu_x)^2] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 F(x) dx. \quad (2-37)$$

El tercer momento central mide la *simetría* del proceso estocástico

$$S_x = m_3 = E\left[\frac{(x - \mu_x)^3}{\sigma_x^3}\right] \equiv \frac{1}{\sigma_x^3} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^3 F(x) dx. \quad (2-38)$$

A las distribuciones con $S \neq 0$ se les denomina *asimétricas* [1]. Como un caso particular, la distribución normal tiene simetría $S = 0$. La asimetría presenta tres estados diferentes, como se muestran en la Figura 2-3, cada uno de los cuales define de forma concisa como están distribuidos los datos respecto al eje de asimetría. Se dice que la asimetría es positiva, cuando la mayoría de los datos se encuentran por encima del valor de la media aritmética. La curva es simétrica cuando los datos se distribuyen aproximadamente con la misma cantidad a

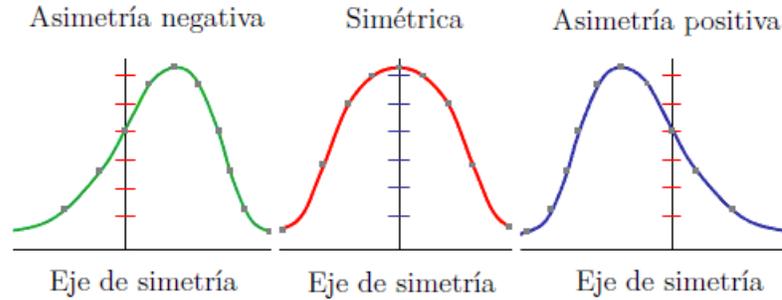


Figura 2-3 Distribuciones asimétricas con respecto a su eje de simetría. En la primera se observa la curva orientada a lado derecho del eje de simetría (asimetría negativa), en la segunda la curva es totalmente simétrica, mientras que en la última la curva es asimétrica positiva).

ambos lados de la media. Finalmente, se tiene el caso de asimetría negativa cuando la mayor cantidad de datos se aglomeran en los valores menores que la media. Esta medida determina el grado de concentración que presentan los valores en la región central de la distribución. Finalmente, el cuarto momento central mide la *curtosis* del proceso estocástico

$$K_x = m_4 = E \left[\frac{(x - \mu_x)^4}{\sigma_x^4} \right] \equiv \frac{1}{\sigma_x^4} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^4 F(x) dx. \quad (2-39)$$

Por medio del coeficiente de *curtosis* se puede establecer si existe gran concentración de valores. Por ejemplo, con $K_x > 3$ se dice que el proceso estocástico es leptocúrtico, para $K_x = 3$ se tiene el caso de concentración normal y el proceso estocástico es mesocúrtico, y por último para $K_x < 3$ se tiene el caso de baja concentración y el proceso estocástico es platicúrtico. Estos tres casos se pueden observar en la Figura 2-4. La leptocurtosis o exceso de *curtosis* se define cómo $L_x = K_x - 3$.

2.2.1. Distribuciones de vuelos de Lévy

Un proceso estocástico con variables estocásticas independientes tiene asociado una distribución gaussiana o normal. En 1938 Lévy investigó la singularidad de la distribución de Gauss y propuso un enfoque más general y válido para distribuciones que tiene un segundo momento infinito [21]. Los estudios empíricos de las series reales de precios [24, 25, 26] condujeron a determinar que las densidades de distribución de probabilidad de estas series tienen mayor *curtosis* que la de una distribución normal [21]. La función característica del proceso Lévy está dada por

$$\varphi_\alpha(q, t) = e^{-ct|q|^\alpha}, \quad (2-40)$$

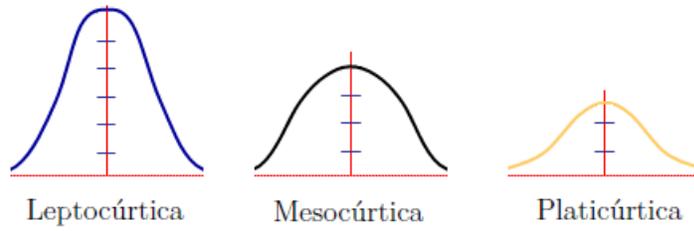


Figura 2-4 Tres diferentes casos del coeficiente de curtosis K , que caracterizan diferentes tipos de distribuciones: 1) La distribución leptocúrtica ($K > 3$) presenta un elevado grado de concentración alrededor de los valores centrales de la variable; 2) la distribución mesocúrtica ($K = 3$) presenta un grado de concentración medio alrededor de los valores centrales de la variable (lo mismo sucede para una distribución normal); 3) la distribución platicúrtica ($K < 3$) presenta un reducido grado de concentración alrededor de los valores centrales de la variable.

mientras que la función de distribución del proceso original de Lévy está dado por su transformada de Fourier inversa [48], es decir

$$P_\alpha(x, t) = \int dq e^{iqx - ct|q|^\alpha}. \quad (2-41)$$

Las *distribuciones de Levy* forman una familia de distribuciones que no poseen una forma analítica general. Sin embargo, su transformada de Fourier (función característica) si tiene una forma funcional para $\alpha \neq 1$, dada por [48]

$$\varphi_{\gamma, \alpha, \beta, \mu}(q) = -e^{-\gamma|q|^\alpha [1 - i\beta \frac{q}{|q|} \tan(\frac{\pi}{2}\alpha)] + i\mu q}, \quad (2-42)$$

mientras que si $\alpha = 1$ se tiene

$$\varphi_{\gamma, 1, \beta, \mu}(q) = -e^{-\gamma|q|^\alpha [1 + i\beta \frac{q}{|q|} \log|q|] + i\mu q}. \quad (2-43)$$

La forma analítica de la distribución estable de Lévy es conocida sólo para algunos valores de α y β : Para $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = 1$ se tiene la distribución de Lévy-Smirnov; para $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ se tiene la distribución de Cauchy; para $\alpha = 2$ se tiene la distribución gaussiana. El parámetro α se conoce como el índice de estabilidad o exponente característico, mientras que γ es un parámetro de escala, β es un parámetro de sesgo y μ es un parámetro de posición. Estos parámetros se pueden interpretar de la siguiente forma [21]

- α es el exponente característico. Este parámetro toma valores en el intervalo $(0, 2]$. En particular cuando $\alpha = 2$ obtenemos la distribución normal. Dicho parámetro indica que tan lejos se está de la normalidad. En particular, la distribución se alejará de una distribución normal a medida que tome valores lejanos a 2. También este parámetro da idea del decaimiento de la distribución, cuando x toma valores muy grandes.

- γ es un parámetro de escala. No se puede interpretar como la desviación estándar del proceso, dado que éste sólo existe para el caso $\alpha = 2$. Sin embargo, cuanto mayor es el valor de γ más ancha es la función de densidad.
- β es un parámetro que indica cuán sesgada es la función de densidad. Este parámetro toma valores que pertenecen al intervalo $[-1, 1]$. Para $\beta = 1$, la densidad está totalmente sesgada a la derecha y es asimétrica; para $\beta = -1$, la densidad está sesgada a la izquierda y también es asimétrica; por último, para $\beta = 0$, se tiene el caso de densidad simétrica.
- μ es el parámetro de posición. Dado que $\mu = E(x)$, este parámetro representa la media, siempre que existan los primeros momentos de la distribución.

2.3. Correlación temporal

2.3.1. Función de correlación

La función de correlación $R[t_1, t_2]$ es sensible al valor esperado de acuerdo con [1]

$$R[t_1, t_2] E[x(t_1), x(t_2)] \equiv \int \int x_1 x_2 F(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_2 dx_1, \quad (2-44)$$

donde $F(x_1, x_2; t_1, t_2)$ es la densidad de probabilidad conjunta de x_1 , para un tiempo de observación t_1 y x_2 en un tiempo t_2 . En el caso en que $x(t_1)$ y $x(t_2)$ no estén correlacionadas entre sí, entonces $E[x(t_1), x(t_2)] = 0$ [1].

En general, la función de autocorrelación es llamada covarianza $C(t_1 t_2)$, la cual es sensible al valor medio. Para un proceso estocástico dado, la autocovariancia es

$$C(t_1 t_2) = R(\tau) - \mu(\tau). \quad (2-45)$$

Para variables estocásticas con correlación positiva, la forma típica de $C(\tau)$ es un función decreciente, que para valores grandes de τ comienza en $C(0) = \sigma^2$ y finaliza en $C(\tau) \simeq 0$, tal como se muestra en la Figura 2-5 [1]. Para un proceso estocástico estacionario, se considera como medida del tipo de memoria la integral de la función de *autocovariancia* $R(\tau)$, es decir

$$\int_0^{\infty} R(\tau) d\tau = \begin{cases} \text{Finita,} & \text{indeterminada.} \end{cases} \quad (2-46)$$

De esta forma, el área bajo la curva puede conducir a dos tipos de memoria:

- Si la integral es finita, existe una memoria temporal τ_c llamada la correlación temporal del proceso, la cual está presente para la función de autocorrelación τ^{\star} [1].
- Si la integral es infinita, es imposible elegir una escala temporal que permita separar una región donde las variables están correlacionadas y no correlacionadas [1].

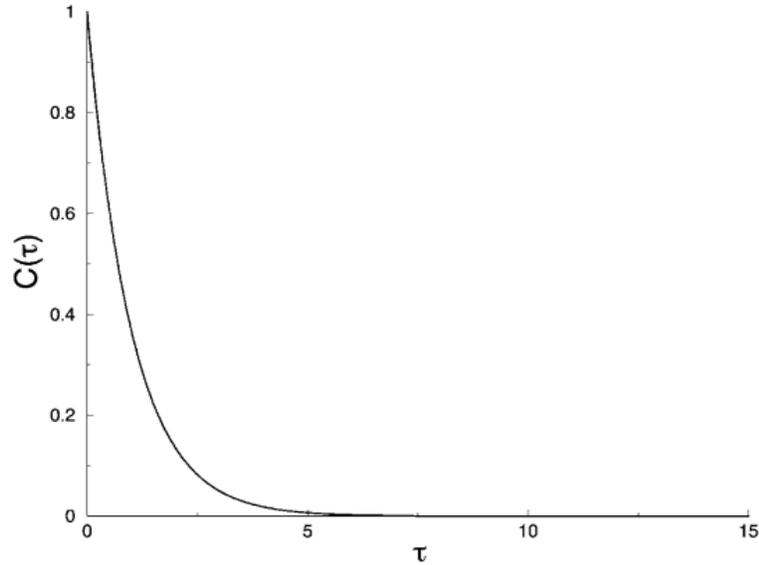


Figura 2-5 Función de autocovariancia típica para un proceso con memoria finita, a partir de $C(0) = \sigma^2$ y finalizando en $C(\tau) \simeq 0$. Figura tomada de la referencia [1].

Caso *i*): $R(\tau) = e^{-\frac{\tau}{\tau_c}}$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{\tau_c}} d\tau = \tau_c.$$

Caso *ii*): $R(\tau) = e^{-\frac{\tau^\nu}{\tau_c}}$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau^\nu}{\tau_c}} d\tau = \frac{\tau_c^{1/\nu}}{\nu} \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Caso *iii*): $R(\tau) \sim \tau^{\eta-1}$. Si $0 < \eta \leq 1$

$$\int_0^{\infty} \tau^{\eta-1} d\tau = \infty.$$

Si las variables estocásticas están caracterizadas por una función de autocorrelación como la del caso (*iii*), se dice que tienen memoria de largo alcance [49].

Función espectral

Otra forma de analizar la memoria en un tiempo dado de una serie de tiempo es por medio de la función espectral [1], que se define como la transformada de Fourier de la autocorrelación [48], es decir

$$S(f) = \int_0^{\infty} R(\tau) e^{-2\pi f\tau} d\tau. \quad (2-47)$$

Los procesos estocásticos que tengan asociada una función de autocovariancia tipo ley de potencias, como es el caso (*iii*) donde $0 < \eta \leq 1$, se encuentran caracterizados por el siguiente espectro de ley de potencias

$$S(f) \propto \frac{1}{|f|^\beta}, \quad (2-48)$$

donde $0 \leq \beta \leq 2$. De acuerdo al valor que tome β , se tienen los siguientes casos [1]

- Para $\beta = 0$, se tiene ruido blanco.
- Para $\beta = 2$, se tiene un proceso de Wiener.
- Para $\beta = 1$, se tiene ruido $1/f$.

Los métodos descritos anteriormente (área bajo la curva de $R(\tau)$ y función espectral) son aplicables únicamente para procesos estacionarios. Se ha podido establecer que para procesos no estacionarios, cálculos erróneos basados en los métodos de área bajo la curva y función espectral conducen a una falsa correlación en el tiempo, por lo cual para este tipo de procesos se tienen que implementar otras herramientas que permitan estimar adecuadamente el tipo de correlación existente [1].

2.3.2. Dependencia de corto rango

En la subsección anterior se evidenció que los procesos estocásticos con memoria de corto rango están caracterizados por una memoria temporal típica. Por ejemplo, la integral de ruido blanco es llamada un proceso de Wiener, el cual es un proceso no estacionario que se caracteriza por la función espectral [1]

$$S(f) \sim \frac{1}{f^2}. \quad (2-49)$$

Los procesos estocásticos con correlaciones de corto rango se caracterizan mediante sus propiedades estadísticas de segundo orden, lo cual es posible a partir de encontrar la función de autocorrelación y el espectro de potencia. La función de autocorrelación y el espectro de potencia se asemejan a ruido blanco (o espectro de potencia $1/f^2$ de la variable integrada) y se consideran “huellas dactilares” de corto rango de los procesos estocásticos correlacionados [1].

2.3.3. Dependencia de largo rango

En general los procesos estocásticos caracterizados por una función de autocorrelación que tenga comportamiento de ley de potencia presentan correlaciones de largo rango, tal como sucede en el caso del ruido $1/f$. El ruido $1/f$ ha sido ampliamente observado en una variedad de fenómenos, que van desde las fluctuaciones de corriente en los diodos hasta las

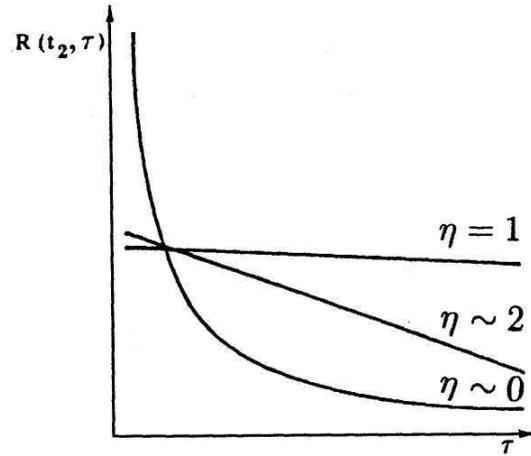


Figura 2-6 Formas de las funciones de autocorrelación para un ruido $1/f^n$, para $\eta = 0, 1$ y $\eta = 2$. Figura tomada de la referencia [2].

fluctuaciones en el flujo de tráfico en una autopista [49, 50]. Para la observación de este ruido, entre tiempos de observación t_1 y t_2 que sean cortos en comparación con un tiempo T_{obs} transcurrido desde el inicio del proceso ($T_{obs} \ll t_1$), se procede a evaluar la función de autocorrelación. En general, tienen la forma [1]

$$R(\tau) \sim |\tau|^{\eta-1}. \quad (2-50)$$

Las formas típicas de estas funciones de autocorrelación se muestran en la Figura 2-6. La función de autocorrelación para un ruido $1/f$ carece de una escala de tiempo típica, por lo que el ruido $1/f$ es un proceso estocástico correlacionado de largo rango [2], de manera que caracteriza una serie de tiempo correlacionada. Los procesos estocásticos con memoria de largo rango se pueden caracterizar por un exponente de autosimilitud muy particular. En este sentido, los estudios de Mandelbrot sobre series de tiempo fractales y superficies fractales han sido ampliamente aplicados en muchas disciplinas a través del cálculo de dicho exponente (dimensión fractal D) [8]. La dimensión fractal D y el exponente de Hurst H son independientes entre sí: La dimensión fractal es una propiedad local, mientras que la dependencia de largo rango de la memoria es una característica global. Sin embargo, los dos conceptos están estrechamente ligados en gran parte de la literatura científica [51]. Para los procesos autoafines, las propiedades locales se reflejan en las globales, y por tal motivo estas cantidades están relacionadas como [6]

$$D + H = n + 1, \quad (2-51)$$

donde n es una dimensión espacial. La dependencia de memoria de largo rango, o también llamada persistencia, está asociada con el caso $H \in (1/2, 1)$. Es importante destacar que

la mezcla de conceptos diferentes, tales como fractales, memoria de largo rango y autoafinidad ha generado algunas controversias. Por ejemplo, Kaplan y Kuo han señalado que el movimiento browniano fraccional y el ruido gaussiano fraccional están limitados por su comportamiento a pequeña escala, de tal forma que este comportamiento está completamente caracterizado por el exponente de Hurst [52]. Por otra parte, Davies y Hall han planteado que la suposición de autoafinidad es necesaria para el desarrollo de las propiedades fractales [53].

2.3.4. Exponente de Hurst

En 1951 el hidrólogo inglés Hurst fue el primero en estudiar series de tiempo [3], al analizar la capacidad de almacenamiento de los embalses en la cuenca del río Nilo y al proponer un método para la cuantificación de la memoria a largo rango, que se basa en la estimación del rango de oscilaciones de la variable en el tiempo. El método para detectar la dependencia a largo rango usada en hidrología por Hurst, posteriormente se extendió a otros campos y de esta manera fueron desarrolladas otras metodologías que permitieron cuantificar la memoria de largo rango. La metodología de Hurst fue generalizada inicialmente por Mandelbrot y Ness en 1968 [8] y posteriormente en 1982 Mandelbrot introdujo una metodología mejorada [6]. El método propuesto por Hurst, que es conocido como análisis de rango reescalado (R/S) y que fue implementado para la estimación del exponente de Hurst H , tiene las siguientes características [7]

- Una serie de tiempo con $H = 0,5$ representa un proceso de auto-determinación, en la que el valor actual de la serie no es dependiente de los valores anteriores. Este caso es llamado un *paseo aleatorio*.
- Una serie de tiempo con $0 \leq H < 0,5$ representa un proceso *antipersistente*. La intensidad del comportamiento antipersistente depende de qué tan cercano sea el valor de H a cero.
- Una serie de tiempo con $0,5 < H < 1$ es conocida como un proceso persistente. En este caso los valores que toma el proceso en el futuro tienden a reforzar la tendencia del presente. Lo anterior quiere decir que si la tendencia de la serie de tiempo ha sido positiva en el último periodo observado, es más probable que esta tendencia continúe siendo positiva en el siguiente periodo, más que negativa.

Varios métodos ha sido desarrollados en la literatura para la estimación del exponente de Hurst en una serie de tiempo, como por ejemplo: el método de rango reescalado clásico, que llamaremos el método R/SC; el análisis PSD; el análisis Wavelet; el análisis de la varianza agregada; el método de la varianza escalada; el análisis de fluctuaciones sin tendencia (DFA). Sin embargo, hay que tener en cuenta que muchos sistemas físicos y biológicos presentan memoria de largo rango con tendencias en la serie de tiempo [54][55][56]. Por ejemplo, la

temperatura del aire, la lluvia y el flujo de agua de ríos en diferentes ubicaciones geográficas, muestran una tendencia periódica debido a los cambios estacionales [3]. Otros sistemas que presentan la existencia de tendencias son: la dinámica de los precios de la electricidad [57]; el monitoreo de ensayos clínicos [58]; la prevención de las entradas de las minas [59]; las precipitaciones en el trópico de los Andes [60]; la dinámica de la vegetación [61]; el análisis de las secuencias del ADN [18]; el registro de temperaturas diarias [62]; los canales de iones [62]; los registros fisiológico EEG [63].

A continuación se mencionan algunos trabajos en los que se realiza una estimación el exponente de Hurst para el caso de series de tiempo financieras, empleando diferentes metodologías:

- Lipka y Losen en 2002 realizaron un estudio sobre la existencia de memoria de largo rango en índices bursátiles internacionales, estudiando concretamente índices bursátiles de Austria, Dinamarca, Francia, Alemania, España, Noruega y Reino Unido [64].
- Corazza y Malliaris en 2002 analizaron las devoluciones de varios mercados de divisas y encontraron que el valor del exponente de Hurst es estadísticamente diferente de 0,5 en la mayoría de las muestras [65].
- Los y Zong en 2004 realizaron un análisis wavelet multi-resolution para series diarias de índices bursátiles y tasas de cambio de mercados latinoamericanos (Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Venezuela) [66].
- Cajueiro y Tabak en 2004 probaron la dependencia a largo plazo en 11 índices bursátiles pertenecientes a los llamados mercados emergentes, junto con algunos de EE.UU. y Japón. Adoptaron un enfoque de “muestra móvil” para calcular los valores de H promedio y así evaluar la eficacia relativa con respecto a los dos “mercados eficientes” [67].
- Kyaw, Los y Zong en 2006 analizaron el grado de dependencia de largo rango de los mercados financieros de América Latina, mediante el cálculo del exponente de Hurst, empleando la metodología wavelet multiresolución (MRA) de las acciones de América Latina y los mercados de divisas [68].
- Singh y Prabakaran en 2008 examinaron el espectro de los retornos asociados a los mercados de valores de la India y utilizaron varias pruebas estadísticas para establecer la normalidad de los datos haciendo uso del método R/SC [69].

2.3.5. Metodo de rango reescalado clásico (R/SC)

En esta sección se realiza una descripción del método de rango reescalado clásico (R/SC) que permite estimar el exponente de Hurst H en una serie de tiempo de longitud n y también se

presenta una modificación de esta metodología, introducida por Lo [70]. El método R/SC es un procedimiento estadístico que está basado en el siguiente algoritmo [3]:

1. Se descompone la serie de tiempo en un conjunto de intervalos de tamaño N .
2. Se calcula la media para cada intervalo

$$m = (1/T) \sum_{\tau} r(T). \quad (2-52)$$

3. Se calcula la desviación acumulada para cada media

$$S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (r_t - m)^2}. \quad (2-53)$$

4. A partir de la media obtenida anteriormente, se transforma la serie temporal original en una nueva serie, que representa la diferencia acumulada con respecto a la media

$$y = \sum_{t=1}^{\tau} (x_{\tau} - m) \quad 1 \leq \tau \leq N. \quad (2-54)$$

5. Con la serie anterior, se encuentra el rango de variabilidad de esta desviación, es decir, se encuentra la diferencia entre la máxima y mínima desviación acumulada

$$R = \max(y) - \min(y). \quad (2-55)$$

6. Se divide el rango de variación R entre la desviación acumulada S , obteniendo así el estadístico R/S (rango escalado)

$$\frac{R}{S} = \frac{R(N)}{S(N)}. \quad (2-56)$$

Mandelbrot y Wallis demostraron empíricamente que el rango reescalado R/S está frecuentemente relacionado con el tamaño de la muestra N como sigue [8]

$$\frac{R(N)}{S(N)} \approx cN^H, \quad (2-57)$$

donde c es una constante y H es la medida de intensidad de dependencia de largo rango, la cual gracias a los trabajos pioneros de Hurst, lleva el nombre de exponente de Hurst [8]. En general

$$Q(N) = \frac{R(N)}{S(N)}. \quad (2-58)$$

Para encontrar el parámetro H mediante la estadística R/SC, se usa el siguiente procedimiento [9]:

1. Calcular Q para todos los posibles valores de N .
2. Graficar $\log(Q)$ en función de $\log(N)$.
3. Graficar una línea recta con la ecuación $y = a + b\log(N)$, que corresponde al comportamiento final de los datos. Los coeficientes a y b se pueden estimar mediante mínimos cuadrados, siendo $H = b$ una línea que es ajustada a través de los puntos que definen la relación entre $\log(R(N)/S(N))$ y $\log(N)$.

El método R/SC ha focalizado en los últimos años una gran popularidad en una amplia variedad de disciplinas, gracias a que es una herramienta sólida y robusta que permite examinar la dependencia de largo rango en series de tiempo empíricas.

Algunas deficiencias del método RS/C

Las series de tiempo persistentes, con $1/2 < H \leq 1$, son fractales en el sentido que se pueden entender como un movimiento browniano fraccional, donde la correlación entre los eventos tiene una escala de tiempo característica [57]. Sin embargo, a medida que n se hace muy grande, se espera que la serie converja a $H = 1/2$, ya que los efectos de la memoria disminuyen en un punto donde se vuelve inconmensurable. Por otra parte, para el caso en que n sea demasiado pequeño, también se puede realizar estimaciones pero en este caso inestables, debido a que los tamaños de las muestras serían demasiado pequeñas y la estadística ahora no es confiable [71]. Por lo tanto, hay que tener en cuenta siempre el número de datos n que tiene la serie a la hora de estimar el exponente de Hurst, por lo que es importante establecer un rango $n_{\min} < n < n_{\max}$ [71].

Otra debilidad del método R/SC es que es sensible a la dependencia de corto rango, lo que puede sesgar la estimación de H para las series de tiempo [57]. En el caso específico de series de tiempo financieras, con datos de alta frecuencia (diarios u observaciones más frecuentes) se tiene tendencias autoregresivas. Entonces, el estudio empírico de los retornos asociados a los mercados financieros de efectos de memoria de largo rango evidencia presencia de autocorrelaciones de alta frecuencia [57]. Al hacer el análisis R/SC es importante tratar de eliminar, o al menos minimizar, tales dependencias lineales ya que se puede sesgar el valor del exponente de Hurst.

Método de rango reescalado geométrico (R/SG)

En 1991, Lo sugiere una modificación de la metodología R/SC para corregir sus deficiencias [70]. Mediante esta metodología, llamada R/S modificada, Lo indicó algunos inconvenientes de la metodología clásica y se propuso introducir una nueva estadística basada en el análisis R/SC [70]. Sin embargo, Teverovsky, Taqqu y Willinger demostraron que la metodología R/S modificada propuesta por Lo implicaba una estadística demasiado estricta [72]. La pérdida de precisión en algunos casos específicos, también se ha señalado por otros autores [57, 71].

Los primeros estudios sobre las deficiencias y el significado de los resultados arrojados por el análisis R/SC, fueron llevados a cabo por Peter, basándose en simulaciones en Monte Carlo para comprobar la valores del exponente [73]. Primero, Peter consideró que un caso gaussiano se presta a una solución si se tiene en cuenta la hipótesis de mercado eficiente (EMH). Como postuló Hurst, la hipótesis nula sigue una distribución binomial como la generada por el lanzamiento de monedas [74]. Este resultado para una caminata aleatoria es un caso especial

$$(R/S)_n = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^{1/2}, \quad (2-59)$$

donde n es el número de observaciones. Por definición

$$E(R'(n)) = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^{1/2}, \quad (2-60)$$

$$Var(E(R'(n))) = \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}\right)n. \quad (2-61)$$

Luego con un generador de números aleatorios, Peter simuló un muestreo de los valores de R/SC y estimó empíricamente la media y la varianza, para posteriormente comparar los resultados con las ecuaciones (2-59), (2-60) y (2-61). Este proceso es conocido como el método de simulación Monte Carlo, que es particularmente apropiado para comprobar la hipótesis gaussiana [75]. Para probar la hipótesis gaussiana, primero comenzó con una serie de números pseudo-aleatorios de 5000 datos, normalmente distribuidos con media cero y desviación estándar 1. Luego, calculó los valores de R/SC para todo n , donde cada valor R/S_n siempre incluirá el valor inicial y final de la serie de tiempo completa. Las varianzas fueron calculadas y los valores finales se compararon con los obtenidos por la ecuación (2-59). Para la simulación R/S_n los valores convergen a la ecuación (2-59) y (2-60), cuando n es más mayor que 20 [73]. Sin embargo, para valores pequeños de n , hay una consistente desviación. Los valores de R/S_n creados por la simulación son mucho menores para (2-61) y la ecuación de Hurst. La varianza de R/S_n es sistemáticamente menor que la ecuación de (2-61), sin embargo se sabía que se estaba calculado sobre una relación asintótica [73]. Luego, se trabajó con el ajuste del rango, no con el rango escalado, encontrando que el comportamiento de escala para la desviación estándar del rango, para pequeños n , es el responsable de esta desviación. El factor sobrante del valor de la media de la estadística R/SC permite quitar la diferencia del valor predictivo de la teoría de Feller [75].

Posteriormente en el año 1976, Anis y Lloyd dedujeron la siguiente ecuación, con el fin de evitar la desviación sistemática de la estadística R/SC para pequeños n [76]

$$(R/S)_n = \left[\frac{\Gamma\{0,5(n-1)\}}{\sqrt{\pi}\Gamma\{0,5n\}} \right] \sum_{t=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-r}{r}}.$$

Para el caso de n grande, la anterior ecuación deja de ser útil debido a que los valores de la función gama pueden llegar a ser demasiado grandes. Sin embargo, usando la función de Sterling, la ecuación puede simplificarse de la siguiente manera [57]

$$(R/S)_n = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^{0,5} \sum_{t=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-t}{t}}.$$

Después de lo anterior, se calcula la cantidad

$$\log H_n = \log (R/S)_n - \log E (R/S)_n + \frac{\log(n)}{n},$$

y [76]:

$$\log H_n = \log(c) - H \log(n).$$

Más adelante en el 2002, Weron indica un procedimiento mejorado que consiste en obtener $E(R/S)_n$ como se muestra a continuación [57]

- Caso *i*: Para $n \leq 340$

$$E(R/S)_n = \frac{n - \frac{1}{2}}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-i}{i}}. \quad (2-62)$$

- Caso *ii*: Para $n \geq 340$

$$E(R/S)_n = \frac{n - \frac{1}{2}}{n} \frac{1}{\sqrt{n\frac{\pi}{2}}} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-i}{i}}. \quad (2-63)$$

En general, cuando se trata de series de tiempo cortas (con longitudes menores a 5.000 datos), el método R/SC pierde precisión [16]. Por lo tanto, la inclusión de un factor de corrección, que tiene una interpretación geométrica, permite que se pueda tener una estimación más precisa del exponente de Hurst para el caso de series de tiempo cortas (es decir, longitudes cortas o menores a 5.000 datos) [16].

Siguiendo a Weron [57] y a Sánchez-Granero [16], una vez que se estima el exponente de Hurst H , éste toma el valor 0,5 si se usa la ecuación (2-62) o (2-63), más la pendiente de $(R/S)_n - R(E/S)_n$.

2.3.6. Método de análisis de fluctuaciones sin tendencias (DFA)

El método DFA fue introducido inicialmente por Peng [17] para estimar el exponente de Hurst en series de tiempo sin tendencias. Sin embargo, el método DFA fue generalizado de tal forma que fuera posible la remoción de tendencias [77], por lo que el método DFA tomó especial importancia ya que permitió el análisis de fluctuaciones sin estacionaridades [77] [17]. La aplicación de este método ha sido muy amplia, comenzando por el estudio de la variabilidad de la dinámica cardíaca [78, 78, 79, 80], de registros meteorológicos de largo plazo [81, 82], de bioinformática [83], de estructuras en las nubes [85], hasta el estudio de series de tiempo económicas [86, 87, 88, 89]. En todos los casos mencionados, el método

DFA ha proporcionando información importante sobre los posibles procesos involucrados en la generación de las fluctuaciones.

Para una serie de tiempo $y(i), i = 1, \dots, N$, con un periodo de muestreo Δt , el método DFA está basado en el siguiente algoritmo [17]

1. Se obtiene la media de la señal $\langle y \rangle = 1/N \sum_{j=1}^N y(j)$ y se calcula la serie integrada $x(i), i = 1, \dots, N$ de la siguiente forma

$$x(i) = \sum_{j=1}^i (y(j) - \langle y \rangle), i = 1, \dots, N. \quad (2-64)$$

2. Se divide la serie integrada $x(i)$ en cajas o segmentos de tamaño igual a n , los cuales corresponden a la escala de tiempo $\tau = n\Delta t$. Se utiliza un polinomio de grado m , denotado por $x_{pol,m}(i; n)$, para realizar una regresión en la secuencia de la caja.
3. Se calcula la secuencia de fluctuación como:

$$Z_m(i; n) = x(i) - x_{pol,m}(i; n), i = 1, \dots, N. \quad (2-65)$$

4. Se utiliza normalmente un ajuste lineal ($m = 1$) y se calcula la función de fluctuación $F_m(n)$ como el valor raíz cuadrático medio de $z_m(i; n)$:

$$F_m(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^t Z_m(j; n)^2}. \quad (2-66)$$

5. Se repite el procedimiento anterior para un rango amplio de segmentos de longitud n . De acuerdo a las recomendaciones de Peng [17], el intervalo de n deberá estar entre $n_{min} \cong 5$ y $n_{max} \cong N/4$.

Cuando la señal sigue una ley de escalamiento, se observa un comportamiento de ley de potencia en la función de fluctuación $F(n)$, es decir [17]

$$F(n) \approx n^{\alpha_m}, \quad (2-67)$$

donde α_m es el exponente de escala. Se cumple que si $x(i)$ es un fGn, con lo cual $\alpha = H'$; si $x(i)$ es un mBf, entonces $\alpha = H + 1$. En lo anterior, H es el conocido exponente o coeficiente de Hurst, el cual es un parámetro de auto-afinidad de la correlación de ley de potencia de largo rango de la serie de tiempo. El parámetro α_m se puede estimar a partir de la pendiente de la recta [77]:

$$\log(n) \text{ vs } \log(F_m(n)). \quad (2-68)$$

Dependiendo el grado del polinomio m que define la jerarquía del método, el análisis de fluctuaciones difiere en la manera como las fluctuaciones son medidas y como las tendencias son eliminadas. De acuerdo al valor de m , se tiene los siguientes casos [77]

- DFA0: Este tipo de análisis de fluctuación, donde las tendencias no son eliminadas, se implementa a través de determinar en cada ventana el valor promedio del perfil.
- DFA1: Se ajusta el perfil de cada ventana de manera lineal. La varianza de este perfil, para la línea recta, representa el cuadrado de la fluctuación en cada ventana.
- DFAm: Para el m -ésimo orden de DFA (DFAm), se determina en cada ventana el ajuste polinomial de orden n . Por definición, el metodo DFAm elimina tendencias de orden m en el perfil y de orden $n - 1$ en la serie de tiempo original [77].

La aplicación del método DFA para estudiar el comportamiento de los mercados bursátiles fue iniciada por Liu, mostrando que el índice bursátil S&P500 presenta débiles correlaciones de largo alcance [86]. Más adelante, Carles y Grau encontraron poca evidencia de correlaciones de largo rango en los rendimientos de mercados de valores, entre ellos varios de los principales índices bursátiles de Estados Unidos de America [90]. En otro trabajo, Coronel y Brizio utilizaron ventanas de tres años durante el período 1978 a 2006, con el fin de demostrar que la memoria de largo rango en los mercado de valores de Estados Unidos de América opera cerca de la hipótesis del mercado eficiente (EMH) [91].

Relación entre H y D

El desarrollo de la geometría fractal ha sido uno de los hitos dentro del campo de los sistemas complejos, debido a que ha permitido describir formas naturales complejas en términos de reglas simples y puesto que ha brindado una visión completamente diferente a la geometría euclidiana [8]. En la geometría fractal se adecúa la realidad a un llamado orden racional, asumiendo estructuras de la naturaleza que a menudo son invariantes bajo cambios de escala, de tal forma que esta autosimilitud es caracterizada por una dimensión fractal D [6]. El movimiento browniano fraccional tiene asociada una varianza dada por (2-34), donde $\sim |t - t_0|^{2H}$. Esta varianza, que no depende del incremento temporal, es proporcional a una potencia en la que aparece el exponente de Hurst. Se encuentra que el comportamiento de las diferentes escalas de los mercados bursátiles está determinado por H [3].

Ya que H está asociado con las propiedades de escala en el movimiento browniano fraccional, este a la vez se relaciona con la dimensión fractal, de acuerdo con la célebre relación dada por la expresión (2-51). Para $n = 1$, entonces $D + H = 1 + 1 \implies D + H = 2$, con lo cual

$$D = 2 - H. \quad (2-69)$$

La correlación existente entre los eventos del movimiento browniano fraccional hace que las realizaciones de éste tengan características de una serie de tiempo fractal, debido a que dos eventos consecutivos se retroalimentan sucesivamente [6]. Dado que H cuantifica la fuerza de dicha retroalimentación, entonces se espera que exista una relación entre el exponente de Hurst H y la dimensión fractal D del movimiento browniano fraccional [6].

Ya que el movimiento browniano fraccional es una generalización del movimiento browniano simple, se espera que también cumpla con las mismas propiedades, entre las cuales se destaca su invariancia de escala, a través de un cambio adecuado de escala en el tiempo y en el espacio. Por esta razón, el movimiento browniano fraccional es un proceso autoafín, caracterizado por un H dado, que también toma el nombre de exponente de autoafinidad.

Relación entre procesos gaussianos, dimensión fractal y el exponente de Hurst

A continuación se adopta la definición tradicional de D como dimensión de Hausdorff [92]. Así, para un proceso estocástico gaussiano $Z(x)$, donde $x \in \mathbb{R}^n$, se cumple que $E[Z(x)] = 0$ y $E[Z(x)^2] = 1$, de tal forma que su función de correlación dada por $E[Z(x) + Z(x+h)]$ es independiente de x . En términos generales, los procesos gaussianos estacionarios se caracterizan por que su función de correlación está dada por (2-5), por lo tanto [7]

$$c(h) = E[Z(x) + Z(x+h)], \quad (2-70)$$

para todo $h \in \mathbb{R}^n$. El comportamiento de la función de correlación en $h = 0$ determina las propiedades locales. Específicamente, si $h \rightarrow \infty$ entonces para algún $\alpha \in (0, 2]$ se cumple que [7]

$$1 - c(h) \sim |h|^\alpha, \quad (2-71)$$

con lo cual, el cambio de la función estocástica tiene una dimensión fractal dada por [7]

$$D = n + 1 - \frac{\alpha}{2}, \quad (2-72)$$

cuya probabilidad es uno. Del mismo modo, el comportamiento asintótico de la función de correlación en el infinito determina la presencia o ausencia de la dependencia de largo rango. Para el caso en que $h \rightarrow \infty$, la ley de potencia toma la forma

$$c(h) \sim |h|^{-\beta}. \quad (2-73)$$

Si esta ley de potencia se cumple para algunos $\beta \in (1, 0)$, se dice que el proceso estocástico tiene memoria de largo rango y existe un exponente de Hurst dado por [8]:

$$H = 1 - \frac{\beta}{2}. \quad (2-74)$$

Cuando $n = 0$, las relaciones asintóticas (2-71) y (2-73) son también expresadas en términos de la densidad espectral [8]

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda h} c(h) dh. \quad (2-75)$$

Para $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene la transformada de Fourier de la función de correlación. Si en (2-71), se tiene que $\alpha < 2$, entonces la función de correlación para $|\lambda| \rightarrow \infty$ se asocia típicamente con la relación asintótica [1]

$$f(\lambda) \sim |\lambda|^{-\alpha-1}, \quad (2-76)$$

mientras que para $|\lambda| \rightarrow 0$, se asocia con la densidad espectral. Si $\beta \in (0, 1)$, entonces la función de correlación (2-71) para el caso $|\lambda| \rightarrow \infty$ se asocia típicamente con la relación asintótica [1]

$$f(\lambda) \sim |\lambda|^{\beta-1}. \quad (2-77)$$

Un proceso estocástico estacionario autoafín $Z(x)$, como el discutido previamente en términos del movimiento browniano fraccional, tiene una función de correlación entre dos incrementos que está dada en términos de n , H y h . Para $n = 1$, la función de correlación tiene la forma [7]

$$c(h) = \frac{1}{2} \left(|h+1|^{2H} - 2|h|^{2H} + |h-1|^{2H} \right), \quad (2-78)$$

donde H es el índice autoafín o parámetro de auto similitud, discutido en la subsección anterior. Este índice autoafín es el exponente de Hurst, solo si $H \in (1/2, 1)$. El ruido gaussiano fraccional es derivado del movimiento browniano fraccional $B_H(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.3.7. Dinámica del exponente de Hurst $H(t)$

La estimación del exponente de Hurst local se realiza definiendo una ventana fija de observación, que por definición es menor a la ventana de observación total. Una vez se ha definido la ventana fija de observación se procede a estimar el exponente de Hurst local, y entonces se pone a correr la ventana fija de observación sobre el total de la ventana de observación, obteniendo de esta forma la variación en el tiempo del exponente de Hurst local $H(t)$. Esta metodología ha sido implementada previamente en la literatura, por ejemplo en el trabajo de la referencia [32] se realizó un estudio con el fin de detectar la existencia de correlaciones de largo rango en la serie de tiempo de log-retornos diarios, para el índice Bovespa durante el periodo comprendido entre 1968-2001. En este trabajo se obtuvo el exponente de Hurst local como función del tiempo $H(t)$, a partir de definir una ventana de observación de tres años con la cual fue posible estimar el exponente de Hurst local mediante el uso del método DFA [32]. Finalmente en la referencia [32] se encontró que para toda la ventana de observación se cumplía que $H(t) > 1/2$, observándose que el valor de $H(t)$ en el año 1990 tuvo el valor más bajo, cercano a $H = 0,5$, de tal forma que este año coincidió con el año de implementación del Plan Collor que le permitió a Brasil bajar su inflación [32]. La bajada de la inflación se manifestó con el hecho de que entre más eficiente sea el mercado bursátil, el valor de H es más cercano a 0.5 [32].

Otro trabajo que empleó la misma metodología de ventana fija móvil [93], tuvo como objetivo estimar $H(t)$ con el fin de probar que los mercados emergentes de América latina y Asia son cada vez más eficientes [93]. En este trabajo se definió una ventana fija de observación de 4

años y se comparó los resultados obtenidos para los mercados emergentes con los obtenidos para el índice estadinense S&P500 [93]. El uso de la metodología mencionada, permitió comprobar que la mayoría de los mercados presentan un valor de H más cercano a 0,5 durante los últimos años de estudio, o en otras palabras, la persistencia o antipersistencia tiende a disminuir cuando el mercado bursátil se aproxima a la eficiencia [93].

De igual forma, en la referencia [94] los autores se proponen caracterizar el comportamiento de los mercados bursátiles de Estados Unidos de América durante el periodo comprendido entre 1950-2007, a través de considerar las variaciones en el tiempo del exponente de Hurst local que es estimado usando el método DFA para los log-retornos diarios de los índices DOW JONES y S&P500. En el trabajo mencionado [94], se encuentra que la serie de tiempo de $H(t)$ tiene una dinámica tal que para algunos episodios, como por ejemplo los “shocks” financieros, existen fuertes cambios en los valores de H , que implican como consecuencia cambios drásticos en la persistencia de los mercados bursátiles. Si se tiene en cuenta que los mercados bursátiles son sistemas dinámicos, es claro que estudiar la evolución en el tiempo del mercado debe implicar entonces que el exponente de Hurst evolucione en el tiempo [95].

2.4. Volatilidad

2.4.1. Volatilidad

La volatilidad es una medida de la frecuencia e intensidad de los cambios del precio de un activo, que típicamente se usa para cuantificar el riesgo de invertir en el activo y que frecuentemente es dada en términos de la varianza (o en términos de la desviación estándar) de dicho cambio en un horizonte temporal específico [96]. Aunque la volatilidad no puede ser vista directamente, posee las siguientes propiedades que se observan frecuentemente en los rendimientos de los activos [97]:

- Existen los llamados “clusters de volatilidad”, los cuales son agrupaciones de volatilidad, de tal forma que la volatilidad puede ser alta para ciertos períodos de tiempo y baja para otros períodos.
- La volatilidad evoluciona en el tiempo de una manera continua, presentando algunos veces saltos que no son nada frecuentes.
- La volatilidad no diverge a infinito, es decir la volatilidad varía dentro de un rango fijo. Desde un punto de vista estadístico, lo anterior significa que la volatilidad es a menudo estacionaria.
- La volatilidad observada puede ser usada para relacionar diferentes incrementos de un precio alto o la caída a un precio pequeño, lo cual es conocido como el efecto de apalancamiento.

Las anteriores propiedades juegan un papel muy importante para el planteamiento de modelos de volatilidad. Dado que los mercados de derivados financieros, tales como las opciones, se centran en el estudio de los precios, en general las variaciones de los precios son descritas a través de modelos econométricos tales como los modelos EGARCH y GARCH [98, 99, 100, 101]. Sin embargo, el modelo más popular que permite describir las variaciones de los precios de los derivados financieros es el modelo de Black-Scholes, el cual está basado en el supuesto de que la volatilidad es constante [102].

2.4.2. Modelo de Black-Sholes

El origen de los modelos que permiten valorar derivados financieros se encuentra en la ecuación de difusión, la cual fue propuesta por Joseph Fourier (1768-1830) [48]. A comienzos de esta sección se presentaron algunas características del proceso estocástico de Wiener \mathbf{W} , el cual permite describir la evolución de una variable estocástica que se distribuye normalmente, con media cero y una varianza dada. Así mismo, se presentaron algunas características del proceso generalizado de Wiener (movimiento browniano simple), que permite describir los cambios dX de una variable estocástica X que se distribuye normalmente, con tasa de deriva a y varianza b_2 durante un intervalo de tiempo dt , donde a y b son constantes. La ecuación que describe los cambios de la variable X está dada por [102]

$$dX = a dt + b d\mathbf{W}. \quad (2-79)$$

Esta ecuación diferencial estocástica, a través del uso del teorema fundamental del cálculo estocástico introducido por Ito [44], permite deducir la ecuación de Black-Scholes.

Desde la perspectiva de los procesos estocásticos, el cambio absoluto en el precio del activo no es significativo, pero si lo es el retorno. Si se toma a S como el precio de un activo en un tiempo t , entonces en un tiempo posterior $t + dt$, el precio del activo es ahora $S + dS$. Con lo anterior, el retorno del activo es entonces dS/S .

La ecuación diferencial estocástica que tiene la forma de la ecuación (2-79) y que describe los cambios de la variable estocástica retorno dS/S , corresponde a la denominada ecuación de movimiento browniano geométrico dada por [1]:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma d\mathbf{W}, \quad (2-80)$$

donde en la parte derecha de la ecuación (2-80) se identifica que: (i) el primer término corresponde al término determinista, haciendo referencia a que el retorno es libre de riesgo, donde μ es una medida del crecimiento promedio del precio del activo ocurrido durante el intervalo de tiempo dt ; (ii) el segundo término corresponde al término estocástico, el cual modela la aleatoriedad de los retornos dS/S , como respuesta a los cambios externos y a las noticias inesperadas, donde σ es la volatilidad de los retornos y $d\mathbf{W}$ es ruido blanco gaussiano. Por lo anterior, los retornos se distribuyen normalmente, o lo que es lo mismo los

cambios de los precios se distribuyen log-normalmente. Cabe resaltar que el segundo término de la ecuación (2-80) no existe si la volatilidad es cero, es decir $\sigma = 0$. Para este caso la ecuación (2-80) se reduce a una ecuación determinista $dS/S = \mu t$.

Teniendo en cuenta que σ y μ son constantes, después de aplicar el Lema de Ito con $y_t = (t, x_t)$, la ecuación (2-80) indica que y_t sigue un proceso de Wiener generalizado con tasa de deriva $\mu - \sigma^2/2$ y varianza σ^2 , siendo ambas constantes [[1].

Para la deducción de la ecuación de Black-Sholes, se tiene en cuenta que [102]:

- El precio de un activo sigue un proceso de Wiener log-normal.
- La tasa de interés libre de riesgo r y la volatilidad σ del activo se suponen constantes durante el tiempo que dura la opción.
- No hay posibilidad de arbitraje, es decir la ausencia de arbitraje significa que todos los portafolios libres de riesgo deben tener el mismo retorno.
- La compra y venta del activo puede tomar lugar continuamente.
- La venta y los activos son divisibles, para lo cual se asume la posibilidad de compra y venta de cualquier número (no necesariamente entero) de activos subyacentes, aunque no se tenga posesión de los mismos, lo cual quiere decir que se trata de un mercado completo.

Si $y_t = (t, x_t)$ representa el valor de un derivado en el tiempo t , cuando el precio del activo subyacente es $S > 0$, entonces S satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dS = S\mu dt + S\sigma d\mathbf{W}, \quad (2-81)$$

donde μ es la tasa promedio de rendimiento, t es el tiempo, σ es la volatilidad y $d\mathbf{W}$ es ruido blanco gaussiano, que satisface una distribución normal $N(0, \sqrt{dt})$. El valor de una opción sobre aquel activo subyacente se denota como $y_t = V = V(S, t)$, que como se observa es una función del valor de ese activo S y del tiempo t .

Los resultados empíricos demuestran que la volatilidad no es constante dentro de un marco dado de valoración de opciones [96]. Una excepción ocurre cuando la volatilidad es una función determinista del precio de los activos en el tiempo y la valoración de la opción basada en la ecuación diferencial parcial Black-Scholes sigue siendo posible, aunque no exactamente por medio de la fórmula Black-Scholes [102], sino cómo un caso particular, con una función de volatilidad determinista (DVF) por sus siglas en inglés (Deterministic Volatility Function), tal como lo mostraron Derman y Kani en 1994 [103, 104] y Rubinstein 1994 [97]. Estos métodos intentan modelar el precio de las opciones y deducir el comportamiento futuro de la volatilidad esperada por los componentes del mercado. En estos trabajos, en lugar de postular una forma estructural para la función de la volatilidad, se emplea un binomio o trinomio que logre un ajuste aproximadamente exacto de los precios de opciones involucradas [97].

3 Mercados bursátiles

En este capítulo se presentan algunas características generales de los mercados bursátiles, incluyendo algunos aspectos de la hipótesis de mercado eficiente y de las crisis financieras desde una perspectiva econofísica.

3.1. Mercados financieros

Un mercado financiero está definido como el conjunto de instituciones y convenios que facilitan el cambio o adquisición y venta de activos financieros, tales como bienes objeto, servicios y otros. A partir de la definición de mercado financiero dada por Eugene F. Brigham, que en términos generales plantea que este tipo de mercado es un lugar donde personas y organizaciones esperan prestar o pedir prestado, junto con aquellos que tienen un superávit [105], es posible entender que ciertos aspectos involucrados en el mercado no son relevantes y por lo tanto podrían no ser considerados en su definición. Por ejemplo, establecer si los mercados tienen una ubicación física o no, o determinar la forma en que se ponen en contacto oferentes y demandantes en estos mercados, son aspectos que son irrelevantes para el entendimiento de lo que significa un mercado financiero [105].

Debido a que los mercados financieros ponen en contacto oferentes y demandantes de activos financieros, estableciendo un precio justo para dichos activos, es posible identificar algunas ventajas que surgen de la misma existencia de los mercados financieros y de su estudio, tales como [105]: Determinación de los precios justos de oferta y demanda de los diferentes activos financieros; creación de condiciones óptimas para que un inversor pueda muy rápidamente encontrar un activo financiero que se adecuó a su voluntad de inversión; reducción de los costos de transacción, con el fin de que éstos sean los más bajos posibles. Adicionales a las anteriores, existen otras razones que hacen que el estudio de los mercados financieros sea un tema relevante. Por ejemplo, una de ellas es que se ha podido establecer que la dinámica y la resistencia del mercado financiero en un país tiene relación directa con el hecho de que exista un desarrollo acelerado en la economía de dicho país [106].

Mercado bursátil

Un tipo muy especial de mercado financiero es la bolsa de valores o mercado bursátil, el cual se caracteriza por ser un espacio de encuentro entre empresas y ahorradores (inversores) [107]. Se observa que los mercados bursátiles están presentes en la mayoría de los países del mundo,

dado que estos mercados juegan un papel muy importante en el crecimiento de la economía de los países. Una de las razones para que suceda lo anterior es que un mercado bursátil, conforme a lo establecido en un reglamento o regulación acordada, permite canalizar el ahorro de los inversores hacia una inversión más productiva, contribuyendo de esta forma a un mayor crecimiento de la economía del país [106]. En los mercados bursátiles intervienen y realizan operaciones de compra-venta tanto personas como empresas u organizaciones nacionales o extranjeras, quienes reflejan su deseo de inversión a través de la demanda de productos o activos que se ofrecen en dichos mercados. Un mercado bursátil puede ser entendido como un instrumento de financiación para las empresas y como un espacio de inversión para los ahorradores [107].

Índices bursátiles

Un índice de valores o bursátil, conocido en inglés como index, es un instrumento financiero que replica el comportamiento de un grupo de acciones que se cotizan en una determinada bolsa de valores. Estos índices fueron creados con el fin de poder realizar un mejor monitoreo de las tendencias de los grupos de acciones o de las bolsas en general [108]. A través de los valores que los índices tomen en el tiempo, se refleja la evolución global de los precios de las acciones que cotizan en la bolsa. Los índices bursátiles en general se pueden calcular de diversas formas, pero finalmente todas ellas corresponden a comparaciones de una magnitud o magnitudes en dos situaciones diferentes (ya sean temporales o espaciales), tomando una de las situaciones como base o referencia [107].

3.2. Hipótesis del mercado eficiente

La hipótesis del mercado eficiente (EHM), por sus siglas en inglés, fue propuesta por Eugene Fama en 1963 [14]. La EHM, en su versión moderna, plantea que un mercado de activos financieros está constituido por inversores inteligentes y bien informados, lo cual se ve reflejado en que el precio de un activo financiero en un tiempo dado refleje toda la información disponible de los inversores [109]. Respecto a la eficiencia del mercado, existe desacuerdo acerca de su grado de eficiencia y por esta razón se encuentran tres formas diferentes de asumir la EMH. Esta son [110]:

- **Forma “Débil”:** Todos los precios de mercado y datos reflejan plenamente los precios, por esta razón un análisis técnico no tiene ninguna utilidad.
- **Forma “Semi-fuerte”:** Toda la información a disposición del público se refleja plenamente en los valores de los precios y por lo tanto el análisis fundamental no es útil.
- **Forma “Fuerte”:** Toda la información se refleja plenamente en los precios de valores y, por tanto, incluso la información privilegiada no es útil.

La EMH fue formulada más explícitamente por Samuelson en 1965 [111], quién demostró matemáticamente que los precios fluctúan al azar. Utilizando la hipótesis del comportamiento racional y la eficiencia del mercado, fue capaz de demostrar cómo Y_{t+1} , el valor esperado del precio de un activo en el momento $t + 1$, está relacionado con los valores anteriores de los precios $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_t$ a través de la relación [112]

$$E \{Y_{t+1} \mid Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_t\} = Y_t N. \quad (3-1)$$

Los procesos estocásticos obedeciendo la probabilidad condicional dada por la ecuación (3-1) se llaman martingalas [111]. La noción de una martingala corresponde a un modelo probabilístico de juego justo, en el que las ganancias y pérdidas en el juego se cancelan exactamente, por lo que la riqueza esperada en el futuro de un jugador coincide con los bienes del jugador en el presente. Por lo anterior y de manera análoga, los cambios observados en los precios de un activo en un mercado financiero son tales que no hay manera de obtener un beneficio por el simple conocimiento de la historia de las fluctuaciones de los precios [113]. Sin embargo, resultados de estudios de eventos típicos han demostraron que aparentemente los precios tienden a adaptarse a la nueva información dentro del día, lo cual es consistente con la EMH [14].

A principios de los años 90, al buscar la existencia de deficiencias en los modelos de valoración de activos, se encontró que los mercados bursátiles presentan anomalías que parecen contradecir la EMH [14], y que una vez se es descubierta una anomalía en un mercado, los inversionistas tratan de obtener ganancias explotándola, de tal forma que este hecho da lugar a la desaparición de la anomalía. Por lo anterior, las observaciones empíricas y consideraciones teóricas indican que partiendo de una serie de tiempo de cambios de los precios, resulta muy difícil (casi imposible) predecir los cambios de los precios futuros [110]. En su forma más estricta, un EMH es un sistema idealizado. Por esta razón, para entender las implicaciones de la EMH, se puede utilizar la primera ley de Newton, en el contexto de un sistema aislado y en equilibrio, de manera que los mercados (capitales y divisas) se toman como sistemas en equilibrio de forma natural, siempre y cuando el mercado no se vea perturbado por un mercado externo [114].

3.3. Crisis financieras

Una crisis financiera es entendida cómo un fenómeno mediante el cual, el sistema financiero que rige en un país, en una región o en el planeta entero entra en crisis y pierde credibilidad, fuerza y poder [27]. Una de sus características esenciales es que surge como resultado de un cálculo erróneo sobre el rendimiento y riesgo de un préstamo que se otorga o se recibe. Cuando el riesgo se materializa y no se obtiene un rendimiento esperado se produce una crisis financiera [28].

En general, las crisis financieras son el resultado de diferentes interacciones y arreglos institucionales y sus causas son diversas, pero siempre son el resultado de una secuencia de pasos.

Tal como ha sido propuesto en la referencia [115], la secuencia de pasos que caracterizan una crisis financiera son [28]: (i) Todo comienza con el surgimiento de un ciclo de boom, caracterizado por una visión optimista del futuro, que atrae a inversores y prestamistas; (ii) la anterior situación da lugar a que se genere una abundancia en el crédito, puesto que inversores y prestamistas quieren aprovechar la nueva oportunidad; (iii) lo anterior ocurre mientras que las autoridades adoptan ciertas posturas respecto al boom que benefician que lo anterior ocurra; (iv) las circunstancias anteriores dan lugar a que comience una especulación generalizada, en la que es frecuente que los inversionistas y prestamistas asuman grandes riesgos; (v) este último paso da lugar a que se desencadene un clima de nerviosismo generalizado; (vi) finalmente, se llega a la crisis financiera, que se puede manifestar como un crash, es decir ocurre una caída generalizada de los precios en un tiempo relativamente corto [28].

A continuación se describen las crisis financieras de lunes negro e hipotecaria, que son de interés para el desarrollo de esta trabajo, y se presentan las secuencias de pasos que siguieron estas dos crisis financieras.

3.3.1. Crisis del lunes negro

La crisis del *lunes negro* ocurrió el lunes 19 de octubre de 1987 y se manifestó cuando los mercados de valores de todo el mundo se desplomaron en corto tiempo. Esta crisis comenzó con el colapso de la Bolsa de New York, desencadenando caídas similares en otras bolsas de valores internacionales. Como consecuencia, se originó una ola de incertidumbre respecto al futuro de la situación económica de Estados Unidos de América y los efectos que tendría este evento, especialmente sobre la economía de los países emergentes [116]. Se puede considerar que esta crisis se originó, entre otras razones, especialmente por factores de tipo económico y político [117].

La crisis financiera del lunes negro se desarrolló de la siguiente manera: (i) Una semana antes de la crisis, las autoridades alemanas proponían un incremento de sus tasas de internas de interés (ciclo de boom); (ii) el anterior hecho originó un anuncio del secretario del Tesoro de los Estados Unidos de propiciar una mayor devaluación del dólar frente a las monedas europeas (abundancia en el crédito); (iii) los inversionistas creyeron el anterior hecho como un rompimiento del acuerdo de cooperación económica internacional firmado en Louvre entre los siete países más poderosos del mundo, que se había firmado hacía apenas unos meses. Cabe mencionar que el acuerdo mencionado buscaba estabilizar el valor del dólar, mediante el compromiso de Estados Unidos de reducir su déficit presupuestal y de Alemania y Japón de reducir sus tasas internas de interés para reactivar sus economías [116]. Este antecedente, sumado al enorme déficit fiscal de Estados Unidos, considerado como el factor económico más importante que motivó la crisis, fueron algunos de los hechos que precedieron la caída de los precios de los valores en las bolsas del mundo. Estados Unidos es una nación que tradicionalmente no ha sido capaz de financiar su enorme déficit con recursos de ahorro interno, de tal forma que siempre ha atraído enormes capitales extranjeros para apalancar

su crecimiento económico [117].

3.3.2. Crisis hipotecaria

Esta crisis se inició el 15 de septiembre del 2008, cuando el banco de inversión Lehman Brothers se declaró en bancarrota. El anterior hecho conllevó a un colapso de las bolsas de valores de los Estados Unidos y luego fue seguido por fuertes caídas en las bolsas de valores de los otros países del mundo [118]. Se puede considerar que esta crisis comenzó en el 2002 cuando el presidente de Estados Unidos, George W. Bush, pidió ayuda al sector privado con miras a que el mercado de capitales facilitara el financiamiento hipotecario a personas de ingresos bajos y la Reserva Federal -presidida por Alan Greenspan- redujera las tasas de interés de 6 a solo 1, en unos cuantos meses [118]. La facilidad para obtener un crédito hipotecario tuvo como efecto la especulación con los precios de los inmuebles, y sobre todo con los costos de las hipotecas, de manera que esta especulación conllevó al desarrollo de una burbuja inmobiliaria, que infló considerablemente los precios y que se reflejó en un aumento considerable del número de hipotecas [118]. La burbuja hipotecaria estalló y, con ella, los precios de los activos se desplomaron, de manera que fue más favorable para un inversionista devolver el inmueble al banco, pues era mucho más barato hacer eso que seguir pagando los préstamos [118]. A partir de 2008, la historia es conocida y los efectos de la crisis hipotecaria aún se perciben en los países más desarrollados, especialmente en Europa y Japón [119].

3.4. Una perspectiva econofísica de las finanzas

El término econofísica describe una nueva rama de la física que se ha venido desarrollando con gran fortaleza durante los últimos años. Este término fue acuñado por H. Eugene Stanley [1] y fue empleado para describir el trabajo implementado por algunos físicos interesados en estudiar algunos aspectos de los mercados financieros. A este respecto, cabe mencionar que a mediados de la última década del siglo pasado, varios físicos que trabajaban especialmente en el campo de la mecánica estadística decidieron estudiar problemas complejos definidos en el contexto de la economía (con un mayor interés en los mercados financieros) y se dieron a la tarea de intentar explicar algunos fenómenos económicos, en un contexto más general, partiendo del estudio de los datos históricos disponibles [114]. Sin embargo, en la historia del conocimiento ésta no es la primera vez que se establece una interacción entre la física y la economía, pues una situación de acercamiento entre estas dos áreas ya se había presentado hace cerca de 300 años [97, 120, 121, 122]. Inicialmente en 1738, Daniel Bernoulli introdujo la idea de función utilidad para describir las preferencias de las personas a la hora de adquirir un bien. Posteriormente en 1812 Pierre-Simon Laplace, de acuerdo con lo expuesto en su libro *Essai philosophie de physique sur les probabilités*, señaló que los eventos aleatorios e impredecibles en la economía pueden ser bastante predecibles, demostrando que estos eventos obedecen leyes simples. A continuación Adolphe Quetelet profundizó en las ideas de Laplace, a través

de identificar patrones en los datos económicos y en problemas sociales [114]. Posteriormente, Irving Fisher, originalmente físico y estudiante de Willard Gibbs, jugó un papel importante en el desarrollo de la teoría económica neoclásica. El estudio orientado únicamente a los mercados financieros, comenzó con Ingrao e Israel quienes mostraron que las obras de Léon Walras y Vilfredo Pareto sobre economía del equilibrio están basadas en el concepto físico de equilibrio mecánico. Los primeros trabajos de Bachelier condujeron a la revolucionaria teoría de los precios especulativos [10], seguida por la hipótesis de Mandelbrot en la que se plantea que los cambios de precios siguen una distribución estable Levy [6], en lugar de seguir una distribución gaussiana [114]. A partir de entonces, se sabe que existe un comportamiento no lineal en los cambios de los precios, así como una sobreestimación del principio gaussiano para las fluctuaciones, hechos a los que se les atribuyó ser las causas del origen de las crisis financieras del lunes negro de 1987 [116] o de la crisis hipotecaria de 2008 [119].

Algunos campos de acción de la econofísica

En la actualidad, un creciente número de físicos se encuentran interesados en analizar y modelar el comportamiento de los mercados financieros, generalizando los fenómenos que ocurren en los sistemas económicos [122]. La creciente actividad investigativa de estos físicos, la cual es complementaria a los métodos más tradicionales de las finanzas y la matemática financiera, está caracterizada por un énfasis en el análisis empírico de los datos económicos, implementando metodologías propias de la mecánica estadística. El principal instrumento teórico para describir la evolución de los mercados financieros es la teoría de procesos estocásticos, estudiada en el capítulo anterior y que puede formularse de diversas maneras: En términos de la ecuación maestra; a través de la ecuación de Fokker-Planck; usando el modelo de paseo aleatorio; mediante la ecuación de Langevin; o a través de integrales de camino. Algunos de los esfuerzos de investigación actuales en la econofísica son los siguientes:

- *Caracterización estadística del proceso estocástico que obedece los cambios de precios para un activo financiero:* Se han realizado varios estudios que se centran en diferentes aspectos del proceso estocástico analizado, por ejemplo en la forma de la distribución de los cambios de precios, en la memoria temporal y en las propiedades estadísticas de orden superior. Lo anterior constituye una área activa de investigación de la econofísica, donde se realizan esfuerzos para desarrollar modelos estocásticos que permitan una mejor descripción de los datos empíricos [33, 34].
- *Desarrollo de modelos teóricos:* Una segunda área de investigación se enfoca en el desarrollo de modelos teóricos capaces de abarcar todas las características esenciales de los mercados financieros reales. Se han propuesto varios modelos y algunas de las principales propiedades de la dinámica estocástica del precio de las acciones son reproducidas por estos modelos como, por ejemplo, la forma leptocúrtica, la existencia de “colas gruesas” y las distribuciones no-gaussianas [1, 21, 25].

- *Correlación en las series de tiempo financieras:* El tema de la determinación de las posibles correlaciones temporales en series de tiempo financieras es una área activa de investigación. La detección de la presencia de correlación de orden superior en los cambios de precios ha motivado un replanteamiento de algunas técnicas de análisis [1, 49].
- *Distribución de los ingresos de las empresas y su crecimiento:* Además de los estudios que analizan y modelan los sistemas financieros, los estudios sobre la distribución de los ingresos de las empresas y sobre las propiedades estadísticas de las tasas de crecimiento constituyen otra área activa de investigación en econofísica. Un ejemplo de este tipo de estudios es la determinación de las propiedades estadísticas presentes en los resultados económicos de organizaciones complejas.

Series de tiempo financieras

Louis Bachelier mediante sus estudios concluyó que los mercados financieros siguen un movimiento browniano [10], pero no exactamente la variación de los precios si no otras cantidades [114].

Si $P(t)$ es el precio en el tiempo t , el cual se comporta como una variable estocástica, el cambio de precio ΔP está dado por

$$\Delta P(t) = P(t + \Delta t) - P(t). \quad (3-2)$$

Alternativamente, se puede analizar la tasa de cambio o retorno de los precios R , dada por

$$R(t) = \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{P(t)}, \quad (3-3)$$

o también es posible analizar el log-retorno S , que es ampliamente estudiado debido a su sensibilidad a los cambios de escala y que está dado por

$$S(t) = \ln P(t + \Delta t) - \ln P(t). \quad (3-4)$$

En el análisis de datos financieros de alta frecuencia es posible utilizar tanto (3-3) como (3-4), debido a que estas definiciones se interrelacionan en el régimen de alta frecuencia [1]. Algunas de las características estadísticas de (3-2), (3-3) y (3-4) para el índice bursátil S&P500 son ilustradas en la Figura 3-1.

La rentabilidad real empírica se compara en la Figura 3-2 para una serie de tiempo aleatoria que fue generada en la referencia [1], utilizando números aleatorios extraídos de una distribución normal con desviación cero y media igual a la unidad. Los cambios de precio en cada subintervalo son independientes e idénticamente distribuidos, como se observa en la parte superior de la Figura 3-2, mientras que en la parte inferior de esta Figura se presentan los datos empíricos, que cómo se observa no siguen un comportamiento completamente aleatorio.

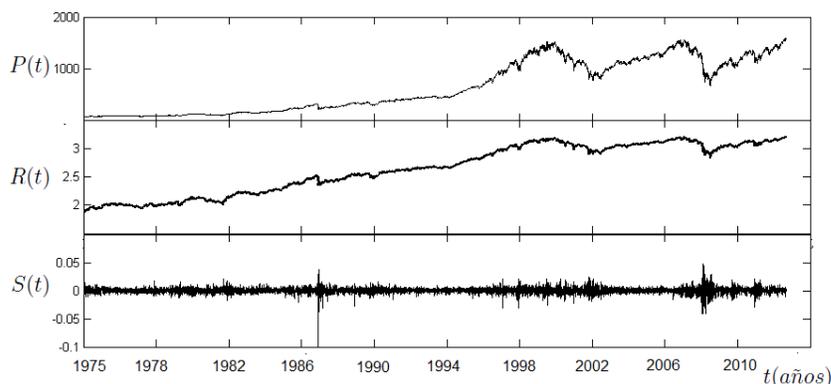


Figura 3-1 Datos empíricos de índice bursátil estadounidense S&P500: La primera describe el comportamiento del precio de cierre $P(t)$, la segunda el retorno o tasa de cambio $R(t)$ y la tercera el log-retorno $S(t)$ en función del tiempo, para un periodo comprendido entre 1975-2013.

Inicialmente en la teoría clásica se supuso que la aleatoriedad de los mercados financieros, específicamente de los cambios de los precios, implicaba que los cambios de los precios se deberían distribuir normalmente. Esta suposición se mantuvo hasta que Mandelbrot [8] y Fama [14] señalaron que son los retornos empíricos quienes se distribuyen normalmente. Sin embargo, posteriormente se estableció que las distribuciones de frecuencia de los retornos se ajustan mejor a distribuciones de vuelos de Lévy [114].

Adicional a lo anterior, los econofísicos que trabajan en el análisis de datos financieros tratan de encontrar regularidades locales o universales en las series de tiempo financieras, siguiendo un enfoque diferente al que siguen los economistas, puesto que estos últimos usualmente realizan un enfoque estadístico tradicional para analizar los datos financieros [114].

Hechos estilizados asociados a retornos

Los *hechos estilizados* se formularon generalmente como propiedades cualitativas generales de los retornos de los activos. Algunos de estos hechos son [1]:

- *Colas gruesas*: Dado que los retornos siguen una distribución asintótica de ley de potencias, lo cual hace posible que las grandes fluctuaciones tengan una probabilidad apreciable de ocurrencia.
- *Ausencia de autocorrelación lineal*: La autocorrelación de los log-retornos decae rápidamente a cero [13], lo cual es un soporte a la “hipótesis del mercado eficiente” (EMH).
- *Clusters de volatilidad*: Las fluctuaciones de los precios no se distribuyen de manera idéntica y las propiedades de su distribución, tales como el retorno absoluto de la varianza cambian en el tiempo, con lo cual los eventos de alta volatilidad tienden a

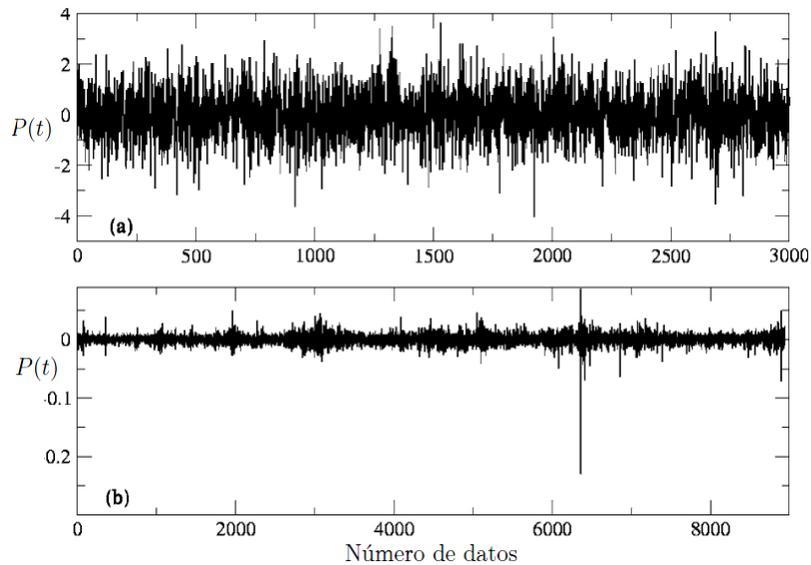


Figura 3-2 Serie de tiempo aleatoria de 3000 pasos tiempo (gráfica superior) y la serie temporales del índice S&P500 de 8938 pasos de tiempo (gráfica inferior).

agruparse temporalmente y por lo tanto grandes cambios tienden a ser seguidos por grandes cambios. Algo similar sucede para los cambios pequeños.

Estudios empíricos sobre la independencia de los rendimientos asociados a activos financieros han sido realizados en el contexto de la econofísica con el fin de proporcionar información adicional sobre la validez o el fracaso de la forma débil de la EMH [110]. Los anteriores estudios han sido realizados a través de la estimación del exponente Hurst [3] en series de tiempo financieras, que como ya se dijo es un instrumento para cuantificar el grado de correlación temporal de largo rango en estas series. El exponente de Hurst H es uno de los parámetros más comúnmente usado para caracterizar la tasa de decaimiento de la función de auto correlación [6, 7].

4 Distribución de frecuencias de algunos índices bursátiles

En este capítulo se presentan los valores de cierre del índice $P(t)$ y del log-retorno diario del índice $S(t)$ en función del tiempo, para los 18 índices bursátiles internacionales mencionados en la introducción y que son tema de estudio en esta tesis. Además, se muestran los valores de los parámetros de ajuste α , β , γ y μ , a distribuciones de vuelos de Levy estables, para las distribuciones de frecuencia de los log-retornos diarios mencionados.

4.1. Históricos y log-retornos

En esta sección se realiza un análisis de los datos financieros, específicamente de las series de tiempo de log-retornos diarios de los índices bursátiles internacionales estudiados en este trabajo, motivados por la búsqueda de regularidades que sean comunes o universales en todas las series de tiempo. Para esto, inicialmente se escogieron los siguientes 18 índices que representan los mercados bursátiles de diferentes países y regiones del mundo: (i) de Norteamérica, DOW JONES (USA), S&P500(USA), Nasdaq (USA), S&P/TSX (Canadá); (ii) de Europa, FTSE100 (Reino Unido), CAC40 (Francia), IBEX35 (España) y DAX 30 (Alemania); (iii) de Asia, Nikkei 225 (Japón), STI (Singapur), HSI (Hong Kong), KOSPI (Corea del Sur); (iv) de Latinoamérica, Bovespa (Brasil), IPC (Méjico), Merval (Argentina), IPSA (Chile), IGBVL (Perú) e IGBC (Colombia); A partir de usar la información disponible en la página YAHOO! FINANCE [123], a continuación se presentan los datos históricos de los 18 índices bursátiles internacionales mencionados.

En la Tabla 4-1 se presenta el nombre del índice, la fecha de comienzo de la serie (que no corresponde a la fecha de inicio del índice bursátil) y el número de datos adquiridos (debido a que todos los mercados no tienen la misma antigüedad y tampoco se tiene acceso a todos los datos). A continuación se hace una descripción de cada índice con el fin de presentar su origen y naturaleza. Además, en cada caso se incluye una representación gráfica de la variación en el tiempo (históricos) tanto del valor de cierre del índice cómo del log-retorno.

Tabla 4-1 Datos históricos de los índices bursátiles estudiados. En la segunda columna se presenta la fecha de inicio del respectivo índice (de acuerdo con la disponibilidad de datos) y en la última columna el número de datos.

ÍNDICE	Fecha de Inicio	Nº DATOS
DOW JONES	1977/03/30	10000
S&P500	1977/03/30	10000
Nasdaq	1977/03/30	10000
S&P/TSX	1984/04/23	7225
FTSE 100	1984/04/02	7344
CAC 40	1900/03/01	5864
IBEX 35	1903/07/09	4985
DAX 30	2000/01/03	3441
Nikkei 225	1984/01/04	7188
HSI	1986/12/31	6547
STI	1987/12/28	6347
KOSPI	1997/07/01	3905
Bovespa	1984/04/02	7337
IPC	1991/11/08	5367
Merval	1996/10/08	4079
IPSA	1996/12/12	4098
IGBVL	1997/14/01	4093
IGBC	2001/07/03	2915

4.1.1. Norteamérica

Dow Jones (EE.UU)

El índice Dow Jones Industrial Average fue creado por Charles Dow el 26 de mayo de 1896, quién también fue el fundador de la teoría Dow. Cabe mencionar que esta teoría es el método subyacente para evaluar la mayoría de los índices bursátiles. Este índice incluye a las acciones de 30 empresas, que son consideradas las mayores y más grandes compañías estadounidenses *market makers* y además es el índice más antiguo. Sus históricos de índice y log-retornos se presentan en la Figura 6-1. [124].

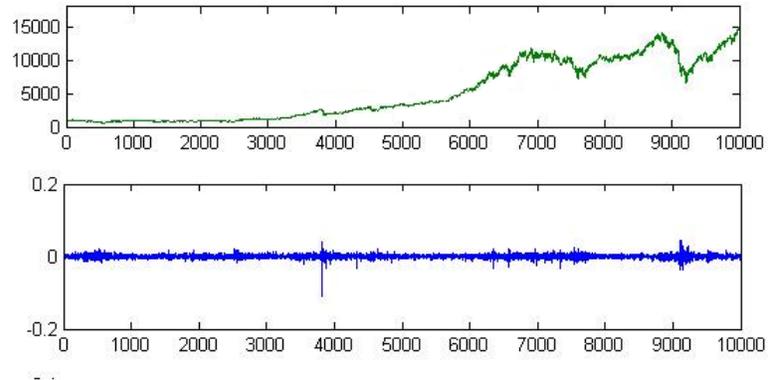


Figura 4-1 Datos empíricos entre 1977-2013 del índice bursátil estadounidense Dow Jones. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).

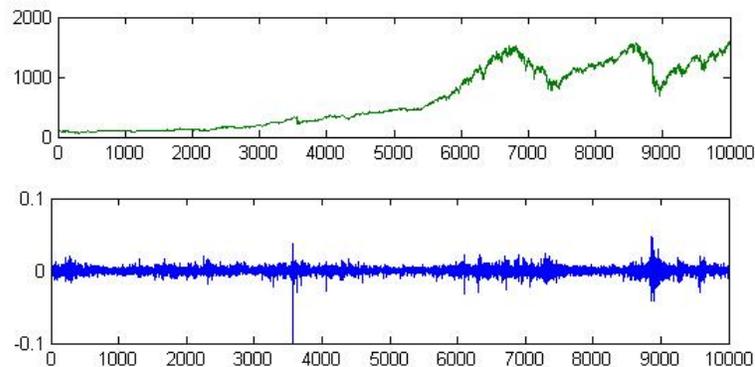


Figura 4-2 Datos empíricos entre 1977-2013 del índice bursátil estadounidense S&P500. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).

S&P500 (EE.UU)

El índice bursátil S&P500, uno de los más importantes de EE.UU., fue creado en 1975 y está compuesto por los 500 principales valores de EE.UU., que en su mayoría representan su grupo industrial. Es uno de los indicadores bursátiles más estudiados y es considerado un índice que representa un mercado eficiente. Sus históricos de índice y log-retornos se presentan en la Figura 6-2. [74].

Nasdaq (EE.UU)

El índice bursátil Nasdaq, por sus siglas en inglés (National Association of Securities Dealers Automated Quotations), es un índice que representa el comportamiento de uno de los mayores mercados de EE.UU. Comenzó a funcionar en febrero de 1971 [125]. Actualmente, en dicho índice participan más de 5.000 compañías especialmente en su mayoría de origen tecnológico. En la Figura 6-3 se representan sus históricos de índice y log-retornos.

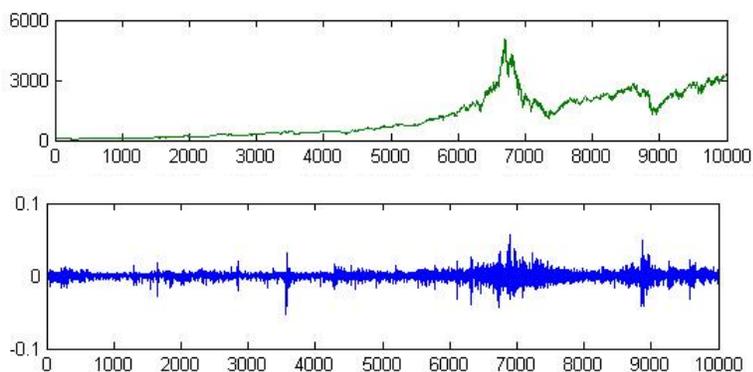


Figura 4-3 Datos empíricos entre 1977-2013 del índice bursátil estadounidense Nasdaq. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).

S&P/TSX (Canadá)

El índice bursátil S&P/TSX60 es el más representativo de Canadá y se encuentra compuesto por 60 de las mayores compañías que cotizan en la bolsa de Toronto (Toronto Stock Exchange - TSX). Además cubre 11 sectores del mercado de Canadá, entre los que se puede destacar: Materiales básicos, energía, tecnología y transporte [126]. En la Figura 6-4 se presentan sus históricos de índice y log-retornos.

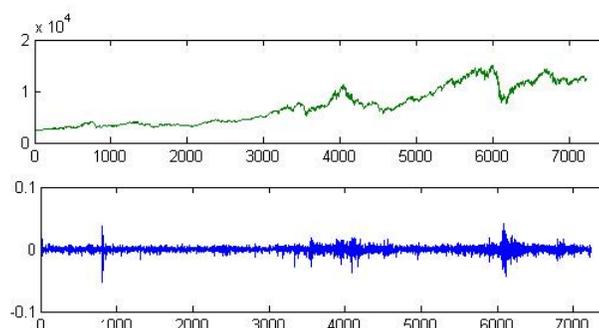


Figura 4-4 Datos empíricos entre 1984-2013 del índice bursátil canadiense S&P/TSX. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).

4.1.2. Europa

FTSE 100 (Gran Bretaña)

El índice FTSE 100 incluye las acciones de las 100 principales empresas de la Bolsa de Valores de Londres (London Stock Exchange). Comenzó a funcionar el 13 de enero de 1984 y fue desarrollado con un valor base de 1000. Es un índice que es considerado como la representación de un mercado eficiente. En la Figura 6-5 se presentan los históricos de índice y de log-retornos. [127].

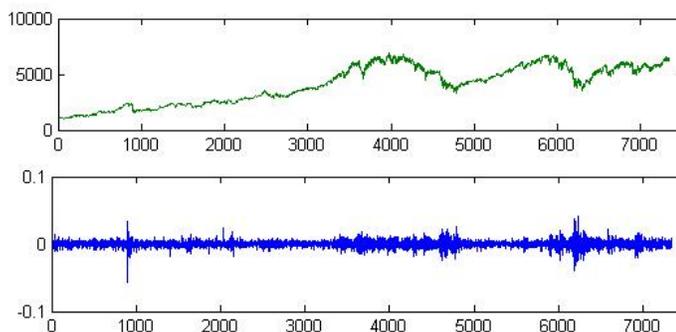


Figura 4-5 Datos empíricos entre 1984-2013 del índice bursátil británico FTSE100. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).

CAC 40 (Francia)

El CAC 40, por sus siglas en francés (Cotation Assistée en Continu), es un índice bursátil francés y fue el primer sistema automatizado de la Bolsa de París. Este índice se considera como una referencia para el Euronext Paris. Está constituido por los 40 valores más significativos y de mayor capitalización, entre las 100 mayores empresas negociadas en la Bolsa de París [128]. En la Figura 6-6 se presentan los históricos de índice y de log-retornos.

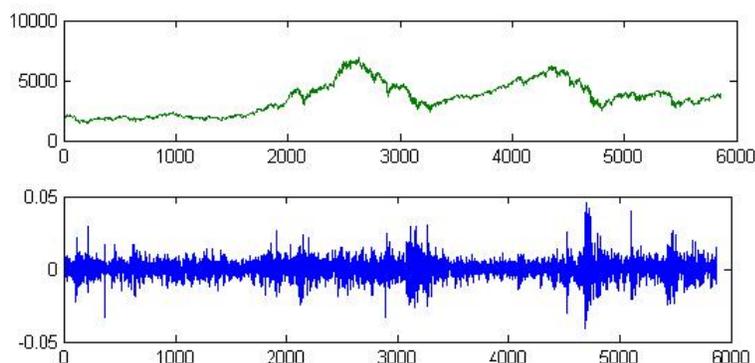


Figura 4-6 Datos empíricos entre 1900-2013 del índice bursátil francés CAC40. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).

IBEX 35 (España)

El índice bursátil IBEX 35 (Índice Bursátil Español) es el principal índice de referencia de la bolsa de valores de España, el cual es elaborado por Bolsas y Mercados Españoles. Se encuentra constituido por las 35 empresas con mayor capitalización y más líquidas del Sistema de Interconexión Bursátil Electrónico (SIBE) en las cuatro Bolsas Españolas (Madrid, Barcelona, Bilbao y Valencia) [128]. Sus históricos de índice y log-retornos se presentan en la Figura 6-7.

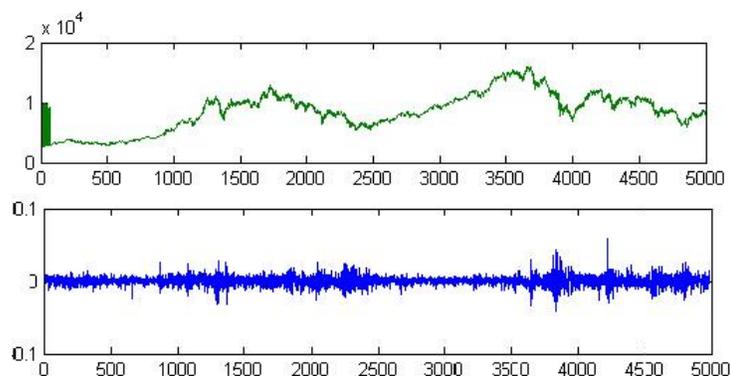


Figura 4-7 Datos empíricos entre 1900-2013 del índice bursátil español IBEX35. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).

DAX 30 (Alemania)

El índice bursátil DAX o Xetra DAX, por sus siglas en alemán (Deutscher Aktienindex), es el índice de referencia de la Frankfurter Wertpapierbörse (Bolsa de Fráncfort). Este índice es el más conocido de las bolsas de valores de Alemania y en él participan las 30 principales empresas, seleccionadas por capitalización y contratación, que cotizan en la Bolsa de Fráncfort. Sus históricos de índice y log-retornos se presentan en la Figura 6-8 [128].

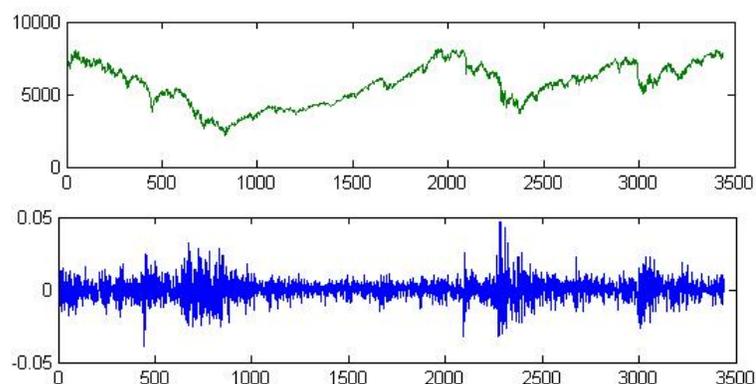


Figura 4-8 Datos empíricos entre 2000-2013 del índice bursátil alemán DAX 30. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).

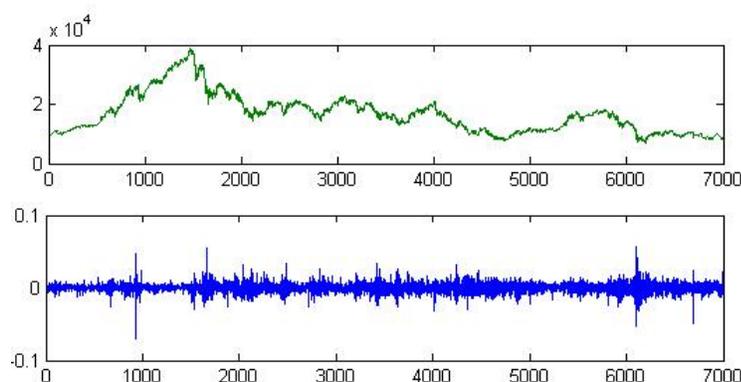


Figura 4-9 Datos empíricos entre 1984-2013 del índice bursátil japonés Nikkei225. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).

4.1.3. Asia

Nikkei 225 (Japón)

El índice más popular del mercado japonés es el Nikkei 225, el cuál está constituido por los 225 valores más líquidos *blue chips*, seleccionados de entre 450 valores *First Section* de la Bolsa de Tokyo (TSE). Los valores incluidos en este índice bursátil se caracterizan por su elevada liquidez [129]. Sus históricos de índice y log-retornos se presentan en la Figura 6-9.

Hang Seng Index (Hong Kong)

El índice bursátil chino de Hong Kong en el Hong Kong Stock Exchange (HKEX), usualmente conocido como HSI, es el más importante de Hong Kong y está compuesto por 33 valores, que son seleccionados a partir de un criterio de capitalización [129]. Para formar parte del índice, el valor debe estar dentro del 90% de las empresas con mayor capitalización y volumen y haber cotizado en la Bolsa de Hong Kong durante más de 24 meses. En la Figura 6-10 se presentan los históricos de índice y de log-retornos.

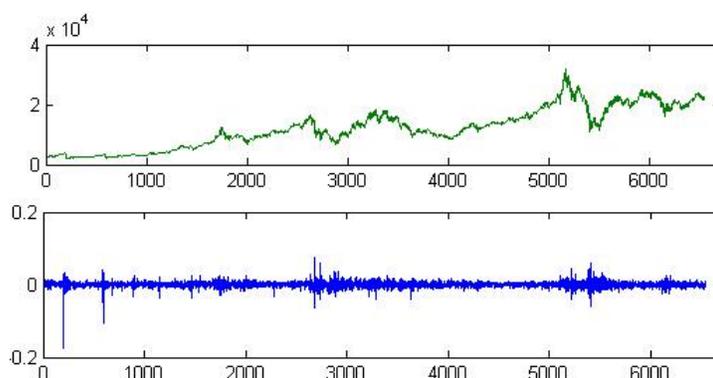


Figura 4-10 Datos empíricos entre 1986-2013 del índice bursátil asiático HSI. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).

Strait Times Index (Singapur)

El índice bursátil STI, por sus siglas en inglés (Straits Times Index), es un índice constituido por las acciones de las 30 compañías más representativas de la bolsa de Singapur (Singapore Exchange). Fue lanzado con una reestructuración sectorial de las compañías listada en la bolsa de Singapur, que supuso el fin de la categoría *industrial* [129]. En la Figura 6-11 se presentan los históricos de índice y de log-retornos.

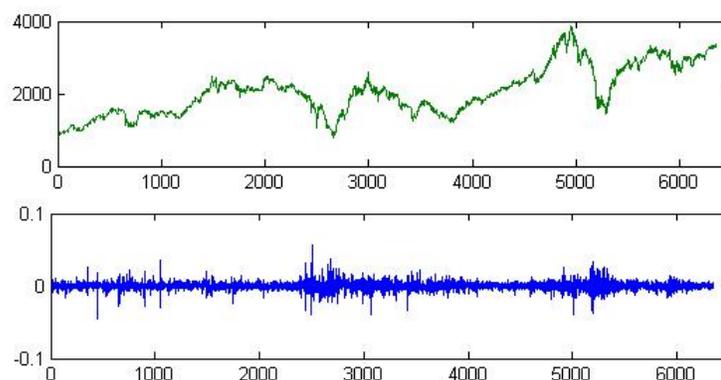


Figura 4-11 Datos empíricos entre 1987-2013 del índice bursátil asiático STI. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).

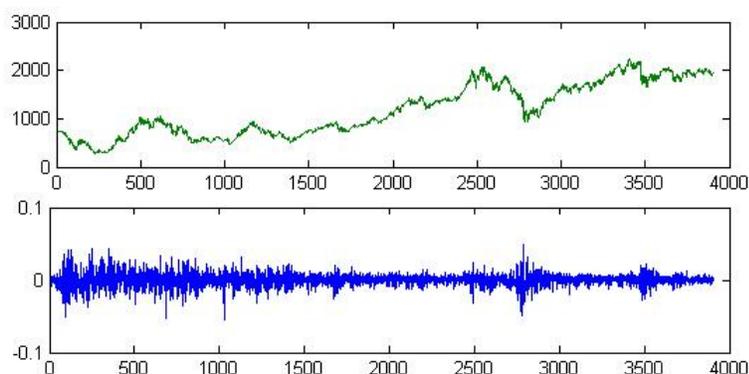


Figura 4-12 Datos empíricos entre 1997-2013 del índice bursátil coreano Kospi. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).

Kospi (Corea del Sur)

KOSPI es el índice bursátil de Corea del Sur, el cual está constituido por las acciones de todas las compañías negociadas en el Mercado de Valores de Corea *Korea Stock Exchange*. Es un índice basado en la capitalización de mercado que fue introducido en 1983 [129]. En la Figura 4-12 se presentan los históricos de índice y de log-retornos.

4.1.4. Latinoamérica

Bovespa (Brasil)

El índice bursátil Bovespa es el principal indicador de la Bolsa de Valores de Sao Paulo, que es mercado bursátil más grande de Brasil y el séptimo de Latinoamérica. Este índice muestra las variaciones de rentabilidad de una cartera conformada por las principales acciones del mercado brasileño. Las acciones incluidas en este índice representan más del 80 por ciento de las transacciones registradas en la Bolsa de Sao Paulo [130]. Sus históricos de índice y log-retornos se presentan en la Figura 4-13.

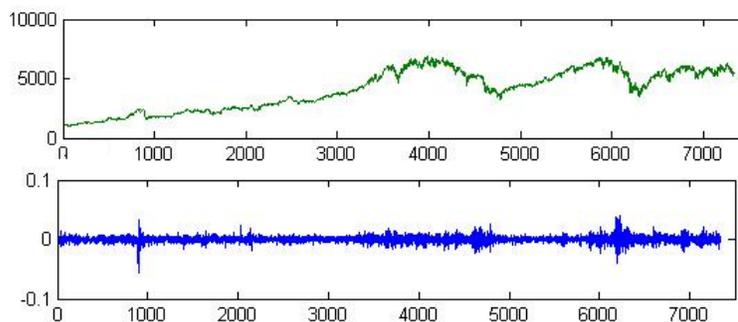


Figura 4-13 Datos empíricos entre 1984-2013 del índice bursátil brasileño Bovespa. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).

IPC (México)

El índice bursátil IPC (Índice de Precios y Cotizaciones) es el principal indicador de la Bolsa Mexicana de Valores, el cual refleja el rendimiento del mercado accionario mexicano según una cartera balanceada, ponderada y representativa del total de las acciones que se cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores [130]. Sus históricos de índice y log-retornos se presentan en la Figura 4-14.

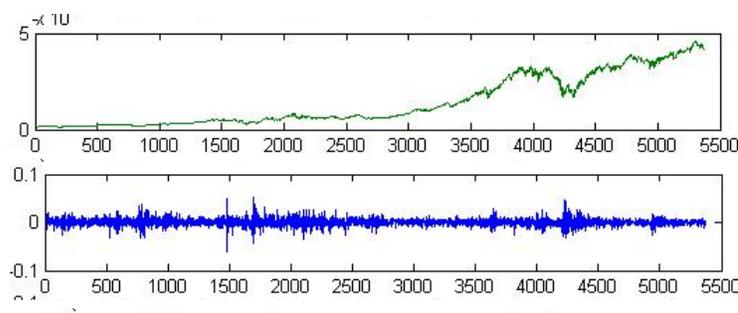


Figura 4-14 Datos empíricos entre 1991-2013 del índice bursátil mexicano IPC. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).

Merval (Argentina)

Merval es el principal índice del Mercado de Valores de Buenos Aires y es al mismo tiempo el índice más difundido en los mercados accionarios de Argentina. Este índice muestra la evolución en conjunto de las principales empresas argentinas, según el volumen transado

el trimestre previo. Cada acción tiene un peso o ponderación con respecto al índice y esa ponderación se determina con respecto al volumen negociado [130]. Sus históricos de índice y log-retornos se presentan en la Figura 4-15.

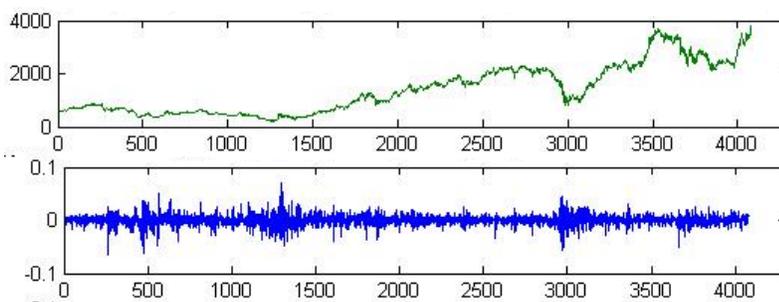


Figura 4-15 Datos empíricos entre 1996-2013 del índice bursátil argentino Merval. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).

IPSA (Chile)

El IPSA (Índice de Precio Selectivo de Acciones) es el principal índice bursátil de Chile, elaborado por la Bolsa de Comercio de Santiago. Corresponde a un indicador de rentabilidad de las 40 acciones con mayor presencia bursátil, siendo dicha lista revisada anualmente [130]. Sus históricos de índice y log-retornos se presentan en la Figura 4-16.

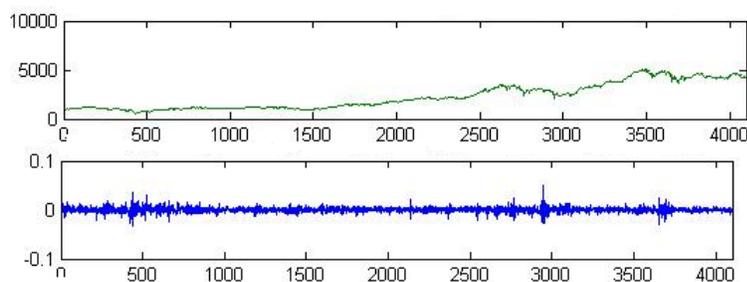


Figura 4-16 Datos empíricos entre 1996-2013 del índice bursátil chileno IPSA. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).

IGBVL (Perú)

El IGBVL (Índice General de la Bolsa de Valores de Lima) es un índice bursátil que se emplea para establecer comparaciones respecto de los rendimientos alcanzados por los diversos sectores (industrial, bancario, agrario, minero, de servicios públicos, etc.) participantes en la Bolsa de Valores de Lima, en un determinado período de tiempo [130]. En la Figura 4-17 se presentan sus históricos de índice y log-retornos.

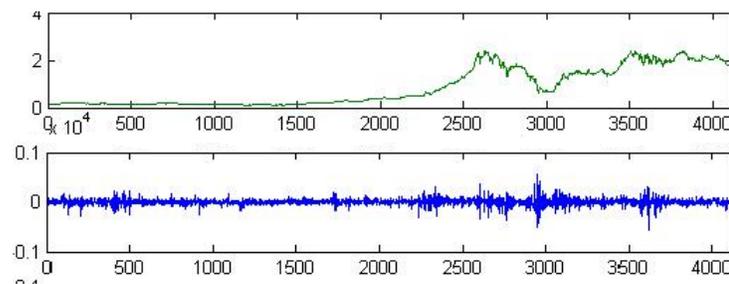


Figura 4-17 Datos empíricos entre 1997-2013 del índice bursátil peruano IGBVL. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).

IGBC (Colombia)

El IGBC (Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia) para la ventana de observación de 2001-2013 era el principal índice bursátil de la bolsa colombiana. Este índice incluye una cartera compuesta por las acciones más líquidas y de mayor capitalización del mercado de valores de Colombia. Este índice operó desde el año 2001, cuando se fusionaron las bolsas existentes en aquella época: Bogotá, Medellín y Occidente. Para los años anteriores a la implementación del IGBC, se utilizó el IBB (Índice de la Bolsa de Bogotá) como índice que caracterizaba al mercado accionario colombiano [130]. En la Figura 4-18 se presentan sus históricos de índice y log-retornos.

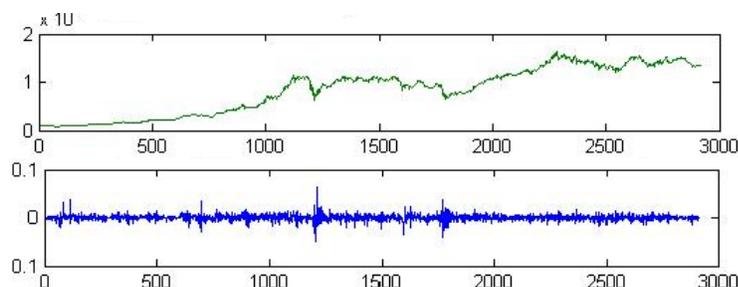


Figura 4-18 Datos empíricos entre 2001-2013 del índice bursátil colombiano IGBC. Se representan los comportamientos del valor de cierre $P(t)$ (gráfica superior) y del log-retorno $S(t)$ en función del tiempo (gráfica inferior).

Algunas generalizades de los índices considerados

Los 18 índices bursátiles que se estudian en esta tesis fueron seleccionados con el fin de poder diferenciar algunas características de los mercados financieros llamados consolidados y emergentes. De acuerdo a la ubicación geográfica de los mercados bursátiles donde están definidos estos índices, éstos son clasificados según la región a la que pertenecen, de la siguiente manera: cuatro índices de Norteamérica; cuatro índices de Europa; cuatro índices de Asia; seis índices de Latinoamérica. Los históricos de valor de cierre diario del índice y de log-retornos diarios se presentan en las Figuras 6-1-4-18. En la parte superior de estas Figuras se puede observar la representación gráfica de la variación en el tiempo de los valores de cierre diarios $P(t)$ de cada índice (datos empíricos), mientras que en la parte inferior de estas Figuras se muestra la variación en el tiempo de los log-retornos diarios $S(t)$, dados por (3-4), para toda la ventana de observación de cada índice.

Las series de tiempo de log-retornos diarios, asociadas con cada uno de los índices, representan una evidencia de la no eficiencia de los mercados (paseo aleatorio), ya que al comparar la evolución de estas series con la evolución temporal para un proceso aleatorio, como el de la Figura 3-2, es claro que en estas series no se tiene un comportamiento similar. Se observa en todos los históricos de valores de cierre de los índices $P(t)$, la existencia a largo plazo de un aumento progresivo del valor P . Debido a que los índices son un indicador de la variación a nivel general, de los precios existentes de las acciones en el mercado o de un determinado sector dentro de un mercado, entonces a partir de los históricos de valores de los índices se observa un aumento importante durante los últimos años en los valores de los índices DOW JONES, S&P500, S&P/TSX, FTSE 100, DAX30, HSI, STI, KOSPI, Bovespa, IPC, Merval, IPSA, IGVL e IGBC. La evolución de los índices bursátiles está sujeta a grandes variaciones, lo cual es resultado de razones internas al mercado, pero también a la interacción entre mercados de diferentes países y regiones. Debido a los efectos de globalización en los mercados, se está generando en algunos casos unas tendencias de comportamiento bastante

similares para todos los mercados.

En las series de tiempo de log-retornos representadas en la parte inferior de las Figuras **6-1-4-18** se pueden también observar algunos hechos estabilizados, como el llamado *Volatility Clustering* o agrupamiento de volatilidad, de acuerdo a lo señalado por Mandelbrot [131]: *grandes cambios tienden a ser seguidos por grandes cambios y los pequeños cambios tienden a ser seguidos por pequeños cambios*. Esta es una manifestación cuantitativa de este hecho debido a que las fluctuaciones de estas nuevas series no se distribuyen de la misma manera, como consecuencia de la correlación. Las correlaciones generadas por grandes fluctuaciones que se observan en los índices estudiados, representan variaciones significativas en los valores de los índices y son el resultado de inestabilidades en los mercados.

En las Figuras **6-1-4-18** también se puede observar la existencia de eventos extremos, donde los índices tienen cambios abruptos como resultado de las crisis, o *crash* financieros, las cuales afectan de manera general a todos los mercados bursátiles con impactos diferentes. Se observa que para todos los índices, de acuerdo con la ventana de observación de cada índice, existe una manifestación de las crisis financieras del lunes negro (19 de octubre de 1987) e hipotecaria (15 septiembre de 2008), a través de una fuerte caída en el valor de los índices, ya sea en las fechas en que se originaron las crisis o pocos días después de estas fechas. El impacto de estas crisis financieras fueron diferentes de acuerdo al índice, al país y a la región.

4.2. Distribución de frecuencias

De acuerdo con la literatura, la caracterización de los mercados financieros a través de datos empíricos requiere usualmente del estudio de las correlaciones temporales y de la determinación de las densidades de distribución de probabilidad (PDF) asintóticas. El modelo más simple, propuesto para describir la evolución del mercado de acciones, es el movimiento browniano geométrico, el cual considera que el incremento en los logaritmos de los índices corresponde a un proceso difusivo, con una distribución de Gauss o gaussiana. Sin embargo, ninguna de las series de tiempo de log-retornos diarios de los 18 índices bursátiles considerados se puede ajustar a una distribución gaussiana. Es usual que los históricos de las series de tiempo financieras posean escalas temporales que varían como resultado de las crisis financieras o *crash* financieros. Estas crisis, como ya se dijo, son observadas claramente en los históricos de las series de índices $P(t)$ y de log-retornos $S(t)$ para todos los índices estudiados y por esta razón se espera que se vean sus efectos en las densidades de distribución de probabilidad.

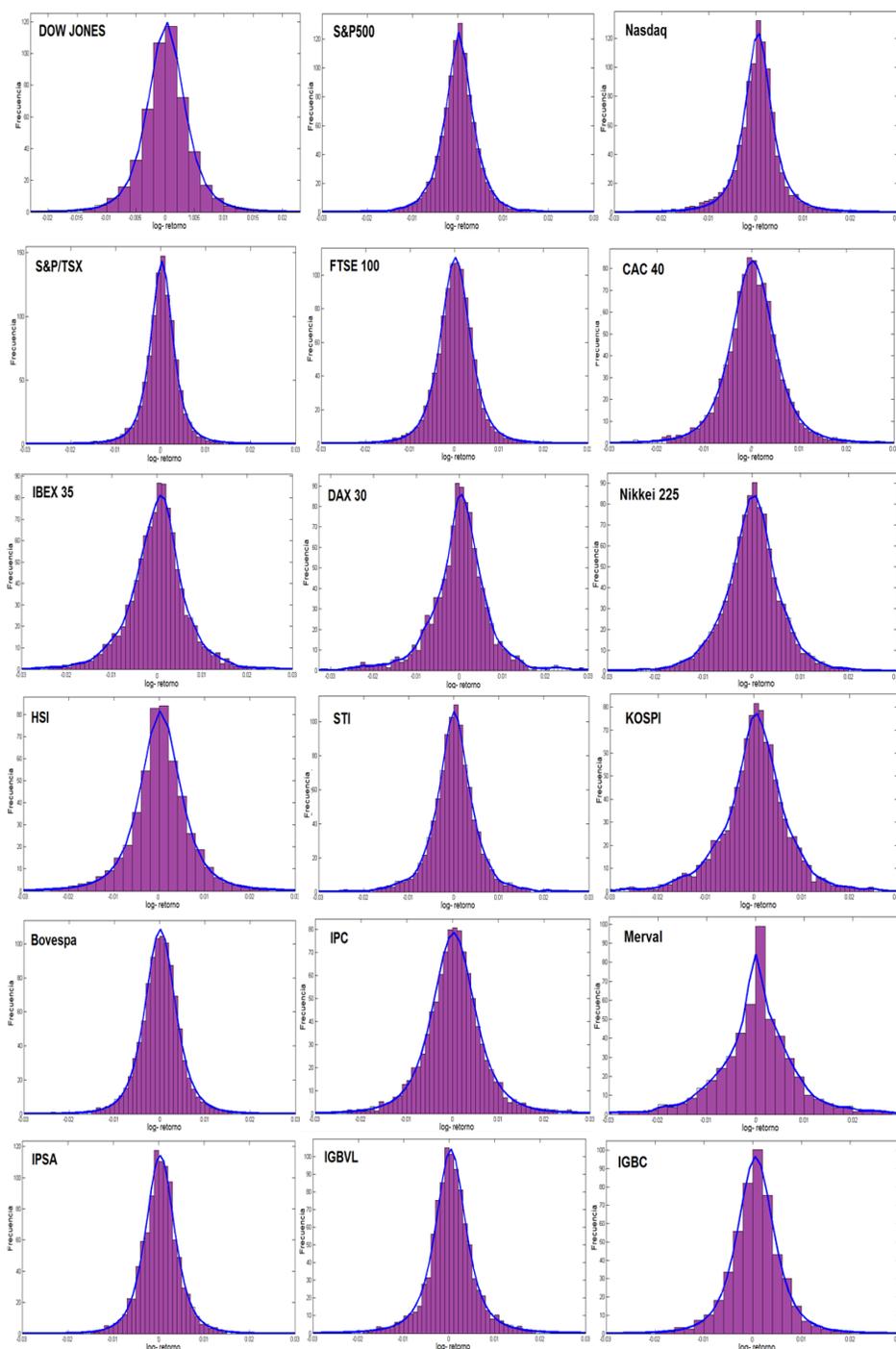


Figura 4-19 Distribución de frecuencias para la serie de log-retornos diarios asociadas a los 18 índices bursátiles de estudio, a partir de un ajuste de vuelos de Lévy estables.

Inicialmente se construye la distribución de frecuencias (número de veces que aparecen datos

Tabla 4-2 Parámetros de ajuste a una distribución de vuelos de Levy estables de las distribuciones de frecuencias de los log-retornos diarios de los 18 índices bursátiles considerados.

ÍNDICE	α	β	γ	μ
DOW JONES	1.65999	0.07544	0.00009	0.00249
S&P500	1.56074	0.06721	0.00009	0.00242
Nasdaq	1.39031	-0.21659	-0.00015	0.00237
S&P/TSX	1.53934	-0.16712	0.00007	0.00207
FTSE 100	1.68371	-0.19011	-0.00001	0.00268
CAC 40	1.62881	-0.12968	-0.00001	0.00351
IBEX 35	1.59453	-0.15115	-0.00008	0.00368
DAX 30	1.50611	-0.20058	-0.00026	0.00354
Nikkei 225	1.66143	-0.11678	-0.00006	0.00361
HSI	1.53642	-0.07724	0.00010	0.00364
STI	1.55843	-0.07749	0.00003	0.00282
KOSPI	1.53313	-0.22127	-0.00015	0.00398
Bovespa	1.69131	-0.18696	-0.00003	0.00273
IPC	1.61737	-0.06481	0.00011	0.00376
Merval	1.49340	-0.11342	-0.00013	0.00477
IPSA	1.58422	-0.08576	0.00020	0.00255
IGBVL	1.49197	0.01831	0.00039	0.00285
IGBC	1.48756	-0.06059	0.00045	0.00303

en un rango de valores dado) para cada una de las series de tiempo de log-retornos diarios, considerando en cada caso la ventana completa de observación de cada uno de los índices estudiados. A continuación se ajustan estas distribuciones de frecuencia a distribuciones tipo vuelos de Levy estables, tal cómo se muestra en la Figura 4-19. Estos ajustes se realizan de forma gráfica. En la Tabla 4-2 se presentan los parámetros de ajuste α , β , γ , μ que fueron obtenidos haciendo uso del programa Mathematica 9, para cada uno de las series consideradas. Una importancia práctica que tienen los parámetros de ajuste obtenidos es que a través de ellos se puede determinar cuáles de los mercados bursátiles asociados se acercan más a la eficiencia. Las distribuciones de frecuencia de las 18 series de tiempo de log-retornos diarios estudiadas se presentan en la Figura 4-19, donde se observa que los ajustes a distribuciones de vuelo de Levy estables, en la mayoría de los casos, pueden considerarse óptimos.

Como se indicó en la sección 2.2.1, el parámetro α corresponde al exponente característico, el cual puede tomar valores en el intervalo $(0, 2]$. Para el caso particular de $\alpha = 2$, las series de tiempo reflejan un comportamiento totalmente aleatorio del mercado, de tal forma que

la distribución de frecuencia se ajusta a una distribución normal. Por lo anterior, el valor del parámetro α indica que tan lejos el mercado se ajusta a la HME (entre más cerca a 2, el comportamiento del mercado es más eficiente). De acuerdo con los resultados obtenidos, mostrados en la Tabla **4-2**, los dos índices cuyas distribuciones de frecuencia más se acercan a una distribución normal son Bovespa $\alpha = 1,69131$ y FTSE 100 con $\alpha = 1,68371$. Por el contrario, las distribuciones de frecuencia cuyo valor del parámetro α está más alejado del valor 2 son las correspondientes a los índices Nasdaq, con $\alpha = 1,39031$, e IGBC, con $\alpha = 1,48756$. En general, para las series de tiempo de log-retornos diarios estudiadas se observa que el parámetro α se encuentra en el rango $\alpha \in (1,69131 - 1,39031)$. Para el total de las distribuciones de frecuencia consideradas, sólomente en cuatro casos se obtuvo un valor $\alpha < 1,5$, lo cual indica que los mercados asociados a dichos índices pueden ser considerados cómo mercados emergentes. Es decir, para estos cuatro casos la respectiva distribución de frecuencias de log-retornos diarios se encuentra bastante alejada a una distribución normal.

5 Exponentes de Hurst de las series de tiempo de log-retornos

En este capítulo se presentan los resultados provenientes de la estimación del exponente de Hurst global, a partir de considerar la ventana completa de observación para todas las series de log-retornos estudiadas. Inicialmente se determina el tamaño óptimo de paquete para cada una de las series de tiempo de log-retornos diarios. A continuación, usando cada uno de los métodos R/SC, R/SG, DFA y DFAM, este último para $m = 1, 2$, se estiman los exponentes de Hurst asociados a cada una de las series. Por último, se obtienen las dimensiones fractales D para todas las series de tiempo de log-retornos diarios consideradas, las cuales son obtenidas a partir de los promedios de los exponentes de Hurst globales estimados con los diferentes métodos.

5.1. Exponentes de Hurst usando el metodo R/SC

Elección del número mínimo de paquetes

La estimación de (2-52-2-57) se realiza implementando una rutina en Matlab. En el capítulo 2 se planteó que una de las debilidades del método R/SC es la dependencia que tiene el exponente de Hurst (H) respecto al tamaño de paquete, razón por la cual se tiene que elegir adecuadamente un número mínimo de paquete para estimar H . En algunos trabajos previos, que han estimado H para el caso de series de tiempo de variaciones diarias de temperatura en Colombia y series de tiempo sísmicas haciendo uso de los métodos R/SC, R/SG y DFA [31],[30],[29], se ha evidenciado la alta dependencia de H respecto al número de paquetes mínimo. Por lo anterior, para las series de tiempo de log-retornos diarios estudiadas en esta tesis, en esta subsección se realiza un análisis del comportamiento de H como función del número de paquete mínimo (a) y se presentan las curvas de comportamiento de los valores de H como función de a , es decir $H(a)$, para el caso en que los exponentes de Hurst sean estimados usando el método RS/C.

En la Figura 5-1 se muestran las curvas de $H(a)$ para cada una de las series de tiempo de log-retornos diarios estudiadas. Con el fin de obtener un H óptimo para todas las series, primero se toma como parámetro de elección al mínimo número de paquetes a , observando como cambia cada una de las curvas mostradas en la Figura 5-1 con respecto al valor de a . Si bien, para el caso de los índices DOW JONES y S&P/500, el comportamiento de las curvas

$H(a)$ es similar y para las dos curvas se evidencia la presencia de un mínimo, para las curvas $H(a)$ asociadas a los demás índices, se observa un comportamiento diferente, puesto que los valores de $H(a)$ se incrementan a medida que a aumenta. Lo anterior quiere decir, que si el número de paquetes aumenta entonces el tamaño del paquete disminuye y esto implica que la estadística para tamaño pequeño de paquete no es buena.

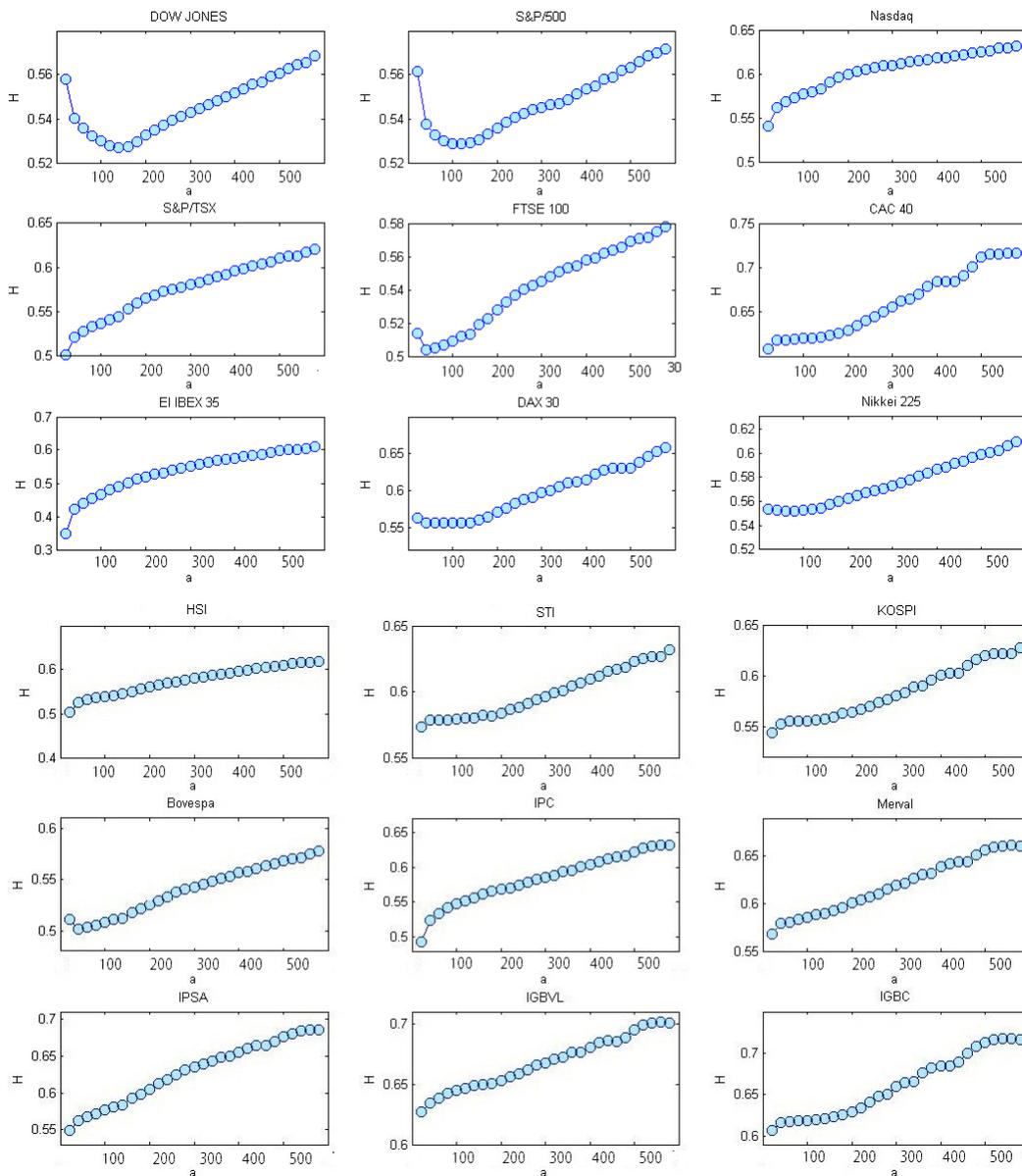


Figura 5-1 Relación entre el exponente de Hurts (H) y el número mínimo de paquetes (a) usando el método R/SC, para las 18 series de tiempo de log-retornos estudiadas. Cada curva $H(a)$ evidencia la dependencia del valor de H con respecto al valor de a .

A partir de las curvas $H(a)$ mostradas en la Figura 5-1, se observa que para el caso de DOW JONES un valor óptimo es $a = 160$ y para S&P/500 el valor óptimo es $a = 110$. La elección del número mínimo de paquetes se toma bajo los siguientes criterios: (i) Se determina un rango para el cual se encuentra el valor mínimo de la curva $H(a)$, por lo que teniendo en cuenta lo que sucede para el caso de los dos índices mencionados, los valores mínimos se encuentran en el rango $100 < a < 160$; (ii) dado que encontrar el rango anterior no es un argumento completamente suficiente para la elección adecuada del tamaño mínimo óptimo de paquete, lo que se hace es comparar el valor de H con los valores reportados en la literatura. En la referencia [16], para el caso del índice bursátil S&P500 con la misma ventana de observación considerada acá, fue reportado que el exponente de Hurst estimado usando el método R/SC es $H = 0,5400$. De la curva $H(a)$ para este índice, mostrada en la en la Figura 5-1, se puede observar que para el valor $a = 140$ el exponente de Hurst correspondiente es $H = 0,5364$, el cual es muy proximo al valor $H = 0,5400$. Por lo anterior, se toma como tamaño mínimo óptimo de paquete al valor $a = 140$, el cual se encuentra en el rango $(100, 160)$.

En la referencia [16] se reporta también que los valores para los exponentes de Hurst para las series de tiempo de log-retornos diarios de los siguientes índices son: S&P/500, $H = 0,54$; Nasdaq, $H = 0,57$; Nikkei 225, $H = 0,55$; IBEX 35, $H = 0,55$. Comparando con los resultados obtenidos y mostrados en la Figura 5-1, el tamaño mínimo de ventana $a = 140$ es el que mejor se ajusta para todos los casos, puesto que $H_{S\&P/500} = 0,5364$, $H_{Nasdaq} = 0,5845$, $H_{Nikkei225} = 0,5527$ y $H_{IBEX35} = 0,5591$. Para el caso del índice colombiano IGBC se reporta que $H = 0,64102$ [16], observando la curva $H(a)$ para este índice en la la Figura 5-1, se observa que para $a = 140$ se tiene que $H_{IGBC} = 0,6194$. También, para el caso del índice KOSPI el ajuste con $a = 140$ es adecuado.

Valores de H obtenidos

En la Tabla 5-1 se presentan los valores de H obtenidos usando la ventana optima $a = 140$, para las series de tiempo de log-retornos diarios de los 18 índices bursátiles estudiados.

Teniendo en cuenta que la HME implica que para un mercado eficiente el parámetro de autosimilitud debe ser $H = 0,5$, entonces a partir de los resultados obtenidos en la Tabla 5-1, puesto que $H > 0,5$ para todos los casos, se observa que los mercados bursátiles considerados se comportan como mercados no eficientes. Debido a que cada una de las series de tiempo de log-retornos diarios tiene asociada un exponente de autosimilitud H , cuyo valor se encuentra en el rango $0,510 < H < 0,650$, entonces estas series presentan memoria persistente o efectos de memoria de largo rango. Lo anterior significa que para estas series de tiempo, las variaciones diarias de los índices que ocurren en el pasado se encuentran correlacionadas con las variaciones que ocurren en el futuro, cómo es típico en las series de tiempo financieras.

A continuación se realiza una clasificación de los índices bursátiles estudiados, a partir de considerar para que casos los valores de H son mas cercanos a 0, 5:

Tabla 5-1 Exponentes de Hurst estimados usando el método R/SC, tomando como tamaño óptimo mínimo de paquete el valor $a = 140$, para las series de tiempo de log-retornos diarios de los 18 índices bursátiles estudiados.

ÍNDICE	H(R/SC)
DOW JONES	0.5316
S&P500	0.5364
Nasdaq	0.5845
S&P/TSX	0.5331
FTSE 100	0.5208
CAC 40	0.5367
IBEX 35	0.5591
DAX 30	0.5594
Nikkei 225	0.5527
HSI	0.5346
STI	0.5828
KOSPI	0.5573
Bovespa	0.5147
IPC	0.5390
Merval	0.5806
IPSA	0.5720
IGBVL	0.6424
IGBC	0.6194

- En Estados Unidos, los índices de S&P/500 y DOW JONES presentan exponentes de Hurst cercanos a $H = 0,5$, indicando que los mercados asociados son aproximadamente *eficientes*.
- En Europa, los índices que presentan un H muy cercano a $0,5$ son FTSE 100 y CAC40, de tal forma que el segundo de los índices presenta un valor de H inferior a los estimados para los dos índices estadounidenses mencionados en el ítem anterior.
- En Asia, únicamente el mercado bursatil asociado al índice HSI de Hong Kong se considera cercano a la eficiencia, dado que para este caso $H \approx 0,5$.
- En Latinoamérica, los índices Bovespa e IPC tienen asociados exponentes de Hurst cercanos a $0,5$, indicando que sus mercados asociados son cercanos a la eficiencia. Es importante resaltar que el primero de estos índices presenta un H que es el menor a todos los estimados para los índices estudiados.

En conclusión, de acuerdo con la HME y teniendo en cuenta los valores de H más cercanos a 0,5, se encuentra que los mercados bursátiles más cercanos a la eficiencia son los asociados con los índices estadounidenses S&P/500 y DOW JONES, con los índices europeos FTSE 100 y CAC40, con el índice asiático HSI y con los índices latinoamericanos Bovespa e IPC.

5.2. Exponentes de Hurst usando el método R/SG

La estimación de H implementando la metodología R/SG se realiza a partir de (2-62-2-63) mediante una rutina en Matlab. Otra de las debilidades del método R/SC discutidas el capítulo 2 es la relacionada con la estimación de H para series de tiempo cortas. Lo anterior quiere decir, para el caso en que el número de datos n de la serie de tiempo sea demasiado pequeño, la estimación de H pierde precisión debido a que los tamaños de las muestras son demasiado pequeños y la estadística no puede ser del todo confiable. Por lo tanto, en esta subsección se estima el exponente H usando el método R/SG, el cual es una modificación del método R/SC para el caso en que la longitud de la serie de tiempo sea corta ($n < 5,000$). Por otra parte, el método RS/G también evidencia la variabilidad de H respecto al número de paquetes mínimo, razón por la cual en esta subsección también se sigue un procedimiento similar al empleado en el método R/SC, es decir se estima el tamaño mínimo de paquete a partir del comportamiento de la curva $H(a)$ para las series de tiempo estudiadas y se comparan los valores obtenidos con los reportados en la literatura. De acuerdo al análisis que se realiza en esta subsección, se obtiene nuevamente que el tamaño mínimo de paquete óptimo es $a = 140$.

Valores de H obtenidos

En la Tabla 5-2 se presentan los valores de H obtenidos usando la ventana óptima $a = 140$, para las series de tiempo de log-retornos diarios de los 18 índices bursátiles estudiados. De acuerdo con los resultados obtenidos en la Tabla 5-2 los valores de H estimados usando el método R/SG difieren de los estimados usando el método R/SC, aún para las series de tiempo que tienen un número de datos mayor a 5,000. Para el caso de series de tiempo cortas, tales como las series de tiempo de log-retornos diarios de los índices bursátiles IBEX35 con 4955 datos, DAX30 con 3441 datos, KOSPI con 4076 datos, Merval con 4076 datos, IPSA con 4098 datos, IGBVL con 4093 datos, e IGBC con 2915 datos, se espera que los valores de H estimados usando el método R/SG sean más precisos que los estimados usando el método R/SC. Los valores de H para las series de tiempo de log-retornos estudiadas cambian de la siguiente manera: Se incrementa para el índice DAX30; toma el mismo valor para los índices IBEX35 e IGBVL; disminuye para los índices KOSPI, Merval, IPSA e IGBC. Para el caso particular del índice colombiano IGBC, la disminución en la estimación de H es considerable debido a que esta es la serie de tiempo más corta de todas las estudiadas, es decir hay una sobrestimación de su valor obtenidos a través del método R/SC. El anterior hecho es una

Tabla 5-2 Exponentes de Hurst estimados usando el método R/SG, tomando como tamaño óptimo mínimo de paquete el valor $a = 140$, para las series de tiempo de log-retornos diarios de los 18 índices bursátiles estudiados.

ÍNDICE	H(R/S G)
DOW JONES	0.5496
S&P500	0.5576
Nasdaq	0.5658
S&P/TSX	0.5026
FTSE 100	0.5213
CAC 40	0.5525
IBEX 35	0.5519
DAX 30	0.6003
Nikkei 225	0.5567
HSI	0.5001
STI	0.5809
KOSPI	0.5481
Bovespa	0.5122
IPC	0.4820
Merval	0.5587
IPSA	0.5422
IGBVL	0.6417
IGBC	0.5423

manifestación de la importancia de estimar H para series de tiempo cortas haciendo uso del método R/SG.

Por otra parte, a partir de los valores de H que se observan en la Tabla 5-2, nuevamente se concluye que la mayoría de los mercados bursátiles considerados se comportan como no eficientes, es decir las series de tiempo de log-retorno diarios presentan un H cuyo valor se encuentra entre $0,5122 < H < 0,6417$, con lo cual las series de tiempo de log-retorno diarios para estos índices presentan memoria de largo rango. Para el caso particular de los índices HST, con un exponente $H = 0,5001$, y SP/TSX, con un exponente $H = 0,5026$, los mercados asociados se pueden considerar como eficientes, debido a que sus exponentes H son casi iguales a 0,5.

5.3. Exponentes de Hurst usando el método DFA

Elección del número mínimo de paquetes

La estimación (2-64-2-68) se llevó a cabo implementando tres rutinas en Matlab, de tal forma que para cada una se realizó un ajuste usando un polinomio de grado diferente $m = 0, 1, 2$. Asimismo, al implementar el método DFA0 para estimar H fue necesario nuevamente la elección de un tamaño mínimo de paquete óptimo (a), a partir de analizar el comportamiento de H en función de a , tal como se realizó en las secciones anteriores, empleando dos criterios: Primero, mediante la observación de un valor mínimo en la Figura 5-2 cuyos valores se encuentran entre el rango $90 < H < 200$; segundo, mediante la comparación de estos valores de H con los reportados en la literatura. De acuerdo con el estudio anterior, se toma como tamaño mínimo óptimo de paquete a $a = 140$, el mismo empleado para los métodos R/SC y R/SG. Este es un importante resultado en virtud de corroborar o comprobar los resultados de estimar H por cada uno de los métodos: R/SC, R/SG y DFAM.

Por otro lado, como se mencionó en el capítulo 2, el método DFAM con $m = 0$ es generalizado para $m = 1, 2, \dots, n$ con el fin de remover tendencias. Lo anterior quiere decir, que con el método DFAM se puede estimar H a partir de realizar un análisis de fluctuaciones con no estacionaridades.

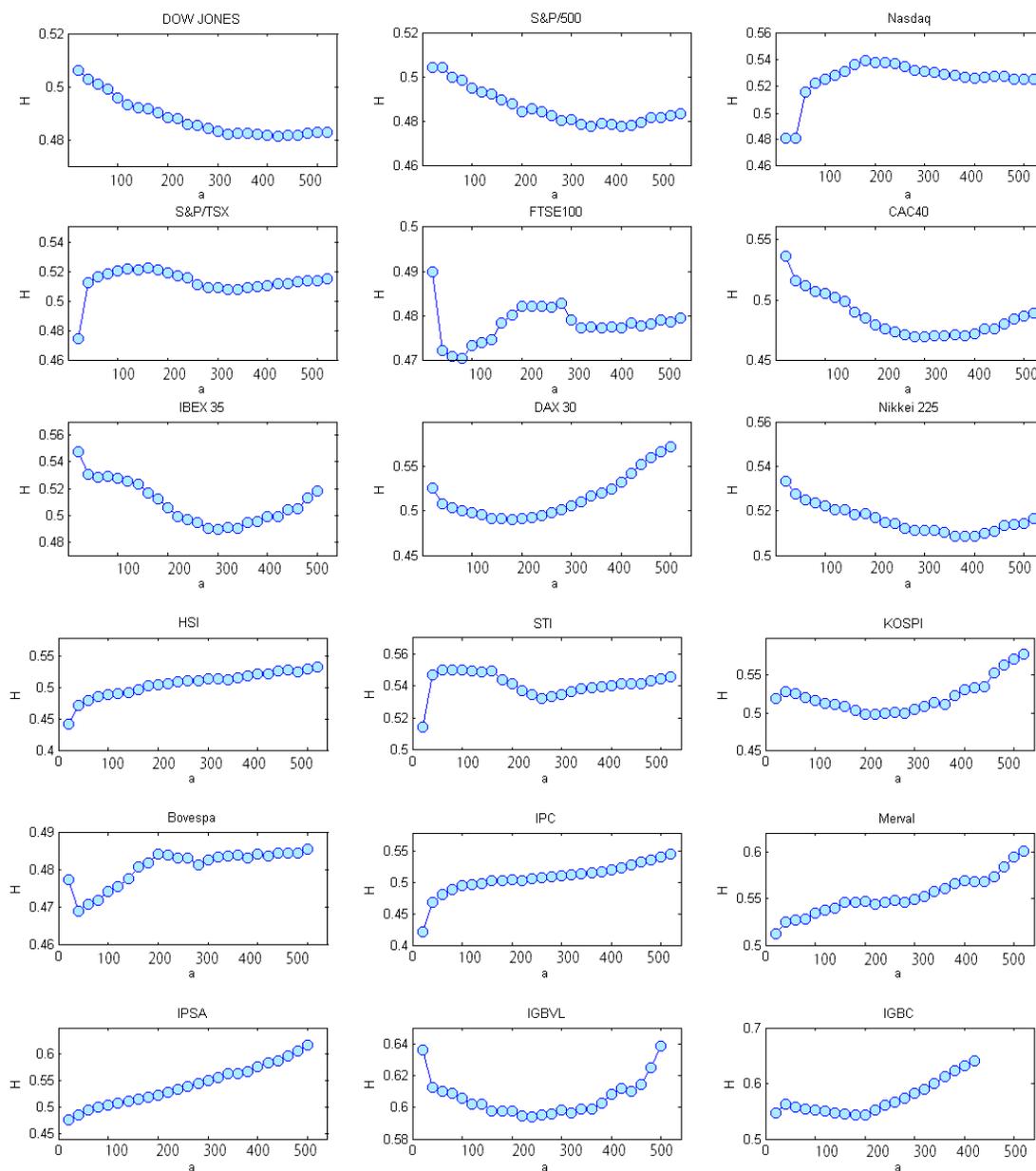


Figura 5-2 Relación entre H y el número mínimo de paquetes a usando DFA para los 18 índices bursátiles estudiados. Cada uno de los índices bursátiles, evidencian la dependencia del valor del exponente H con respecto al tamaño de ventana.

Valores de H obtenidos

En la Tabla 5-3 se presentan los valores de H usando el tamaño óptimo de paquete $a = 140$ para las series de tiempo de log-retornos diarios de los 18 índices bursátiles estudiados, usando

Tabla 5-3 Exponentes de Hurst estimados usando los métodos DFA0, DFA1 y DFA2 tomando como tamaño óptimo mínimo de paquete el valor $a = 140$, para las series de tiempo de log-retornos diarios de los 18 índices bursátiles estudiados.

ÍNDICE	$H_{(DFA0)}$	$H_{(DFA1)}$	$H_{(DFA2)}$
DOW JONES	0.4958	0.4952	0.4827
S&P500	0.4989	0.4993	0.4871
Nasdaq	0.5228	0.5426	0.5456
S&P/TSX	0.5184	0.5303	0.5278
FTSE 100	0.4705	0.4739	0.4818
CAC 40	0.5116	0.4958	0.4827
IBEX 35	0.4544	0.5122	0.5015
DAX 30	0.4999	0.4915	0.4872
Nikkei 225	0.5235	0.5184	0.5107
HSI	0.4854	0.4986	0.5081
STI	0.5502	0.5595	0.5556
KOSPI	0.5202	0.5146	0.5093
Bovespa	0.4721	0.4708	0.4786
IPC	0.4896	0.5076	0.5152
Merval	0.5274	0.5502	0.5506
IPSA	0.5109	0.5213	0.5284
IGBVL	0.6091	0.6070	0.5973
IGBC	0.5548	0.5359	0.5384

el método DFAM con $m = 0, 1, 2$

De acuerdo con los resultados presentados en la Tabla 5-3, no se encuentra presencia de tendencias para ninguna de las serie de tiempo de log-retornos de los 18 índices bursátiles estudiados, lo cual significa que no se encuentra presencia de cambios periódicos en el exponente que sigan un patrón de cambio, es decir que el valor de H implique aumento-disminución-aumento o disminución-aumento-disminución. Si se tuviera algún patrón de cambio de H como los anteriores, ésto indicaría la presencia de tendencias en la serie de tiempo.

Se observa en la Tabla 5-3 que los valores de H se encuentran en el rango $0,4544 < H < 0,6091$. Tal como se mencionó en el capítulo 2, el valor que toma H permite caracterizar el tipo de memoria de la serie de tiempo. A continuación se hace una clasificación de la memoria que tienen las series de tiempo de log-retornos diarios de los índices bursátiles estudiados, a partir de considerar los valores que toma H : Para $H > 0,5$, memoria persistente; para $H < 0,5$, memoria antipersistente. Por lo anterior:

- Series de tiempo antipersistentes: FTSE100 y Bovespa

- Series de tiempo antipersistente con exponentes H cercanos a 0,5: DOW JONES; S&P500; HSI y; DAX30.
- Series de tiempo persistentes: Nasdaq; S&P/TSX; CAC40; Nikkei 225; STI; KOSPI; Merval; IPSA; IGBVL e IGBC.
- Series de tiempo persistentes, antipersistentes con exponentes H cercanos a 0,5: IBEX35; HSI e IPC.

En resumen, al implementar el método DFAM con el fin de estimar H con un tamaño mínimo óptimo de $a = 140$, se encuentran 10 índices bursátiles persistentes con memoria de largo plazo, corroborando la característica general de la mayoría de los mercados financieros. Cabe resaltar que en este grupo se encuentran cuatro índices latinoamericanos, uno estadounidense, uno europeo y dos asiáticos.

Por último, para cada una de las series de tiempo de log-retornos de los 18 índices bursátiles, en la siguiente sección a partir de los valores de H estimados usando los métodos R/SC, R/SG y DFAM, se estima el valor promedio de H y entonces se calcula la dimensión fractal (D) para cada uno de los mercados.

5.4. Cálculo de la dimensión fractal a partir de H

La Tabla (5-4) presenta el valor de la dimensión fractal D para las series de log-retornos de los índices estudiados, haciendo uso de la expresión (2-51), donde la dimensión espacial n es 1, con lo cual la relación entre la dimensión fractal D y H es $D = 2 - H$. De acuerdo con lo anterior, si se conoce la dimensión fractal D se puede calcular H , o inversamente si se conoce el H se puede calcular la dimensión fractal D . Como ya fue mencionado, esta importante relación permite conectar una propiedad local (dimensión fractal D) y una propiedad global (valor de H). Para los índices bursátiles estudiados, en la Tabla 5-4 se muestra la dimensión fractal calculada a partir del valor promedio de H ($H_{promedio}$), usando los cinco valores de H estimados en las secciones anteriores a través de los métodos R/SC, R/SG, DFA0, DFA1 y DFA2. Debido a que D se calcula a partir de H , entonces se puede decir que H cuantifica la dinámica caótica de las series de tiempo, lo cual quiere decir que la complejidad de un sistema se puede caracterizar a partir de la dimensión de la correlación característica que está relacionada con los procesos que siguen una ley de potencias.

De acuerdo a lo presentado en la Tabla 5-4 y teniendo en cuenta que el valor promedio de $H_{promedio}$ presenta la caracterización de memoria para las series de tiempo de log-retornos diarios de los índices bursátiles estudiados, se observa que:

- $H_{promedio} < 0,5$ para FTSE 100 y Bovespa, implicando que estas series de tiempo son antipersistentes, de manera que la función de correlación entre los incrementos es negativa, siendo la dimensión fractal mayor a 1,5.

Tabla 5-4 Exponente de Hurst promedio $H_{promedio}$ y dimensión fractal D estimados con un valor de tamaño óptimo de paquete $a = 140$, para las series de tiempo de log-retornos diarios de los 18 índices bursátiles estudiados.

ÍNDICE	$H_{promedio}$	D
DOW JONES	0.5109	1.4890
S&P500	0.5158	1.4841
Nasdaq	0.5522	1.4477
S&P/TSX	0.5224	1.4775
FTSE 100	0.4936	1.5063
CAC 40	0.5158	1.4841
IBEX 35	0.5158	1.4841
DAX 30	0.5276	1.4723
Nikkei 225	0.5324	1.4676
HSI	0.5053	1.4946
STI	0.5658	1.4342
KOSPI	0.5299	1.4701
Bovespa	0.4896	1.5103
IPC	0.5066	1.4933
Merval	0.5535	1.4465
IPSA	0.5349	1.4650
IGBVL	0.6195	1.3805
IGBC	0.5728	1.4272

- $H_{promedio} > 0,5$ para DOW JONES, S&P500, Nasdaq, S&P/TSX, CAC40, IBEX35, DAX30, Nikkei225, HSI, STI, KOSPI, IPC, Merval, IPSA, IGBVL y IGBC, implicando que estas series de tiempo son persistentes, de manera que la función de correlación entre los incrementos es positiva, siendo la dimensión fractal menor a 1,5.

6 Estudio de la variación en el tiempo de las series de tiempo de log-retornos

En este capítulo se presentan los resultados provenientes de la estimación de la variación en el tiempo del exponente de Hurst local ($H(t)$) y de la volatilidad local ($Var(t)$), para cada una de las series de tiempo de log-retornos diarios estudiadas, considerando una ventana de tiempo constante (correspondiente a 500 datos, es decir aproximadamente dos años), la cual va corriendo hasta abarcar toda la ventana de observación. Para cada serie de tiempo local de log-retornos, con tamaño de 500 datos, el exponente de Hurst H se estima usando los métodos R/SG y DFA, mientras que la volatilidad se estima calculando la varianza. Finalmente, para cada uno de los índices bursátiles estudiados, se obtiene la distribución de frecuencias para los exponentes de Hurst durante los últimos diez años.

6.1. Variación en el tiempo del exponente de Hurst local

$$H(t)$$

En esta subsección se presentan los resultados de la variación en el tiempo del exponente de Hurst local $H(t)$ para cada una de las series de log-retornos diarios estudiadas. De acuerdo con lo discutido en el capítulo 2, el estudio de $H(t)$ no ha sido ampliamente referenciado en la literatura y no se cuenta con un procedimiento estándar para su estimación. Debido a lo anterior, a continuación se plantea un procedimiento que permite una adecuada estimación de $H(t)$. Este procedimiento se basa en los siguientes pasos metodológicos:

1. Elección del método para obtener $H(t)$. En el capítulo anterior se estimó H usando los métodos R/SC, R/SG, DFA, DFA1 y DFA2, considerando la ventana de observación completa, para cada una de las series de tiempo de log-retornos diarios. Ahora, con el fin de obtener la variación del exponente de Hurst local en el tiempo $H(t)$, se requiere una ventana de observación constante pequeña, razón por la cual método R/SC no resulta apropiado para estimar localmente a H , pues ya se mostró que este método no conduce a una buena estimación de H cuando la serie de tiempo es pequeña. Por otra parte, teniendo en cuenta que los resultados del capítulo anterior mostraron que las series de tiempo estudiadas no presentan tendencia, entonces no es necesario usar los métodos DFA1 y DFA2 para estimar a H , pues el uso de estos métodos se justifica si

las series de tiempo estudiadas presentan tendencias. Por lo anterior, se concluye que para el propósito de obtener $H(t)$, los métodos mas apropiados son el R/SG y el DFA.

2. Elección de la ventana de observación constante. Como se mencionó en el capítulo 2, en la literatura se encuentran estudios sobre $H(t)$ encaminados a probar la eficiencia de los mercados, para los cuales las ventanas de observación constantes son de diferente tamaño. Por ejemplo, en la referencia [32] se usa una ventana de observación constante de tres años $n \approx 750$, mientras que en la referencia [16], esta ventana de observación es de cuatro años $n \approx 1009$. Lo anterior es un ejemplo de que no existe un tamaño estándar para la elección de la ventana de observación constante. Con el propósito de elegir el mas apropiado tamaño de la ventana de observación para el estudio que se presenta en este capítulo y en el siguiente, inicialmente se realizó una variación de su tamaño en intervalos de cien datos, desde $n = 200$ hasta $n = 1000$. A partir de exáminar las gráficas de $H(t)$ (que fueron obtenidas usando los métodos R/SG y DFA), se encontró que la ventana de $n = 500$ presenta el mejor comportamiento y reacción respecto a la presencia de las crisis financieras. Por esta razón, se ha elegido $n = 500$ (aproximadamente 2 años) como la ventana de observación constante. Una vez se ha realizado lo anterior, esta ventana constante se hace correr sobre cada una de las series de log-retornos diarios, hasta abarcar toda la ventana de observación respectiva.
3. Elección del número mínimo de paquetes. Una vez la ventana de observación constante $n = 500$ ha sido elegida, se realiza un análisis del comportamiento de H cómo función del paquete mínimo (a), de la misma forma a como se realizó en capítulo anterior, con el fin de encontrar un mínimo para las gráficas $H(a)$. En concordancia con lo encontrado en el capítulo anterior, se toma como tamaño mínimo óptimo de paquete al valor $a = 14$, para una ventana de observación de $n = 500$.
4. Unificación de fechas para todas las series de tiempo. Dado que los mercados bursátiles en todos los países del mundo funcionan durante todo el año, salvo los días de fin de semana y festivos no laborables de entre semana, entonces es necesario realizar una depuración de datos con el fin de tener series de tiempo de log-retornos diarios de los diferentes índices bursátiles, que sean comparables en fechas y tamaño, o sea que abarquen los mismos días del año y cuyo tamaño sea de 500 datos. Esta tarea implicó, para todas las series de tiempo estudiadas, no considerar los log-retornos de los días que fueran laborables para algunos mercados pero festivos para otros. Una vez que ha sido realizada esta depuración de datos, se procede a obtener $H(t)$.

Estimación de $H(t)$ a partir de R/SG y DFA

La estimación de 2-62-2-63 usando R/SG, y de (2-64-2-68) usando DFA, se realiza implementando una rutina en Matlab, en la cual la ventana de observación constante de $n = 500$

se hace correr sobre la ventana completa de observación. Lo anterior quiere decir, por ejemplo, que si la ventana completa de observación tiene un tamaño de 7000 datos, entonces al hacer correr la ventana de observación local constante de $n = 500$ datos, como consecuencia se van a obtener 6500 valores de H para tiempos diferentes, cada uno correspondiente a la estimación de H en cada ventana local de observación constante.

De acuerdo con lo discutido en el capítulo 2, los mercados financieros presentan una importante característica en su dinámica, relacionada con la presencia de importantes fluctuaciones del valor del correspondiente índice bursátil durante el cierre del mercado. Como se mostró en el capítulo 4, una gran fluctuación negativa del valor del índice es manifestación de un desastre financiero, que recibe el nombre de crash o crisis financiera. En las Figuras **6-1-6-4**, a partir del comportamiento de $H(t)$, se observan las consecuencias de dichas fluctuaciones para los 18 índices bursátiles estudiados, en donde se pueden identificar con claridad la crisis financiera del famoso *lunes negro* y la *crisis hipotecaria*. Lo anterior quiere decir que las variaciones del exponente de Hurst local y el patrón de comportamiento de este exponente en los días vecinos a la fecha de la crisis es un indicador de la ocurrencia de la crisis. Es claro que para todos los mercados bursátiles estudiados, las dos crisis financieras mencionadas afectaron importantemente dichos mercados, lo cual se manifiesta en las Figuras **6-1-6-4** a través de las variaciones locales de H durante tiempos vecinos a la ocurrencia de las crisis. En las Figuras **6-1-6-4** se presentan los resultados de la estimación del exponente de Hurst local $H(t)$ para las series de tiempo de log-retornos diarios de los 18 índices bursátiles estudiados, a partir de los métodos R/SG y DFA.

De acuerdo con los resultados presentados en las Figuras **6-1-6-4**, se observa que el exponente de Hurst local para cada uno de los 18 índices bursátiles estudiados no permanece constante, por el contrario varía considerablemente con el transcurrir del tiempo. De acuerdo con lo discutido en el capítulo 2, el valor de H tendría que ser constante a medida que varía el tiempo para una serie de tiempo de log-retornos diarios asociada a un índice bursátil cuyos cambios siguieran un movimiento browniano fraccional. Pero las evoluciones en el tiempo de los exponentes de Hurst locales, mostradas en las Figuras **6-1-6-4**, indican que no se cumple esta condición. De hecho, lo observado evidencia que H local tiene un comportamiento muy dinámico respecto al tiempo.

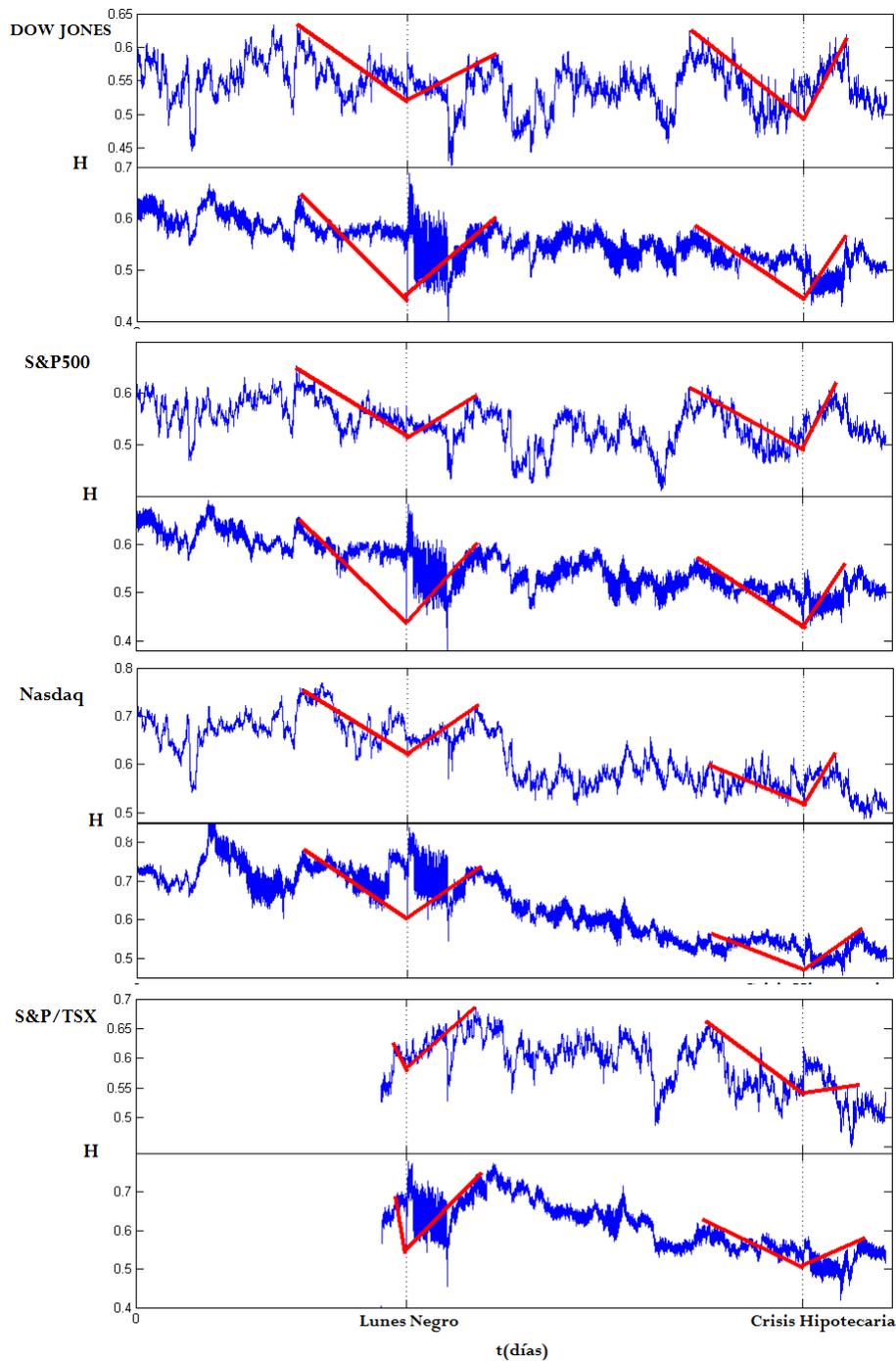


Figura 6-1 Estimación de $H(t)$ para los cuatro índices bursátiles norteamericanos DOW JONES, S&P/500, Nasdaq y S&P/TSX, a partir de los métodos R/SG (superior) y DFA (inferior). Para cada uno de los índices, se evidencia la dependencia de H con el tiempo. Adicionalmente se señala con una línea roja, la tendencia de comportamiento de H cerca de la crisis del lunes negro y de la crisis hipotecaria.

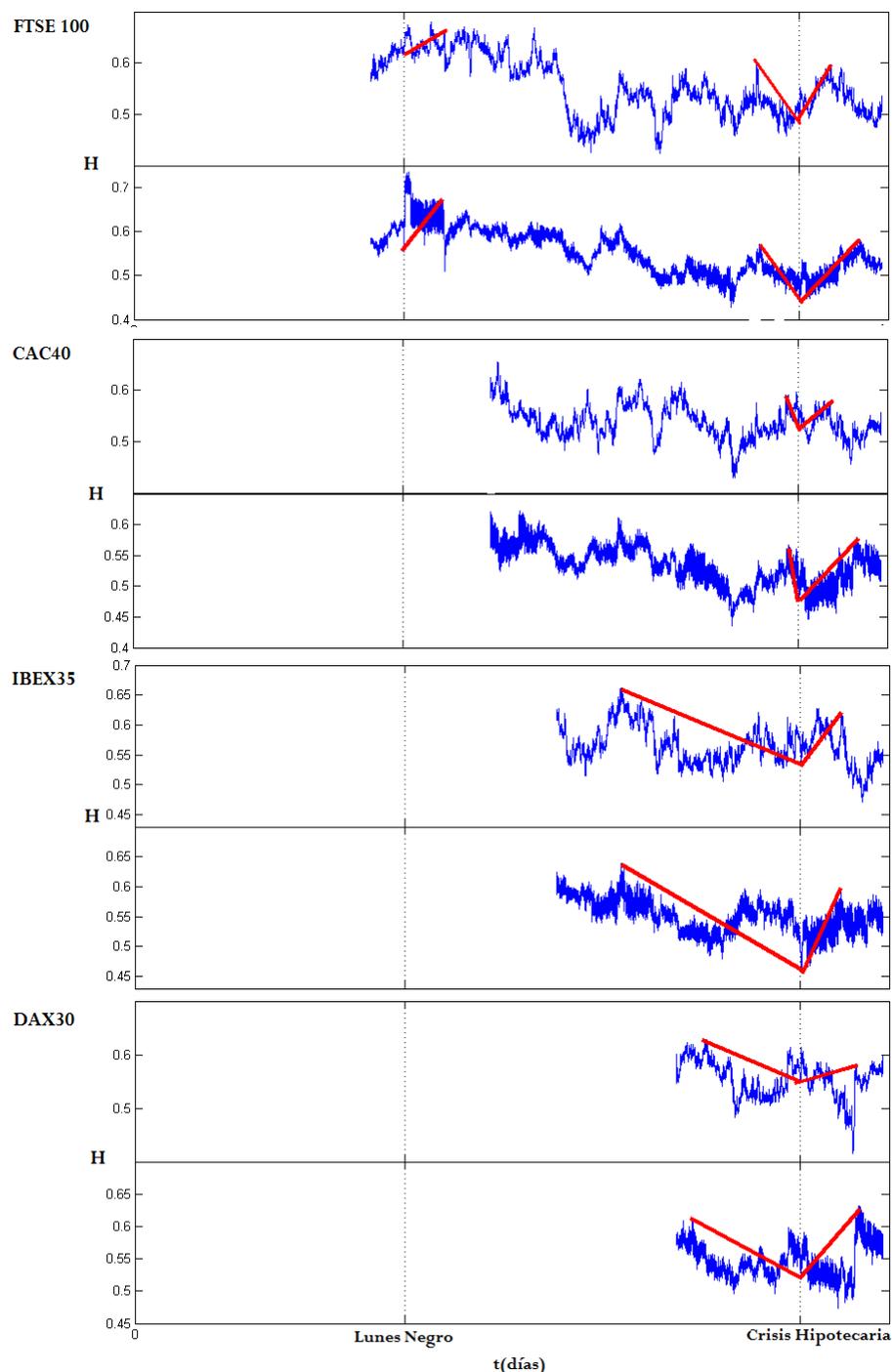


Figura 6-2 Estimación de $H(t)$ para los cuatro índices bursátiles europeos DFTSE 100, CAC 40, IBEX 35 y DAX 30, a partir de los métodos R/SG (superior) y DFA (inferior). Para cada uno de los índices, se evidencia la dependencia de H con el tiempo. Adicionalmente se señala con una línea roja, la tendencia de comportamiento de H cerca de la crisis del lunes negro y de la crisis hipotecaria.

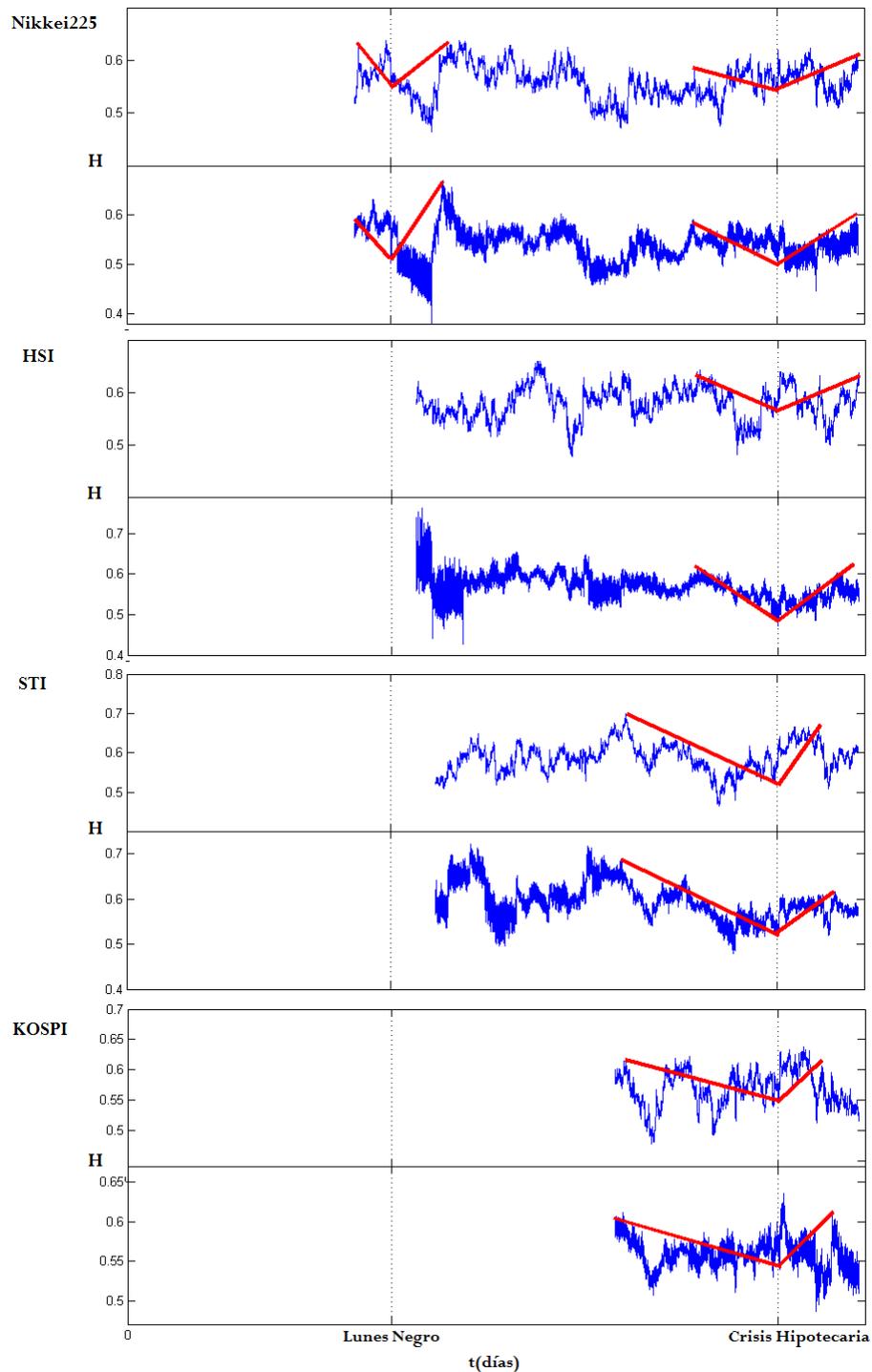


Figura 6-3 Estimación de $H(t)$ para los cuatro índices bursátiles asiáticos Nikkei 225, HSI, STI y KOSPI; a partir de los métodos R/SG (superior) y DFA (inferior). Para cada uno de los índices, se evidencia la dependencia de H con el tiempo. Adicionalmente se señala con una línea roja, la tendencia de comportamiento de H cerca de la crisis del lunes negro y de la crisis hipotecaria.

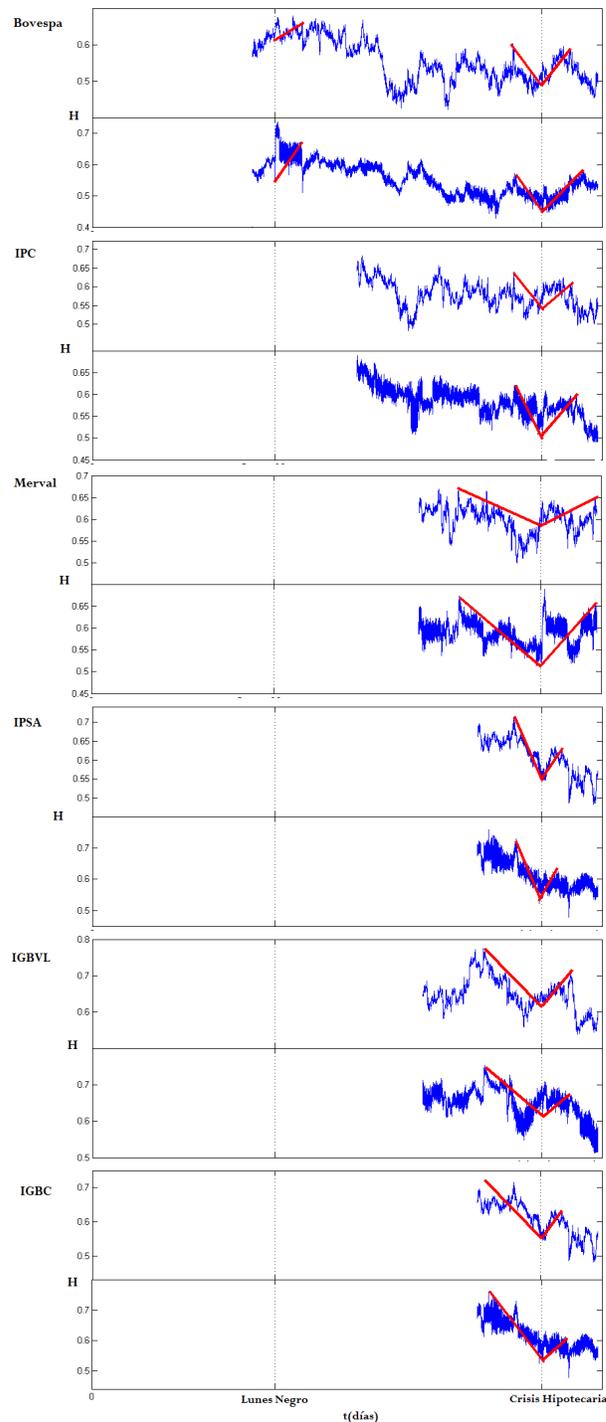


Figura 6-4 Estimación de $H(t)$ para los seis índices bursátiles latinoamericanos Bovespa, IPC, Merval, IPSA, IGBVL e IGBC, a partir de los métodos R/SG (superior) y DFA (inferior). Para cada uno de los índices, se evidencia la dependencia de H con el tiempo. Adicionalmente se señala con una línea roja, la tendencia de comportamiento de H cerca de la crisis del lunes negro y de la crisis hipotecaria.

Para explicar el anterior comportamiento, en la literatura se ha propuesto un modelo llamado movimiento browniano multifractal (multifractal) (mfBm), introducido inicialmente por Lévy y Vehe [132], en el cual es posible que exista una variación de H con respecto al tiempo. Este modelo propone una función de Hölder $H(t)$, entendida como una función continua en el intervalo $t \in (0, 1)$, con un exponente de Hölder $\beta > 0$, tal que para cualquier $0 > t$ se tiene $0 < H(t) < \min(1, \beta)$ [32][132]. Además, H_t es un parámetro funcional del movimiento browniano $\{W_{H_t}(t), 0 > t\}$, el cual es un proceso gaussiano definido como [132]:

$$W_{H_t}(t) = \frac{1}{\Gamma(H_t + 1/2)} \int_{-\infty}^0 \left[(t-s)_+^{H_t-1/2} - (-s)_+^{H_t-1/2} \right] dB(s), \quad (6-1)$$

donde $\Gamma(X)$ es la función gama, $(x)_+$ es x si $x > 0$ y cero en otro caso, y $B(t)$ denota el movimiento browniano normal. A pesar de que no es objeto de estudio en esta tesis dar una descripción detallada de $H(t)$, es importante mencionar que si se quiere estudiar la evolución de la dinámica de un sistema en el tiempo, se requiere disponer de un parámetro relacionado con una propiedad observada (H) que también evolucione con el tiempo.

Por otro lado, el usar dos métodos diferentes para obtener $H(t)$ permite realizar una corroboración de los resultados obtenidos, pues el comportamiento de $H(t)$ en ambos casos fue similar e independiente del método usado para estimarlo, tal como se observa en las Figuras **6-1-6-4**. Sin embargo, el comportamiento que tiene $H(t)$ en las vecindades y durante las fechas de las crisis financieras, nos permite observar que el método DFA resulta mas apropiado en el propósito de caracterizar las crisis financieras a través del comportamiento de $H(t)$.

A través de la línea roja dibujada en la curva de $H(t)$, para cada uno de los 18 índices bursátiles, se quiere mostrar la tendencia que tiene el exponente H local cerca de las crisis financieras del lunes negro e hipotecaria. De acuerdo con lo anterior, se encuentra que para la mayoría de los índices la forma de variación del H local en momentos de grandes fluctuaciones del cierre del índice es la misma. El tipo de tendencia de variación de $H(t)$, observada en vecindades a los tiempos en que ocurren las crisis financieras, se manifiesta para la mayoría de los índices de la siguiente manera: (i) se tiene una tendencia de disminución del valor del H local antes de la ocurrencia de la crisis; (ii) después de ocurrida la crisis, aparecen subidas y bajadas abruptas del valor del H local (lo cual es mucho mas pronunciado para la crisis del lunes negro); (iii) para tiempos bastante posteriores a los tiempos en los que ocurren las crisis, se tiene una tendencia de incremento significativo y progresivo del valor del H local. Este último hecho en el comportamiento del valor del H local, puede ser entendido en términos de la memoria existente en la serie de tiempo de log-retornos diarios del índice, es decir se puede plantear que antes de una crisis financiera la memoria disminuye, en algunos casos con un valor de H que tiende 0,5 (lo cual se entiende como una tendencia a la eficiencia) y posteriormente y para tiempos muy cercanos a la ocurrencia de la crisis financiera, se observan fluctuaciones abruptas de la memoria. Finalmente, se presenta un incremento gradual y progresivo en la memoria, para tiempos bastante posteriores a la ocurrencia de la crisis. Es importante destacar que el $H(t)$ obtenido, a partir del uso del método DFA, definitivamente

Tabla 6-1 Resumen de los $H(t)$ para los índices bursátiles estudiados. En la segunda y tercera columna se presenta el intervalo en que varía $H(t)$ usando los métodos R/SG y DFA, respectivamente, y en la cuarta y la última columna el ancho de cada intervalo.

ÍNDICE	$H(t)_{R/SG}$	$H(t)_{DFA}$	Ancho $H(t)_{R/SG}$	Ancho $H(t)_{DFA}$
DOW JONES	0,49-0,55	0,41-0,68	0,06	0,27
S&P500	0,51-0,63	0,38-0,68	0,12	0,30
Nasdaq	0,48-0,76	0,45-0,86	0,28	0,41
S&P/TSX	0,45-0,68	0,41-0,75	0,23	0,34
FTSE 100	0,51-0,65	0,42-0,73	0,14	0,31
CAC 40	0,44-0,56	0,43-0,62	0,12	0,19
IBEX 35	0,47-0,66	0,45-0,63	0,19	0,18
DAX 30	0,41-0,64	0,46-0,64	0,43	0,18
Nikkei 225	0,49-0,59	0,41-0,63	0,10	0,22
HSI	0,46-0,70	0,42-0,77	0,24	0,35
STI	0,46-0,70	0,48-0,63	0,24	0,15
KOSPI	0,48-0,63	0,49-0,61	0,15	0,12
Bovespa	0,42-0,68	0,43-0,73	0,26	0,30
IPC	0,48-0,68	0,49-0,69	0,20	0,20
Merval	0,50-0,67	0,57-0,68	0,17	0,17
IPSA	0,51-0,69	0,51-0,72	0,18	0,21
IGBVL	0,53-0,77	0,51-0,73	0,24	0,22
IGBC	0,48-0,71	0,47-0,76	0,23	0,29

permite apreciar agrupamientos (clusters) de fluctuaciones positivas y negativas del H local, después de que ocurrieron las dos crisis financieras (comportamiento que es mucho mas notable para la crisis del lunes negro).

En la Tabla **6-1** se presenta un resumen de las variaciones de $H(t)$ usando los métodos R/SG y DFA. Como se mencionó anteriormente, el uso de estos dos métodos nos ha permitido corroborar que el patrón con que varia $H(t)$ no depende del método usado para estimar el H local. Adicionalmente, las variaciones de $H(t)$ en tiempos vecinos a las fechas en que ocurrieron las crisis financieras del lunes negro e hipotecaria, son mas pronunciadas cuando los valores de H local se estiman usando el método DFA. Por esta razón, en la Tabla **6-1** se encuentra, para la mayoría de los índices estudiados, que la variación del exponente de Hurst local durante las crisis financieras es mayor que la variación promedio 0,25, por el contrario la variación del H local usando el método R/SG es menor que la variación promedio 0,19. Lo anterior quiere decir, que a pesar de encontrar un comportamiento similar para los $H(t)$ obtenidos con los dos métodos, las variaciones de los valores de los H locales en cada caso

es diferente, siendo estas variaciones mas pronunciadas al usar el método DFA. Finalmente, se aprecia que los valores de los exponentes locales de Hurst durante los últimos años, para todos los índices bursátiles, se acercan al valor $H = 0,5$, correspondiente al que se tendría para mercados financieros altamente eficientes (o idealizados). Por lo anterior, se observa que los mercados financieros asociados a los índices bursátiles estudiados en esta tesis, son mercados que están tendiendo a la eficiencia, particularmente durante los últimos diez años. Por esta razón, en la siguiente subsección se introduce una forma práctica de cuantificar la eficiencia para los índices bursátiles estudiados, a partir de la realización de un ajuste gaussiano de las distribuciones de frecuencia de los valores de H locales correspondientes a los últimos diez años.

Distribución de frecuencias de $H(t)$

En las Figuras **6-5-6-8** se muestran las distribuciones de frecuencia de los valores del exponente de Hurst local obtenidos usando los métodos R/SG y DFA durante los últimos diez años. Estas distribuciones de frecuencia pueden ser ajustadas a distribuciones gaussianas. De acuerdo con los resultados presentados en las Figuras **6-5-6-8**, se observa que las distribuciones de frecuencias de los valores del exponente de Hurst local de los últimos diez años se ajustan a distribuciones gaussianas. Como se mencionó anteriormente, con los ajustes observados en las Figuras **6-1-6-4**, se confirma la idea de que durante los últimos años los mercados bursátiles asociados a los índices estudiados tienden a la eficiencia. Lo anterior quiere decir, que los valores del exponente de Hurst local H se están acercando en los últimos años al valor 0,5, tal como se observa en las Figuras **6-1-6-4**. Esta tendencia a la eficiencia está caracterizada a través del comportamiento de los valores del exponente de autosimilitud. Por consiguiente, si las distribuciones de frecuencias de los valores de los H locales se ajustan a distribuciones gaussianas, quiere decir que los mercados bursátiles respectivos estan tendiendo a la eficiencia durante los últimos años. Con respecto a este último punto, se ha encontrado que para la mayoría de los índices estudiados las distribuciones de frecuencias de los valores del exponente de Hurst local se han podido ajustar bastante bien a distribuciones gaussianas.

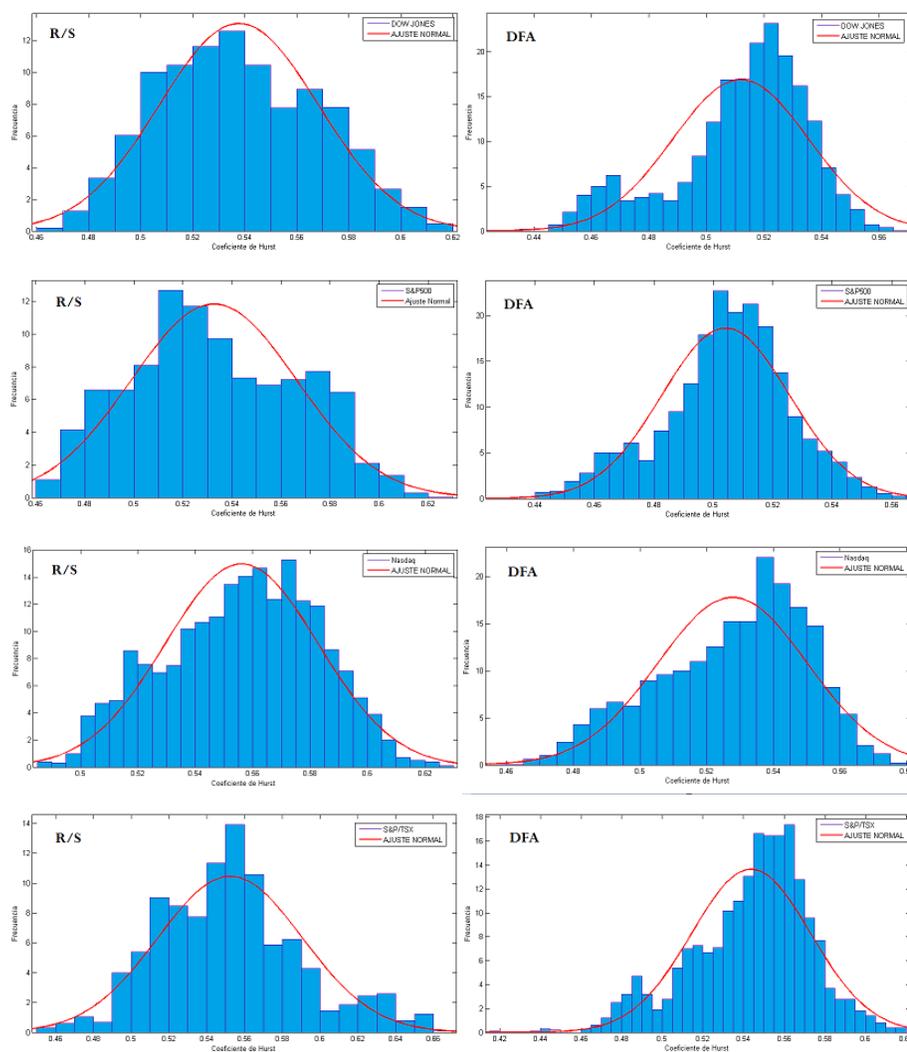


Figura 6-5 Distribución de frecuencias con ajuste gaussiano de los valores del exponente de Hurst local estimado usando el método R/SG (gráfica izquierda) y DFA (gráfica derecha), para los cuatro índices bursátiles norteamericanos DOW JONES, S&P/500, Nasdaq y S&P/TSX. Se presentan los valores de $H(t)$ desde el 22 de septiembre de 2003 hasta el 29 de abril de 2013 (aproximadamente 10 años).

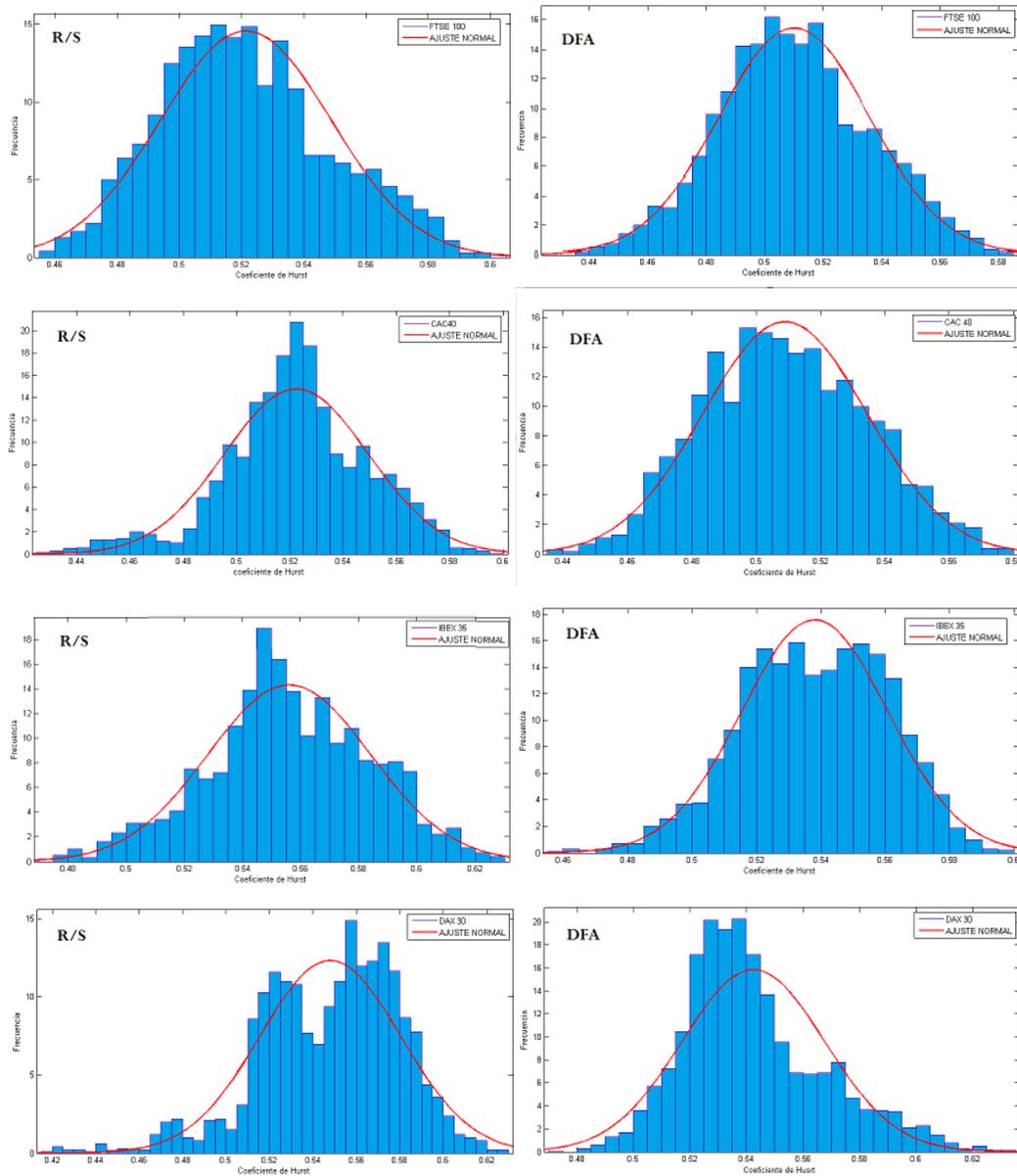


Figura 6-6 Distribución de frecuencias con ajuste gaussiano de los valores del exponente de Hurst local estimado usando el método R/SG (gráfica izquierda) y DFA (gráfica derecha), para los cuatro índices bursátiles europeos FTSE 100, CAC 40, IBEX 35 y DAX 30. Se presentan los valores de $H(t)$ desde el 22 de septiembre de 2003 hasta el 29 de abril de 2013 (aproximadamente 10 años).

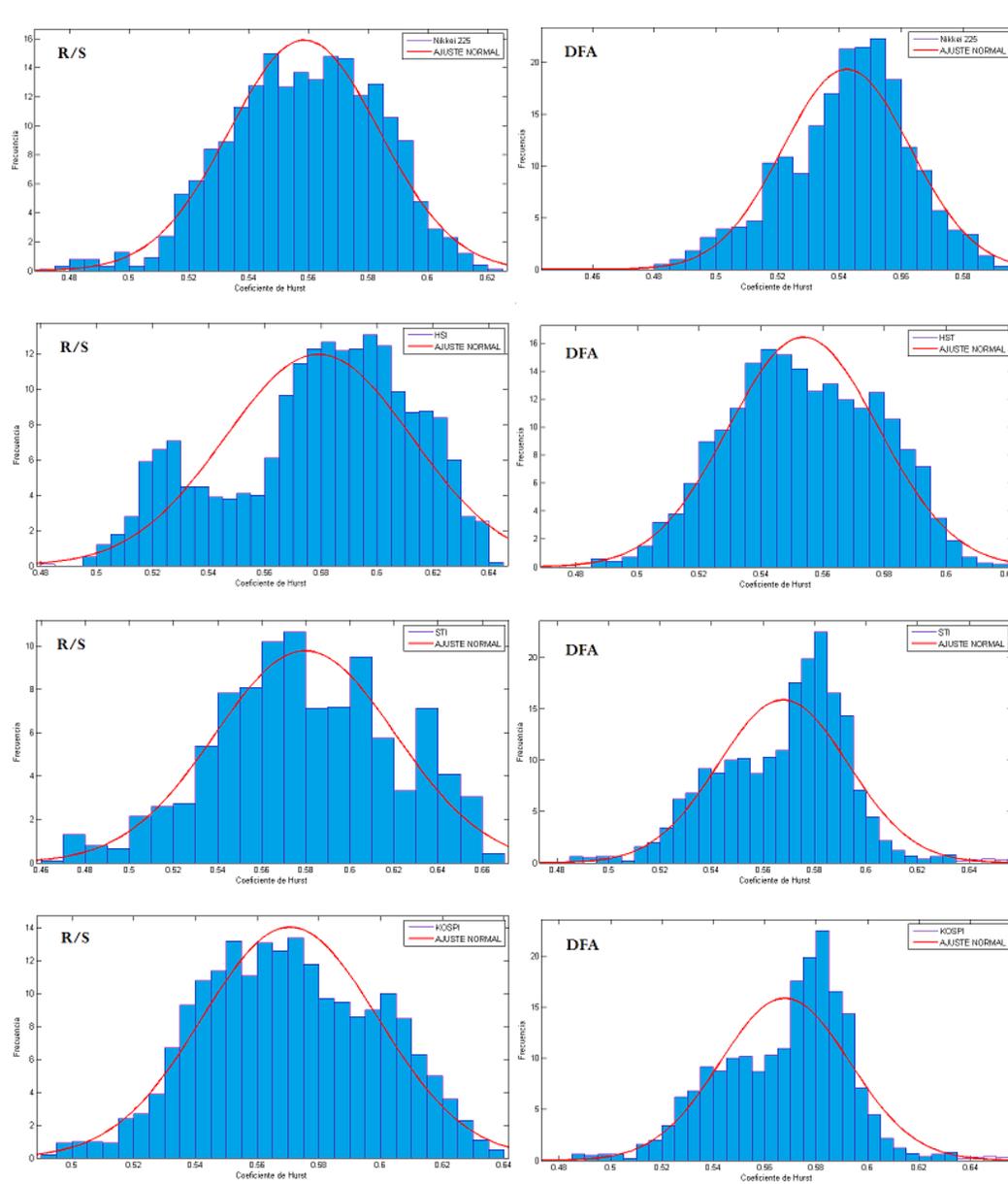


Figura 6-7 Distribución de frecuencias con ajuste gaussiano de los valores del exponente de Hurst local estimado usando el método R/SG (gráfica izquierda) y DFA (gráfica derecha), para los cuatro índices bursátiles asiáticos Nikkei 225, HSI, STI y KOSPI. Se presentan los valores de $H(t)$ desde el 22 de septiembre de 2003 hasta el 29 de abril de 2013 (aproximadamente 10 años).

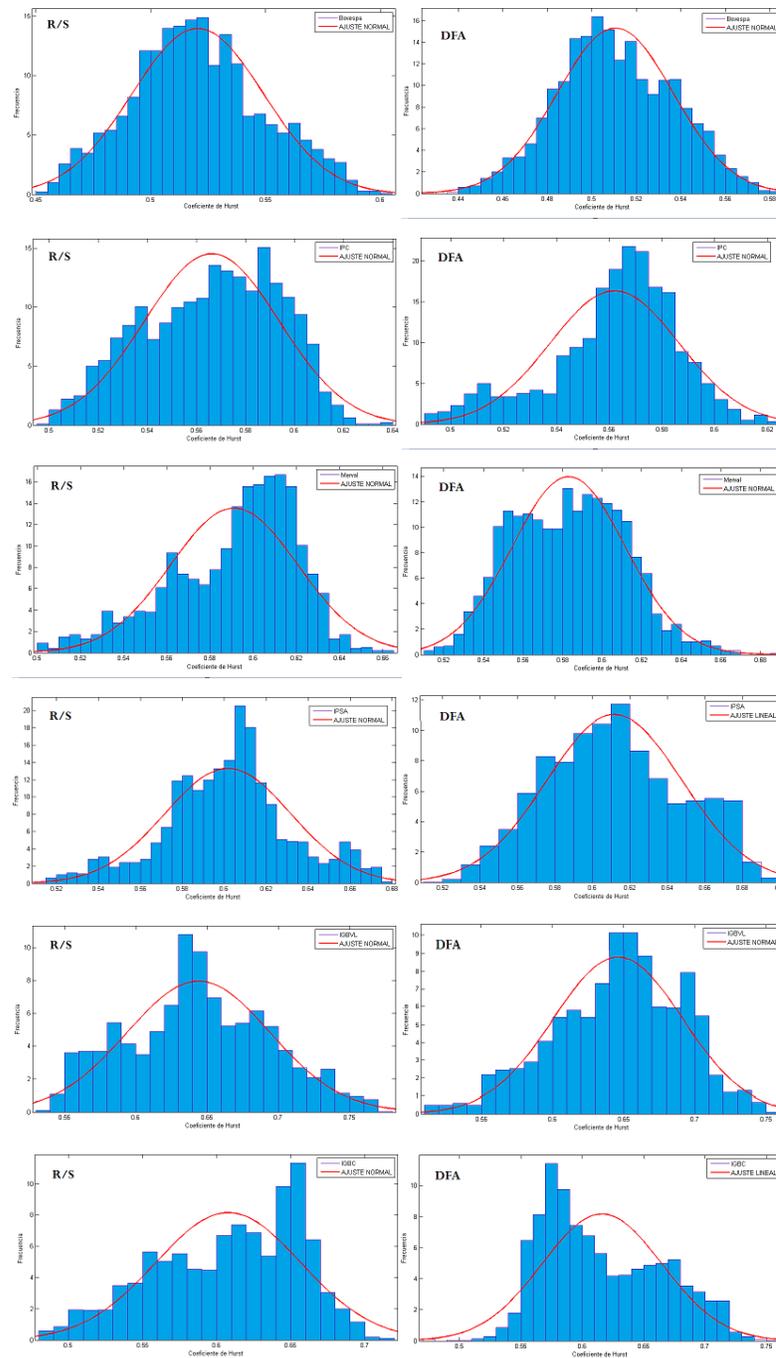


Figura 6-8 Distribución de frecuencias con ajuste gaussiano de los valores del exponente de Hurst local estimado usando el método R/SG (gráfica izquierda) y DFA (gráfica derecha), para los seis índices bursátiles latinoamericanos Bovespa, IPC, Merval, IPSA, IGBVL e IGBC. Se presentan los valores de $H(t)$ desde el 22 de septiembre de 2003 hasta el 29 de abril de 2013 (aproximadamente 10 años).

6.2. Variación en el tiempo de la volatilidad local $Var(t)$

Con el fin de seguir analizando el comportamiento que tienen las series de tiempo de log-retornos diarios de los índices bursátiles estudiados, en esta sección se presenta los resultados de obtener la volatilidad local como función del tiempo para toda la ventana de observación, a partir de estimar la varianza usando una ventana de observación local constante de 500 datos (aproximadamente dos años), que corre sobre toda la ventana de observación. Cabe destacar que la volatilidad es una característica fundamental de los mercados financieros y por esta razón ha sido ampliamente estudiada, tal como se discutió en el capítulo 2. La volatilidad se define como una medida de la intensidad con que ocurren los cambios del precio de los log-retornos diarios. Lo anterior quiere decir que se puede entender como una medida de la oscilación de las variaciones de los log-retornos con respecto a un valor medio de referencia. De esta manera, respecto a la varianza se puede decir lo siguiente:

- **Volatilidad Histórica**, que es calculada empleando Si se parte del histórico de la serie de tiempo se puede obtener.
- **Volatilidad Implícita**, la cual permite determinar las expectativas y estimaciones de la volatilidad futura del índice.

La estimación de la varianza se realiza implementando una rutina en Matlab, considerando la serie de tiempo de log-retornos diarios $S_i(t)$ y calculando el valor esperado a partir de

$$\sigma [S_i, S_j] (t, \tau) := \langle S_i(t, \tau) S_i(t) \rangle - \langle S_i(t, \tau) \rangle \langle S_i(t) \rangle, \quad (6-2)$$

donde τ es un intervalo de tiempo. Igualmente, la varianza de la serie de tiempo es simplemente la auto-covarianza, con el intervalo de tiempo cero, es decir $\sigma^2 [S_i] (t) \equiv [S_i, S_i] (t, 0)$, donde σ denota la desviación o la volatilidad en el contexto de finanzas. Para la estimación de la varianza local como función del tiempo ($Var(t)$), se emplea la siguiente metodología:

- En primer lugar se estima la varianza de los log-retornos de acuerdo
- Primero, se define la ventana local de observación constante de $n = 500$ datos, de tal forma que ésta corre sobre toda la serie de tiempo de log-retornos diarios, hasta cubrir toda la ventana de observación.
- Segundo, se calcula la varianza local usando la ventana de observación de $n = 500$ datos, y se obtiene $Var(t)$, las cual se gráfica para cada una de las series de tiempo de log-retornos diarios estudiada.
- Tercero, se unifican las fechas para todas las series de tiempo, de tal forma que se realiza una depuración de datos con el fin de tener series de tiempo de log-retornos diarios de los diferentes índices bursátiles que sean comparables en fechas y tamaño, o sea que abarquen los mismos días del año y cuyo tamaño sea de 500 datos. Esto se

realizó a partir de no considerar los log-retornos de los días que fueran laborables para algunos mercados pero festivos para otros. Una vez que se ha realizado esta depuración de datos, se procede a obtener $Var(t)$.

Una vez los pasos anteriores se han realizado, mediante las gráficas $Var(t)$ se encuentra la existencia de tres patrones generales de comportamiento de la varianza local con respecto al tiempo.

Caracterización de 3 patrones

- Patrón 1
- Patrón 2
- Patrón 3

En las Figuras **6-9-6-11** se muestra como a partir de la forma de las $Var(t)$, los índices bursátiles estudiados han sido clasificados en los tres patrones mencionados.

De acuerdo con los resultados presentados en las Figuras **6-9-6-11**, la similitud del comportamiento de las $Var(t)$ permite la clasificación de los índices bursátiles de la siguiente manera:

- **Patrón 1:** DOW JONES, S&P500, Nasdaq, S&P/TSX, FTSE 100, CAC 40, IBEX 35, DAX 30, Nikkei 225, Bovespa e IPC.
- **Patrón 2 :** HSI, STI, KOSPI, Merval, IPSA e IGBVL.
- **Patrón 3:** IGBC.

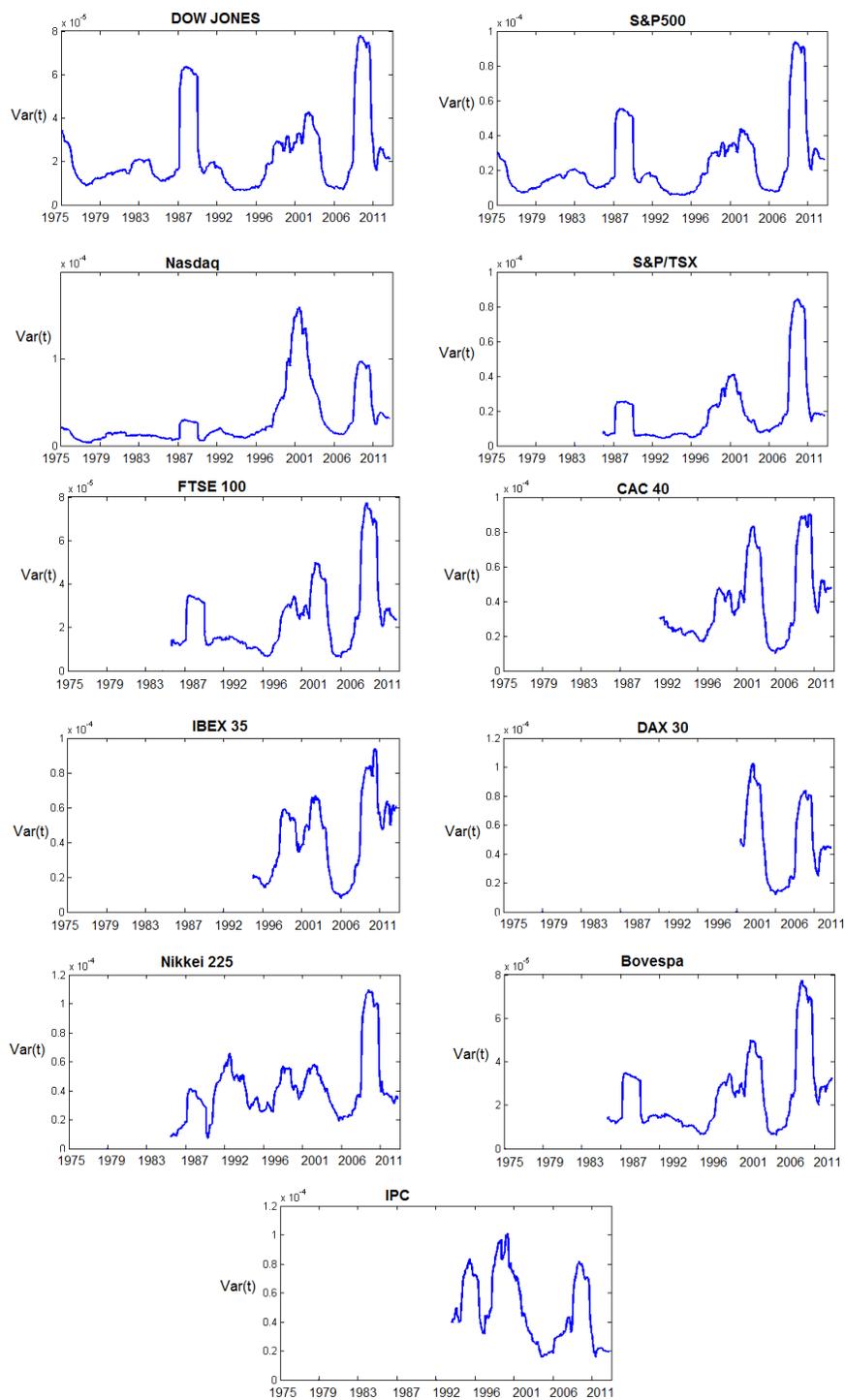


Figura 6-9 Patrón 1, que se encuentra para los índices bursátiles DOW JONES, S&P500, Nasdaq, S&P/TSX, FTS100, CAC40, IBEX 35, DAX30, Nikkei 225, Bovespa e IPC.

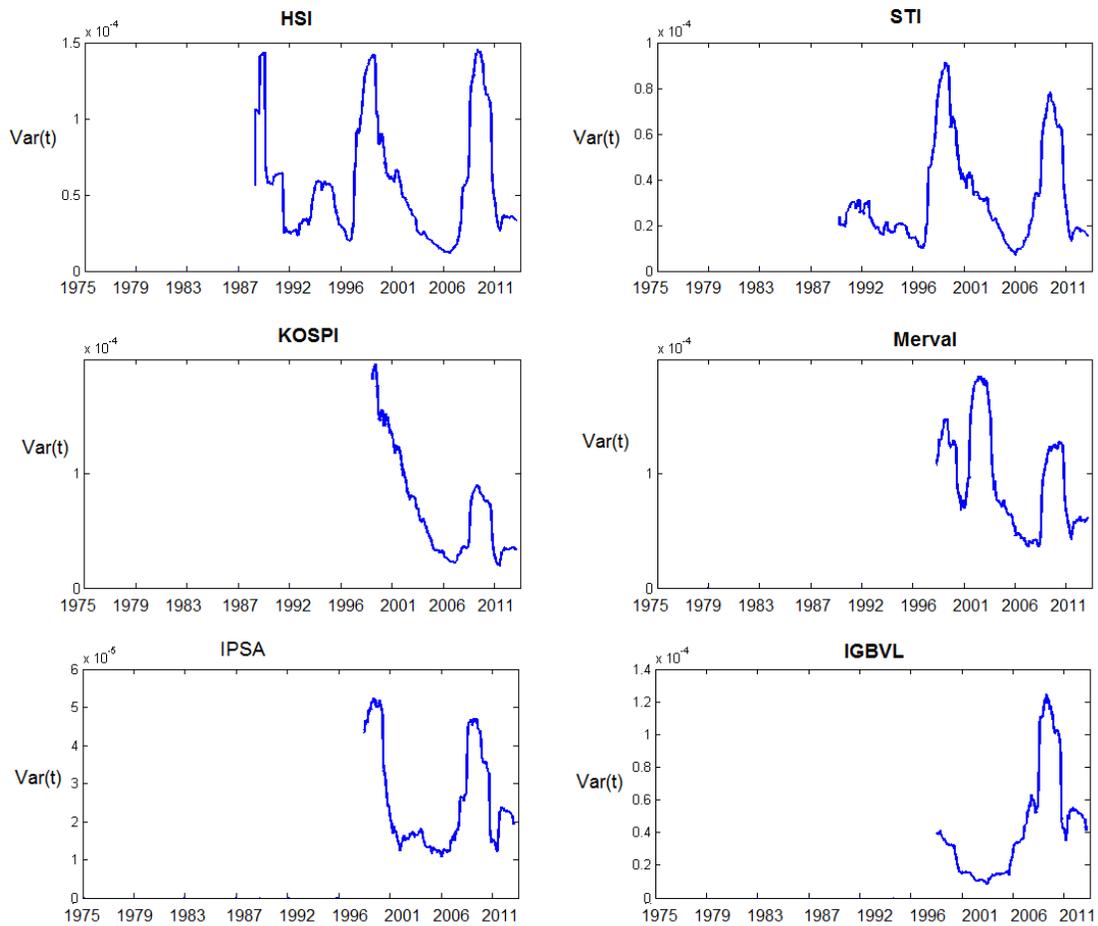


Figura 6-10 Patrón 2, que se encuentra para los índices bursátiles HSI, STI, KOSPI, Merval, IPSA e IGBVL.

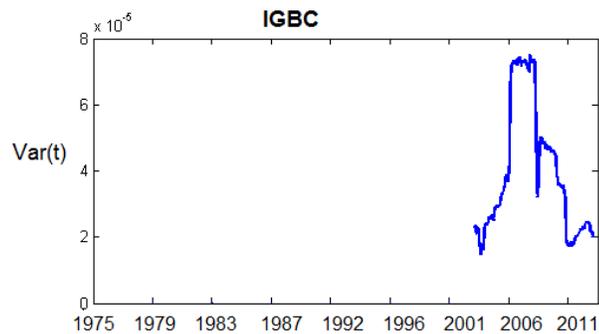


Figura 6-11 Patrón 3, que se encuentra para el índice bursátil IGBC.

De acuerdo a lo que se presenta en el siguiente capítulo, las similitudes observadas en el comportamiento de las $Var(t)$ para los diferentes índices bursátiles estudiados se cuantifican mediante el cálculo de los coeficientes de correlación. A partir de los patrones de comportamiento de la $Var(t)$ y reforzado por lo presentado en el siguiente capítulo, se puede concluir que:

- Las $Var(t)$ asociadas a los diferentes índices de mercados bursátiles clasificados en el patrón 1 presentan altos coeficientes de correlación. Por ejemplo, FTSE 100 de Europa y Bovespa de Brasil presentan la mayor correlación $c = 0,999 \sim 1$. Por último y no menos importante, los índices bursátiles clasificados en el patrón 1 hacen parte en su mayoría de los llamados *mercados eficientes*, dada la amplia trayectoria y eficiencia de estos mercados.
- Las $Var(t)$ asociadas a los diferentes índices de mercados bursátiles clasificados en el patrón 2 presentan coeficientes de correlación intermedios. Tres de estos son asiáticos y los demás son latinoamericanos (sin incluir al índice colombiano). Los índices bursátiles clasificados en el patrón 2 hacen parte de mercados que no son tan antiguos, es decir que se comportan de manera diferente en presencia de grandes fluctuaciones. Aunque sus correlaciones no son tan apreciables, las gráficas $Var(t)$ evidencian las similitudes.
- Por último, el índice IGBC de Colombia no se encuentra clasificado en los dos patrones anteriores, pues su $Var(t)$ presenta una dinámica de comportamiento diferente a la observada para los índices clasificados en los dos primeros patrones.

Para finalizar, cabe resaltar que el análisis presentado en esta sección se puede realizar para el caso de otros índices bursátiles, con el fin de comprobar la validez de los tres patrones identificados. Se puede concluir, que la localización geográfica del mercado en estos resultados no parece ser relevante, pues se encuentra que lo más importante es si el mercado se comporta como eficiente o emergente.

7 Propagación de las crisis financieras

En este capítulo, para todos los log-retornos diarios de los índices bursátiles estudiados, a partir del análisis tanto de las gráficas de los $H(t)$ (que fueron obtenidas con los métodos R/SG y DFA), como de las de las $Var(t)$, se evidencia la propagación de las crisis financieras del lunes negro e hipotecaria. De igual forma, mostramos que algunas características de las gráficas $H(t)$ y $Var(t)$ permiten clasificar los mercados respectivos en eficientes y emergentes. Adicionalmente, se obtiene los coeficientes de correlación para los $H(t)$ y $Var(t)$. De forma consistente con lo presentado en el capítulo anterior, en la estimación de los valores de H y Var locales, la ventana de observación constante local es de 500 datos. Esta ventana de observación se hizo correr sobre todos los datos, para cada una de las series de tiempo de log-retornos diarios estudiadas.

7.1. Propagación a partir de $H(t)$

En esta subsección, a partir del análisis de las gráficas que muestran la dependencia respecto al tiempo del exponente de Hurst local $H(t)$, que es estimado por el método R/SG y DFA, se evidencia la propagación de las crisis financieras del lunes negro (sólo para los índices bursátiles que existían antes del año 1987) e hipotecaria. Dado que para todos los índices bursátiles estudiados, el valor de H local en cercanías de dichas crisis cambia de forma muy particular (lo cual significa que la memoria existente en el mercado también cambia, debido a que H es una medida de correlación temporal de largo rango), entonces este hecho puede ser usado para estudiar como una crisis financiera se manifiesta y se propaga en todos los mercados.

En la Figura 7-1, se muestra la evolución temporal de H local, cuya estimación fue realizada usando el método R/SG, para todos los índices estudiados. En las gráficas $H(t)$ se señala con una línea amarilla, la tendencia que tiene el exponente de Hurst local antes y después de las crisis hipotecaria. Se observa, para la mayoría de los índices estudiados, la existencia de una disminución progresiva del valor de H local antes de la crisis hipotecaria. Para el caso específico de los índices DOW JONES, S&P500, Nasdaq, FTSE 100, CAC 40 y Bovespa, este exponente disminuye hasta un valor aproximado a 0,5. Estos valores de H cercanos a 0,5, que son característicos de mercados consolidados o eficientes, indican que los mercados correspondientes tienden a comportarse cercanamente a como lo harían los mercados idealizados. Para los demás índices, en la Figura 7-1 también se observa una disminución progresiva de H local en tiempos anteriores al surgimiento de la crisis hipotecaria, pero al

contrario de los índices anteriormente nombrados, para el caso de los demás índices los valores de H locales mínimos son mayores a 0,5. Se observa que después de que ocurre la crisis financiera hipotecaria, el valor de H local aumenta progresivamente para todos los índices, lo cual significa un incremento gradual en la memoria para todos los mercados bursátiles. Este hecho puede interpretarse como si los mercados reaccionaran al surgimiento de una crisis financiera, aumentando su memoria con el transcurrir del tiempo. Lo anterior quiere decir, que debido a que una crisis financiera implica un cambio negativo abrupto del valor del índice en el tiempo de cierre el día en que sucede, este hecho como consecuencia se manifiesta en un aumento gradual de la memoria del mercado durante los días subsiguientes a la ocurrencia de la crisis. Por lo observado en la Figura 7-1, se puede concluir que en tiempos anteriores a una crisis financiera, el valor del H local para todos los índices bursátiles tiende a disminuir (disminución gradual de memoria de largo rango), en algunos casos tendiendo a la aleatoriedad pues $H_{aprox} = 0,5$, y luego para tiempos subsiguientes a la crisis financiera, el valor de H local se incrementa progresivamente (aumento gradual de la memoria de largo rango).

En la Figura 7-2 se presenta la evolución temporal del valor de H local, el cual ha sido estimado usando el método DFA, para todos los índices estudiados. Mediante flechas rojas se señala los agrupamientos (clusteres) de variación abrupta de los valores de H local, después de la crisis financieras del lunes negro e hipotecaria. Como se mencionó en el capítulo anterior, se observa que la forma que tiene $H(t)$ en vecindades de las crisis es similar para todos los índices bursátiles estudiados. Para todos los índices, se observa un mismo patrón de agrupamientos (clusteres) de grandes variaciones de los H locales, lo cual sucede después de que se presentan las dos crisis, observándose que las fluctuaciones son más pronunciadas para la crisis del lunes negro.

En conclusión, a través del análisis de la evolución en el tiempo del exponente de Hurst local, se observa que existe un patrón de comportamiento general para todos los índices bursátiles estudiados. En particular, la tendencia de comportamiento del H local en vecindades a una crisis financiera, puede ser tomada como una herramienta que permite caracterizar las crisis financieras. De igual forma, esta herramienta permite evidenciar la forma en que se propagan las crisis en los diferentes mercados, independientemente de que sean consolidados o emergentes.

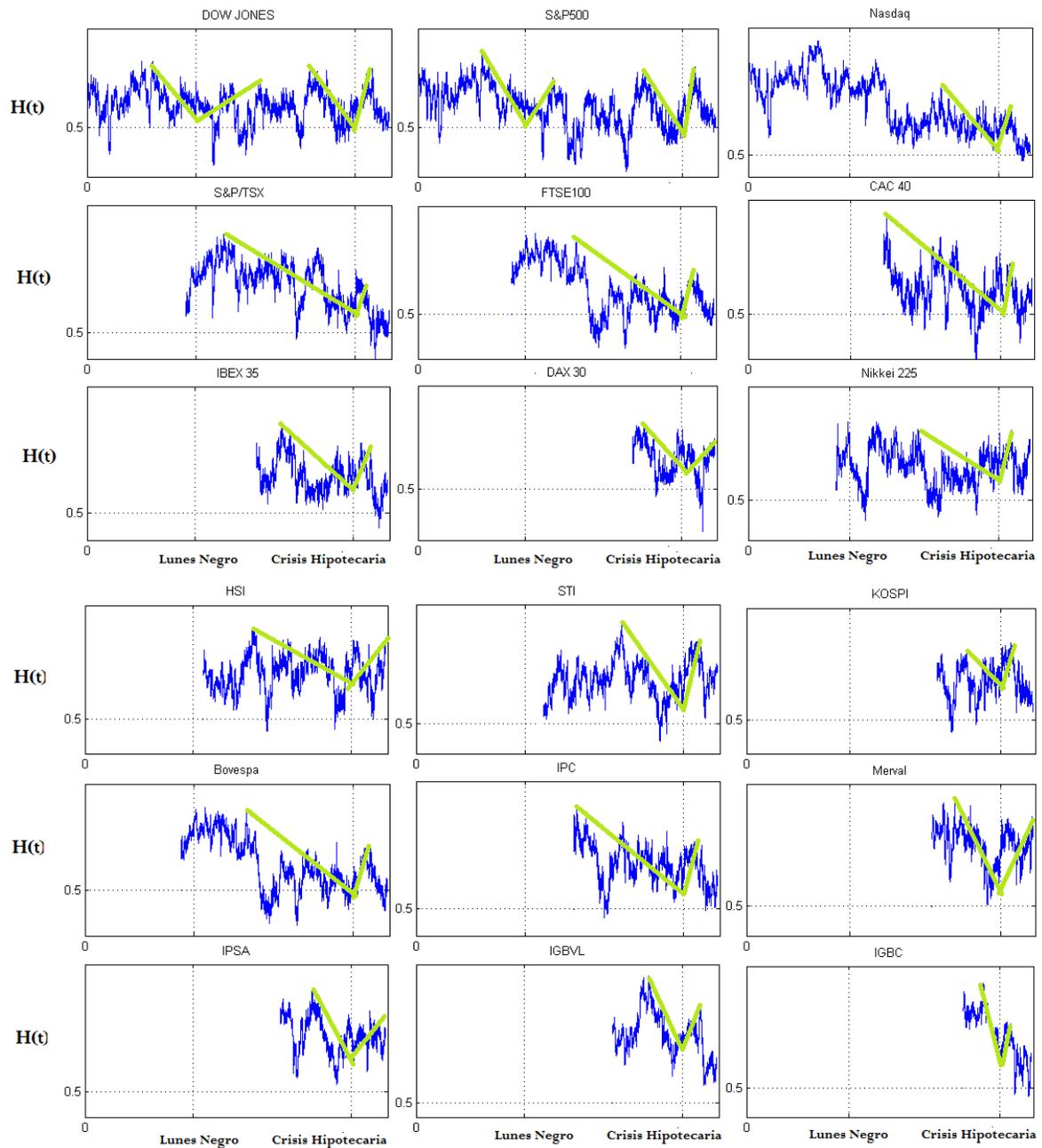


Figura 7-1 Evolución en el tiempo del exponente de Hurst local $H(t)$, el cual es estimado usando el método R/SG, para los 18 índices bursátiles estudiados. Mediante la línea amarilla, se pretende evidenciar la tendencia que tiene el valor de H antes y después de la crisis hipotecaria. Se señala con un línea punteada los casos en los que el valor de H local tiende a 0,5.

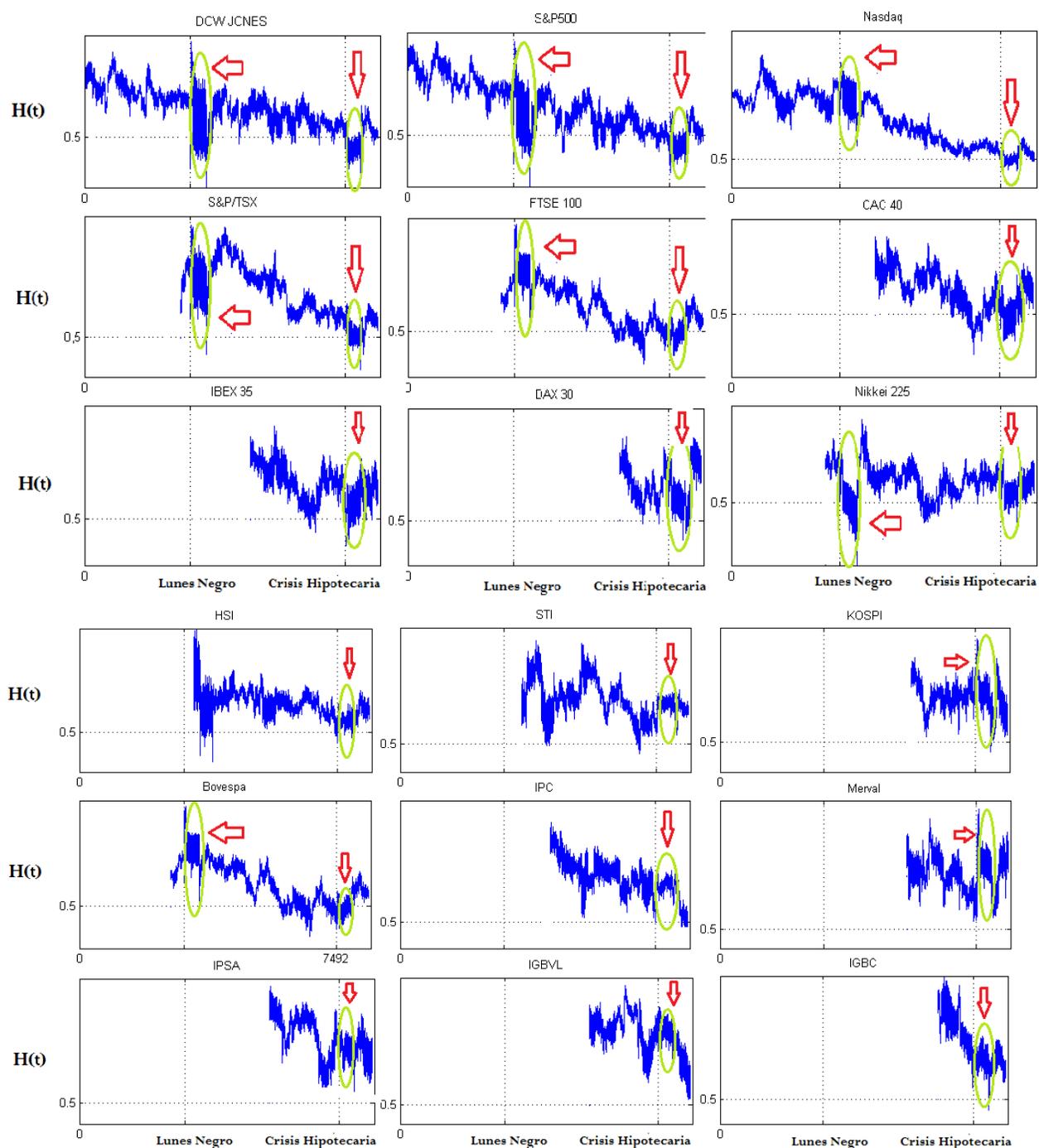


Figura 7-2 Evolución en el tiempo del exponente de Hurst local ($H(t)$), el cual es estimado usando el método DFA, para los 18 índices bursátiles estudiados. Las flechas rojas evidencian el seguimiento de las crisis del lunes negro e hipotecaria, mientras que las líneas amarillas evidencian la tendencia que tiene el valor de H local antes y después de las crisis.

7.1.1. Correlación entre las series de $H(t)$

Ahora, adicional al hecho que las graficas $H(t)$ mostradas en las Figuras 7-1- 7-2 presentan patrones similares de comportamiento, se procede a cuantificar las correlaciones entre los diferentes índices bursátiles usando como instrumento las series de $H(t)$ que caracterizan a cada índice. Por lo anterior, se procede a calcular los coeficientes de correlación entre todas las diferentes series de $H(t)$. En la tablas 7-3-7-4 se presentan los coeficientes de correlación obtenidos. A partir de lo mostrado en estas tablas, se observa que los índices bursátiles se pueden relacionar o no entre sí de la siguiente manera

- ($C = 0$), no existe ninguna correlación entre S&P/TSX y Nikkei 225.
- ($C = 1$), implica que se tiene una correlación completa entre FTSE100 y Bovespa.
- ($0,5 < C \leq 1$), implica que se tiene alta correlación entre: DOW JONES-(S&P500, IPSA, IGBVL); S&P/500-(Nasdaq, IGBVL); S&P/TSX -(DAX 30, IPSA, IGBVL, IGBC); FTSE100-IPC; CAC40-STI; DAX30-(Nikkei225, STI); HSI- IPSA; Bovespa -IPSA y por último IGBVL - IGBC.
- ($0,5 < C \leq 0,5$), se tiene baja correlación entre: DOW JONES-(Nasdaq, S&P/TSX, FTSE100, IBEX35, DAX 30, HSI, STI, KOSPI, Bovespa, IPC, Merval, IGBC); S&P500- (S&P/TSX, FTSE100, CAC40, DAX 30, Nikkei 225, HSI, STI, KOSPI, Bovespa, IPC, Merval); Nasdaq (DAX 30, Nikkei 225, STI, KOSPI, IPC, Merval , IPSA, IGBVL); S&P/TSX-(FTSE100, CAC40, IBEX35, HSI, STI, KOSPI, Bovespa, IPC, Merval); FTSE100- (CAC40, IBEX35, DAX 30, HSI, STI, KOSPI, Merval, IPSA, IGBVL, IGBC); CAC40-(IBEX35, Nikkei 225, HSI, STI, KOSPI, Bovespa, Merval, IPSA, IGBVL); IBEX 35-(STI, KOSPI, Merval, IPSA, IGBVL, IGBC); DAX30-(STI, KOSPI, Bovespa, Merval, IPSA, IGBVL, IGBC); Nikkei 225-(KOSPI, Bovespa, IPC); HSI- (STI, KOSPI, Bovespa, IPC, IGBVL); STI-(Bovespa, IPC, Merval, IPSA, IGBVL); KOSPI,(Bovespa, IPC, Merval , IPSA, IGBVL, IGBC); Bovespa-(IPC, Merval , IPSA, IGBVL, IGBC); IPC (Merval , IPSA, IGBVL, IGBC); Merval (IPSA, IGBVL); IPSA, IGBVL.
- ($C < 0$), indica que existe anti-correlación entre: DOW JONES-Nikkei 225; S&P500-(IBEX35, IGBC); Nasdaq- (HSI); IBEX 35-(DAX 30, Nikkei 225, HSI, Bovespa, IPC); Nikkei 225- (HSI, STI, Merval, IPSA, IGBVL, IGBC); HSI-IGBC; STI-IGBC; KOSPI- Bovespa; Merval- IGBC; IPSA_IGBC.

De acuerdo con lo anterior, para la mayoría de los índices se tiene poca o baja correlación a pesar de que aparentemente la forma de las $H(t)$ presentan similitud gráfica. Un importante resultado es la alta correlación observada para los índices FTSE100 y Bovespa.

R/S	DOW	S&P	Nas	S&P	FTSE	CAC	IBEX	DAX	Nikk	HSI	STI	KOSPI	Bov	IPC	Mer	IFSA	IGB	IGB
DOW	1																	
S&P	0,87	1																
Nas	0,42	0,59	1															
S&P	0,28	0,30	0,55	1														
FTSE	0,10	0,23	0,73	0,47	1													
CAC	0,17	0,12	0,53	0,46	0,44	1												
IBEX	0,09	-0,05	0,66	0,32	0,31	0,47	1											
DAX	0,44	0,42	0,19	0,63	0,17	0,65	-0,02	1										
Nikkei	-0,03	0,07	0,20	0,00	0,19	0,06	-0,12	0,54	1									
HSI	0,35	0,27	-0,06	0,17	0,05	0,03	-0,02	0,54	-0,27	1								
STI	0,42	0,26	0,05	0,12	0,06	0,49	0,09	0,39	-0,07	0,36	1							
KOSPI	0,38	0,37	0,24	0,39	0,47	0,27	0,30	0,28	0,27	0,19	0,48	1						
Bov	0,11	0,23	0,72	0,19	1,00	0,43	-0,65	0,15	0,22	0,05	0,06	-0,53	1					
IPC	0,20	0,06	0,41	0,44	0,54	0,20	-0,39	0,30	0,15	0,42	0,27	0,45	0,55	1				
MerVal	0,48	0,34	0,21	0,47	0,26	0,23	0,16	0,44	-0,25	0,65	0,46	0,15	0,25	0,47	1			
IFSA	0,59	0,18	0,15	0,59	0,34	0,37	0,09	0,14	-0,32	0,32	0,46	0,29	0,34	0,11	0,10	1		
IGBVL	0,59	0,53	0,32	0,61	0,30	0,01	0,08	0,34	-0,19	0,45	0,02	0,21	0,33	0,46	0,41	0,42	1	
IGBC	0,03	-0,03	0,55	0,53	0,09	-0,14	0,26	0,05	-0,04	-0,01	-0,35	0,15	0,14	0,37	-0,05	-0,01	0,57	1

Figura 7-3 Coeficientes de correlación entre el exponente de Hurst local, estimado con el método R/SG para los 18 índices bursátiles de estudio

DFA	DOW	S&P	Nas	S&P	FTSE	CAC	IBEX	DAX	Nikk	HSI	SITI	KOSPI	Bove	IPC	Mer	IPSA	IGB	IGBC
DOW	1																	
S&P	0,86	1																
Nas	0,74	0,83	1															
S&P	0,61	0,64	0,79	1														
FTSE	0,43	0,54	0,43	0,74	1													
CAC	0,53	0,46	0,67	0,72	0,73	1												
IBEX	0,49	0,41	0,72	0,63	0,62	0,51	1											
DAX	0,42	0,40	0,18	0,38	0,31	0,65	0,12	1										
Nikkei	0,29	0,33	0,27	0,00	-0,01	-0,05	0,02	0,17	1									
HSI	0,34	0,28	0,38	0,42	0,38	0,46	-0,43	0,17	-0,07	1								
SITI	0,39	0,45	0,45	0,48	0,44	0,45	-0,01	0,29	0,36	0,19	1							
KOSPI	0,07	0,00	0,21	0,37	0,06	0,12	0,04	0,16	-0,15	0,04	0,34	1						
Bove	0,42	0,54	0,83	0,46	1	0,73	-0,58	0,32	0,09	0,38	0,43	-0,80	1					
IPC	0,48	0,35	0,64	0,63	0,46	0,43	-0,50	-0,07	0,08	0,48	0,24	0,24	0,44	1				
Merval	0,03	0,12	-0,03	0,15	0,06	0,05	-0,05	0,34	-0,21	0,14	0,36	0,16	0,07	0,15	1			
IPSA	0,47	0,05	0,32	0,55	0,05	0,35	-0,01	-0,08	-0,33	0,40	0,63	0,18	0,03	0,05	-0,04	1		
IGBVL	0,20	0,17	0,11	0,24	-0,27	-0,20	-0,14	-0,26	-0,17	0,22	0,22	0,20	-0,30	0,44	0,06	0,51	1	
IGBC	0,39	0,33	0,46	0,62	-0,21	-0,29	0,11	-0,16	0,36	0,54	-0,08	0,09	-0,23	0,33	-0,03	0,31	0,47	1

Figura 7-4 Coeficientes de correlación entre el exponente de Hurst local, estimado con el método DFA para los 18 índices bursátiles de estudio

7.2. Propagación a partir de $Var(t)$

La evolución en el tiempo de la volatilidad local es otra manera de evidenciar la propagación de la crisis financieras del lunes negro e hipotecaria. Esto es posible simplemente al observar como varían los valores de variancia local durante los tiempos vecinos a los tiempos en los que se presentan las crisis. Como se mencionó en el capítulo anterior, se observan tres patrones gráficos diferentes en las $Var(t)$, siendo estos patrones originados por la fuerte volatilidad que se presenta durante las crisis financieras. Lo anterior quiere decir, que al presentarse variaciones fuertes negativas de los valores del índice durante el cierre del mercado, cuando se presenta la crisis, estos cambios significativos de la varianza se aprecian en todas las gráficas de las $Var(t)$, para todos los índices bursátiles. La forma en que evolucionan los valores de la variancia local después de las crisis financieras, reflejan la forma en que se propagan estas crisis.

De acuerdo con lo mostrado en las Figuras **7-5-7-8** se encuentra que:

1. El efecto de incremento fuerte de la varianza, producido por la crisis del lunes negro, se aprecia sólo en los índices DOW JONES, S&P500, Nasdaq, S&P/TSX, FTSE 100, Nikkei 225 y Bovespa (debido a la antigüedad de estos índices y a la disponibilidad de datos). El mayor impacto se observa para el índice DOW JONES, tal como se observa en la Figura **7-5**.
2. El efecto producido por la crisis hipotecaria es apreciable en todos los índices bursátiles, tal como se puede observar en las Figuras **7-5-7-8**. Se encuentra que las $Var(t)$ para todos los índices presentan un comportamiento similar, de tal forma que se tiene inicialmente un aumento brusco de la variancia local el día exacto de la crisis, seguido por un valor de varianza que se mantiene constante durante los días siguientes a la ocurrencia de la crisis, y posteriormente se presenta una disminución drástica de los valores de la varianza local para tiempos bastante posteriores a la ocurrencia de la crisis.

Como conclusión, se encuentra que para todos los índices bursátiles considerados, la forma en que varía la $Var(t)$ para tiempos antes y después de las dos crisis es similar para las dos crisis. Se observa que antes de que ocurran las dos crisis financieras, los Var locales se caracterizan por tener valores aproximadamente constantes, una vez se presentan las crisis se produce un incremento abrupto de la varianza cuyo valor se mantiene aproximadamente constante durante un periodo que se mantiene constante (correspondiente a 500 días, es decir igual al tamaño de la ventana de observación local), posteriormente los valores de varianza local disminuyen de forma apreciable.

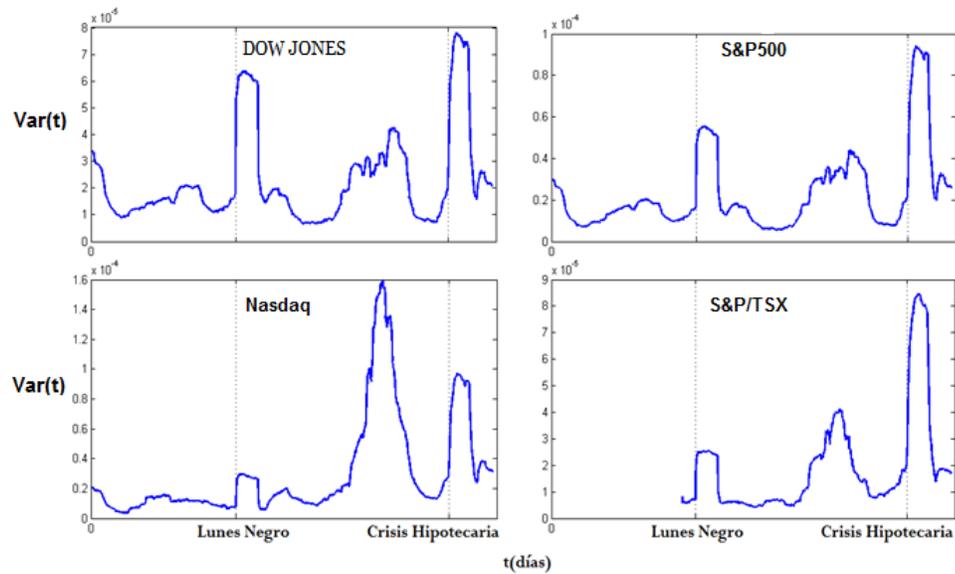


Figura 7-5 Evolución en el tiempo de la volatilidad histórica calculada a partir de la varianza ($Var(t)$) para los cuatro índices bursátiles norteamericanos DOW JONES, S&P500, Nasdaq y S&P/TSX.

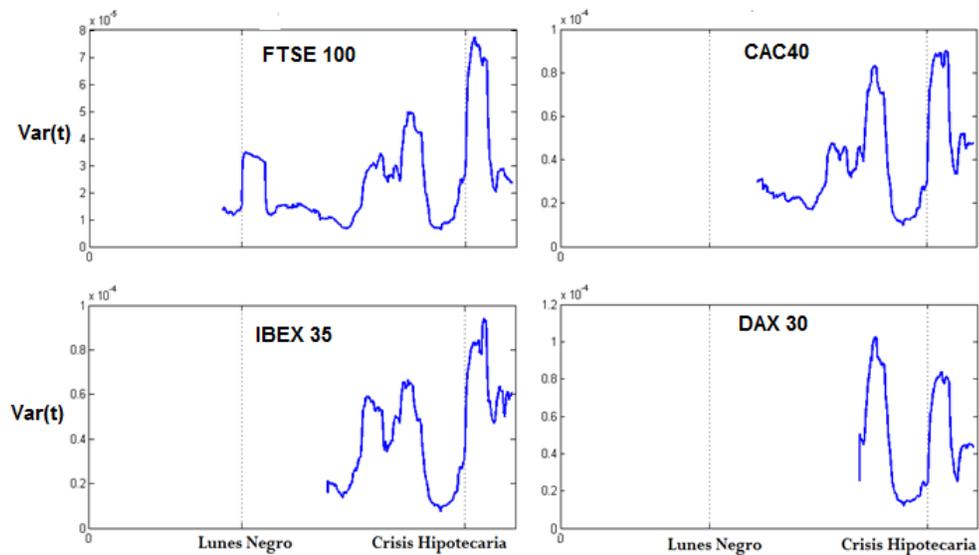


Figura 7-6 Evolución en el tiempo de la volatilidad histórica calculada a partir de la varianza ($Var(t)$) para los cuatro índices bursátiles europeos FTSE 100, CAC 40, IBEX 35 y DAX 30.

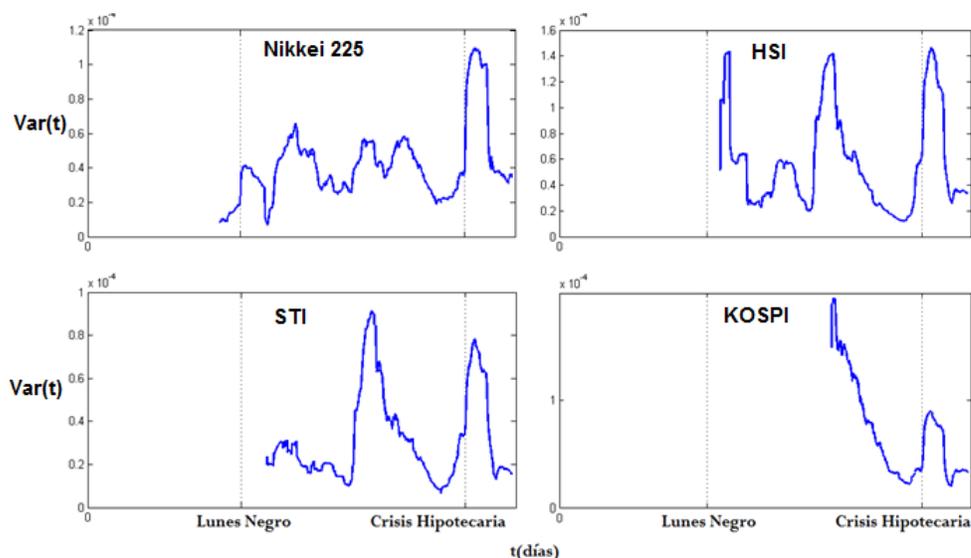


Figura 7-7 Evolución en el tiempo de la volatilidad histórica calculada a partir de la varianza ($Var(t)$) para los cuatro índices bursátiles asiáticos Nikkei 225, HSI, STI y KOSPI.

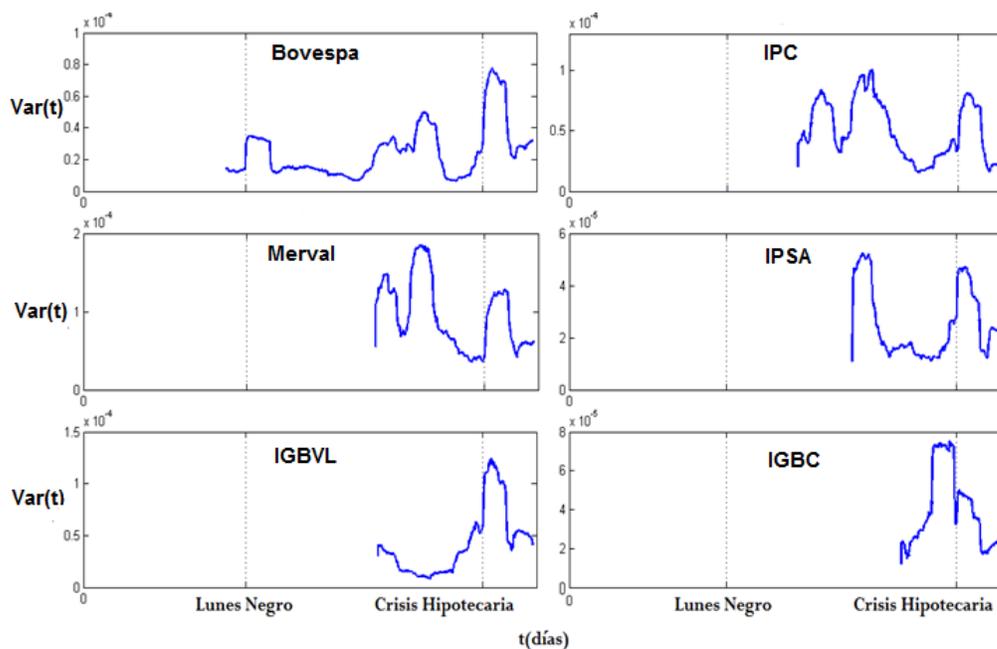


Figura 7-8 Evolución en el tiempo de la volatilidad histórica calculada a partir de la varianza ($Var(t)$) para los seis índices bursátiles latinoamericanos Bovespa, IPC, Merval, IPSA, IGBVL e IGBC.

7.2.1. Correlación entre las series de $Var(t)$

Ahora, adicional al hecho que las graficas $Var(t)$ mostradas en las Figuras 7-5- 7-8 presentan patrones similares de comportamiento, se procede a cuantificar las correlaciones entre los diferentes índices bursátiles usando como instrumento las series de $Var(t)$ que caracterizan a cada índice. Por lo anterior, se procede a calcular los coeficientes de correlación entre todas las diferentes series de $Var(t)$. En la tabla 7-9 se presentan los coeficientes de correlación obtenidos. A partir de lo mostrado en esta tabla, se observa que las series de varianza locales para los índices bursátiles considerados se pueden relacionar o no entre sí, de la siguiente manera:

- Las series para los índices de Estados Unidos y Canadá presentan entre sí un coeficiente de correlación grande. La serie del índice S&P500 presenta una mayor correlación con las series de los demás índices. En particular las series de S&P500 y DOW JONES presentan un coeficiente $c = 0,98$, mientras que las series S&P500 y Nasdaq presentan una correlación semejante $c = 0,89$, a pesar de que la forma de las graficas de las $Var(t)$ sean bastante diferente. Las series S&P500 y S&P/TSX presentan una correlación un poco menor $c = 0,92$. Por último, la mínima correlación, $c = 0,70$, se presenta entre las series de Nasdaq- S&P/TSX.
- Para las series de los índices bursátiles europeos, las correlaciones también son altas. Tomando como referencia la serie del índice FTSE 100, por tener el mayor número de datos, se tiene que: Las series FTSE 100 y CAC 40 presentan una correlación $c = 0,96$; la series FTSE 100 e IBEX 35 también estan altamente correlacionadas, ya que $c = 0,90$; las series FTSE 100 e IBEX 35 presentan una correlación $c = 0,85$. Por último, el valor mínimo de correlación se presenta entre las series IBEX 35 y DAX 30, ya que $c = 0,81$, sin embargo esta correlación es bastante alta.
- A partir de las series para los índices asiáticos, a diferencia de los dos anteriores casos, se puede concluir que la dinámica de la volatilidad no parece estar unificada para este continente, pues los coeficientes de correlación entre las diferentes series es mas pequeña. Tomando como índice de referencia la serie Nikkei 225, se tiene que: las series Nikkei 225 y HSI presentan una correlación mediana $c = 0,58$; las series Nikkei 225 y STI, presentan una correlación ligeramente mayor $c = 0,69$; las series Nikkei 225 y KOSPI presentan una correlación muy baja $c = 0,32$.
- Las series de los índices latinoamericanos, presentan correlaciones altas, bajas y hasta sepresentan anticorrelaciones. Tomando como referencia la serie Bovespa, por tener un mayor número de datos, se tiene que: las series Bovespa e IPC presentan baja correlación $c = 0,29$; las series Bovespa y Merval, presentan una correlación moderada $c = 0,56$; las series Bovespa e IPSA también presenta una correlación moderada $c = 0,54$; las series Bovespa e IGBVL presentan una correlación un poco mas alta, pero

no tan alta como la encontrada para los índices norteamericanos y europeos $c = 0,65$; las series Bovespa e IGBC presentan una anticorrelación $c = -0,16$. Cabe destacar destacar que la correlación de la serie IGBC con todas las demás series es muy baja.

Var	DOW	S&P	Nas	S&P	FTSE	CAC	IBEX	DAX	Niik	HSI	STI	KOSPI	Bove	IPC	Mer	IPSA	IGB	IGBC
DOW	1																	
S&P	0.98	1																
Nas	0.58	0.89	1															
S&P	0.83	0.92	0.70	1														
FTSE	0.89	0.95	0.65	0.89	1													
CAC	0.92	0.90	0.63	0.76	0.96	1												
IBEX	0.89	0.88	0.60	0.77	0.90	0.93	1											
DAX	0.79	0.73	0.72	0.53	0.85	0.95	0.81	1										
Niikbei	0.68	0.77	0.55	0.811	0.81	0.79	0.84	0.69	1									
HSI	0.70	0.67	0.51	0.85	0.60	0.54	0.60	0.52	0.58	1								
STI	0.69	0.67	0.53	0.69	0.66	0.58	0.66	0.62	0.69	0.92	1							
KOSPI	0.35	0.32	0.72	0.36	0.33	0.31	0.37	0.74	0.32	0.60	0.76	1						
Bove	0.89	0.84	0.65	0.89	1	0.96	0.87	0.85	0.81	0.59	0.65	0.52	1					
IPC	0.35	0.33	0.38	0.44	0.30	0.22	0.27	0.49	0.44	0.74	0.73	0.85	0.29	1				
Merval	0.03	0.49	0.63	0.35	0.57	0.68	0.62	0.82	0.53	0.46	0.55	0.61	0.56	0.47	1			
IPSA	0.55	0.34	0.22	0.57	0.55	0.42	0.56	0.43	0.59	0.89	0.91	0.62	0.54	0.81	0.50	1		
IGBVL	0.67	0.72	-0.101	0.77	0.65	0.45	0.33	0.17	0.73	0.65	0.47	-0.09	0.65	0.34	-0.08	0.57	1	
IGBC	-0.12	-0.12	-0.22	0.04	-0.14	-0.34	-0.39	-0.38	0.05	0.06	0.08	-0.4	-0.16	0.30	-0.32	0.12	0.24	1

Figura 7-9 Coeficientes de correlación entre la volatilidad estimada para los 18 índices bursátiles internacionales calculado por R/SG

8 Conclusiones

Se ha encontrado que las distribuciones de frecuencia para las series de tiempo de log-retornos diarios de los índices bursátiles estudiados en esta tesis no se ajustan claramente a distribuciones gaussianas, debido especialmente por la existencia de *colas gruesas*. Estas distribuciones de frecuencia se han podido ajustar apropiadamente a distribuciones de Lévy estables, las cuales se caracterizan a través de cuatro parámetros de ajuste: α , índice de estabilidad o exponente característico; γ , parámetro de escala; β parámetro de sesgo o asimetría; μ parámetro de posición. Dado que la distribución normal o gaussiana se caracteriza por presentar un exponente característico $\alpha = 2$, entonces se ha utilizado este valor para indicar que tan lejos se encuentra la serie de tiempo de la normalidad. Como resultado, se ha encontrado que las series de tiempo de log-retornos diarios para los índices DOW JONES, FTSE100, CAC40, Nikkei 225, Bovespa e IPC son las que más se acercan a una distribución gaussiana, teniendo un $\alpha > 1,6$. Como caso contrario, se encuentra que la serie del índice Nasdaq es la más alejada a una distribución gaussiana, dado que $\alpha = 1,39$. Las series de los índices DOW JONES, S&P500 y IGBVL presentan un parámetro de asimetría $\beta > 0$, por lo tanto para estas series son más comunes los cambios positivos de los log-retornos. Por otra parte, las series que presentan una asimetría negativa son: Nasdaq, S&P/TSX, FTSE 100, CAC 40, IBEX 35, DAX 30, Nikkei 225, HSI, STI, KOSPI, Bovespa, IPC, Merval, IPSA e IGBC.

La estimación del exponente de Hurst H a través de las metodologías R/SC, R/SG, DFA0, DFA1 y DFA2 ha permitido establecer algunas de las limitaciones que estas metodologías presentan. Se ha buscado que los métodos de evaluación de H no conduzcan a una sobreestimación o sub-estimación del valor de H . En particular, se ha encontrado que el método R/SC sobreestima el valor de H para el caso de series de tiempo que tiene un número de datos menor a 5000. Adicionalmente, para los cinco métodos mencionados, ha sido necesario determinar el valor del tamaño de paquete óptimo que evita la sobreestimación de H . Estos dos aspectos han sido tenidos en cuenta para evaluar, tanto global como localmente, los valores de H para las series de tiempo de log-retornos diarios de los 18 índices bursátiles estudiados. Se ha encontrado, para todos los índices y con el método RS/C, que siempre $H > 0,5$, es decir que estas series de tiempo son persistentes, o sea que presentan correlación temporal de largo rango. Por otra parte, usando el método R/SG, se ha determinado la existencia de persistencia para las series de tiempo de 17 índices bursátiles, mientras que para la serie de tiempo del índice IPC no se tiene persistencia. A través de los métodos DFA0, DFA1 y DFA2 se ha obtenido que todas las series de tiempo presentan un valor de

H entre $[0,4544 - 0,6091]$, con anti-persistencia para las series de los índices FTSE100 y Bovespa. Usando los métodos DFA0, DFA1 y DFA2 se ha encontrado que ninguna de las series presenta tendencias. Haciendo uso de los métodos RS/G y DFA, para todas las series de tiempo estudiadas, se han evaluado los H usando un mismo tamaño mínimo de paquete de $n = 140$, encontrándose que para las series de tiempo de 16 índices se tiene persistencia. Para todas las series de tiempo de log-retornos diarios estudiadas en esta tesis, se ha analizado la variación en el tiempo del exponente de Hurst local $H(t)$, cuyos valores fueron obtenidos usando los métodos R/SG y DFA, tomando una ventana de observación local y constante de 500 datos y un tamaño óptimo de paquete de 14 datos. La variación de $H(t)$ se ha tomado como una herramienta para entender como se manifiestan y se propagan las crisis financieras del lunes negro e hipotecaria. De acuerdo con la literatura, el movimiento browniano fraccional asume que H es un exponente constante en el tiempo, pero los resultados que se obtuvieron muestran todo lo contrario. Esta variación en el tiempo de los valores de H locales observada para todas las series de tiempo consideradas, ha sido explicada en la literatura a través de modelos multifractales.

Se ha determinado que la variación en el tiempo del exponente de Hurst local $H(t)$ usando el método DFA, para todos los índices bursátiles estudiados, ha permitido encontrar un patrón de comportamiento para tiempos vecinos a las fechas en las que ocurrieron las crisis financieras del lunes negro e hipotecaria. Se ha observado que la forma que tienen los $H(t)$ en las vecindades a las fechas de las crisis es similar para todos los índices bursátiles estudiados. Para todos los índices, se ha observado un mismo patrón de agrupamientos (clusters) de grandes variaciones de los H locales, lo cual sucede después de que se presentan las dos crisis, de tal forma que las fluctuaciones son mas pronunciadas para la crisis del lunes negro. Adicionalmente, se ha visto que todos los mercados tienden a comportarse de una manera eficiente durante los últimos años dado que el exponente de Hurst local toma valores cercanos a 0,5. Con el objetivo de corroborar esta observación, se ha visto que las distribuciones de frecuencia de las series de tiempo de $H(t)$ para los últimos 10 años se han podido ajustar bastante bien a distribuciones gaussianas. Adicional a lo anterior, se ha encontrado que el patrón de comportamiento general visto para todas las series $H(t)$, puede ser tomado como una herramienta que permite caracterizar las crisis financieras, de tal forma que esta herramienta ha permitido evidenciar la manera en que se propagan las crisis en los diferentes mercados, independientemente de que sean consolidados o emergentes.

Para todas las series de tiempo de log-retornos diarios estudiadas en esta tesis, se ha analizado la variación en el tiempo de la volatilidad local $Var(t)$, tomando una ventana de observación local y constante de 500 datos. La variación de $Var(t)$ se ha tomado también como una herramienta para entender como se manifiestan y se propagan las crisis financieras del lunes negro e hipotecaria. A partir del análisis gráfico de las $Var(t)$, se han encontrado 3 patrones generales de comportamiento, lo cual ha permitido clasificar las series de tiempo de $Var(t)$ de la siguiente manera: (i) Patrón 1, las series de los índices DOW JONES, S&P500, Nasdaq, S&P/TSX, FTSE100, CAC40, IBEX35, DAX 30, Nikkei 225, Bovespa y IPC; (ii) Patrón 2,

las series de los índices STI, HSI, KOSPI, Merval, IPSA y IGBVL; Patrón 3, la serie del índice IGBC colombiano. Esta clasificación por volatilidad ha distinguido consistentemente como mercados eficientes a los asociados con los índices clasificados en el patrón 1. Se ha encontrado que para todos los índices bursátiles considerados, la forma en que varia la $Var(t)$ para tiempos antes y después es similar para las dos crisis financieras del lunes negro e hipotecaria. Se observa que antes de que ocurran esta dos crisis financieras, los Var locales se caracterizan por tener valores aproximadamente constantes, una vez se presentan las crisis se produce un incremento abrupto de la variancia cuyo valor se mantiene aproximadamente constante durante cierto tiempo y posteriormente se produce una notable disminución.

El análisis presentado a partir del comportamiento de las series de $H(t)$ y $Var(t)$ se puede extender al caso de otros índices bursátiles, con el fin de comprobar la validez de los patrones de comportamiento identificados en cercanías a las crisis financieras. Sin embargo, lo que si es claro, es que la localización geográfica del mercado en los resultados no es relevante, pues se encuentra que lo relevante es si el mercado se comporta como eficiente o emergente. Adicionalmente, a partir del cálculo de los coeficientes de correlación entre las series de $H(t)$, por una parte, y los coeficientes de correlación entre las series de $Var(t)$, por otra, se ha podido establecer el nivel de correlación existente entre los diferentes índices bursátiles estudiados. Se ha encontrado que existe alta correlación entre los índices norteamericanos, así como también una alta correlación entre los índices europeos. La correlación entre índices asiáticos en promedio es mediana, lo mismo que entre los índices latinoamericanos (sin incluir al índice IGBC colombiano).

Bibliografía

- [1] R. N Mantegna and H. E Stanley. *An introduction to econophysics, correlations and complexity in finance*. Cambridge University Press, 2000.
- [2] M. S. Keshner. *Proceedings of the IEEE* **70(3)** (1982):212–218.
- [3] H.E. Hurst. *Transactions of the American Society of Civil Engineers* **116** (1951):770–799.
- [4] S. Havlin H. E. Roman Y. Goldreich E. Koscielny. Bunde, A. Bunde and H. J. Schellhuber. *Physical Review Letters* **81** (1968):729–732.
- [5] J. Beran. *Statistics for Long-Memory Processes*. Chapman Hall, 1994.
- [6] B. B. Mandelbrot. *New York: W. H* **45** (1982):429.
- [7] J. Feder. *Fractals*. Plenum Press, 1988.
- [8] B. B. Mandelbrot and John Van Ness. *SIAM review* **4** (1968):422–437.
- [9] J. R. Wallis B.B Mandelbrot. *Water Resources Research* **2** (1969):321–340.
- [10] L. Bachelier. *Progress of Theoretical Physics* **7** (1900):21–86.
- [11] A.Einstein **17** (1905):549–560.
- [12] M.R.S.E Hon R. Brown, F.R.S and R.I. Acad. *A brief account of microscopical observations, on the prticles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies*. Not published, 1827.
- [13] Selfsimilar Processes P. Embrechts, M Maejima. *Selfsimilar Processes*. Princeton University Press, 2002.
- [14] Eugene F. Fama. *Journal of Business* **36- 4** (1963):420–429.
- [15] A. N.Kolmogorov. *DAN* **98** (1954):527–538.
- [16] J. E. Trinidad Segovia M. A. Sanchez Granero and J. Garca Perez. *Physical Review A* **287** (2008):5543–5551.

- [17] A. Goldberger S. Havlin F. Sciortino M. Simons C.K Peng, S. Buldyrev and H.E Stanley. *Journal of Nature* **356** (1992):168–171.
- [18] S. Havlin M. Simons H.E. Stanley A. L. Goldberger C. K. Peng, S. V. Buldyrev. *Physical Review E* **49** (1994):1685–1689.
- [19] P. W. Burton Y. Xu. *Tectonophysics* **423** (2006):125–136.
- [20] M. F. Osborne. *The stock market and finance from the physicists viewpoint*. Crossgar Pr., 1992.
- [21] P. Lévy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **44** (1938):19–20.
- [22] Edward Elgar E.Allen, Cambridge. *Financial Crises and Recession in the Global Economy*. Great Britain at the University Press, 1994.
- [23] H. Stephan. *The Political Economy of the Asian Financial Crisis*. Washington, D.C., Institute for International Economics, 2000.
- [24] A. Chakraborti B. K. Chakrabarti and A. Chatterjee. *Econophysics and Sociophysics*. 2006.
- [25] A. Gheorghiu. *Investment Econophysics (in Romanian)*. Victor Publishing House, Bucharest, 2007.
- [26] A. Chatterjee and B. K. Chakrabarti. *Econophysics of Markets and Business Networks*. Springer, 2007.
- [27] http://www.definicionabc.com/economia/crisis_financiera.phpixzz3LKqjCBD. year.
- [28] Carlos Obregón. *La crisis financiera mundial: Perspectivas de México y América Latina*. Siglo XXI editores, s.a., 2011.
- [29] N. M. Aranda Camacho. *Coefficientes de Hurts de series de tiempo de variaciones diarias de temperatura en Colombia usando los métodos R/S y DFAn y su relacion con las distribuciones de frecuencia de los datos de las series*. Trabajo de grado. Universidad Nacional de Colombia, 2012.
- [30] L. A. Martín Montoya. *Coefficiente de Hurst en series de tiempo sismológicas empleando los metodos R/S clásico, R/S modicado, DFAn y su relacion con las distribuciones de frecuencia para diferentes locaciones globales*. Trabajo de grado. Universidad Nacional de Colombia, 2012.
- [31] C. J. Quimbay L. A. Martin-Montoya, N. M. Aranda-Camacho. *Physica A* **421** (2015):124–133.

-
- [32] R. L. Costa and G. L. Vasconcelos. Preprint submitted to Elsevier Science, <http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0302342> (2008).
- [33] A. K. Basu. *Introduction to stochastic processes*. Alpha Science International Ltd, 2003.
- [34] Z. Brzeńiak y T. Zastawniak. *Basic stochastic processes*. Springer, 1999.
- [35] S. C. Port P. G. Hoel and C. J. Stone. *Introduction to stochastic processes*. Houghton Mifflin Company, 1972.
- [36] S.A Ross. *First course in probability*. Macmillan Publishing Company, 1994.
- [37] K. L. Chung. *Markov chains with stationary transition probabilities*. Springer, 1960.
- [38] D. Isaacson and W.M Richard. *Markov Chains Theory and Applications*. John Wiley Sons, 1999.
- [39] J. Norris. *Markov chains*. Cambridge University Press, 1997.
- [40] O. Manuel. *Elementos de estadística de no equilibrio y sus aplicaciones el transporte de en medios desordenados*. Editorial Reverté, 2003.
- [41] JN. Wiener. *Journal of Mathematical Physics* **2** (1923):132–174.
- [42] L. Arnold. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. John Wiley Sons, 1974.
- [43] Kiyosi Itô. *Proceedings of the Imperial Academy* **20** (1944):519–524.
- [44] K. Itô. *On Stochastic Differential Equations*. American Mathematical Society, 1951.
- [45] P. Nelson. *Física Biológica*. Editorial Reverté, 2005.
- [46] A.Einstein. *Annalen der Physik* **34** (1911):591–592.
- [47] A.Einstein. *Annalen der Physik* **19** (1906):371–381.
- [48] J. B. Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*. Fisher - University of Toronto, 1822.
- [49] M. Cassandro and G. Jona-Lasinio. *Advances in Physics* **27** (1978):913–941.
- [50] P. Dutta and P. M. Horn. *Reviews of Modern Physics* **53** (1981):497–516.
- [51] G. Tilmann and S. Martin. *SIAM Review* **46** (2004):269–282.
- [52] L. M. Kaplan and C.C. J. Kuo. *Transactions on Signal Processing*. IEEE, 1994.

- [53] S. Davies and P. Hall. *Journal of the Royal Statistical Society Series.B* **61** (1999):3–33.
- [54] Susana L.D. Paiva Marcelo A. Savi Flavio M. Viola. *Ecological Modelling* (2010).
- [55] L. Dagdug E. Rodriguez J. Alvarez-Ramirez, J. Alvarez and J. Echeverria. *Physica A* **387(14)** (2008):3629–3640.
- [56] Y. F. Chang C. C. Chen, Y. T. Lee. *Journal of Physics A* **387** (2008):4643–4648.
- [57] R.Weron. *Empirical Science of Financial Fluctuations* **3** (2002):110–119.
- [58] D. Lai. *Computational Statistics Data Analysis* **45** (2004):549–562.
- [59] Y. F. Chang C. C. Chen, Y. T. Lee. *Journal of China University of Mining and Technology* **16** (2006):425–428.
- [60] G. Poveda. *Advances in Water Resources* **34** (2011):243–256.
- [61] Y. Liua J. Wub Y. Hanb J. Penga, Z. Liub. *Journal of Industrial Ecology* **14** (2012):28–39.
- [62] R. O. Weber P. Talkner. *Physical Review E* **62** (2000):150–160.
- [63] J. Lee J. Choi I. Choi S. Kim J. Lee, B. Yang. *Journal of Clinical Neurophysiology* **118** (2007):2489–2496.
- [64] J. Lipka and Los. *Persistence characteristics of European stock indexes*. Working Paper Kent State University Kent, 2002.
- [65] M. Corazza and A.G Malliaris. *Journal of Multinational Finance* **6** (2002):387–401.
- [66] B. Yu C. Los. *Economic Working Papers Archives* **0508008** (2004).
- [67] D.O. Cajueiro and B. M. Tabak. *Chaos Solitons and Fractals* **12** (2004):349–352.
- [68] C. Los S. Zong N. Kyat. *Multinational Financial Management* **16** (2006):269–290.
- [69] J.P Singh and S. Prabakaran. *International Research Journal of Finance and Economics* **14** (2008):165–176.
- [70] A. Lo and A.C. Mackinlay. *The Reviews of Finance Studies* **1** (1988):41–66.
- [71] Edgar E. Peters. *Financial Analyst Journal* **48** (1992):321–340.
- [72] GS. Shea. *Empirical Economics* **16** (1991):287 – 312.
- [73] Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics (Wiley Finance Series). *Edgar E. Peters, Donada Peters*. WILEY, 1994.

- [74] Principles of Financial Engineering. *Robert Kosow and Salih N. Naftci*. Elsevier Inc, Second Edition 2008.
- [75] Chaos, Prices Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, and Market Volatility. *Edgar E. Peters*. John Wiley and Sons, 1996.
- [76] E.H.Lloyd A.A.Anis. *Biometrika* **63** (1976):283–298.
- [77] P Carpena P Bernaola-Galvan HE Stanley PC Ivanov Z. Chen, K Hu. *Physical Review E* **71** (2005):051101.
- [78] J. W. Kantelhardt T. Penzel J. H. Peter A. Bunde, S. Havlin and K. Voigt. *Physical A* **85** (2000):1413.
- [79] A. L. Goldberger S. M. Osadnik Sm C.-K. Peng M. Simons S. Havlin, S. V. Buldyrev and Chaos H. E. Stanley. *Journal of chaos solitons fractals* **6** (1995):171.
- [80] A. L. Goldberger P. Ch. Ivanov C.-K. Peng S. Havlin, L. A. Nunes Amaral and H. E. Stanley. *Physical Review A* **99** (1999):274.
- [81] M Ausloos K Ivanova. *Physical Review A* **274** (1999):349–354.
- [82] S. Havlin R. N. Mantegna M. E. Matsu C.-K. Peng M. Simons S. V. Buldyrev, A. L. Goldberger and H. E. Stanley. *Physical Review E* **51** (1995):5084–5091.
- [83] S. Miyazima H. Yoshinaga and S. Mitake. *Physical Review A* **280** (2000):582–586.
- [84] D. R. Chialvo C. A. Perazzo, E. A. Fernandez and P.I. Willshaw. year.
- [85] E. E. Clothiaux K. Ivanova, M. Ausloos and T. P. Ackerman. *Europhys Letters* **52** (2000):40–46.
- [86] M. Meyer C.-K. Peng Y. Liu, P. Cizeau and H. E. Stanley. *Physical Review A* **245** (1997):437–440.
- [87] N. Vandewalle and M. Ausloos. *Physical Review A* **246** (1997):454–459.
- [88] N. Vandewalle and M. Ausloos. *Physical Review E* **58** (1998):32–68.
- [89] P. Boveroux A. Minguet M. Ausloos, N. Vandewalle and K. Ivanova. *Physical Review A* **274** (1999):229.
- [90] P. Grau-Carles. *Physical Review A* **299** (2001):521–527.
- [91] R. Quintanilla M. Rodriguez-Achach H.F. Coronel-Brizio, A.R. Montoya. *Physical Review A* **380** (2007):391–398.

-
- [92] Fractal Geometry K. Falconer. *Fractal Geometry*. Mathematical Foundations and Applications, Wiley, Chichester, 1990.
- [93] M. Benjamin O. C. Daniel. *Physical Review A* **336** (2004):521 – 537.
- [94] R. Eduardo F. A Guillermo A. R. Jose, A. Jesus. *Physical Review A* **387** (2008):6159–6169.
- [95] R. Murugan S.V. Muniandy, S.C. Lim. *Physical Review A* **301** (2001):407–428.
- [96] Douglas Breeden and R. Litzenger. *Journal of Business* **51** (1978):621–651.
- [97] Mark Rubinstein. *Journal of Finance* **49** (1994):771–818.
- [98] R. S Tsay. *Analysis of Financial Time Series*. Second Edition Wiley- Interscience, 2005.
- [99] P. J. Brockwell and R. A. Davis. *Time Series: Theory and Methods*, 2nd edition. Springer-Verlag, 1991.
- [100] P. J. Brockwell and Davis. *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer, 1996.
- [101] Lo A. W Campbell, J. Y and A. C. MacKinlay. *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- [102] F. Black and M. Sholes. *Journal of Political Economy* **81** (1973):637–654.
- [103] Emanuel Derman and 32–39 (1999). I. Kani, Risk 7. *Risk* **7** (1999):32–39.
- [104] Pricing D. Bruno and hedging with smiles. *Pricing and Hedging with Smiles*. Working paper, London, 1993.
- [105] Joel Houston Eugene Brigham. *Fundamentals of Financial Management*. Thomson South - Western, 2007.
- [106] S. Gurusomy. *Indian Financial System*. Mc Graw - Hill Education, 2009.
- [107] Benjamín Hernández. *Bolsa y Estadística Bursátil*. Díaz de Santos, 2000.
- [108] Xavier Puig Xavier Brun, Oscar Elvira. *Mercado de renta variable y mercado de divisas*. PROFIT, 2000.
- [109] Eugene F. Fama. *The Journal of Business* **38** (1965):34–85.
- [110] Eugene F. Fama. *The Journal of Finance* **25** (1970):383–417.
- [111] P. A. Samuelson. *Industrial Management Review* **6** (1965):41–45.

- [112] Eugene F. Fama. *Financial Analysts Journal* **21** (1965):55–59.
- [113] Eugene F. Fama and French. *Journal of Political Economy* **96** (1988):246–273.
- [114] M. Patriarca A. Chakraborti and M.S. Santhanam. *arXiv:0704.1738v1 [q-fin.ST]* 13 Apr 2007
- [115] Eddy Lee. *Crisis financiera Asiatica*. Copyright, 2000.
- [116] http://www.eltiempo.com/archivo/documento/MAM_938303.
- [117] Tim Metz. *Black Monday The Stock Market Catastrophe of october 19*. Beard Books, 1988.
- [118] David Adel. *Mortange Crisis: Fraud, Lies and Deceid*. All Rights Reserved, 2009.
- [119] <http://gestion.pe/economia/como-se-origino-peor-crisis-financiera-historia> 2076165.
- [120] Sharma and Malti Sharma. *Journal of Laboratory to Lands* **1** (2009):266–270.
- [121] S. Balgopal. ECONOPHYS-KOLKATA V. *International Workshop on Econophysics of order driven market*
- [122] Econophysics Colloquium S. Balgopal. Econophysics Colloquium, 4-6, 2010, 848,.
- [123] <http://http://finance.yahoo.com/>.
- [124] Topics in Derivates. *Jonh Henning Fock*. Books on Demand GmbH, 2008.
- [125] Examining the Correlations of the NASDAQ 100 Index. *Chainaring Srinutshasad*. UMI, 2009.
- [126] Finance and Investment Handbook. *John Doenes and Jordan Elliot Goodman*. Copyright, 2003.
- [127] Computational Methods in Financial Engineering. *Erricos Kontoghiorghes, Peter Winker and Berg Rustem*. Springer, 2008.
- [128] Mediumsmall caps en la Bolsa Española. *María Eugenia Escudero*. Netbiblo, 2006.
- [129] Futures Markets:Made Easy with 250 Question and Answer. *Sunil Pasomeswaran*. McGraw-Hill Education, 2006.
- [130] Analisis del efecto día de semana en los mercados accionarios latinoamericanos. *Werner Kristjanpaller Rodrigues*. Lecturas de Economía, 2009.

- [131] B. B. Mandelbrot. *People and events behind the "Science of Fractal Images"*. Springer-Verlag New York, 1988.
- [132] J. Lévy Véhel R. F. Peltier. *INRI Technical Report 2645* (1995).