



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Estudio de migración poblacional usando Redes Complejas e Influencias Indirectas

**Jorge Catumba Ruiz**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas y Estadística  
Manizales, Colombia  
2015



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# An study of Population Migration using Complex Networks and Indirect Influences

**Jorge Catumba Ruiz**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas y Estadística  
Manizales, Colombia  
2015

# Estudio de migración poblacional usando Redes Complejas e Influencias Indirectas

**Jorge Catumba Ruiz**

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Ciencias – Matemática Aplicada**

Directores:

Ph.D. Gerard Olivar Tost

Ph.D. Johan Manuel Redondo Ortegón

Línea de Investigación:

Redes Complejas

Grupo de Investigación:

PCI Dynamics

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas y Estadística

Manizales, Colombia

2015



## Dedicatoria

A mi familia que, a pesar de la distancia, siempre me ha brindado su apoyo. A esa persona especial que me ha dado tanto para aprender.



# Agradecimientos

Agradecer al incommensurable el don de la vida. A mis profesores por sus constantes guías y recomendaciones en cada parte del desarrollo de este trabajo. A Jesús Hernando Pérez (Pelusa) por mostrarme el valor humano que posee la matemática e inspirarme para caminar este camino.

## Resumen

Los fenómenos migratorios de poblaciones humanas datan desde el mismo origen de la humanidad. A pesar de la cantidad de estudios científicos que se han desarrollado al respecto aún hay características que carecen de explicación. Este trabajo se enfoca en construir una red compleja de migración modelada mediante un sistema de Filippov y presenta una metodología para encontrar Influencias Indirectas en dicha red. Además, se aplica esta construcción a la red de municipios del Valle del Cauca en donde se obtiene la solución del sistema y que, bajo ciertas condiciones, los asentamientos urbanos más poblados atraen los migrantes siempre que cuenten con capacidad de carga y en caso contrario los asentamientos vecinos obtienen todo el interés.

**Palabras clave:** Redes Complejas, Sistemas de Filippov, Influencias Indirectas, Migración.

## Abstract

The migratory phenomena of human populations is know since the origin of humanity. Besides the amount of scientific studies made about this matter there are still characteristics without explanation. This document is focused on building a migration complex network modeled by a Filippov system and introduces a methodology to find Indirect Influences on such network. Moreover, this construction is applied to the network of towns from Valle del Cauca where the system solution is found. Is also found that, under certain conditions, more populated towns are the center of migration until their loading capacity allow it, after that, neighbour towns get all the interest of migration.

**Keywords:** Complex Networks, Filippov Systems, Indirect Influences, Migration

# Declaración

Me permito afirmar que he realizado la presente tesis de manera autónoma y con la única ayuda de los medios permitidos y no diferentes a los mencionados en la propia tesis. Todos los pasajes que se han tomado de manera textual o figurativa de textos publicados y no publicados, los he reconocido en el presente trabajo. Ninguna parte del presente trabajo se ha empleado en ningún otro tipo de tesis.

Manizales, 07.09.2015

---

Jorge Catumba Ruiz

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>vii</b>
<b>Resumen</b>	<b>viii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	3
1.2. Justificación . . . . .	4
1.3. Objetivos . . . . .	5
1.4. Metodología . . . . .	5
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>7</b>
2.1. Redes Sociales y Capital Social en la Migración Poblacional . . . . .	7
2.2. Sistemas de Filippov . . . . .	8
2.2.1. Definiciones y conceptos . . . . .	8
2.3. Redes Complejas . . . . .	9
2.3.1. Concepto formal . . . . .	9
2.3.2. Ejemplos . . . . .	10
2.4. Influencias Indirectas . . . . .	19
2.4.1. Presentación . . . . .	19
2.4.2. Influencias y dependencias indirectas en Redes Complejas . . . . .	22
2.5. Conclusiones de capítulo . . . . .	27
<b>3. Caso de estudio: Valle del Cauca</b>	<b>30</b>
3.1. Nodos y dinámica de crecimiento poblacional . . . . .	30
3.2. Aristas y condición de migración . . . . .	30
3.3. Dinámica de migración . . . . .	31
3.4. Modelo para la dinámica de la red . . . . .	32
3.5. Solución numérica e interpretación . . . . .	32
3.6. Análisis de influencias y dependencias indirectas . . . . .	38
3.7. Discusión . . . . .	40
3.8. Conclusiones de capítulo . . . . .	42
<b>4. Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>43</b>
4.1. Conclusiones . . . . .	43

Contenido	1
4.2. Recomendaciones . . . . .	43
<b>Bibliografía</b>	<b>45</b>

# 1 Introducción

El estudio de Redes Complejas ha adquirido una relevancia considerable en los últimos años. Esto es debido a su gran campo de aplicación y a su consistente base teórica. Es posible encontrar estudios en la materia que van desde la economía [3, 2], pasando por la biología [33, 20], hasta a la física [14, 6]. Por supuesto, su estudio puro dentro de las matemáticas es también de alto interés [35, 28].

Los modelos basados en Redes Complejas suelen representar problemas del mundo real en los que existen distintas entidades que son de un mismo tipo, aunque también pueden considerarse varios tipos de éstas, y entre ellas hay ciertas interacciones o conexiones. En esencia una Red Compleja es un grafo al que se le añaden características dinámicas. Un ejemplo ampliamente estudiado lo constituyen las redes sociales en las que las entidades son personas o grupos de personas y las conexiones son los lazos que se forman entre ellas ya sean familiares, laborales, etc. En este tipo de redes es muy común la realización de estudios de difusión e identificación de nodos “importantes” de manera que sea posible ejercer cierto control sobre la red o se aprovechen sus características difusivas. Otro ejemplo muy popular está constituido por las redes de poblaciones urbanas en donde las entidades son regiones geográficas pobladas y las conexiones pueden ser las vías de transporte, comunicación o las relaciones comerciales que poseen, entre muchas otras. Para este tipo de redes también se estudian la difusión y la importancia de los nodos y además es posible estudiar las características de las conexiones llámense dinámica, estabilidad, resistencia, etc. Matemáticamente estas Redes Complejas son comúnmente representados mediante un sistema de ecuaciones diferenciales al cual se le pueden añadir términos estocásticos si se precisa de ello.

Además de los métodos ampliamente usados en redes una reciente metodología promete ser relevante dentro de dichos estudios. Esta ha sido llamada Influencias Indirectas [11]. En ella se consideran varios algoritmos, también conocidos como algoritmos de análisis de enlaces (*link analysis*), entre los que destaca el muy popular *PageRank* [5] desarrollado por los fundadores de Google para su buscador. En [11] se propuso un nuevo algoritmo llamado *PWP* con el cual se han realizado ya varios estudios entre los que sobresalen [13, 12].

La metodología de Influencias Indirectas fue construida a partir del estudio de grafos y pretende clasificar los nodos según la siguiente idea: si al iniciar una caminata de longitud indefinida por el grafo, siguiendo sus aristas, nos encontramos en uno de los nodos, entonces al finalizar la caminata ¿en cuál nodo estaremos ubicados? Una manera de resolver esto es mediante una cadena de Markov y es lo que usa el método *PageRank* [5] cuyo resultado es un vector de probabilidades para cada nodo y allí la probabilidad indica qué tanta influencia

recibe cada nodo, de manera que la más alta corresponde al nodo que recibe la mayor influencia por parte de la red. Otra manera de ver esto es pensando no en las llegadas sino en los orígenes para lo cual se obtendría otro vector en el que se clasifican los nodos según la cantidad de influencia que ejercen sobre la red. Por supuesto hay otros algoritmos diferentes al *PageRank* y uno de ellos es el anteriormente mencionado *PWP* cuyo resultado son dos vectores: uno clasificando los nodos por influencia recibida de la red (dependencia indirecta) y el otro por influencia ejercida sobre la red (influencia indirecta).

Debido a que la metodología de Influencias Indirectas se aplica en Teoría de Grafos y las Redes Complejas están íntimamente relacionadas con la misma entonces es de interés analizar cómo se pueden aplicar los algoritmos de Influencias para obtener información de Redes. Este documento se centra en el algoritmo *PWP*.

## 1.1. Planteamiento del problema

En muchos países el movimiento de grupos de personas en busca de nuevos lugares para vivir representa una situación que abarca problemas económicos, sociales, políticos, ambientales, entre otros. Está el caso de los Estados Unidos con los inmigrantes latinos que cruzan la frontera mexicana, llegan a las costas de la florida en bote o arriban de alguna otra manera. Están los grandes grupos en medio oriente huyendo de las guerras en sus naciones. Están los desplazados colombianos llegando a las capitales de los departamentos buscando sobrevivir. También están quienes buscan, simplemente para mejorar su estilo de vida, mudarse a un lugar con mejor calidad de vida.

El fenómeno es tan pertinente que los académicos le han dedicado estudios en diferentes ramas de la ciencia. En matemática aplicada se pueden encontrar artículos como [9, 10, 15, 34] los cuales utilizan la metodología de Redes Complejas, otros como [7] tienen un enfoque estadístico, en [1] se detallan varios modelos matemáticos de migración. Otros documentos relacionados son [16, 24, 26].

La necesidad de moverse a otro lugar en busca de mejores condiciones nos acompaña desde los inicios de la humanidad, ya sea por violencia, mala economía, esperanza o cualquier otro motivo. Ahora entendemos ciertas partes del fenómeno: sus causas, sus efectos, etc. pero no podemos, entre otras cosas, ni predecir cuándo será la próxima migración masiva, ni sabemos cómo controlar los efectos de manera efectiva o mucho menos evitarla.

Observando un caso cercano tenemos el evidente problema de la ciudad de Bogotá. Al ser la capital del país es el destino preferido por los colombianos que buscan mejores oportunidades. Los problemas de seguridad, transporte, cultura ciudadana, precios de inmuebles y demás son síntomas de que está sobrepoblada. Los municipios cercanos: Soacha, Fusagasugá, Chía, etc. han mostrado un crecimiento acelerado en los últimos años. ¿Será que la gente ahora llega a ellos en vez de ir a la capital o la gente del distrito se ha ido a los lugares aledaños? El fenómeno está en pleno auge allí, pero nos interesa construir un modelo más simplificado y con mejores datos para poder concentrarnos en los detalles que nos interesan. En el

departamento de Valle del Cauca se están observando los primeros indicios de un evento similar. Además, se cuenta con datos apropiados para realizar un estudio con cierto nivel de precisión. Por ello el estudio de caso se concentrará allí.

De manera que planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Es posible explicar mediante Influencias Indirectas la observación empírica de que las ciudades aledañas a la ciudad capital experimentan un crecimiento acelerado cuando esta última ya no es de tanto interés para el migrante?

Este documento se enfoca en la red de municipios del Valle del Cauca para encontrar responder esta pregunta en este caso específico. Para lo cual se construyó una red dinámica que modela mediante un sistema de Filippov el fenómeno migratorio la cual se resolvió de manera numérica. Además, se utilizan Influencias Indirectas con el objeto de calcular sobre esta red los indicadores de relevancia para resolver la pregunta de investigación. Los datos de población y las tasas netas de mortalidad y natalidad se tomaron de las proyecciones para 2010 del censo del DANE realizado en 2005 [8].

## 1.2. Justificación

Varios estudios de migración poblacional utilizan conceptos de redes sociales y capital social para tratar de explicar las observaciones empíricas que se dan, por ejemplo en el caso de migración de México a Estados Unidos como se describe en [31]. Allí, el autor muestra que a pesar de que una migración suele iniciar principalmente por razones económicas prontamente se convierte en un fenómeno social debido a las relaciones que existen entre los primeros migrantes y los que les suceden. Por lo que inherentemente a la migración existen redes sociales que funcionan como un canal de recursos para el individuo que considera migrar. Dichos recursos son de diferente índole y pueden ser económicos, logísticos y hasta políticos. La complejidad de simular redes sociales radica en que su estructura (topología) está en constante cambio y además deben tenerse en cuenta los recursos de la red en términos de capital económico y social.

El modelo propuesto en este documento hace uso de los conceptos clásicos de la migración poblacional y hace uso de las ideas que aparecen desde las redes sociales y el capital social que poseen para determinar de qué manera se efectúa la migración desde un casco urbano a otro. No se hacen explícitas las redes sociales subyacentes al modelo por razones de simplicidad y el concepto de capital social se aborda desde lo que se conoce como la capacidad de carga de los municipios. Esto nos da cierta capacidad para poder hablar de las Influencias Indirectas de la red pero nos limita para hablar en detalle de las redes sociales inherentes.

Así pues, como se plantea el modelo para la red del Valle del Cauca nos da herramientas para poder hablar del movimiento de las personas entre nodos y permite dar respuesta a la pregunta de investigación planteada anteriormente. Además permitirá deducir una manera de utilizar los métodos de Influencias Indirectas, en particular el *PWP*, en los estudios basados en Redes Complejas.

## 1.3. Objetivos

Se plantea como objetivo general establecer una primera aproximación al estudio de Influencias Indirectas dentro del ámbito de las Redes Complejas aplicado al fenómeno migratorio dentro de una red de asentamientos urbanos que será entendido de una manera simplificada para poder observar los resultados de Influencias en un modelo básico que permita una extrapolación a la vida real.

Los objetivos específicos son:

- Explorar los elementos socio-económicos que están involucrados en el fenómeno de migración no forzada dentro de una red de poblaciones humanas.
- Identificar los aspectos claves de Redes Complejas que permitan aplicar la metodología de Influencias Indirectas.
- Establecer una metodología para la aplicación del método *PWP*, de Influencias Indirectas, a una red compleja particular.
- Determinar si los datos arrojados por Influencias Indirectas aplicadas a la red compleja del Valle del Cauca presentan información representativa del fenómeno migratorio.

## 1.4. Metodología

Para realizar esta investigación se observó en primera medida un síntoma interesante en varias redes de ciudades en las que se conoce hay migración de personas. Cuando la ciudad objetivo de la migración no puede expandirse más los cascos urbanos vecinos comienzan a recibir toda la atención de la migración y experimentan un crecimiento acelerado. Se compararon las observaciones con los estudios académicos de migración buscando una explicación teórica al síntoma encontrando varios conceptos bien fundamentados pero aún carentes de un nivel cuantitativo. Esta revisión se exhibe en la Sección (2.1).

Posteriormente se revisó a literatura disponible sobre Sistemas de Filippov y Redes Complejas. Dentro de la extensa documentación se identificaron los conceptos clave en los cuales se podía enfocar la implementación de los algoritmos de Influencias Indirectas. Se construyó un modelo de red compleja para migración simple que permitiera identificar características de este tipo de redes. Todo este análisis se encuentra en las Secciones (2.2) y (2.3).

Luego se realizó una consulta acerca del estado del arte de las Influencias Indirectas. Dentro de los distintos algoritmos se consideró que el método *PWP* es el más adecuado para este trabajo, aunque varios de los otros algoritmos pueden utilizarse sin problema. Una vez identificadas las herramientas y los conceptos se procedió con el diseño e implementación de un algoritmo que permitiera calcular influencias en la red compleja de migración. Este proceso se muestra en la Sección (2.4).

A continuación se procedió a realizar la simulación con la red del Valle del Cauca. Allí se graficaron los resultados de población, influencias y dependencias indirectas. En el Capítulo (3) se muestran los resultados y su respectiva interpretación.

Finalmente, se establecieron las conclusiones de la investigación. También se realizó la discusión de los resultados encontrados y se contrastaron con algunos estudios realizados sobre la misma problemática desde otras áreas de la ciencia. Estas se presentan en el Capítulo (4).

## 2 Marco Teórico

### 2.1. Redes Sociales y Capital Social en la Migración Poblacional

Tanto los modelos clásicos como los modelos más contemporáneos reconocen en el fenómeno migratorio una componente social que afecta directamente el problema [31, 25, 24, 26]. Si bien, dice Pérez en [31], la migración suele comenzar como respuesta a un problema económico para luego convertirse en un asunto de índole social. Cuando un individuo toma la decisión de migrar lo hace basado en las migraciones previas y está influenciada por las experiencias de su círculo cercano de familia, amigos y conocidos. Es decir, para decidir el individuo observa su red social íntima y de ella captura los recursos que precisa para ello. Además compara las redes sociales a las que pertenece en su localización actual y las del lugar al que planea llegar con el fin de comparar el capital social presente en las mencionadas redes y deducir si es beneficiosa la movilización.

Aquí el capital social es como lo define Portes [29]. Por lo que cada red social tiene un capital social en términos de recursos económicos, logísticos, políticos, culturales y demás. Además, por las condiciones naturales del desarrollo social, una comunidad humana posee un mayor capital social cuando hay mayor cantidad de habitantes.

La manera clásica de modelar matemáticamente la migración entre regiones a una escala macro es mediante Modelos de Interacción [1] que de manera general se expresan mediante

$$M_{ij} = k \frac{f(R_i, A_j)}{\Phi(d_{i,j})} \quad (2-1)$$

en donde  $M_{ij}$  representa el número de migrantes de la región  $i$  a la región  $j$ ,  $f$  representa una función de fuerzas repulsoras ( $R_i$ ) en la región de origen y fuerzas atractoras ( $A_j$ ) en la región destino. La función  $\Phi$  depende de la distancia  $d_{ij}$  entre las regiones consideradas y  $k$  es un coeficiente de proporcionalidad. De todos los posibles modelos de interacción uno muy popular, en física social, es el gravitacional el cual asume  $f(R_i, A_j) = P_i P_j$  y  $\Phi(d_{ij}) = d_{ij}^2$  en donde  $P_i$  y  $P_j$  son las poblaciones (masas) totales en las regiones  $i$  y  $j$  respectivamente. La falencia principal de este modelo es su simetría ( $M_{ij} = M_{ji}$ ) que no es consecuente con las observaciones empíricas. Así que, como en el modelo físico de la gravitación universal, un individuo se va a sentir atraído hacia una región si su población es lo suficientemente grande y su distancia al punto de origen es lo suficientemente pequeña. Esto coincide entonces con

los conceptos dados mediante redes sociales y su capital social relacionado en donde un individuo va a preferir una region en donde se cuente con un buen capital social (recursos) y esto es frecuente en regiones donde la cantidad de habitantes es considerablemente grande. En este estudio se usa el modelo de interacción gravitacional con una ligera modificación que elimina la simetría. Se detalla esta construcción en el caso de estudio del Capítulo 3.

Cabe aclarar que aunque las redes sociales son un tipo de red compleja en este documento sólo alude a ellas para justificar el proceso migratorio y el modelamiento empleado para tal fin. La red compleja relevante en este estudio es la que conforman los municipios de una región y sus vías de transporte; es decir, el medio físico en el que habitan las redes sociales involucradas en la migración.

## 2.2. Sistemas de Filippov

El primer concepto matemático a trabajar es el de los Sistemas de Filippov. Esto debido a que la red compleja construída en el Ejemplo (2.2) del Capítulo (2.3), que nos permite modelar la migración de poblaciones al igual que la red del Capitulo (3), está basada en un sistema de ecuaciones diferenciales de este tipo.

### 2.2.1. Definiciones y conceptos

Un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2-2)$$

es un sistema suave a trozos [21] si  $f$  está definida a trozos, es decir

$$f(x) = \begin{cases} f^{(1)}(x) & \text{si } x \in S_1 \subseteq \mathbb{R}^n \\ f^{(2)}(x) & \text{si } x \in S_2 \subseteq \mathbb{R}^n \\ \vdots & \\ f^{(n)}(x) & \text{si } x \in S_n \subseteq \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2-3)$$

en donde  $\{S_i\}_{i=1,2,\dots,m}$  es una familia disyunta de subconjuntos abiertos, conocidas como regiones, de  $\mathbb{R}^n$  separados por fronteras, conocidas como regiones de conmutación,  $(n-1)$ -dimensionales. La unión de la familia  $\{S_i\}$  y todas las fronteras  $\Sigma$  es igual al espacio de estados del sistema. Además, se supone que las funciones  $f^{(i)}$  y las fronteras son suaves.

Ahora, un sistema suave a trozos discontinuo, o sistema de Filippov, es aquel en el cual  $f^{(i)}(x) \neq f^{(j)}(x)$  para  $x \in \Sigma_{ij}$ . Esto es, a un punto  $x$  en la frontera  $\Sigma_{ij}$  que separa a  $S_i$  de  $S_j$  le corresponden dos vectores  $\dot{x}$  distintos:  $f^{(i)}(x)$  y  $f^{(j)}(x)$ .

La manera usual de definir el vector en la frontera  $\Sigma_{ij}$  es usando el método convexo de Filippov [17]. Hay dos presentaciones equivalentes de este método. La primera de Kuznetsov et. al. [21] y la segunda de Guardia et. al. [19].

Bajo la notación dada en [21], para ciertos  $i$  y  $j$  distintos, se tiene que la frontera que separa las regiones  $S_i$  y  $S_j$  es

$$\Sigma_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) = 0\} \quad (2-4)$$

siendo  $H$  una función escalar con gradiente  $H_x$  no nulo en  $\Sigma$  y las regiones dichas están definidas mediante

$$S_i = \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) < 0\} \quad (2-5)$$

$$S_j = \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) > 0\}$$

De manera que el vector que se asigna a  $x$  en  $\Sigma_{ij}$  es

$$g(x) = \lambda f^{(i)}(x) + (1 - \lambda) f^{(j)}(x), \quad (2-6)$$

en donde

$$\lambda = \frac{\langle H_x(x), f^{(j)}(x) \rangle}{\langle H_x(x), f^{(j)}(x) - f^{(i)}(x) \rangle} \quad (2-7)$$

y el paréntesis  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa el producto escalar usual.

En la notación de [19], la frontera se denota  $\Sigma$ , la región  $S_j$  se nota  $\Sigma^+$ , la región  $S_i$  se nota  $\Sigma^-$  y la función  $H$  se escribe  $f$ . De manera que el método convexo se escribe

$$Z_s(p) = \frac{Y f(p) X(p) - X f(p) Y(p)}{Y f(p) - X f(p)}, \quad (2-8)$$

en donde  $p = x$  es el punto de la región de conmutación,  $X(p) = f^{(j)}(x)$ ,  $Y(p) = f^{(i)}(x)$ ,  $X f(p)$  es la derivada de Lie de  $f$  respecto al campo vectorial  $X$  en  $p$ , que está definida como  $X(p) \cdot \nabla f(p)$ . Además, los productos son productos escalares.

No es complicado verificar que  $g(x)$  definida como en la Ecuación (2-6) es igual a  $Z_s(p)$  definida como en la Ecuación (2-8). En este documento se usará la segunda notación un poco modificada.

Finalmente, debido a que el espacio de estados está dividido en varias regiones y fronteras, los puntos de equilibrio de un campo vectorial  $X_i = f^{(i)}$  pueden estar o no en la región  $S_i$ . De manera que si  $x$  es un punto de equilibrio de  $X_i$  y  $x \in S_i$  decimos que  $x$  es un punto de equilibrio real y en caso contrario decimos que es un punto de equilibrio virtual.

## 2.3. Redes Complejas

### 2.3.1. Concepto formal

Una red dinámica es un grafo de nodos y aristas ordenadas junto con una dinámica asociada en los nodos. Si  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  es el conjunto de nodos de un grafo y  $E \subset N^2$  es el

conjunto de aristas<sup>1</sup> la dinámica en un nodo  $i$  está dada por

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i) + \alpha_i \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} A_{ij} g_i(x_j) \quad (2-9)$$

en donde  $x_i$  es la variable de estado del nodo  $i$ ,  $f_i$  es una función que describe la dinámica interna del nodo  $i$ ,  $\alpha_i$  es una constante que representa la “intensidad” de las conexiones entre  $i$  y sus vecinos,  $A$  es la transpuesta de la matriz de adyacencia del grafo y  $g_i$  es una función que describe la dinámica que recibe  $i$  de los otros nodos. En caso de ser necesario es posible añadir un término estocástico a esta ecuación.

Una red compleja suele entenderse como un grafo que tiene una dinámica asociada a los nodos, aristas e incluso a la topología. En este documento se usa tanto red compleja como red dinámica de manera indistinta.

Si consideramos los vectores  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $f = (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  y  $g = (g_1, \dots, g_n)$  entonces se puede escribir la ecuación vectorial

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \alpha A g(x) \quad (2-10)$$

que describe la dinámica en toda la red.

La Ecuación (2-10) es usualmente un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE). Esta puede resolverse de manera analítica en varios casos sencillos utilizando las metodologías para resolver ODEs. Para resolver numéricamente la red se pueden encontrar distintos paquetes de software, algunos de ellos son [27, 32]. Los métodos empleados para la solución numérica de ODEs se pueden aplicar sin problema en Redes Complejas.

### 2.3.2. Ejemplos

Se desarrollaron dos ejemplos de distinta dificultad que muestran las técnicas y conceptos necesarios para realizar el estudio de migraciones que se presenta más adelante.

**Ejemplo 2.1.** Veamos una red sencilla que ilustra los conceptos mencionados. Sean  $N = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $E = \{(3, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$  los conjuntos de nodos y aristas del grafo dirigido:



<sup>1</sup>Una arista puede representarse por un par ordenado  $(i, j)$ . Si el grafo es dirigido se entiende este par como: la arista parte de  $i$  y llega a  $j$ .

Ahora considérese la dinámica por nodo dada por

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i + \sum_{j=1}^4 A_{ij}g(x_i, x_j) \quad (2-12)$$

en donde  $g(x_i, x_j) = \frac{1}{2}(x_i - x_j)$  y  $A$  es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene entonces el sistema de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + \frac{1}{2}(x_1 - x_3) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_3) + \frac{1}{2}(x_2 - x_4) \\ \frac{dx_3}{dt} = x_3 + \frac{1}{2}(x_3 - x_4) \\ \frac{dx_4}{dt} = x_4 \end{cases} \quad (2-13)$$

que puede resolverse analíticamente usando los métodos de ecuaciones diferenciales o de manera numérica como problema de valor inicial.

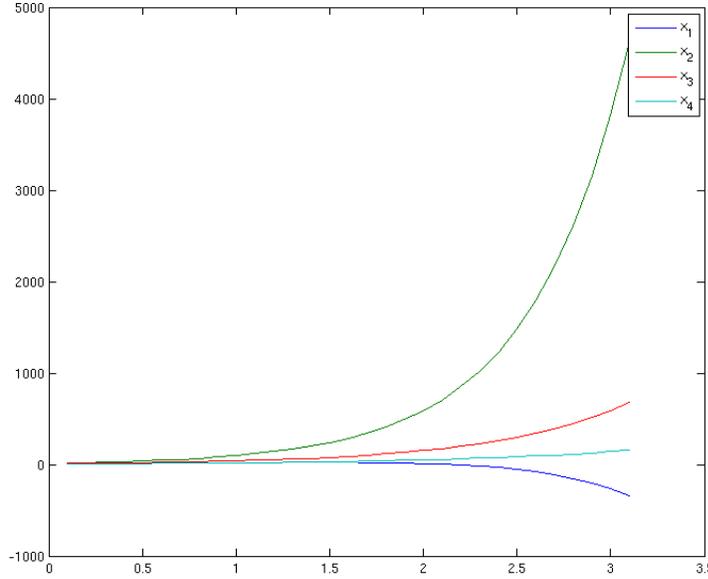
La solución analítica obtenida es

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{3}{2}t} & 0 & -\frac{t}{2}e^{\frac{3}{2}t} & e^t - e^{\frac{3}{2}t} + \frac{t}{2}e^{\frac{3}{2}t} \\ 0 & e^{2t} & -e^{2t} + e^{\frac{3}{2}t} & e^t - e^{\frac{3}{2}t} \\ 0 & 0 & e^{\frac{3}{2}t} & e^t - e^{\frac{3}{2}t} \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} x(0) \quad (2-14)$$

en donde  $x(0)$  es el vector de valores iniciales para los cuatro nodos. La Figura (2-1) muestra la gráfica de las soluciones analíticas con valores iniciales  $x_1(0) = 10$ ,  $x_2(0) = 8$ ,  $x_3(0) = 12$  y  $x_4(0) = 7$ . El único punto de equilibrio es  $(0,0,0,0)$  y es un equilibrio repulsor ya que los valores propios de la matriz jacobiana son todos positivos:  $\lambda_1 = 3/2$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3/2$ ,  $\lambda_4 = 1$ .

**Ejemplo 2.2.** Este ejemplo se construyó como una simplificación a dos nodos del modelo que se estudiará con más detalle en el caso de estudio presentado en el Capítulo (3). Esta red tiene dos nodos y una única arista. Se considera entonces el grafo dirigido:

$$1 \longrightarrow 2 \quad (2-15)$$



**Figura (2-1):** Gráfica de la solución de la red del Ejemplo (2.1) con valores iniciales  $x_1(0) = 10$ ,  $x_2(0) = 8$ ,  $x_3(0) = 12$  y  $x_4(0) = 7$ .

con nodos  $\{1, 2\}$ , única arista  $(1, 2)$  y dinámica por nodo dada por

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_i x_i \left(1 - \frac{x_i}{N_i}\right) - f_i(x_i) + \sum_{j=1}^2 A_{ij} \gamma_{ij} f_j(x_j) \quad (2-16)$$

donde  $x_i \geq 0$  representa las variables de estado,  $|\alpha_i| \leq 1$  es el crecimiento poblacional neto,  $N_i = k_i x_i(0)$  es conocida como la capacidad de carga de cada nodo expresada como  $k_i$  veces la población inicial del nodo  $i$ ,  $0 \leq \gamma_{ij}, \kappa_i \leq 1$  son la preferencia de migración de  $j$  a  $i$  y el porcentaje de población que migra de  $i$  respectivamente,  $0 < c_i \leq 1$  es la condición de migración y

$$f_i(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i \leq c_i N_i \\ \kappa_i x_i & \text{si } x_i > c_i N_i \end{cases}$$

es la migración de  $i$ .

Entrando en detalle, las variables de estado son entonces  $x_1$  y  $x_2$  que representan la población en cada nodo. Se consideró un crecimiento logístico  $\alpha_i x_i \left(1 - \frac{x_i}{N_i}\right)$  debido a que este modela de manera más pertinente el aumento poblacional en la realidad. El parámetro  $\alpha_i$  representa el crecimiento neto, tasa de natalidad menos tasa de mortalidad, de la población  $x_i$  anualmente y el parámetro  $N_i$  se conoce como la capacidad de carga de la población respectiva. La solución a este crecimiento logístico es bien conocida y sólo mencionaremos que dicha solución tiene una tendencia asintótica hacia la capacidad de carga.

Para hablar de migración se tiene que considerar una salida de la variable de estado  $x_i$  a otros nodos. Por ello se resta  $f_i(x_i)$  al crecimiento logístico. Esta función  $f_i$  la llamamos migración del nodo  $i$ . Tiene como parámetros la capacidad de carga  $N_i$ , el porcentaje de migración  $\kappa_i$  y  $c_i$  que conocemos como la condición de migración. En pocas palabras  $f_i$  verifica si  $x_i$  ha alcanzado un porcentaje de la capacidad de carga dado por  $c_i N_i$  y en caso de ser así se le resta  $\kappa_i x_i$  al crecimiento logístico. Por ejemplo, si la población en el nodo  $i$  ha alcanzado el 90% =  $c_i$  de la capacidad de carga una cantidad  $\kappa_i x_i$  de individuos migran a los nodos vecinos. Este es un modelo rudimentario de migración ya que no considera otros factores que afectan al individuo a la hora de migrar sino únicamente el hecho de que la capacidad de carga de su localidad está saturada. Cuando se discute el cálculo de Influencias Indirectas mediante *PWP* en la Sección (2.4) se muestra el modelamiento mediante el modelo de interacción gravitacional.

La dinámica interna de cada nodo está dada entonces por el crecimiento logístico menos la migración.

Para establecer la dinámica que ejercen los nodos vecinos sobre el nodo  $i$  se consideró la suma de las migraciones  $f_j(x_j)$  provenientes de los nodos vecinos multiplicadas por el parámetro  $\gamma_{ij}$  que denominamos la preferencia que hay de migrar desde  $j$  hacia  $i$ . Es decir, la migración de un nodo  $j$  tiene como destino nodos vecinos y hay cierta preferencia  $\gamma_{ij}$  que favorece más a unos nodos que a otros. Debe cumplirse, para todo nodo  $j$ , que  $\sum_{i=1}^n \gamma_{ij} = 1$  para garantizar que toda, y no más, la cantidad de individuos que migran desde  $j$  encuentran destino y no se agreguen individuos al modelo. Por lo tanto, la dinámica exterior que afecta cada nodo representa la suma de los porcentajes de migrantes desde los nodos vecinos. Debido a que en este modelo sólo hay un arista de 1 a 2 se tiene que  $\gamma_{21} = 1$  que quiere decir que todos los individuos que salen de 1 van a 2. Este concepto de preferencia se aborda de una manera sencilla en este ejemplo pero debe recordarse que este obedece a unas condiciones dadas por las redes sociales que hacen parte del fenómeno migratorio y el capital social de cada una. En la Sección (2.4) se muestra como está relacionado el concepto de preferencia con el modelo de interacción gravitacional.

El sistema de ecuaciones para el modelo que consideramos en este ejemplo es entonces:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1}\right) - f_1(x_1) \\ \frac{dx_2}{dt} = \alpha_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{N_2}\right) - f_2(x_2) + \gamma_{21} f_1(x_1) \end{cases} \quad (2-17)$$

y como  $f$  está definida a trozos se obtiene el sistema suave a trozos:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \begin{cases} \alpha_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1}\right) & \text{si } x_1 < c_1 N_1 \\ \alpha_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1}\right) - \kappa_1 x_1 & \text{si } x_1 > c_1 N_1 \end{cases} \\ \frac{dx_2}{dt} &= \begin{cases} \alpha_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{N_2}\right) & \text{si } x_i < c_i N_i \quad i = \{1, 2\} \\ \alpha_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{N_2}\right) - \kappa_2 x_2 & \text{si } x_1 < c_1 N_1, \quad x_2 > c_2 N_2 \\ \alpha_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{N_2}\right) + \gamma_{21} \kappa_1 x_1 & \text{si } x_1 > c_1 N_1, \quad x_2 < c_2 N_2 \\ \alpha_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{N_2}\right) - \kappa_2 x_2 + \gamma_{21} \kappa_1 x_1 & \text{si } x_i > c_i N_i \quad i = \{1, 2\} \end{cases} \end{aligned} \quad (2-18)$$

Este sistema tiene dos regiones de conmutación, una vertical dada por  $\Sigma_v = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = c_1 N_1\}$  y una horizontal dada por  $\Sigma_h = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = c_2 N_2\}$ . Para estas se tienen las funciones escalares  $f_v(x_1, x_2) = x_1 - c_1 N_1$  y  $f_h(x_1, x_2) = x_2 - c_2 N_2$  cuyos gradientes son  $\nabla f_v(x_1, x_2) = (1, 0)$  y  $\nabla f_h(x_1, x_2) = (0, 1)$ .

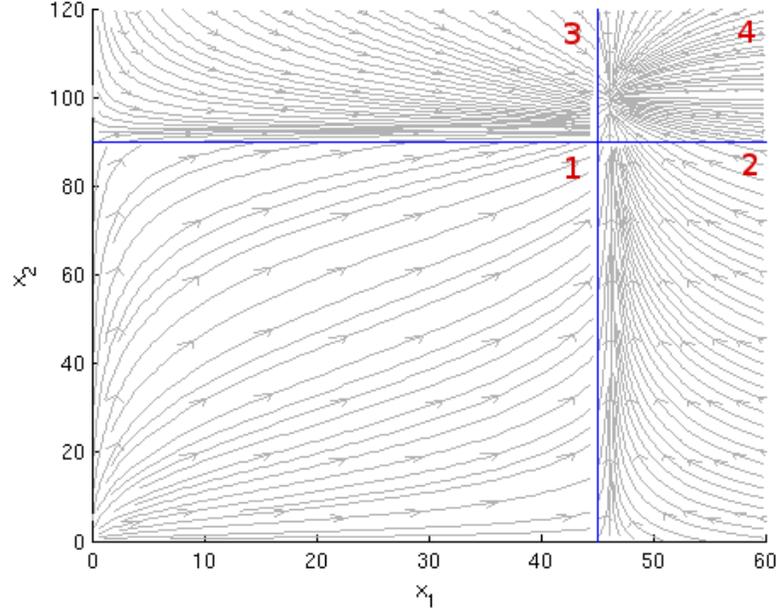
Ahora,  $\Sigma_v$  y  $\Sigma_h$  parten el primer cuadrante del plano  $x_1 x_2$  en cuatro regiones, Figura (2-2), para las cuales corresponden los campos vectoriales:

$$\begin{aligned} X_1 &= \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1}\right) \\ \alpha_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{N_2}\right) \end{pmatrix} & X_2 &= \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1}\right) - \kappa_1 x_1 \\ \alpha_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{N_2}\right) + \gamma_{21} \kappa_1 x_1 \end{pmatrix} \\ X_3 &= \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1}\right) \\ \alpha_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{N_2}\right) - \kappa_2 x_2 \end{pmatrix} & X_4 &= \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1}\right) - \kappa_1 x_1 \\ \alpha_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{N_2}\right) - \kappa_2 x_2 + \gamma_{21} \kappa_1 x_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2-19)$$

El sistema, presentado en la Ecuación (2-18), es un sistema de Filippov ya que los campos en las cuatro regiones son distintos sobre las dos regiones de conmutación. Esto es,  $X_i(x_1, x_2) \neq X_j(x_1, x_2)$  si  $i \neq j$  y  $(x_1, x_2) \in \Sigma_h$  o  $(x_1, x_2) \in \Sigma_v$ .

Como  $\Sigma_v$  y  $\Sigma_h$  son perpendiculares, ver Figura (2-2), deben calcularse cuatro campos vectoriales de acuerdo a las regiones en las que está dividido el plano: uno a la derecha, otro a la izquierda, otro arriba y el último abajo de la intersección de las dos fronteras. Para calcular estos campos vectoriales sobre las regiones de conmutación utilizamos el método convexo de Filippov presentado en la Ecuación (2-8). Para este ejemplo en particular se tiene entonces que el campo vectorial sobre las regiones de conmutación, entre las regiones  $S_i$  y  $S_j$ , está dado por:

$$X_{ij}(x_1, x_2) = \frac{X_j f(x_1, x_2) X_i(x_1, x_2) - X_i f(x_1, x_2) X_j(x_1, x_2)}{X_j f(x_1, x_2) - X_i f(x_1, x_2)}. \quad (2-20)$$



**Figura (2-2):** Regiones de conmutación (en azul) y campos vectoriales (numerados) asociados al Ejemplo (2.2).

Luego de calcular, los campos vectoriales sobre las regiones de conmutación que se obtuvieron son:

$$X_{13}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{24}(x_2, x_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1}\right) - \kappa_1 x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

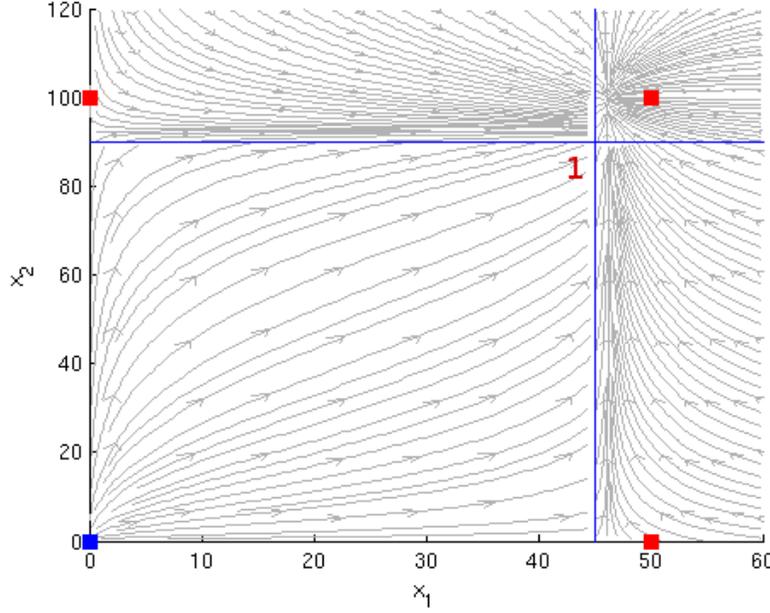
(2-21)

$$X_{12}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{N_2}\right) + \gamma_{21} \alpha_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1}\right) \end{pmatrix}$$

$$X_{34}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{N_2}\right) - \kappa_2 x_2 + \gamma_{21} \alpha_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1}\right) \end{pmatrix}.$$

Buscando los puntos de equilibrio para cada una de las regiones se obtuvo, con  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  y  $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ , que:

- $X_1$  tiene como punto de equilibrio repulsor a  $(0, 0)$ , puntos de equilibrio tipo silla a  $(N_1, 0)$  y  $(0, N_2)$  y como punto de equilibrio atractor a  $(N_1, N_2)$ . El único punto de



**Figura (2-3):** Puntos de equilibrio para el campo vectorial  $X_1$ . Reales en azul y virtuales en rojo.

equilibrio real<sup>2</sup> es  $(0,0)$ , los demás puntos son virtuales. Se muestran en la Figura (2-3).

- $X_2$  tiene el punto de equilibrio repulsor  $(0,0)$ , el punto silla  $(0, N_2)$  y los puntos dados por

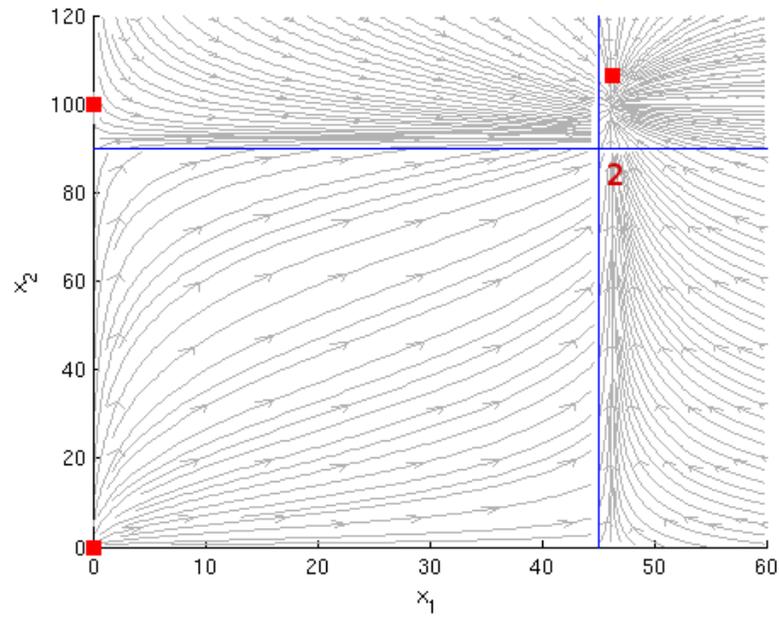
$$\left( N_1 \left( 1 - \frac{\kappa_1}{\alpha_1} \right), \frac{1}{2} \left( N_2 \pm \sqrt{N_2^2 + 4 \frac{\gamma_{21} \kappa_1 N_1 N_2}{\alpha_2} \left( 1 - \frac{\kappa_1}{\alpha_1} \right)} \right) \right) \quad (2-22)$$

de donde: si  $\kappa_1 = \alpha_1$  se obtienen de nuevo los puntos de equilibrio  $(0,0)$  y  $(0, N_2)$  y si  $\kappa_1 = 0$  se obtienen el punto de equilibrio silla  $(N_1, 0)$  y el punto de equilibrio atractor  $(N_1, N_2)$ . Ahora, la raíz en la segunda componente del punto de equilibrio es real siempre que  $\kappa_1 \leq \alpha_1$ . Para que el punto dado en la Ecuación (2-22) sea real se necesita que la primera componente sea mayor que  $c_1 N_1$  y la segunda componente sea menor que  $c_2 N_2$ . Mostrados en la Figura (2-4).

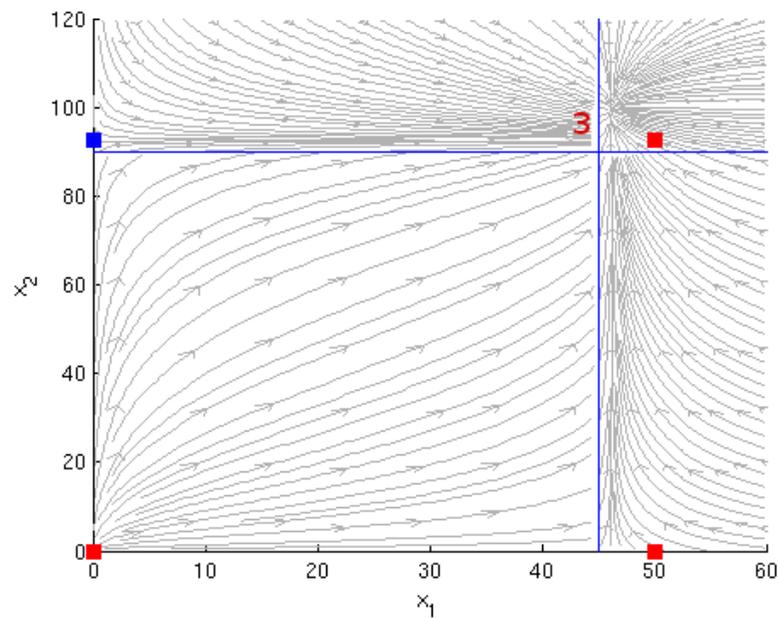
- $X_3$ , con  $\alpha_2 \geq \kappa_2$ , tiene como punto de equilibrio repulsor a  $(0,0)$ , puntos de silla a  $\left( 0, N_2 \left( 1 - \frac{\kappa_2}{\alpha_2} \right) \right)$  y a  $(N_1, 0)$  y como punto de equilibrio atractor a  $\left( N_1, N_2 \left( 1 - \frac{\kappa_2}{\alpha_2} \right) \right)$ .

El único equilibrio real es  $\left( 0, N_2 \left( 1 - \frac{\kappa_2}{\alpha_2} \right) \right)$  si  $\kappa_2 < (1 - c_2)\alpha_2$ , de otra manera es virtual. Se muestran en la Figura (2-5).

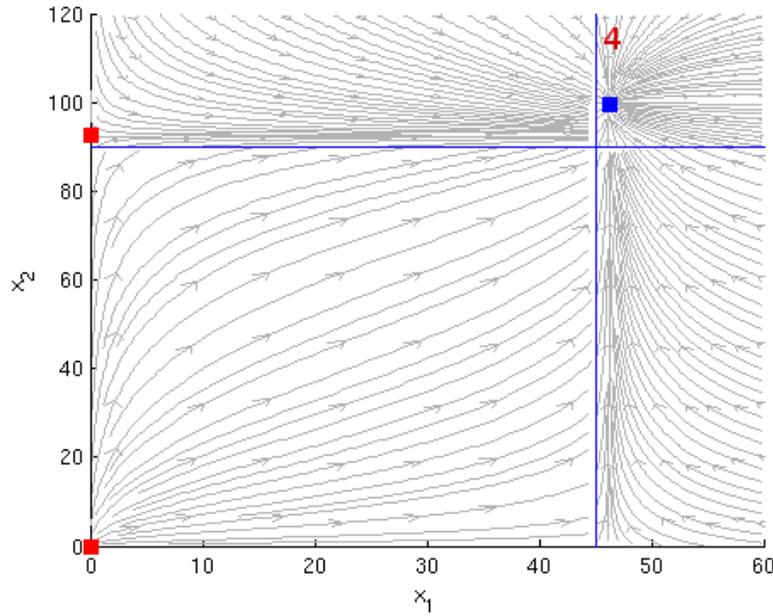
<sup>2</sup>Se llama así cuando el punto está dentro de la región, en caso contrario se dice virtual.



**Figura (2-4):** Puntos de equilibrio para el campo vectorial  $X_2$ . Reales en azul y virtuales en rojo.



**Figura (2-5):** Puntos de equilibrio para el campo vectorial  $X_3$ . Reales en azul y virtuales en rojo.



**Figura (2-6):** Puntos de equilibrio para el campo vectorial  $X_4$ . Reales en azul y virtuales en rojo.

- $X_4$  tiene el equilibrio repulsor  $(0, 0)$  y el punto silla  $\left(0, N_2 \left(1 - \frac{\kappa_2}{\alpha_2}\right)\right)$  y los dados por

$$\left( N_1 \left(1 - \frac{\kappa_1}{\alpha_1}\right), \frac{1}{2} \left( N_2 \left(1 - \frac{\kappa_2}{\alpha_2}\right) \pm \sqrt{N_2^2 \left(1 - \frac{\kappa_2}{\alpha_2}\right)^2 + 4 \frac{\gamma_{21} \kappa_1 N_1 N_2}{\alpha_2} \left(1 - \frac{\kappa_1}{\alpha_1}\right)} \right) \right) \quad (2-23)$$

de donde: si  $\kappa_1 = \alpha_1$  se recuperan los equilibrios  $(0, 0)$  y  $\left(0, N_2 \left(1 - \frac{\kappa_2}{\alpha_2}\right)\right)$ . Para que el punto dado en la Ecuación (2-23) sea real se necesita que la primera y segunda componente sean mayores a  $c_1 N_1$  y  $c_2 N_2$  respectivamente. Si tanto  $\kappa_1$  como  $\kappa_2$  son iguales a cero, se tiene el punto de equilibrio, estable y real  $(N_1, N_2)$ . Mostrados en la Figura (2-6).

Ahora, si simulamos el sistema con valores iniciales  $x(0) = (10, 30)$ ,  $\alpha = (0,04, 0,02)$ ,  $\kappa = (0,003, 0,0015)$ ,  $N = (50, 100)$  y  $\gamma_{21} = 1$  obtenemos la solución mostrada en la Figura (2-7). Allí podemos observar que las soluciones tienden al equilibrio  $(46,25, 99,4741)$  que se encuentra en  $X_4$ .

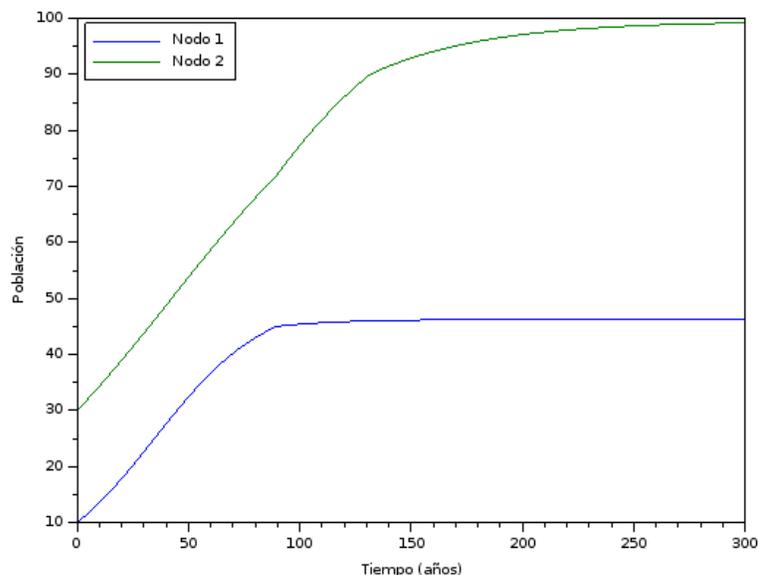


Figura (2-7): Soluciones del sistema dado por la Ecuación (2-18) con valores iniciales 10 y 30.

## 2.4. Influencias Indirectas

### 2.4.1. Presentación

El estudio de *Link Analysis* se conoce con el nombre de Influencias Indirectas desde [11], en donde se estudian tres métodos conocidos en comparación con uno nuevo llamado *PWP*.

Los métodos *MICMAC*, *PageRank* y *Heat Kernel* han sido estudiados y usados ampliamente desde hace tiempo [18, 5, 22]. El *PWP*, ya ha sido estudiado y utilizado en varios documentos académicos [11, 13, 12], y fue el método seleccionado para este documento. Esta decisión se debió al interés de aumentar los estudios que utilizan *PWP* además de que este método es más flexible que los otros<sup>3</sup>.

Estos métodos funcionan de la siguiente manera: se toma la matriz  $D$  que se conoce como la matriz de influencias directas<sup>45</sup> y se calcula la matriz  $T = T(D)$  conocida como la matriz de influencias indirectas. En esta está codificada la manera como se afectan indirectamente los nodos entre sí. Al sumar las columnas o las filas de  $T$  se obtiene un vector que representa

<sup>3</sup>El método *MICMAC* es útil únicamente para encontrar los caminos de tamaño  $k$  en un grafo, el método *PageRank* es útil sólo con matrices de números positivos y *Heat Kernel* añade influencia de un nodo a sí mismo aunque no haya ninguna arista de ese tipo en el grafo.

<sup>4</sup>Esta suele ser la transpuesta de la matriz de adyacencia, excepto para el *PageRank* que la construye como una matriz de columnas estocásticas [22].

<sup>5</sup>En la construcción dada en la Sección (2.4.2)  $D$  es diferente a  $A$ .

las influencias o dependencias indirectas de los nodos. Esto establece dos órdenes o rankings para los nodos, el primero en términos de la influencia que ejercen y el segundo en términos de la dependencia que obtienen en todo el grafo.

La diferencia entre los algoritmos radica en la manera de calcular  $T$ . Para el *MICMAC* es

$$T(D) = D^k \quad (2-24)$$

con  $k$  un entero positivo. Para *Heat Kernel* es

$$T(D) = e^{\lambda(D-I)} \quad (2-25)$$

siendo  $I$  la matriz identidad de tamaño apropiado y  $0 < \lambda < 1$ . Para *PageRank* se tiene

$$T(D) = \lim_{k \rightarrow \infty} [p\bar{D} + (1-p)E_n]^k \quad (2-26)$$

donde  $n$  es la cantidad de nodos,  $0 < p < 1$ ,  $\bar{D}$  se obtiene de la matriz de columnas estocásticas  $D$  reemplazando todas las entradas de las columnas formadas únicamente por ceros por  $1/n$  y  $E_n$  es una matriz cuyas entradas son todas  $1/n$ . Finalmente, *PWP* calcula  $T$  como

$$T(D) = \frac{e^{\lambda D} - I}{e^\lambda - 1} \quad (2-27)$$

con  $I$  y  $\lambda$  como en la Ecuación (2-25).

### Observaciones

Las influencias o dependencias indirectas calculadas mediante el *PWP* no están necesariamente relacionadas con los nodos más conectados del grafo. Para ver esto considérese el grafo dirigido



Claramente el nodo 1 es el nodo más conectado de la red pero el cálculo, mediante *PWP* con  $\lambda = 1$ , de influencias indirectas arroja el ranking descendente: 2, 1, 3, 6, 4, 5, 7 y el de dependencias indirectas da el ranking descendente: 7, 1, 5, 4, 6, 3, 2. De manera que el nodo 2 es el que ejerce mayor influencia y el nodo 7 es el que posee mayor dependencia en el grafo.

Calculando para este grafo el algoritmo *hits* [23], que nos da los hubs y las autoridades, se tiene que el nodo 2 es el que presenta el mayor coeficiente de hub y el nodo 1 es el que presenta el mayor coeficiente de autoridad. De hecho, la clasificación según el coeficiente de hub es: 2, 1, 6, 5, 4, 3, 7 y según el coeficiente de autoridad es 1, 7, 4, 3, 5, 2, 6. Por tanto el método *PWP* nos da otro tipo de información que poco se relaciona con las autoridades y los hubs.

También es de anotar que el orden de los nodos dado por las influencias indirectas no es necesariamente el inverso del orden dado por las dependencias indirectas. El mismo Grafo (2-28) exhibe esta afirmación.

Una última observación consiste en pensar en la matriz  $D$  de influencias directas como una matriz con entradas reales muy grandes o muy pequeñas para un estudio numérico preciso. Para ello se puede considerar un escalamiento de  $D$  a unos valores más convenientes para simular. Actualmente no se cuenta con una demostración, excepto para el método *MICMAC*, que verifique que las influencias y dependencias no serán afectadas al escalar la matriz pero la evidencia numérica es suficientemente fuerte para ciertos valores de  $\lambda$ .

En el caso particular del *PWP* escalar la matriz  $D$  es multiplicar  $D$  por un valor  $c$  y por lo tanto la fórmula quedaría

$$T = \frac{e^{\lambda c D} - I}{e^{\lambda} - 1}$$

y al multiplicar por  $e^{\lambda c} - 1$  en numerador y denominador se obtiene

$$T = \left( \frac{e^{\lambda c D} - I}{e^{\lambda} - 1} \right) \left( \frac{e^{\lambda c} - 1}{e^{\lambda c} - 1} \right) = \left( \frac{e^{\lambda c} - 1}{e^{\lambda} - 1} \right) T_{\lambda c}$$

en donde  $T_{\lambda c}$  es la matriz de influencias de  $D$  calculada con parámetro  $\lambda c$ .

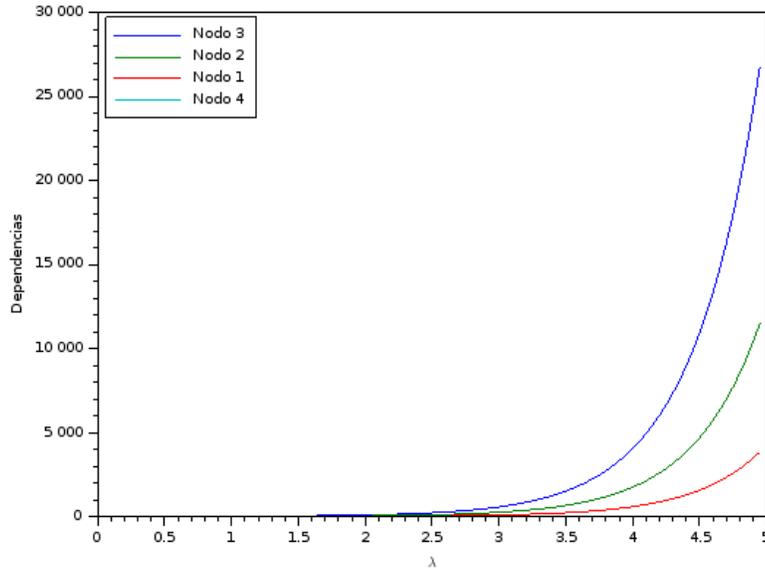
Es decir que la matriz de influencias indirectas de  $cD$ , calculada con parámetro  $\lambda$ , se puede obtener como la matriz de influencias indirectas de  $D$ , calculada con parámetro  $\lambda c$ , multiplicada por un escalar. Esto nos indica que cambiar el parámetro  $\lambda$  es casi lo mismo que escalar la matriz de entrada. Por ello el estudio de estabilidad del *PWP* está centrado en la variación de este parámetro. Se han realizado avances en este sentido bajo ciertas condiciones de  $D$  y de  $\lambda$  [13].

**Ejemplo 2.3.** Veamos un caso particular en donde las influencias y dependencias indirectas no se afectan al variar  $\lambda$ . Considérese la matriz de influencias directas

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

para un grafo. Calculamos<sup>6</sup> *PWP* con  $0,01 \leq \lambda \leq 5$  tomando 100 valores igualmente separados y observamos para cada caso el ranking que se obtuvo. El ranking obtenido de influencias

<sup>6</sup>En [11] el valor recomendado para  $\lambda$  es 1.



**Figura (2-8):** Valores de dependencias indirectas del Ejemplo (2.3).

indirectas es 3,4,1,2 y el ranking de dependencias indirectas es 3,2,1,4 en cada uno de los distintos valores de  $\lambda$ , es decir que en ningún caso el ranking cambia. En las Figuras (2-8) y (2-9) se observan los valores de dependencias e influencias indirectas de cada nodo al variar  $\lambda$ . Es de notar que los valores más bajos de influencias y dependencias indirectas está muy por debajo de la escala de la gráfica y por tanto no se alcanzan a visualizar.

**Ejemplo 2.4.** Para ilustrar un grafo en el que no se tiene estabilidad de *PWP* para ciertos valores de  $\lambda$  consideremos la matriz de influencias directas del Grafo (2-28). En este caso los rankings de influencias y dependencias indirectas tienen varios cambios cuando  $0 < \lambda < 1$  y a partir de  $\lambda = 1$  se estabilizan en 2, 1, 3, 6, 4, 5, 7 para influencias y 7, 1, 5, 4, 3, 6, 2 para dependencias. La Figuras (2-10) y (2-11) muestran los valores de dependencias e influencias indirectas respectivamente.

## 2.4.2. Influencias y dependencias indirectas en Redes Complejas

Aunque todos los métodos de influencias tienen sus ventajas y desventajas deben ser calculados sobre matrices de números reales, es decir en grafos donde las aristas posean pesos reales y constantes. Esto representa una complicación si se quiere realizar un estudio de influencias y dependencias en Redes Dinámicas ya que las relaciones entre los nodos cambian con el tiempo, por lo que se deberían adaptar los métodos a este nuevo ambiente o idear una manera de obtener información de la red en cada momento.

En el caso particular de una red de migración, como la considerada en el Ejemplo (2.2),

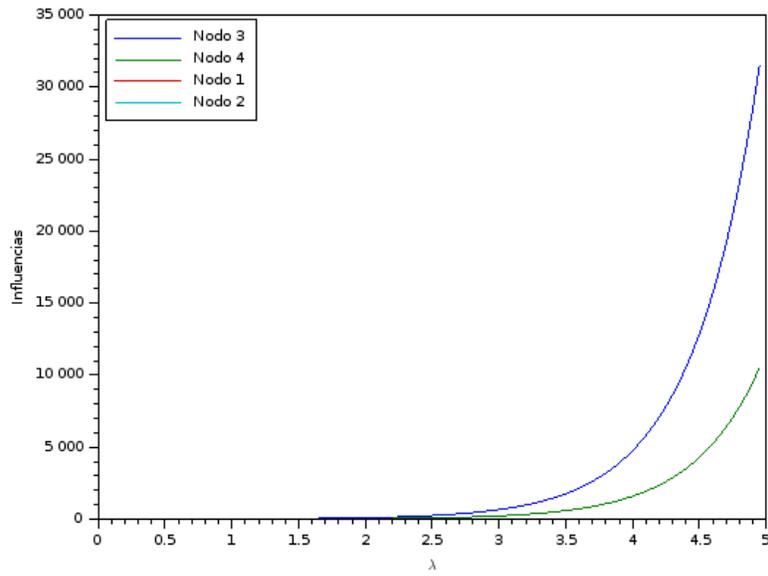


Figura (2-9): Valores de influencias indirectas del Ejemplo (2.3).

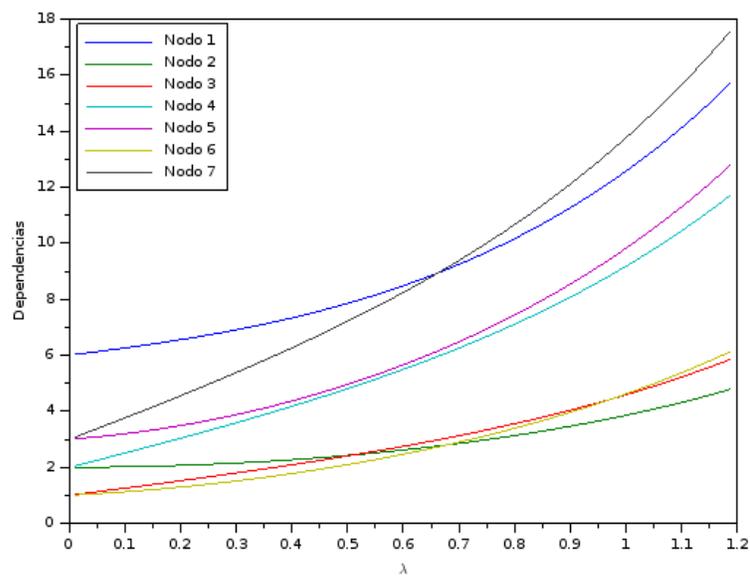
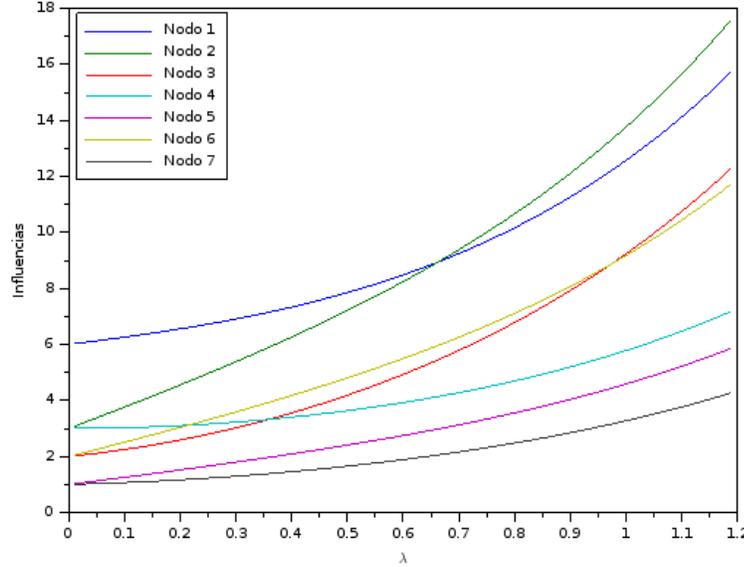


Figura (2-10): Valores de dependencias indirectas del Ejemplo (2.4).



**Figura (2-11):** Valores de influencias indirectas del Ejemplo (2.4).

los pesos de las conexiones entre los nodos vienen dados por la cantidad de personas que viajan de un nodo a otro en cada unidad de tiempo. Para calcular esto recurrimos a la matriz  $A$  que es la transpuesta de la matriz de adyacencia de la red y a los valores de  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ .

Para modelar la cantidad de personas que viajan entre dos nodos se usó una modificación del modelo de interacción gravitacional del cual se habló en la Sección (2.1), por lo que, además de lo anterior, debe considerarse la distancia entre los nodos.

Según el modelo clásico de interacción gravitacional la cantidad de personas que migran de un nodo  $j$  a un nodo  $i$  es

$$M_{ij} = k \frac{P_i P_j}{d_{ij}^2} \quad (2-29)$$

y por ende se tiene una simetría  $M_{ij} = M_{ji}$  lo cual no pasa con frecuencia en la realidad. Debe prestarse atención a la constante de proporcionalidad  $k$  que debe ajustarse según el caso de estudio que se esté abordando. Por razones de simplicidad consideramos  $k = 1$  por lo que nuestro modelo se asemejará al propuesto por George Zipf [36].

Para corregir la simetría del modelo gravitacional calculamos una ponderación de las poblaciones del nodo de partida y sus adyacentes<sup>7</sup>, es decir, si se toma  $j$  como el nodo de partida entonces

$$W_j(t) = \frac{x_j(t)}{x_j(t) + \sum_{k \in \text{Ady}(j)} x_k(t)} = \frac{x_j(t)}{x_j(t) + \sum_{k=1}^n A_{kj} x_k(t)} \quad (2-30)$$

<sup>7</sup>Aquí entendemos como nodos adyacentes a  $j$  aquellos a los que la población del nodo  $j$  puede ir.

representará la relevancia de la población del nodo  $j$  en el tiempo  $t$  respecto a sus adyacentes y

$$W_i^{\{j\}}(t) = \frac{A_{ij}x_i(t)}{x_j(t) + \sum_{k \in \text{Ady}(j)} x_k(t)} = \frac{A_{ij}x_i(t)}{x_j(t) + \sum_{k=1}^n A_{kj}x_k(t)} \quad (2-31)$$

será la relevancia de la población del nodo  $i$  en el tiempo  $t$  respecto a la adyacencia del nodo de partida. Nótese que  $W_j(t) + \sum_{i \in \text{Ady}(j)} W_i^{\{j\}}(t) = 1$  y así esto que llamamos relevancias corresponde a un porcentaje de representación de la población que se considere respecto a la localidad del nodo de partida.

El modelo de interacción gravitacional modificado es entonces

$$M_{ij}(t) = W_i^{\{j\}}(t)W_j(t)\frac{x_i(t)x_j(t)}{d_{ij}^2} \quad (2-32)$$

y representa la cantidad de individuos migrando de  $j$  a  $i$ . Usando esta construcción  $M_{ij} \neq M_{ji}$  ya que el cálculo de cada uno depende de las poblaciones de los nodos adyacentes del nodo origen.

La cantidad total de individuos migrando desde un nodo  $j$  será

$$f_j(x_j) = M_j = \sum_{i \in \text{Ady}(j)} M_{ij} = W_j(t)x_j(t) \sum_{i=1}^n W_i^{\{j\}}(t)\frac{x_i(t)}{d_{ij}^2} \quad (2-33)$$

cuando se haya superado el 90 % de la capacidad de carga del nodo  $j$ .

Así que, al poner en contraste este modelo de interacción con el modelo propuesto en el Ejemplo (2.2), se tiene

$$\kappa_j = W_j(t) \sum_{i=1}^n W_i^{\{j\}}(t)\frac{x_i(t)}{d_{ij}^2} \quad (2-34)$$

y

$$\gamma_{ij} = \frac{W_i^{\{j\}}(t) \left( \frac{x_i(t)}{d_{ij}^2} \right)}{\sum_{k=1}^n W_k^{\{j\}}(t) \left( \frac{x_k(t)}{d_{kj}^2} \right)} \quad (2-35)$$

de manera que se mantiene la condición  $\sum_{i=1}^n \gamma_{ij} = 1$  propuesta en el Ejemplo 2.2.

La matriz  $\gamma(t) = (\gamma_{ij}(t))$  es la matriz de preferencias de migración y cada una de sus componentes se calcula mediante los parámetros de distancia  $d_{ij}$ , población  $x_i(t)$  y relevancia  $W_i^{\{j\}}(t)$ .

La matriz  $D$  que necesitamos para calcular el método,  $PWP$ , por cada unidad de tiempo, es entonces  $D = (M_{ij}) = \gamma F$  en donde  $F$  es la matriz diagonal  $\text{diag}(f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))$ . Debido a que generalmente las entradas de  $D$  son muy grandes se presenta dificultad a la hora de realizar la simulación por computador ya que los valores que se van obteniendo se salen del rango admitido por la máquina. Para resolver esta dificultad escalamos la matriz, teniendo en cuenta lo mencionado en las observaciones de la Sección 2.4, multiplicándola por  $\frac{1}{s}$  en donde  $s$  es la suma de todas las entradas de  $D$ .

**Ejemplo 2.5.** Ilustramos la construcción anterior a partir de un cálculo en una red de migración sencilla. Considérese una red con matriz de adyacencia transpuesta:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con parámetros  $x(0) = (50, 70, 30, 18)$ ,  $\alpha = (0,04, 0,02, 0,015, 0,025)$ ,  $N = (200, 280, 120, 72)$ ,  $c_i = 0,9$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  y matriz de distancias

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Debe tenerse en cuenta que debido a que el grafo es dirigido se entiende que la migración se da en un solo sentido por lo que desde los nodos 1 y 2 no habrá emigrantes. En los primeros instantes de tiempo, debido a que las poblaciones no alcanzan aún el 90% de su capacidad de carga, no hay movimiento de individuos. El primer nodo en pasar el 90% de su capacidad de carga es el nodo 1 pero debido a que este no tiene nodos adyacentes no hay fenómeno migratorio en la red. El segundo nodo en sobrepasar el 90% de su capacidad de carga es 4 que tiene como nodos adyacentes a 2 y a 3 y lo hace en  $t = 132$ . Se tiene entonces que  $x(132) = (196,97864, 230,5452, 84,815874, 64,81077)$  y por lo tanto

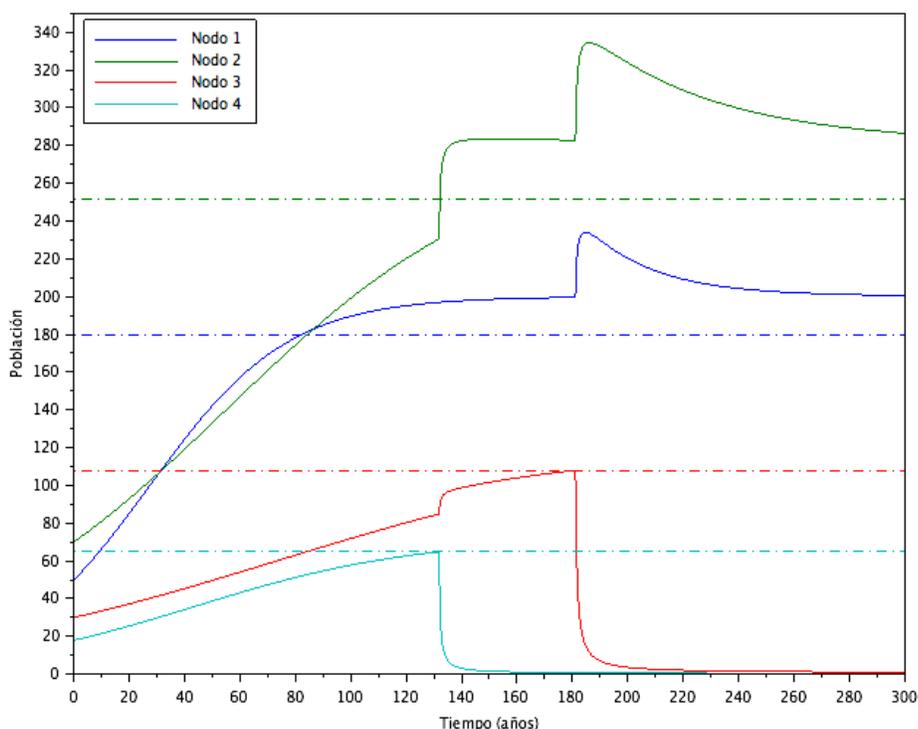
$$\gamma(132) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5124824 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4875176 & 0,8060530 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1939470 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además se obtiene  $f(x(132)) = (0, 0, 0, 144,3816)$  y así la matriz de influencias directas es

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 116,37921 \\ 0 & 0 & 0 & 28,002385 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que al escalarla da

$$D^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,806053 \\ 0 & 0 & 0 & 0,193947 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



**Figura (2-12):** Solución numérica del Ejemplo (2.5).

Con  $D^*$  calculamos influencias y dependencias indirectas usando  $PWP$ . Los valores de influencias son 0, 0, 0, y 1 y los valores de dependencias son 0, 0,8060, 0,1932 y 0 para los nodos 1, 2, 3 y 4 respectivamente.

Para obtener las influencias y dependencias indirectas de la red este proceso debe hacerse con cada uno de los valores del tiempo durante el proceso de integración numérica. Las Figuras (2-12), (2-13) y (2-14) muestran la evolución de las poblaciones y los valores obtenidos de influencias y dependencias indirectas.

## 2.5. Conclusiones de capítulo

Se mostraron los conceptos clásicos para los modelos de migración y se analizaron varios estudios en comparación con el trabajo que se desarrolló en este documento.

Se presentaron los conceptos y definiciones de Sistemas de Filippov utilizados más adelante en la Sección (2.3).

Se presentó el concepto formal de Red Compleja o Red Dinámica que se usa más adelante en este documento. Se mostraron dos ejemplos de distinta dificultad que muestran las técnicas

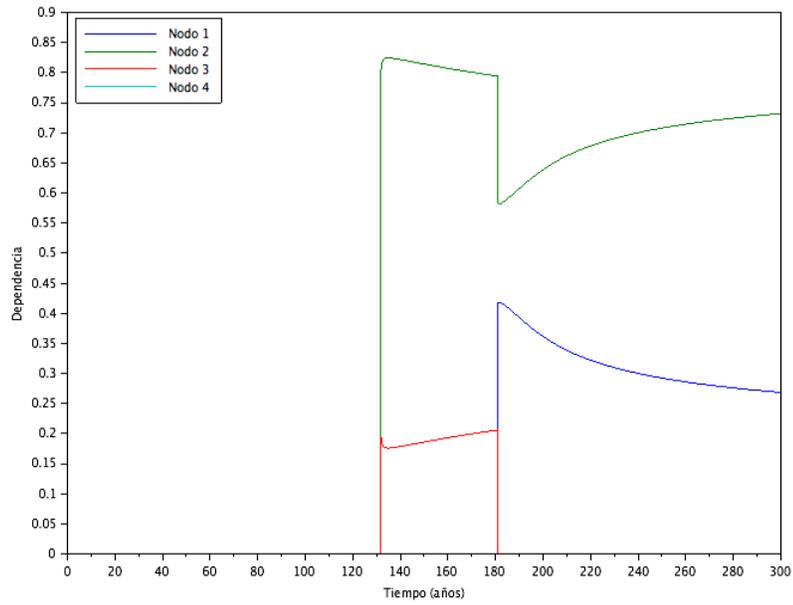


Figura (2-13): Dependencias indirectas del Ejemplo (2.5).

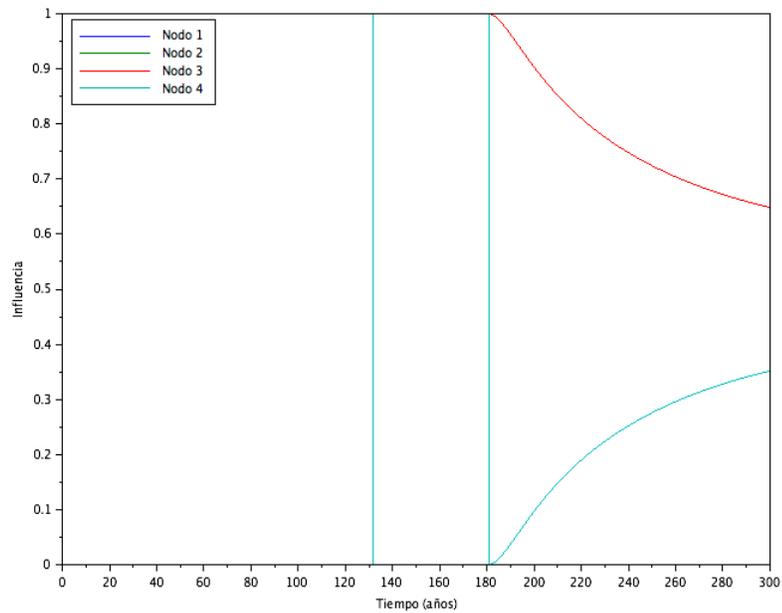


Figura (2-14): Influencias indirectas del Ejemplo (2.5).

y metodologías utilizadas al trabajar con redes. Cabe mencionar que hay más metodologías y técnicas en este tipo de estudios pero no se trataron durante el estudio de caso.

El Ejemplo (2.2) fue mucho más completo y complejo que el Ejemplo (2.1) pero ambos exhiben la manera en la que se trabaja con redes dinámicas. En el Ejemplo (2.1) las ecuaciones relacionadas a la dinámica de la red conformaban un sistema lineal, mientras que en el Ejemplo (2.2) las ecuaciones conformaban un sistema no suave con crecimiento logístico para ambos nodos.

En el Ejemplo (2.2) se consideraron las condiciones de migración  $c_i$ . Estas juegan un papel importantísimo en el modelo migratorio ya que permiten establecer cuando un punto de equilibrio del sistema es real o virtual. Al variar estos parámetros los equilibrios reales se pueden volver virtuales y viceversa. Esto permitiría definir unas políticas migratorias que permitan al modelo converger a una solución estable dependiendo de los parámetros que se consideren. Discutiremos esto más adelante en el Capítulo (3).

Se introdujeron los conceptos que soportan el estudio de Influencias Indirectas y se observaron cuatro algoritmos relacionados. Se presentaron consideraciones a tener en cuenta cuando se trabaja con esta metodología y se definió la manera de calcular influencias y dependencias para una red de migración y se ilustró esta construcción con un ejemplo.

## 3 Caso de estudio: Valle del Cauca

### 3.1. Nodos y dinámica de crecimiento poblacional

Para realizar este estudio de caso se consideraron como nodos los cuarenta y dos (42) municipios que forman parte del Valle del Cauca con dinámica poblacional interna dada por el crecimiento logístico:

$$G_i(x_i) = \alpha_i x_i \left(1 - \frac{x_i}{N_i}\right) \quad (3-1)$$

en donde, como fue mencionado anteriormente,  $\alpha_i$  es una constante que representa el crecimiento neto poblacional del nodo  $i$  (esto es, la tasa bruta de natalidad menos la tasa bruta de mortalidad anuales),  $x_i$  es la función que describe la cantidad de individuos del nodo  $i$  en el tiempo  $t$  y  $N_i$  es una constante que representa la capacidad de carga del nodo  $i$ .

Si bien el crecimiento poblacional  $\alpha_i$  de una ciudad o municipio es variable cada año obedeciendo a factores socio-económicos se ha considerado constante en este caso con el fin de concentrarnos particularmente en la dinámica del movimiento poblacional en la red. De la misma manera, la capacidad de carga  $N_i$  es en la realidad una variable que depende de la infraestructura propia de cada nodo al igual de factores económicos, sanitarios, geográficos entre otros; sin embargo consideramos estos valores constantes e iguales a cinco veces la población inicial en cada vértice de la red. La selección de este parámetro es arbitraria pero se escogencia se debe a que permite ver en las simulaciones la evolución del sistema sin excederse en la cantidad de individuos al final de la simulación. El parámetro  $N_i$  se compone, además de lo mencionado, del capital social que poseen las redes sociales presentes en el nodo  $i$ .

### 3.2. Aristas y condición de migración

Las aristas de la red se seleccionaron a partir de un mapa vial del departamento haciendo la siguiente discriminación: son aristas las vías que llevan directamente de un municipio a otro. Si, por ejemplo, para ir del municipio  $a$  al municipio  $b$  se debe pasar antes por el municipio  $c$  entonces se consideran únicamente las vías que llevan de  $a$  a  $c$  y de  $c$  a  $b$ .

Para poder realizar el estudio de influencias indirectas se asignó a cada lado una ponderación de la cantidad de personas que migran anualmente por esa ruta de acuerdo en lo descrito

en la Sección (2.4). Se estableció que la condición de migración  $c_i$  fuera igual a 0,9 para  $i = 1, 2, \dots, 42$  de manera arbitraria. La selección de este parámetro obedece al hecho de que generalmente los individuos no migran de un nodo si ven que las condiciones son favorables en este; es decir, la capacidad de carga del nodo es mucho mayor con respecto a la población actual. Pero cuando las condiciones ya no son tan favorables (capacidad de carga muy cerca a la población actual) comienzan a buscar mejores opciones. Así pues, la migración es

$$f_i(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i < 0,9N_i \\ \kappa_i x_i & \text{si } x_i \geq 0,9N_i \end{cases} \quad (3-2)$$

y aquí  $\kappa_i$  es como se construyó en la Sección (2.4):

$$\kappa_j = W_j(t) \sum_{i=1}^n W_i^{\{j\}}(t) \frac{x_i(t)}{d_{ij}^2}.$$

Este caso particular asume que los individuos se desplazan cuando la capacidad de carga se está agotando pero podrían estudiarse otro tipo de desplazamientos, como por ejemplo un desplazamiento forzado.

Se ha escogido una condición del 90% para que se dé la migración pero es posible considerarla variable. Esto permitiría establecer unas políticas gubernamentales con respecto al movimiento de las personas con el fin de convertir los equilibrios virtuales del sistema en equilibrios reales como se observó en el Ejemplo (2.2).

### 3.3. Dinámica de migración

Ahora tenemos que hay individuos saliendo de los nodos hacia los vecinos pero deben establecerse preferencias para los destinos porque no todos son igualmente atractivos ya sea por condiciones económicas, sociales, etc. Este modelo define una matriz de preferencias que van acorde al modelo de interacción gravitacional contruido anteriormente, para ello utilizamos la construcción definida en la Sección (2.4.2):

$$\gamma_{ij} = \frac{W_i^{\{j\}}(t) \left( \frac{x_i(t)}{d_{ij}^2} \right)}{\sum_{k=1}^n W_k^{\{j\}}(t) \left( \frac{x_k(t)}{d_{kj}^2} \right)}.$$

Para determinar la cantidad de individuos que llegan a un nodo  $i$  desde otro nodo  $j$  recurrimos a los valores  $\gamma_{ij}$  y  $f_j(x_j)$  para obtener  $\gamma_{ij} f_j(x_j) = M_{ij}$  que da la cantidad de individuos que van de  $j$  a  $i$ . Finalmente, usando

$$\sum_{j \in \text{Ady}(i)} \gamma_{ij} f_j(x_j) = \sum_{j \in \text{Ady}(i)} M_{ij}$$

encontramos el total de personas que llegan a  $i$  desde todos los municipios vecinos en cierto tiempo.

### 3.4. Modelo para la dinámica de la red

Podemos escribir ahora la ecuación diferencial que describe la dinámica poblacional en cierto nodo  $i$  de la siguiente manera

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_i x_i \left(1 - \frac{x_i}{N_i}\right) - f(x_i) + \sum_{j \in \text{Ady}(i)} \gamma_{ij} f(x_j). \quad (3-3)$$

Para simplificar la integración numérica damos una ecuación vectorial que describe la dinámica poblacional en toda la red. Definimos  $\gamma = (\gamma_{ij})$  la matriz de preferencias de desplazamiento,  $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{42})$  el vector de poblaciones,  $N = (N_1 \ N_2 \ \dots \ N_{42})$  el vector de capacidades de carga y  $\alpha = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{42})$  el vector de crecimientos netos. Definimos la función  $f$ , que da la migración, como  $f(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_{42}(x_{42}))$ . De esta manera podemos escribir

$$\frac{dx}{dt} = G(x) + (\gamma - I)f(x) \quad (3-4)$$

En donde,  $G(x) = (G_1(x_1), G_2(x_2), \dots, G_{42}(x_{42}))$  e  $I$  es la matriz identidad de tamaño  $42 \times 42$ . La matriz  $A$  no es considerada ya que  $\gamma$  incluye de manera implícita la topología de la red. La Ecuación (3-4) representa la dinámica poblacional en toda la red y su integración por método numérico es más sencilla de realizar.

### 3.5. Solución numérica e interpretación

Analizando la red con los algoritmos estándar de Redes Complejas obtenemos la distribución de grados para entender la topología y la centralidades por grado, por cercanía, por intermediación y por comunicabilidad para obtener los nodos representativos dentro de la red.

La distribución de los grados permite entender mejor cómo está conectada la red. Se calcula a partir del grado de cada nodo que es cuántas aristas del grafo conectan con él. Luego se cuentan cuantos nodos tienen grados en común y se visualiza mediante un gráfico. Para el Valle del Cauca se encontró la distribución mostrada en la Figura (3-1). Allí se puede ver que hay tres nodos, uno con grado 8 el cual corresponde Cali, otro con grado 7 que corresponde a Buga y el último con 6 correspondiente a El Cerrito. También hay 14 nodos con grado 3 y 5 nodos con grado 1 entre los que figura Palmira.

La centralidad por grado de cada nodo corresponde a la fracción de nodos a los que se encuentra conectado y se calcula dividiendo el grado del nodo por la cantidad total de nodos. Para la red en cuestión se obtuvieron los valores mostrados en la Figura (3-2). Los dos nodos con mayor centralidad por grado son Cali y Buga.

La centralidad por cercanía de cada nodo se calcula a partir del recíproco de la suma de las distancias más cortas desde él hasta los demás nodos. Da la noción de qué tan cerca está

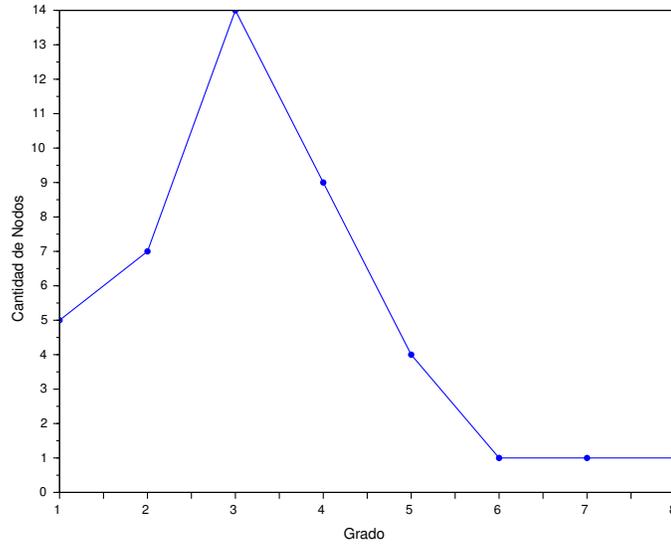


Figura (3-1): Distribución de grado del Valle del Cauca

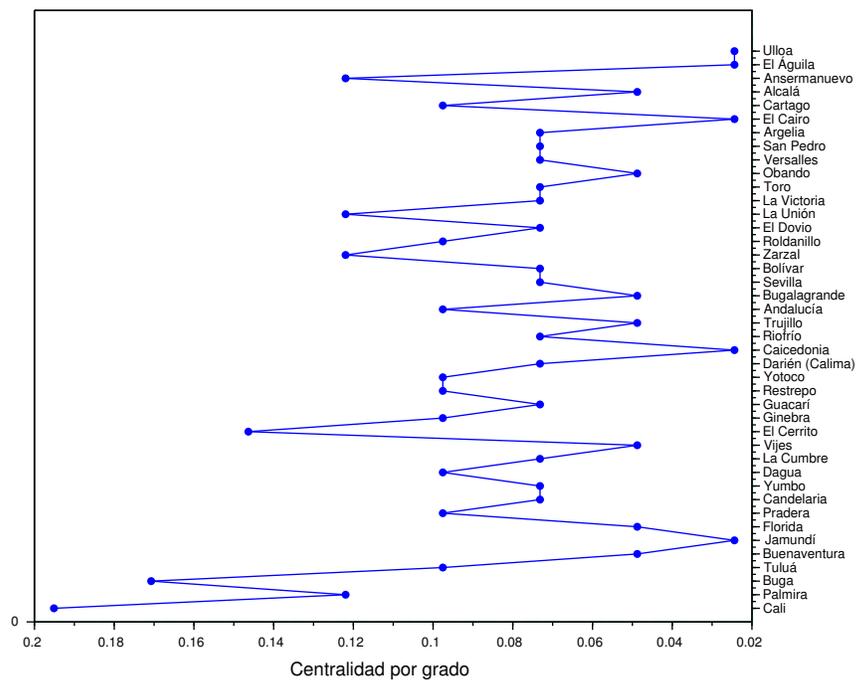
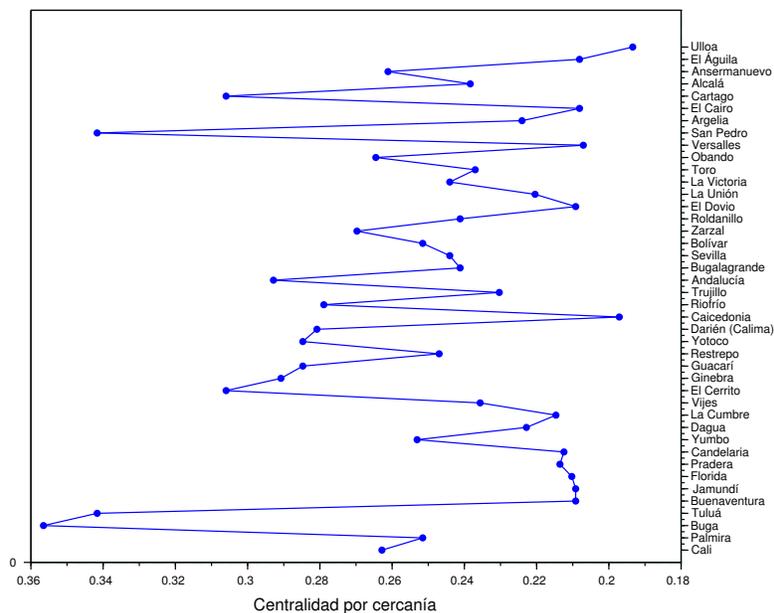


Figura (3-2): Resultados de centralidad por grado del Valle del Cauca



**Figura (3-3):** Resultados de centralidad por cercanía del Valle del Cauca

cada nodo al resto de la red. Para la red del Valle se muestran los resultados en la Figura (3-3). Los nodos con mayor centralidad por cercanía son Buga, Tuluá y San Pedro.

La centralidad por intermediación de un nodo se calcula a partir de los caminos más cortos del grafo que pasan por dicho nodo. Permite determinar cuáles nodos están mayormente en los caminos más cortos del grafo. Para el Valle del Cauca se tienen los resultados de la Figura (3-4). Los nodos con mayor intermediación son Cali y Cartago.

La centralidad por comunicabilidad de un nodo es calculada mediante la suma de las distancias de todos los caminos cerrados que comienzan y terminan en ese nodo. Los resultados se muestran en la Figura (3-5). Los nodos con mayor comunicabilidad son Cali, El Cerrito y Buga.

A partir de estas cuatro medidas de centralidad se calcula un promedio con el fin de obtener los nodos más representativos de la topología de la red. Cabe mencionar que estos cálculos de centralidad realizaron sin tener en cuenta la distancia real entre los municipios para hacer énfasis en la topología. Se escalaron los valores de cada centralidad y se promediaron obteniendo los resultados mostrados en la Figura (3-6). Los seis municipios más representativos en orden descendente son entonces: Buga, Cali, El Cerrito, Tuluá, Cartago y San Pedro. Los siguientes seis son Ansermanuevo, Palmira, Andalucía, Zarzal, Yotoco y Ginebra.

Para la integración numérica se utilizó el método de Runge-Kutta de orden cuatro con un paso fijo de 0,1. obteniendo las soluciones numéricas para todos los nodos pero se muestran las de los nodos más representativos de la red.

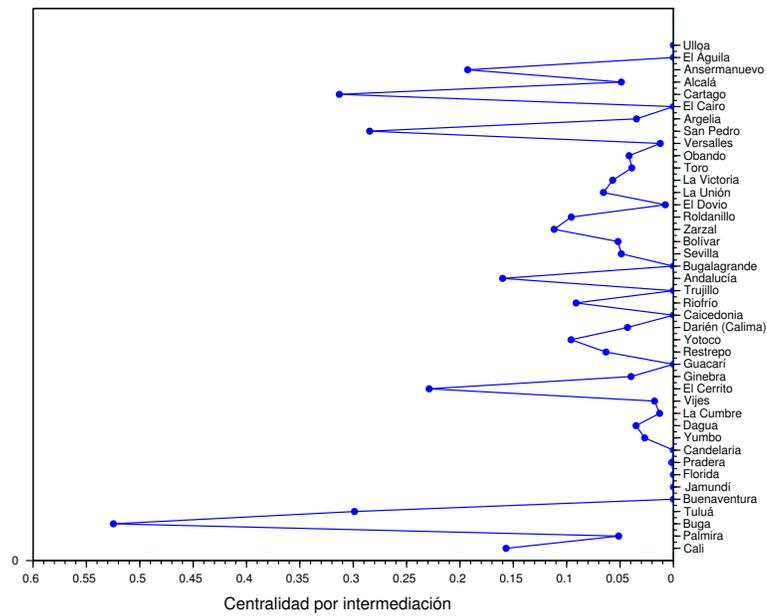


Figura (3-4): Resultados de centralidad por intermediación del Valle del Cauca

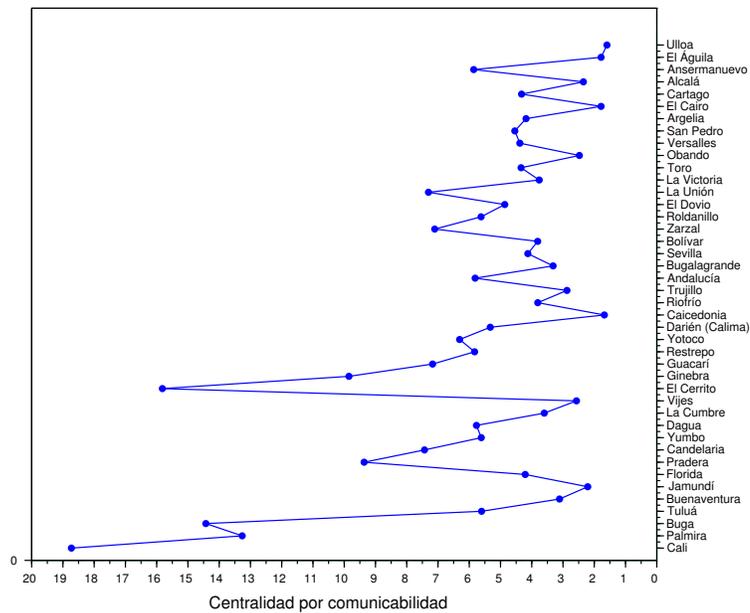


Figura (3-5): Resultados de centralidad por comunicabilidad del Valle del Cauca

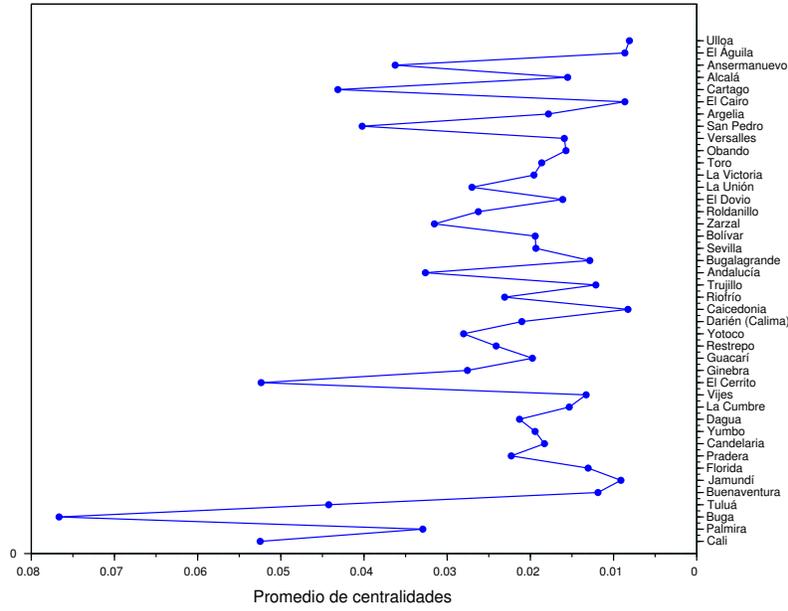


Figura (3-6): Promedio de las centralidades del Valle del Cauca

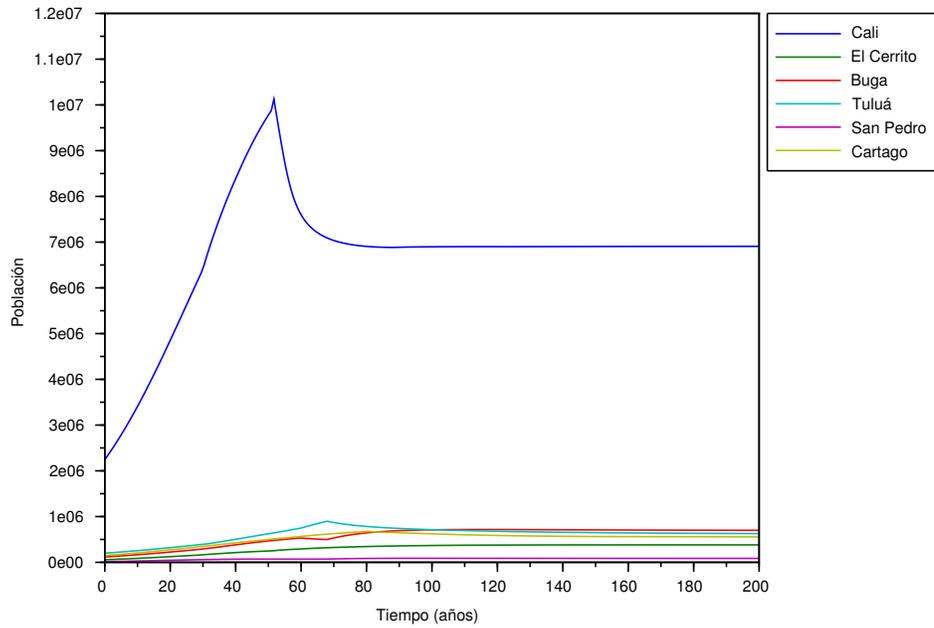
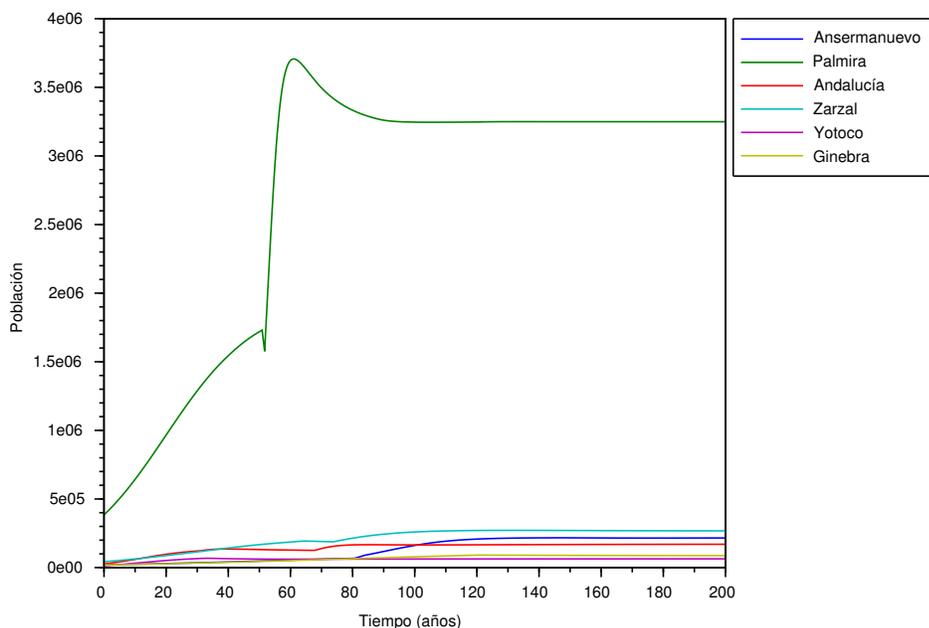


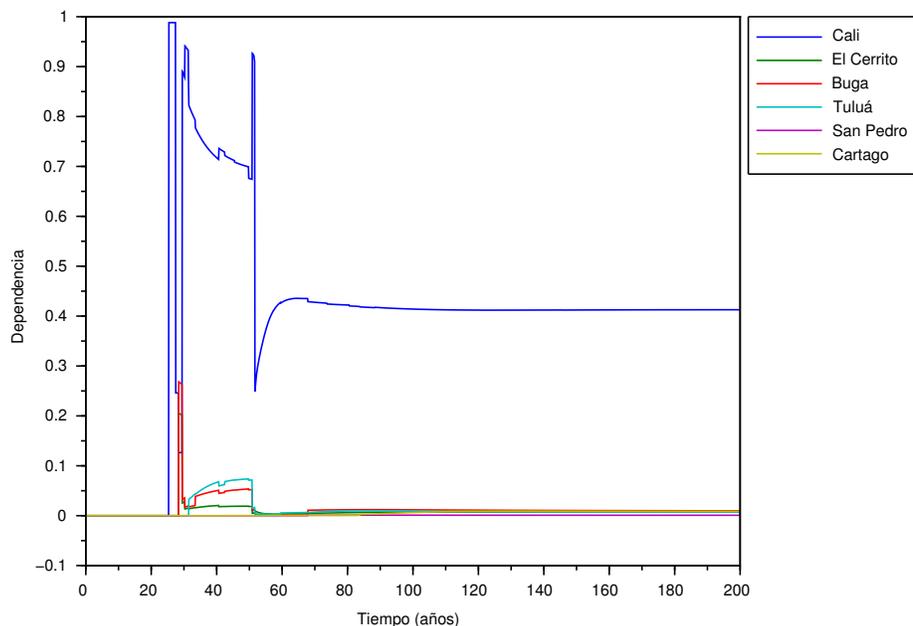
Figura (3-7): Evolución de las poblaciones en los seis municipios representativos del Valle del Cauca



**Figura (3-8):** Evolución de las poblaciones en los siguientes seis municipios representativos del Valle del Cauca

Puede verse que el crecimiento poblacional en la ciudad de Cali es muy veloz comparado con el de los otros municipios esto debido no solamente a su población inicial sino que también, debido a las preferencias de desplazamiento, recibe gran cantidad de individuos desde los nodos cercanos. Para los demás se nota un crecimiento más bien prudente que luego se estabiliza.

Hay una cuestión interesante cerca del tiempo 50 y es un comportamiento no suave en las gráficas de Cali y Palmira. En ese punto la capacidad de carga del primero se ve alcanzada por el alto nivel de crecimiento y migración por lo que una gran cantidad de individuos se desplazan a otra ciudad que podemos decir que es Palmira. A partir de allí la población de Cali no aumenta más y se estabiliza en un valor cercano a siete millones de habitantes. El caso de Palmira es distinto, se observa que su capacidad ha sido rebasada por mucho y la población se estabiliza por encima de ese nivel en poco menos de tres millones quinientos mil habitantes. Para intentar explicar este comportamiento realizaremos un estudio de influencias indirectas.



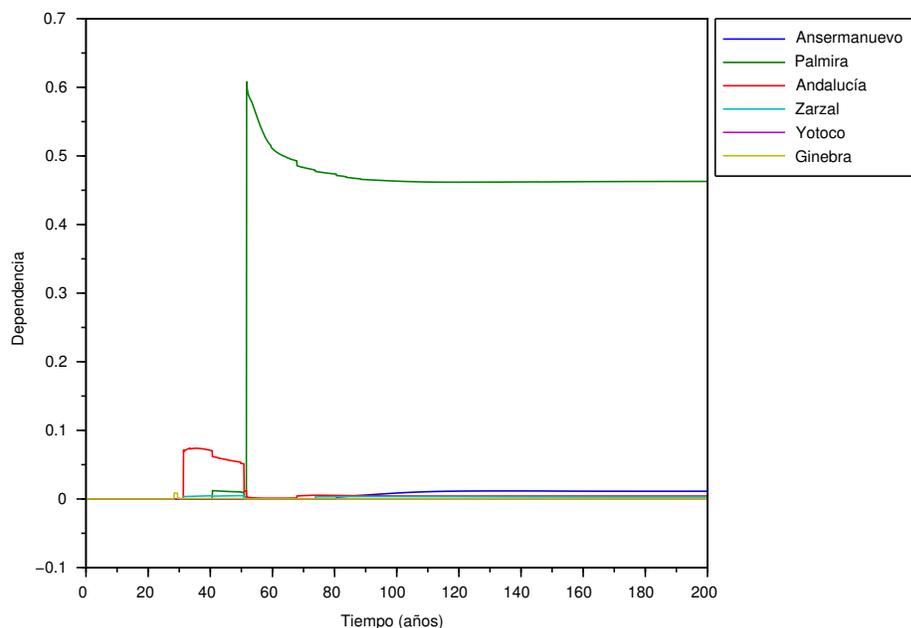
**Figura (3-9):** Evolución de las dependencias indirectas en los seis municipios principales del Valle del Cauca

### 3.6. Análisis de influencias y dependencias indirectas

Se intentará ahora explicar, mediante influencias y dependencias indirectas, el comportamiento que exhibe la red. Las matrices usadas para este cálculo se tomaron, de acuerdo a lo mencionado en la Sección (2.4.2), como  $D(t) = \gamma(t)\text{diag}(f(x(t)))$  que muestran la cantidad de personas viajando de un nodo a otro en un tiempo determinado. Debido a que los números en estas matrices son del orden de decenas de miles se requiere un escalamiento para poder realizar el análisis, así pues para cada momento del tiempo se calcula  $D^*(t) = \frac{D}{\sum D}$  en donde  $\sum D$  es la suma de todas las entradas de la matriz  $D$ .

Los resultados, para las doce ciudades más representativas del departamento, de calcular dependencias indirectas se muestran en las Figuras (3-9) y (3-10) y los de influencias indirectas en las Figuras (3-11) y (3-12).

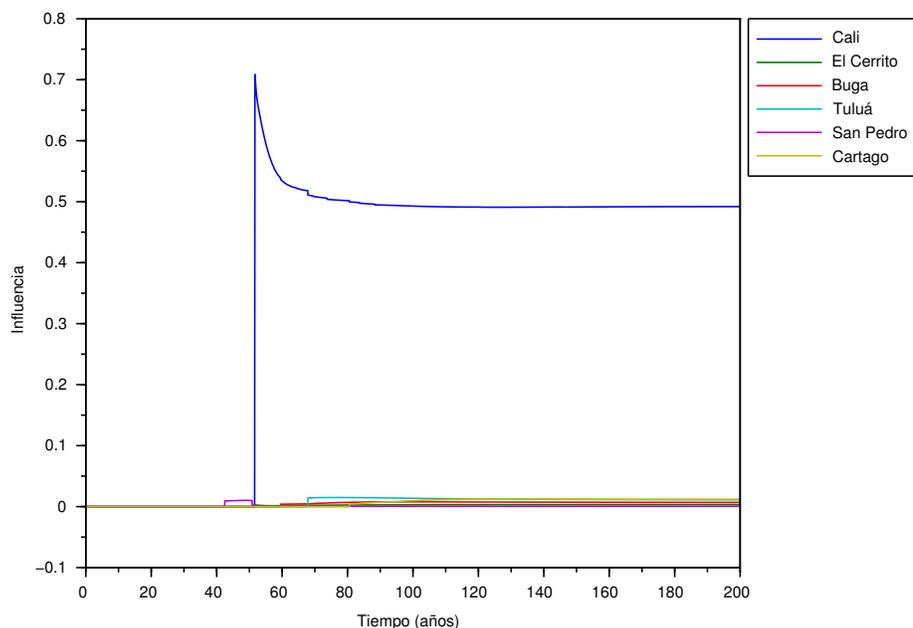
Revisando las dependencias indirectas vemos que mientras las poblaciones en los nodos van creciendo hasta alcanzar el 90% de su capacidad de carga ninguno tiene una dependencia dentro de la red. Cuando han pasado cerca de 25 unidades de tiempo, algunas ciudades han logrado la condición de migración y se ve la clara dependencia de Cali para el movimiento poblacional. Esto puede interpretarse de la siguiente manera: entre 25 y 60 unidades temporales Cali es una ciudad en crecimiento, con una población altísima comparada a las demás por lo que el movimiento de individuos está orientado hacia ella. Luego de que Cali alcanza



**Figura (3-10):** Evolución de las dependencias indirectas en los siguientes seis municipios principales del Valle del Cauca

su capacidad de carga en aproximadamente 52 unidades de tiempo, el movimiento poblacional se orienta al municipio de Palmira, que no mostraba mayor relevancia anteriormente, por lo que la dependencia del primero tiene una caída drástica y la de la segunda muestra un crecimiento instantáneo superando la del primero. A partir de allí se establece Palmira como el centro de las migraciones con un coeficiente de dependencia de 0.46, mientras que por debajo se ubica la capital del departamento con un coeficiente de 0.41. Debe tenerse en cuenta que entre estos dos municipios se comparten el 87 % de la dependencia.

La revisión de las influencias indirectas muestra algo diferente. Para los nodos mostrados se observa que en aproximadamente 50 unidades de tiempo Palmira muestra un pico que rápidamente descende y corresponde a la no suavidad que se ve en la función de población. Casi inmediatamente después la gran población que comienza a salir de Cali influye en toda la red y hace que disminuya la influencia de Palmira a un coeficiente de 0.36 de influencia total sobre la red. A partir de allí se establece la capital como principal influyente de migración con un coeficiente de influencias de 0.49. Estas dos ciudades suman el 85 % de la influencia de la red.



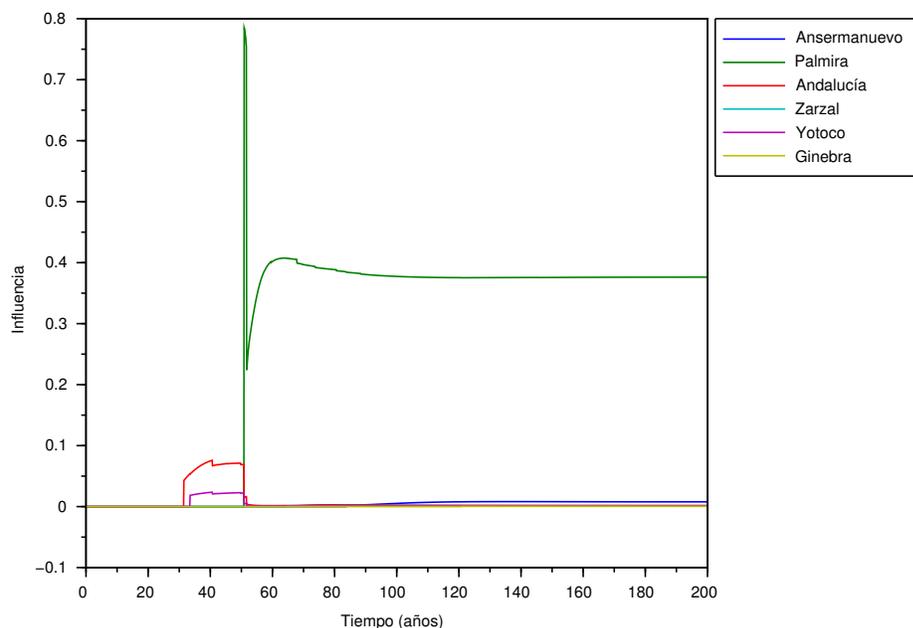
**Figura (3-11):** Evolución de las influencias indirectas en los seis municipios principales del Valle del Cauca

### 3.7. Discusión

Debido a la naturaleza del modelo no todos los aspectos migratorios están cubiertos. Podría considerarse una resistencia a migrar por parte del individuo por diferentes razones, llámense tradición o apego e incluso podría añadirse una función de costo que permita al individuo hacer una comparación costo-beneficio. También puede tenerse en cuenta algún factor que modifique uno de los parámetros de uno o varios nodos como podría ser un desastre natural, violencia de algún grupo armado, políticas de gobierno para atraer personas, entre otros. Otro asunto a considerar es el hecho de que los municipios fronterizos del departamento pueden tener preferencia por las capitales de los departamentos vecinos por lo cual se podría ampliar el modelo con dichos nodos.

Los resultados de población, influencias y dependencias indirectas muestran un comportamiento dentro de la red que se puede observar de manera empírica en la realidad. Cuando se cuenta con una ciudad con altas capacidad de carga y población respecto a las demás la tendencia migratoria es hacia ella y hay una pequeña preferencia por ciudades clave dentro de la red. Una vez la ciudad principal se satura, la atención se redirige hacia una ciudad vecina a la principal que aún cuente con un margen de capacidad, pero los individuos que llegan allí provienen principalmente de la principal.

Una evidencia para esta situación es el caso de Bogotá, una ciudad que para 2012 era muy



**Figura (3-12):** Evolución de las influencias indirectas en los siguientes seis municipios principales del Valle del Cauca

claro que estaba saturada y era notoria la entrada de otras opciones cercanas, como son los municipios de Soacha, Mosquera, Facatativá, Fusagasugá, Chía y otros, que han tenido un crecimiento relevante la última década.

La preferencia por ciudades con mayor cantidad de habitantes es justificada por lo que se conoce en sociología como Capital Social [4, 29, 25, 30]. Este mide la capacidad de una sociedad para trabajar en conjunto mediante colaboración y acción colectiva, y todos los demás parámetros que permiten la prosperidad de la colaboración y el uso de las oportunidades resultantes de las redes sociales conformadas dentro de ella. Así, una ciudad con mayor población posee un capital social mayor, entendiéndose desde una perspectiva positiva como una mayor cantidad de oportunidades sociales, económicas, políticas, lúdicas, etc. Este Capital Social es generado y aprovechado por las mentadas redes sociales, las cuales se encuentran en mayor medida en las ciudades más pobladas.

El cambio del comportamiento en la red se da cuando esa ciudad con tantos beneficios ya no puede albergar a más habitantes. Es común en las ciudades sobrepobladas la inseguridad, la insalubridad, el caos en el sistema de transporte, los altos costos de vivienda y otros factores que ahora influyen la decisión de migrar del individuo esté o no en la ciudad principal. La preferencia se redirige entonces a las ciudades vecinas que cuenten con un alto capital social ya que al estar cerca un trayecto intermunicipal a la principal no es costoso, en términos monetarios y de tiempo, y es posible aprovechar también las redes sociales con su capital

social existentes en la principal. Un aspecto interesante es que tanto las influencias como las dependencias en la red se estabilizan con valores muy altos para Cali y Palmira. Entre las dos ciudades sigue existiendo un movimiento constante y considerable por lo que podemos decir que efectivamente los individuos en ambas ciudades buscan aprovechar el Capital Social presente allí. De hecho, volviendo a la gráfica de población de Palmira se ve que el punto de estabilidad para esta evolución se encuentra muy por encima de la capacidad de carga de ese nodo. De alguna manera la atracción de ese municipio es suficiente para que la población supere por mucho los niveles aceptables e impida que los individuos vuelvan a sus lugares de origen.

También resulta de interés el hecho de que según las medidas de centralidad Palmira no tiene alguna característica de interés en comparación con otros nodos. Por lo que de nuevo la información que arroja el método *PWP* resulta novedoso y coherente con las observaciones empíricas.

### **3.8. Conclusiones de capítulo**

Se presentó el caso de estudio para Valle del Cauca. Se calculó la solución de la red a partir de parámetros obtenidos de las proyecciones poblacionales del DANE [8] y otros supuestos. Se encontró que el cálculo de influencias y dependencias indirectas arroja información relevante sobre la dinámica de la red del caso y permite explicar ciertos fenómenos que se observan de manera empírica.

# 4 Conclusiones y recomendaciones

## 4.1. Conclusiones

1. Se exploraron los elementos socio-económicos que están involucrados en la migración no forzada de poblaciones dentro de una red.
2. Se identificaron los aspectos clave en Redes Complejas que permiten calcular Influencias Indirectas. Estos son: la matriz de adyacencia de la red, el tipo de información que se transmite a través de la red y las condiciones iniciales.
3. Se estableció una metodología que permite el cálculo de influencias y dependencias mediante *PWP* en una red de migración poblacional.
4. Se determinó que los datos arrojados por Influencias Indirectas de la red del Valle del Cauca explican ciertas características de la red que se observan de manera empírica.
5. Se estableció un primer estudio de Influencias Indirectas dentro de la metodología de las Redes Complejas en un modelo de migración poblacional y este permitió extrapolar los resultados de simulación en la vida real.

## 4.2. Recomendaciones

1. Sería de mucho interés añadir una función de costo al modelo de interacción modificado que se presentó ya que podrían presentarse cambios en los resultados presentados en este documento.
2. Muchos de los parámetros de la red fueron considerados en este trabajo como constantes. Un estudio posterior podría considerar varios de estos parámetros como variables extendiendo a un estudio de bifurcaciones.
3. La red del Valle del Cauca se puede extender con las capitales de los departamentos vecinos y posteriormente con todos los municipios del país. Un estudio de este nivel es posible pero el nivel de cómputo requerido es mucho más grande.
4. Añadir eventos (cambios drásticos en los parámetros de la red o ciertos nodos) en el modelo permitiría simular sucesos de la vida real que escapan a este estudio.

5. Definir para otro tipo de red compleja la manera de calcular Influencias Indirectas.

# Bibliografía

- [1] ALESHKOVSKI, I. ; IONTSEV, V.: Mathematical models of migration. En: *System Analysis and modeling of integrated world systems, EOLSS 2* (2006), p. 1–10
- [2] AN, H. ; GAO, X. ; FANG, W. ; DING, Y. ; ZHONG, W.: Research on patterns in the fluctuation of the co-movement between crude oil futures and spot prices: A complex network approach. En: *Applied Energy* 136 (2014), p. 1067–1075
- [3] BAI, Q. ; NIU, D. ; BAI, J.: Complex networks economy systems engineering in general synergetic structure. En: *Systems Engineering Procedia* 4 (2012), p. 252–258
- [4] BOURDIEU, Pierre: *Outline of a theory of practice*. Cambridge; New York : Cambridge University Press, 1977
- [5] BRIN, S. ; MOTWANI, R. ; PAGE, L. ; WINOGRAD, T.: The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web. Stanford InfoLab, 1999 ( 1999-66). – Informe de Investigación
- [6] CHEN, H. ; SHEN, C.: Nucleation of a three-state spin model on complex networks. En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 424 (2015), p. 97–104
- [7] CRUCERU, A.: Statistical analysis of the migration phenomenon. En: *Romanian Statistical Review* 11 (2010), p. 1–8
- [8] DANE. *Censo General 2005 Demografía y Población*. 2005
- [9] DAVIS, K. ; D’ODORICO, P. ; LAIO, F. ; RIDOLFI, L.: Global Spatio-Temporal Patterns in Human Migration: A Complex Network Perspective. En: *PLoS ONE* 8 (2013), p. e53723
- [10] DONG, S. ; PU, Y. ; WANG, Y.: A research on complex network of Chinese interprovincial migration based on the fifth population census. (2013), p. 1–4
- [11] DÍAZ, R.: Indirect Influences. En: *Advanced Studies in Contemporary Mathematics* 23 (2013), p. 29–41
- [12] DÍAZ, R ; GÓMEZ, L.: Indirect influences in international trade. En: *Networks and Heterogeneous Media* 10 (2015), Nr. 1, p. 149–165

- 
- [13] DÍAZ, R. ; VARGAS, A.: On the stability of the PWP method. En: *pre-print arxiv:1504.03033v1* (2015)
- [14] ESTRADA, E. ; HATANO, N. ; BENZI, M.: The physics of communicability in complex networks. En: *Physics Reports* 514 (2012), Nr. 3, p. 89–119
- [15] FAGIOLO, G. ; MASTRORILLO, M.: Migration and Trade: A Complex-Network Approach. En: *Social Science Research Network* (2013), p. 1–9
- [16] FILHO, H. ; DE LIMA NETO, F. ; FUSCO, W.: Migration and social networks - An explanatory multi-evolutionary agent-based model. En: *2011 IEEE Symposium on Intelligent Agent*, IEEE, 2011, p. 1–7
- [17] FILIPPOV, A.: Differential Equations with discontinuous right-hand side. En: *American Mathematical Society Translations Series 2* (1964), p. 199–231
- [18] GODET, M.: *De l'Anticipation a l'Action*. Dunod, 1992
- [19] GUARDIA, M. ; SEARA, T.M. ; TEIXEIRA, M.A.: Generic Bifurcations of Low Codimension of Planar Filippov Systems. En: *Journal of Differential Equations* 250 (2009), p. 1967–2023
- [20] KNIGHT, D. ; SHINAR, G. ; FEINBERG, M.: Sharper graph-theoretical conditions for the stabilization of complex reaction networks. En: *Mathematical Biosciences* 262 (2015), p. 10–27
- [21] KUZNETSOV, YU. ; RINALDI, S. ; GRAGNATI, A.: One-parameter Bifurcations in Planar Filippov Systems. En: *International Journal of Bifurcations and Chaos* 13 (2003), p. 2157–2188
- [22] LANGVILLE, A. ; MEYER, C.: Deeper inside pagerank. En: *Internet Mathematics* 1 (2004), p. 2004
- [23] LANGVILLE, A. ; MEYER, C.: A survey of eigenvector methods of web information retrieval. En: *SIAM Rev.* 47 (2005), Nr. 1, p. 135–161
- [24] MASSEY, D. ; ARANGO, D. ; HUGO, G. ; KOUAOUCI, A. ; PELLEGRINO, A. ; EDWARD TAYLOR, J.: *Worlds in Motion: Understanding International Migration at the End of the Millennium*. Oxford University Press, 2002
- [25] MASSEY, D. ; AYSA-LASTRA, M.: Social Capital and International Migration from Latin America. En: *International Journal of Population Research* 2011, p. 18
- [26] MASSEY, D. ; ESPAÑA, F.: The social process of international migration. En: *Science* 237 (1987), Nr. 4816, p. 773–738

- 
- [27] MATLAB: *version 8.1.0.604 (R2013a)*. Natick, Massachusetts : The MathWorks Inc., 2013
- [28] PAN, L. ; CAO, J. ; HU, J.: Synchronization for complex networks with Markov switching via matrix measure approach. En: *Applied Mathematical Modelling* In Press, Corrected Proof (2015), p. N.A.
- [29] PORTES, A.: Social Capital: its origins and applications in modern sociology. En: *Annual Review of Sociology* (1998), p. 1–24
- [30] PUTNAM, R.: Social Capital: Measurement and Consequences. En: *Isuma: Canadian Journal of Policy Research* 2 (2001), p. 41–51
- [31] PÉREZ, M.: Tejiendo redes para futuras movilidades: las interacciones sociales y el capital social en la migración emergente de México a Estados Unidos. En: *Sociológica* 28 (2013), Nr. 78, p. 139–170
- [32] SCILAB ENTERPRISES: *Scilab: Free and Open Source software for numerical computation*. Orsay, France: Scilab Enterprises, 2015
- [33] TAKAGUCHI, T. ; LAMBIOTTE, R.: Sufficient conditions of endemic threshold on meta-population networks. En: *Journal of Theoretical Biology* 380 (2015), p. 134–143
- [34] TAN, S. ; LÜ, J.: Characterizing the effect of population heterogeneity on evolutionary dynamics on complex networks. En: *Scientific Reports* 4 (2014), p. 1–7
- [35] WANG, T. ; WANG, H. ; WANG, X.: A novel cosine distance for detecting communities in complex networks. En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 437 (2015), p. 21–35
- [36] ZIPF, G.: The P1P2/D Hypothesis: On the Intercity Movement of Persons. En: *American Sociological Review* 2 (1946), p. 677–686