AUTOMORFISMOS DE ANILLOS DE SERIES FORMALES

Carlos Enrique Mejía Salazar

Trabajo de grado presentado como requisito para optar el título de Magister en Matemáticas

Directora: Débora María Tejada J.
Doctora en Matemáticas

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Seccional de Medellín
Facultad de Ciencias
Posgrado de Matemáticas
1985

Para Margarita

AGRADECIMIENTOS

Me considero afortunado por haber afrontado este trabajo con la grata compañía de la profesora Débora María Tejada como directora del proyecto de grado y de la profesora Margarita María Toro, encargada de trabajar en el proyecto de grado que se reseña en [14] . El presente trabajo también se debe a sus sugerencias, sus ayudas y sus ganas de trabajar.

A los jurados de este trabajo, profesores Rosa Antonia Franco, Gilberto García y Volker Stallbohm, les expreso mis agradecimientos. Su cuidadosa labor de revisión y sus sugerencias fueron grandes ayudas.

El constante apoyo y la colaboración brindada por las directivas y los profesores del posgrado, merecen mi reconocimiento.

La paciente labor de mecanografía y escritura de caracteres especiales estuvo a cargo de la Señora Miryam Lucia Patiño de Núñez; a ella también expreso mis agradecimientos.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCION

Este trabajo es una recopilación de avances recientes en el campo de los endomorfismos de anillos de series formales. Su forma de presentación asume en el lector únicamente nociones básicas de álgebra conmutativa y de la topología general, muchas de las cuales se recuerdan en el texto.

Sea R un anillo conmutativo con unidad; a los endomorfismos (resp. automorfismos) de $R[x]$ que restringidos a R son la identidad, se les llama R-endomorfismos (resp. R-automorfismos) de $R[x]$. Estas definiciones también se hacen para $R[[x]]$ y $R[[x_1,\ldots,x_n]]$. Los principales resultados de este trabajo son las caracterizaciones de los R-automorfismos de $R[x]$, $R[[x]]$ y $R[[x_1,\ldots,x_n]]$.

El primer capítulo se encarga de los R-automorfismos de $R[x]$. En él recopilamos diversos resultados sobre el tema, entre los cuales destacamos el siguiente:

Si $t = \sum_{i=0}^{n} t_i x^i$ es un polinomio de $R[x]$ y f_t es el R-endomorfismo de $R[x]$ tal que $f_t(x) = t$, entonces: f_t es un R-automorfismo de $R[x]$ si y solo si t_1 es una unidad de R y t_i, para $i=2,\ldots,n$, es nilpotente en R. Obsérvese que la última condición es equivalente a decir que $f_t = t_o + P\,x$ con P invertible en $R[x]$. Anotamos también que en este capítulo, los métodos de demostración son netamente algebraicos.

En el primer numeral del capítulo 2 , estudiamos una clase especial de homomorfismos de $R[x]$ en $S[x]$ para R y S anillos conmutativos con identidad. En el segundo numeral de este capítulo, citamos los resultados de Gilmer relativos a R-endomorfismos de $R[x]$ cuando R es un anillo conmutativo con algún elemento regular y posiblemente sin identidad. Durante nuestro estudio intentamos una caracterización de los R-automorfismos de $R[[x]]$ cuando R es un anillo conmutativo con algún elemento regular; sin embargo, dificultades de tipo topológico nos impidieron llegar a algún resultado final. Advertimos que no sabemos si este problema está resuelto.

Si R es un anillo conmutativo con unidad, una caracterización de los R-automorfismos de $R[[x]]$ es la generalización natural del resultado válido para $R[x]$. Así, se tiene que dado un R-endomorfismo ϕ de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta = \sum_{i=0}^{\infty} b_i\, x^i$, ϕ es un R-automorfismo de $R[[x]]$ si y solo si b_1 es una unidad de R ; nótese que esta condición es equivalente a decir que $\phi(x) = b_o + P\,x$ con P invertible en $R[[x]]$.

Aunque esta caracterización es una extensión simple del resultado semejante de $R[x]$, su demostración requiere seguir un largo camino que se presenta en los capítulos 3, 4 y 5 ; el resultado citado sólo se probará en el capítulo 6.

La existencia y la unicidad de endomorfismos de anillos de series formales, siempre dependen de las estructuras topológicas que se definan en esos anillos. En el capítulo 3 presentamos las nociones topológicas que se necesitan en este trabajo; el principal concepto topológico que se define es el de completación de un anillo topológico. Veremos, por ejemplo, que $R[[x]]$ con la topología (x)-ádica, es la completación de $R[x]$ con su correspondiente topología (x)-ádica.

Para llegar a la caracterización de los R-automorfismos de $R[[x]]$, es necesario estudiar previamente el caso particular en que $\phi(x) = \sum_{i=k}^{\infty} b_i x^i$ con $k \geqslant 1$. Esto se hace en el capítulo 4.

Los capítulos 5 y 6 son la parte central del trabajo. Como el objetivo principal es recopilar resultados, nos dedicamos en estos capítulos a presentar y explicar los artículos [11] y [12] de O'Malley y de O'Malley & Wood respectivamente. En el capítulo 5 aparecen además resultados sobre $R[[x_1,\ldots,x_n]]$ tomados de [5] .

Podemos identificar el artículo [11] con el uso de topologías (b_0)-ádicas y el artículo [12] con las topologías β-ádicas; en los dos casos, $\beta = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ es un elemento de $R[[x]]$. El artículo [11] trabaja fundamentalmente con estructuras topológicas en R y el artículo [12] con estructuras topológicas definidas en subanillos de $R[[x]]$. Ambos artículos caracterizan los R-automorfismos de $R[[x]]$, pero el artículo [11] debe poner como condición que $(R,(b_0))$ sea Hausdorff. El artículo [12] logra, de manera muy elegante, suprimir esta condición y nos dá la caracterización enunciada antes. Esperamos que el orden de la exposición en estos capítulos, muestre el contraste que existe entre los dos métodos de trabajo y lo bien que se complementan.

El capítulo 7 es la generalización que hemos hecho nosotros de algunos de los resultados del capítulo 6. Nuestro resultado principal es:

Si $\phi : R[[x]] \longrightarrow S[[x]]$ es un homomorfismo de anillos tal que $\phi \mid R$ es un isomorfismo de R en S, entonces ϕ es un isomorfismo si y sólo si $\phi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ con b_1 invertible en S, (o lo que es equivalente, $\phi(x) = b_0 + Px$ con P invertible en $S[[x]]$).

El método que utilizamos es una extensión del presentado en el capítulo 2 para el caso similar en anillos de polinomios, combinado con las propiedades topológicas que conlleva el trabajar en anillos de series formales.

Es voluntaria la omisión de referencias a endomorfismos de anillos de polinomios en varias variables. El motivo es que los endomorfismos en estos anillos son todavía un problema abierto a las conjeturas y al estudio de los investigadores. Resultados parciales y ejemplos sobre el tema, se puedenconsultar en los trabajos [9] , [13] y [14] .

Todo el trabajo se caracteriza por el detallismo en las pruebas; lo quisimos asi, porque su objetivo es la recopilación de resultados con fines docentes y de consulta.

Las únicas notaciones que utilizamos en el texto y que creemos se deben mencionar expresamente, son éstas:

$\mathbb{N}$ representa al conjunto de los enteros positivos.

$\mathbb{N}_0$ representa al conjunto de los enteros no negativos.

1. R-automorfismos de $R[x]$

Nos proponemos presentar el resultado de Gilmer que caracteriza los R-automorfismos de $R[x]$. (Ver [4] pág. 331). Este resultado dice asi: Sean $t = \sum_{i=0}^{n} t_i x^i \in R[x]$ y f_t el R-endomorfismo de $R[x]$ tal que $f_t(x) = t$. Entonces: f_t es un automorfismo de $R[x]$ si y solo si t_1 es una unidad de R y t_i , para $i \geqslant 2$, es nilpotente. Además, cada R-automorfismo de $R[x]$ es de la forma f_t para algún t .

1.1 En este capítulo R es un anillo conmutativo con identidad y $R[x]$ es el anillo de polinomios en la indeterminada x con coeficientes en R. Obsérvese que la variable x es independiente, es decir, el conjunto $\{1, x, \ldots, x^n, \ldots\}$ es linealmente independiente sobre R . Empezamos recordando algunos asuntos básicos sobre el anillo de polinomios $R[x]$:

1.1.1 **El grado** de un polinomio no nulo f de $R[x]$ es el mayor entero n tal que el coeficiente de x^n es no nulo; escribimos grad $(f) = n$. Definimos además, grad $(0) = -\infty$.

El orden de un polinomio f no nulo es el menor entero no negativo n tal que el coeficiente de x^n es no nulo; escribimos $o(f) = n$. Definimos también orden para el polinomio nulo: es $+\infty$

1.1.2 Proposición: Propiedad universal de los anillos polinomios.

Dados un anillo conmutativo con identidad S, un homomorfismo $\phi : R \longrightarrow S$ unitario y un elemento $t \in S$, existe un único homomorfismo $\psi : R[x] \longrightarrow S$ tal que: i) $\psi(r) = \phi(r)$ **para todo** $r \in R$ **y** ii) $\psi(x) = t$.

En efecto, si para cada polinomio $p = \sum_{i=0}^{n} r_i x^i$ de $R[x]$, definimos $\psi(p) = \sum_{i=0}^{n} \phi(r_i) t^i$, fácilmente se prueba que ψ es el único homomorfismo de anillos que satisface las condiciones mencionadas. ⁞⁞⁞

1.1.3 Observaciones:

i) La proposición anterior proporciona un método para construir homomorfismos con dominio $R[x]$ que será de gran utilidad en este trabajo.

ii) A la imagen de ψ la denotamos $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Im}(\phi)[t]$. Pero ésto no significa que $\mathrm{Im}(\psi)$ sea un anillo de polinomios; se necesitaría que t fuera una variable independiente sobre $\mathrm{Im}(\phi)$.

En el caso en que $S = R[x]$ y $\phi = I\,d_R$, la propiedad universal de los anillos de polinomios garantiza la existencia y unicidad de un R-endomorfismo de $R[x]$, que denotamos f_t , tal que $f_t(x) = t$. Al rango de

f_t lo denotamos $R[t]$.

El lema siguiente nos da condiciones necesarias y suficientes para que f_t sea sobreyectiva o inyectiva.

1.2 Lema:

Supongamos que $t \in R[x]$, $r \in R$ y u es una unidad de R .

a) f_t es sobreyectiva si y solo si f_{r+t} es sobreyectiva si y solo si f_{ut} es sobreyectiva.

b) f_t es inyectiva si y solo si f_{r+t} es inyectiva si y solo si f_{ut} es inyectiva.

Una prueba de este lema puede verse en [4] pág. 329. ⁞⁞

1.3 Observación:

Sea $t = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$; el lema anterior dice que estudiar a f_t es lo mismo que estudiar a f_{t-a_o} y entonces, sin pérdida de generalidad, se puede trabajar con $a_o = 0$.

Sea $t' = t - a_o$. El caso en que a_1 es unidad de R es especialmente importante porque el lema anterior dice que es lo mismo trabajar con t' que con $a_1^{-1} t'$. Es decir, se podría asumir que $a_1 = 1$.

Los R-endomorfismos sobreyectivos de $R[x]$ se caracterizan fácilmente si R es un dominio entero:

1.4 Teorema:

Si R es un dominio entero y ϕ es un R-endomorfismo de $R[x]$, entonces:

i) Si ϕ es sobreyectivo, $\phi(x) = a + bx$ con $a,b \in R$ y b invertible en R.

ii) Si ϕ es sobreyectivo entonces ϕ es inyectivo.

iii) Si $\phi(x) = a + bx$ con $a,b \in R$ y b es invertible en R, entonces ϕ es sobreyectivo.

El corolario siguiente es una consecuencia inmediata del teorema anterior.

1.5 Corolario:

Si R es un dominio entero y ϕ es un R-endomorfismo de $R[x]$, entonces: ϕ es un R-automorfismo de $R[x]$ si y solo si $\phi(x) = a + bx$ con $a,b \in R$ y b unidad de R.

1.6 Nota:

Se pueden conseguir homomorfismos inyectivos que no son sobreyectivos.

Ejemplos:

a) Si R es un dominio entero y $t \in R[x]$ es un polinomio no constante, entonces f_t es inyectivo. Por tanto si $n \in \mathbb{Z}$ y $|n| \geq 2$, entonces el $\mathbb{Z}$-endomorfismo ϕ de $\mathbb{Z}[x]$ tal que $\phi(x) = nx$ es inyectivo. Sin embargo, la forma como se escogió n implica que ϕ no es sobreyectivo.

b) Si R es un anillo conmutativo con unidad, el R-endomorfismo ϕ de $R[x]$ tal que $\phi(x) = x^n$, para $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, es inyectivo pero no es sobreyectivo.

El teorema siguiente es una primera generalización de 1.4 ; caracteriza los R-endomorfismos sobreyectivos de $R[x]$ cuando R es un anillo conmutativo con unidad.

1.7 Teorema:

Sean R un anillo conmutativo con unidad y $t = \sum_{i=0}^{n} t_i x^i$ un elemento de $R[x]$. Entonces: f_t es sobreyectivo si y solo si t_1 es una unidad de R y t_i para $i \geqslant 2$, es nilpotente.

Omitimos su prueba; puede verse en [4] pág. 329 ⁞⁞⁞

Con un poco de trabajo adicional (ver [4] pág. 330), se demuestra una segunda generalización del teorema 1.4 :

1.8 Teorema:

Sean R un anillo conmutativo con unidad y $t = \sum_{i=0}^{n} t_i x^i$ un elemento de $R[x]$. Entonces:

i) Si f_t es sobreyectivo entonces f_t es inyectivo.

ii) f_t es un automorfismo si y solo si t_1 es una unidad de R y t_i, para $i \geqslant 2$, es nilpotente. Cada R-automorfismo de $R[x]$ es de la forma f_t para algún $t \in R[x]$.

1.9 Nota:

Son varias las estructuras algebraicas en las cuales la sobreyectividad de los endomorfismos es condición suficiente para la inyectividad. Estudiando álgebras universales se puede probar un resultado del cual la parte i) de 1.8 es un caso particular. (Ver [13] pág. 4 y siguientes).

2. Otros homomorfismos de anillos de polinomios

En la primera parte de este capítulo aplicamos los resultados del capítulo anterior al estudio de algunos homomorfismos entre anillos de polinomios. En el segundo numeral, damos cuenta de otra aplicación de esos resultados.

2.1 Sean R y S dos anillos conmutativos con identidad, x una variable independiente sobre cada uno de ellos y $\phi : R[x] \longrightarrow S[x]$ un homomorfismo de anillos tal que $\phi|R$ es un isomorfismo de R sobre S.

Sea $\zeta : R \longrightarrow S$ el homomorfismo definido así: $\zeta(r) = \phi(r)$ para cada $r \in R$. Como ζ es un isomorfismo de R sobre S, existe su función inversa $\zeta^{-1} : S \longrightarrow R$ y también es un isomorfismo de anillos.

Para el homomorfismo $\phi|R : R \longrightarrow S[x]$ y el elemento x de $S[x]$, la proposición 1.1.2 afirma que existe un único homomorfismo de anillos $\psi : R[x] \longrightarrow S[x]$ tal que:

i) $\psi(r) = \phi(r)$ para cada $r \in R$ y

ii) $\psi(x) = x$

Además, si $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$, $\psi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} \phi(a_i)x^i$

$$= \sum_{i=0}^{n} \mathcal{C}(a_i)x^i$$

Consideremos ahora el homomorfismo $\sigma: S \longrightarrow R[x]$ definido asi: $\sigma(b) = \mathcal{C}^{-1}(b)$ para cada $b \in S$.

Para σ y el elemento x de $R[x]$, nuevamente la proposición 1.1.2 garantiza la existencia de un único homomorfismo $\rho : S[x] \longrightarrow R[x]$ tal que:

i) $\rho(b) = \sigma(b)$ para cada $b \in S$ y

ii) $\rho(x) = x$

Además, si

$$\sum_{i=0}^{n} b_i x^i \in S[x] \quad , \rho\left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} \sigma(b_i) x^i = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{C}^{-1}(b_i)x^i$$

Claramente, $\rho \circ \psi = Id_{R[x]}$ y $\psi \circ \rho = Id_{S[x]}$. Concluímos que **existe un único isomorfismo ψ de $R[x]$ sobre $S[x]$ tal que:**

i) $\psi(r) = \phi(r)$ **para todo** $r \in R$ **y**

ii) $\psi(x) = x$.

Con base en lo anterior, probamos el siguiente resultado:

2.1.1 Teorema:

Sean R, S y ϕ como en el numeral 2.1. Existe un único S-endomorfismo ϕ' de $S[x]$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} R[x] \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] & S[x] \\ S[x] \arrow[ur, "\phi'"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, ϕ es sobreyectivo (inyectivo) si y solo si ϕ' es sobreyectivo (inyectivo).

Sea $\phi' = \phi \circ \psi^{-1}$; si $b \in S$,

$\phi'(b) = \phi(\psi^{-1}(b)) = \phi(\sqsubset^{-1}(b)) = \sqsubset(\sqsubset^{-1}(b)) = b$. Luego ϕ' es un S-endomorfismo de $S[x]$; su unicidad se debe a la de ψ .

Las últimas afirmaciones del teorema son evidentes. ▦

Los resultados del capítulo anterior y el teorema 2.1.1 , permiten caracterizar la inyectividad y la sobreyectividad de los homomorfismos ϕ de $R[x]$ en $S[x]$ tales que $\phi\big|R$ es un isomorfismo de R sobre S.

2.1.2 Teorema:

Sean R y S anillos conmutativos con identidad, $t = t_0 + t_1 x + \dots + t_n x^n \in S[x]$ y $\phi : R[x] \longrightarrow S[x]$ un homomorfismo de anillos tal que $\phi(x) = t$ y $\phi\big|R$ es un isomorfismo de R sobre S. Entonces:

i) ϕ es sobreyectivo si y solo si t_1 es una unidad de S y t_i , para $i \geqslant 2$, es nilpotente.

ii) Si ϕ es sobreyectivo entonces ϕ es inyectivo.

A partir de los teoremas 1.7 , 1.8 y 2.1.1 el resultado es inmediato. ⁞⁞

2.2 Cuando R es un anillo conmutativo sin unidad pero con un elemento regular (es decir que no es divisor de cero), los resultados del capítulo 1 permiten conseguir importantes resultados acerca de los endomorfismos de $R[x]$.

(Se pueden consultar en [4] pág. 332 y siguientes).

La existencia de un elemento regular en R es necesaria; el propio Gilmer se encarga de probar ésto al final de su artículo. (Ver [4] pág. 335).

3. NOCIONES TOPOLOGICAS

Sea R un anillo conmutativo con identidad. Suponiendo que en $R[[x]]$ los R-automorfismos ϕ son de la forma f_t con $\phi(x) = t$ y se pueden caracterizar de alguna manera, es natural esperar (analogía con lo que pasa en $R[x]$) que esa caracterización le exija al coeficiente de x en $\phi(x)$ que sea una unidad de R .

En particular, si suponemos que existe un R-endomorfismo ψ de $R[[x]]$ tal que $\psi(x) = b + x$ para algún $b \in R$, esperamos que ψ sea un automorfismo de $R[[x]]$.

Sea $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x]]$.

Como estamos suponiendo que ψ actúa como la función $f_{(b+x)}$ en $R[x]$, entonces :

$$\psi(f) = \psi\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(b + x)^i$$

$$\begin{aligned} &= a_o + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots \\ &+ x(a_1 + 2a_2 b + 3a_3 b^2 + \ldots) \\ &+ x^2(a_2 + 3a_3 b + 6a_4 b^2 + \ldots) \\ &+ \ldots. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Denotemos $\psi(f) = \sum_{i=0}^{\infty} r_i x^i$; el cálculo anterior muestra que los coeficientes r_i de $\psi(f)$ son "series formales en b" y para que sean elementos de R se ve necesaria la introducción de alguna topología en R o en $R[b] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} c_i b^i \,/\, n \in \mathbb{N}_0 \,,\, c_i \in R \right\}$.

Estudiamos enseguida algunas nociones basadas en la topología que son necesarias para el trabajo posterior con R-endomorfismos en anillos de series formales.

Después de este numeral, veremos lo apropiadas y útiles que son las estructuras topológicas en R , $R[[x]]$ y $R[[x_1,\ldots,x_n]]$ que se escogen en cada caso. En particular, refiriéndonos a la función ψ supuesta al principio, el teorema 5.10 y el lema 6.1.3 establecerán condiciones para b que son suficientes para que una tal función ψ exista y sea un R-automorfismo de $R[[x]]$.

3.1 Un grupo G abeliano (escrito aditivamente) en el cual está dada una topología, se dice que es un **grupo topológico** (con respecto a la topología dada), si las aplicaciones

$$\begin{array}{rclcrcl} g : G \times G & \longrightarrow & G & \quad y \quad & h : G & \longrightarrow & G \\ (x,y) & \longmapsto & x+y & & x & \longmapsto & -x \end{array}$$

son continuas.

Un anillo R dotado de una topología se dice que es un **anillo topológico** si las aplicaciones

$$g : R \times R \longrightarrow R \qquad y \qquad h : R \times R \longrightarrow R$$
$$(x,y) \longmapsto x - y \qquad\qquad (x,y) \longmapsto xy$$

son continuas.

En ambos casos decimos que la estructura algebraica y la topológica son compatibles.

3.2 Sea G un grupo topológico. Si

$$B = \left\{ U + a \,/\, a \in G \text{ y } U \text{ es un entorno de cero en } G \right\}$$

entonces $B \cup \{\phi\}$ es una base para la topología más pequeña que contiene a B. (Ver [2] pág. 67). Claramente esta topología queda determinada unívocamente por los entornos de cero en G.

3.3 **Nota:**

No todo grupo topológico es Hausdorff; un grupo G con más de un elemento, dotado con la topología indiscreta, es un grupo topológico que no es Hausdorff. El lema siguiente aclara esta cuestión.

3.4 **Lema:**

Sea G un grupo topológico y H la intersección de todos los entornos de o en G. Entonces:

i) H es un subgrupo de G

ii) H es la clausura $\overline{\{o\}}$ de $\{o\}$

iii) $G/_{H}$ es Hausdorff

iv) G es Hausdorff si y solo si $H = \{o\}$.

La prueba puede verse en [1] pág. 113.

3.5 Sean R un anillo conmutativo con identidad, $\mathfrak{M}$ un ideal de R y

$$B = \left\{ \mathfrak{M}^n + a \,/\, a \in R \right\}$$

Claramente B cumple los requerimientos de su análogo en 3.2 . La topología que tiene a $B \cup \{\phi\}$ como base, se denomina **topología $\mathfrak{M}$-ádica** o únicamente **$\mathfrak{M}$-topología.**

Con ella R es un anillo topológico.

3.6 Nota:

Una importante fuente de resultados y de métodos de trabajo en el campo de las topologías $\mathfrak{M}$-ádicas, es el libro de Greco y Salmon referenciado con el número [6] en la bibliografía.

Escribiremos $(R,\mathfrak{M})$ para indicar que estamos considerando a R como anillo topológico con su topología $\mathfrak{M}$-ádica.

3.7 Consideremos el anillo topológico $(R,\mathfrak{M})$. Nos proponemos encontrar una condición necesaria y suficiente para que $(R,\mathfrak{M})$ sea un espacio métrico.

3.7.1 En primer lugar definimos una aplicación

$$v : R \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

de la siguiente forma: dado $x \in R$, $v(x) = \infty$ si $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{M}^n$ ($\mathfrak{M}^0 = R$) y $v(x) = \sup \{ n \in \mathbb{N}_0 \ / \ x \in \mathfrak{M}^n \}$ en otro caso. Entonces tenemos que si $v(x)$ es finito, $x \in \mathfrak{M}^{v(x)}$ y $x \notin \mathfrak{M}^{v(x)+1}$. Además, $v(x) = \infty$ si y solo si $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{M}^n$ si y solo si $x \in \overline{\{0\}}$.

La función v es llamada **función de orden en el anillo** R.

3.7.2 Lema:

Sean $x,y \in (R,\mathfrak{M})$. **Entonces:**

i) $v(x + y) \geq \min \{ v(x), v(y) \}$

ii) $v(xy) \geq v(x) + v(y)$

Si $v(x) = v(y) = \infty$, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}^n$ y $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}^n$; entonces $x + y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}^n$ y $xy \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}^n$. Luego $v(x + y) = v(xy) = \infty$ y asi se cumplen i) y ii).

Si $v(x) = \infty$ y $v(y) = j$, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}^n$ y $y \in \mathfrak{M}^j$; luego $x + y \in \mathfrak{M}^j$

y $xy \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M^n$, lo que indica que se cumplen i) y ii).

Finalmente, supongamos que $v(x) = n \geqslant j = v(y)$. Entonces $x \in M_{\mathcal{L}}^n$ y $y \in M_{\mathcal{L}}^j$; $x + y \in M_{\mathcal{L}}^j$ y $xy \in M_{\mathcal{L}}^n M_{\mathcal{L}}^j = M_{\mathcal{L}}^{n+j}$. Luego

$$v(x + y) \geqslant \min \left\{ v(x), v(y) \right\} \quad y \quad v(xy) \geqslant v(x) + v(y).$$

3.7.3 Ejemplo:

i) Forma de trabajar de la función de orden v en $(R[[x]], (x))$.

En primer lugar, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (x)^n = (0)$.

En efecto:

Si $g = \sum_{i=0}^{\infty} g_i x^i \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (x)^n$, $g \in (x)^n = (x^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, $g_i = 0$ para $0 \leqslant i < n$. Por tanto $g = 0$.

Concluimos que $g = 0$ si y solo si $v(g) = \infty$. Supongamos ahora $g \neq 0$.

Entonces tenemos: $v(g) = \sup \left\{ n \in \mathbb{N}_0 \;/\; g \in (x)^n \right\}$

A $v(g)$ se le llama **orden de** g y se le nota $o(g)$.

ii) En $(R[x], (x))$:

También tenemos $\bigcap_{n=1}^{\infty} (x)^n = (0)$. Por tanto $v(g) = \infty$ si y solo si $g = 0$.

Además, cuando $g \neq 0$, se tiene nuevamente $v(g) = o(g)$.

3.7.4 A partir de la función de orden v, definimos en R la siguiente pseudométrica:

$d(x,y) = e^{-v(x-y)}$; convenimos en que $e^{-\infty} = 0$.

La desigualdad i) del lema 3.7.2 nos permite concluir que d satisface la siguiente desigualdad:

$$d(x,z) \leq \max \{ d(x,y), d(y,z) \} \qquad (1)$$

En efecto: como $x - z = (x - y) + (y - z)$, de i) vemos que

$$v(x - z) \geq \min \{ v(x - y), v(y - z) \} ;$$

$$-v(x - z) \leq - \min \{ v(x - y), v(y - z) \} = \max \{ -v(x - y), -v(y - z) \}$$

y como la exponencial con base mayor que 1 es función creciente, concluimos que es cierta la desigualdad anotada. ⁞⁞⁞

Nótese que de (1) la desigualdad triangular es evidente.

3.7.5 Proposición:

Sean R un anillo conmutativo con identidad y $\mathcal{M}$ un ideal de R.

a) $(R,\mathcal{M})$ **es Hausdorff si y solo si d es métrica.**

b) **En caso de que R sea Hausdorff, su $\mathcal{M}$-topología se puede definir con la métrica d.**

Para la parte a). Sabemos que el que d sea métrica significa que si $d(x,y) = 0$ entonces $x = y$.

Sea $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} M_{\mathcal{C}}^{n}$; $v(x) = v(x - o) = \infty$; pero ésto implica que $d(x,o) = o$ y asi $x = o$.

Ahora, si R es Hausdorff, $\bigcap_{n=0}^{\infty} M_{\mathcal{C}}^{n} = \{o\}$. Si $d(x,y) = o$, $v(x - y) = \infty$ y por tanto $x - y \in \{o\}$.

Para la parte b). Veremos que si d es una métrica en R , entonces la topología inducida por d es igual a la topología de $(R,M_{\mathcal{C}})$.

Para $n \in \mathbb{N}_o$, definimos

$$S_n(o) = \{ x \in R \; / \; d(x,o) < e^{-n} \}$$

La familia $\{S_n(o)\}_{n \in \mathbb{N}_o}$ es una familia de entornos de cero en R y determina unívocamente la topología de R inducida por d.

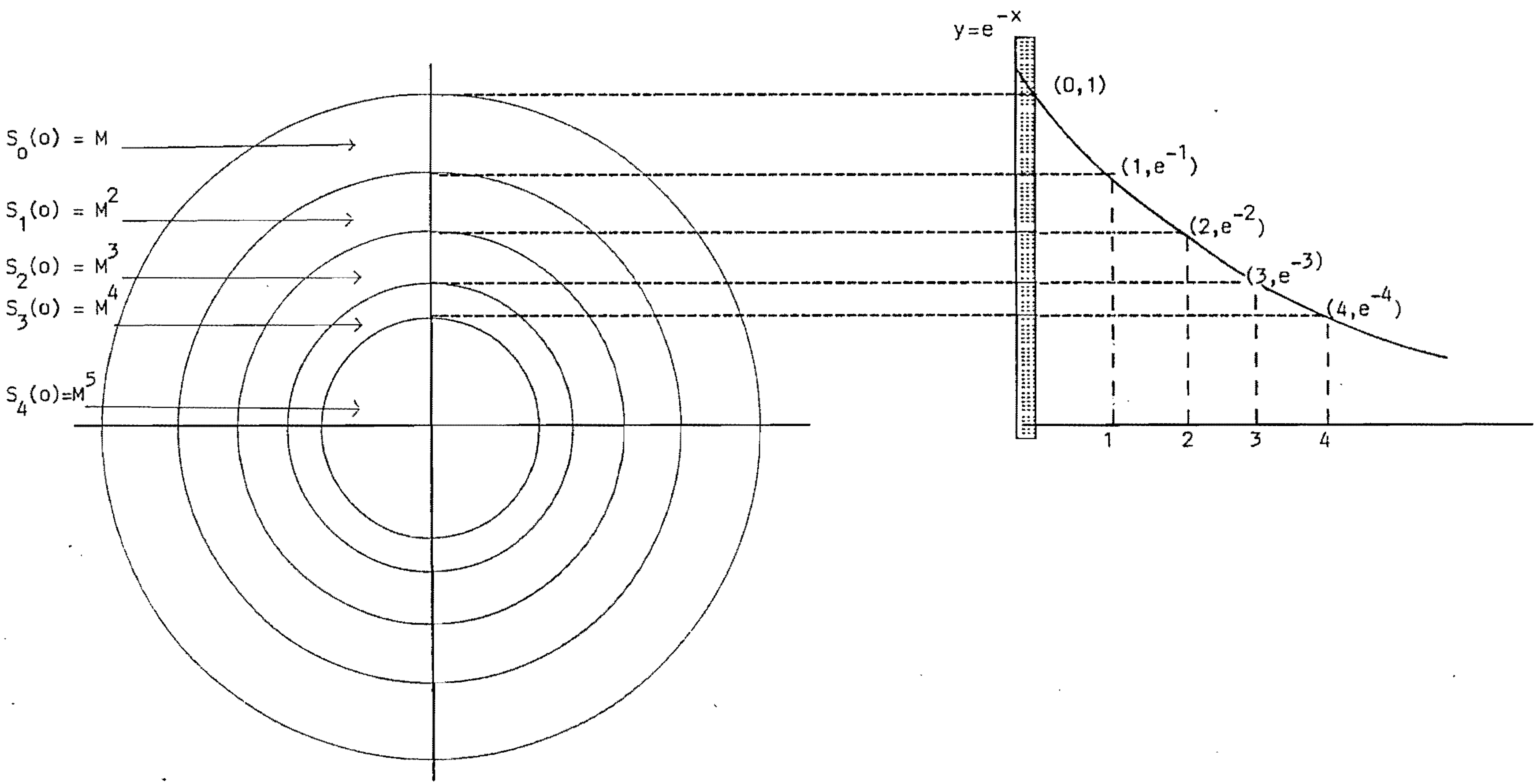
Veremos que para cada $n \in \mathbb{N}_o$, $M_{\mathcal{C}}^{n} = S_{n-1}(o)$. (Ver figura). En efecto:

Sea $x \in M_{\mathcal{C}}^{n}$; entonces $v(x) > n - 1$, $-v(x) < -(n - 1)$ y por tanto $e^{-v(x)} < e^{-(n-1)}$ y asi $x \in S_{n-1}(o)$.

Ahora, si $x \in S_{n-1}(o)$, $e^{-v(x)} < e^{-(n-1)}$; luego $-v(x) < -(n-1)$ y por tanto $v(x) > n - 1$. Si $x \notin M_{\mathcal{C}}^{n}$, $v(x) \leq n - 1$.

Luego $x \in M_{\mathcal{C}}^{n}$.

Base local $\left\{ M^n \right\}_{n=0}^{\infty}$ en el punto cero



3.8 Recordamos que un espacio topológico es **completo** si toda sucesión Cauchy de elementos del espacio converge en él.

Sean X y Y dos espacios topológicos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es una **inmersión de** X **en** Y si f es inyectiva y define un homeomorfismo de X sobre $f(X)$.

Ahora, sean (X,d) y (Y,d') espacios métricos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es llamada una **isometría** si $d'(f(x),f(y)) = d(x,y)$ para todo $(x,y) \in X \times Y$.

Una **inmersión isométrica** de (X,d) en (Y,d') es una inmersión que también es isometría. De gran importancia es el siguiente resultado:

3.9 Teorema:

Dado un espacio métrico (Y,d), existen un espacio métrico completo $(\hat{Y},d)$ y una inmersión isométrica $i : Y \longrightarrow \hat{Y}$ tales que $i(Y)$ es un subconjunto denso de $\hat{Y}$. Además, si (Y_0, d_0) es un espacio métrico completo, $j : Y \longrightarrow Y_0$ es una inmersión isométrica y $j(Y)$ es un subconjunto denso de Y_0, entonces existe un homeomorfismo isométrico $h : \hat{Y} \longrightarrow Y_0$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & \hat{Y} \arrow[dl, "h"] \\ & Y_0 & \end{tikzcd} \qquad h \circ i = j$$

Una prueba detallada de este teorema se puede ver en [8] pág. 153 y siguientes. ⁞

El espacio métrico completo $(\hat{Y},\hat{d})$ es llamado **completación del espacio** (Y,d).

3.10 A continuación definimos completaciones para anillos topológicos de la forma $(R,\mathfrak{M})$, con R un anillo conmutativo con identidad y $\mathfrak{M}$ un ideal finitamente generado de R tal que $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{M}^n = (0)$, donde $\mathfrak{M}^0 = R$. Una definición más general de completación de un anillo topológico se puede ver en [11] pág. 62. La definición que presentamos enseguida es suficiente para explicar las completaciones de anillos topológicos que se estudian en este trabajo.

Sean R^* un anillo conmutativo con identidad y $\mathfrak{b}$ un ideal de R^* . Decimos que $(R^*,\mathfrak{b})$ es **una completación de** $(R,\mathfrak{M})$ si se cumplen las siguientes condiciones:

i) R es un subanillo de R^*

ii) $(R^*,\mathfrak{b})$ es completo

iii) La $\mathfrak{M}$-topología de R es equivalente a la topología inducida en R por la $\mathfrak{b}$-topología de R^* .

iv) Cada elemento de R^* es el límite de una sucesión Cauchy de R.

v) $(R^*,\mathfrak{b})$ es Hausdorff.

3.11 Notas

i) Las completaciones se definen únicamente para anillos topológicos Hausdorff, que son espacios métricos por proposición 3.7.5.

ii) La condición iv) es equivalente a decir que R es denso en R^*.

3.12 Una completación para el anillo topológico $(R,\mathfrak{M})$ se puede construir asi:

Sea S el conjunto de sucesiones Cauchy de R. Entonces S con las operaciones usuales $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$ y $\{x_n\}\{y_n\} = \{x_n y_n\}$, es un anillo conmutativo con identidad.

Sea $\mathfrak{a}$ el conjunto de sucesiones de S que convergen a cero. Entonces $\mathfrak{a}$ es un ideal de S; en efecto: si $\{r_n\}$ y $\{s_n\}$ son elementos de $\mathfrak{a}$, $\{r_n + s_n\}$ es elemento de $\mathfrak{a}$.

Si $\{t_n\} \in S$, $\{r_n\}\{t_n\} = \{r_n t_n\}$; dado $j \in \mathbb{N}$, existe M tal que $r_n \in \mathfrak{M}^j$ para $n \geqslant M$. Si $n \geqslant M$, $r_n t_n \in \mathfrak{M}^j$ pues $\mathfrak{M}^j$ es ideal; luego $\{r_n t_n\} \in \mathfrak{a}$.

$S/\mathfrak{a}$ es un anillo conmutativo con identidad. La función $\psi : R \longrightarrow S/\mathfrak{a}$, $r \longmapsto \overline{\{r\}}$ que a cada $r \in R$ le asigna la clase de la sucesión constante $\{r\}$, es un homomorfismo de anillos inyectivo.

Para cada $j \in \mathbb{N}_0$, el ideal $\psi(\mathfrak{M}^j)(S/\mathfrak{a})$ es la extensión del ideal $\mathfrak{M}^j$ que se nota $(\mathfrak{M}^j)^e$. Además se cumple que $(\mathfrak{M}^j)^e = (\mathfrak{M}^e)^j$ para cada $j \in \mathbb{N}_0$. (Ver [1] pág. 12)

El anillo $(S/\mathfrak{a}, \mathfrak{M}^e)$ es completación para $(R,\mathfrak{M})$; veamos algunos resultados útiles en este contexto.

3.12.1 Proposición:

Para cada $i \in \mathbb{N}$, $(\mathfrak{M}^i)^e = B_i/\mathfrak{a}$, **con** $B_i = \left\{ \overline{\{r_i\}} \in S \,/\, \right.$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant k$, $\left. r_n \in \mathfrak{M}^i \right\}$.

En efecto:

Sea $T \in (\mathfrak{M}^i)^e = \psi(M^i)\,(S/\mathfrak{a})$. $T = \sum_{j=1}^{m} \overline{\{a_j\}}\,\overline{\{l_{ij}\}}_{i\in\mathbb{N}}$ donde para cada $j=1,\dots,m$, $a_j \in \mathfrak{M}^i$, $\overline{\{a_j\}}$ es la clase de la sucesión constante $\{a_j\}$ y $\overline{\{l_{ij}\}}_{i\in\mathbb{N}}$ es la clase de alguna sucesión de S.

$$T = \sum_{j=1}^{m} \overline{\{a_j\}}\;\overline{\{l_{ij}\}}_{i\in\mathbb{N}} = \sum_{j=1}^{m} \overline{\{a_j\, l_{ij}\}}_{i\in\mathbb{N}} = \overline{\left\{ \sum_{j=1}^{m} a_j\, l_{ij} \right\}}_{i\in\mathbb{N}}$$

como $a_j \in \mathfrak{M}^i$, $\sum_{j=1}^{m} a_j\, l_{ij} \in \mathfrak{M}^i$ para cada $j=1,\dots,m$.

Luego $T \in B_i/\mathfrak{a}$.

Ahora:

Sea $T \in {}^{B_i}/_{\mathfrak{a}}$; $T = \overline{\{r_j\}}_{j\in\mathbb{N}} = \{r_j\}_{j\in\mathbb{N}} + \mathfrak{a}$

Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant k$, $r_n \in \mathfrak{M}^i$

$$T = \{r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}, 0, 0, \ldots\} + \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, r_k, r_{k+1}, \ldots\} + \mathfrak{a}$$

$= \{0, \ldots, 0, r_k, r_{k+1}, \ldots\} + \mathfrak{a}$ pues la primera sucesión es de $\mathfrak{a}$.

Supongamos que $\mathfrak{M}^i$ es generado por el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

Si $j \geqslant k$, $r_j = \sum_{n=1}^{m} l_{jn}\, a_n$ con $l_{jn} \in R$; sea $l_{jn} = 0$ si $j=1,\ldots,k-1$

$$T = \sum_{n=1}^{m} \{l_{jn}\, a_n\}_{j=0}^{\infty} + \mathfrak{a} = \sum_{n=1}^{m} \{a_n\} \{l_{jn}\}_{j=0}^{\infty} + \mathfrak{a}$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \overline{\{a_n\}}\ \overline{\{l_{jn}\}}_{j\in\mathbb{N}} \in (\mathfrak{M}^i)^e .$$ ⁞⁞

3.12.2 Proposición:

$({}^{S}/_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{M}^e)$ es Hausdorff.

Sea $\{r_i\} \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} (\mathfrak{M}^e)^j = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} (\mathfrak{M}^j)^e$. Entonces para cada $j \in \mathbb{N}$,

$\{r_i\} \in B_j$ o sea existe k_j tal que si $n \geqslant k_j$, $r_n \in \mathfrak{M}^j$. Es decir,

$\{r_i\} \longrightarrow 0$ o lo que es igual, $\{r_i\} \in \mathfrak{a}$. Luego $\overline{\{r_i\}} = \mathfrak{a}$ ⁞⁞

Por proposición 3.7.5, ${}^{S}/_{\mathfrak{a}}$ es un espacio métrico y su topología $\mathfrak{M}^e$-ádica es la correspondiente a esa métrica.

Sean v^* su función de orden y d^* su métrica.

3.12.3 Proposición:

Sea $r \in R$; entonces $\overline{\{r\}} \in (\mathcal{M}^i)^e$ si y solo si $r \in \mathcal{M}^i$.

En efecto: si $\overline{\{r\}} \in (\mathcal{M}^i)^e = {}^{B_i}/_{\mathcal{C}}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que el n-ésimo r está en $\mathcal{M}^i$ para todo $n \geqslant k$. Esto indica que $r \in \mathcal{M}^i$.

3.12.4 Corolario:

La función $\psi : R \longrightarrow {}^{S}/_{\mathcal{C}}$ es una inmersión isométrica.

$$r \longmapsto \overline{\{r\}}$$

Primero veamos que es una isometría.

Sean $r,s \in R$. Si $r = s$, $d(r,s) = 0 = d^*(\overline{\{r\}}, \overline{\{s\}})$.

Supongamos $r \neq s$, de manera que $v(r-s) \neq \infty$ y $v^*(\overline{\{r\}} - \overline{\{s\}}) \neq \infty$.
Supongamos $d^*(\overline{\{r\}}, \overline{\{s\}}) = e^{-j}$, es decir, $v^*(\overline{\{r-s\}}) = j$.
$\overline{\{r-s\}} \in (\mathcal{M}^e)^j$ y $\overline{\{r-s\}} \notin (\mathcal{M}^e)^{j+1}$.

Según 3.12.3 , $r - s \in M^j$ y $r - s \notin M^{j+1}$, lo que indica que $v(r-s) = j$, de manera que $d(r,s) = e^{-j} = d^*(\overline{\{r\}}, \overline{\{s\}})$.

Ahora: ψ es una isometría sobreyectiva de R en $\psi(R)$ y por tanto es una función abierta. (Ver [8] pág. 140). Luego R y $\psi(R)$ son homeomorfos, lo que indica que ψ es una inmersión isométrica. ⁞⁞

3.12.5 Nota:

El corolario anterior muestra semejanzas entre la completación de un espacio métrico y la de un anillo topológico. Además nos indica que podemos identificar a $\psi(R)$ con R como se hace en el siguiente teorema.

3.12.6 Teorema:

La topología $\mathfrak{M}$-ádica de R es equivalente a la topología inducida en R por la $\mathfrak{M}^e$-topología de $S/\mathfrak{a}$.

Es suficiente probar que $(\mathfrak{M}^j)^e \bigcap R = \mathfrak{M}^j$

Como $S/\mathfrak{a}$ tiene unidad, $\mathfrak{M}^j \subset (M^j)^e$. Como también $\mathfrak{M}^j \subset R$, se tiene que $(\mathfrak{M}^j)^e \bigcap R \supset \mathfrak{M}^j$.

Sea $\overline{\{r_j\}}_{j\in\mathbb{N}} \in R \bigcap (\mathfrak{M}^j)^e$; $\overline{\{r_j\}} \in R$; $\overline{\{r_j\}} \in (\mathfrak{M}^j)^e$.

Como $\overline{\{r_j\}} \in R$, existe $r \in R$ tal que $r_j = r$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

$\overline{\{r\}} \in (\mathfrak{M}^j)^e$; pero $(\mathfrak{M}^j)^e = B_j/\mathfrak{a}$. (Ver 3.12.1). Luego existe k tal que si $n \geqslant k$, $r_n \in \mathfrak{M}^j$. Por tanto $r \in \mathfrak{M}^j$ y también $\overline{\{r\}} \in \mathfrak{M}^j$ ▩

3.13 **Nota:**

Una completación de un anillo topológico R se denota R^* ó $\hat{R}$.
Si la topología de R es la $\mathfrak{M}$-ádica, también se escribe

$$\widehat{(R\ ,\ M)} \qquad \text{ó} \qquad (R^*, \mathfrak{M}^*)$$

El lema siguiente es de gran utilidad cuando se trabaja en anillos topológicos con un estilo especial de topología ádica.

3.14 Lema:

Sean S un anillo conmutativo con identidad , $b \in S$ y $(S,(b))$ el anillo topológico S con la topología (b)-ádica. Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión Cauchy de $(S,(b))$, entonces existe una subsucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $c_n = \sum_{i=0}^{n} r_i\, b^i$ para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $r_i \in S$ para todo $i \in \mathbb{N}_o$.

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy en S. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}_o$, existe un entero s_k tal que $a_n - a_m \in (b^{k+1})$ para $n,m \geqslant s_k$.

No se pierde generalidad si pedimos $s_o \leqslant s_1 \leqslant \ldots$

Si $i \in \mathbb{N}_o$, $a_{s_{i+1}} - a_{s_i} \in (b^{i+1})$ pues $s_{i+1} \geqslant s_i$. Para $i \in \mathbb{N}_o$, denotemos por r_{i+1} al elemento de S tal que $a_{s_{i+1}} - a_{s_i} = r_{i+1}\, b^{i+1}$; para $i \in \mathbb{N}$, sea $c_i = a_{s_i}$ y finalmente, hagamos $r_o = a_{s_o}$.

Tenemos entonces:

$$c_1 = a_{s_1} = a_{s_o} + r_1\, b = r_o + r_1\, b$$

$$c_2 = a_{s_2} = a_{s_1} + r_2\, b^2 = r_o + r_1\, b + r_2\, b^2$$

$$\vdots$$

$$c_n = a_{s_n} = a_{s_{n-1}} + r_n\, b^n = \sum_{i=0}^{n} r_i\, b^i$$

⁞⁞

3.15 Nota:

Sean S un anillo conmutativo con identidad y $b \in S$; supongamos que $(S,(b))$ es Hausdorff. Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión Cauchy en $(S,(b))$, el lema anterior dice que hay una subsucesión $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $c_n = \sum_{i=0}^{n} r_i b^i$ con $r_i \in S$ para cada i.

Si $\{c_n\}$ converge, $\{a_n\}$ converge al mismo límite. Como la notación acostumbrada para $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} r_i b^i$ es $\sum_{i=0}^{\infty} r_i b^i$, concluimos que el límite de cualquier sucesión convergente $\{a_n\}$ de $(S,(b))$ es una serie de potencias de b.

3.16 Ejemplo:

Presentamos en detalle un ejemplo fundamental de completación: Dados R un anillo conmutativo con identidad y x una variable independiente sobre R , entonces

$$\widehat{(R[x],(x))} = (R[[x]],(x)).$$

Nótese que al lado izquierdo de la igualdad, $(x) = x R[x]$ y al lado derecho, $(x) = x R[[x]]$.

i) $R[x]$ es subanillo de $R[[x]]$ de la manera obvia.

ii) $(R[x],(x))$ y $(R[[x]],(x))$ son anillos Hausdorff. (Ver ejemplo 3.7.3)

iii) $(R[x],(x))$ es denso en $(R[[x]],(x))$.

Sea $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \in R[[x]]$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $f^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$.

La sucesión $\left\{f^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $\left(R[x], (x)\right)$ que converge a f.

En efecto:

Sea $N \in \mathbb{N}$. Si $n > N$,

$$f - f^{(n)} = \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i x^i \in (x^{n+1}) \subset (x^n) \subset (x^N)$$

Luego $\lim_{n} f^{(n)} = f$.

En particular, como $\left\{f^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\left(R[[x]], (x)\right)$ $\left\{f^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión Cauchy de $\left(R[[x]], (x)\right)$ y ésto implica que $\left\{f^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión Cauchy de $\left(R[x], (x)\right)$.

iv) $\left(R[[x]], (x)\right)$ es completo.

Sea $\left\{F_n\right\}_{n\in\mathbb{N}_o}$ una sucesión Cauchy en $R[[x]]$. Por lema 3.14 , existe una subsucesión $\left\{G_n\right\}_{n\in\mathbb{N}_o}$ tal que $G_n = \sum_{i=0}^{n} H_i x^i$ para cada $n \in \mathbb{N}_o$, donde $H_i = \sum_{j=0}^{\infty} h_{ij} x^j \in R[[x]]$

$$G_n = H_o + H_1 x + H_2 x^2 + \dots + H_n x^n$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} h_{oj} x^j + \sum_{j=0}^{\infty} h_{1j} x^{j+1} + \sum_{j=0}^{\infty} h_{2j} x^{j+2} + \dots + \sum_{j=0}^{\infty} h_{nj} x^{j+n}$$

$= h_{oo}\, x^o$

$+ (h_{o1} + h_{1o})\, x^1$

$+ (h_{o2} + h_{11} + h_{2o})\, x^2$

$+ \dots$

$\vdots$

$+ (h_{o,n} + h_{1,(n-1)} + \dots\dots + h_{n-1,1} + h_{n,o})\, x^n$

$+ (h_{o,n+1} + h_{1,n} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + h_{n,1})\, x^{n+1}$

$+ (h_{o,n+2} + h_{1,n+1} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + h_{n,2})\, x^{n+2}$

$+ \dots$

$\vdots$

Es decir, $G_n = \sum_{j=0}^{n-1} T_j\, x^j + \sum_{j=0}^{\infty} P_{nj}\, x^{n+j}$ donde $T_j = \sum_{i=0}^{j} h_{i,(j-i)}$, $j=0,1,\dots n-1$ y $P_{nj} = \sum_{i=0}^{n} h_{i,(n+j-i)}$, $j \in \mathbb{N}_o$.

Consideremos la serie formal $T = \sum_{j=0}^{\infty} T_j\, x^j$ y veamos que $\lim_n G_n = T$.

Sea $N \in \mathbb{N}$. Si $n \geqslant N$,

$$T - G_n = \sum_{j=n}^{\infty} T_j\, x^j - \sum_{j=0}^{\infty} P_{nj}\, x^{n+j} \in (x^n) \subset (x^N)$$

Como la sucesión Cauchy $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente a T , $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a T . Luego $(R[[x]]\ ,(x))$ es completo. ⁞

3.17 Nota:

Recordemos que al principio de este numeral estuvimos suponiendo la existencia de un R-endomorfismo sustitución ψ de $R[[x]]$ tal que $\psi(x) = b + x$ con $b \in R$ y que encontramos necesaria alguna estructura topológica para poderlo definir. Ahora vemos que si pedimos que $(R,(b))$ sea un anillo topológico Hausdorff completo, entonces $R[b]$ tiene su completación en R y asi los coeficientes de $\psi(f)$ que son "series formales en b", resultan elementos de R bien definidos para cada $f \in R[[x]]$.

Estas ideas se precisan y amplían más adelante. (Ver teorema 5.10 y lema 6.1.3).

4. Un R-endomorfismo particular de $R[[x]]$

Nuestro objetivo es caracterizar los R-automorfismos ϕ de $R[[x]]$ para el caso particular en que $\phi(x) = \sum_{i=k}^{\infty} b_i x^i$ con $k \geqslant 1$. El resultado que obtenemos será necesario para hacer la caracterización general en el capítulo 6.

4.1 Recordamos que si $f = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in R[[x]]$, entonces: f es una unidad de $R[[x]]$ si y solo si b_0 es una unidad de R .

Sea $\beta = \sum_{i=k}^{\infty} b_i x^i \in R[[x]]$, $k \geqslant 1$. En este caso se puede definir un R-endomorfismo ϕ_β de $R[[x]]$ tal que $\phi_\beta(x) = \beta$ y se encuentra una sencilla caracterización para cuando ϕ_β es un automorfismo. La existencia del endomorfismo ϕ_β se prueba utilizando en $R[[x]]$ la topología (x)-ádica.

4.2 Teorema:

Sean R un anillo conmutativo con identidad y

$\beta = \sum_{i=k}^{\infty} b_i x^i \in R[[x]]$, $k \geqslant 1$. La aplicación

$\phi_\beta : R[[x]] \longrightarrow R[[x]]$ definida por $\phi_\beta \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \beta^i$

es el único R-endomorfismo ϕ de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$.

La existencia de la aplicación ϕ_β se garantiza de la siguiente forma:

Sean $g = \sum_{q=0}^{\infty} a_q x^q$, $g_q = a_q x^q$ y $g_q(\beta) = a_q \beta^q$. Como $o(\beta) \geqslant 1$, $g_q(\beta)$ es una serie formal con orden $\geqslant q$ o es la serie nula.

Consideremos la sucesión $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}_o}$ dada por $h_n = \sum_{q=0}^{n} g_q(\beta)$ para

cada $n \in \mathbb{N}_o$. Esta sucesión es de Cauchy en el espacio $(R[[x]], (x))$

que es completo.

Definimos $\phi_\beta(g) = \lim_{n \to \infty} h_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{q=0}^{n} a_q \beta^q$. Es natural notar

$\phi_\beta(g) = \sum_{q=0}^{\infty} a_q \beta^q$.

Por supuesto $\phi_\beta(x) = \beta$ y $\phi_\beta(r) = r$ para todo $r \in R$. La unicidad del límite de la sucesión $\{h_n\}$ en el espacio Hausdorff completo $(R[[x]], (x))$, nos garantiza la unicidad de ϕ_β .

En segundo lugar, probamos que ϕ_β es un R-endomorfismo de $R[[x]]$.

Sean $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i\, x^i$ y $g = \sum_{i=0}^{\infty} g_i\, x^i$ elementos de $R[[x]]$. Sean

$f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i\, x^i$ y $g^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} g_i\, x^i$; por supuesto

$\phi_\beta(f) = \lim_n f^{(n)}(\beta)$ y $\phi_\beta(g) = \lim_n g^{(n)}(\beta)$. Además,

$f^{(n)}(\beta) + g^{(n)}(\beta) = \sum_{i=0}^{n} (f_i + g_i)\beta^i = (f + g)^{(n)}(\beta)$. Luego

$$\phi_\beta(f) + \phi_\beta(g) = \lim_n f^{(n)}(\beta) + \lim_n g^{(n)}(\beta) = \lim_n \left[f^{(n)}(\beta) + g^{(n)}(\beta) \right]$$

$$= \lim_n (f + g)^n(\beta) = \phi_\beta(f + g) .$$

También: $fg = \sum_{j=0}^{\infty} h_j\, x^j$ con $h_j = \sum_{\substack{i+l=j \\ 0 \leq i,l \leq n}} f_i\, g_l$

$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n} h_j\, x^j$; $\left(f^{(n)}(x) \right) \left(g^{(n)}(x) \right) = \sum_{j=0}^{2n} h_j\, x^j$

con $h_j = \sum_{\substack{i+l=j \\ 0 \leq i,l \leq n}} f_i\, g_l$. Es decir,

$$\left(f^{(n)}(x) \right) \left(g^{(n)}(x) \right) = \sum_{j=0}^{n} h_j\, x^j + \sum_{j=n+1}^{2n} h_j\, x^j = (fg)^{(n)}(x) + \sum_{j=n+1}^{2n} h_j\, x^j$$

Como

$\phi_\beta(fg) = \lim_n (fg)^{(n)}(\beta)$ y $\phi_\beta(f)\, \phi_\beta(g) = \left(\lim_n f^{(n)}(\beta) \right) \left(\lim_n g^{(n)}(\beta) \right)$, para

probar $\phi_\beta(fg) = \phi_\beta(f)\, \phi_\beta(g)$ basta probar que

$$\lim_n \left[\left(f^{(n)}(\beta)\right)\left(g^{(n)}(\beta)\right) - (fg)^{(n)}(\beta)\right] = 0$$

$$\left(f^{(n)}(\beta)\right)\left(g^{(n)}(\beta)\right) - (fg)^{(n)}(\beta) = \sum_{j=n+1}^{2n} h_j \beta^j .$$

Como $o(\beta) \geqslant 1$, $\beta^j \in (x^j)$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

Sea $m \in \mathbb{N}$; si $n > m$, $\beta^n \in (x^n) \subset (x^m)$ y por tanto

$$\sum_{j=n+1}^{2n} h_j \beta^j \in (x^m) .$$

Luego $\lim_n \left[\left(f^{(n)}(\beta)\right)\left(g^{(n)}(\beta)\right) - (fg)^{(n)}(\beta)\right] = 0$ ⁞⁞

4.3 Teorema:

Sea $\beta = \sum_{i=k}^{\infty} b_i x^i \in R[[x]]$, $k \geqslant 1$. Entonces:

ϕ_β es sobreyectivo si y solo si $k = 1$ y b_1 es unidad de R.

Supongamos que ϕ_β es sobreyectivo.

Sea $f = \sum_{i=0}^{\infty} r_i x^i$ tal que $\phi_\beta(f) = x$. Entonces $\lim_n \sum_{i=0}^{n} r_i \beta^i = x$.

Dado $j > 1$, existe N tal que $\sum_{i=0}^{n} r_i \beta^i - x \in (x^j)$ para $n \geqslant N$.

$$r_0 + r_1\beta - x + \sum_{i=2}^{n} r_i \beta^i = r_0 + \sum_{i=k}^{\infty} r_1 b_i x^i - x + \sum_{i=2}^{n} r_i \beta^i \in (x)^j$$

Luego $r_0 = 0$, $k = 1$ y $r_1 b_1 = 1$

Recíprocamente, supongamos que $k = 1$ y b_1 es unidad.

Dada $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, encontramos los coeficientes de una serie $g = \sum_{i=0}^{\infty} r_i x^i$ para que $\phi_\beta(g) = f$. Lo haremos con un proceso inductivo.

Como $\phi_\beta(g) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} r_i \beta^i$, dado $j > 1$ debe existir N tal que $\sum_{i=0}^{n} r_i \beta^i - \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in (x)^j$ si $n \geqslant N$. De aquí deducimos que $r_0 = a_0$, $r_1 = a_1 b_1^{-1}$, $r_2 = (a_2 - r_1 b_2)(b_1^2)^{-1}$.

Así, si suponemos conocidos los coeficientes r_i para $0 \leqslant i \leqslant k-1$, el coeficiente r_k estará dado por

$$r_k = \Big[a_k - r_1 b_k - r_2(\text{coef. de } x^k \text{ en } \beta^2) - r_3(\text{coef. de } x^k \text{ en } \beta^3) - \dots - r_{k-1}(\text{coef. de } x^k \text{ en } \beta^{k-1}) \Big] (b_1^k)^{-1} .$$

▦

A $\phi_\beta(f)$ también la notamos $f(\beta)$.

El lema siguiente nos permite saber cuándo es la función ϕ_β un R-automorfismo.

4.4 Lema:

Sean R, β y ϕ_β como en el teorema 4.2 ; supongamos también $b_k \neq 0$. Si ϕ_β no es inyectivo, entonces b_k es un divisor de cero de R.

Si ϕ_β no es inyectiva, existe $f = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \in R[[x]]$ no nula tal que $\phi_\beta(f) = f(\beta) = 0$. Se sigue que $c_o = 0$.

Supongamos que $o(f) = t \geqslant 1$. Entonces $c_t \neq 0$. El coeficiente de x^{kt} en $f(\beta)$ es $c_t\, b_k^t = 0$. Como $c_t \neq 0$, b_k^t es un divisor de cero en R y por tanto b_k es un divisor de cero en R.

4.5 Observación:

Nótese que si R es un dominio entero, $\beta = \sum_{i=k}^{\infty} b_i x^i$, $k \geqslant 1$ y ϕ_β es el R-endomorfismo de $R[[x]]$ tal que $\phi_\beta(x) = \beta$, entonces ϕ_β es inyectivo.

El siguiente teorema es el principal resultado de este capítulo. En el capítulo siguiente encontramos una caracterización semejante para R-endomorfismos más generales.

4.6 Teorema:

Sean R un anillo conmutativo con identidad, $\beta = \sum_{i=k}^{\infty} b_i x^i \in R[[x]]$, $k \geqslant 1$ y ϕ_β el R-endomorfismo de $R[[x]]$ tal que $\phi_\beta(x) = \beta$. Entonces: ϕ_β es un R-automorfismo de $R[[x]]$ si y solo si $k = 1$ y b_1 es una unidad de R.

Es una consecuencia inmediata de 4.3 y 4.4. ⁞⁞

4.7 Nota:

El método de trabajo en la prueba del teorema 4.2 y la caracterización dada por el teorema 4.6 , nos deben servir de guía para el trabajo posterior; los capítulos 5 y 6 mostrarán varios resultados que tienen a estos teoremas como casos particulares.

5. R-endomorfismos de anillos de series formales

5.1 Sean R un anillo conmutativo con identidad, x una variable independiente sobre R y $\beta = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in R[[x]]$. Si queremos definir un R-endomorfismo ϕ de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$, ya no podemos trabajar como en el capítulo anterior porque no necesariamente $b_o = 0$. Si intentamos imitar un R-endomorfismo de $R[x]$, digamos $\phi = f_t$, que a cada $f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$ le asigna el polinomio $\sum_{i=0}^{n} f_i t^i$ donde $\phi(x) = t = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, nos encontramos con que ahora $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i$, $\phi(x) = \beta$ y la "extraña serie" $\sum_{i=0}^{\infty} f_i \beta^i$ carece de sentido pues no podemos explicar las "sumas infinitas" de elementos de R que debería tener por coeficientes.

Para darle sentido a la expresión $\sum_{i=0}^{\infty} f_i \beta^i$, imaginamos necesaria una estructura topológica en R o en $R[[x]]$ o en ambos. Pero, ¿cómo escoger esa o esas topologías?

La clave para responder esta pregunta la da el lema 5.9 de este trabajo, enunciado por O'Malley como lema 4.1 en [11] . Este lema dice, en su primera parte, que el coeficiente de x^k en β^{n+k} es un elemento de (b_0^n) , el ideal de R generado por b_0^n ; k y n son enteros positivos arbitrarios.

La posibilidad de conseguir una explicación para $\sum_{i=0}^{\infty} f_i \beta^i$ cuando $b_0=0$ y la repetida presencia de los ideales (b_0^n) en relación con los coeficientes de las potencias de β , sugieren la conveniencia de tener $\bigcap_{n=1}^{\infty} (b_0^n)=(0)$ y de escoger a la familia $\left\{(b_0^n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ para generar en R la topología (b_0)-ádica.

La segunda parte del lema citado, confirma la bondad de las presunciones anteriores al exhibir sucesiones Cauchy del anillo topológico $(R,(b_0))$ que, de ser completo este espacio, tendrían como límites a elementos de R que sería natural tener como coeficientes en una serie formal que podemos notar $\sum_{i=0}^{\infty} f_i \beta^i$.

Una segunda clase de estructuras topológicas que usamos en este trabajo, es la de topologías (β)-ádicas definidas en subanillos de $R[[x]]$. A pesar de los buenos resultados que proporcionan (ver por ejemplo la proposición 5.4), no conocemos caracterizaciones de R-automorfismos de $R[[x]]$ que usen estas topologías y que no se apoyen en los resultados obtenidos utilizando la primera clase de topologías.

En este capítulo estudiaremos la existencia y la unicidad de endomorfismos de anillos de series formales. Los resultados que se obtienen, aunque muchas veces son naturales, es frecuente que requieran demostraciones largas. A ésto se debe la longitud del capítulo.

Al final estudiamos algunos resultados sobre R-endomorfismos de anillos de series formales en varias variables.

5.2 A continuación recordaremos y estableceremos notaciones y definiciones.

Si $\xi \in R[[x]]$, entonces $R[\xi]$ es el subanillo de $R[[x]]$ que consiste en todas las sumas finitas de la forma $\sum_{i=0}^{n} r_i \xi^i$ donde $r_i \in R$, $i=0,1,\dots,n$.

Si $\xi \in R[[x]]$ y si T es un subanillo de $R[[x]]$ que contiene a $R[\xi]$, entonces $(\xi^n T)$ denota el ideal de T generado por ξ^n y $(T,(\xi T))$ es el anillo topológico T con la topología (ξT)-ádica.

Si $T = R[[x]]$, escribimos simplemente (ξ^n) y $(R[[x]],(\xi))$ para denotar el ideal de $R[[x]]$ generado por ξ^n y el anillo topológico $R[[x]]$ con la topología (ξ)-ádica , respectivamente.

Sea $\xi \in R[[x]]$ y supongamos que $\bigcap_{n=0}^{\infty} (\xi^n R[\xi]) = (0)$, es decir, que $(R[\xi],(\xi R[\xi]))$ es Hausdorff.

Si T es un subanillo de $R[[x]]$ que contiene a $R[\wp]$, basados en 3.10 podemos decir que $(T,(\wp T))$ es una **completación** de $(R[\wp],(\wp R[\wp]))$ si se cumplen las siguientes condiciones:

i) $(T,(\wp T))$ es completo.

ii) La topología inducida en $R[\wp]$ por la topología $(\wp T)$-ádica de T, es equivalente a la topología $(\wp R[\wp])$-ádica de $R[\wp]$.

iii) Cada elemento de T es el límite de una sucesión Cauchy de $R[\wp]$.

iv) $(T,(\wp T))$ es Hausdorff.

5.3 Nota:

La condición $\bigcap_{n=0}^{\infty} (\wp^n R[\wp]) = (0)$ es esencial porque las completaciones de anillos topológicos se definen únicamente cuando éstos son Hausdorff.

La proposición que sigue nos muestra que los R-endomorfismos de anillos de series formales son continuos de una manera natural.

5.4 Proposición:

Sean R un anillo conmutativo con identidad, $\wp \in R[[x]]$ y ϕ un R-endomorfismo de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \wp$. Si T es un subanillo de $R[[x]]$ que contiene al rango de ϕ, entonces ϕ es una aplicación continua de $(R[[x]],(x))$ en $(T,(\wp T))$. Además, si $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i$ y si $f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$ para cada n, entonces $\phi(f)$ es un punto límite en

$(T,(\beta\, T))$ de la sucesión $\left\{ f^{(n)}(\beta) \right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Veremos primero que $\phi((x^k)) = \beta^k\, \phi(R[[x]])$.

$f \in \phi((x^k))$ significa $f = \phi(h)$ con $h = x^k\, h_1$ y $h_1 \in R[[x]]$; es decir, $f = \phi(x^k)\, \phi(h_1) = \beta^k\, \phi(h_1) \in \beta^k\, \phi(R[[x]])$.

Por otro lado, si $f \in \beta^k\, \phi(R[[x]])$, $f = \phi(x)^k\, \phi(h)$ con $h \in R[[x]]$; $f = \phi(x^k)\, \phi(h) = \phi(x^k\, h) \in \phi((x^k))$.

Sea $g \in R[[x]]$. Veamos que ϕ es continua en g. Sea $\phi(g) + (\beta^k T)$ una vecindad de $\phi(g)$ en $(T,(\beta\, T))$.

$g + (x^k)$ es una vecindad de g en $(R[[x]],(x))$ y

$$\phi(g + (x^k)) = \phi(g) + \phi((x^k))$$
$$= \phi(g) + \beta^k\, \phi(R[[x]]) \subset \phi(g) + (\beta^k\, T)$$. Luego ϕ es continua.

Para la segunda parte:

Sea $N \in \mathbb{N}$; si $n > N$, $f - f^{(n)}(x) \in (x^{n+1}) \subset (x^N)$, es decir, $\lim_{n \to \infty} f^{(n)}(x) = f$ en la topología (x)-ádica. También:

$\phi(f^{(n)}(x)) = \sum_{i=0}^{n} f_i\, \phi(x)^i = \sum_{i=0}^{n} f_i\, \beta^i = f^{(n)}(\beta)$. Finalmente, como ϕ es continua, $\phi(f) = \lim_{n \to \infty} \phi(f^{(n)}(x)) = \lim_{n \to \infty} f^{(n)}(\beta)$. Es decir, $\phi(f)$ es un punto límite en $(T,(\beta\, T))$ de la sucesión $\left\{ f^{(n)}(\beta) \right\}_{n=0}^{\infty}$. ▒

5.5 Observación:

Si en la proposición anterior tenemos adicionalmente la hipótesis $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\beta^n T) = (0)$, es decir, que $(T,(\beta T))$ es Hausdorff, podemos concluir que de existir algún R-endomorfismo ϕ de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$, éste tiene que ser único. Cuando se presenta este caso, el R-endomorfismo ϕ se nota ϕ_β y se llama **aplicación sustitución.**

Obsérvese también que la condición $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\beta^n T) = (0)$ es natural, pues $\bigcap_{n=1}^{\infty} (x^n) = (0)$ y como $\beta = \phi(x)$, podemos esperar que x y β tengan un comportamiento parecido.

El teorema siguiente dice que si $(T,(\beta T))$ es completo además de Hausdorff, entonces existe una tal aplicación sustitución ϕ_β .

5.6 Teorema:

Sean $\beta \in R[[x]]$ **y** T **un subanillo de** $R[[x]]$ **que contiene a** $R[\beta]$ **tal que** $(T,(\beta T))$ **es un espacio Hausdorff completo. Entonces existe un R-endomorfismo** ϕ **de** $R[[x]]$ **tal que** $\phi(x) = \beta$ **y** $\phi(R[[x]]) \subset T$.

Si $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de R y si para cada n , definimos $f^{(n)}(\beta) = \sum_{i=0}^{n} f_i \beta^i$, entonces la nueva sucesión $\{f^{(n)}(\beta)\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión Cauchy de $(R[\beta],(\beta R[\beta]))$.

En efecto; dado N , si $n \geqslant m \geqslant N$ se tiene:

$$f^{(n)}(\beta) - f^{(m)}(\beta) = \sum_{i=m+1}^{n} f_i \beta^i \in (\beta^{m+1} R[\beta]) \subset (\beta^N R[\beta]).$$

Por supuesto, $\left\{ f^{(n)}(\beta) \right\}_{n=0}^{\infty}$ también es sucesión Cauchy de $(T,(\beta T))$. Como este espacio es Hausdorff completo, la sucesión $\left\{ f^{(n)}(\beta) \right\}$ converge en T y su límite es único.

Definimos la función ϕ de la siguiente manera:

Dado $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \in R[[x]]$, $\phi(f) = \lim f^{(n)}(\beta)$ donde $f^{(n)}(\beta) = \sum_{i=0}^{n} f_i \beta^i$. El límite se toma en $(T,(\beta T))$. Por eso $\phi(R[[x]]) \subset T$.

Debemos probar que ϕ es un R-endomorfismo de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$.

i) Es claro que $\phi(x) = \beta$ y que ϕ restringido a R es la identidad.

ii) Sean $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i$ y $g = \sum_{i=0}^{\infty} g_i x^i$ elementos de $R[[x]]$. Entonces $f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$ y $g^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} g_i x^i$ para cada n .

Repitiendo la prueba hecha para el teorema 4.2 tenemos que $\phi(f + g) = \phi(f) + \phi(g)$. Además, siguiendo las notaciones de la prueba de 4.2 , vemos que para probar $\phi(fg) = \phi(f)\, \phi(g)$ basta demostrar que

$\lim\limits_{n} \left[(f^{(n)}(\beta))(g^{(n)}(\beta)) - (fg)^{(n)}(\beta) \right] = 0$. El límite se toma en $(T,(\beta T))$.

Veámoslo:

$$(f^{(n)}(\beta))(g^{(n)}(\beta)) - (fg)^{(n)}(\beta) = (fg)^{(n)}(\beta) + \sum_{k=n+1}^{2n} h_k \beta^k - (fg)^n(\beta)$$

$$= \beta^{n+1} \sum_{k=n+1}^{2n} h_k \beta^{k-(n+1)} .$$

Si $(\beta^m T)$ es una vecindad de 0 en $(T,(\beta T))$, entonces para $n \geqslant m-1$ tenemos:

$$\left(f^{(n)}(\beta) \right)\left(g^{(n)}(\beta) \right) - (fg)^{(n)}(\beta) = \beta^{n+1} \sum_{k=n+1}^{2n} h_k \beta^{k-(n+1)}$$

$$\in (\beta^{n+1} R[\beta]) \subset (\beta^m T) .$$

5.7 Nota:

Obsérvese que decir que $(T,(\beta T))$ es un espacio Hausdorff completo, significa que las sumas infinitas $\sum_{i=0}^{\infty} r_i \beta^i$, con $r_i \in R$, tienen sentido, y es por ésto que se garantiza la existencia de ϕ_β .

5.8 La definición de un R-endomorfismo de $R[[x]]$ también puede hacerse asi:

Sea $b_o \in R$ y supongamos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (b_o^n) = (0)$. Notaremos (R,Ω) al espacio $(R,(b_o))$ y (R^*,Ω^*) a su completación.

Obsérvese que según 3.12 $\mathcal{T}^*$ es la topología inducida en R^* por la sucesión de ideales $\{b_o^n R^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ de R^* y el teorema 3.12.6 dice que $b_o^n R^* \cap R = (b_o^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Usaremos las notaciones $(R,(b_o))$, $(R^*,(b_oR^*))$, $(R[[x]],(b_oR[[x]]))$ y $(R^*[[x]],(b_oR^*[[x]]))$ para denotar a cada uno de esos anillos con su topología (b_o)-ádica.

Para cada $i \in \mathbb{N}_o$ definimos una función π_i de $R[[x]]$ en R de la siguiente forma: $\pi_i(f)$ es el coeficiente de x^i en f. Por tanto

$f = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i(f)\, x^i$ para cada $f \in R[[x]]$ y se tiene que $f = g$ si y solo si $\pi_i(f) = \pi_i(g)$ para todo $i \in \mathbb{N}_o$. Se verifica fácilmente que π_i es un homomorfismo sobreyectivo de R-módulos. Además,

$\pi_i(fg) = \sum_{j=0}^{i} \pi_j(f)\, \pi_{i-j}(g)$ para toda $f,g \in R[[x]]$ y todo $i \in \mathbb{N}_o$.

5.9 Lema:

Sean $b_o \in R$ y $\beta = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \in R[[x]]$ con $c_o \in (b_o)$; supongamos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (b_o^n) = (o)$ y consideremos a R como espacio topológico con la topología (b_o)-ádica.

a) Si $k,n \in \mathbb{N}_o$, entonces $\pi_k(\beta^{n+k}) \in (b_o^n)$.

b) Si $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión de elementos de R y si para cada $i \in \mathbb{N}_0$, $f^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} f_j x^j$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}_0$, $\{\pi_k(f^{(i)}(\beta))\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión Cauchy en $(R,(b_0))$.

a) Fijamos $k \in \mathbb{N}_0$. Por inducción sobre m se prueba fácilmente que para todo $m \in \mathbb{N}$, el coeficiente de x^k en β^m es una suma de términos y cada uno de ellos consiste en un producto de m elementos del conjunto $\{c_0,c_1,\dots,c_k\}$.

Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces el coeficiente de x^k en β^{k+n} es una suma en la que cada sumando tiene $k + n$ factores pertenecientes al conjunto $\{c_0,c_1,\dots,c_k\}$. Un sumando es así:

$$\pi\, c_{i_j} \quad \text{con} \quad i_j \in \mathbb{N}_0 \quad \text{para cada } j \text{ y } \quad \sum_{j=1}^{n+k} i_j = k \, .$$

Si c_0 aparece menos de n veces en un sumando, habrá más de k i_j's no nulos que sumarán más de k: ¡contradicción!

Luego c_0 aparece n ó más veces como factor en cada sumando, lo que dice que cada sumando es elemento del ideal (c_0^n) . La suma de ellos también está allí. Como $(c_0^n) \subseteq (b_0^n)$, concluimos que el coeficiente de x^k en β^{n+k} es un elemento de (b_0^n) y ésto lo escribimos asi:

$\pi_k(\beta^{n+k}) \in (b_0^n)$.

b) Sean $k \in \mathbb{N}_0$ y (b_0^n) una vecindad de 0 en R.

Si $r \geq s \geq n+k$, entonces, por ser π_k un homomorfismo de R-módulos se tiene:

$$\pi_k(f^{(r)}(\beta)) - \pi_k(f^{(s)}(\beta)) = \pi_k(f^{(r)}(\beta) - f^{(s)}(\beta)) = \pi_k\left(\sum_{i=s+1}^{r} f_i \beta^i\right)$$

$$= \sum_{i=s+1}^{r} f_i \pi_k(\beta^i) .$$

Si $s+1 \leq i \leq r$, $n+k \leq i$ y entonces $i = k + n_i$ con $n_i \geq n$. Por parte a), vemos que $\pi_k(\beta^i) \in (b_0^{n_i})$. Como $n_i \geq n$, concluimos que $\pi_k(\beta^i) \in (b_0^n)$ y ésto implica que la sucesión $\left\{\pi_k(f^{(i)}(\beta))\right\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ es Cauchy en la topología (b_0)-ádica de R. ⁞⁞

Cuando $(R,(b_0))$ es un espacio Hausdorff completo, en el teorema siguiente veremos que el lema anterior nos permite definir un R-endomorfismo sustitución ϕ_β de $R[[x]]$, para $\beta = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ y $c_0 \in (b_0)$. En particular, este teorema proporciona una condición suficiente para que exista un R-endomorfismo sustitución ψ de $R[[x]]$ como el supuesto al principio del capítulo 3.

5.10 Teorema:

Sean R un anillo conmutativo con unidad, $b_o \in R$ y

$\beta = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ con $c_o \in (b_o)$; si $(R,(b_o))$ es un espacio Hausdorff completo, entonces existe un único R-endomorfismo ϕ_β de $R[[x]]$ tal que $\phi_\beta(x) = \beta$.

i) Definición de ϕ_β :

Si $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \in R[[x]]$, consideramos la sucesión $\left\{f^{(i)}\right\}_{i\in\mathbb{N}_o}$ en $R[x]$ dada por $f^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} f_j x^j$ para cada $i \in \mathbb{N}_o$. Por lema anterior $\left\{\pi_k(f^{(i)}(\beta))\right\}_{i\in\mathbb{N}_o}$ es una sucesión Cauchy en $(R,(b_o))$ para cada $k \in \mathbb{N}_o$. Sea $p_k(f) = \lim_i \pi_k(f^{(i)}(\beta))$. Definimos:

$$\phi_\beta(f) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(f)x^i$$

A $\phi_\beta(f)$ también lo notamos $f(\beta)$ ó $\sum_{i=0}^{\infty} f_i \beta^i$.

ii) ϕ_β restringido a R es la identidad de R.

Sea $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \in R$; entonces $f = f_o$ y $f_i = 0$ para $i \in \mathbb{N}$.

$$f^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} f_j x^j = f_o = f \; ; \; \pi_k(f^{(i)}(\beta)) = \pi_k(f_o) = \begin{cases} f_o & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

$$p_k(f) = \lim_i \pi_k(f^{(i)}(\beta)) = \lim_i \pi_k(f_o) = \begin{cases} f_o & \text{si} \quad k = 0 \\ 0 & \text{si} \quad k \neq 0 \end{cases}$$

Luego $\phi_\beta(f) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(f)\, x^k = f_o = f$.

iii) $\phi_\beta(x) = \beta$

$x = \sum_{i=0}^{\infty} f_i\, x^i$ con $f_i = 0$ si $i \neq 1$ y $f_1 = 1$.

$f^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} f_j\, x^j = x$; $f^{(i)}(\beta) = \beta$; $\pi_k(f^{(i)}(\beta)) = \pi_k(\beta) = c_k$.

$p_k(x) = \lim_i \pi_k(f^{(i)}(\beta)) = \lim_i c_k = c_k$

Luego $\phi_\beta(x) = \beta$.

iv) ϕ_β es un endomorfismo de $R[[x]]$.

Sean $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i\, x^i$ y $g = \sum_{i=0}^{\infty} g_i\, x^i$ elementos de $R[[x]]$.

$(f + g)^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} (f_j + g_j)\, x^j$ y

$f^{(i)} + g^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} f_j\, x^j + \sum_{j=0}^{i} g_j\, x^j = \sum_{j=0}^{i} (f_j + g_j)\, x^j = (f + g)^{(i)}$

Luego $(f + g)^{(i)}(\beta) = (f^{(i)} + g^{(i)})(\beta) = f^{(i)}(\beta) + g^{(i)}(\beta)$ y asi

$\pi_k((f + g)^{(i)}(\beta)) = \pi_k(f^{(i)}(\beta)) + \pi_k(g^{(i)}(\beta))$.

y $p_k(f+g) = \lim\limits_{i} \pi_k((f+g)^{(i)}(\underset{\sim}{\beta}))$

$$= \lim_{i} \pi_k(f^{(i)}(\underset{\sim}{\beta}) + \lim_{i} \pi_k(g^{(i)}(\underset{\sim}{\beta}) = p_k(f) + p_k(g)$$

Luego $\phi_{\underset{\sim}{\beta}}(f+g) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k(f+g)\, x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (p_k(f) + p_k(g))\, x^k$

$$= \phi_{\underset{\sim}{\beta}}(f) + \phi_{\underset{\sim}{\beta}}(g)$$

Veamos ahora que $\phi_{\underset{\sim}{\beta}}(fg) = \phi_{\underset{\sim}{\beta}}(f)\ \phi_{\underset{\sim}{\beta}}(g)$. Será suficiente mostrar que para todo $k \in \mathbb{N}_o$, $\pi_k(\phi_{\underset{\sim}{\beta}}(fg) = \pi_k(\phi_{\underset{\sim}{\beta}}(f)\ \phi_{\underset{\sim}{\beta}}(g))$.

Pero $\pi_k(\phi_{\underset{\sim}{\beta}}(fg) = p_k(fg) = \lim\limits_{i} \pi_k((fg)^{(i)}(\underset{\sim}{\beta})$ y

$$\pi_k(\phi_{\underset{\sim}{\beta}}(f)\ \phi_{\underset{\sim}{\beta}}(g)) = \sum_{j=0}^{k} \pi_j(\phi_{\underset{\sim}{\beta}}(f))\, \pi_{k-j}(\phi_{\underset{\sim}{\beta}}(g)) = \sum_{j=0}^{k} p_j(f)\, p_{k-j}(g)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \left[\lim_{i} \pi_j(f^{(i)}(\underset{\sim}{\beta})) \right] \left[\lim_{i} \pi_{k-j}(g^{(i)}(\underset{\sim}{\beta})) \right]$$

$$= \lim_{i} \left[\sum_{j=0}^{k} \pi_j(f^{(i)}(\underset{\sim}{\beta}))\, \pi_{k-j}(g^{(i)}(\underset{\sim}{\beta})) \right] = \lim_{i} \pi_k(f^{(i)}(\underset{\sim}{\beta})\ g^{(i)}(\underset{\sim}{\beta}))$$

$= \lim\limits_{i} \ \pi_k \left((f^{(i)} g^{(i)})(\underset{\sim}{\beta}) \right)$. Para terminar la prueba debemos mostrar que

$$\lim_{i} \left[\pi_k((f^{(i)} g^{(i)})(\underset{\sim}{\beta})) - \pi_k((fg)^{(i)}(\underset{\sim}{\beta})) \right]$$

$$= \lim_{i} \left[\pi_k \left((f^{(i)} g^{(i)})(\underset{\sim}{\beta}) - (fg)^{(i)}(\underset{\sim}{\beta}) \right) \right]$$

$$= \lim_{i} \left[\pi_k(f^{(i)} g^{(i)} - (fg)^{(i)})(\underset{\sim}{\beta}) \right] = 0$$

Sabemos que $(fg)^{(i)} = \sum\limits_{j=0}^{i} h_j\, x^j$, donde $h_j = \sum\limits_{\substack{r+s=j \\ 0 \leqslant r,s \leqslant i}} f_r\, g_s$ mientras que $f^{(i)}g^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i} f_j\, x^j\right)\left(\sum_{j=0}^{i} g_j\, x^j\right) = \sum_{j=0}^{2i} h_j\, x^j$

$$= (fg)^{(i)} + \sum_{j=i+1}^{2i} h_j\, x^j\,.$$

Luego $f^{(i)}\, g^{(i)} - (fg)^{(i)}$ tiene por lo menos orden $i+1$ para todo $i \in \mathbb{N}_o$.

Sea (b_o^n) una vecindad de cero en $(R,(b_o))$; escogemos cualquier i con la condición $i \geqslant k+n$.

$$\pi_k\left[\,(f^{(i)}\, g^{(i)} - (fg)^{(i)})(\beta)\,\right] = \pi_k\left[\,\sum_{j=i+1}^{2i} h_j\, \beta^j\,\right]$$

$$= \sum_{j=i+1}^{2i} h_j\, \pi_k(\beta^j) \;\in\; (b_o^n)\,.$$

Como $i+1 > k+n$, en cada sumando se aplica el lema 5.9 a) .

v) Unicidad

Supongamos que ψ es un R-endomorfismo de $R[[x]]$ tal que $\psi(x) = \beta$.

Veremos que $\psi(f) = \phi_\beta(f)$ para todo $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i\, x^i \in R[[x]]$; para hacerlo, mostramos que $\pi_k(\phi_\beta(f)) = \pi_k(\psi(f))$ para todo $k \in \mathbb{N}_o$.

Sea $k \in \mathbb{N}_o$.

$\pi_k(\phi_\beta(f)) = p_k(f) = \lim_i \pi_k(f^{(i)}(\beta))$; por otra parte, dado $i \in \mathbb{N}_o$,

$$\pi_k(\psi(f)) = \pi_k\left(\psi\left(\sum_{j=0}^{\infty} f_j\, x^j\right)\right)$$

$$= \pi_k\left(\psi\left(\sum_{j=0}^{i} f_j\, x^j\right) + \psi\left(\sum_{j=i+1}^{\infty} f_j\, x^j\right)\right)$$

$$= \pi_k\left(\sum_{j=0}^{i} f_j\, [\psi(x)]^j + \psi\left(\sum_{j=i+1}^{\infty} f_j\, x^j\right)\right) = \pi_k\left(f^{(i)}(\beta) + \psi\left(\sum_{j=i+1}^{\infty} f_j\, x^j\right)\right)$$

$$= \pi_k(f^{(i)}(\beta)) + \pi_k\left(\psi\left(\sum_{j=i+1}^{\infty} f_j\, x^j\right)\right).$$

Luego $\pi_k(\psi(f)) = \lim_i \pi_k(\psi(f)) = \lim_i \left[\pi_k(f^{(i)}(\beta) + \pi_k\left(\psi\left(\sum_{j=i+1}^{\infty} f_j\, x^j\right)\right)\right]$

$$= \lim_i\ \pi_k(f^{(i)}(\beta)) + \lim_i\ \pi_k\left(\psi\left(\sum_{j=i+1}^{\infty} f_j\, x^j\right)\right)$$

$$= p_k(f) + \lim_i\ \pi_k\left(\psi\left(\sum_{j=i+1}^{\infty} f_j\, x^j\right)\right) = \pi_k(\phi_\beta(f)) + \lim_i\left(\pi_k\left(\psi\left(\sum_{j=i+1}^{\infty} f_j\, x^j\right)\right)\right)$$

Para mostrar que $\pi_k(\psi(f)) = \pi_k(\phi_\beta(f))$ es suficiente mostrar que

$\left\{\pi_k\left(\psi\left(\sum_{j=i+1}^{\infty} f_j\, x^j\right)\right)\right\}_{i\in\mathbb{N}_o}$ es una sucesión nula de R.

$$\psi\left(\sum_{j=i+1}^{\infty} f_j\, x^j\right) = \psi\left(x^{i+1}\right)\psi\left(\sum_{j=0}^{\infty} f_{j+i+1}x^j\right) = \beta^{i+1}\,\psi\left(\sum_{j=0}^{\infty} f_{j+i+1}x^j\right)$$

Sea (b_o^n) una vecindad de cero en $(R,(b_o))$; escogemos $i \geqslant k+n$. Si

$\psi\left(\sum_{j=0}^{\infty} f_{j+i+1}\, x^j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} e_j\, x^j$, entonces $\pi_k\left(\psi\left(\sum_{j=i+1}^{\infty} f_j\, x^j\right)\right)$

$$= \pi_k\left(\beta^{i+1}\sum_{j=0}^{\infty} e_j\, x^j\right) = \sum_{u=0}^{k}\left[\pi_u(\beta^{i+1})\ \pi_{k-u}\left(\sum_{j=0}^{\infty} e_j\, x^j\right)\right] =$$

$$= \sum_{u=0}^{k} \pi_u(\beta^{i+1})\, e_{k-u} \,.$$

Como $i+1 > k+n$, escogemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $i + 1 = k + n + m$. Si $u \in \{0,1,\ldots,k\}$, $i+1 = u + (k-u) + n + m$.

El lema 5.9 a) dice que

$$\pi_u(\beta^{i+1}) = \pi_u\left(\beta^{u+[k-u+n+m]}\right) \in (b_0^{k-u+n+m}) \subseteq (b_0^n)$$

Luego $\sum_{u=0}^{k} \pi_u(\beta^{i+1})\, e_{k-u} \in (b_0^n)$ y asi

$\left\{\pi_k\left(\psi\left(\sum_{j=i+1}^{\infty} f_j\, x^j\right)\right)\right\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ tiende a cero. ▪

Los lemas siguientes, que en si mismos tienen interés, servirán también para probar un resultado importante: todo R-endomorfismo de $R[[x]]$ se puede extender a un R^*-endomorfismo de $R^*[[x]]$.

El primero de estos lemas nos muestra como la propiedad de que R es denso en R^* es heredada por $R[[x]]$ en $R^*[[x]]$.

5.11 Lema:

Sean R **un anillo conmutativo con identidad,** $(R,\mathcal{T})$ **el anillo topológico** $(R,(b_0))$ **con la condición** $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (b_0^n) = (o)$ **y sea** $(R^*,\mathcal{T}^*)$ **su completación. Entonces** $R[[x]]$ **es denso en** $(R^*[[x]],(b_0R^*[[x]]))$.

Ya sabemos, (ver 3.12), que $\mathcal{T}^*$ es la topología (b_0R^*)-ádica de R^*.

Sea $g = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i \in R^*[[x]]$ y sea $g + b_0^k R^*[[x]]$ alguna vecindad de g. Como R es denso en R^*, existe, para cada $i \in \mathbb{N}_0$, un elemento t_i de R tal que $t_i - d_i \in b_0^k R^*$. Entonces

$$t = \sum_{i=0}^{\infty} t_i x^i \in R[[x]] \quad y \quad t-g = \sum_{i=0}^{\infty} (t_i - d_i) x^i \in b_0^k R^*[[x]] .$$

Es decir, $t \in g + b_0^k R^*[[x]]$. Esto nos permite concluir que cada abierto básico que contiene a g tiene intersección no vacía con $R[[x]]$; por tanto la prueba está completa. ▦

5.12 Lema:

Sea R un anillo conmutativo con unidad, $(R,\mathcal{T})$ el anillo topológico $(R,(b_0))$ con la condición $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (b_0^n) = (o)$ y sea $(R^*, \mathcal{T}^*)$ su completación. Si $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión Cauchy de $(R[[x]],(b_0R[[x]]))$, entonces $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a algún elemento g de $(R^*[[x]],(b_0R^*[[x]]))$.

Supongamos que $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión Cauchy de $(R[[x]],(b_0R[[x]]))$ dada por $g_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} x^j$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces si $b_0^kR[[x]]$ es una vecindad de cero en $R[[x]]$, existe $N_1 > 0$ tal que

$$g_n - g_m = \sum_{j=0}^{\infty} (a_{nj} - a_{mj})\, x^j \in b_o^k R[[x]] \text{ para } n,m \geqslant N_1 .$$ Luego

$a_{nj} - a_{mj} \in b_o^k R$ si $n,m \geqslant N_1$, lo que implica que la sucesión $\{a_{ij}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es Cauchy para cada $j \in \mathbb{N}_o$. Como (R^*, Ω^*) es complementación de (R, Ω) , entonces, para cada $j \in \mathbb{N}_o$ existe $d_j \in R^*$ tal que $\lim_i a_{ij} = d_j$.

Sea $g = \sum_{j=0}^{\infty} d_j x^j \in R^*[[x]]$. Veamos que $\lim_i g_i = g$. El límite se toma en $(R^*[[x]], (b_o R^*[[x]]))$. Si $b_o^k R^*$ es una vecindad de cero en R^* , entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_{nj} - a_{mj} \in b_o^k R^*$ para $n,m \geqslant N$ y todo $j \in \mathbb{N}_o$. Además, para cada $j \in \mathbb{N}_o$, existe $N_j > N$ tal que $d_j - a_{nj} \in b_o^k R^*$ para $n \geqslant N_j$. Por tanto, si $j \in \mathbb{N}_o$ y $n \geqslant N_j$, $a_{mj} - a_{nj} = (a_{mj} - d_j) + (d_j - a_{nj}) \in b_o^k R^*$ para $m \geqslant N$. De aqui concluimos que $a_{mj} - d_j \in b_o^k R^*$ si $m \geqslant N$.

Finalmente, si $m \geqslant N$,

$$g_m - g = \sum_{j=0}^{\infty} a_{mj}\, x^j - \sum_{j=0}^{\infty} d_j\, x^j = \sum_{j=0}^{\infty} (a_{mj} - d_j)\, x^j \in b_o^k R^*[[x]],$$

lo que dice que g es el límite de $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en $R^*[[x]]$. ⁞⁞⁞

5.13 Observación:

Sabemos que si X es un espacio métrico, Y es un subconjunto denso de X y cada sucesión Cauchy de elementos de Y converge en X, entonces X es completo. Como $R^*[[x]]$ es un espacio métrico (ver proposición 3.7.5), los dos lemas anteriores nos permiten concluir que $(R^*[[x]],(b_0R^*[[x]]))$ es completo.

5.14 Lema:

Sean R un anillo conmutativo con unidad, (R,Ω) el anillo topológico $(R,(b_0))$ con la condición $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (b_0^n) = (o)$ y sea (R^*,Ω^*) su completación. Entonces $(R^*[[x]],(b_0R^*[[x]]))$ es la completación de $(R[[x]],(b_0R[[x]]))$.

Revisaremos una a una las propiedades de toda completación y veremos que se cumplen en este caso.

i) $R[[x]]$ es subanillo de $R^*[[x]]$.

Se tiene porque R es subanillo de R^*.

ii) $(R^*[[x]],(b_0R^*[[x]]))$ es completo.

Lo dice la observación 5.13

iii) La topología $(b_0R[[x]])$-ádica de $R[[x]]$, es equivalente a la topología inducida en $R[[x]]$ por la topología $(b_0R^*[[x]])$-ádica de $R^*[[x]]$.

El teorema 3.12.6 nos dice que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $b_o^n R^* \cap R = (b_o^n)$; de esta igualdad, deducimos fácilmente que $b_o^n R^*[[x]] \cap R[[x]] = b_o^n R[[x]]$; y ésta última es suficiente para que se cumpla el enunciado.

iv) Cada elemento de $R^*[[x]]$ es el límite de una sucesión Cauchy de $R[[x]]$.

Sea $g \in R^*[[x]]$; dado $k \in \mathbb{N}$, existe $f_k \in R[[x]]$ tal que $f_k - g \in b_o^k R^*[[x]]$. (Lema 5.11).

La sucesión $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a g y por ser convergente, es Cauchy.

v) $(R^*[[x]],(b_o R^*[[x]]))$ es Hausdorff .

Sea $f = \sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (b_o^n R^*[[x]])$; entonces para cada $n \in \mathbb{N}$,

$f \in b_o^n R^*[[x]]$. Esto implica que para cada j y n en $\mathbb{N}$, $f_j \in b_o^n R^*$. Luego $f_j \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (b_o^n R^*) = (o)$ y asi $f_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Concluimos entonces que $f = 0$. ⁞⁞

5.15 Corolario:

Con las hipótesis del lema 5.14 : $(R,(b_o))$ es completo si y solo si $(R[[x]],(b_o R[[x]]))$ es completo.

Supongamos que $(R,(b_o))$ es completo; entonces es su propia completación R^*. Aplicando el lema anterior, encontramos que $(R[[x]],(b_o R[[x]]))$ también es su propia completación; en particular, es completo.

Recíprocamente, supongamos que $(R[[x]], (b_oR[[x]]))$ es completo. Sea $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy de $(R,(b_o))$. Como también es sucesión Cauchy en $R[[x]]$, existe $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \in R[[x]]$ tal que $a_i \longrightarrow f$.

Sea (b_o^n) una vecindad de cero en R. Entonces existe N tal que si $k \geqslant N$, $a_k - f \in b_o^nR[[x]]$. En particular, $a_k - f_o \in b_o^nR = (b_o^n)$ y por tanto $\{a_i\} \longrightarrow f_o$ en $(R,(b_o))$. Concluimos pues que $(R,(b_o))$ es completo. ▦

5.16 Nota:

Obsérvese que f debe ser la constante f_o: como para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_k - f \in b_o^nR[[x]]$ para k suficientemente grande, $f_i \in (b_o^n)$ para todo $i \geqslant 1$. Luego, si $i \geqslant 1$, $f_i \in (b_o^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir, $f_i \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (b_o^n) = (o)$. Esto lo podemos enunciar asi: Las sucesiones de constantes convergentes de $R[[x]]$ tienen una constante por límite.

5.17 Lema:

Sean R un anillo conmutativo con unidad y $t \in R$. Si ψ es un R-endomorfismo de $R[[x]]$, entonces ψ es continuo en $(R[[x]], (tR[[x]]))$.

Consideremos un R-endomorfismo ψ de $R[[x]]$. Veamos que es continuo en 0 con la topología (t)-ádica de $R[[x]]$.

Sea $t^nR[[x]]$ una vecindad de cero; si $f \in t^nR[[x]]$, $f = t^ng$ con $g \in R[[x]]$ y

$\psi(f) = \psi(t^ng) = \psi(t^n)\ \psi(g) = t^n\ \psi(g) \in t^nR[[x]]$. Luego

$\psi(t^nR[[x]]) \subset t^nR[[x]]$ y ésto dice que ψ es continuo en 0 en el anillo topológico $(R[[x]], (tR[[x]]))$; luego es continuo en todo $R[[x]]$. ▪

Los homomorfismos entre anillos topológicos y las completaciones de estos anillos se relacionan de la siguiente manera:

5.18 Lema:

Sean (R,Ω_1) y (S,Ω_2) anillos topológicos Hausdorff con topologías ádicas inducidas por los ideales finitamente generados $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ respectivamente. Supongamos que $(\overline{R},\overline{\Omega}_1)$ y $(\overline{S},\overline{\Omega}_2)$ son completaciones de (R,Ω_1) y (S,Ω_2) respectivamente y que ψ es un homomorfismo continuo de (R,Ω_1) en (S,Ω_2) . Entonces ψ se puede extender a un homomorfismo ψ^* de $(\overline{R},\overline{\Omega}_1)$ en $(\overline{S},\overline{\Omega}_2)$. Si adicionalmente se tiene que la topología $\overline{\Omega}_2$ es la topología $\mathfrak{M}$-ádica de $\overline{S}$, donde $\mathfrak{M}$ es un ideal finitamente generado de $\overline{S}$, y que la topología $\mathfrak{a}^e$-ádica de $\overline{R}$ es equivalente a $\overline{\Omega}_1$, entonces ψ^* es un homomorfismo continuo de $(\overline{R},\overline{\Omega}_1)$ en $(\overline{S},\overline{\Omega}_2)$.

La prueba se esboza en el siguiente diagrama; las funciones j_1 y j_2 son las inclusiones respectivas.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\psi"] & S \\
r_i \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, "j_1"'] & \psi(r_i) \arrow[dd, "j_2"] \\
& \\
\overline{R} \arrow[r, "\psi^*"] & \overline{S} \\
\overline{r}=\lim\limits_i r_i \arrow[r, mapsto] & \overline{s}= \lim\limits_i \psi(r_i)
\end{tikzcd}$$

Sea $\overline{r} \in \overline{R}$. Entonces existe una sucesión Cauchy $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de (R,τ_1) tal que $\lim\limits_i r_i = \overline{r}$. Como ψ es continuo, $\{\psi(r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión Cauchy de S y por tanto existe $\overline{s} \in \overline{S}$ tal que $\lim\limits_i \psi(r_i) = \overline{s}$.
Definimos $\psi^* : \overline{R} \longrightarrow \overline{S}$ asi:

$\psi^*(\overline{r}) = \lim\limits_i \psi(r_i) = \overline{s} \in \overline{S}$.

La buena definición de ψ y la unicidad del límite, garantizan la buena definición de ψ^* ; como j_1 y j_2 son inclusiones, ψ^* extiende a ψ y como ψ es un homomorfismo de anillos, ψ^* también es un homomorfismo de anillos.

Supongamos ahora que la topología τ_2 es la topología $\mathcal{M}$-ádica de $\overline{S}$ y que la topología $\mathcal{C}^e$-ádica de R es equivalente a τ_1 . Veamos que ψ^* es continuo en 0 .

Sea $\mathcal{M}^k$ un entorno de cero en $(\overline{S}, \overline{\tau_1})$; entonces $\mathcal{M}^k \cap S$ es una vecindad de cero en S y como ψ es continuo en 0, existe $\mathfrak{a}^n$, una vecindad de 0 en $(R, \mathcal{T}_1)$ tal que $\psi^*(\mathfrak{a}^n) = \psi(\mathfrak{a}^n) \subseteq \mathfrak{M}^k \cap S$. Por tanto $[\psi^*(\mathfrak{a}^n)]^e = [\psi(\mathfrak{a}^n)]^e \subseteq \mathfrak{M}^k \cap S \subseteq \mathfrak{M}^k$. Como la topología $\mathfrak{a}^e$-ádica de $\bar{R}$ es equivalente a $\mathcal{T}_1$, existe V vecindad de cero en $(\bar{R}, \bar{\mathcal{T}}_1)$, tal que $V \subseteq (\mathfrak{a}^n)^e$. Tenemos entonces:

$$\psi^*(V) \subseteq \psi^*((\mathfrak{a}^n)^e) \subseteq [\psi^*(\mathfrak{a}^n)]^e \subseteq \mathfrak{M}^k$$

y ésto indica que ψ^* es continuo. ⁞⁞⁞

El teorema siguiente es consecuencia de los lemas vistos anteriormente.

5.19 Teorema:

Sean R un anillo conmutativo con unidad, $(R,(b_0))$ el anillo topológico R con la topología (b_0)-ádica y $(R^*, \mathcal{T}^*)$ su completación. Sea $\alpha \in R[[x]]$. Si ψ es un R-endomorfismo de $R[[x]]$ tal que $\psi(x) = \alpha$, entonces ψ se puede extender a un R^*-endomorfismo de $R^*[[x]]$.

Por lema 5.17, ψ es un R-endomorfismo continuo de $R[[x]]$ y por lema 5.14, $(R^*[[x]],(b_0R^*[[x]]))$es completación de $(R[[x]],(b_0R[[x]]))$. Luego por lema 5.18, ψ se puede extender a un R^*-endomorfismo continuo de $R^*[[x]]$. ⁞⁞⁞

Para poder caracterizar los R-automorfismos de $R[[x]]$ utilizando las topologías (b_0)-ádicas, nos falta todavía establecer una condición necesaria y suficiente para la existencia de R-endomorfismos de $R[[x]]$.

5.20 Teorema:

Sean R un anillo conmutativo con unidad y $b_o \in R$; supongamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} (b_o^n) = (o)$. Si $\beta = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in R[[x]]$, entonces existe un R-endomorfismo ψ de $R[[x]]$ tal que $\psi(x) = \beta$ si y solo si $(R,(b_o))$ es completo. Cuando $(R,(b_o))$ es completo, ψ es único y es igual a ϕ_β.

Ya sabemos (teorema 5.10), que si $(R,(b_o))$ es completo, existe un único R-endomorfismo de $R[[x]]$ que es ϕ_β tal que $\phi_\beta(x) = \beta$.

Veremos ahora que la existencia de un R-endomorfismo ψ de $R[[x]]$ tal que $\psi(x) = \beta$, implica que $(R,(b_o))$ es completo.

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy de $(R,(b_o))$. Debemos encontrar un elemento $t \in R$ tal que $\lim_n a_n = t$.

Por lema 3.14 existe una subsucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{a_n\}$ tal que

$c_n = \sum_{j=0}^{n} r_j b_o^j$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $f = \sum_{i=0}^{\infty} r_i x^i \in R[[x]]$. Por teorema 5.19 ψ se puede extender a ψ^* , un R^*-endomorfismo de $R^*[[x]]$. Como $(R^*,(b_o R^*))$ es completo y $\psi^*(x) = \psi(x) = \beta$, el teorema 5.10 dice que ψ^* es un R^*-endomorfismo sustitución y que $\psi^*(f) = \psi(f) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(f) x^k$, donde

$p_k(f) = \lim_n \pi_k \left(\sum_{j=0}^{n} r_j \beta^j \right)$, $k \in \mathbb{N}$. Cada límite de éstos existe por lema 5.9 y se calcula en $(R,(b_o))$.

Como $\pi_o \left(\sum_{j=0}^{n} r_j \beta^j \right) = \sum_{j=0}^{n} r_j b_o^j = c_n$, existe $\lim c_n$ y es $p_o(f)$. Además, $\psi(f) \in R[[x]]$, por tanto $p_o(f) \in R$; ésto indica que $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en R . Como $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es Cauchy y $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es subsucesión convergente de $\{a_n\}$, $\{a_n\}$ converge al mismo límite. Esto dice que $(R,(b_o))$ es completo. ▒

5.21 Observación:

El teorema anterior resume de muy buena forma la unión de la topología y el álgebra en el estudio de los R-endomorfismos de $R[[x]]$. Otro enfoque de esta unión es el teorema siguiente, en el que trabajando con topologías β-ádicas sobre subanillos de $R[[x]]$, también se obtiene una caraterización para la existencia y unicidad de un R-endomorfismo ϕ de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$.

5.22 Teorema:

Sean R un anillo conmutativo con identidad, $\beta \in R[[x]]$ y T un subanillo de $R[[x]]$ que contiene a $R[\beta]$ y satisface las siguientes condiciones:

i) $(T,(\beta T))$ es un espacio Hausdorff completo.

ii) Cada elemento de T es el límite de una sucesión Cauchy de $(R[\beta], (\beta R[\beta]))$.

Entonces existe un único R-endomorfismo ϕ de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$ y $T = \phi(R[[x]])$.

Recíprocamente, sea ϕ un R-endomorfismo de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$. Si $T = \phi(R[[x]])$ y si $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\beta^n T) = (o)$, entonces T es un subanillo de $R[[x]]$ que contiene a $R[\beta]$ y que cumple las condiciones i) y ii).

Sea T un subanillo de $R[[x]]$ que contiene a $R[\beta]$ y que satisface las condiciones i) y ii). Por teorema 5.6 , existe un R-endomorfismo ϕ de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$ y $\phi(R[[x]]) \subset T$. Veamos que $T \subset \phi(R[[x]])$.

Sea $g \in T$; debemos encontrar $h \in R[[x]]$ tal que $g = \phi(h)$.
La condición ii) dice que existe una sucesión Cauchy $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $(R[\beta], (\beta R[\beta]))$ que converge a g . Por lema 3.14 , existe una subsucesión $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{f_n\}$ de la forma $d_n = \sum_{i=0}^{n} g_i \beta^i$ para cada n, con $g_i \in R[\beta]$ para $i \in \mathbb{N}_0$.

ϕ restringido a $R[x]$ es un R-homomorfismo y $\phi(R[x]) = R[\beta]$.

Luego para todo $i \in \mathbb{N}_0$, existe $h_i \in R[x]$ tal que $\phi(h_i) = g_i$;

$d_n = \sum_{i=0}^{n} g_i \beta^i = \sum_{i=0}^{n} \phi(h_i)\, \phi(x^i) = \phi\left(\sum_{i=0}^{n} h_i x^i \right)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

La sucesión $\left\{ \sum_{i=0}^{n} h_i x^i \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en $(R[[x]],(x))$:

Sea $k \in \mathbb{N}$; si $n \geqslant m \geqslant k-1$,

$$\sum_{i=0}^{n} h_i x^i - \sum_{i=0}^{m} h_i x^i = \sum_{i=m+1}^{n} h_i x^i \in (x^{m+1}) \subset (x^k) .$$

Como $(R[[x]],(x))$ es completo, (ver ejemplo 3.16) existe $h \in R[[x]]$ tal que $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} h_i x^i = h$. Como ϕ es una aplicación continua de $(R[[x]],(x))$ en $(T,(\beta T))$, (proposición 5.4) ,

$$\phi(h) = \lim_n \phi\left(\sum_{i=0}^{n} h_i x^i \right) = \lim_n \sum_{i=0}^{n} \phi(h_i)\, \phi(x)^i = \lim_n \sum_{i=0}^{n} g_i \beta^i$$

$$= \lim_n d_n$$

Pero además, $(T,(\beta T))$ es Hausdorff; la subsucesión $\{d_n\}$ de la sucesión convergente $\{f_n\}$ debe tender al mismo límite. Por tanto $g = \phi(h)$ y queda probado que $T = \phi(R[[x]])$.

Por último la observación 5.5 justifica la unicidad de la función ϕ .

Recíprocamente: supongamos que ϕ es un R-endomorfismo de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$ y sea $\phi(R[[x]]) = T$. Supongamos además que $(T,(\beta T))$ es Hausdorff.

Claramente, T es un subanillo de $R[[x]]$ que contiene a $R[\beta]$. Veamos que cumple las condiciones i) y ii) .

i) Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy de $(T,(\beta T))$; entonces por lema 3.14 existe una subsucesión $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la forma

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} g_i \beta^i \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}\ , \ \text{donde} \quad g_i \in T \quad \text{para todo} \quad i \in \mathbb{N}_o .$$

Como $T = \phi(R[[x]])$, para cada $i \in \mathbb{N}_o$ existe $h_i \in R[[x]]$ tal que $\phi(h_i) = g_i$. Luego $d_n = \sum_{i=0}^{n} g_i \beta^i = \sum_{i=0}^{n} \phi(h_i)\,\phi(x^i) = \phi\left(\sum_{i=0}^{n} h_i\, x^i\right)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como en la prueba de la primera parte, podemos ver que la sucesión $\left\{\sum_{i=0}^{n} h_i\, x^i\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en $(R[[x]],(x))$ que es completo. Si $h \in R[[x]]$ es su límite, la continuidad de ϕ como aplicación de $(R[[x]],(x))$ en $(T,(\beta T))$, (proposición 5.4), nos permite concluir que $\lim_n d_n = \phi(h)$. Como $\{f_n\}$ es sucesión Cauchy, tiene que ser convergente y $\lim_n f_n = \lim_n d_n = \phi(h)$.

ii) Sea $g \in T = \phi(R[[x]])$. Entonces existe $h = \sum_{i=0}^{\infty} h_i\, x^i \in R[[x]]$ tal que $\phi(h) = g$. Sea $h^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} h_i\, x^i$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{h^{(n)}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy y $\lim_n h^{(n)}(x) = h$.

El límite se toma en $(R[[x]],(x))$. Por proposición 5.4 , ϕ es una aplicación continua de $(R[[x]],(x))$ en $(T,(\beta T))$ y entonces $g = \phi(h) = \lim_n \phi(h^{(n)}(x)) = \lim_n h^{(n)}(\beta)$. Como $\{h^{(n)}(\beta)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en $(R[\beta],(\beta R[\beta]))$, la prueba está completa. ‡

5.23 El teorema anterior tiene su análogo en $R[[x_1,\dots,x_n]]$. Antes de enunciarlo, recordaremos y estableceremos notaciones, definiciones y proposiciones necesarias.

Sea R un anillo conmutativo con unidad; escribimos $R^{(n)}$ y $R^{((n))}$ para denotar al anillo de polinomios $R[x_1,\dots,x_n]$ y al anillo de series formales $R[[x_1,\dots,x_n]]$ respectivamente; en ambos casos las variables independientes $x_1,\dots,x_n$ conmutan.

Un polinomio de $R^{(n)}$ de la forma

$$r_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

es llamado **monomio** y su **grado** se define como la suma $i_1 + \dots + i_n$. Todo polinomio de $R^{(n)}$ es una única (salvo el orden) suma de monomios. El **grado** de un polinomio f no nulo es el máximo de los grados de los monomios de los cuales es suma. Si todos los monomios en esta suma tienen el mismo grado, entonces f se dice que es **homogéneo** o que es una **forma.**

Un polinomio no nulo f de grado m se puede expresar unívocamente de la siguiente manera:

$$f = f_o + f_1 + \dots + f_m$$

donde cada f_i es o cero o una forma de grado i y $f_m \neq 0$.

Cada serie formal f de $R^{((n))}$ se puede expresar de manera única asi:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$$

donde, para cada $i \in \mathbb{N}_o$, f_i es o cero o una forma de grado i . A esta descomposición de f se le llama **descomposición homogénea** y cada f_i es llamada **componente homogénea** de f .

Sea f una serie formal no nula de $R^{((n))}$ y $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$ su descomposición homogénea. El **orden** de f , notado $o(f)$, es el entero no negativo mínimo n , tal que f_n es no nulo.

El orden de la serie formal nula es $+\infty$.

Las unidades de $R^{((n))}$ se caracterizan de forma similar a las de $R[[x]]$. (Ver [16] pág. 130).

Un endomorfismo (automorfismo) ϕ de $R^{((n))}$ tal que $\phi(r) = r$ para todo $r \in R$, se llama **R-endomorfismo** (**R-automorfismo**) de $R^{((n))}$.

Sean $\alpha_1 ,..., \alpha_k \in R^{((n))}$; el subconjunto de $R^{((n))}$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} r_{i_1 \ldots i_k} \alpha_1^{i_1} \ldots \alpha_k^{i_k} \Big/ n \in \mathbb{N}_o , r_{i_1 \ldots i_k} \in R , i_j \in \mathbb{N}_o \right\}$$

lo notamos $R[\alpha_1,..., \alpha_k]$. Se dice que es el subanillo de $R^{((n))}$

generado por R y la colección $\{\alpha_j\}_{j=1}^{k}$.

Consideremos un subanillo T de $R^{((n))}$ que contenga a $R[\alpha_1,\dots,\alpha_k]$ y denotemos con $\mathfrak{a}$ al ideal de T generado por $\{\alpha_i\}_{i=1}^{k}$; ya sabemos que (T,α) es Hausdorff si y solo si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}^n = (o)$.

La definición 3.10 la podemos enunciar para estas condiciones específicas: Supongamos que $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} [(\alpha_1,\dots\alpha_k)R[\alpha_1,\dots,\alpha_k]]^m = (o)$. Decimos que $(T,\mathfrak{a})$ es una **completación** de $(R[\alpha_1,\dots,\alpha_k], (\alpha_1,\dots\alpha_k)R[\alpha_1,\dots\alpha_k])$ si se cumplen las siguientes condiciones:

i) $(T,\mathfrak{a})$ es completo

ii) La topología inducida en $R[\alpha_1,\dots,\alpha_k]$ por la topología $\mathfrak{a}$-ádica de T, es equivalente a la topología $(\alpha_1,\dots,\alpha_k)R[\alpha_1,\dots,\alpha_k]$ -ádica de $R[\alpha_1,\dots,\alpha_k]$

iii) Cada elemento de T es el límite de una sucesión Cauchy de $(R[\alpha_1,\dots,\alpha_k] , (\alpha_1,\dots,\alpha_k)R[\alpha_1,\dots,\alpha_k])$

iv) $(T,\mathfrak{a})$ es Hausdorff

Los símbolos $End(R^{((n))})$ y $Aut(R^{((n))})$ los usamos para denotar los conjuntos de R-endomorfismos y de R-automorfismos de $R^{((n))}$ respectivamente.

5.24 Sean $\alpha_1,\ldots\alpha_n \in R^{((n))}$. La existencia de un R-endomorfismo ϕ de $R^{((n))}$ tal que $\phi(x_i) = \alpha_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, se justifica de manera parecida a como se hizo en 5.6 para una variable:

Sea T un subanillo de $R^{((n))}$ que contiene a $R[\alpha_1,\ldots\alpha_n]$ y tal que $(T,\mathfrak{a})$ es un anillo topológico completo Hausdorff; $\mathfrak{a}$ es el ideal de T generado por $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$.

Sea $f \in R^{((n))}$ y sea $\sum_{j\in\mathbb{N}_0} f_j$ su descomposición homogénea. (Ver 5.23). Si $f_j = \sum_{i=1}^{k} r_{i_1 i_2\ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$, donde $r_{i_1\ldots i_n} \in R$ y $i_1 + i_2 + \ldots + i_n = j$ para cada $i = 0,1,\ldots,k$, es una componente homogénea de f , definimos $f_j(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \sum_{i=0}^{k} r_{i_1\ldots i_n} \alpha_1^{i_1} \ldots \alpha_n^{i_n}$

La sucesión $\left\{ \sum_{i=0}^{m} f_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \right\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión Cauchy de $(T,\mathfrak{a})$; por tanto converge a un único elemento de T , que denotamos $f(\alpha_1,\ldots\alpha_n)$.

Definimos la función ϕ de la siguiente manera:

Si $f = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} f_j \in R^{((n))}$, $\phi(f) = f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. La prueba de que ϕ es un R-endomorfismo de $R^{((n))}$ tal que $\phi(x_i) = \alpha_i$, $i=1,\ldots,n$, es semejante a la prueba de 5.6.

Como las sucesiones Cauchy de la forma $\left\{ \sum_{i=0}^{m} f_i(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \right\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ tienen sus límites en $(T,\mathfrak{a})$, es evidente que $\phi(R^{((n))}) \subset T$.

La unicidad de ϕ, definida de esta manera, se puede probar de forma análoga a como se hizo en $R[[x]]$.

5.25 Denotemos por $\mathfrak{X}$ al ideal $(x_1,\dots x_n)$ de $R^{((n))}$ generado por $\left\{ x_i \right\}_{i=1}^{n}$. Es fácil ver que $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathfrak{X}^m = (o)$.

Además, todo R-endomorfismo de $R^{((n))}$ resulta continuo de una forma natural:

5.25.1 Proposición:

Sean R un anillo conmutativo con unidad, $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in R^{((n))}$ y $\phi \in \mathrm{End}(R^{((n))})$ tal que $\phi(x_i) = \alpha_i$, $i=1,\dots,n$. Si T es un subanillo de $R^{((n))}$ que contiene al rango de ϕ, entonces ϕ es una aplicación continua de $(R^{((n))},\mathfrak{X})$ en $(T,\mathfrak{a})$, donde $\mathfrak{a}$ es el ideal de T generado por $\left\{ \alpha_i \right\}_{i=1}^{n}$. Además, si $f = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} f_j \in R^{((n))}$, $\phi(f)$ es un punto límite en $(T,\mathfrak{a})$ de la sucesión $\left\{ \sum_{i=0}^{m} f_i(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \right\}_{m\in\mathbb{N}_0}$.

5.25.2 Notas:

a) Las notaciones en el enunciado son las de 5.23 y 5.24.

b) La prueba de la proposición es semejante a la de 5.4.

c) Como en 5.24 no solo se cumplen las hipótesis de esta proposición sino que también $(T,\mathcal{Q})$ es Hausdorff, entonces tenemos que el R-endomorfismo ϕ definido en 5.24 es el único elemento de $End(R^{((n))})$ tal que $\phi(x_i) = \alpha_i$, i=1,...,n.

d) En particular, si $\phi \in Aut(R^{((n))})$, entonces

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)^m = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} (\phi(x_1),\ldots,\phi(x_n))^m$$
$$= \phi(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} (x_1,\ldots,x_n)^m) = \phi(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{X}^m)$$
$$= \phi((o)) = (o)$$

Por tanto ϕ , en este caso también es único como R-endomorfismo de $R^{((n))}$ tal que $\phi(x_i) = \alpha_i$, i=1,...,n .

El teorema análogo a 5.22 para varias variables puede enunciarse ahora. Su prueba es semejante y la omitimos.

5.26 Teorema:

Sean R un anillo conmutativo con unidad, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ elementos de $R^{((n))}$ y T un subanillo de $R^{((n))}$ que contiene a $R[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$ y que cumple las siguientes condiciones:

i) $(T,\mathfrak{a})$ es un espacio Hausdorff completo; $\mathfrak{a}$ es el ideal de T generado por $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$.

ii) Cada elemento de T es el límite de una sucesión Cauchy de $(R[\alpha_1,\dots,\alpha_n]\ ,\ (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,R[\alpha_1,\dots,\alpha_n]\ )$. Entonces existe un único R-endomorfismo ϕ de $R^{((n))}$ tal que $\phi(x_i) = \alpha_i$, $i=1,\dots,n$, y $\phi(R^{((n))}) = T$.

Recíprocamente, sea $\phi \in \mathrm{End}(R^{((n))})$ tal que $\phi(x_i) = \alpha_i$, $i=1,\dots,n$. Si T es el rango de ϕ y si $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}^m = (o)$, entonces T es un subanillo de $R^{((n))}$ que contiene a $R[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$ y que cumple las condiciones i) y ii) .

5.27 Los R-endomorfismos inyectivos de $R[[x]]$ y de $R^{((n))}$ también los podemos caracterizar. Este es el último paso antes de entrar en el estudio de los R-automorfismos.

Sea $\beta \in R[[x]]$. El próximo teorema establece condiciones necesarias y suficientes para que exista un R-endomorfismo inyectivo ϕ de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$.

Nótese que a partir de los teoremas 4.2 y 4.6 se pueden construir fácilmente R-automorfismos de $R[[x]]$: Si $P \in R[[x]]$ y $o(P) \geqslant 2$, el R-endomorfismo ϕ de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = x + P$, es un R-automorfismo de $R[[x]]$.

El teorema mencionado y su lema previo ilustran bien la forma de trabajo con el subanillo $R[\beta]$ y su topología β-ádica.

5.28 Lema:

Sean R un anillo conmutativo con unidad, $\beta = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x]]$ y sea ψ el R-homomorfismo de $R[x]$ sobre $R[\beta]$ definido por $\psi\left(\sum_{i=0}^{n} r_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} r_i \beta^i$. Entonces ψ es inyectivo si y solo si $\beta - a_0$ es regular en $R[\beta]$.

Para la primera parte, supongamos que ψ es inyectiva y que $\left(\sum_{k=0}^{n} r_k \beta^k\right)(\beta - a_0) = 0$. Debemos probar que $\sum_{k=0}^{n} r_k \beta^k = 0$.

$\psi\left(\left(\sum_{k=0}^{n} r_k x^k\right)(x - a_0)\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} r_k \beta^k\right)(\beta - a_0) = 0$. Como ψ es inyectiva, $\left(\sum_{k=0}^{n} r_k x^k\right)(x - a_0) = 0$. Pero $x - a_0$ es regular en $R[x]$ (Ver [4] pág. 330) ; entonces $\sum_{k=0}^{n} r_k x^k = 0$ y ésto implica que $\sum_{k=0}^{n} r_k \beta^k = 0$.

Supongamos ahora que $\beta - a_0$ es regular en $R[\beta]$. Sea

$f = \sum_{k=0}^{n} r_k x^k \in R[x]$ y supongamos que $\psi(f) = \sum_{k=0}^{n} r_k \beta^k = 0$.

$$\psi(f) = \sum_{k=0}^{n} r_k [\, a_o + (\beta - a_o)\,]^k = \sum_{k=0}^{n} s_k(\beta - a_o)^k = 0 \quad \text{donde}$$

$$s_k = \sum_{j=k}^{n} r_j \binom{j}{k} a_o^{j-k} \quad \text{para cada} \quad k=0,1,2,\ldots,n \;.$$

(Para poder escribir los enteros $\binom{j}{k}$ en esta suma, consideramos al grupo abeliano R como $\mathbb{Z}$-módulo en la forma usual).

Por inducción sobre k, probamos que $s_k = 0$ para $k=0,1,\ldots,n$.

Como $\sum_{k=0}^{n} s_k(\beta - a_o)^k = 0$, $s_o = -\sum_{k=1}^{n} s_k(\beta - a_o)^k$

$= -(\beta - a_o) \sum_{k=1}^{n} s_k(\beta - a_o)^{k-1}$. Como $o(\beta - a_o) \geqslant 1$ y $s_o \in R$, concluimos que $s_o = 0$. Supongamos que $s_k = 0$ para $k = 0,1,\ldots,t-1$. Veamos que $s_t = 0$.

$0 = \sum_{k=0}^{n} s_k(\beta - a_o)^k = (\beta - a_o)^t \sum_{k=t}^{n} s_k(\beta - a_o)^{k-t}$. Como $\beta - a_o$ es regular (hipótesis), $(\beta - a_o)^t$ también es regular y asi

$\sum_{k=t}^{n} s_k(\beta - a_o)^{k-t} = 0$. De esta igualdad vemos que

$$s_t = -\sum_{k=t+1}^{n} s_k(\beta - a_o)^{k-t} = -(\beta - a_o) \sum_{k=t+1}^{n} s_k(\beta - a_o)^{k-t-1} \;.$$

Nuevamente, como $o(\beta - a_o) \geqslant 1$ y $s_t \in R$, concluimos que $s_t = 0$. Queda probado por inducción que $s_k = 0$ para $k = 0,1,\ldots,n$.

Pero $s_n = \sum_{j=n}^{n} r_j \binom{j}{n} a_o^{j-n} = r_n$; luego $r_n = 0$.

Por inducción sobre k probamos que $r_{n-k} = 0$ para $k=0,1,\ldots,n$.

Ya lo tenemos para $k = 0$. Supongamos que $r_{n-k} = 0$ para $k=0,1,\ldots,t-1$.

$$s_{n-t} = \sum_{j=n-t}^{n} r_j \binom{j}{n-t} a_o^{j-(n-t)} = r_{n-t} + r_{n-t+1}(n - t + 1)\, a_o$$

$$+ r_{n-t+2} \frac{(n - t + 2)(n - t + 1)}{2} a_o^2 + \ldots = r_{n-t} \quad \text{por hipótesis de inducción.}$$

Y ya sabíamos que $s_{n-t} = 0$. Por lo tanto $r_k = 0$ para $k=0,1,\ldots,n$ y

así $f = \sum_{k=0}^{n} r_k\, x^k = 0$, lo que implica la inyectividad de ψ . ⁞⁞

5.29 Teorema:

Sean R **un anillo conmutativo con unidad y** $\beta = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x]]$.

Existe un R**-endomorfismo inyectivo** ϕ **de** $R[[x]]$ **tal que** $\phi(x) = \beta$ **si y solo si se cumplen las dos condiciones siguientes:**

i) $\beta - a_o$ **es regular en** $R[\beta]$.

ii) **Existe un subanillo** T **de** $R[[x]]$ **tal que** $(T,(\beta T))$ **es una completación de** $(R[\beta],(\beta R[\beta]))$.

Supongamos que ϕ es un R-endomorfismo inyectivo de $R[[x]]$ tal que

$\phi(x) = \beta$. La función $\psi = \phi|R[x]$ cumple las hipótesis del lema anterior y por tanto $\beta - a_0$ es regular en $R[\beta]$.

Sea $T = \phi(R[[x]])$. Veremos que $(T,(\beta T))$ es una completación de $(R[\beta],(\beta R[\beta]))$. Como ϕ es un isomorfismo sobre T ,

$$(o) = \phi\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (x^n)\Big) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [\phi(x)]^n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\beta^n T) ,$$

y por tanto $(T,(\beta T))$ es Hausdorff. El teorema 5.22 nos dice que $(T,(\beta T))$ satisface las condiciones i) , iii) y iv) de la definición de completación. Probaremos que la topología inducida en $R[\beta]$ por la topología (βT)-ádica y la topología $(\beta R[\beta])$-ádica , son equivalentes:

$$\begin{aligned}(\beta^k T) \cap R[\beta] &= \phi(x^k R[[x]]) \cap \phi(R[x]) \\ &= \phi(x^k R[[x]] \cap R[x]) \\ &= \phi(x^k R[x]) \\ &= \beta^k R[\beta] .\end{aligned}$$

Esta igualdad es suficiente para concluir la equivalencia entre las dos topologías. Nótese el uso que se hace de la inyectividad de ϕ .

Veamos ahora la otra implicación. Si T es un subanillo de $R[[x]]$ tal que $(T,(\beta T))$ es una completación de $(R[\beta],(\beta R[\beta]))$, entonces por teorema 5.6 , existe un R-endomorfismo ϕ de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$. Probaremos que ϕ es inyectivo .

Sea $f = \sum_{i=0}^{\infty} r_i x^i \in R[[x]]$ tal que $\phi(f) = 0$.

Sea $k \in \mathbb{N}_0$; mostraremos que $r_i = 0$ si $i=0,1,\ldots,k$. Como $(T,(\beta T))$ es una completación de $(R[\beta],(\beta R[\beta]))$, la topología inducida en $R[\beta]$ por la topología (βT)-ádica es equivalente a la topología $(\beta R[\beta])$-ádica. Por lo tanto, para $k \in \mathbb{N}_0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$(\beta^m T) \bigcap R[\beta] \subseteq \beta^{k+1}R[\beta]$. Como $\phi(f) = 0$ y $\phi(f) = \lim_n \sum_{i=0}^{n} r_i \beta^i$,

(teorema 5.6 , el límite se toma en $(T,(\beta T))$), existe $N_m \in \mathbb{N}$, $N_m \geqslant k$, tal que $\sum_{i=0}^{n} r_i \beta^i \in (\beta^m T)$ para $n \geqslant N_m$. Como $\sum_{i=0}^{n} r_i \beta^i \in R[\beta]$, entonces $\sum_{i=0}^{n} r_i \beta^i \in \beta^{k+1}R[\beta]$, es decir, $\sum_{i=0}^{n} r_i \beta^i = \beta^{k+1} \sum_{i=0}^{l} s_i \beta^i$ donde $s_i \in R$ para $i=0,1,\ldots,l$.

Como $\beta - a_0$ es regular en $R[\beta]$ y $\psi = \phi | R[x]$ satisface las hipótesis del lema anterior, entonces ψ es inyectivo. Pero
$\sum_{i=0}^{n} r_i \beta^i = \phi\left(\sum_{i=0}^{n} r_i x^i\right) = \phi\left(x^{k+1}\sum_{i=0}^{l} s_i x^i\right)$; luego

$$\sum_{i=0}^{n} r_i x^i = x^{k+1} \sum_{i=0}^{l} s_i x^i$$

y asi $r_i = 0$ para $i=0,1,\ldots,k$. (Recordamos que $n \geqslant N_m \geqslant k$). Como k era arbitrario, se sigue que $r_i = 0$ para cada $i \in \mathbb{N}_0$ y asi $f = 0$.

5.30 Notas:

i) Obsérvese lo natural que es escoger $T = \phi(R[[x]])$ en la primera parte de la prueba:

Por ser ϕ inyectiva, $R[x]$ y $R[\beta] = \phi(R[x])$ son isomorfos; por la misma razón, $R[[x]]$ y $\phi(R[[x]])$ son isomorfos. Además, como $(R[[x]],(x))$ es completación de $(R[x],(x))$, esperamos que sus respectivas imágenes isomorfas por ϕ, conserven entre ellas la misma relación.

ii) La demostración de este teorema es un buen ejemplo de cómo se debe trabajar en $R[\beta]$; cuando se llega a la igualdad

$$\sum_{i=0}^{n} r_i \beta^i = \beta^{k+1} \sum_{i=0}^{l} s_i \beta^i$$

no se puede concluir $r_i = 0$ para $i=0,1,\ldots,k$, como se hubiera podido hacer si se sabe que β es una variable independiente. Tuvimos que llegar a una igualdad semejante en $R[x]$ para poder sacar la conclusión; y para encontrar esta igualdad tuvimos que acudir a la hipótesis $\beta - a_0$ es regular en $R[\beta]$.

5.31 A continuación enunciamos un teorema análogo a 5.29 para $R^{((n))}$.

Sean $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in R^{((n))}$ y sea ψ la función de $R^{(n)}$ en $R^{((n))}$ definida así: si $f = \sum_{j=0}^{k} f_j$ es la descomposición homogénea de un polinomio de $R^{(n)}$, entonces $\psi(f) = \sum_{j=0}^{k} f_j(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ donde

$f_j(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ es la evaluación en $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ de la forma f_j . (Ver 5.24).

La función ψ es el único R-homomorfismo de $R^{(n)}$ en $R^{((n))}$ tal que $\psi(x_i) = \alpha_i$, $i=1,\ldots,n$.

5.32 Teorema:

Sean R un anillo conmutativo con unidad y $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in R^{((n))}$. Existe un R-endomorfismo inyectivo ϕ de $R^{((n))}$ tal que $\phi(x_i) = \alpha_i$ para cada i , si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

i) ψ es inyectiva

ii) Existe un subanillo T de $R^{((n))}$ tal que $(T,\mathfrak{a})$ es una completación de $(R[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]\ ,\ (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)R[\alpha_1,\ldots,\alpha_n])$, donde $\mathfrak{a}$ denota el ideal de T generado por $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$.

Supongamos que ϕ es un R-endomorfismo inyectivo de $R^{((n))}$ tal que $\phi(x_i) = \alpha_i$ para cada i . Como $\phi | R^{(n)} = \psi$, (ver 5.31) , entonces ya tenemos la condición i) .

Sea $T = \phi(R^{((n))})$. Veamos que $(T,\mathfrak{a})$ es una completación de $(R[\alpha_1,\ldots,\alpha_n],$ $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)R[\alpha_1,\ldots,\alpha_n])$, donde $\mathfrak{a}$ denota el ideal de T generado por $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$.

Se cumple la siguiente cadena de igualdades:

$$(o) = \phi\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathfrak{X}^m\right) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} [\phi(\mathfrak{X})]^m = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} [\mathfrak{A}^m] .$$

Esto se debe, en primer lugar, a que ϕ es inyectivo.

Y en segundo lugar a que $\phi(\mathfrak{X}) = \mathfrak{A}$.

Luego $(T,\mathfrak{A})$ es un anillo topológico Hausdorff y con base en el teorema 5.26 , concluimos que $(T,\mathfrak{A})$ satisface las condiciones i), iii) y iv) de la definición de completación.

Pero la condición ii) también se cumple, pues

$$(\mathfrak{A}^m T) \bigcap R[\alpha_1,\dots,\alpha_n] = [\phi(\mathfrak{X})]^m \phi(R^{((n))}) \bigcap \phi(R^{(n)})$$

$$= \phi(\mathfrak{X}^m R^{((n))}) \bigcap \phi(R^{(n)})$$

$$= \phi(\mathfrak{X}^m R^{((n))} \bigcap R^{(n)}) = \phi(\mathfrak{X}^m R^{(n)}) = \phi(\mathfrak{X})^m \phi(R^{(n)})$$

$$= \phi(\mathfrak{X})^m R[\alpha_1,\dots,\alpha_n] = \mathfrak{A}^m R[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$$

$$= (\alpha_1,\dots,\alpha_n)^m R[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$$

Por tanto $(T,\mathfrak{A})$ es una completación de

$(R[\alpha_1,\dots,\alpha_n] , (\alpha_1,\dots,\alpha_n) R[\alpha_1,\dots,\alpha_n])$.

La prueba de la otra implicación es análoga a la de 5.29 y la omitimos. ⁞⁞⁞

De 5.26 y 5.32 se deduce la siguiente caracterización para R-automorfismos de $R^{((n))}$.

5.33 Teorema:

Sean R un anillo conmutativo con unidad y $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in R^{((n))}$. Existe un R-automorfismo ϕ de $R^{((n))}$ tal que $\phi(x_i) = \alpha_i$ para cada i si y solo si $(R^{((n))},(\alpha_1,\dots\alpha_n))$ es una completación de $(R[\alpha_1,\dots,\alpha_n], (\alpha_1,\dots,\alpha_n) R[\alpha_1,\dots,\alpha_n])$ y el único R-homomorfismo ψ de $R^{(n)}$ en $R^{((n))}$ tal que $\psi(x_i) = \alpha_i$ para cada i, es inyectivo.

Si ϕ es un R-automorfismo de $R^{((n))}$ tal que $\phi(x_i) = \alpha_i$ para cada i, el teorema 5.32 dice que $(R^{((n))},(\alpha_1,\dots,\alpha_n))$ es una completación de $(R[\alpha_1,\dots,\alpha_n], (\alpha_1,\dots,\alpha_n) R[\alpha_1,\dots,\alpha_n])$ y que $\psi = \phi \mid R^{(n)}$ es inyectivo.

Recíprocamente, supongamos que $(R^{((n))},(\alpha_1,\dots,\alpha_n))$ es una completación de $(R[\alpha_1,\dots,\alpha_n], (\alpha_1,\dots,\alpha_n) R[\alpha_1,\dots,\alpha_n])$ y que el único R-homomorfismo ψ de $R^{(n)}$ en $R^{((n))}$ tal que $\psi(x_i) = \alpha_i$ es inyectivo.

Por teorema 5.26, existe un único R-endomorfismo sobreyectivo ϕ de $R^{((n))}$ tal que $\phi(x_i) = \alpha_i$. La función $\phi \mid R^{(n)}$ tiene que ser igual a ψ y por tanto es inyectiva. Aplicando nuevamente el teorema 5.32, concluimos que ϕ es inyectiva. ⁞⁞⁞

5.34 Observación:

He aqui un punto culminante en este trabajo: una caracterización de los R-automorfismos de $R^{((n))}$. Y está basada en el concepto de completación, uno de los más importantes en el estudio de anillos topológicos.

Para trabajar casos particulares, es difícil usar el teorema 5.33 y se ha vuelto necesario buscar otras caracterizaciones para R-automorfismos de $R^{((n))}$. Inclusive, varios resultados teóricos se han obtenido solo a partir de otros enfoques del tema; uno de ellos es la respuesta a la pregunta de si los R-endomorfismos sobreyectivos de $R^{((n))}$ son inyectivos. (Ver [5] pág. 33 y 41).

Para estudiar otros aspectos sobre R-endomorfismos de $R^{((n))}$ se recomienda consultar el artículo [5] de la bibliografía.

6. R-automorfismos de $R[[x]]$

La caracterización de los R-automorfismos de $R[[x]]$ la hacemos de dos maneras distintas.

En primer lugar consideramos R-endomorfismos ψ de $R[[x]]$ tales que $\psi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, donde $\bigcap_{i=1}^{\infty} (b_o)^i = (o)$. Apoyados en los resultados que se obtienen por este camino, determinamos en segundo lugar los R-automorfismos ψ de $R[[x]]$ tales que $\psi(x) = \beta$ sin condiciones preestablecidas sobre el término constante de β.

6.1 Utilizando las funciones $\pi_k : R[[x]] \longrightarrow R$ definidas en 5.8, obtenemos el siguiente lema:

6.1.1 Lema:

Sean R **un anillo conmutativo con identidad,** $g \in R[[x]]$ **y** $o(g) > k$ **. Entonces:**

i) **Para cada** $f \in R[[x]]$, $\pi_k(gf) = 0$

ii) **Para cada** $f \in R[[x]]$, $\pi_k((f+g)^i) = \pi_k(f^i)$.

Sean $g = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ con $b_i = 0$ si $0 \leqslant i \leqslant k$ y $f = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$.

$$gf = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n \quad \text{donde} \quad h_n = \sum_{i+j=n} b_i c_j \ .$$

$$\pi_k(gf) = h_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leqslant i \leqslant k \\ 0 \leqslant j \leqslant k}} b_i c_j = 0$$ y se tiene i) .

Por lema 5.9 parte a) , $\pi_k((f+g)^i)$ es una suma de términos y cada uno de ellos consiste en un producto de i elementos del conjunto $\{ b_o + c_o , b_1 + c_1 , \dots , b_k + c_k \} = \{ c_o , \dots , c_k \}$; por tanto $\pi_k((f+g)^i) = \pi_k(f^i)$. ⁞⁞⁞

El teorema siguiente es intuitivamente muy claro; dice que si en una serie formal f de $R[[x]]$ se remplaza x por $a_o + x$ y a la serie resultante se le remplaza x por la serie g , se obtiene la misma serie que si se cambia directamente en f a x por $a_o + g$.

La prueba del teorema se encarga de recordar el trabajo teórico que hay por debajo de todo R-endomorfismo sustitución en $R[[x]]$.

6.1.2 Teorema:

Sean R un anillo conmutativo con identidad, $a_o \in R$,

$g = \sum_{i=0}^{\infty} g_i x^i \in R[[x]]$ con $g_o \in (a_o)$ y supongamos que $(R,(a_o))$ es

Hausdorff y completo. Sean ψ , $\mathfrak{C}$ y ϕ los R-endomorfismos de $R[[x]]$ definidos asi:

$\psi(f) = f(a_0 + g)$, $\mathfrak{C}(f) = f(a_0 + x)$, $\phi(f) = f(g)$ para cada $f \in R[[x]]$.

Entonces $\psi = \phi \circ \mathfrak{C}$.

Sea $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \in R[[x]]$. Para probar que $\psi(f) = (\phi \circ \mathfrak{C})(f)$,

debemos mostrar que $\pi_k(\psi(f)) = \pi_k(\phi \circ \mathfrak{C}(f))$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$.

Sea $k \in \mathbb{N}_0$ fijo; para cada $i \in \mathbb{N}_0$, definimos $f^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} f_j x^j$.

Por teorema 5.10 , $\psi(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{p}_j x^j$, donde $\overline{p}_j = \lim_i \pi_j(f^{(i)}(a_0 + g))$

para cada $j \in \mathbb{N}_0$.

También $t = \mathfrak{C}(f) = f(a_0 + x) = \sum_{j=0}^{\infty} t_j x^j$, donde

$t_j = \sum_{r=j}^{\infty} f_r \binom{r}{j} a_0^{r-j}$ para cada $j \in \mathbb{N}_0$:

$$f(a_0 + x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(a_0 + x)^j = f_0 + f_1(a_0 + x) + \dots + f_n(a_0 + x)^n + \dots$$

$$= f_0 + f_1 a_0 + f_2 a_0^2 + \dots$$

$$+ (f_1 + 2 f_2 a_0 + 3 f_3 a_0^2 + \dots) x$$

$$+ (f_2 + \binom{3}{2} f_3 a_0 + \binom{4}{2} f_4 a_0^2 + \dots) x^2$$

$$+ \dots$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} f_r a_o^r + \left(\sum_{r=1}^{\infty} f_r \binom{r}{o} a_o^{r-1} \right) x + \dots + \left(\sum_{r=j}^{\infty} f_r \binom{r}{j} a_o^{r-j} \right) x^j$$

$$+ \dots$$

Los coeficientes binomiales se pueden escribir porque implícitamente se cuenta con la estructura de $\mathbb{Z}$-módulo de R.

Por tanto $\phi \circ \mathcal{C}(f) = \phi(\mathcal{C}(f)) = \phi\left(\sum_{j=0}^{\infty} t_j x^j \right) = \phi(t) = t(g) = \sum_{r=0}^{\infty} s_r x^r$,

donde $s_r = \lim_i \pi_r(t^{(i)}(g))$ para cada $r \in \mathbb{N}_o$.

Luego $\pi_k(\psi(f) - \phi \circ \mathcal{C}(f)) = \overline{p_k} - s_k$

$$= \lim_i \pi_k(f^{(i)}(a_o + g)) - \lim_i \pi_k(t^{(i)}(g))$$

$$= \lim_i \pi_k(f^{(i)}(a_o + g) - t^{(i)}(g)) .$$

Para mostrar que $\psi(f) - \phi \circ \mathcal{C}(f) = 0$, probamos que este último límite es cero.

Sea (a_o^s) una vecindad de cero; veremos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\pi_k \left[f^{(n)}(a_o + g) - t^{(n)}(g) \right] \in (a_o^s)$ para $n \geqslant N$.

Sea $N = k + s$ y fijemos $h \geqslant N$. Entonces

$t_h = \sum_{r=h}^{\infty} f_r \binom{r}{h} a_o^{r-h}$. Si $\sigma_i = \sum_{r=i}^{s+i-1} f_r \binom{r}{i} a_o^{r-i}$ para cada i

entre o y h, por definición de t_i tenemos que

$$t_i - \alpha_i = \sum_{r=i}^{\infty} f_r \binom{r}{i} a_o^{r-i} - \sum_{r=i}^{s+i-1} f_r \binom{r}{i} a_o^{r-i}$$

$$= \sum_{r=s+i}^{\infty} f_r \binom{r}{i} a_o^{r-i} \in (a_o^s) \text{ . Por tanto } \pi_k\left[f^{(h)}(a_o + g) - t^{(h)}(g)\right]$$

$$= \pi_k\left[f^{(h)}(a_o + g) - \sum_{i=0}^{h} t_i\, g^i\right]$$

$$= \pi_k\left[f^{(h)}(a_o + g) - \sum_{i=0}^{h} (\alpha_i + (t_i - \alpha_i))g^i\right]$$

$$= \pi_k\left[f^{(h)}(a_o + g) - \sum_{i=0}^{h} \alpha_i\, g^i - \sum_{i=0}^{h} (t_i - \alpha_i)\, g^i\right]$$

$$= \pi_k\left[f^{(h)}(a_o + g) - \sum_{i=0}^{h} \alpha_i\, g^i\right] + \pi_k\left[\sum_{i=0}^{h} (\alpha_i - t_i)\, g^i\right]$$

$$= \pi_k\left[f^{(h)}(a_o + g) - \sum_{i=0}^{h} \alpha_i\, g^i\right] + \sum_{i=0}^{h} (\alpha_i - t_i)\, \pi_k(g^i) \text{ .}$$

Como $\alpha_i - t_i \in (a_o^s)$ para $i=0,1,\ldots,h$, $\sum_{i=0}^{h} (\alpha_i - t_i)\, \pi_k(g^i) \in (a_o^s)$.

Luego para mostrar que $\pi_k\left[f^{(h)}(a_o + g) - t^{(h)}(g)\right] \in (a_o^s)$ es suficiente probar que $\pi_k\left[f^{(h)}(a_o + g) - \sum_{i=0}^{h} \alpha_i\, g^i\right] \in (a_o^s)$.

Sean $p = g_o + g_1 x + \ldots + g_k x^k$ y $q = \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i\, x^i$.

Como $o(q) > k$, $o(q^v) > k$ si $v > 0$ y entonces $\pi_k(q^v) = 0$.

Por lema anterior, $\pi_k\left[f^{(h)}(a_o + g)\right] = \pi_k\left[f^{(h)}((a_o + p) + q)\right]$

$$= \pi_k \left[\sum_{i=0}^{h} f_i \left[(a_o + p) + q \right]^i \right] = \sum_{i=0}^{h} f_i \, \pi_k \left[\left[(a_o + p) + q \right]^i \right]$$

$$= \sum_{i=0}^{h} f_i \, \pi_k \left[(a_o + p)^i \right] = \pi_k \left[f^{(h)}(a_o + p) \right] .$$ Además,

$$\pi_k(\alpha_i \, g^i) = \pi_k(\alpha_i (p + q)^i) = \alpha_i \, \pi_k \left[(p + q)^i \right] = \alpha_i \, \pi_k(p^i)$$

$= \pi_k(\alpha_i \, p^i)$ para cada $i \in \mathbb{N}_o$, aplicando también el lema anterior.

Por tanto, para mostrar que $\pi_k \left[f^{(h)}(a_o + g) - \sum_{i=0}^{h} \alpha_i \, g^i \right] \in (a_o^s)$,

es suficiente mostrar que $\pi_k \left[f^{(h)}(a_o + p) - \sum_{i=0}^{h} \alpha_i \, p^i \right] \in (a_o^s)$ (1)

Ahora, $f^{(h)}(a_o + p) = \sum_{i=0}^{h} f_i(a_o + p)^i = \sum_{i=0}^{h} \left(\sum_{j=i}^{h} f_j \binom{j}{i} a_o^{j-i} \right) p^i$

Y también $\sum_{i=0}^{h} \alpha_i \, p^i = \sum_{i=0}^{h} \left(\sum_{j=1}^{s+i-1} f_j \binom{j}{i} a_o^{j-i} \right) p^i$ por definición de α_i . Por tanto $f^{(h)}(a_o + p) - \sum_{i=0}^{h} \alpha_i \, p^i$

$$= \sum_{i=0}^{h} \left(\sum_{j=i}^{h} f_j \binom{j}{i} a_o^{j-i} \right) p^i - \sum_{i=0}^{h} \left(\sum_{j=i}^{s+i-1} f_j \binom{j}{i} a_o^{j-i} \right) p^i$$

$$= \sum_{i=0}^{h} \left(\sum_{j=i}^{h} f_j \binom{j}{i} a_o^{j-i} - \sum_{j=i}^{s+i-1} f_j \binom{j}{i} a_o^{j-i} \right) p^i$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{h} f_j \binom{j}{o} a_o^{j-o} - \sum_{j=0}^{s-1} f_j \binom{j}{o} a_o^{j-o} \right)$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{h} f_j \binom{j}{1} a_o^{j-1} - \sum_{j=1}^{s} f_j \binom{j}{1} a_o^{j-1} \right) p$$

$$+ \dots$$

$$+ \left(\sum_{j=h-s}^{h} f_j \binom{j}{h-s} a_o^{j-(h-s)} - \sum_{j=h-s}^{h-1} f_j \binom{j}{h-s} a_o^{j-(h-s)} \right) p^{h-s}$$

$$+ \left(\sum_{j=h-s+1}^{h} f_j \binom{j}{h-s+1} a_o^{j-(h-s+1)} - \sum_{j=h-s+1}^{h} f_j \binom{j}{h-s+1} a_o^{j-(h-s+1)} \right) p^{h-s+1}$$

$$+ \left(\sum_{j=h-s+2}^{h} f_j \binom{j}{h-s+2} a_o^{j-(h-s+2)} - \sum_{j=h-s+2}^{h+1} f_j \binom{j}{h-s+2} a_o^{j-(h-s+2)} \right) p^{h-s+2}$$

$$+ \dots$$

$$+ \left(\sum_{j=h-1}^{h} f_j \binom{j}{h-1} a_o^{j-(h-1)} - \sum_{j=h-1}^{s+h-2} f_j \binom{j}{h-1} a_o^{j-(h-1)} \right) p^{h-1}$$

$$+ \left(\sum_{j=h}^{h} f_j \binom{j}{h} a_o^{j-h} - \sum_{j=h}^{s+h-1} f_j \binom{j}{h} a_o^{j-h} \right) p^{h}$$

$$= \left(\sum_{j=s}^{h} f_j \binom{j}{o} a_o^{j} \right)$$

$$+ \left(\sum_{j=s+1}^{h} f_j \binom{j}{1} a_o^{j-1} \right) p$$

$$+ \dots$$

$$+ \left(\sum_{j=h}^{h} f_j \binom{j}{h-s} a_o^{j-(h-s)} \right) p^{h-s}$$

$$+ 0$$

$$- \left(\sum_{j=h+1}^{h+1} f_j \binom{j}{h-s+2} a_o^{j-(h-s+2)} \right) p^{h-s+2}$$

$$- \dots$$

$$- \left(\sum_{j=h+1}^{s+h-2} f_j \binom{j}{h-1} a_o^{j-(h-1)} \right) p^{h-1}$$

$$- \left(\sum_{j=h+1}^{s+h-1} f_j \binom{j}{h} a_o^{j-h} \right) p^{h}$$

$$= \sum_{i=0}^{h-s} \left(\sum_{j=s+i}^{h} f_j \binom{j}{i} a_o^{j-i} \right) p^i - \sum_{i=h-s+2}^{h} \left(\sum_{j=h+1}^{s+i-1} f_j \binom{j}{i} a_o^{j-i} \right) p^i$$

Para $o \leqslant i \leqslant h-s$, $\sum_{j=s+i}^{h} f_j \binom{j}{i} a_o^{j-i} \in (a_o^s)$; luego

$$\pi_k \left[\sum_{i=0}^{h-s} \left(\sum_{j=s+i}^{h} f_j \binom{j}{i} a_o^{j-i} \right) p^i \right] \in (a_o^s) \tag{2}$$

También:

$$\pi_k \left[\sum_{i=h-s+2}^{h} \left(\sum_{j=h+1}^{s+i-1} f_j \binom{j}{i} a_o^{j-i} \right) p^i \right]$$

$$= \sum_{i=h-s+2}^{h} \left(\sum_{j=h+1}^{s+i-1} f_j \binom{j}{i} a_o^{j-i} \right) \pi_k(p^i)$$ y como $h-s+2 \leqslant i \leqslant h$

y $h \geqslant k+s$, entonces $i > k$; luego por lema 5.9 , $\pi_k(p^i) = \pi_k(p^{(i-k)+k})$

$\in (a_o)^{i-k}$ para cada i .

Además, como $j \geqslant h+1$ y $h \geqslant k+s$,

$$\left(\sum_{j=h+1}^{s+i-1} f_j \binom{j}{i} a_o^{j-i} \right) \pi_k(p^i) \in (a_o^{h+1-i})(a_o^{i-k}) = (a_o^{h+1-k}) \subseteq (a_o^s) .$$

Concluimos entonces que

$$\pi_k \left[\sum_{i=h-s+2}^{h} \left(\sum_{j=h+1}^{s+i-1} f_j \binom{j}{i} a_o^{j-i} \right) p^i \right] \in (a_o^s) \tag{3}$$

De (2) y (3) se deduce (1) y con ésto termina la prueba. ⁞⁞⁞

El resultado que buscamos es del mismo estilo del teorema 4.6 ; el lema siguiente es una primera extensión de ese teorema y aparte de servir para probar otros resultados, también nos permite concluir que el R-endomorfismo sustitución ψ de $R[[x]]$ supuesto al principio del capítulo 3 , es en efecto, un automorfismo de $R[[x]]$.

6.1.3 Lema:

Sean R **un anillo conmutativo con identidad,** $a_o \in R$ **y supongamos que** $(R,(a_o))$ **es un espacio Hausdorff completo. Si** ζ **es el R-endomorfismo de** $R[[x]]$ **tal que** $\zeta(x) = a_o + x$ **, entonces** ζ **es biyectivo.**

Para probar esta biyectividad, mostramos que μ , el R-endomorfismo de $R[[x]]$ tal que $\mu(x) = -a_o + x$, es función inversa para ζ . Es decir, que si I es la identidad en $R[[x]]$, entonces $\mu \circ \zeta = \zeta \circ \mu = I$.

Si $g = -a_o + x$, entonces, en la notación del teorema 6.1.2 tenemos que $\psi = I$ y $\phi = \mu$. Luego $I = \mu \circ \zeta$.

Para mostrar que $I = \complement \circ \mu$, observamos que si ψ^*, $\complement^*$ y ϕ^* son los R-endomorfismos de $R[[x]]$ definidos por $\psi^*(f) = f(-a_0 + g)$, $\complement^*(f) = f(-a_0 + x)$ y $\phi^*(f) = f(g) = \phi(g)$, donde $\pi_0(g) \in (a_0)$, entonces $\psi^* = \phi^* \circ \complement^*$.

Si $g = a_0 + x$, entonces $\psi^* = I$, $\phi^* = \complement$ y $\complement^* = \mu$. Por tanto $I = \complement \circ \mu$. ⁞⁞⁞

El teorema 6.1.2 y el lema 6.1.3 nos permiten encontrar un resultado que es extensión para series formales de su análogo para polinomios. (Ver lema 1.2).

6.1.4 Teorema:

Sean R un anillo conmutativo con identidad,

$$\beta = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in R[[x]]$$ **y supongamos que $(R,(b_0))$ es Hausdorff completo. Si ϕ_β y $\phi_{\beta-b_0}$ denotan los R-endomorfismos de $R[[x]]$ tales que $\phi_\beta(x) = \beta$ y $\phi_{\beta-b_0}(x) = \beta - b_0$, entonces:**

i) **ϕ_β es sobreyectivo si y solo si $\phi_{\beta-b_0}$ es sobreyectivo.**

ii) **ϕ_β es inyectivo si y solo si $\phi_{\beta-b_0}$ es inyectivo.**

Sea $g = \beta - b_0$. En la notación del teorema 6.1.2 tenemos que $\phi_\beta(f) = f(b_0 + g) = \psi(f)$ y $\phi_{\beta-b_0}(f) = f(g) = \phi(f)$; por tanto $\phi_\beta = \phi_{\beta-b_0} \circ \complement$.

Por lema 6.1.3 , $\mathcal{C}$ tiene inversa $\mathcal{C}^{-1}$ y entonces claramente, se cumplen i) y ii) . ⁞⁞⁞

El teorema siguiente nos muestra que para ciertos R-endomorfismos de $R[[x]]$, ser sobreyectivos es condición suficiente para ser biyectivos.

6.1.5 Teorema:

Sean R un anillo conmutativo con identidad y

$\beta = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in R[[x]]$. **Supongamos que $(R,(b_0))$ es un anillo topológico Hausdorff y que ψ es un R-endomorfismo de $R[[x]]$ tal que $\psi(x) = \beta$. Entonces:**

i) ψ es sobreyectivo si y solo si b_1 es una unidad de R .

ii) Si b_1 es una unidad de R , entonces ψ es inyectivo.

Por teorema 5.20 , R es completo en la topología (b_0)-ádica y ψ es el único R-endomorfismo ϕ_β de $R[[x]]$ tal que $\phi_\beta(x) = \beta$.

El teorema 4.3 y el teorema 6.1.4 nos permiten concluir i) ; el lema 4.4 y nuevamente el teorema 6.1.4 , nos dicen que ii) es cierto. ⁞⁞⁞

6.1.6 Nota:

Son varias las estructuras algebraicas en donde la sobreyectividad de algunos endomorfismos es condición suficiente para su inyectividad.

Ejemplos cercanos a este trabajo se presentan en los anillos de polinomios en una o varias variables. Un estudio sistemático de estos y otros ejemplos, se puede ver en [13] pág. 4 y siguientes.

El teorema siguiente es un punto culminante en este trabajo y ya sabemos que su sencillez es solo aparente. Es una consecuencia inmediata del teorema 6.1.5.

6.1.7 Teorema:

Sean R un anillo conmutativo con identidad y

$\beta = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in R[[x]]$ **; supongamos que** $\bigcap_{n=1}^{\infty} (b_o^n) = (o)$ **y que** ψ **es un** R-**endomorfismo de** $R[[x]]$ **tal que** $\psi(x) = \beta$ **. Entonces:** ψ **es un automorfismo si y solo si** b_1 **es una unidad de** R.

6.1.8 Nota:

Esta es la última extensión del teorema 4.6 . A semejanza de 1.8. y 4.6 , el coeficiente de x debe ser una unidad de R ; pero ahora se necesitan condiciones sobre el término independiente y no se necesitan sobre los demás coeficientes.

6.2 Los dos enfoques para el estudio de los R-endomorfismos de $R[[x]]$ se mezclan ahora. Sea $\beta = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$; los resultados siguientes muestran que el uso de la topología (a_o)-ádica es necesario para conseguir conclusiones fundamentales relativas a un R-endomorfismo ϕ de $R[[x]]$

tal que $\phi(x) = \beta$, cuando se estudia utilizando topologías (β)-ádicas. Los resultados finales tienen la ventaja de no exigir condiciones especiales para el término constante de β .

Recordamos que el **radical de Jacobson** J de un anillo R es la intersección de todos los ideales maximales de R . Se puede caracterizar como sigue: $x \in J$ si y solo si $1 - xy$ es una unidad de R para todo $y \in R$. (Ver [1] pág. 6) .

6.2.1 Lema:

Sean R un anillo conmutativo con identidad y ψ un R-endomorfismo de $R[[x]]$ tal que $\psi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$. Entonces b_0 está en el radical de Jacobson de R .

Como las unidades en $R[[x]]$ son las series formales con una unidad de R como término constante, (ver 4.1), entonces para todo $r \in R$, $1 + rx$ es una unidad de $R[[x]]$. Como ψ es un R-endomorfismo de $R[[x]]$, $\psi(1 + rx) = 1 + r\psi(x) = 1 + rb_0 + r \sum_{i=1}^{\infty} b_i x^i$ es una unidad de $R[[x]]$ para todo $r \in R$; por tanto $1 + rb_0$ es una unidad de R para todo $r \in R$ y ésto dice que b_0 está en el radical de Jacobson de R . (Ver [1] pág. 6). ▓

En el lema siguiente se generaliza uno de los resultados de 6.1.5 , pues en su hipótesis no se exigen condiciones para el término constante de β. El poderoso método algebraico de pasar a un anillo cociente, muestra aqui nuevamente su efectividad; recordamos que con este mismo método se puede probar uno de los resultados centrales de la primera parte de este trabajo, el teorema 1.7. (Ver [4] pág. 329)

Finalmente anotamos que es a través de este lema que las caracterizaciones para R-automorfismos de $R[[x]]$ que veremos después, dependen del teorema 6.1.5 .

6.2.2 Lema:

Sean R **un anillo conmutativo con identidad,**

$\beta = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x]]$ **y** $\mathfrak{a} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (a_0^n)$. **Si existe un** R-**endomorfismo sobreyectivo** ϕ **de** $R[[x]]$ **tal que** $\phi(x) = \beta$, **entonces** a_1 **es una unidad de** R .

Podemos definir una función ϕ^* de $(R/\mathfrak{a})[[x]]$ en si mismo, de la siguiente manera:

Sea $f' = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{f_i}\, x^i \in (R/\mathfrak{a})[[x]]$; con base en f' construimos $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \in R[[x]]$. Para f existe $g = \sum_{i=0}^{\infty} g_i x^i \in R[[x]]$ tal que $\phi(f) = g$.

Definimos $\phi^*(f') = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{g_i}\, x^i$. Veamos que está bien definida.

Sean $f' = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{f_i}\, x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{h_i}\, x^i = h'$ y supongamos que

$\phi\left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i\, x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i\, x^i$ y $\phi\left(\sum_{i=0}^{\infty} h_i\, x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} t_i\, x^i$.

Debemos probar que $\overline{g_i} = \overline{t_i}$ para cada $i \in \mathbb{N}_o$, es decir, que

$g_i - t_i \in \mathfrak{a} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (a_o^n)$.

Sea $n \in \mathbb{N}$; como $\overline{f_i} = \overline{h_i}$ para cada i , $f_i - h_i \in \mathfrak{a}$ y en particular $f_i - h_i \in (a_o^n)$ para cada i .

Sea $f_i - h_i = r_i\, a_o^n$ para cada i . Entonces

$$\phi\left(\sum_{i=0}^{\infty} (f_i - h_i)\, x^i\right) = \phi\left(\sum_{i=0}^{\infty} r_i\, a_o^n\, x^i\right) = a_o^n\, \phi\left(\sum_{i=0}^{\infty} r_i\, x^i\right)$$

Pero también $\phi\left(\sum_{i=0}^{\infty} (f_i - h_i)\, x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} (g_i - t_i)\, x^i$

Luego $g_i - t_i \in (a_o^n)$ para cada $i \in \mathbb{N}_o$. Como n es arbitrario, concluimos que $g_i - t_i \in \mathfrak{a}$.

En segundo lugar, mostramos que ϕ^* es un $(R/\mathfrak{a})$-endomorfismo de $(R/\mathfrak{a})[[x]]$.

$\phi^*(\overline{r}) = \overline{\phi(r)} = \overline{r}$ para todo $r \in R$.

Ahora: sean $f_1' = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{f_{1i}}\, x^i$, $f_2' = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{f_{2i}}\, x^i$; luego

$f_1 = \sum_{i=0}^{\infty} f_{1i}\, x^i$, $f_2 = \sum_{i=0}^{\infty} f_{2i}\, x^i$; $\phi(f_1) = g_1 = \sum_{i=0}^{\infty} g_{1i}\, x^i$,

$\phi(f_2) = g_2 = \sum_{i=0}^{\infty} g_{2i}\, x^i$. Por tanto $\phi^*(f_1') = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{g_{1i}}\, x^i$ y

$$\phi^*(f_2') = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{g_{2i}}\, x^i$$

$$\phi^*(f_1' + f_2') = \sum_{i=0}^{\infty} (\overline{g_{1i} + g_{2i}})\, x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{g_{1i}}\, x^i + \sum_{i=0}^{\infty} \overline{g_{2i}}\, x^i$$

$$= \phi^*(f_1') + \phi^*(f_2') .$$

Sea $f_1\, f_2 = h = \sum_{i=0}^{\infty} h_i\, x^i$.

$$\phi(h) = \phi(f_1\, f_2) = \phi(f_1)\, \phi(f_2) = g_1\, g_2 = \sum_{i=0}^{\infty} p_i\, x^i$$

donde $p_i = \sum_{j+k=i} g_{1j}\, g_{2k}$.

$$\phi^*(f_1')\, \phi^*(f_2') = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \overline{g_{1i}}\, x^i \right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \overline{g_{2i}}\, x^i \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \overline{p_i}\, x^i = \phi^*(f_1' f_2') .$$

Nótese que $\phi^*(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{a_i}\, x^i$, que si ϕ es sobreyectivo entonces

ϕ^* es sobreyectivo y que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\bar{a}_0)^n = (\bar{o})$. Es decir, el $(R/\mathfrak{a})$-endomorfismo de $(R/\mathfrak{a})[[x]]$ satisface las hipótesis del teorema 6.1.5 y podemos concluir que a_1 es una unidad de $R/\mathfrak{a}$. Luego existe $\bar{u}$, una unidad de $R/\mathfrak{a}$, tal que $\bar{u}\,\bar{a}_1 = \bar{1}$ o equivalentemente, $u\,a_1 - 1 \in \mathfrak{a}$. Por tanto $u\,a_1 - 1 = r\,a_0$, donde $r \in R$. Pero el lema 6.2.1 dice que a_0 está en el radical de Jacobson de R y por tanto $u\,a_1 = 1 + r\,a_0$ es una unidad de R . (Ver [1] pág. 6). Esto dice que a_1 es unidad de R y asi termina la prueba. ⁞⁞

6.2.3 Lema:

Sean R un anillo conmutativo con identidad y $\beta = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x]]$, donde a_1 es una unidad de R . Existe un R-endomorfismo (R-automorfismo) ϕ de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$ si y solo si existe un R-endomorfismo (R-automorfismo) ρ de $R[[x]]$ tal que $\rho(x) = a_0 - x$.

Supongamos que existe un R-endomorfismo ϕ de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$. Como a_1 es unidad de R , existe un R-automorfismo Γ de $R[[x]]$ tal que $\Gamma(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-a_i)\, x^i = a_0 - \beta$. (Ver teorema 4.6).

Luego $\Gamma^{-1}(a_0 - \beta) = x$; además, $\rho = \Gamma^{-1} \circ \phi$ es un R-endomorfismo de $R[[x]]$ tal que $\rho(x) = \Gamma^{-1}(a_0 + (\beta - a_0)) = a_0 - \Gamma^{-1}(a_0 - \beta) = a_0 - x$.

Si ϕ es un automorfismo, claramente ρ es un automorfismo.

Recíprocamente, supongamos que existe un R-endomorfismo ρ de $R[[x]]$ tal que $\rho(x) = a_0 - x$. La función $\phi = \tau \circ \rho$, donde τ es el automorfismo definido antes, es un R-endomorfismo de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$. Además, si ρ es un automorfismo, ϕ también lo es. ⁞⁞⁞

6.2.4 Lema:

Sea R un anillo conmutaivo con identidad; supongamos que existen R-endomorfismos ϕ_1 y ϕ_2 de $R[[x]]$ tales que $[\phi_1 \circ \phi_2](x) = [\phi_2 \circ \phi_1](x) = x$. Entonces ϕ_1 y ϕ_2 son automorfismos y son inversos uno del otro.

Es suficiente probar la última afirmación.

Sea $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \in R[[x]]$.

$$\phi_1 \circ \phi_2(f) = \phi_1\left(\phi_2\left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i\right)\right) = \phi_1\left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i(\phi_2(x))^i\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\phi_1 \circ \phi_2(x))^i = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i = f .$$

Análogamente se ve que $\phi_2 \circ \phi_1 = I$ ⁞⁞⁞

6.2.5 Observación:

Nótese que en la prueba anterior es esencial la continuidad estudiada en la proposición 5.4 .

6.2.6 Corolario:

Sea R un anillo conmutativo con identidad y supongamos que existe un R-endomorfismo ρ de $R[[x]]$ tal que $\rho(x) = a_0 - x$. Entonces ρ es un automorfismo.

Como $\rho \circ \rho(x) = a_0 - (a_0 - x) = x$, el lema 6.2.4 permite obtener la conclusión buscada. Obsérvese además que ρ es su propio inverso. ⁞⁞

Los tres teoremas siguientes establecen propiedades que caracterizan a los R-automorfismos ϕ de $R[[x]]$ cuando no se exigen condiciones para el término constante de $\phi(x)$.

6.2.7 Teorema:

Sean R un anillo conmutativo con identidad y

$\beta = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x]]$. Entonces existe un R-automorfismo ϕ de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$ si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

i) $(R[[x]], (\beta))$ es un espacio Hausdorff completo.

ii) a_1 es una unidad de R.

Además, cuando existe un automorfismo ϕ con estas características, es único e igual a ϕ_β.

Supongamos que ϕ es un R-automorfismo de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$.

La condición i) se deduce del teorema 5.29 y la condición ii) a partir del lema 6.2.2 .

Recíprocamente, supongamos que se cumplen las condiciones i) y ii) . Por teorema 5.6 , existe un R-endomorfismo ϕ de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$; por lema 6.2.3 existe un R-endomorfismo ρ de $R[[x]]$ tal que $\rho(x) = a_0 - x$, que es un automorfismo según corolario 6.2.6 .

Finalmente, utilizando otra vez el lema 6.2.3 , vemos que ϕ es un automorfismo.

La unicidad del automorfismo ϕ está explicada en la observación 5.5 . ▦

6.2.8 Nota:

Si la condición i) se remplaza por la condición siguiente:

i') Existe un R-endomorfismo ϕ de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$.

Entonces a partir de i') y ii) se puede probar que ϕ es un automorfismo; basta con repetir la última parte de la prueba del teorema anterior.

El teorema siguiente agrupa importantes resultados sobre R-endomorfismos sobreyectivos o inyectivos de $R[[x]]$. Depende directamente del lema 6.2.2 y por tanto del teorema 6.1.5 .

Resaltamos en él, que no se piden condiciones sobre el término constante de la serie formal β .

6.2.9 Teorema:

Sean R un anillo conmutativo con identidad y

$\beta = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x]]$. Supongamos que ϕ es un R-endomorfismo de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$. Entonces:

i) ϕ es sobreyectivo si y solo si a_1 es una unidad de R .

ii) Si ϕ es sobreyectivo entonces ϕ es inyectivo.

iii) ϕ es un automorfismo si y solo si a_1 es una unidad de R .

La prueba de i) es usar el lema 6.2.2 para una implicación y la nota 6.2.8 para la otra.

Probar ii) es repetir nuevamente el argumento de la nota 6.2.8 .

Finalmente, usando i) y ii) se deduce iii) . ⁞⁞⁞

6.2.10 Observaciones:

Miremos de nuevo las introducciones de los capítulos 3 y 5 .

En la introducción del capítulo 3 , notábamos la aparición de las sumas infinitas $\sum_{i=0}^{\infty} c_i b^i$ donde $c_i \in R$ y b es el término constante de la imagen de x por un endomorfismo supuesto. Este hecho muestra intuitivamente la necesidad de tener a $(R,(b))$ Hausdorff y completo.

Similarmente, en la introducción del capítulo 5 , las sumas infinitas que aparecían eran de la forma $\sum_{i=0}^{\infty} f_i \beta^i$ con $\beta \in R[[x]]$ y $f_i \in R$; ésto, intuitivamente, nos obligaba a pensar en que $(R[[x]],(\beta))$ debía ser Hausdorff y completo.

El teorema 6.1.7 nos dice que si $(R,(b_0))$ es Hausdorff y suponemos la existencia de un R-endomorfismo ψ de $R[[x]]$ tal que $\psi(x) = \beta = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, entonces: ψ es un R-automorfismo de $R[[x]]$ si y solo si b_1 es una unidad de R . ¿Qué pasó con la completez de $(R,(b_0))$? El teorema 5.20 responde esta pregunta: la existencia del R-endomorfismo ψ garantiza que $(R,(b_0))$ sea completo.

Por otro lado, el teorema 6.2.9 dice que dado un R-endomorfismo ψ de $R[[x]]$ tal que $\psi(x) = \beta = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, entonces: ψ es un R-automorfismo de $R[[x]]$ si y solo si b_1 es una unidad de R . ¿Qué pasó con las condiciones topológicas esperadas ? Nuevamente la existencia del R-endomorfismo ψ las garantiza. (Ver teorema 6.2.7 y nota 6.2.8).

Como último teorema en esta parte del trabajo, presentamos una caracterización para R-automorfismos de $R[[x]]$ semejante a la del teorema 5.33 para R-automorfismos de $R[[x_1,\ldots,x_n]]$.

6.2.11 Teorema:

Sean R un anillo conmutativo con identidad y $\beta \in R[[x]]$. Entonces existe un R-automorfismo ϕ de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$, si y solo si $(R[[x]],(\beta))$ es una completación de $(R[\beta],(\beta R[\beta]))$. Además, cuando $(R[[x]],(\beta))$ es una completación de $(R[\beta],(\beta R[\beta]))$, ϕ es único y es igual a ϕ_β.

Supongamos que ϕ es un R-automorfismo de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$.

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\beta^n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\phi(x))^n = \phi\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (x^n)\right) = \phi(o) = (o).$$

Concluimos entonces que $(R[[x]],(\beta))$ es un espacio Hausdorff. El teorema 5.22 y la prueba de 5.29 indican que $(R[[x]],(\beta))$ es una completación de $(R[\beta],(\beta R[\beta]))$.

Ahora: supongamos que $(R[[x]],(\beta))$ es una completación de $(R[\beta],(\beta R[\beta]))$. Por teorema 5.22, existe un R-endomorfismo sobreyectivo ϕ de $R[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$ y por teorema 6.2.9, ϕ es un automorfismo.

Cuando $(R[[x]],(\beta))$ es una completación de $(R[\beta],(\beta R[\beta]))$, la unicidad de ϕ la garantiza el teorema 5.22. ⁙

7. Otros homomorfismos de anillos de series formales

Estudiaremos ahora homomorfismos de anillos de series formales que pueden no ser endomorfismos.

Sean R y S anillos conmutativos con unidad, x una variable que es independiente sobre cada uno de ellos y $\phi : R[x] \longrightarrow S[x]$ un homomorfismo tal que $\phi|R$ es un isomorfismo de R sobre S. En 2.1 se prueba que existe un S-endomorfismo ϕ' de $S[x]$ que es inyectivo o sobreyectivo al mismo tiempo que ϕ. En este capítulo obtenemos un resultado nuevo para series formales en una variable que es la generalización del presentado en 2.1. Para conseguirlo, será indispensable la siguiente extensión de la proposición 5.4 :

7.1 Proposición:

Sean R y S anillos conmutativos con unidad, $\beta \in S[[x]]$ y supongamos que existe un homomorfismo ϕ de $R[[x]]$ en $S[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$. Si T es algún subanillo de $S[[x]]$ que contiene al rango de ϕ, entonces ϕ es una aplicación continua de $(R[[x]],(x))$ en $(T,(\beta T))$. Además, si $(T,(\beta T))$ es Hausdorff, $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \in R[[x]]$ y si $f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$, entonces $\phi(f)$ es el

límite en $(T,(\beta T))$ de la sucesión $\left\{ \phi(f^{(n)}(x)) \right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

La prueba es semejante a la de 5.4 y la omitimos. ⁞⁞

7.2 Nota:

Como ϕ es un homomorfismo de anillos, $\phi(f^{(n)}(x)) = \phi\left(\sum_{i=0}^{n} f_i\, x^i \right)$

$= \sum_{i=0}^{n} \phi(f_i)\, \phi(x)^i$.

A $\phi(f) = \lim_n \phi(f^{(n)}(x))$ la notamos $\sum_{i=0}^{\infty} \phi(f_i)\, \phi(x)^i$ ó $\sum_{i=0}^{\infty} \phi(f_i)\, \beta^i$.

7.3 Sean R y S anillos conmutativos con unidad, x una variable independiente sobre R y sobre S y $\mathbb{C} : R \longrightarrow S$ un isomorfismo. Definimos una función $\psi : R[[x]] \longrightarrow S[[x]]$ de la siguiente forma:

Sea $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i\, x^i \in R[[x]]$; es fácil ver que la sucesión

$\left\{ \sum_{i=0}^{n} \mathbb{C}(f_i)\, x^i \right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión Cauchy del espacio Hausdorff

completo $(S[[x]],(x))$ y por tanto es convergente. Entonces definimos

$\psi(f) = \lim_n \left(\sum_{i=0}^{n} \mathbb{C}(f_i)\, x^i \right)$; el límite se toma en $(S[[x]],(x))$. Además,

según nota 7.2 , $\psi(f) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{C}(f_i)\, x^i$.

La proposición siguiente destaca a la función que acabamos de definir.

7.4 **Proposición:**

Existe un único homomorfismo ψ de $R[[x]]$ en $S[[x]]$ tal que:

i) $\psi(r) = \tilde{\mathcal{C}}(r)$ **para todo** $r \in R$ **y**

ii) $\psi(x) = x$.

Claramente la función ψ definida en 7.3 satisface i) y ii) .

Veamos que ψ es un homomorfismo.

Sean $f_1 = \sum_{i=0}^{\infty} f_{1i}\, x^i$, $f_2 = \sum_{i=0}^{\infty} f_{2i}\, x^i \in R[[x]]$;

$f_1^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \tilde{\mathcal{C}}(f_{1i})\, x^i$, $f_2^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \tilde{\mathcal{C}}(f_{2i})\, x^i$; $\lim_n f_1^{(n)} = \psi(f_1)$,

$\lim_n f_2^{(n)} = \psi(f_2)$.

$$(f_1 + f_2)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \tilde{\mathcal{C}}(f_{1i} + f_{2i})\, x^i = \sum_{i=0}^{n} \tilde{\mathcal{C}}(f_{1i})\, x^i + \sum_{i=0}^{n} \tilde{\mathcal{C}}(f_{2i})\, x^i$$

$$= f_1^{(n)} + f_2^{(n)} .$$

Luego $\psi(f_1 + f_2) = \lim_n (f_1 + f_2)^{(n)} = \lim_n \left[f_1^{(n)} + f_2^{(n)} \right] = \lim_n f_1^{(n)} + \lim_n f_2^{(n)}$

$$= \psi(f_1) + \psi(f_2) .$$

Ahora: sea $f_1 f_2 = \sum_{i=0}^{\infty} h_i\, x^i$ donde $h_i = \sum_{j+k=i} f_{1j}\, f_{2k}$;

$$(f_1 \; f_2)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \Gamma(h_i)\, x^i \, .$$

Pero $\Gamma(h_i) = \Gamma\left(\sum_{j+k=i} f_{1j} \; f_{2k} \right) = \sum_{j+k=i} \Gamma(f_{1j})\, \Gamma(f_{2k})$ y

$f_1^{(n)} \; f_2^{(n)} = \sum_{i=0}^{2n} t_i \; x^i$ donde $t_i = \sum_{j+k=i} \Gamma(f_{1j})\, \Gamma(f_{2j})$. Luego

$$f_1^{(n)} \; f_2^{(n)} = (f_1 \; f_2)^{(n)} + \sum_{i=n+1}^{2n} t_i \; x^i \, .$$

Sabemos que $\psi(f_1)\; \psi(f_2) = (\lim_n f_1^{(n)})(\lim_n f_2^{(n)}) = \lim_n (f_1^{(n)} \; f_2^{(n)})$ y

$$\psi(f_1 \; f_2) = \lim_n \; (f_1 \; f_2)^{(n)} \, .$$

Veamos que $\lim_n \left[f_1^{(n)} \; f_2^{(n)} - (f_1 \; f_2)^{(n)} \right] = 0$ para concluir que

$\psi(f_1)\, \psi(f_2) = \psi(f_1 \; f_2)$:

Sea $m \in \mathbb{N}$; si $n \geqslant m$,

$$f_1^{(n)} \; f_2^{(n)} - (f_1 \; f_2)^{(n)} = \sum_{i=n+1}^{2n} t_i \; x^i = x^{n+1} \sum_{i=n+1}^{2n} t_i \; x^{i-(n+1)}$$

$\in (x^{n+1}) \subset (x^m)$.

Veamos la unicidad de ψ :

Sea σ' un homomorfismo de $R[[x]]$ en $S[[x]]$ tal que:

i) $\alpha'(r) = \tau(r)$ para todo $r \in R$ y

ii) $\alpha'(x) = x$

Sean $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \in R[[x]]$ y $f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Nótese que $\alpha'(f^{(n)}(x)) = \sum_{i=0}^{n} \alpha'(f_i)\ \alpha'(x)^i = \sum_{i=0}^{n} \tau(f_i)\ x^i = \psi(f^{(n)}(x))$.

Además, según 7.1 , $\alpha'(f) = \lim_n \alpha'(f^{(n)}(x))$.

Luego $\alpha'(f) = \psi(f)$ y queda probada la unicidad de ψ .

Como τ es un isomorfismo de R sobre S , el homomorfismo ψ también es un isomorfismo:

7.5 Teorema:

Existe un único isomorfismo ψ de $R[[x]]$ sobre $S[[x]]$ tal que:

i) $\psi(r) = \tau(r)$ **para todo** $r \in R$ **y**

ii) $\psi(x) = x$.

Utilizando el mismo método de 7.3 , definimos un homomorfismo ρ de $S[[x]]$ en $R[[x]]$ tal que $\rho\left(\sum_{i=0}^{\infty} g_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau^{-1}(g_i)\ x^i$.

Veamos que ρ es la función inversa de ψ :

Sea $g = \sum_{i=0}^{\infty} g_i x^i \in S[[x]]$.

$$(\psi \circ \rho)(g) = \psi\left(\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{C}^{-1}(g_i)\, x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} (\mathbb{C} \circ \mathbb{C}^{-1})(g_i)\, x^i = \sum_{i=0}^{\infty} g_i\, x^i = g\,.$$

También, si $f \in R[[x]]$, $(\rho \circ \psi)(f) = f$ ⁞⁞

El siguiente teorema es análogo al teorema 2.1.1 ; dice que algunos homomorfismos de $R[[x]]$ en $S[[x]]$ se pueden estudiar a partir de S-endomorfismos de $S[[x]]$. Veremos que este teorema y los resultados del capítulo 6 nos permiten encontrar importantes caracterizaciones para algunos homomorfismos de $R[[x]]$ en $S[[x]]$.

Sean R y S anillos conmutativos con unidad, $\phi : R[[x]] \longrightarrow S[[x]]$ un homomorfismo de anillos tal que $\phi|R$ es un isomorfismo de R sobre S y $\mathbb{C} : R \longrightarrow S$ el isomorfismo definido así: $\mathbb{C}(r) = \phi(r)$ para cada $r \in R$.

Sabemos que existe un único isomorfismo ψ de $R[[x]]$ en $S[[x]]$ tal que $\psi\left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i\, x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{C}(f_i)\, x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \phi(f_i)\, x^i$.

Con base en este isomorfismo enunciamos el teorema:

7.6 Teorema:

Existe un único S-endomorfismo ϕ' de $S[[x]]$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} R[[x]] \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] & S[[x]] \\ S[[x]] \arrow[ur, "\phi'"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Además, ϕ es sobreyectivo (inyectivo) si y solo si ϕ' es sobreyectivo (inyectivo).

La prueba es semejante a la de 2.1.1 y la omitimos. ⁞⁞

Terminamos este capítulo con las caracterizaciones anunciadas para algunos homomorfismos de $R[[x]]$ en $S[[x]]$.

7.7 Teorema:

Sean R y S dos anillos conmutativos con identidad y $\beta = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in S[[x]]$. Entonces existe un isomorfismo ϕ de $R[[x]]$ en $S[[x]]$ tal que $\phi(x) = \beta$ si y solo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

i) $(S[[x]], (\beta))$ es un espacio Hausdorff completo.

ii) b_1 es una unidad de S .

Además, cuando existe un isomorfismo ϕ con estas características, es único.

La prueba consiste en aplicar los teoremas 6.2.7 , 7.5 y 7.6 . ⁝⁝⁝

7.8 Teorema:

Sean R y S dos anillos conmutativos con identidad,

$$\beta = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in S[[x]] \text{ y } \phi : R[[x]] \longrightarrow S[[x]] \text{ un homomorfismo}$$

de anillos tal que $\phi(x) = \beta$ y $\phi|R$ es un isomorfismo de R sobre S. Entonces:

i) ϕ es sobreyectivo si y solo si b_1 es una unidad de S .

ii) Si ϕ es sobreyectivo entonces ϕ es inyectivo.

iii) ϕ es un isomorfismo de $R[[x]]$ sobre $S[[x]]$ si y solo si b_1 es una unidad de S .

Considerando el S-endomorfismo ϕ' de $S[[x]]$ definido en un teorema anterior, vemos que las tres afirmaciones de este teorema son consecuencias inmediatas de 6.2.9 y 7.6 . ⁝⁝⁝

BIBLIOGRAFIA

1. ATIYAH, M.F. e I.G. MACDONALD. "Introducción al algebra conmutativa". Ed. Reverté, Barcelona, 1975.

2. DUGUNDJI, J. "Topology". Allyn and Bacon, Boston, 1976.

3. EAKIN P. y A. SATHAYE. "R. endomorphisms of R[[X]] are essentially continuous". Pacific J. Math. 66 (1976), 83-87.

4. GILMER R. "R-automorphisms of R[x] ". Proc. London Math. Soc. (3), 18 (1968), 328-336.

5. GILMER, R. y M. O'MALLEY". "R-endomorphisms of R[[$X_1,\ldots,X_n$]]". J. of Algebra. (48), 1 (1977), 30-44.

6. GRECO, S. y P. SALMON. "Topics in M-adic topologies" Springer-Verlag, 1971.

7. HARTLEY, B. y T.O. HAWKES. "Rings, modules and linear algebra". Chapman and Hall, Londres, 1974.

8. HU, SZE-TSEN. "Introduction to general topology". Holden-Day, San Francisco, 1966.

9. MALLOL, C. "Sur les f-morphismes. Sur la structure des groupes finis d'automorphismes". Thèse de 3ème cycle. Université de Montpellier II. Montpellier. Juin 1979.

10. NAGATA, M. "Local rings". Interscience, 1962.

11. O'MALLEY, M. "R-automorphisms of R[[x]]". Proc. London Math. Soc. (3)20 (1970), 60-72.

12. O'MALLEY, M. y C. WOOD. "R-endomorphisms of R[[x]]". J. of algebra 15 (1970), 314-327.

13. TEJADA, D. "Automorphismes d'anneaux de polynomes". Thèse de 3 ème cycle. Université de Montpellier II. Montpellier. Mars, 1981.

14. TORO, M. "Anillos de invariantes de grupos de R-automorfismos". Trabajo de Tesis en preparación. Universidad Nacional de Colombia. Medellín.

15. ZARISKI, O. y P. Samuel. "Conmutative algebra". Vol I. Van Nostrand Princeton, N.Y., 1958.

16. --------. Vol II. Van Nostrand, Princeton, N.Y., 1960.