



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# **Modelamiento Geomecánico Acoplado a Flujo en Medio Poroso en Yacimientos de Crudo Pesado Bajo Producción en Frio**

**Leidy Laura Álvarez Berrio**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Minas, Departamento de Procesos y Energía  
Medellín, Colombia  
2015



# **Modelamiento Geomecánico Acoplado a Flujo en Medio Poroso en Yacimientos de Crudo Pesado Bajo Producción en Frio**

**Leidy Laura Álvarez Berrio**

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título  
de:

**Magister en Ingeniería de Petróleos**

Director:

M.Sc. Guillermo Álzate Espinosa

Línea de Investigación:

Geomecánica de Yacimientos de Petróleo.

Grupo de Investigación:

Grupo de Investigación en Geomecánica Aplicada

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Minas, Departamento de Procesos y Energía

Medellín, Colombia

2015



*Dedicado a mi Papá Hernán Darío Alvarez y a mi mamá Miryam Cecilia Berrío, por la fuerza y amor que me han dado durante mi vida, un logro más para ustedes.*



## **Agradecimientos**

A mis padres por su incondicional apoyo, amor e incalculable paciencia durante mis estudios académicos.

A mis hermanas por su amor y apoyo incondicional.

A Mario por su ayuda, amor y perseverancia al acompañarme durante la maestría.

Al profesor Abel Naranjo por su valioso aporte académico y anímico.

Al profesor Pedro Benjumea por su apoyo y colaboración para la entrega de este trabajo.

A mis amigos por su apoyo y aliento en el desarrollo y culminación de este proyecto.

A Juan Pablo Sepúlveda y Eduin López por sus ayudas en el desarrollo numérico del programa de tesis.

A Dios por permitirme culminar este proyecto.



## Resumen

Los yacimientos de crudo pesado son en la actualidad uno de los objetivos más importantes para la industria del petróleo gracias a la gran cantidad de reservas de este tipo de recurso en diferentes partes del mundo; pero para la ingeniería de yacimientos estas reservas tienen unas implicaciones desafiantes a la hora de su explotación debido a sus características particulares que difieren de las convencionales trabajadas en la industria. Uno de los desafíos es conocer y predecir el comportamiento mecánico de la roca yacimiento bajo procesos de producción o recobro a los que pueda estar sometida, por esto los centros de investigación se han dado a la tarea de generar modelos de simulación de diferente grado de complejidad que incluyan el componente geomecánico y adicional que consideren el complejo comportamiento plástico que presentan las arenas poco consolidadas.

En este trabajo se presenta el desarrollo matemático, numérico y computacional que acopla las ecuaciones de esfuerzo-deformación con las ecuaciones de flujo de fluidos para un fluido monofásico altamente viscoso en el medio poroso. Este modelo permite predecir el comportamiento de la roca yacimiento en procesos de producción en frío, considerando un comportamiento elasto-plástico de las arenas poco consolidadas y a partir de los resultados obtenidos definir posibles procesos de producción y manejo del pozo o del campo.

**Palabras clave:** Geomecánica, Acoplamiento, Elasto-plasticidad, Crudos Pesados.



## **Abstract**

Nowadays, heavy oil reservoirs are one of the main objectives of oil industry; it is because of its huge reserves around the world. Reservoir engineering has challenges with the exploitation of heavy oil reservoirs due its particular characteristics; these are different to conventional properties worked by the industry. One of the challenges with these reservoirs it is to know and predict the reservoir rock mechanical behavior under production process or recovery process which it will be exposed, it is the reason why some research centers have been working to generate simulation models that include different complexity degrees. These models even should include geomechanical component and also they need consider the complex plastic behavior that is present on unconsolidated sands.

This work introduces the mathematical, numeric and computational development with which it is possible coupled the strain-stress equations with fluid flow equations for a monophasic fluid highly viscous in the porous media. This model allows predicting the reservoir rock behavior, during cold production process. The model considers elasto-plastic behavior in unconsolidated sand. With the results obtained, it is possible to define production processes, well and field development

**Keywords: Geomechanics, Coupled, Elasto-plasticity, Heavy Oil.**



# Contenido

Pág.

<b>1. Planteamiento del Problema.....</b>	<b>1</b>
<b>2. Revisión Bibliográfica .....</b>	<b>3</b>
2.1 Elasto-plasticidad en yacimientos de crudo pesado .....	3
2.2 Comparación entre Modelos Elásticos Lineales y Elasto-plásticos en Yacimientos de Crudo Pesado. ....	9
2.3 Simulación de Yacimientos Acoplada a Deformación Elasto-plástica de la Roca. ....	11
<b>3. Conceptualización Teórica .....</b>	<b>15</b>
3.1 Deformación Plástica. ....	15
3.2 Criterios de Cedencia. ....	16
3.3 Regla de Flujo Plástico.....	25
3.3.1 Regla de Flujo Asociada. ....	26
3.3.2 Regla de Flujo No Asociada .....	28
3.4 Regla de Endurecimiento. ....	30
<b>4. Modelo Diferencial de Flujo de Fluidos Acoplado a la Deformación Geomecánica de la Roca.....</b>	<b>33</b>
4.1 Modelo Físico .....	34
4.1.1 Suposiciones del Modelo Físico. ....	34
4.2 Modelo Matemático .....	35
4.2.1 Modelo de flujo de fluidos en un medio poroso .....	35
4.2.2 Modelo de deformación geomecánica de la roca .....	39
<b>5. Modelo Numérico y Computacional.....</b>	<b>51</b>
5.1 Generación de la malla. ....	51
5.2 Condiciones iniciales y de frontera.....	53
5.2.1 Condiciones iniciales de la ecuación de flujo de fluidos. ....	53
5.2.2 Condiciones iniciales ecuaciones de deformación geomecánica de la roca. ...	54
5.2.3 Condiciones de frontera - Ecuación de flujo de fluidos.....	54
5.2.4 Condiciones de Frontera - Ecuaciones de Geomecánica.....	55
5.3 Modelo Numérico. ....	57
5.3.1 Modelo numérico - Ecuación de flujo de fluidos .....	58
5.3.2 Modelo numérico - Ecuaciones de geomecánica. ....	59
5.4 Modelo Computacional.....	60
<b>6. Resultados .....</b>	<b>63</b>
6.1 Resultados Caso Base.....	63

6.1.1	Resultados Criterio Drucker – Prager.....	66
6.1.2	Resultados Criterio Modelo Cam –Clay Modificado. ....	85
6.1.3	Resultados Sensibilidades.....	103
6.1.4	Resultados Sensibilidad de los Dominios.....	108
6.2	Resultados CMG.....	111
<b>7.</b>	<b>Conclusiones y Recomendaciones. ....</b>	<b>119</b>
7.1	Conclusiones.....	119
7.2	Recomendaciones.....	120
<b>8.</b>	<b>Bibliografía.....</b>	<b>123</b>

## Lista de figuras

<b>Figura 2-1:</b> Compactación y Subsistencia a) Modelo Idealizado. b) Comportamiento Real. Fuente: Settari [16] (Modificado) .....	8
<b>Figura 2-2:</b> Mecanismo CHOPS. Fuente: Dusseault. [1] (Modificado) .....	9
<b>Figura 2-3:</b> Deformación elasto-plástica en la dirección $x$ . Deformación elástica en la dirección $x$ . [12].....	10
<b>Figura 3-1:</b> Deformaciones asociadas al estado elástico y plástico del material. [23].....	16
<b>Figura 3-2:</b> Envolvente de falla de Mohr-Coulomb. [23] .....	17
<b>Figura 3-3:</b> Superficies de cedencia del criterio de Mohr-Coulomb y Drucker Prager [12]. .....	18
<b>Figura 3-4:</b> Superficie de fluencia elíptica en el espacio $p$ - $q$ . [30].....	20
<b>Figura 3-5:</b> Línea de consolidación noval y línea de descarga-recarga en el espacio $v$ - $ln$ $p$ . [30] .....	20
<b>Figura 3-6:</b> Función de plastificación. [30] .....	21
<b>Figura 3-7:</b> Caso de plasticidad perfecta. [22] .....	27
<b>Figura 3-8:</b> Plasticidad por endurecimiento. [22] .....	28
<b>Figura 3-9:</b> Comportamiento por endurecimiento. ....	30
<b>Figura 4-1:</b> Acoplamiento de las ecuaciones de flujo de fluidos con las ecuaciones geomecánicas. ....	33
<b>Figura 4-2:</b> Modelo físico pozo-yacimiento en coordenadas cilíndricas. ....	34
<b>Figura 5-1:</b> Esquema de distribución de bloques y nodos en la malla cilíndrica. ....	53
<b>Figura 5-2:</b> Representación del stencil en coordenadas cilíndricas.....	58
<b>Figura 5-3:</b> Diagrama de bloques modelo computacional. ....	60
<b>Figura 6-1:</b> Comportamiento de Presión de fondo D-P.....	67
<b>Figura 6-2:</b> Comportamiento de presión con radio para diferentes tiempos de producción y profundidades – Caso D-P.....	67
<b>Figura 6-3:</b> Comportamiento de presión con profundidad a diferentes tiempos de producción – Caso D-P.....	68
<b>Figura 6-4:</b> Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio y la presión con tiempo en la cara del pozo a 1880 ft – Caso D-P. ....	69
<b>Figura 6-5:</b> Comportamiento del esfuerzo total con radio al año de producción a 1880 ft – Caso D-P. ....	70
<b>Figura 6-6:</b> Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio con radio para diferentes tiempos de producción y profundidades – Caso D-P. ....	71
<b>Figura 6-7:</b> Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio con tiempo a diferentes radios y profundidades – Caso D-P. ....	71

<b>Figura 6-8:</b> Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio con profundidad a diferentes tiempos de producción – Caso D-P. ....	72
<b>Figura 6-9:</b> Comportamiento de la permeabilidad con tiempo en la cara del pozo a 1880 ft – Caso D-P. ....	73
<b>Figura 6-10:</b> Comportamiento de la permeabilidad con radio a diferentes tiempos y profundidades – Caso D-P. ....	74
<b>Figura 6-11</b> Comportamiento de la permeabilidad con tiempo a diferentes radios y profundidades – Caso D-P. ....	74
Figura 6-12: Comportamiento de la permeabilidad con profundidad a diferentes tiempos de producción en la cara del pozo – Caso D-P. ....	75
<b>Figura 6-13:</b> Comportamiento de la deformación elástica con radio diferentes tiempos de producción y profundidades – Caso D-P. ....	76
<b>Figura 6-14:</b> Comportamiento de la deformación elástica con radio al año de producción a 1880 ft – Caso D-P. ....	77
<b>Figura 6-15:</b> Comportamiento de la deformación elástica con tiempo a diferentes radios y profundidades – Caso D-P. ....	77
Figura 6-16: Comportamiento de la deformación elástica con profundidad a diferentes tiempos de producción – Caso D-P. ....	78
Figura 6-17: Comportamiento de la deformación elástica con el ángulo a diferentes profundidades y tiempos de producción – Caso D-P. ....	79
Figura 6-18: Comportamiento de la deformación elástica con el ángulo a diferentes radios y a 1880 ft – Caso D-P. ....	79
<b>Figura 6-19:</b> Comportamiento de la deformación plástica con radio diferentes tiempos de producción y profundidades – Caso D-P. ....	80
<b>Figura 6-20:</b> Comparación de la deformación elástica lineal y la elasto-plástica con el tiempo en la cara del pozo a 1880 ft – Caso D-P. ....	81
<b>Figura 6-21:</b> Comportamiento de la deformación plástica con radio al año de producción a 1880 ft – Caso D-P. ....	81
<b>Figura 6-22:</b> Comportamiento de la deformación plástica con tiempo a diferentes radios y profundidades – Caso D-P. ....	82
Figura 6-23: Comportamiento de la deformación plástica con profundidad a diferentes tiempos de producción – Caso D-P. ....	83
Figura 6-24: Comportamiento de la deformación plástica con el ángulo a diferentes profundidades y tiempos de producción – Caso D-P. ....	84
Figura 6-25: Comportamiento de la deformación plástica con el ángulo a diferentes radios a 1880 ft – Caso D-P. ....	85
<b>Figura 6-26:</b> Comportamiento de la presión con tiempo en la cara del pozo a 1880 ft – Caso MCC. ....	85
<b>Figura 6-27:</b> Comportamiento de la presión con radio diferentes tiempos de producción y profundidades – Caso MCC. ....	86
<b>Figura 6-28:</b> Comportamiento de la presión con profundidad a diferentes tiempos de producción – Caso MCC. ....	87

**Figura 6-29:** Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio y la presión con tiempo en la cara del pozo a 1880 ft – Caso MCC. .... 88

**Figura 6-30:** Comportamiento del esfuerzo total con radio al año de producción a 1880 ft – Caso MCC. .... 89

**Figura 6-31:** Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio con radio diferentes tiempos de producción y profundidades – Caso MCC..... 89

**Figura 6-32:** Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio con tiempo a diferentes radios y profundidades – Caso MCC. .... 90

**Figura 6-33:** Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio con profundidad a diferentes tiempos de producción – Caso MCC. .... 91

**Figura 6-34:** Comportamiento de la permeabilidad con tiempo en la cara del pozo a 1880 ft – Caso MCC. .... 92

**Figura 6-35:** Comportamiento de la permeabilidad con radio diferentes tiempos y profundidades – Caso MCC..... 92

**Figura 6-36** Comportamiento de la permeabilidad con tiempo a diferentes radios y profundidades – Caso MCC..... 93

Figura 6-37: Comportamiento de la permeabilidad con profundidad a diferentes tiempos de producción – Caso MCC..... 94

**Figura 6-38:** Comportamiento de la deformación elástica con radio diferentes radios y profundidades – Caso MCC..... 94

**Figura 6-39:** Comportamiento de la deformación elástica con radio al año de producción y a 1880 ft – Caso MCC..... 95

**Figura 6-40:** Comportamiento de la deformación elástica con tiempo a diferentes radios y profundidades – Caso MCC..... 96

Figura 6-41: Comportamiento de la deformación elástica con profundidad a diferentes tiempos de producción – Caso MCC. .... 97

Figura 6-42: Comportamiento de la deformación elástica con el ángulo a diferentes profundidades y tiempos de producción – Caso MCC..... 98

Figura 6-43: Comportamiento de la deformación elástica con el ángulo a diferentes radios a 1880 ft – Caso MCC. .... 98

**Figura 6-44:** Comportamiento de la deformación plástica con radio diferentes radios y profundidades – Caso MCC..... 99

**Figura 6-45:** Comparación de la deformación elástica lineal y elasto-plástica con el tiempo en la cara del pozo a 1880 ft – Caso MCC. .... 99

**Figura 6-46:** Comportamiento de la deformación plástica con radio al año de producción y a 1880 ft – Caso MCC..... 100

**Figura 6-47:** Comportamiento de la deformación plástica con tiempo a diferentes radios y profundidades – Caso MCC..... 101

Figura 6-48: Comportamiento de la deformación plástica con profundidad a diferentes tiempos de producción – Caso MCC. .... 102

Figura 6-49: Comportamiento de la deformación plástica con el ángulo a diferentes profundidades y tiempos de producción – Caso MCC..... 102

Figura 6-50: Comportamiento de la deformación plástica con el ángulo a diferentes radios y a 1880 ft – Caso MCC..... 103

<b>Figura 6-51:</b> Comportamiento con el tiempo y porcentual de la presión para cada variable sensibilizada – Caso DP.....	105
<b>Figura 6-52:</b> Comportamiento con el tiempo y porcentual de la deformación plástica volumétrica para cada variable sensibilizada – Caso DP.....	105
<b>Figura 6-53:</b> Comportamiento con el tiempo y porcentual de la presión para cada variable sensibilizada – Caso MCC.....	107
<b>Figura 6-54:</b> Comportamiento con el tiempo y porcentual de la deformación plástica volumétrica para cada variable sensibilizada – Caso MCC.....	108
<b>Figura 6-55:</b> Comportamiento de la presión con el tiempo de producción. Caso D-P...	110
<b>Figura 6-56:</b> Comportamiento de la deformación plástica volumétrica con el tiempo de producción. Caso D-P.....	110
<b>Figura 6-57:</b> Comportamiento de presión y esfuerzo efectivo promedio al último tiempo de simulación. Simulador CMG - Caso D-P. ....	113
<b>Figura 6-58:</b> Comportamiento de presión y esfuerzo efectivo promedio con el tiempo en la cara del pozo a 1880 ft. Simulador CMG - Caso D-P. ....	114
<b>Figura 6-59:</b> Comportamiento de deformación plástica al último tiempo de simulación y perfil con tiempo de producción. Simulador CMG - Caso D-P. ....	114
<b>Figura 6-60:</b> Comportamiento de presión y esfuerzo efectivo promedio al Último Tiempo de simulación. Simulador CMG - Caso MCC. ....	115
<b>Figura 6-61:</b> Comportamiento de presión y esfuerzo efectivo promedio con el tiempo en la cara del pozo a 1880 ft. Simulador CMG – Caso MCC. ....	117
<b>Figura 6-62:</b> Comportamiento de deformación plástica al último tiempo de simulación y perfil con tiempo de producción. Simulador CMG - Caso MCC. ....	117
<b>Figura 8-1:</b> Método de Acople <i>One Way</i> . [43]. ....	211
<b>Figura 8-2:</b> Método de Acople <i>Two Way</i> . [43]. ....	211

## Lista de tablas

Pág.	
	<b>Tabla 6-1:</b> Variables de Yacimiento Caso Base ..... 64
	<b>Tabla 6-2:</b> Numero de Nodos Caso Base ..... 64
	<b>Tabla 6-3:</b> Variables Geomecánicas Caso Base..... 65
	<b>Tabla 6-4:</b> Valores de las propiedades geomecánicas a sensibilizar. Caso D-P. .... 103
	<b>Tabla 6-5:</b> Resultados porcentuales de la sensibilidad a las variables geomecánicas. Caso D-P. .... 104
	<b>Tabla 6-6:</b> Valores de propiedades geomecánicas a sensibilizar. Caso MCC..... 106
	<b>Tabla 6-7:</b> Resultados porcentuales de la sensibilidad a las variables geomecánicas. Caso MCC. .... 107
	<b>Tabla 6-8:</b> Arreglos para el Estudio de los Dominios. .... 108
	<b>Tabla 6-9:</b> Valores para la Sensibilidad de Arreglo 1 y 2. .... 109
	<b>Tabla 6-10</b> Parámetros de Entrada Modelo Cam Clay Modificado. [42] ..... 112

# Lista de símbolos y abreviaturas

## Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad
$a_2, b_2$	Coefficientes en la ley de Hardening	
$a, b, c, d, e, f$	Componentes el vector de flujo	
$A_{i,j}$	Componentes de la matriz elasto-plástica	
$B$	Stencil representando el coeficiente de la variable dependiente cuya posición está ubicada en el bloque inferior de referencia.	
$c$	Compresibilidad	1/psi
$C_0$	Fuerza cohesiva	psi
$C$	Stencil representando el coeficiente de la variable dependiente cuya posición está ubicada en el bloque de referencia.	
$D_e$	Matriz elástica	
$D_{ep}$	Matriz elasto-plástica	
$E$	Stencil representando el coeficiente de la variable dependiente cuya posición está ubicada al este del bloque de referencia. Módulo de Young	psi
$\vec{f}$	Superficie de cedencia de la roca	
$F$	Stencil representando el término del lado derecho	
$G$	Módulo de Cizalla	psi
$I_1$	Primer invariante de esfuerzos	psi
$J_{2D}$	Segunda invariante deviatorica de esfuerzos	psi
$J_3$	Tercer invariante deviatorica de esfuerzos	psi
$k$	Permeabilidad	mD
$\mathbf{K}$	Tensor de permeabilidades del medio	
$K$	Módulo Bulk	psi
$N$	Stencil representando el coeficiente de la variable dependiente cuya posición está ubicada al norte del bloque de referencia.	
$P$	Presión	psi
$p, q$	Invariantes de esfuerzos	psi
$q_v$	Tasa de flujo volumétrica	bbbl/dia
$\tilde{q}$	Tasa de masa por unidad de volumen total	bbbl/dia
$\vec{Q}$	Superficie de potencial plástico	
$r$	Radio	ft
$S$	Stencil representando el coeficiente de la	

<b>Símbolo</b>	<b>Término</b>	<b>Unidad</b>
	variable dependiente cuya posición está ubicada al sur del bloque de referencia.	
$t$	Tiempo	$h$
$T$	Stencil representando el coeficiente de la variable dependiente cuya posición está ubicada en el bloque superior del bloque de referencia.	
$T$	Temperatura	$F$
$u$	Desplazamiento	
$V$	Volumen	$ft^3$
$r, z$	Distancia	$ft$
$W$	Stencil representando el coeficiente de la variable dependiente cuya posición está ubicada al oeste del bloque de referencia.	

### Símbolos con letras griegas

<b>Símbolo</b>	<b>Término</b>	<b>Unidad</b>
$\alpha$	Constante poro -elástica de Biot	
$\Delta$	Incremento	
$\lambda$	Constante de Lamé	
$\eta$	Vector normal	
$\phi$	Porosidad	
$\mu$	Viscosidad	$cp$
$\rho$	Densidad	$g/cm^3$
$\varphi$	Angulo de fricción interna	
$\theta_L$	Angulo de Lode	
$\lambda_p$	Escalar plástico	
$\sigma$	Esfuerzo total de la roca	$psi$
$\bar{\sigma}$	Esfuerzo generalizado	$psi$
$\sigma_m$	Esfuerzo promedio	$psi$
$\sigma'$	Esfuerzo efectivo	$psi$
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Esfuerzos principales	$psi$
$\varepsilon$	Deformación total	
$\varepsilon^e, \varepsilon^p$	Deformación elástica y plástica respectivamente	
$\bar{\varepsilon}^p$	Deformación plástica generalizada	
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker	
$\tau$	Esfuerzo de cizalla	$psi$
$\nu$	Relación de Poisson	
$\beta_1, \beta_2, \beta_3$	Coefficientes del vector de flujo	

### Subíndices

<b>Subíndice</b>	<b>Término</b>
$b$	Total
$bc$	Variación del volumen total debido a la presión de confinamiento
$bp$	Variación del volumen total debido a la

Subíndice	Término
	presión de poro
$i, j, k$	Localización del punto de cálculo en la dirección $r, \theta, z$ respectivamente.
$f$	Fluido
$e$	Radio externo
$o$	Estado de referencia
$p$	Poroso
$p_c$	Variación del volumen poroso debido a la presión de confinamiento
$p_p$	Variación del volumen poroso debido a la presión de poro
$r$	Roca
$rz$	Cizalla en dirección $r - z$
$r\theta$	Cizalla en dirección $r - \theta$
$\theta z$	Cizalla en dirección $\theta - z$
$s$	Sólido
$v$	Volumétrico
$t$	Total
$w$	Pozo
$r, \theta, z$	Dirección

## Superíndices

Superíndice	Término
$o$	Estado Inicial
$n$	Nivel de tiempo actual en la simulación
$n+1$	Nivel de tiempo futuro en la simulación
$'$	Efectivo

## Símbolos Matemáticos

Símbolos	Término
$\nabla \cdot U$	Divergente de una propiedad
$\nabla U$	Gradiente de una propiedad
$\Delta U$	Incremento de una variable o propiedad, entre los dos niveles de tiempo $t + \Delta t$
$\partial$	Derivada parcial

## Abreviaturas

Abreviatura	Término
DP	Modelo de cedencia Drucker-Prager
CSL	Curva de estado crítico
MCC	Modelo modificado de Cam-Clay

# Introducción

El petróleo pesado será una de las principales fuentes de energía en el futuro debido a la disminución en la producción del petróleo liviano. Un estudio de la producción de petróleo pesado realizada por Dusseault [1] en 1999 sugirió una aceleración en la innovación de procesos de producción para este tipo de yacimientos en las primeras décadas del siglo XXI. Los aspectos geomecánicos son fundamentales en la explotación de este tipo de yacimientos, ya que los procesos de producción normales en yacimientos convencionales no pueden ser aplicados de igual manera en las formaciones poco consolidadas contenedoras de fluidos altamente viscosos, características fundamentales de estos yacimientos.

En su estado natural las formaciones contenedoras de crudo pesado son poco consolidadas debido a su reducido grado de cementación, y presentan baja resistencia a los esfuerzos de cizalla por tanto se evidencian fenómenos de dilatancia, esto explica el porqué de la alta compresibilidad de estas arenas en comparación con una arena densa y de iguales especificaciones mineralógicas. La alta viscosidad de los crudos pesados hace que la conductividad hidráulica efectiva sea muy baja y por tanto las arenas contenedoras de este tipo de fluido tengan un comportamiento de baja productividad, a pesar de los valores altos de permeabilidad asociado a este tipo de formaciones con bajo grado de cementación y consolidación [2]. Lo expuesto anteriormente explica la necesidad de considerar los aspectos geomecánicos en el estudio de este tipo de yacimientos.

Cuando se somete este tipo de formación a procesos de producción o recobro se presentan cambios debidos a la alteración en la temperatura y presión natural del yacimiento, estos cambios a su vez resultan en la variación en el estado de esfuerzos, lo que redundo en procesos de deformación del tipo dilatación y en procesos graduales de remoción de material sólido o por otro lado en procesos de compactación y posteriormente si se dan las condiciones subsidencia, afectando la integridad del pozo, el

completamiento, la integridad de la capa sello y el comportamiento de las fracturas presentes en la formación [3]. Por este tipo de fenómenos la predicción de esfuerzos, deformaciones y el comportamiento del flujo de fluidos para este tipo de yacimientos es fundamental en el diseño de procesos de producción y recobro en estos mismos [2].

A continuación se presenta el desarrollo matemático, conceptual, numérico y computacional de un modelo elasto-plástico acoplado a flujo de petróleo pesado, que permite modelar el proceso de producción de yacimientos poco consolidados.

# 1. Planteamiento del Problema

La respuesta mecánica de la roca que contiene petróleo pesado es de gran interés para la explotación favorable de este tipo de yacimientos. En general se conoce que el comportamiento esfuerzo-deformación de las arenas poco consolidadas no es el convencional utilizado para caracterizar yacimientos de petróleo liviano.

De acuerdo a la necesidad de conocer con mayor exactitud el comportamiento mecánico de este tipo de yacimientos, los investigadores de mecánica de rocas aplicada a la industria del petróleo, han enfocado sus estudios en aplicar un modelo esfuerzo – deformación elasto-plástico. Este modelo permite definir deformaciones plásticas permanentes en la roca dependiendo del estado de esfuerzos a la que esta sea sometida, por lo cual se concibe una respuesta más clara del cambio en las propiedades mecánicas y de resistencia de la roca.

El desarrollo que realizan los investigadores tiene una parte experimental y otra numérica, estas dos líneas de investigación han presentado resultados similares, y han validado de manera exitosa el uso del modelo esfuerzo-deformación elasto-plástico en yacimientos de crudo pesado. [4], [5], [6], [7], [8] y [9].

Con respecto a las pocas reservas de petróleo liviano, y al estímulo a nivel mundial por la explotación de crudo pesado, arenas bituminosas, entre otros, en Colombia se han encontrado gran cantidad de prospectos con características de arenas de baja cohesión y con petróleos con baja gravedad API, por tanto se plantea una necesidad de tener herramientas que permitan modelar y caracterizar estos nuevos proyectos de explotación.

Es por esto que se plantea el presente trabajo, el cual pretende aportar a la comunidad de la industria del petróleo una herramienta que permita simular el comportamiento mecánico de la roca cuando el petróleo se está produciendo, como será la deformación de esta y los fenómenos asociados que pueda acarrear la extracción de dicho petróleo a determinados tipos de formaciones.

Para llevar a cabo la construcción de esta herramienta, se define un planteamiento matemático, numérico y computacional siguiendo los lineamientos de modelos desarrollados en el Grupo de Investigación de Geomecánica Aplicada de la Universidad Nacional de Colombia.

## 2. Revisión Bibliográfica

En este capítulo se presenta una recopilación de estudios de varios autores a través de la última mitad del siglo XX y la primera década del siglo XXI. Estos estudios plantean hipótesis, resultados y teorías relacionadas con el comportamiento elasto-plástico de arenas poco consolidadas, lo cual es la base de este trabajo de investigación. Dentro de esta revisión hay estudios experimentales y numéricos que permiten hacer una validación de los resultados obtenidos en ambos casos.

### 2.1 Elasto-plasticidad en yacimientos de crudo pesado

La teoría elasto-plástica permite delimitar el comportamiento elástico y plástico que tienen las arenas poco consolidadas contenedoras de crudo pesado. Muchos autores han encaminado sus trabajos de laboratorio y analíticos en predecir las deformaciones y los esfuerzos con estos modelos; a continuación se nombrarán algunos estudios relevantes, y sus aportes.

Vaziri [5] en 1989 caracterizó el comportamiento geomecánico de una formación contenedora de crudo pesado bajo condiciones de frontera encontradas en la práctica, con un nuevo modelo constitutivo esfuerzo – deformación. El concepto matemático desarrollado para este modelo se basa en tres teorías establecidas.

- Comportamiento elástico no lineal hiperbólico anterior a la falla de la formación.
- Comportamiento elasto– plástico en estado crítico posterior a la falla del material.
- Criterio de falla de Mohr – Coulomb.

Este modelo provee una unificación lógica de estas tres teorías y por lo tanto permite obviar las suposiciones que simplifican el comportamiento de las arenas poco consolidadas en el análisis de los problemas de campo.

Una de las características principales de este modelo es que puede ser numéricamente descrito usando los parámetros geomecánicos que pueden ser obtenidos por medio de

pruebas de laboratorio convencionales. Otra de las cualidades de este modelo, es que involucra el estudio del comportamiento post – falla de la roca, lo cual no había sido considerado por problemas de estabilidad numérica.

En ese mismo año, Veeken [6] contempla una aproximación a un modelo elasto -plástico desde la discretización de las ecuaciones de geomecánica en elementos finitos, e incorpora en el modelo el comportamiento de la fricción y el debilitamiento exhibido en la cohesión de la formación con respecto a la deformación, los cuales son usados para la predicción de estabilidad de pozos. El modelo del material en estudio se desarrolla con base en pruebas de laboratorio con una celda de esfuerzos triaxial. Los cálculos desarrollados usando elementos finitos muestran puntos de falla localizados similares a los obtenidos experimentalmente, donde se puede concluir que las presiones del lodo de perforación deben ser las mínimas necesarias para evitar el colapso del pozo.

En 1991, Wan [7] presenta un modelo experimental asociado al comportamiento plástico de una arena, bajo condiciones de esfuerzos 3D, obteniendo resultados como la expansión plástica volumétrica, la contracción del material, entre otros. Cuando se implementa el análisis de la arena en el simulador ABAQUS, el cual trabaja con una solución numérica en elementos finitos, es interesante observar que se obtienen resultados aproximados a los prácticos, brindando así una respuesta satisfactoria al comportamiento geomecánico de la roca considerando fenómenos como la producción de arena bajo procesos de recobro térmico.

Raaen [8] en 1996 plantea un modelo para la estimación directa de los parámetros involucrados en la modelación elasto -plástica de una arena poco consolidada bajo simulación numérica en diferencias finitas; este trabajo tuvo como objetivo encontrar en laboratorio los parámetros necesarios para conocer el comportamiento esfuerzo – deformación del material y considerar con la simulación numérica el comportamiento de estos mismos parámetros a través de fenómenos como el endurecimiento y la dilatación, entre otros, en un pozo que tiene producción de arena en el mar del Norte. Estos procedimientos presentaron una evaluación precisa de los esfuerzos, y de los aspectos mínimos del modelamiento.

Vardoulakis [9] en 1996 plantea una evaluación mecánica con pruebas de compresión y tensión triaxiales de laboratorio en la arena débil “Red Wildmoor”. Se encuentra que esta exhibe elasticidad dependiente de esfuerzos, daño, incremento en la fricción entre granos, debilitamiento de la roca disminuyendo la cohesión y dilatación. Por tanto se presenta el modelamiento de esta arena tomando como base constitutiva el modelo elasto – plástico. El modelo constitutivo es descrito y calibrado con datos experimentales y la validación se hizo experimentalmente usando celdas triaxial.

En el año 1999 Papamichos et al [10] presentan una de las bases más importantes en el estudio del comportamiento geomecánico de las arenas poco consolidadas. Este desarrollo se basa en un programa de pruebas triaxiales asimétricas de compresión y tensión aplicadas a la arena débil arenisca *Red Wildmoor*, la cual es modelada y analizada bajo todo el marco de la teoría de elasto- plasticidad.

La elasticidad no lineal y el daño son incorporados dentro del modelo presentado por Papamichos et al [10]. La sensibilidad del comportamiento plástico a la presión es descrita a través del criterio no lineal de Mohr - Coulomb considerando el comportamiento de la fricción y la cohesión. El énfasis del estudio está en el procedimiento de calibración o validación, el cual es hecho con las pruebas de laboratorio realizadas. El estudio de la compactación se realizó con datos obtenidos de dilatación del medio, de acuerdo a los cambios plásticos del volumen de la arena; igualmente en el modelo se trabajan varias simplificaciones como la constante de elasticidad del modelo constitutivo y la superficie de cedencia lineal, las cuales son discutidas en el trabajo.

Una de las particularidades del trabajo de Papamichos et al [10] es el modelamiento de la banda de debilitamiento del medio, el cual es desarrollado con base a una extensión del modelo constitutivo, considerando ya un comportamiento plástico no coaxial.

En 2005 Gens et al [11] presentan un modelo constitutivo que permite reproducir un número de comportamientos transicionales en arenas compactadas y no compactadas. El método es finalmente propuesto para combinar estos dos comportamientos con base en las consideraciones del balance de energía. Un resultado interesante del modelo es la flexibilidad de representar diferentes comportamientos en las rocas dependiendo del estado de esfuerzos al cual estén sometidas.

Por último y no menos importante, también en el año 2005, Han et al [12] proponen un desarrollo conceptual y numérico de gran importancia a la hora de considerar comportamiento elasto-plástico en una roca. Su modelo se basa en las teorías de mecánica de rocas, resultados experimentales y una aproximación a un modelo 3-D elasto-plástico resuelto por medio de elementos finitos. Este modelo es desarrollado con la intención de proveer resultados más certeros y eficientes para simulaciones de gran escala.

El punto de encuentro entre los modelos desarrollados y descritos anteriormente, es la obtención de un estado de esfuerzos que permite definir el cambio de las propiedades mecánicas y petrofísicas de la roca en estudio. El análisis de los resultados obtenidos en un modelo acoplado de flujo de fluidos con geomecánica permite identificar bajo qué condiciones de esfuerzos se pueden presentar fenómenos geomecánicos.

Uno de los fenómenos asociados al cambio en el estado de esfuerzos es el mecanismo de colapso plástico, donde existe una conexión débil entre los granos, y con un incremento de carga tres diferentes fases pueden ser observadas. Para un valor moderado de esfuerzo medio o de presión de confinamiento, la estructura del pozo permanecerá estable (fase 1) y la energía por deformaciones en estado elástico será guardada en las fronteras de los granos. Con la ruptura progresiva de las fronteras, la capacidad del material a deformarse aumentará y la concavidad de la curva esfuerzo - deformación presentará una forma decreciente. Una vez libre de estas fronteras, la estructura porosa colapsará exhibiendo grandes deformaciones para un pequeño incremento en el esfuerzo medio (fase 2). En la tercera fase, el contacto de los granos con respecto a otros incrementa, la compresibilidad del material decrece y, consecuentemente, la concavidad de la curva esfuerzo - deformación se invierte; de hecho la fase 3 corresponde al proceso de consolidación comúnmente conocido en mecánica de suelos. [13]

Para el estudio de la consolidación de la roca dos criterios de falla son normalmente utilizados el Criterio de Cam-Clay modificado, el cual se basa en la existencia de un mecanismo de falla plástico con una regla de flujo asociada. Físicamente este modelo solo predice los mecanismos de compresión, colapso y compactación. Mientras solo se

considera un mecanismo de colapso puro, el modelo de Cam-Clay incluye la falla por cizalla falsa correspondiente a una meseta de plasticidad perfecta en el diagrama esfuerzo - deformación, que es llamada línea de estado crítico. El principal punto a favor del modelo de Cam-Clay es el que integra el colapso plástico y la falla por cizalla en un mismo mecanismo y 4 constantes físicas de medición experimental. [12] El modelo matemático modificado de estado crítico de Cam-Clay brinda una propuesta para simular el comportamiento de las arenas poco consolidadas durante la compactación normal en ausencia de fenómenos visco - plásticos y diagénesis [11].

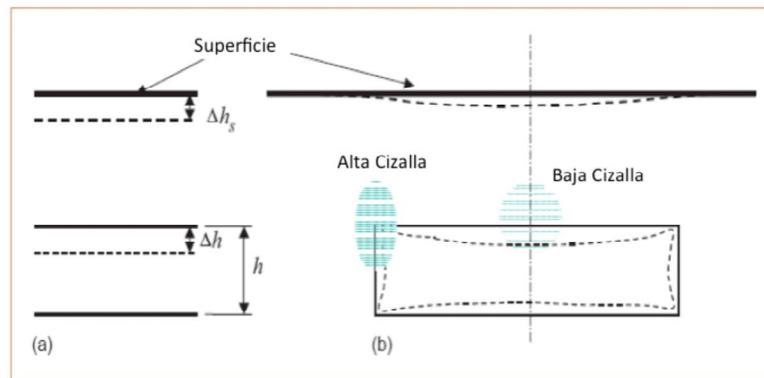
Por otro lado el Modelo *Laderock* define dos mecanismos plásticos independientes, el colapso plástico y la falla por cizalla. En el espacio de esfuerzos, el colapso plástico es descrito por un plano y presentado en términos del esfuerzo efectivo medio. En el modelo de *Lade*, la ley de endurecimiento es el producto de la ley de potencia y una exponencial que permite simular colapso de poro y la fase de consolidación. [13]

Otro fenómeno asociado directamente al cambio en el estado de esfuerzos y su influencia en la consolidación de la roca es la subsidencia. El grado de compactación depende de la compresibilidad de la roca y de las condiciones de frontera del modelo acoplado [14]. En general, el objetivo de la simulación acoplada de yacimientos considerando procesos de compactación y subsidencia, es estudiar el efecto del modelo constitutivo en el comportamiento de la roca, incluyendo el impacto de la caída de presión con el tiempo, relacionado a la tasa de compactación, el recobro de petróleo y los cambios en el estado de esfuerzos que afectan la matriz. De igual manera la deformación elástica puede ocurrir en muchos yacimientos, pero la compactación típicamente es representada bajo modelos constitutivos de deformación plástica [15]. En la Figura 2-1 se presenta un esquema realizado por Settari et al. [16] donde se muestra el efecto de la compactación en el yacimiento y su posible visualización en la superficie.

El cambio en las propiedades petrofísicas, como la porosidad y la permeabilidad en la roca productora, son directamente influenciadas por los procesos mecánicos dependientes del estado de esfuerzos. Debido a la producción del petróleo la presión de poro disminuirá, y cambiará la porosidad, y también por la compactación que experimente la roca se producirán cambios en la permeabilidad, afectando la producción del pozo con el tiempo [17]. El modelamiento numérico es necesario ya que las muestras

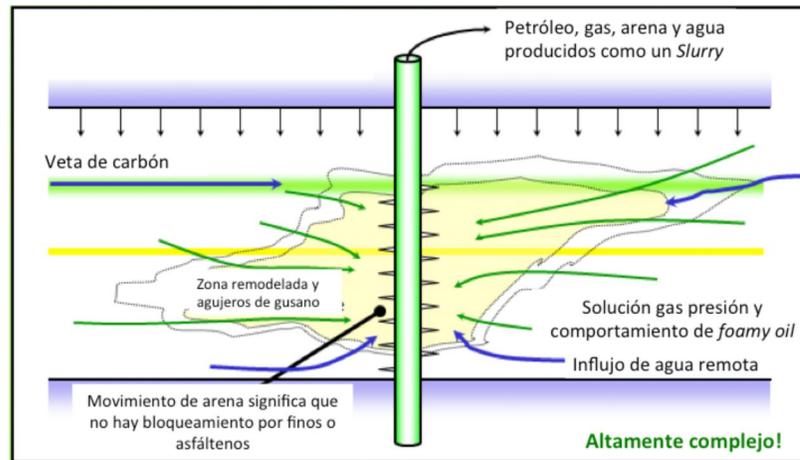
de campo son costosas y obtener resultados de estas es difícil por la poca compactación de las arenas. En muchas ocasiones la determinación de las propiedades de la roca es prácticamente imposible, lo cual genera una incertidumbre en el modelamiento del comportamiento de la arena [18]. Por tanto es necesario plantear en base a ecuaciones conocidas, las propiedades petrofísicas en función de los esfuerzos efectivos que están actuando sobre la roca en estudio.

**Figura 2-1:** Compactación y Subsistencia a) Modelo Idealizado. b) Comportamiento Real. Fuente: Settari [16] (Modificado)



Los cambios drásticos en porosidad relacionados a los cambios en el estado de esfuerzos, termina como un problema de producción de arena, esta se puede calificar como masiva o controlada; en ocasiones es un problema para los equipos de superficie, ya que erosiona todo el sistema de producción y de tanques, pero cuando se cuenta con una producción de arena masiva en ocasiones es tomada a favor para la producción de crudo del pozo, y se define como “Cold Heavy Oil Production” o CHOPS. El método CHOPS consiste en dejar superar la tasa crítica de producción de aceite a la cual se desprenden granos de la formación, y así conseguir mayores tasas de producción de petróleo, y a su vez de arena. En la Figura 2-2 se presenta un esquema donde muestran los componentes que se forman cuando se produce bajo el mecanismo CHOPS; es importante considerar que la estabilidad de la formación del yacimiento se verá altamente afectada. [1]

**Figura 2-2:** Mecanismo CHOPS. Fuente: Dusseault. [1] (Modificado)



## 2.2 Comparación entre Modelos Elásticos Lineales y Elasto-plásticos en Yacimientos de Crudo Pesado.

Contrario a lo que sucede en elasticidad donde se encuentra una relación lineal entre el comportamiento de los esfuerzos con las deformaciones, en plasticidad no existe una única relación entre estos. Así, a un mismo esfuerzo le pueden corresponder dos deformaciones diferentes obtenidas en un ciclo de carga y descarga. Formalmente se puede decir que la ecuación constitutiva para materiales elasto-plásticos no se puede expresar mediante una función ordinaria, sino por medio de una función cuyo argumento es la historia del proceso de deformación.

La ley constitutiva elástica presenta las siguientes características:

- Las deformaciones son recuperables una vez retirada las cargas que las ocasionan, estas desaparecen por completo y el cuerpo regresa a su estado original.
- Las componentes desviadoras y esféricas están desacopladas: campos de esfuerzos de tipo esférico únicamente producen cambios de volumen (pero no distorsiones), mientras que campos de esfuerzos de tipo desviador puro (con componente esférica nula) producen únicamente distorsiones (pero no cambios de volumen).
- No hay rotura: los esfuerzos pueden aumentar de manera indefinida sin que las propiedades del material cambien, ni que el cuerpo llegue a un estado último de rotura.

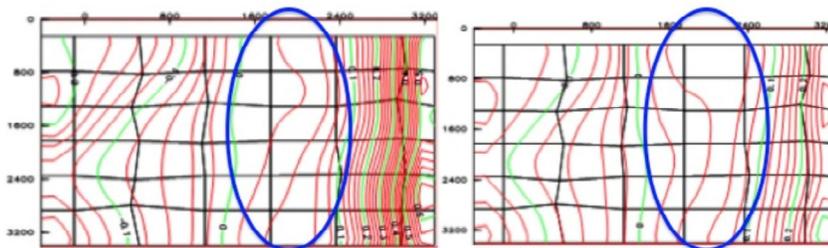
En la ingeniería de yacimientos algunos autores han presentado sus hipótesis respecto a la facilidad de usar un modelo lineal o no lineal, a continuación se citan algunos.

Srithar [2] considera que las arenas poco consolidadas tienen baja densidad en su estado natural y presentan dilatación bajo esfuerzos de cizalla, por tanto los modelos elásticos no representan efectivamente la dilatación de estas arenas.

Settari & Walters [16] presentan un modelo geomecánico acoplado con flujo de fluidos, para analizar la compactación en varios yacimientos de crudo pesado. El estudio evalúa el comportamiento geomecánico basado en los modelos constitutivos elástico no-lineal y elasto-plástico. Los autores concluyen que ambos modelos son capaces de predecir el comportamiento esfuerzo-deformación del yacimiento, pero presentan la formulación elasto-plástica como una aproximación más acertada para entender el comportamiento del material en la post-falla; por otro lado, el modelo elástico no lineal se trabaja para predecir el comportamiento pre-falla del material.

En la Figura 2-3 se presenta el resultado gráfico del trabajo de Han et al. [12] donde se muestra que en la dirección  $x$  la mayor deformación alcanzada es de 0.5 ft en el caso elasto-plástico, y de 0.2 ft en el rango elástico del material. Lo que evidencia la deficiencia en la estimación de esfuerzos cuando se trabaja con un modelo constitutivo elástico lineal, que no dimensiona en su totalidad los fenómenos asociados a la plasticidad.

**Figura 2-3:** Deformación elasto-plástica en la dirección  $x$ . Deformación elástica en la dirección  $x$ . [12]



De acuerdo a lo expuesto por Srithar [2] y Settari [16], el modelamiento elasto-plástico de la formación permitirá conocer con mayor certeza el efecto del estado de esfuerzos sobre las deformaciones del cuerpo.

## **2.3 Simulación de Yacimientos Acoplada a Deformación Elasto-plástica de la Roca.**

Actualmente los simuladores convencionales de yacimientos no siempre reproducen los cambios sobre las propiedades físicas del yacimiento, como la permeabilidad y la porosidad, por la acción del campo de esfuerzos y la deformación asociada a la geomecánica del yacimiento; para obtener el resultado de estos cambios es necesario el acople entre el efecto geomecánico y la simulación numérica de yacimientos, con el fin de contemplar una respuesta real del comportamiento del yacimiento y así tener predicciones más acertadas.

Este acople es una combinación entre las ecuaciones de flujo de fluidos, las cuales predicen el comportamiento del flujo en el medio poroso, y las ecuaciones de geomecánica que representan la respuesta a esfuerzos y deformaciones del esqueleto sólido del mismo medio. Las ecuaciones que incluyen el componente geomecánico se trabajan generalmente bajo la ley constitutiva de elasticidad lineal, la cual plantea una deformación recuperable del medio si se libera del estado de esfuerzos al que está sometido.

Este tipo de consideración no es del todo cierta cuando se trabaja con formaciones poco consolidadas o débiles ya que, como se mencionó anteriormente, estas arenas presentan alta sensibilidad a esfuerzos y su respuesta presenta una deformación permanente del material que no puede ser recuperada; con base en esto se presenta la teoría de plasticidad que brinda un acercamiento del comportamiento post-cedencia de materiales dúctiles como lo son estas rocas.

En los años 90 la industria desarrolla avances importantes en simuladores comerciales con este tipo de análisis. Recientemente simuladores acoplados han sido el punto de

trabajo, los cuales permiten describir el comportamiento del fluido y de la roca simultáneamente. [12]

Yale et al. [19] presentan el desarrollo conceptual de la teoría de plasticidad acoplada a flujo de fluidos, y su estudio permite identificar los siguientes puntos:

- Una dificultad presente en el modelamiento acoplado es la consideración en la simulación de todo el yacimiento y sus límites (yacimiento, overburden, underburden, siderburden) los cuales no son considerados en las simulaciones convencionales de flujo de fluidos. El incremento del trabajo computacional requiere un buen entendimiento de las condiciones geológicas bajo las cuales se requiere el acoplamiento flujo de fluidos-geomecánico.
- El estado de esfuerzos inicial del yacimiento presenta un fuerte efecto sobre el grado de plasticidad y el grado de depletamiento para el mismo incremento de producción de fluido.
- El modelamiento de cambios en permeabilidad con deformación plástica, muestra una fuerte caída de presión en las cercanías al pozo. Las simulaciones acopladas de geomecánica y flujo de fluidos muestran fuertes interacciones entre el *drawdown*, la deformación plástica y la permeabilidad.
- Los esfuerzos iniciales afectan en el inicio de la plasticidad, la magnitud del endurecimiento y la compresibilidad de poro luego de la cedencia plástica.

Dos Santos et al. [20] desarrollan un modelo computacional que implementa la solución de las ecuaciones de esfuerzos considerando elasto-plasticidad que son total o parcialmente acopladas a un simulador comercial de yacimientos aplicado a un campo y a un caso sintético. Efectos como el arenamiento, el fracturamiento y el efecto del estado de esfuerzos en el flujo de fluidos son analizados. El estudio se enfoca en el análisis del acople y se evidencia la mejoría en los resultados del comportamiento de la roca, y es el modelo totalmente acoplado el que permite identificar mejor los efectos del estado de esfuerzos en la roca.

Chin et al. [21] desarrollan un modelo totalmente acoplado de geomecánica y flujo de una sola fase para evaluar los efectos de los esfuerzos y el flujo de fluidos en las propiedades del medio y en desempeño de producción de un pozo. En este trabajo a diferencia de los

anteriores, se evalúa el comportamiento de una prueba de restauración en el pozo, y las implicaciones del análisis considerando un sistema de comportamiento elasto-plástico. De este trabajo se puede concluir que la compactación de la roca, de por sí, no influye en la forma del comportamiento de la presión. Es la variable sensible al esfuerzo, es decir, la permeabilidad, que ocasiona dicho comportamiento. Allí se encontró que en los pozos de producción donde no se evidencia alta compactación, las pruebas pueden ser analizadas por técnicas convencionales.

Desde una perspectiva fundamental, la influencia de la relación esfuerzo-deformación sobre la permeabilidad es crítica para el buen entendimiento del comportamiento de la presión.

El comportamiento de la presión en el cierre del pozo es sensible a la naturaleza constitutiva de la roca. Estos resultados proveen una huella del comportamiento esfuerzo-deformación de la roca.



## 3. Conceptualización Teórica

En este capítulo se presenta una breve descripción conceptual de los componentes asociados a la teoría de plasticidad considerados en este trabajo.

Para plantear una definición de plasticidad es necesario considerar que se ha comprobado experimentalmente que existe un límite, llamado límite elástico, tal que si bajo cierto estado de esfuerzos se supera dicho límite entonces al desaparecer el esfuerzo quedan deformaciones remanentes y el cuerpo no vuelve exactamente a su forma. Es decir, aparecen deformaciones no reversibles. Esta condición se modela bajo el modelo de plasticidad.

La plasticidad de los materiales está relacionada con cambios irreversibles en esos materiales como se mencionó anteriormente. A diferencia del comportamiento elástico que es termodinámicamente reversible, un cuerpo que se deforma plásticamente experimenta cambios de entropía.

A continuación se presentan los componentes básicos de la teoría de plasticidad aplicada a materiales.

### 3.1 Deformación Plástica.

Se asume que la deformación total es una adición de las deformaciones elástica y plásticas como lo indica la Ecuación (3-1):

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (3-1)$$

En donde la deformación elástica está relacionada con el incremento de los esfuerzos a través de la teoría de elasticidad convencional. Cuando una muestra es llevada más allá

de su límite elástico, y el esfuerzo al cual se tenía sometida es liberado, permanecerá en el material una deformación plástica. [22]

### 3.2 Criterios de Cedencia.

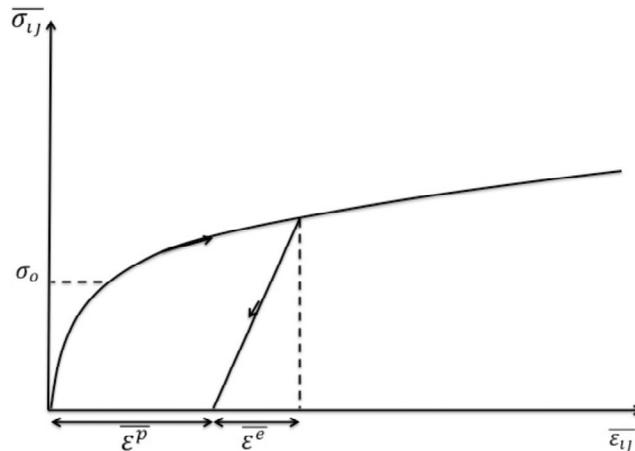
El término cedencia se refiere al inicio del comportamiento inelástico en un material, los criterios para evaluar este tipo comportamiento pueden ser visualizados como una función matemática representada en su mayoría por los esfuerzos y deformaciones.

A través de un criterio de cedencia es posible establecer la superficie en el espacio de esfuerzos en la cual ocurre la cedencia de un material. Normalmente esta condición es usada para definir el inicio del flujo plástico. En general un criterio de cedencia puede ser expresado como se presenta en la Ecuación (3-2):

$$\bar{f}(\sigma_{ij}) = \bar{\sigma}_o \quad (3-2)$$

Donde  $\bar{f}$  es una función escalar de las componentes de esfuerzos agrupados en el tensor  $\sigma_{ij}$ , y  $\bar{\sigma}_o$  es el esfuerzo de cedencia inicial, como se muestra en la Figura 3-1:

**Figura 3-1:** Deformaciones asociadas al estado elástico y plástico del material. [23]



Donde para un valor de  $\sigma_{ij}$  dado, la función de cedencia forma una superficie en el espacio de los esfuerzos principales. [23], [45].

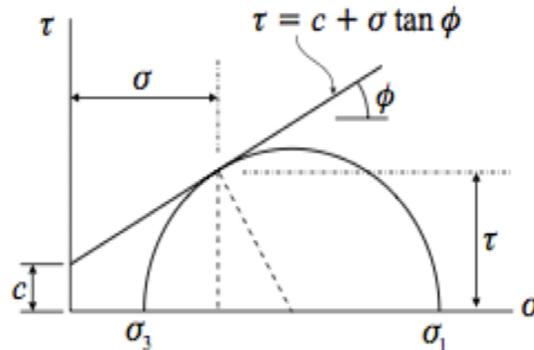
Los criterios se pueden dividir en dos grupos, los que tienen en cuenta el esfuerzo intermedio y los que no dependen de dicho esfuerzo. El primer conjunto de criterios de cedencia, los que no depende del esfuerzo intermedio, postulan que la falla por cizalla ocurre cuando el esfuerzo de corte a lo largo de un plano en la muestra sometida a esfuerzos es suficientemente grande para causar tal efecto.

El criterio de Mohr asume que tal falla puede ser descrita por la relación presentada en la ecuación ( 3-3):

$$\tau = f(\sigma) \quad (3-3)$$

En donde  $\sigma$  es el esfuerzo normal a través de un plano, y  $\tau$  es el esfuerzo de corte a lo largo de dicho plano. En el plano  $\tau$  vs.  $\sigma$ , la ecuación ( 3-3) describe una curva que separa dos regiones, una donde la muestra sometida a esfuerzos no falla por cizalla y otra en donde si lo hace, como se puede apreciar en la Figura 3-2:

**Figura 3-2:** Envolvente de falla de Mohr-Coulomb. [23]



De acuerdo a la **Figura 3-2**, el proceso de falla se debe a cambios en el valor de los esfuerzos  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$ , y el esfuerzo intermedio no afecta al proceso de falla del material, por lo tanto se puede concluir que la falla por cizalla pura en una muestra, de acuerdo a la hipótesis de Mohr-Coulomb, depende únicamente de los esfuerzos principales mínimo y máximo, y no del esfuerzo intermedio. [23], [45].

Al variar la relación asociada de  $f(\sigma_{ij})$  con el esfuerzo de corte, se pueden obtener un sin fin de criterios, en donde todos ellos comparten la forma hexagonal vista en el plano  $\pi$ , en el espacio de los esfuerzos principales. Uno de esos criterios es el de Tresca. [23]

La forma hexagonal de la superficie descrita por Mohr-Coulomb refleja la propiedad de que la falla es independiente del esfuerzo principal intermedio. La superficie no es diferenciable en las esquinas, lo cual genera problemas en el modelamiento numérico que involucran este criterio. [23]

Con la necesidad de considerar el esfuerzo intermedio en el efecto de falla del material se consideran criterios que representen de una manera más suave la superficie de cedencia asociada a los tres esfuerzos principales; uno de los acercamientos es el criterio de Drucker-Prager, que consiste en un cono centrado en el eje hidrostático y es expresado matemáticamente en la ecuación ( 3-4)

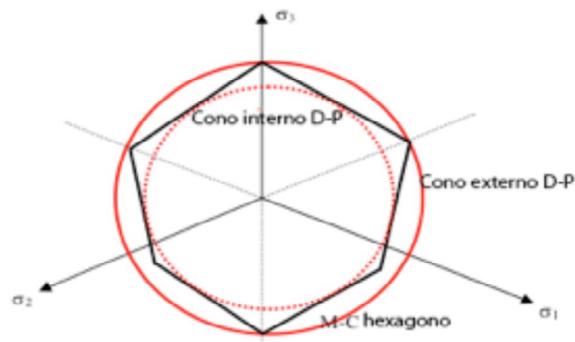
$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = C^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + A)^2 \quad (3-4)$$

En cálculos numéricos en los cuales las esquinas de la superficie de Coulomb presentan problemas, se puede reemplazar por el criterio de Drucker-Prager; en la Figura 3-3 se muestra la diferencia entre las superficies de cedencia atribuidas a cada uno de los criterios expuestos. [23]

### **Criterio Cam-Clay Modificado.**

Desde que se planteó el criterio de plastificación de Von Mises para plasticidad en metales [24], se han desarrollado una gran cantidad de modelos. A raíz de la dependencia de los esfuerzos principales (horizontal máximo y mínimo) en el modelo de Von Mises, se desarrolló el modelo de Drucker-Prager para modelar materiales friccionales [24]. Posteriormente, se propuso la teoría de estados críticos, que asume la existencia de una única superficie en  $p' - q - e$  (Esfuerzo efectivo medio, esfuerzo tangencial e índice de vacíos). Esta teoría propicio grandes avances en el campo de la plasticidad de los suelos; entre los modelos más útiles se encuentra el de Cam-Clay. [25], [26] y [27].

**Figura 3-3:** Superficies de cedencia del criterio de Mohr-Coulomb y Drucker Prager [12].



El modelo de Cam-Clay ha sido validado durante mucho tiempo y debido a la complejidad del comportamiento real de los materiales granulares hizo que se desarrollaran una gran variedad de modelos plásticos macroscópicos. Sin embargo algunos aspectos no se tuvieron en cuenta en este modelo, tales como la dilatancia y el comportamiento bajo cargas cíclicas de arenas sin consolidación, ya que este modelo se basa en una relación única entre el tamaño de la superficie de plastificación y la deformación volumétrica. [28]

Históricamente, se puede considerar el modelo de Cam-Clay como el primer modelo de endurecimiento plástico que fue adoptado de forma general para suelos. Existen otras teorías que basándose en la de Cam-Clay, consiguen un mejor ajuste de los datos experimentales, pero lo hacen a costa de un desarrollo matemático más complejo.

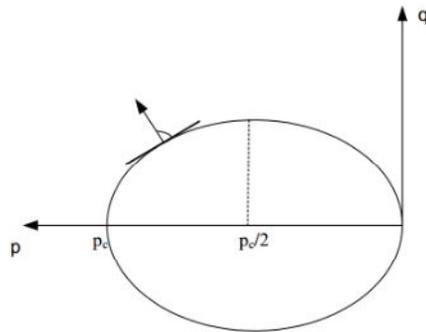
Otra de las hipótesis básicas del modelo de Cam-Clay modificado es considerar que la superficie de fluencia (o plastificación) coincide con el potencial plástico, lo cual implica una regla de flujo asociada y la aceptación del criterio de normalidad (el incremento de deformación plástica es normal, en todo punto, a la curva de fluencia o plastificación). [28]

Las superficies de fluencia son elípticas centradas en el eje  $p$  (**Figura 3-4**), cuya intersección con la recta de estado crítico (CSL) se produce en el máximo de dicha superficie (punto en el que la pendiente de la tangente es nula y, por tanto, presenta un estado de elasto-plasticidad perfecta ( $dp_c = 0$ )), donde  $p_c$  la presión de pre-consolidación. A la izquierda de dicho punto, se produce un comportamiento contractivo, es decir, pérdida de volumen y endurecimiento ( $dp_c > 0$ ), mientras a la derecha se

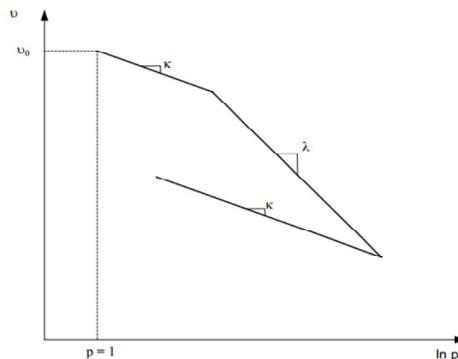
produce un comportamiento dilatante, es decir, aumento de volumen y reblandecimiento ( $dp_c < 0$ ). De esta forma, se obtiene un modelo sencillo y bastante representativo del comportamiento real de determinados suelos, y aunque no permite predecir un comportamiento exacto, si define el comportamiento dual de contracción-dilatancia de la formación en estudio. [29]

El modelo de Cam-Clay modificado se usa en muchas aplicaciones geotécnicas ya que se pueden implementar las principales características del comportamiento real de suelos granulares como son la presión intersticial, el endurecimiento por deformación, el reblandecimiento y el acople de las deformaciones plásticas tanto volumétricas como desviadoras. Una de las bases sobre las que se sustenta este modelo es la variación lineal del índice de vacíos (o el volumen específico) con el logaritmo del esfuerzo normal que describe el endurecimiento por deformación del suelo (**Figura 3-5**).

**Figura 3-4:** Superficie de fluencia elíptica en el espacio p-q. [30]



**Figura 3-5:** Línea de consolidación noval y línea de descarga-recarga en el espacio v-ln p. [30]



Se define el estado crítico como aquella combinación de esfuerzos en la que la deformación de cizalla plástica progresa indefinidamente sin cambio en el esfuerzo ni el volumen, dicho estado crítico se alcanza cuando se presentan deformaciones plásticas y la relación de esfuerzos está representada por la Ecuación ( 3-5)

$$\frac{q_c}{p_c} = M_c \quad (3-5)$$

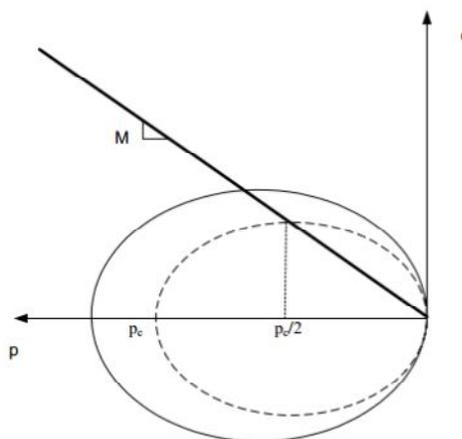
Donde  $M_c$  es la pendiente de la línea de estado crítico.

Cada superficie de cedencia está asociada con una curva de descarga-carga en el espacio  $p - v$  que intersecta a la curva en  $p = p_c$ . Por lo tanto, el crecimiento de la superficie de plastificación está ligado con la variación del esfuerzo de pre-consolidación,  $p_c$ .

Se define la función de plastificación del modelo de Cam-Clay modificado gráficamente como se presenta en la **Figura 3-6**, y matemáticamente como se presenta en la Ecuación ( 3-6).

$$\bar{f} = \bar{f}(p, q, p_c) = \frac{q^2}{M_c^2} + p(p - p_c) = 0 \quad (3-6)$$

**Figura 3-6:** Función de plastificación. [30]



Donde  $p$  y  $q$  son los esfuerzos normal y desviador, respectivamente. Estos invariantes se definen en las ecuaciones ( 3-7) y ( 3-8) respectivamente.

$$p = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma_{ij}) = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (3-7)$$

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\xi\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2} \quad (3-8)$$

Donde  $\sigma_{ij}$  es el tensor de esfuerzos y  $\xi$  es la componente desviadora de dicho tensor. La función de plastificación (Ecuación (3-6)) es un elipsoide que está definido por dos parámetros,  $M_c$  la pendiente de la línea de estado crítico y  $p_c$  la presión de pre-consolidación.

El modelo de Cam-Clay modificado se caracteriza por un módulo volumétrico  $K$  que varía linealmente con el esfuerzo efectivo normal. Por otro lado, el módulo cortante  $G$  en algunos modelos se determina a través del módulo volumétrico  $K$  (suponiendo que la relación de Poisson permanece constante). Esta definición conduce a un modelo elástico no lineal, en el cual la energía puede disiparse en casos de carga cíclica. [30]

Derivando la ecuación (3-6) se obtiene la ecuación (3-9)

$$\frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \right) \delta_{ij} + \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} \right) \hat{\eta} \quad (3-9)$$

Donde  $\hat{\eta} = \frac{\xi}{\|\xi\|}$ , las derivadas de  $F$  con respecto a  $p$ ,  $q$  y  $p_c$  se representan en el conjunto de ecuaciones (3-10).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} &= 2p - p_c \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} &= \frac{2q}{M^2} \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial p_c} &= -p \end{aligned} \quad (3-10)$$

La ecuación (3-7) puede ser descrita vectorialmente como e presenta en la Ecuación (3-11).

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{11}} \\ \frac{\partial p}{\partial \sigma_{22}} \\ \frac{\partial p}{\partial \sigma_{33}} \\ \frac{\partial p}{\partial \sigma_{12}} \\ \frac{\partial p}{\partial \sigma_{23}} \\ \frac{\partial p}{\partial \sigma_{31}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

Y la derivada  $\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}}$  puede ser expresada como la Ecuación ( 3-12)

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial q}{\partial \sigma_{11}} \\ \frac{\partial q}{\partial \sigma_{22}} \\ \frac{\partial q}{\partial \sigma_{33}} \\ \frac{\partial q}{\partial \sigma_{12}} \\ \frac{\partial q}{\partial \sigma_{23}} \\ \frac{\partial q}{\partial \sigma_{31}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[(\sigma_{11} - \sigma_{22}) - (\sigma_{33} - \sigma_{11})]}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[(\sigma_{22} - \sigma_{22}) - (\sigma_{11} - \sigma_{22})]}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[(\sigma_{33} - \sigma_{11}) - (\sigma_{22} - \sigma_{33})]}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_{12}}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_{23}}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_{31}}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

El modelo matemático en su forma vectorial para el criterio de cedencia de Cam-Clay modificado puede ser expuesto de la siguiente manera.

$$\frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3-13)$$

De la ecuación ( 3-10) y al considerar que las derivadas que componen el criterio de cedencia están expresadas por las ecuaciones ( 3-13) y ( 3-14), se puede definir vectorialmente el criterio de cedencia de Cam – Clay modificado, Ecuación ( 3-17).

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial p} = 2p - p_c = \frac{2}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - p_c \quad (3-14)$$

y

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial q} = \frac{2q}{M^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2}}{M^2} \quad (3-15)$$

Se define el parámetro  $\beta$  en la ecuación ( 3-16), para facilitar el trabajo en los vectores.

$$\beta = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2}}{M^2} \quad (3-16)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} \\
 & = \begin{bmatrix} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - p_c \\ (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - p_c \\ (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - p_c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\sqrt{2}} \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22}) - (\sigma_{33} - \sigma_{11})}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{2}} \frac{(\sigma_{22} - \sigma_{33}) - (\sigma_{11} - \sigma_{22})}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{2}} \frac{(\sigma_{33} - \sigma_{11}) - (\sigma_{22} - \sigma_{33})}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_{12}}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_{13}}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_{23}}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \end{bmatrix} \quad (3-17)
 \end{aligned}$$

### 3.3 Regla de Flujo Plástico

¿Que sucede si el punto de esfuerzos llega a la superficie de cedencia? Intuitivamente se espera que la cedencia esté acompañada por algún incremento en las deformaciones, sobre y bajo la deformación elástica que se ha formado mientras el punto de esfuerzos esta sobre la superficie. Se espera también que el comportamiento plástico sea más suave que el comportamiento elástico, con el resultado de que las deformaciones se acumulen más rápidamente. [22]

Una de las mayores diferencias entre la respuesta plástica a la respuesta elástica es que el flujo plástico será irreversible. Mientras el material es elástico se puede aumentar el

esfuerzo con un incremento de deformación consecuente, y la deformación se recupera completamente simplemente volviendo al estado de esfuerzos inicial, si la cedencia ocurre esto no es posible. La deformación plástica no es recuperable con una simple descarga, si se reducen los esfuerzos a su estado inicial se recuperara la deformación elástica ocurrida hasta que se llegó a la superficie de cedencia, pero la deformación plástica será intrínseca en el cuerpo.

Es razonable asumir que las componentes de la deformación plástica pueden ser organizadas en una matriz cuadrada exactamente igual que para las deformaciones elásticas. Se espera que esta matriz sea simétrica y que tenga en su diagonal principal los valores de  $\varepsilon^p_1, \varepsilon^p_2, \varepsilon^p_3$ . [22]

Para definir la regla de flujo, es necesario considerar el tipo (asociada o no asociada). A continuación se presenta una descripción de cada una.

### 3.3.1 Regla de Flujo Asociada.

Una forma simple expresar la relación de las deformaciones plásticas y los esfuerzos es definir la regla de flujo de la forma presentada en la Ecuación (3-18):

$$\partial\varepsilon^p = \lambda_p \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (3-18)$$

Donde  $f$  denota la condición de cedencia como una función general de la componente de la matriz de esfuerzos, la expresión  $\partial f / \partial \sigma$  es la derivada parcial con respecto a cualquier componente de la matriz de esfuerzos asociadas a las componente de la matriz de deformaciones plásticas. Las magnitudes de las componentes de deformación son determinadas dentro del coeficiente  $\lambda_p$  el cual es considerado similar al multiplicador de *Lagrange*. La única restricción conocida para el multiplicador plástico  $\lambda_p$  es que debe ser positivo.

La ecuación (3-18) es llamada regla de flujo asociada. El nombre se refiere de hecho a que las deformaciones plásticas se asocian directamente con la superficie de cedencia. Es posible introducir la regla de flujo no asociada cuando  $f$  es reemplazada por otra

función llamada  $g$ , donde la superficie de cedencia no es la misma que la definida por el criterio de cedencia, en este caso es denominada como función de potencial plástico. Las reglas de flujo no asociadas suelen negar muchas de las ventajas matemáticas asociadas al asumir una superficie de cedencia, pero es aplicable a diferentes tipos de materiales. [22]

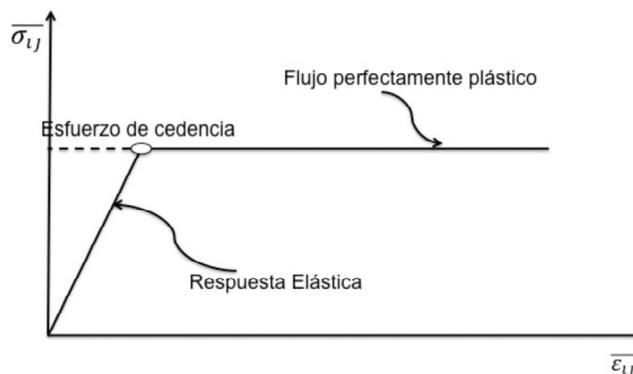
Por la indeterminada naturaleza de  $\lambda_p$ , la ecuación (3-18) no especifica directamente la magnitud de las deformaciones plásticas. En muchos casos la magnitud de la deformación plástica no será conocida por falta de información. En general se pueden considerar dos casos:

### Caso 1. Plasticidad perfecta.

Se dice que un material es perfectamente plástico si, sobre la cedencia, las deformaciones plásticas crecen sin límite dado que no hay cambios en los esfuerzos ni en las condiciones iniciales y límites del sistema.

La respuesta esfuerzo - deformación bajo esfuerzo de tensión simple para una material plástico perfecto es la que se muestra en Figura 3-7. Se observa que hay comportamiento lineal perfecto hasta que se alcanza el punto de cedencia, después de la cedencia el cambio de esfuerzos es función de las deformaciones plásticas acumuladas.

Figura 3-7: Caso de plasticidad perfecta. [22]



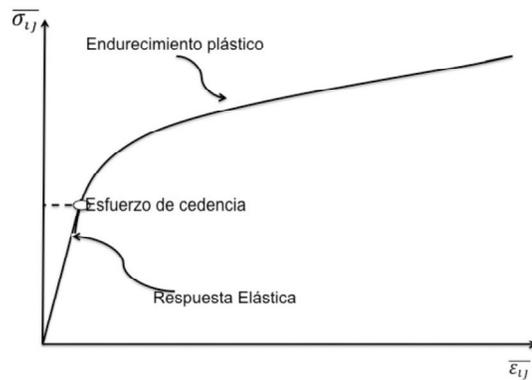
### Caso 2. Plasticidad por endurecimiento.

En contraste con la plasticidad perfecta, el trabajo por endurecimiento implica que la superficie de cedencia puede cambiar de alguna manera una vez la cedencia ha iniciado.

Usualmente la forma en que la superficie de cedencia cambia está relacionada con el incremento en la deformación plástica o el incremento del trabajo plástico que ha sido acumulado. Esto introduce un parámetro extra en la descripción de la superficie de cedencia mencionada anteriormente.

La Figura 3-8 presenta el comportamiento del material bajo trabajo por endurecimiento, y el esfuerzo y la deformación tienen una relación funcional uno a uno antes y después de la cedencia.

**Figura 3-8:** Plasticidad por endurecimiento. [22]



### 3.3.2 Regla de Flujo No Asociada

Si se compara la tasa de dilatación sugerida como  $\epsilon^p = \lambda_p(1 - N)$ , donde  $N = \frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi}$ , con datos de pruebas reales sobre formaciones porosas, se concluye que los valores predichos de  $\epsilon^p$  a menudo están lejos de los valores reales. [22]

Para muchas formaciones porosas, la cizalla está acompañada por compactación más que dilatación. Siempre para sistemas porosos dilatados, la tasa de dilatación es usualmente no tan grande como se expresa en  $\partial\epsilon^p$ . Para suelos que se dilatan se requiere expandir la superficie de cedencia. Estos fenómenos se pueden acomodar bajo los modelos de Cam-Clay y Cam-Clay modificado. [22]

La segunda forma de atender este problema de excesiva dilatación es abandonar la condición de directa relación entre esfuerzos y deformaciones plásticas e introducir el concepto de regla de flujo no asociada. La regla de flujo no asociada es

matemáticamente similar a la regla de flujo asociada, con una diferencia esencial de que la función de cedencia es reemplazada con otra función llamada potencial plástico,  $g = g(\sigma)$ .

La función  $g$  se refiere a una función de potencial plástico y se presenta en la Ecuación ( 3-19).

$$\partial \varepsilon^p = \lambda_p \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (3-19)$$

Con  $g = f$ , el flujo no asociado ocurre cuando  $g$  es diferente de  $f$ , entonces la regla de flujo resultara en una tasa de deformación plástica que no será normal a la superficie de cedencia. Esta es la desventaja de no tener relación directa entre esfuerzos y deformaciones plásticas, matriz elasto-plástica no simétrica, especialmente con respecto a la aplicación de ciertos teoremas importantes, pero los problemas de dilatación plástica excesiva pueden ser rectificadas.

Se puede simplificar la función  $g$  como se muestra en la Ecuación ( 3-20):

$$g = \sigma_{jj} - M\sigma_{ii} \quad (3-20)$$

Donde se define una función de potencial plástico asociada a el ángulo de dilatancia.

Donde  $M$  se define como (Ecuación ( 3-21)):

$$M = \frac{1 + \text{sen } \psi}{1 - \text{sen } \psi} \quad (3-21)$$

Donde  $\psi$  es el ángulo de dilatancia para el material. Ahora, escribiendo en términos de la regla de flujo asociada se tienen las Ecuaciones (( 3-22), ( 3-23) y ( 3-24)):

$$\partial \varepsilon^p_{xx} = \lambda_p \frac{\partial g}{\partial \sigma_{xx}} = -\lambda M \quad (3-22)$$

$$\partial \varepsilon^p_{yy} = \lambda_p \frac{\partial g}{\partial \sigma_{yy}} = \lambda \quad (3-23)$$

Si  $\dot{\varepsilon}_{zz} = 0$ , la tasa de deformación volumétrica será:

$$\partial \varepsilon^p = \lambda(1 - M) \quad (3-24)$$

Claramente, el valor de  $\psi$  se puede ajustar para proveer cualquier deformación volumétrica plástica que se requiera.

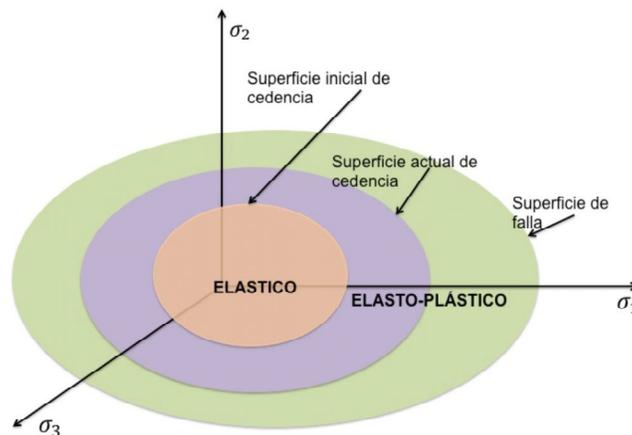
### 3.4 Regla de Endurecimiento.

La regla de endurecimiento describe en general como se modifica la superficie de fluencia conforme aumenta la deformación plástica. La forma más sencilla en la que la superficie de cedencia puede variar es simplemente aumentando de tamaño sin cambiar su forma. [23] Lo anterior puede ser descrito matemáticamente por la Ecuación (3-25):

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, k) = 0 \quad (3-25)$$

La variable correspondiente al endurecimiento denotada como  $k$ , la cual describe los efectos del endurecimiento, sería función de algún parámetro que mida la deformación plástica acumulada. La **Figura 3-9** esquematiza el comportamiento del endurecimiento.

**Figura 3-9:** Comportamiento por endurecimiento.



En la Figura 3-9 se define la superficie de cedencia inicial, y una superficie de cedencia actual, es decir, la superficie resultante de alguna deformación plástica. También se

presenta la superficie de falla, donde el material ya se rompe. Para un material idealmente plástico, la superficie de cedencia inicial coincidiría con la superficie de falla. [23]

El uso de la variable  $k$  para describir el endurecimiento constituye una simplificación debido a la existencia de seis componentes de deformación plástica. Hay dos maneras con las que usualmente se relaciona el parámetro  $k$  con las deformaciones plásticas. En la primera se asume que  $k$  es una función de las deformaciones plásticas totales, y se habla de deformación por endurecimiento y puede ser descrito matemáticamente así (Ecuación ( 3-26)):

$$k = k \left( \int d\varepsilon_{ij}^p \right) \quad (3-26)$$

En el segundo se asume que  $k$  puede ser relacionado con el trabajo plástico total, y se habla en este caso de trabajo por endurecimiento, ecuación ( 3-27).

$$k = k \left( \sigma_{ij} \int d\varepsilon_{ij}^p \right) \quad (3-27)$$

El endurecimiento generalmente puede ser descrito por dos teorías. La teoría de endurecimiento isotrópico explica que la superficie de cedencia se expandirá de manera uniforme alrededor del eje hidrostático en donde se cumple que  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ; mientras que la teoría de endurecimiento cinemático explica la traslación de la superficie de falla en el espacio de esfuerzos.

En la práctica, el endurecimiento de un material debe ser descrito como una combinación de estos dos modos o incluso un comportamiento más complicado, en las cuales se deforman diferentes partes de la superficie de cedencia de varias maneras.

Para tener un acercamiento al comportamiento del endurecimiento del material se plantea el desarrollo de la relación hiperbólica para una arena poco consolidada presentada por Zervos et al, 1998 [31], donde define la cohesión como se presenta en la ecuación ( 3-28).

$$C_o = C_{oi} + \frac{\bar{\varepsilon}_p}{a_2 + b_2 \bar{\varepsilon}_p} \quad (3-28)$$

Donde  $C_{oi}$  es la cohesión inicial,  $a_2$  y  $b_2$  son constantes determinadas desde un procedimiento de calibración de laboratorio.

En función de la ecuación ( 3-28) el comportamiento por endurecimiento puede ser definido por la expresión presentada por Han et al. [12],

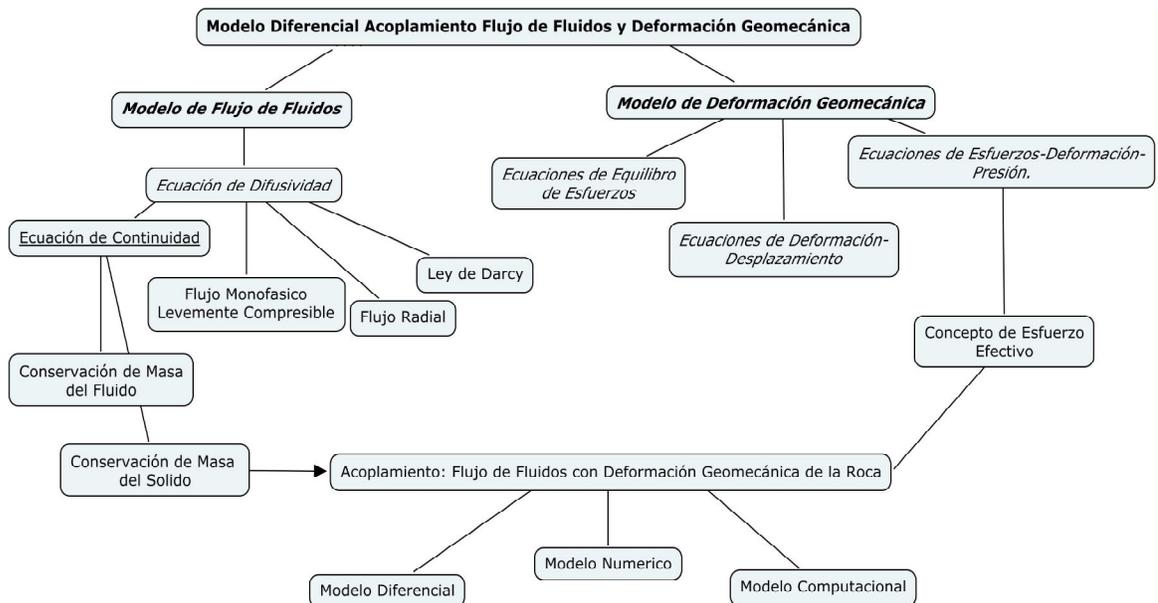
$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \varepsilon_{ij}^p} = -\frac{6 \cos \varphi}{3 - \sin \varphi} \frac{a_2}{(a_2 + b_2 \bar{\varepsilon}_p)^2} \frac{\sigma_{ij}}{\bar{\sigma}} \quad (3-29)$$

La ecuación ( 3-29) representa una de las variables necesarias para plantear el modelo matemático, como se verá en el Capítulo 4.

## 4. Modelo Diferencial de Flujo de Fluidos Acoplado a la Deformación Geomecánica de la Roca.

El presente trabajo, como se ha expuesto anteriormente, desarrolla un modelo de flujo de fluidos acoplado con la deformación geomecánica de la roca, donde esta se deforma elasto-plásticamente. El modelo se divide en dos partes, la primera parte es el modelo diferencial y la segunda parte corresponde al modelo numérico. La **Figura 4-1** presenta un esquema del modelo de flujo de fluidos y el modelo de deformación geomecánica, y las componentes de cada uno de estos modelos.

**Figura 4-1:** Acoplamiento de las ecuaciones de flujo de fluidos con las ecuaciones geomecánicas.



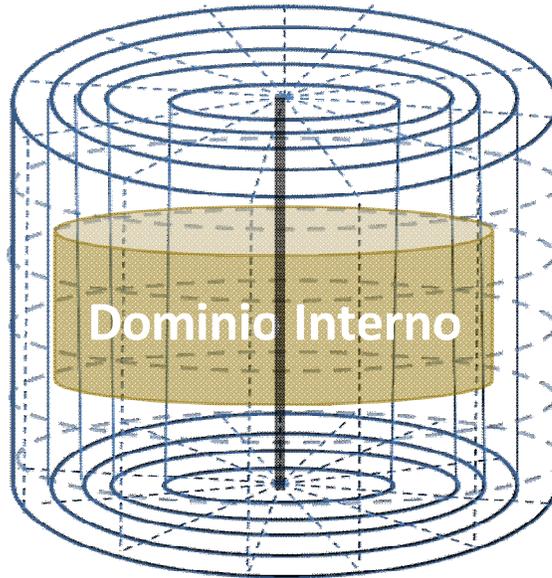
Es importante tener en cuenta que la ley de flujo de fluidos asumida en el presente trabajo está dada por la Ley de Darcy, la cual es válida para flujo continuo. Sin embargo,

cuando es combinada con la ley de la conservación de la masa y la ecuación de estado, se introduce el tiempo, caso en el cual se levanta la restricción de flujo continuo.

## 4.1 Modelo Físico

El modelo físico para el yacimiento de hidrocarburos es representado por una sucesión de cilindros concéntricos de espesor variable, dividido en su eje vertical por estratos y en el plano horizontal por ángulos de longitud de arco constante, con un pozo productor ubicado en el centro. El sistema físico se describe en coordenadas cilíndricas tal y como se ilustra en la **Figura 4-2**.

**Figura 4-2:** Modelo físico pozo-yacimiento en coordenadas cilíndricas.



### 4.1.1 Suposiciones del Modelo Físico.

- Flujo monofásico e isotérmico (fluido levemente compresible).
- La deformación de la roca se describe con la teoría de elasto-plástica.
- Las propiedades de la roca son función del esfuerzo efectivo promedio.
- El pozo es vertical.
- Medio poroso isotrópico, horizontal, homogéneo.
- Un solo fluido satura el medio poroso.
- Fuerzas gravitacionales despreciables.
- El fluido no reacciona con los minerales de la roca.

- Dominio interno donde se consideran las ecuaciones de geomecánica y las ecuaciones de flujo de fluidos y dominio externo donde solamente se consideran las ecuaciones de geomecánica.

## 4.2 Modelo Matemático

A continuación se presenta el desarrollo del modelo de flujo de fluidos, y de las ecuaciones de deformación geomecánica considerando comportamiento plástico de la roca. Es importante mencionar que el flujo de fluidos a través de medios porosos sensibles a esfuerzos y deformaciones es función de la presión de poro y del estado de esfuerzos y deformaciones al que está sometido el yacimiento. Cuando se presenta flujo de fluidos (sea por producción y/o inyección al yacimiento), la presión de poro cambia espacial y temporalmente, por lo tanto el esfuerzo efectivo que actúa sobre la roca también lo hace, lo cual trae como consecuencia una deformación en el esqueleto sólido de la roca. Tal modificación en la estructura de la roca produce cambios en la capacidad de flujo (variación de la permeabilidad) del sistema.

El proceso físico es totalmente acoplado por esta razón, las ecuaciones que describen el flujo de fluidos y la deformación geomecánica de la roca también deben considerarse en forma totalmente acoplada.

### 4.2.1 Modelo de flujo de fluidos en un medio poroso

El modelo de flujo de fluidos desarrollado considera el flujo monofásico tridimensional de petróleo en un medio poroso deformable. El modelo es producto de la combinación de las siguientes relaciones:

- Conservación de masa del fluido,
- Conservación de masa del sólido,
- Ley de flujo,
- Ecuación de estado.

En el Anexo 1 se presenta el desarrollo completo de las ecuaciones que se presentan a continuación.

**Conservación de masa de flujo de fluidos:** Se realiza un balance de masa en un elemento de volumen infinitesimal del medio poroso en coordenadas cilíndricas, durante un incremento de tiempo  $\Delta t$

La ecuación de continuidad para el fluido se desarrolla en el Anexo 1 ecuación (A- 9)

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho_f \varphi u_{fr} r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho_f \varphi u_{f\theta})}{\partial \theta} - \frac{\partial(\rho_f \varphi u_{fz})}{\partial z} = \frac{1}{V_t} \frac{\partial(\rho_f V_t \varphi)}{\partial t} + \tilde{q}_f \quad (4-1)$$

Dónde:

$\rho_f$  = densidad del fluido

$\varphi$  = Porosidad del medio

$u_{fr}, u_{f\theta}$  y  $u_{fz}$  = Son las velocidades del fluido en la dirección  $r, \theta$  y  $z$  respectivamente.

$V_t$  = Volumen total.

$\tilde{q}_f$  = Cantidad de masa de fluido que entra o sale por fuentes o sumideros por unidad de volumen total por unidad de tiempo.

**Conservación de masa del sólido:** La ecuación de continuidad para el sólido está dada por la ecuación (A- 11)

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho_s(1-\varphi)u_{sr}r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho_s(1-\varphi)u_{s\theta})}{\partial \theta} - \frac{\partial(\rho_s(1-\varphi)u_{sz})}{\partial z} = \frac{1}{V_t} \frac{\partial(\rho_s V_t(1-\varphi))}{\partial t} + \tilde{q}_s \quad (4-2)$$

Dónde:

$\rho_s$  = densidad del sólido

$\varphi$  = Porosidad del medio

$u_{sr}, u_{s\theta}$  y  $u_{sz}$  = Son las velocidades del sólido en la dirección  $r, \theta$  y  $z$  respectivamente.

$V_t$  = Volumen del solido total.

$\tilde{q}_s$  = Cantidad de masa de solido que entra o sale por fuentes o sumideros por unidad de volumen total por unidad de tiempo.

**Ley de Flujo de fluidos:** De la teoría de la ley de Darcy, la ley de flujo de fluidos se obtiene a partir de la velocidad real de fluido, donde la velocidad real del fluido va a estar dada por la ecuación ( 4-3).

$$\varphi u_{freal})_i = \frac{q_i}{A_t} = -\frac{K}{\mu_f} \nabla p \quad (4-3)$$

Teniendo en cuenta la velocidad del fluido con respecto al sólido, la ecuación anterior se puede expresar por la ecuación ( 4-4)

$$\varphi u_{frelativo})_i = u_{fi} \varphi - u_{si} \varphi = -\frac{K}{\mu_f} \nabla p \quad (4-4)$$

De la cual se obtiene una relación para la velocidad del fluido, y se expresa como se muestra en la Ecuación ( 4-5).

$$u_{fi} \varphi = u_{si} \varphi - \frac{K}{\mu_f} \nabla p \quad (4-5)$$

En las ecuaciones ( 4-3), ( 4-4) y ( 4-5), el subíndice  $i$  puede ser  $r, \theta$  ó  $z$ , dependiendo de la dirección de flujo considerada.

$u_{freal}$  = velocidad real

$u_{frelativo}$  = Velocidad relativa del fluido con respecto al solido

$u_{fi}$  = Velocidad real del fluido

$u_{si}$  = Velocidad real del solido

$\nabla p$  = Gradiente de presión

$K$  = Tensor de permeabilidad del medio

$\mu_f$  = Viscosidad del fluido.

**Ecuación de estado:** Se tiene de la ecuación de estado general la ecuación ( 4-6)

$$c_f = \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial p} \quad (4-6)$$

Para el caso de un fluido ligeramente compresible como el petróleo la ecuación conduce a la siguiente ecuación de estado (Ecuación ( 4-7))

$$\rho_f = \rho_{f0} e^{c_f(p-p_0)} \quad (4-7)$$

Dónde:

$\rho_f$  = Densidad del fluido a presión p.

$\rho_{f0}$  = Densidad base del fluido a presión base  $p_0$ .

$c_f$  = Compresibilidad del fluido.

La ecuación ( 4-8) se deduce a partir del procedimiento expuesto en el Anexo 1.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho_f \frac{k_r}{\mu_f} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \rho_f \frac{k_\theta}{\mu_f} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_f \frac{k_z}{\mu_f} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ & = - \frac{\rho_f \phi \tilde{q}_s}{\rho_s (1 - \phi)} + \rho_f \left[ (c_{bc} - c_r (1 + \phi)) \frac{\partial p}{\partial t} - (c_{bc} - c_r) \frac{d}{dt} \left( \frac{\varepsilon_v}{c_{bc}} \right) \right] + \tilde{q}_f \end{aligned} \quad (4-8)$$

**Ecuación de porosidad:** En la ecuación de flujo de ( 4-8) aparece la porosidad, la cual es función de la presión de poro y del estado de esfuerzos, por lo cual se hace necesario obtener una expresión para calcular esta propiedad en cada nivel de tiempo. La expresión para porosidad, según Zimmerman et al. [32], se plantea en la ecuación ( 4-9).

$$d\varphi = -(c_{bc}(1 + \varphi) - c_r)(d\bar{\sigma} - dp) \quad (4-9)$$

Donde  $\bar{\sigma}$  es el esfuerzo total promedio.

#### 4.2.2 Modelo de deformación geomecánica de la roca

Las relaciones principales en las que se basa el modelo de deformación geomecánica son las siguientes:

- Relaciones de equilibrio de esfuerzos,
- Relaciones deformación – desplazamiento,
- Relaciones esfuerzo-deformación-presión.

El desarrollo completo de estas ecuaciones se presenta en el Anexo 2.

Las condiciones iniciales tanto para la presión de poro como para los desplazamientos son requeridos para la solución de las ecuaciones diferenciales que describen el modelo. Generalmente el valor de la presión de poro al tiempo inicial es conocido, sin embargo, los desplazamientos al tiempo inicial no lo son. Para evitar este inconveniente se hace necesario expresar las ecuaciones del modelo de deformación en términos de incrementos de desplazamientos con el tiempo, en lugar del valor total de los desplazamientos [33].

La relación esfuerzo – deformación presentada en este trabajo es del tipo elasto-plástico, con la cual será posible estudiar el comportamiento elástico y plástico con pequeñas deformaciones de una formación productora.

**Relaciones de equilibrio de esfuerzos:** Para conservar el equilibrio de fuerzas después del cambio en la presión se deben cumplir las siguientes ecuaciones de equilibrio de esfuerzos, planteadas por Fjaer et al. [34], donde para un elemento de volumen infinitesimal en coordenadas cilíndricas bajo un estado de esfuerzos dado, la forma en la cual los esfuerzos varían de un punto a otro es gobernada por las ecuaciones de

equilibrio de esfuerzos, las cuales se expresan como se muestra en las ecuaciones (B-1), (B-2) y (B-3) del Anexo 2.

En las ecuaciones (B-1), (B-2) y (B-3)  $\Delta\sigma_i$ ,  $i = r, \theta, z$  es el esfuerzo total incremental en la dirección  $i$ ;  $\Delta\sigma_{rz}$ ,  $\Delta\sigma_{r\theta}$  and  $\Delta\sigma_{\theta z}$  son los esfuerzos de corte incrementales.

**Ecuaciones deformación - desplazamiento:** Para un cuerpo sometido a un estado de esfuerzos se definen dos tipos de deformaciones:

- Deformación normal, que ocurre en dirección normal al plano.
- Deformación de cizalla, que ocurre en dirección paralela al plano.

Las deformaciones en función de los desplazamientos están dadas en forma incremental para coordenadas cilíndricas por las ecuaciones (B-4), (B-5), (B-6), (B-7), (B-8) y (B-9) del Anexo 2.

En estas ecuaciones,  $\Delta\varepsilon_i$  y  $\Delta u_i$ ,  $i = r, \theta, z$  son las deformaciones incrementales normales y los desplazamientos respectivamente, en la dirección  $i$ ; mientras que  $\Delta\varepsilon_{r\theta}$ ,  $\Delta\varepsilon_{rz}$  y  $\Delta\varepsilon_{\theta z}$  son deformaciones de corte incrementales.

**Ecuaciones geomecánicos para un medio poroso:** Para relacionar las ecuaciones a medios porosos saturados de fluidos, se debe incluir el concepto de esfuerzo efectivo y trabajar con base en este, el cual considera el esfuerzo total y la presión de poro [33]. El esfuerzo efectivo se define en la ecuación (4-10).

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \alpha p \quad (4-10)$$

Dónde:

$\sigma_{ij}$  = Esfuerzo total,

$\alpha$  = Coeficiente de Biot,

$p$  = Presión de poro.

Al extender la aplicación de la definición de esfuerzo efectivo para los esfuerzos de cizalla no se produce ningún cambio, pues en el caso de estos, el esfuerzo efectivo es igual al esfuerzo total dado que la presión de poro actúa en dirección normal a la superficie de la roca.

Las anteriores expresiones se tienen para el caso de tener una deformación elástica de la roca. Para hallar las expresiones correspondientes al caso elasto-plástico, se requiere de un análisis diferente que se presentara a continuación.

#### **Incremento de la relación esfuerzo-deformación-presión.**

Un material puede ser clasificado como elasto-plástico si después de ser cargado más allá de cierto límite (límite de cedencia del material), se presenta en él una deformación permanente (plástica) una vez se ha liberado de la carga a la que inicialmente estaba sometido. El incremento de desplazamiento total en el caso elasto-plástico, está compuesto por una parte elástica y otra plástica, como se muestra en la ecuación ( 4-11)

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (4-11)$$

Los incrementos en los esfuerzos y las deformaciones elásticas están relacionados por la ley de Hooke generalizada, como se presenta en la ecuación ( 4-12)

$$d\varepsilon_{ij} = [D_e]^{-1} d\sigma_{ij} + d\varepsilon_{ij}^p \quad (4-12)$$

Además, el tensor de incremento en los esfuerzos está dado por la ecuación ( 4-13)

$$d\sigma_{ij} = [D_e](d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^p) \quad (4-13)$$

Donde  $d\varepsilon_{ij}^p$  son los incrementos de la deformación plástica.

Como se presentó en el Capítulo 2, cuando la función de potencial plástico se hace idéntica a una función  $d\bar{f}$ , la regla de flujo asociada es la que permite definir el comportamiento elasto-plástico del material; en caso contrario, se dice que la regla de flujo es “no –asociada”. La regla de flujo no asociada se trabaja cuando la formación presenta una dilatación significativa, en este caso para estudiar la compactación del sistema se utilizara el caso más simple que es la regla de flujo asociada que puede expresarse en términos del incremento en la deformación plástica  $\lambda_p$ , [45] como se presenta en la ecuación ( 4-14)

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda_p \frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \quad (4-14)$$

La función  $\bar{f}$  es una función escalar de los componentes de los esfuerzos contenidos en el vector  $\sigma_{ij}$  y  $\bar{f} = f(\sigma_o)$ , en donde  $\sigma_o$  es el esfuerzo de cedencia inicial. Para un valor dado de  $\sigma_o$ , la función  $\bar{f}$  forma una superficie en el espacio de los esfuerzos principales. Existen varios modelos para definir el parámetro  $\sigma_o$  de acuerdo a varios autores, como lo son por ejemplo Mohr-Coulomb y Drucker-Prager.

Al reemplazar la ecuación ( 4-14) en la ecuación ( 4-12) se obtiene la expresión ( 4-15)

$$d\sigma_{ij} = [D_e] \left( d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^p \frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \right) \quad (4-15)$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación ( 4-15) por el término  $\left( \frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \right)^T$ , se tiene lo siguiente:

$$\left( \frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \right)^T d\sigma_{ij} = \left( \frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \right)^T [D_e] \left( d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^p \frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \right) \quad (4-16)$$

En este punto es necesario plantear de nuevo el concepto de la regla de endurecimiento de un material, la cual especifica la respectiva modificación de la superficie de cedencia

inicial durante la deformación plástica. Con respecto a lo anterior, se tienen varias reglas disponibles. [45].

Una de las más simples expuesta en el Capítulo 2, es la llamada regla de endurecimiento isotrópico (Ecuación ( 3-28)) la cual plantea que las superficies de cedencia posteriores pueden estar representadas por la siguiente expresión (Ecuación ( 4-17)).

$$\bar{f}(\sigma_{ij}) = \bar{\sigma}_{ij}(k^*) \quad (4-17)$$

Donde  $k^*$  es el parámetro de endurecimiento y se asume que es función de la deformación plástica efectiva  $d\bar{\varepsilon}_{ij}^p$ . Dado que  $k^*$  es función de  $\bar{\varepsilon}_{ij}^p$ , la ecuación ( 4-17) puede ser escrita como se plantea la ecuación ( 4-18)

$$\bar{f}(\sigma_{ij}) = \bar{\sigma}_{ij}(\bar{\varepsilon}_{ij}^p) \quad (4-18)$$

Donde  $\bar{\sigma}_{ij}$  es el esfuerzo promedio.

Así, en términos generales, la ecuación relacionada con la regla de flujo del material está definida por la ecuación ( 4-19),

$$\left( \frac{d\bar{f}}{d\bar{\sigma}_{ij}} \right)^T d\sigma_{ij} = d\bar{\sigma}_{ij} = \frac{d\bar{\varepsilon}_{ij}^p}{d\sigma_{ij}} d\bar{\varepsilon}_{ij}^p = S d\bar{\varepsilon}_{ij}^p \quad (4-19)$$

Donde  $S$  es la pendiente de la curva esfuerzo-deformación plástica efectiva, la cual se presenta en más detalle en el Anexo 2.

Igualmente para definir el endurecimiento del material se puede trabajar con la expresión presentada en la ecuación ( 3-29) expuesta por Han et al. [12]. Al reorganizar la expresión ( 4-19), se tiene una ecuación para el comportamiento de la deformación plástica efectiva como se muestra en la ecuación ( 4-20).

$$d\bar{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\left( \frac{d\bar{f}}{d\bar{\sigma}_{ij}} \right)^T [D_e]}{S + \left( \frac{d\bar{f}}{d\bar{\sigma}_{ij}} \right)^T [D_e] \frac{d\bar{f}}{d\bar{\sigma}_{ij}}} d\varepsilon_{ij} = W_{ij}^T d\varepsilon_{ij} \quad (4-20)$$

Así la ecuación ( 4-13) puede ser expresada por la ecuación ( 4-21)

$$d\sigma_{ij} = [D_e] \left( [D_e] - [D_e] W_{ij}^T \frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \right) d\varepsilon_{ij} = [D_{ep}] d\varepsilon_{ij} \quad (4-21)$$

Donde el término  $[D_{ep}]$  es conocido como la matriz de elasto-plasticidad. Al examinar las matrices involucradas, se puede demostrar que  $[D_{ep}]$  es simétrica (dado que se esta trabajando con una regla de flujo asociada).

Cuando se trabaja con una regla de flujo no asociada, se puede realizar un procedimiento similar al anterior, pero la matriz  $[D_{ep}]$  será asimétrica.

Para calcular la matriz de elasto-plasticidad presentada en la ecuación ( 4-21), es necesario evaluar el término  $\frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}}$ , llamado usualmente vector de flujo. Primero, se debe escribir la función de cedencia en la forma (Ecuación ( 4-22)).

$$\bar{f} = f(I_1, (J'_2)^{1/2}, \theta_0) = 0 \quad (4-22)$$

Dónde:

$I_1$  = Primer invariante del tensor de esfuerzos.

$J'_2$  = Segunda invariante del tensor de esfuerzos deviatoricos.

Al derivar la función  $f$  con respecto a  $\sigma_{ij}$ , y aplicando la regla de la cadena, se obtiene la expresión ( 4-23)

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial I_1} \frac{dI_1}{d\sigma_{ij}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial (J'_2)^{1/2}} \frac{\partial (J'_2)^{1/2}}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4-23)$$

Los términos que acompañan las derivadas que están en función de  $\sigma_{ij}$ , pueden ser escritos como constantes  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  y  $\beta_3$ , como se presenta en la ecuación ( 4-24).

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} = \beta_1 \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \beta_2 \frac{\partial (J'_2)^{1/2}}{\partial \sigma_{ij}} + \beta_3 \frac{\partial J'_3}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4-24)$$

Las constantes  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  y  $\beta_3$  se presentan en la ecuación ( 4-25).

$$\beta_1 = \frac{\partial \bar{f}}{\partial I_1}$$

$$\beta_2 = \frac{\partial \bar{f}}{\partial (J'_2)^{1/2}} + \frac{\tan(3\theta_0)}{\partial (J'_2)^{1/2}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \theta_0} \quad (4-25)$$

$$\beta_3 = \left( \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta_0)} \right) \frac{1}{\partial (J'_2)^{3/2}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \theta_0}$$

En la ecuación ( 4-25), los términos  $\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}}$ ,  $\frac{\partial (J'_2)^{1/2}}{\partial \sigma_{ij}}$  y  $\frac{\partial J'_3}{\partial \sigma_{ij}}$  deben ser resueltos una vez se haya establecido un determinado criterio de cedencia.

Los términos asociados a las invariantes de esfuerzos son definidos en la Ecuación ( 4-26).

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$J'_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \quad (4-26)$$

$$J'_3 = \frac{1}{3} \sigma'_{ij} \sigma'_{jk} \sigma'_{ki} = \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3$$

A continuación se presentara el desarrollo para el criterio de cedencia de Drucker-Prager, en donde la función de cedencia está dada por (Ecuación ( 4-27)).

$$\bar{f} = \eta I_1 + (J'_2)^{1/2} - \sigma_o \quad (4-27)$$

En la ecuación ( 4-27) aparecen las constantes  $\eta$  y  $\sigma_o$ , que están definidas en la expresión ( 4-28).

$$\sigma_o = \frac{6 \cos \phi C_o}{\sqrt{3}(3 - \text{sen} \phi)} \quad (4-28)$$

$$\eta = \frac{2\text{sen}\phi}{\sqrt{3}(3 - \text{sen}\phi)}$$

Es importante mencionar que las constantes  $\sigma_o$  y  $\eta$  dependen de la cohesión  $C_o$  y del ángulo de fricción interna del material  $\phi$ .

De acuerdo con la ecuación ( 4-27), los coeficientes del vector de flujo para el criterio de cedencia de Drucker-Prager, están dados por el conjunto de ecuaciones ( 4-29)

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial I_1} = \eta \\ \beta_2 &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial (J'_2)^{1/2}} + \frac{\tan(3\theta_0)}{\partial (J'_2)^{1/2}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \theta_0} = 1 \\ \beta_3 &= \left( \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta_0)} \right) \frac{1}{\partial (J'_2)^{3/2}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \theta_0} = 0 \end{aligned} \quad (4-29)$$

De esta manera la ecuación ( 4-27) queda expresada según la ecuación ( 4-30)

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} = \eta \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial (J'_2)^{1/2}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4-30)$$

La ecuación ( 4-30) puede ser expresada en forma vectorial como se presenta en la siguiente ecuación ( 4-31)

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} = \begin{bmatrix} \eta \\ \eta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \frac{[(\sigma_{11} - \sigma_{22}) - (\sigma_{33} - \sigma_{11})]}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{1}{6} \frac{[(\sigma_{22} - \sigma_{22}) - (\sigma_{11} - \sigma_{22})]}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{1}{6} \frac{[(\sigma_{33} - \sigma_{11}) - (\sigma_{22} - \sigma_{33})]}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{1}{6} \frac{\sigma_{12}}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{1}{6} \frac{\sigma_{23}}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{1}{6} \frac{\sigma_{31}}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} \quad (4-31)$$

Con el objetivo de hallar la matriz correspondiente al estado elasto-plástico  $[D_{ep}]$ , es necesario obtener el término  $W_{ij}^T$  dado por la ecuación ( 4-32).

$$W_{ij}^T = \frac{\left(\frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}}\right)^T [D_e]}{S + \left(\frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}}\right)^T [D_e] \frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}}} \quad (4-32)$$

Donde  $[D_e]$  corresponde a la matriz en estado elástico.

Resolviendo la ecuación ( 4-32), se obtiene lo siguiente para  $W_{ij}^T$ :

$$W_{ij}^T = \frac{[a(2G + \lambda) + b\lambda + c\lambda; b(2G + \lambda) + a\lambda + c\lambda; c(2G + \lambda) + a\lambda + b\lambda; 2dG; 2eG; 2fG]}{S + a^2(2G + \lambda) + 2a\lambda(b + c) + b^2(2G + \lambda) + 2bc\lambda + c^2(2G + \lambda) + 2d^2G + 2e^2G + 2f^2G} \quad (4-33)$$

Así, para la matriz elasto-plástica dada en la expresión ( 4-21), se puede escribir como (Ecuación ( 4-34))

$$[D_{ep}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a(2G + \lambda) + b\lambda + c\lambda \\ b(2G + \lambda) + a\lambda + c\lambda \\ c(2G + \lambda) + a\lambda + b\lambda \\ 2dG \\ 2eG \\ 2fG \end{bmatrix} W_{ij}^T \quad (4-34)$$

O como la expresión ( 4-35).

$$[D_{ep}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} \quad (4-35)$$

La matriz  $[A]$  es una matriz simétrica cuyas entradas están expresadas de forma generalizada para cualquier criterio de cedencia que se desee trabajar, en donde se encontrarán unas determinadas expresiones para las entradas de la función de cedencia

$\bar{f}$  dadas por  $a, b, c, d, e$  y  $f$  de acuerdo al criterio de cedencia seleccionado. Estas entradas están dadas en función de los coeficientes del vector de flujo.

Con la ecuación ( 4-35) es posible plantear una expresión para los esfuerzos normales, y de cizalla en cada dirección en función de las deformaciones, como se puede ver en la ecuación ( 4-36).

$$\begin{bmatrix} d\sigma_r \\ d\sigma_\theta \\ d\sigma_z \\ d\sigma_{r\theta} \\ d\sigma_{zr} \\ d\sigma_{\theta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [(2G + \lambda) - A_{11}]d\varepsilon_r + [\lambda - A_{12}]d\varepsilon_\theta + [\lambda - A_{13}]d\varepsilon_z - A_{14}d\varepsilon_{r\theta} - A_{15}d\varepsilon_{zr} - A_{16}d\varepsilon_{\theta z} \\ [\lambda - A_{21}]d\varepsilon_r + [(2G + \lambda) - A_{22}]d\varepsilon_\theta + [\lambda - A_{23}]d\varepsilon_z - A_{24}d\varepsilon_{r\theta} - A_{25}d\varepsilon_{zr} - A_{26}d\varepsilon_{\theta z} \\ [\lambda - A_{31}]d\varepsilon_r + [\lambda - A_{32}]d\varepsilon_\theta + [(2G + \lambda) - A_{33}]d\varepsilon_z - A_{34}d\varepsilon_{r\theta} - A_{35}d\varepsilon_{zr} - A_{36}d\varepsilon_{\theta z} \\ -A_{41}d\varepsilon_r - A_{42}d\varepsilon_\theta - A_{43}d\varepsilon_{zr} + [2G - A_{44}]d\varepsilon_{r\theta} - A_{45}d\varepsilon_{zr} - A_{46}d\varepsilon_{\theta z} \\ -A_{51}d\varepsilon_r - A_{52}d\varepsilon_\theta - A_{53}d\varepsilon_{zr} - A_{54}d\varepsilon_{r\theta} + [2G - A_{55}]d\varepsilon_{zr} - A_{56}d\varepsilon_{\theta z} \\ -A_{61}d\varepsilon_r - A_{62}d\varepsilon_\theta - A_{63}d\varepsilon_{zr} - A_{64}d\varepsilon_{r\theta} - A_{65}d\varepsilon_{zr} + [2G - A_{66}]d\varepsilon_{\theta z} \end{bmatrix} \quad (4-36)$$

En un medio poroso, lo que se deforma de la roca es el esqueleto solido de la misma, el cual está siendo sometido a un esfuerzo efectivo, por lo tanto las ecuaciones desarrolladas para solidos son válidas para medios porosos, siempre y cuando se cambie los términos de esfuerzos totales por esfuerzos efectivos. Donde este último está definido por la resta del esfuerzo total y la presión de yacimiento considerando el tipo de roca, definido por el parámetro de Biot,  $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \alpha P$ . [33].

### Esfuerzos incrementales en función de los incrementos en los desplazamientos.

Como se mencionó anteriormente, los esfuerzos deben estar en función de los desplazamientos, en las expresiones ( 4-37) hasta la ( 4-42).

En dirección radial

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_r = & [(2G + \lambda) - A_{11}] \frac{\partial \Delta u_r}{\partial r} + [\lambda - A_{12}] \left( \frac{1}{r} (\Delta u_r + \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta}) \right) + [\lambda - A_{13}] \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} - A_{14} \left( \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial \Delta u_r}{\partial \theta} - \right. \right. \\ & \left. \left. \Delta u_\theta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial r} \right) - A_{15} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} + \frac{\partial \Delta u_r}{\partial z} \right) \right) - A_{16} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial z} \right) \right) + \Delta(\alpha p) \end{aligned} \quad (4-37)$$

En dirección angular

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_\theta = & [\lambda - A_{21}] \frac{\partial \Delta u_r}{\partial r} + [(2G + \lambda) - A_{22}] \left( \frac{1}{r} (\Delta u_r + \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta}) \right) + [\lambda - A_{23}] \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \\ & - A_{24} \left( \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial \Delta u_r}{\partial \theta} - \Delta u_\theta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial r} \right) - A_{25} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} + \frac{\partial \Delta u_r}{\partial z} \right) \right) - A_{26} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial z} \right) \right) \\ & + \Delta(\alpha p) \end{aligned} \quad (4-38)$$

En dirección vertical

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_z = & [\lambda - A_{31}] \frac{\partial \Delta u_r}{\partial r} + [\lambda - A_{32}] \left( \frac{1}{r} \left( \Delta u_r + \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) \right) + [(2G + \lambda) - A_{33}] \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \\ & - A_{34} \left( \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial \Delta u_r}{\partial \theta} - \Delta u_\theta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial r} \right) - A_{35} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} + \frac{\partial \Delta u_r}{\partial z} \right) \right) - A_{36} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial z} \right) \right) \end{aligned} \quad (4-39)$$

En dirección  $r\theta$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{r\theta} = & -A_{41} \frac{\partial \Delta u_r}{\partial r} - A_{42} \left( \frac{1}{r} \left( \Delta u_r + \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) \right) - A_{43} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} + [2G - A_{44}] \left( \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial \Delta u_r}{\partial \theta} - \Delta u_\theta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial r} \right) \\ & - A_{45} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} + \frac{\partial \Delta u_r}{\partial z} \right) \right) - A_{46} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial z} \right) \right) \end{aligned} \quad (4-40)$$

En dirección  $zr$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{zr} = & -A_{51} \frac{\partial \Delta u_r}{\partial r} - A_{52} \left( \frac{1}{r} \left( \Delta u_r + \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) \right) - A_{53} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} - A_{54} \left( \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial \Delta u_r}{\partial \theta} - \Delta u_\theta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial r} \right) \\ & + [2G - A_{55}] \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} + \frac{\partial \Delta u_r}{\partial z} \right) \right) - A_{56} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial z} \right) \right) \end{aligned} \quad (4-41)$$

En dirección  $\theta z$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{\theta z} = & -A_{61} \frac{\partial \Delta u_r}{\partial r} - A_{62} \left( \frac{1}{r} \left( \Delta u_r + \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) \right) - A_{63} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} - A_{64} \left( \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial \Delta u_r}{\partial \theta} - \Delta u_\theta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial r} \right) \\ & - A_{65} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} + \frac{\partial \Delta u_r}{\partial z} \right) \right) + [2G - A_{66}] \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial z} \right) \right) \end{aligned} \quad (4-42)$$

Los esfuerzos incrementales pueden ser reemplazados en las ecuaciones (B- 1), (B- 2) y (B- 3) así se obtendrán las expresiones para las ecuaciones de equilibrio geomecánico elasto-plástico.

El término  $\frac{\Delta\sigma_r - \Delta\sigma_\theta}{r}$  en la ecuación (B- 3) está dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\sigma_r - \Delta\sigma_\theta}{r} = & \frac{1}{r} \left[ \left( [(2G + \lambda) - A_{11}] - [\lambda - A_{21}] \right) \frac{\partial \Delta u_r}{\partial r} + [\lambda - A_{12}] - [(2G + \lambda) - A_{22}] \left( \frac{1}{r} \left( \Delta u_r + \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) \right) \right. \\ & + [\lambda - A_{13}] - [\lambda - A_{23}] \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} - (A_{14} - A_{24}) \left( \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial \Delta u_r}{\partial \theta} - \Delta u_\theta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial r} \right) \\ & \left. - (A_{15} - A_{25}) \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} + \frac{\partial \Delta u_r}{\partial z} \right) \right) - (A_{16} - A_{26}) \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial z} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (4-43)$$



## 5. Modelo Numérico y Computacional.

El desarrollo del modelo numérico se basa en la solución de las ecuaciones presentadas en el Capítulo 3, que son de alto grado de no linealidad y que no tienen solución analítica. En este capítulo se presenta aspectos generales de la generación de la malla, el modelo numérico para la ecuación de flujo de fluidos y para las ecuaciones de geomecánica mediante la discretización en diferencias finitas, las condiciones iniciales y de frontera para cada conjunto de ecuaciones y por último un diagrama de bloques que permite identificar el proceso de trabajo con el que resuelve el simulador el sistema de ecuaciones.

### 5.1 Generación de la malla.

La malla utilizada para la discretización del modelo físico en coordenadas cilíndricas permite ubicar nodos en tres coordenadas independientes, radial, tangencial y en la coordenada vertical o axial. Para generar la malla en coordenadas cilíndricas es necesario definir cada coordenada de los nodos así:

- **Coordenada radial en el dominio interno:** Se puede obtener la distribución de los radios a través de todo el yacimiento comenzando con el nodo que representa la cara del pozo hasta el límite externo del dominio interno del yacimiento mediante la progresión geométrica presentada en la Ecuación ( 5-1) propuesta por Settari y Aziz [35]:

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} = \left(\frac{r_e}{r_w}\right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (5-1)$$

En donde  $r_e$  es el radio externo del yacimiento,  $r_w$  es el radio del pozo y  $n$  es el número de nodos en los cuales se desea dividir el yacimiento en la dirección radial.

Las fronteras de los bloques que delimitan el volumen específico del yacimiento sobre el cual cada nodo tiene influencia en dirección radial, se determinan a partir de los “radios promedios logarítmicos en  $r$ ” [35] (Ecuación ( 5-2))

$$\begin{aligned} r_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{r_{i+1} - r_i}{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)} \\ r_{i-\frac{1}{2}} &= \frac{r_i - r_{i-1}}{\ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right)} \end{aligned} \quad (5-2)$$

Estos radios garantizan que el volumen del bloque discretizado es igual al volumen del bloque real, evitando así la pérdida de masa en el modelo. [35]

- **Coordenada radial en el dominio externo:** En el dominio externo se hace una distribución de bloques diferente a la del dominio interno, ya que allí se busca conocer solo el comportamiento geomecánico de la roca. La expresión con la que se hace la distribución radial de los bloques está dada por la ecuación ( 5-3)

$$\Delta r_{Nr_{int}} = r_e - \frac{r_{Nr_{int}} - r_{Nr_{int}-1}}{\ln\left(\frac{r_{Nr_{int}}}{r_{Nr_{int}-1}}\right)} \quad (5-3)$$

- **Coordenada tangencial:** Esta puede determinarse utilizando una distribución uniforme de nodos a lo largo de la circunferencia del pozo, posicionando las fronteras interbloque en el punto medio de la distancia entre los nodos y se define mediante el conjunto de ecuaciones ( 5-4)

$$\theta_{j=1} = \Delta\theta_{j=1/2}$$

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \Delta\theta_{j+1/2}$$

$$\Delta\theta_{j+1/2} = \frac{\Delta\theta_{j+1} + \Delta\theta_j}{2}$$

$$\Delta\theta_j = 360^\circ/N_t = 2\pi/N_t$$

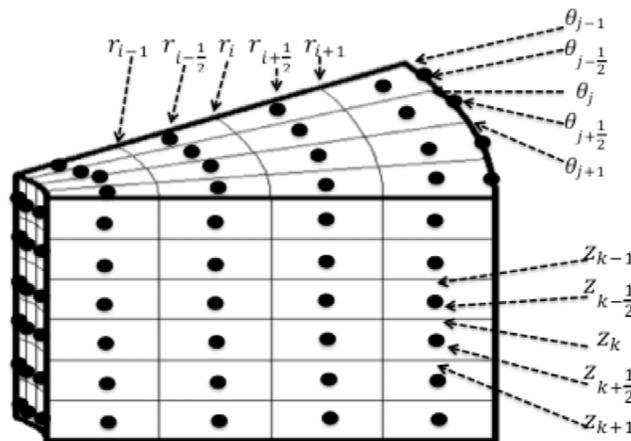
( 5-4)

- **Coordenada vertical:** Esta coordenada se puede definir según las fronteras de la estratificación, ubicando las fronteras interbloque en el punto medio de la distancia entre nodos. La ecuación ( 5-5) define la expresión matemática para la distribución de los bloques.

$$\Delta z_k = z_{k+1/2} - z_{k-1/2} \tag{ 5-5}$$

En la **Figura 5-1** se presenta el esquema de la distribución de los bloques en cada una de las direcciones de estudio para una malla de nodo centrado.

**Figura 5-1:** Esquema de distribución de bloques y nodos en la malla cilíndrica.



## 5.2 Condiciones iniciales y de frontera.

La solución de las ecuaciones diferenciales que describen el modelo requiere de condiciones iniciales y de frontera para solucionar el sistema de ecuaciones. A continuación se presentan las condiciones iniciales para cada ecuación.

### 5.2.1 Condiciones iniciales de la ecuación de flujo de fluidos.

Al tiempo  $t=0$ , la presión se supone constante en todo punto de cada estrato; sin embargo, la presión de poro variara con la profundidad de acuerdo al gradiente de presión. Matemáticamente se tiene la Ecuación ( 5-6):

$$p(x, y, x) = p^0(z), \quad t = 0 \quad (5-6)$$

### 5.2.2 Condiciones iniciales ecuaciones de deformación geomecánica de la roca.

A un tiempo  $t=0$  el incremento en los desplazamientos será cero. Las condiciones se expresan de la siguiente forma (Ecuación ( 5-7))

$$\Delta u_n = 0, \quad t = 0 \quad (5-7)$$

En la ecuación ( 5-7)  $\Delta u_n$  es el incremento del desplazamiento en dirección  $i = r, \theta, z$ .

### 5.2.3 Condiciones de frontera - Ecuación de flujo de fluidos.

Para el buen planteamiento matemático de un problema, se requieren condiciones de frontera tanto para la ecuación de flujo de fluidos, como para las tres ecuaciones geomecánicas, pues estas condiciones permiten una única solución.

- **Limite Interno:** Para el pozo se considera incorporar una restricción de tasa terminal constante, que matemáticamente esta expresada por la ecuación ( 5-8):

$$\left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r_w} = \frac{q_f \mu_f B_f}{d \theta dz K_r} \quad (5-8)$$

La ecuación **Error! Reference source not found.** es la forma matemática que toma la condición de frontera interna, y puede ser empleada en diversos escenarios de producción y completamiento.

- **Limite Externo:** Asumiendo que el yacimiento es un sistema cerrado, la condición de frontera que describe este hecho se encuentra determinada por la expresión ( 5-9).

$$v_n = \vec{v}_f \cdot \hat{n} = 0 \quad (5-9)$$

- **Condición de borde sobre  $r = r_e$ .**

En esta región, el vector que orienta la frontera está dado por  $\hat{n} = (1, 0, 0)$ , por ende, reemplazando en la ecuación **Error! Reference source not found.** se obtiene de forma incremental:

$$\left(\frac{\partial \Delta p}{\partial r}\right)_{r_e} = 0 \quad (5-10)$$

La ecuación ( 5-10) es el modelo matemático que representa la condición de contorno relacionada con la posición  $(r_e, \theta, z)$ .

- **Condición de borde sobre  $z = z_{\text{tope}}$  y  $z = z_{\text{base}}$ .**

Los vectores unitarios relacionados con los planos correspondientes a la base y al tope se encuentran definidos por  $\hat{n} = (0, 0, \pm 1)$ . De igual manera, sustituyendo lo anterior en la expresión **Error! Reference source not found.** resulta de forma incremental:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Delta p}{\partial z}\right)_{z_{\text{top}}} &= 0 \\ \left(\frac{\partial \Delta p}{\partial z}\right)_{z_{\text{base}}} &= 0 \end{aligned} \quad (5-11)$$

Las expresión ( 5-11) describe matemáticamente la condición de no flujo que tiene lugar en la frontera en el tope y en la base de la formación.

#### 5.2.4 Condiciones de Frontera - Ecuaciones de Geomecánica.

Las condiciones de frontera son de tipo *Dirichlet* para las direcciones radial y vertical, es decir, los incrementos de los desplazamientos se especifican en el límite. Para la dirección tangencial se utilizan condiciones periódicas. Se especifican las condiciones en cada una de las fronteras para los incrementos de los desplazamientos en las tres direcciones del yacimiento (Ecuación ( 5-12) y ( 5-13)), y son válidas para todo tiempo  $t$ .

- **Condiciones en Dirección Radial.**

Límite interno ( $r = r_w$ ):

$$\Delta u_n)_{r=r_w} = 0, \quad \text{para } n = r, \theta, z \quad (5-12)$$

Límite externo ( $r = r_e$ ):

$$\Delta u_n)_{r=r_e} = 0, \quad \text{para } n = r, \theta, z \quad (5-13)$$

- **Condiciones en Dirección Tangencial.**

Las ecuaciones para estas condiciones se obtienen bajo el principio de periodicidad. Los desplazamientos en el plano límite  $\theta = 0$ , serán iguales a los desplazamientos del plano real  $\theta = n\theta$  (Ecuación (5-14)), por tanto:

$$\Delta u_n)_{\theta=0} = \Delta u_n)_{\theta=n\theta}, \quad \text{para } n = r, \theta, z \quad (5-14)$$

De forma similar, los desplazamientos en el plano límite  $\theta = n\theta + 1$ , serán iguales a los desplazamientos del plano real  $\theta = 1$  (Ecuación (5-15)), por tanto:

$$\Delta u_n)_{\theta=n\theta+1} = \Delta u_n)_{\theta=1}, \quad \text{para } n = r, \theta, z \quad (5-15)$$

- **Condiciones en Dirección Vertical.**

En el límite inferior se aplica la condición de Dirichlet suponiendo que los incrementos de los desplazamientos son nulos (Ecuación (5-16)).

$$\Delta u_n)_{z=z_{inferior}} = 0, \quad \text{para } n = r, \theta, z \quad (5-16)$$

Para el límite superior se supone que los esfuerzos normales en las tres direcciones que actúan sobre este plano, son constantes (los esfuerzos de cizalla son despreciables). Esta condición se mantiene para todo tiempo pues se supone que la perturbación generada por la producción/inyección de fluidos no alcanza a afectar este plano debido a

los dos dominios que se están planteando en este desarrollo numérico. Matemáticamente esta condición se expresa de la siguiente forma [36], [33]:

$$\Delta T_r^\eta = \left(1 + \frac{1}{r}\right) \Delta \sigma_r \eta_r + \frac{1}{r} (\Delta \sigma_{\theta r} - \Delta \sigma_\theta) \eta_\theta + \Delta \sigma_{zr} \eta_z = 0 \quad (5-17)$$

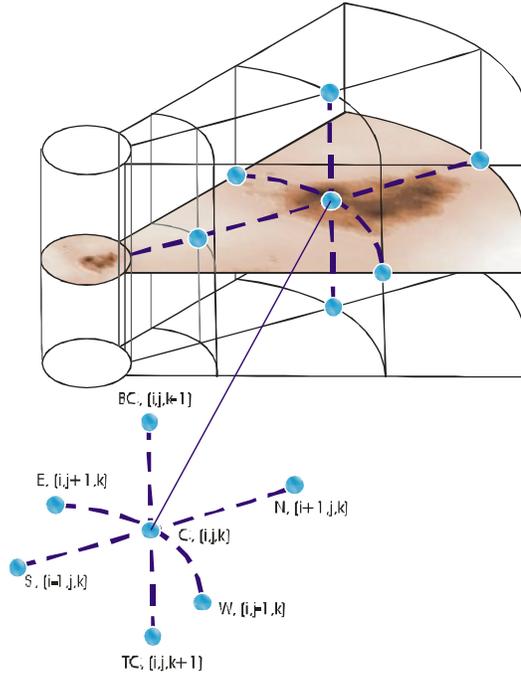
$$\Delta T_\theta^\eta = \frac{1}{r} \Delta \sigma_{\theta r} \eta_\theta + \left(1 + \frac{2}{r}\right) \Delta \sigma_{r\theta} \eta_\theta + \Delta \sigma_{z\theta} \eta_z = 0 \quad (5-18)$$

$$\Delta T_z^\eta = \Delta \sigma_z \eta_z + \left(1 + \frac{1}{r}\right) \Delta \sigma_{rz} \eta_r + \Delta \sigma_{z\theta} \eta_\theta = 0 \quad (5-19)$$

En las ecuaciones ( 5-17), ( 5-18), ( 5-19) el término  $\Delta T_i^\eta$  con  $i = r, \theta, z$ , son los componentes de los incrementos de los esfuerzos totales especificados en el plano del límite superior, y  $\eta_i$  son las componentes del vector normal unitario saliendo del plano superior. En este límite se supone que el estado de esfuerzos y la presión no cambian, o sea que el esfuerzo efectivo promedio no varía en este punto. La suposición anterior es cierta si la permeabilidad disminuye paulatinamente a medida que se acerca a la frontera del medio. [36], [33].

### 5.3 Modelo Numérico.

La solución de las ecuaciones constitutivas del modelo de flujo de fluidos y el modelo geomecánico se realiza mediante la discretización en diferencias finitas de las ecuaciones, considerando una malla en nodo centrado. En la Figura 5-2 se presenta el concepto del stencil en coordenadas cilíndricas. La construcción de este se realiza considerando la posición en la malla de cada término obtenido de la discretización, por ejemplo el stencil correspondiente a la posición norte está dado por el punto  $i + 1, j, k$ , en correspondencia al stencil central que está en el punto  $i, j, k$ . A continuación se presentan los términos relacionados para cada stencil, en la ecuación de flujo de fluidos, y en cada una de las ecuaciones de geomecánica.

**Figura 5-2:** Representación del stencil en coordenadas cilíndricas.


### 5.3.1 Modelo numérico - Ecuación de flujo de fluidos

La discretización en diferencias finitas para la ecuación de flujo de fluidos a través de un medio poroso, se expresa de la siguiente forma [33]:

$$\begin{aligned}
 &B_{p_{i,j,k}} \Delta p_{i,j,k-1} + S_{p_{i,j,k}} \Delta p_{i,j-1,k} + W_{p_{i,j,k}} \Delta p_{i,j,k-1} + C_{p_{i,j,k}} \Delta p_{i,j,k} + \\
 &E_{p_{i,j,k}} \Delta p_{i+1,j,k} + N_{p_{i,j,k}} \Delta p_{i,j+1,k} + T_{p_{i,j,k}} \Delta p_{i,j,k+1} = F_{p_{i,j,k}}
 \end{aligned}
 \tag{5-20}$$

Donde los stencils están representados en la ecuación (5-21):

$$\begin{aligned}
 B_{p_{i,j,k}} &= T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} \\
 S_{p_{i,j,k}} &= T_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+1} \\
 W_{p_{i,j,k}} &= T_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+1} \\
 E_{p_{i,j,k}} &= T_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} \\
 N_{p_{i,j,k}} &= T_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} \\
 T_{p_{i,j,k}} &= T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1}
 \end{aligned}
 \tag{5-21}$$

$$\begin{aligned}
C_{p_{i,j,k}} = & - \left[ E_{p_{i,j,k}} + W_{p_{i,j,k}} + N_{p_{i,j,k}} + S_{p_{i,j,k}} + T_{p_{i,j,k}} + B_{p_{i,j,k}} \right. \\
& \left. + \frac{\rho_{f_{i,j,k}}^{n+1} \Delta V_{b_{i,j,k}}}{\Delta t} \left\{ \phi_{i,j,k}^{n+1} c_{f_{i,j,k}}^{n+1} - (1 - \alpha_{i,j,k}^{n+1} + \phi_{i,j,k}^{n+1}) c_{s_{i,j,k}}^{n+1} + (1 - \alpha_{i,j,k}^{n+1}) c_{bc_{i,j,k}}^{n+1} \right\} \right] \\
F_{p_{i,j,k}} = & - \left\{ T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} p_{i,j,k-1}^0 + T_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+1} p_{i,j-1,k}^0 + T_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+1} p_{i-1,j,k}^0 \right. \\
& - \left[ T_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} + T_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+1} + T_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} + T_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+1} + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} + T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} \right] p_{i,j,k}^0 + T_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} p_{i+1,j,k}^0 \\
& \left. + T_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} p_{i,j+1,k}^0 + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} p_{i,j,k+1}^0 \right\} - \left( T_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} \rho_{f_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^{n+1} \Delta z_{k+1/2} - T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} \rho_{f_{i,j,k-\frac{1}{2}}}^{n+1} \Delta z_k \right. \\
& \left. + \rho_{f_{i,j,k}}^{n+1} \Delta V_{b_{i,j,k}} (c_{bc_{i,j,k}}^{n+1} - c_{s_{i,j,k}}^{n+1}) \Delta \left( \frac{\varepsilon_v}{c_{bc}} \right)_{i,j,k}^{n+1} \right)
\end{aligned}$$

Los términos en los stencils nombrados como  $T_{i,j,k}^{n+1}$  son nombrados como transmisibilidad.

### 5.3.2 Modelo numérico - Ecuaciones de geomecánica.

A continuación se presenta en forma de stencil las ecuaciones de geomecánica. Por cuestiones de forma del trabajo, la forma de cada uno de los stencils de cada ecuación de equilibrio [33] se presenta en el Anexo 3: Stencils Ecuaciones de Geomecánica.

#### Ecuación Radial.

En forma numérica la ecuación radial puede ser presentada como se muestra en la ecuación ( 5-22).

$$\begin{aligned}
& B u_{r_{i,j,k}} \Delta u_{r_{i,j,k-1}} + S u_{r_{i,j,k}} \Delta u_{r_{i,j-1,k}} + W u_{r_{i,j,k}} \Delta u_{r_{i-1,j,k}} + C u_{r_{i,j,k}} \Delta u_{r_{i,j,k}} + \\
& E u_{r_{i,j,k}} \Delta u_{r_{i+1,j,k}} + N u_{r_{i,j,k}} \Delta u_{r_{i,j+1,k}} + T u_{r_{i,j,k}} \Delta u_{r_{i,j,k+1}} = F u_{r_{i,j,k}}
\end{aligned} \tag{ 5-22}$$

#### Ecuación Tangencial.

En forma numérica la ecuación tangencial puede ser presentada como se muestra en la ecuación ( 5-23).

$$\begin{aligned}
& B u_{\theta_{i,j,k}} \Delta u_{\theta_{i,j,k-1}} + S u_{\theta_{i,j,k}} \Delta u_{\theta_{i,j-1,k}} + W u_{\theta_{i,j,k}} \Delta u_{\theta_{i-1,j,k}} + C u_{\theta_{i,j,k}} \Delta u_{\theta_{i,j,k}} + \\
& E u_{\theta_{i,j,k}} \Delta u_{\theta_{i+1,j,k}} + N u_{\theta_{i,j,k}} \Delta u_{\theta_{i,j+1,k}} + T u_{\theta_{i,j,k}} \Delta u_{\theta_{i,j,k+1}} = F u_{\theta_{i,j,k}}
\end{aligned} \tag{ 5-23}$$

**Ecuación Vertical.**

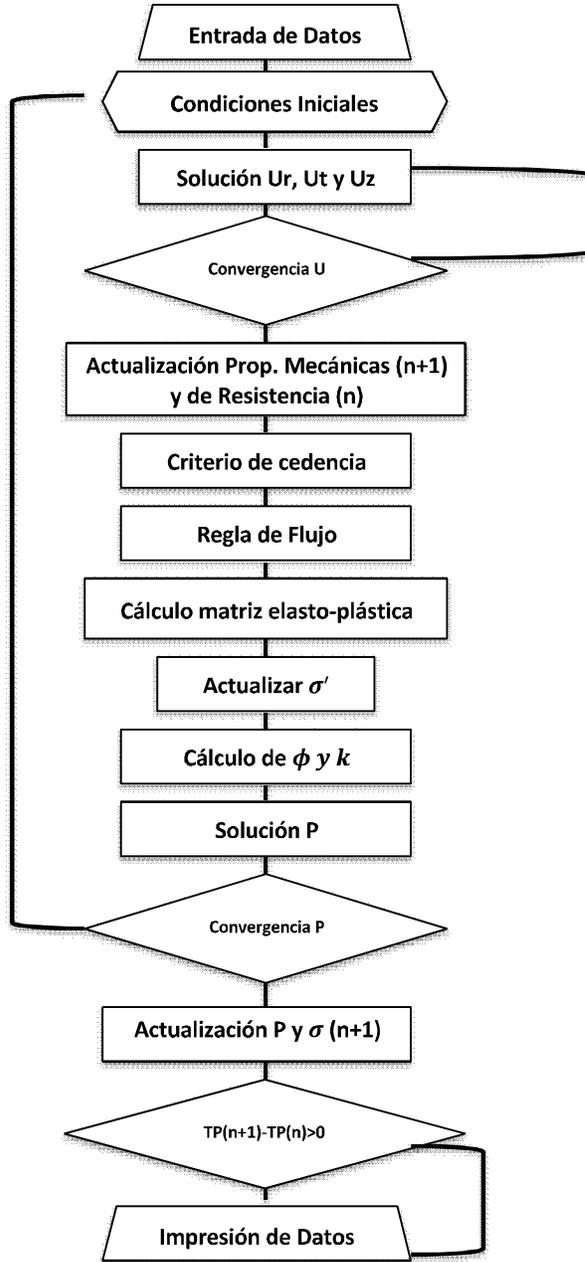
En forma numérica la ecuación vertical puede ser presentada como se muestra en la ecuación ( 5-24).

$$\begin{aligned}
 & Bu_{z_{i,j,k}} \Delta u_{z_{i,j,k-1}} + Su_{z_{i,j,k}} \Delta u_{z_{i,j-1,k}} + Wu_{z_{i,j,k}} \Delta u_{z_{i-1,j,k}} + Cu_{z_{i,j,k}} \Delta u_{z_{i,j,k}} + \\
 & Eu_{z_{i,j,k}} \Delta u_{z_{i+1,j,k}} + Nu_{z_{i,j,k}} \Delta u_{z_{i,j+1,k}} + Tu_{z_{i,j,k}} \Delta u_{\theta_{i,j,k+1}} = Fu_{z_{i,j,k}}
 \end{aligned}
 \tag{ 5-24}$$

**5.4 Modelo Computacional.**

El modelo computacional se desarrolla en lenguaje Fortran para Windows, mediante el compilador *Compaq Visual Fortran* versión 6.0. En la **Figura 5-3** se presenta un diagrama de bloques que esquematiza la forma en la que resuelve el programa los sistemas de ecuaciones, el acople, y la actualización de resultados.

**Figura 5-3:** Diagrama de bloques modelo computacional.





## **6. Resultados**

El análisis de resultados se hace con la intención de comparar el impacto de la plasticidad en el comportamiento de producción de yacimientos poco consolidados, bajo este esquema se realiza la simulación de un caso base acoplado, no acoplado y sensibilidades de las variables geomecánicas que permiten conocer el comportamiento general de los diferentes esquemas de simulación.

### **6.1 Resultados Caso Base.**

Con la intención de tener un punto de partida en el comportamiento de la simulación acoplada elasto-plástica, se trabaja un caso base desde el cual es posible identificar el impacto de las variables geomecánicas en el comportamiento del yacimiento. Los valores de las variables seleccionadas para el caso base tienen fundamento en varios casos de campo expuestos en artículos técnicos, de igual manera los valores para sensibilizar la respuesta de varios parámetros está delimitado como valores máximos y mínimos de dichos artículos [49], [50], [51], [52], [53], [54], [55] y [56].

Los resultados obtenidos con el simulador acoplado elasto-plástico son comparados con los obtenidos en el simulador acoplado elástico y el simulador desacoplado (flujo de fluidos). El objetivo con estas simulaciones es ver el impacto que tiene la simulación acoplada de yacimientos elástica y elasto-plástica en la presión de pozo, la permeabilidad y los esfuerzos de la formación.

La formación a simular es poco consolidada la cual es abierta a producción durante un año (8760 horas) a una tasa constante de 10 BOPD. Se considera un yacimiento abierto a producción a una profundidad de 1800 pies. La Tabla 6-1 presenta las variables características del fluido y de la formación en estudio.

**Tabla 6-1:** Variables de Yacimiento Caso Base

Información de Yacimiento	
Radio del pozo (ft)	0.2821
Temperatura del yacimiento (°F)	120
Espesor (ft)	160
Compresibilidad del fluido (1/psi)	1E-05
Radio externo (ft)	300
Permeabilidad promedio (mD)	765
Presión inicial del yacimiento (psi)	800
Gravedad API	20
Gravedad específica del gas	0.6
Presión de saturación (psi)	50

El espesor completo del yacimiento se considera abierto a flujo. Bajo esta consideración las líneas de flujo predominantes hacia el pozo son de tipo radial. Esta dinámica está fundamentada igualmente en la magnitud de la permeabilidad de la roca, ya que la permeabilidad radial y tangencial es igual, lo que permite predominancia del flujo radial hacia el pozo.

La **Tabla 6-2** presenta el número de nodos correspondiente a cada coordenada cilíndrica de la malla a trabajar.

**Tabla 6-2:** Numero de Nodos Caso Base

Información de la Malla	
Nodos dirección r	13
Nodos dirección t	10
Nodos dirección z	8

La **Tabla 6-3** presenta las variables geomecánicas tenidas en cuenta en la simulación acoplada de yacimientos. Para efectos de la simulación, se considera una formación sensible a esfuerzos y deformaciones con módulo de Young y relación de Poisson relativamente bajos y una compresibilidad de la formación propia de formaciones no consolidadas según Mavko [46]. Los valores de las propiedades mecánicas son los mismos para el dominio interno y el dominio externo.

Los parámetros geomecánicos asociados al modelo plástico, en específico para el modelo modificado de Cam – Clay son escasas en la literatura y están generalmente relacionadas a pruebas de laboratorio, por lo tanto se extraen valores de la literatura para trabajar este modelo [26], [27], [28] y [29].

**Tabla 6-3:** Variables Geomecánicas Caso Base

<b>Parámetros Geomecánicos</b>	
Módulo de Young (psi)	2.E+06
Relación de Poisson	0.30
Densidad del solido (g/cc)	2.53
Compresibilidad del esqueleto (1/psi)	8.E-08
Compresibilidad de la formación	30.E-06
Esfuerzo de sobrecarga (psi)	1800
Relación de esfuerzos SH/Sob	1
Relación de Esfuerzos Sh/Sob	1
Gradiente litostático (psi/ft)	1
Parámetro Hardening	50
Módulo de permeabilidad (1/psi)	8.E-04
<b>Cam-Clay</b>	
Presión efectiva de pre consolidación (psi)	10000
Angulo de estado critico (Grados)	20

<b>Drucker - Prager</b>	
Cohesión (psi)	500
Angulo de fricción interna (Grados)	33

### 6.1.1 Resultados Criterio Drucker – Prager.

A continuación se presentan los resultados para el caso de simulación usando el criterio de Drucker – Prager (D-P).

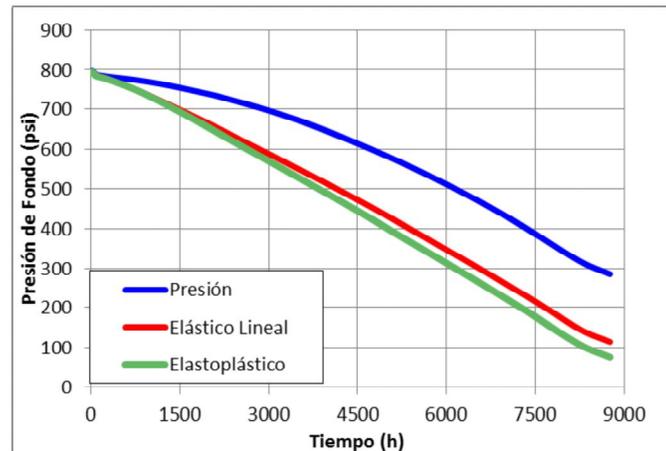
#### **Comportamiento Presión de Yacimiento.**

En la Figura 6-1 se presenta el comportamiento de la presión con el tiempo en la cara del pozo. Se puede observar que cuando se considera la simulación desacoplada la caída de presión no es tan brusca como cuando se considera una simulación acoplada a geomecánica, ya sea elástica o elasto-plástica, debido a que no se están considerando deformaciones en el medio poroso.

Autores como Chin, et al. [21] demuestran que los resultados numéricos de varios estudios indican que para el análisis de yacimientos altamente sensibles a esfuerzos y deformaciones, el modelamiento acoplado de flujo de fluidos y geomecánica es necesario.

Para ver claramente esta diferencia se presentan los porcentajes de diferencia tomando como base la simulación desacoplada. La simulación elástica tiene un 59.5% de diferencia y la elasto-plástica tiene un 73.2% de diferencia. Yale et al. [19] presenta un estudio donde se comparan los resultados de simulaciones acopladas y desacopladas, allí presenta cambios en presión alrededor del 74% para corridas acopladas a plasticidad, y explica que este efecto es directamente proporcional al cambio en el estado de esfuerzos determinado por las deformaciones plásticas que el material experimenta cerca a la cara del pozo.

Dentro del análisis cabe mencionar el impacto del módulo de permeabilidad (Vease Anexo 6) en estos resultados, ya que esta variable es una medida directa de la sensibilidad a esfuerzos y deformaciones por medio de la permeabilidad [37] que se ve reflejada en una respuesta directa en el comportamiento de la presión de yacimiento.

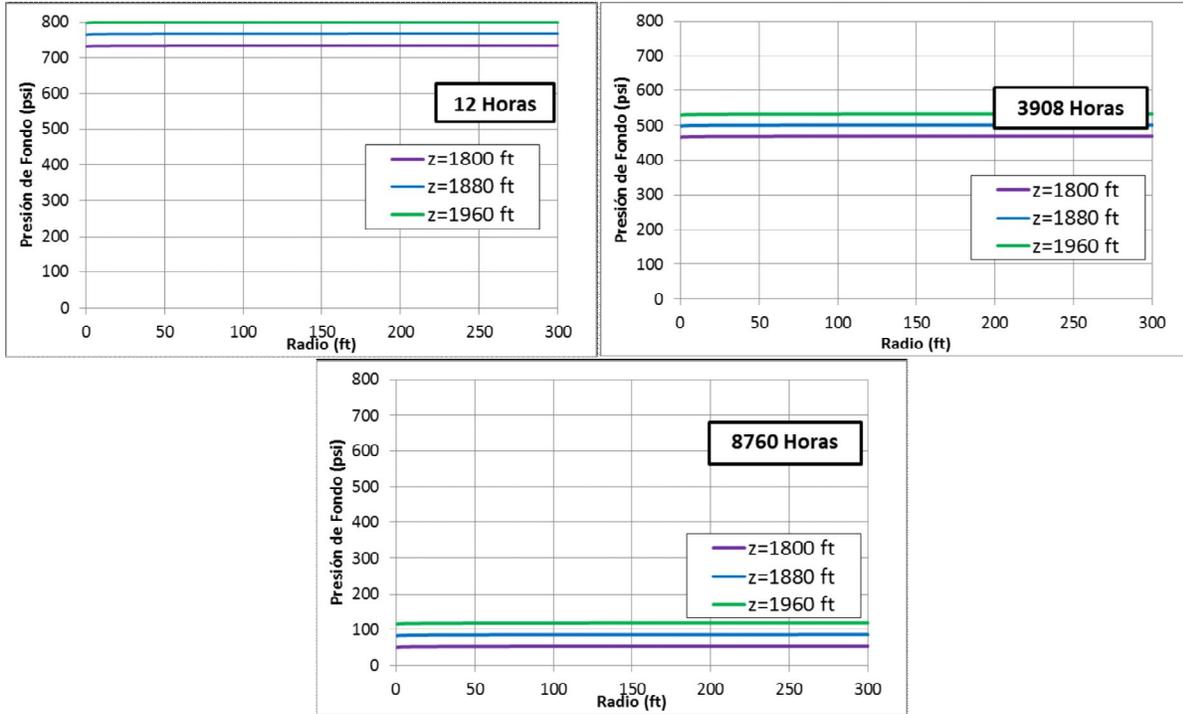
**Figura 6-1:** Comportamiento de Presión de fondo D-P.

Para complementar los resultados de la simulación elasto-plástica acoplada, en la Figura 6-2, se presenta el comportamiento del perfil de presión con radio a diferentes profundidades de la formación, en el tope de la formación (1800 ft), en profundidad media (1880 ft) y en la base de la formación (1960 ft), respectivamente.

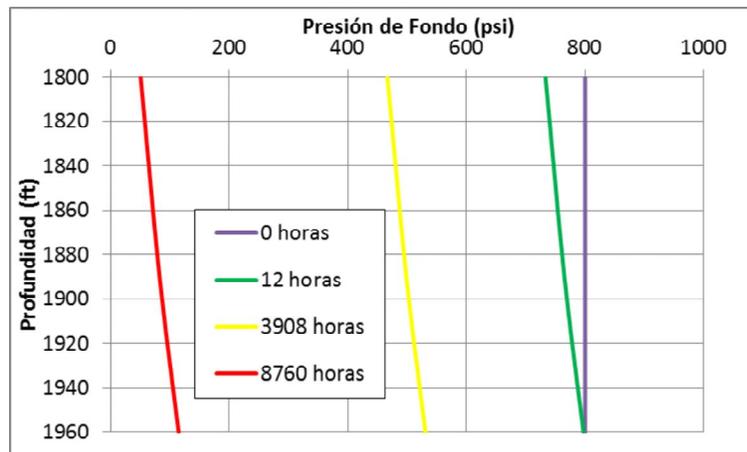
El perfil de presión es analizado a las 12 horas (0.5 días), 3908 horas (162.8 días), y 8760 horas (365 días) de producción, con la intención de identificar el comportamiento con el tiempo del perfil de presión. Es evidente que la presión disminuye al pasar el tiempo, respuesta clara de tener un pozo abierto a una tasa constante de producción. Las mayores caídas de presión se observan en la cara del pozo, a un radio de 0.28 ft, y al aumentar el radio se nota el leve incremento en el perfil de presiones.

La Figura 6-3 presenta el comportamiento de la presión con la profundidad vertical, al hacer el análisis respecto a la profundidad se ve una leve diferencia en la presión de fondo calculada en la base, a profundidad intermedia, y en el tope de la formación.

**Figura 6-2:** Comportamiento de presión con radio para diferentes tiempos de producción y profundidades – Caso D-P.



**Figura 6-3:** Comportamiento de presión con profundidad a diferentes tiempos de producción – Caso D-P.



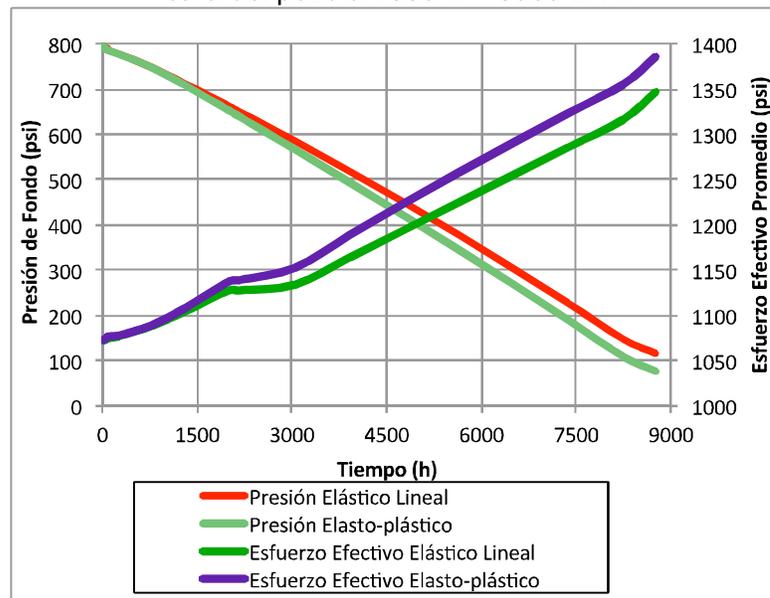
**Comportamiento del Esfuerzo Efectivo.**

La Figura 6-4 presenta el comportamiento del esfuerzo efectivo para la simulación elástica y elasto-plástica en la cual se presenta una diferencia de magnitud entre ambos esfuerzos efectivos promedio, relacionado al estado de esfuerzos diferente debido a las deformaciones plásticas adicionales calculadas con el modelo elasto-plástico. La

tendencia de ambas curvas es lógica debido a que a menor presión el esfuerzo efectivo promedio es mayor. También en la Figura 6-4 se presenta el comportamiento de la presión, la cual permite tener claridad sobre el comportamiento del esfuerzo efectivo directamente relacionado con la presión.

Es visible un cambio de comportamiento a las 2000 horas de producción aproximadamente, donde empieza el comportamiento plástico del material, e influye en la respuesta del esfuerzo efectivo debido a las componentes adicionales incluidas en el cálculo del estado de esfuerzos. Antes de las 2000 horas se presenta una magnitud similar en ambas curvas, relacionado al comportamiento elástico de la roca.

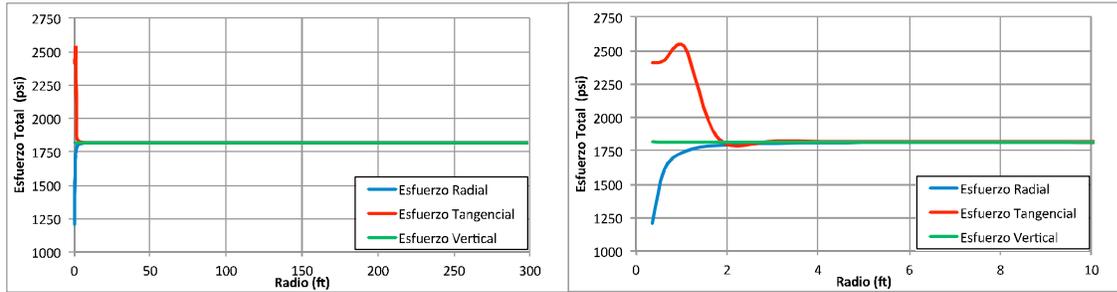
**Figura 6-4:** Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio y la presión con tiempo en la cara del pozo a 1880 ft – Caso D-P.



La Figura 6-5 presenta el comportamiento de los esfuerzos totales con radio al año de producción a la profundidad media de formación, 1880 ft. Recordando que el estado de esfuerzos es isotrópico (**Tabla 6-3**), el componente tangencial del esfuerzo total presenta una disminución de su magnitud en la zona cercana al pozo, dejando en evidencia un pico que está relacionado a las deformaciones plásticas cercanas al pozo [34]. La deformación plástica tiene efecto en el primer pie del yacimiento, influyendo en un cambio permanente de la formación productora en esta zona; dicho cambio irreversible es incidente en el daño por presión de la formación que tiene como reflejo el cambio de la permeabilidad y por tanto de presión a medida que produce el pozo. El esfuerzo radial

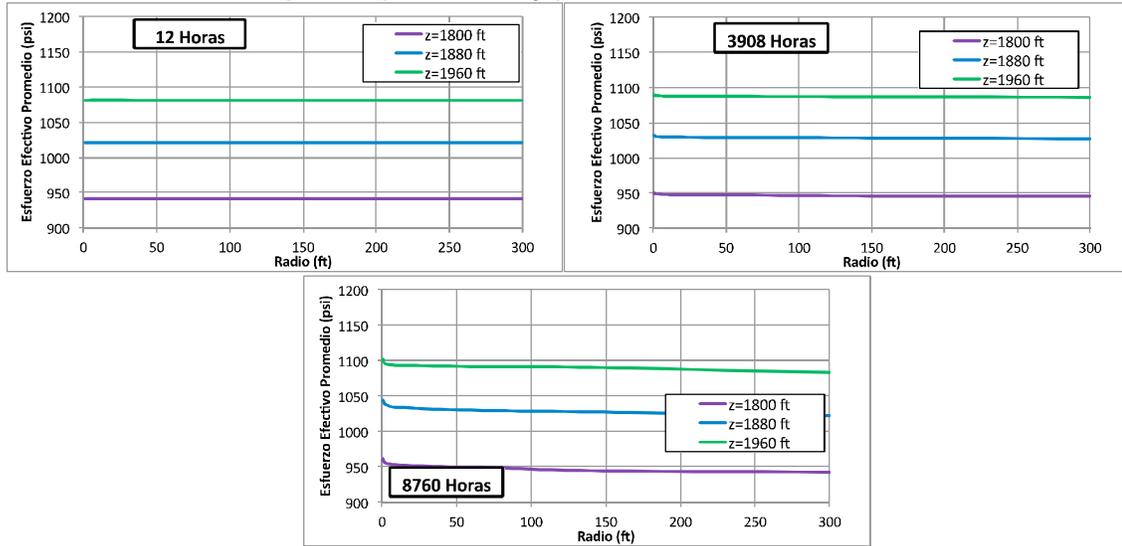
por su parte aumenta a medida que aumenta la profundidad radial, pero encuentra un valor de esfuerzo estable que comparte con los esfuerzos en las otras direcciones y por último el esfuerzo vertical que no cambia con el radio.

**Figura 6-5:** Comportamiento del esfuerzo total con radio al año de producción a 1880 ft – Caso D-P.



La Figura 6-6 presenta el comportamiento del esfuerzo efectivo promedio con el radio, a diferentes profundidades y tiempos de simulación. La disminución en el perfil de esfuerzo efectivo con radio se debe a que la caída de presión es de mayor magnitud en la cara del pozo y por tanto se alcanza allí el valor máximo de esfuerzo efectivo promedio, y a medida que la presión aumenta con el radio tiende a estabilizarse el esfuerzo efectivo promedio. De igual manera se puede observar el aumento del esfuerzo efectivo con el tiempo como respuesta a la producción de fluidos en el yacimiento. Para los tiempos de simulación analizados, es evidente que el esfuerzo efectivo aumenta con profundidad como consecuencia del aumento en el esfuerzo total debido al peso de los estratos superiores.

**Figura 6-6:** Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio con radio para diferentes tiempos de producción y profundidades – Caso D-P.



En la Figura 6-7 se presenta el comportamiento del esfuerzo efectivo con tiempo a diferentes radios y diferentes profundidades. Es evidente que en la cara del pozo se presentan los valores mayores de esfuerzo efectivo, debido a la mayor caída de presión, a medida que se aumenta en el radio la magnitud de esfuerzo efectivo disminuye, igualmente es evidente que a mayor profundidad el esfuerzo efectivo promedio es mayor.

En la

Figura 6-8 se presenta el comportamiento del esfuerzo efectivo con profundidad en la cara del pozo. Con esta grafica se corroboran los resultados anteriores donde es evidente el incremento del esfuerzo con profundidad.

**Figura 6-7:** Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio con tiempo a diferentes radios y profundidades – Caso D-P.

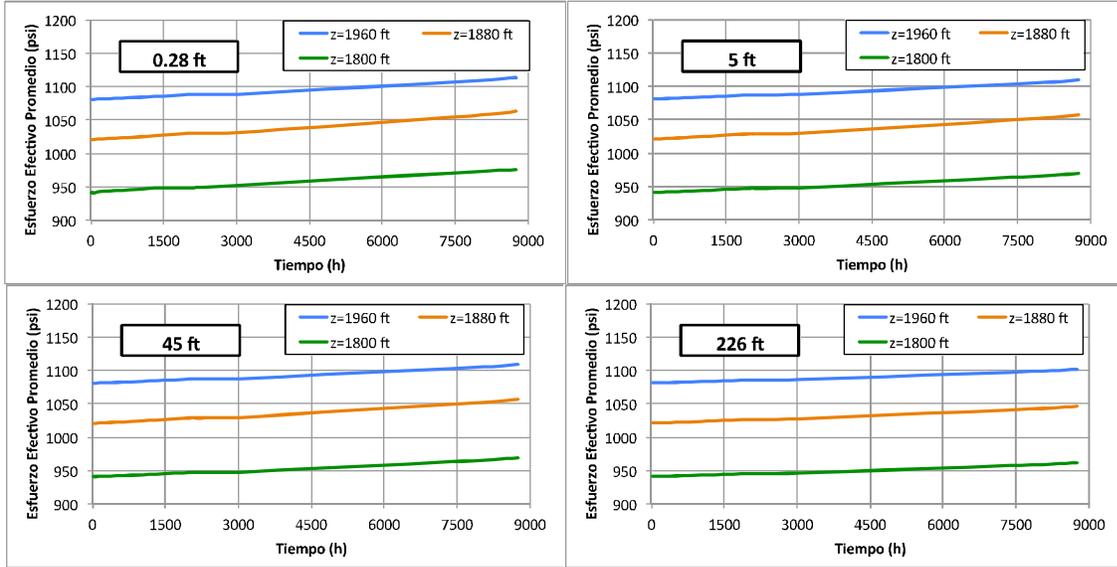
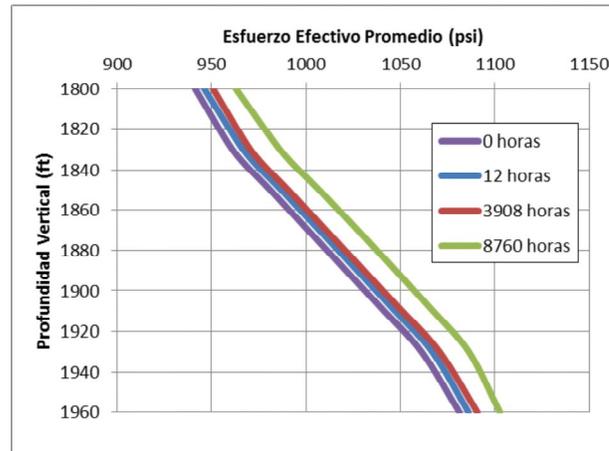


Figura 6-8: Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio con profundidad a diferentes tiempos de producción – Caso D-P.



**Comportamiento de la Permeabilidad.**

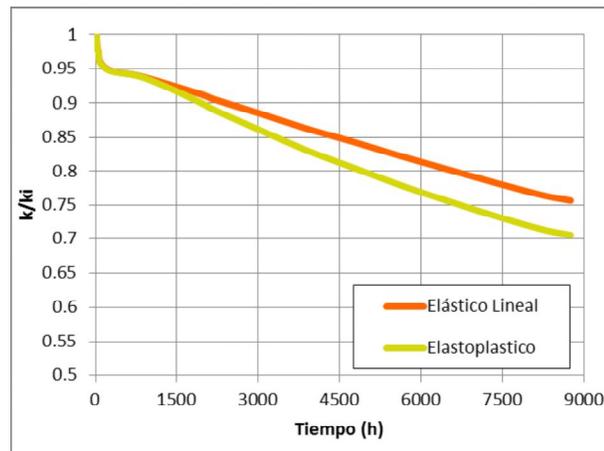
Uno de los puntos importantes en el análisis de resultados del simulador construido es la permeabilidad, debido a que tiene una gran importancia en el comportamiento de la presión del yacimiento. Como se puede observar en el Anexo 6, la permeabilidad depende el módulo de permeabilidad y el estado de esfuerzos que actúan en un punto de cálculo de la malla.

Para yacimientos sensibles a esfuerzos y deformaciones, es común encontrar dos consecuencias físicas como resultado del cambio de esfuerzos: la deformación de la roca y el cambio en las propiedades de flujo de fluidos como la permeabilidad. [21].

Autores como Osorio, et al. [33] han relacionado el daño de formación en yacimientos sensibles a esfuerzos y deformaciones como el cambio de presión con respecto al cambio en permeabilidad. En relación a estos estudios en la Figura 6-9 se presenta el comportamiento de la relación de permeabilidad donde es evidente el cambio de la permeabilidad inicial con la permeabilidad calculada a cada tiempo, mientras esta en producción el yacimiento.

La diferencia entre la simulación elástica y elasto-plástica es evidente y se relaciona a la estimación de deformaciones plásticas adicionales en el modelo acoplado elasto-plástico.

**Figura 6-9:** Comportamiento de la permeabilidad con tiempo en la cara del pozo a 1880 ft – Caso D-P.

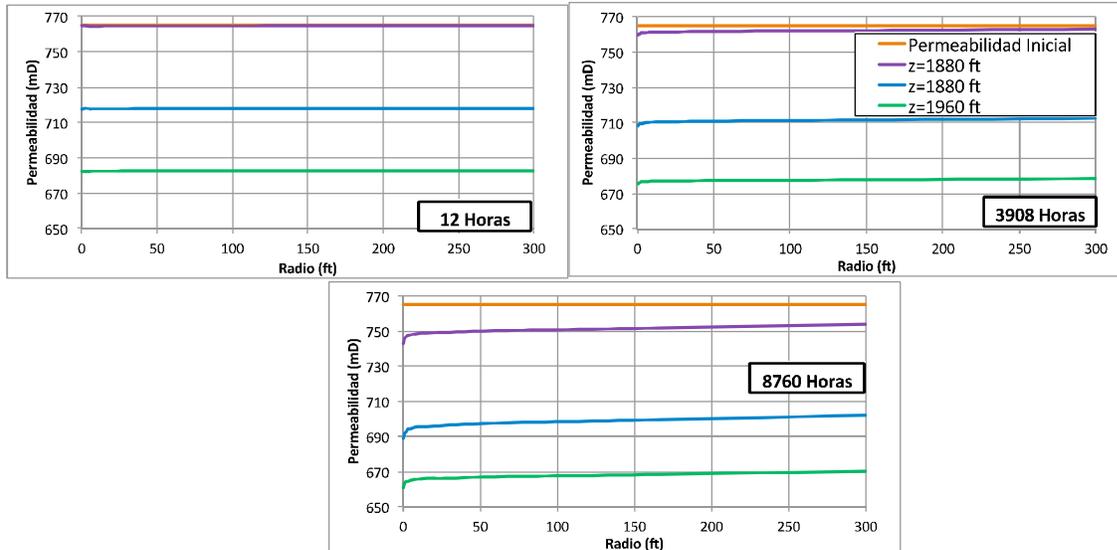


En los primeros tiempos de simulación se observa una caída súbita de la relación de permeabilidad, relacionada a las fuertes caídas de presión experimentadas al abrir el pozo a producción. Hasta aproximadamente las 2000 horas de producción la permeabilidad para el modelo elástico y elasto-plástico son similares, validando así el análisis expuesto para el esfuerzo efectivo promedio, y relacionado a que en estos tiempos no hay evidencia aún de comportamiento plástico en la formación.

La Figura 6-10 presenta los perfiles de permeabilidad con radio, a diferentes tiempos y profundidades verticales de la formación. La permeabilidad disminuye con el tiempo

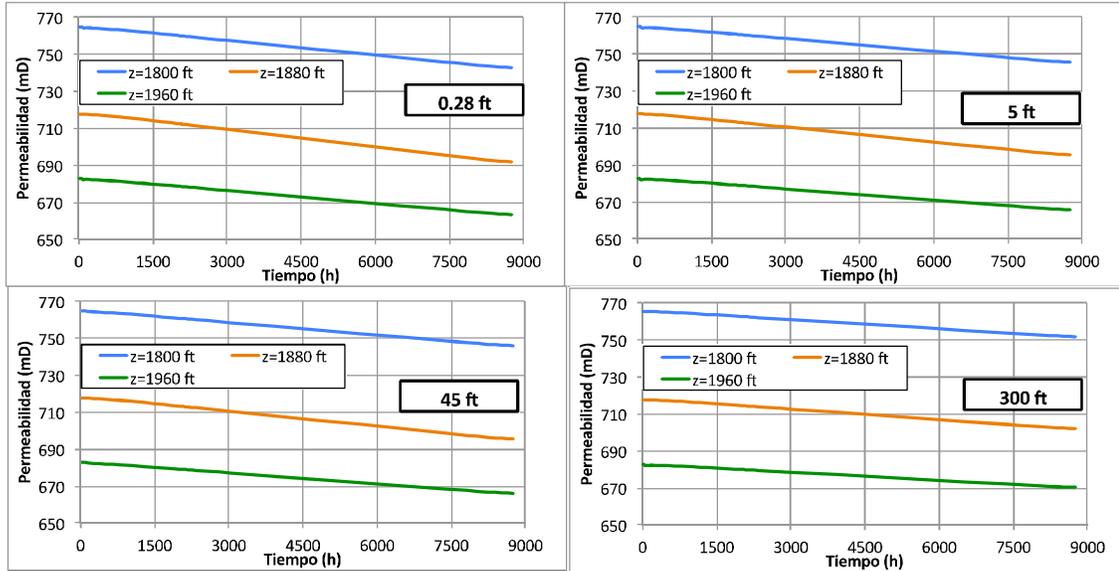
como respuesta al esfuerzo efectivo promedio, el cual aumenta como consecuencia al peso de los estratos superiores. Adicional, la permeabilidad aumenta con el radio debido a que la presión se torna asintótica a medida que avanza el perfil radial, y los mayores cambios en el valor de permeabilidad se evidencia en la cara del pozo.

**Figura 6-10:** Comportamiento de la permeabilidad con radio a diferentes tiempos y profundidades – Caso D-P.



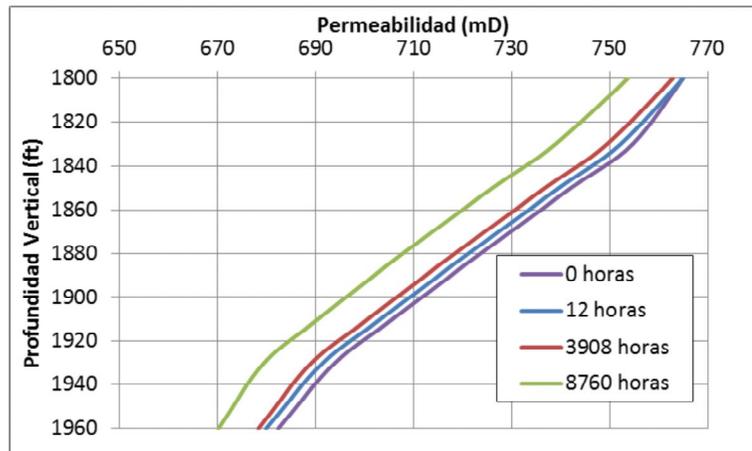
La Figura 6-11 presenta el comportamiento de la permeabilidad con tiempo a diferentes radios y profundidades verticales. Se puede observar que la permeabilidad es menor en el radio del pozo y aumenta en cuanto se aleja de la zona de mayor caída de presión del sistema. También es evidente que la permeabilidad disminuye con la profundidad como respuesta al aumento del esfuerzo de sobrecarga relacionado al peso de las capas superiores de la formación analizada.

**Figura 6-11** Comportamiento de la permeabilidad con tiempo a diferentes radios y profundidades – Caso D-P.



Para los tiempos de simulación analizados, la permeabilidad disminuye con profundidad debido al aumento del esfuerzo efectivo, el cual aumenta como consecuencia del peso de los estratos superiores como se puede observar en la Figura 6-12.

**Figura 6-12:** Comportamiento de la permeabilidad con profundidad a diferentes tiempos de producción en la cara del pozo – Caso D-P.



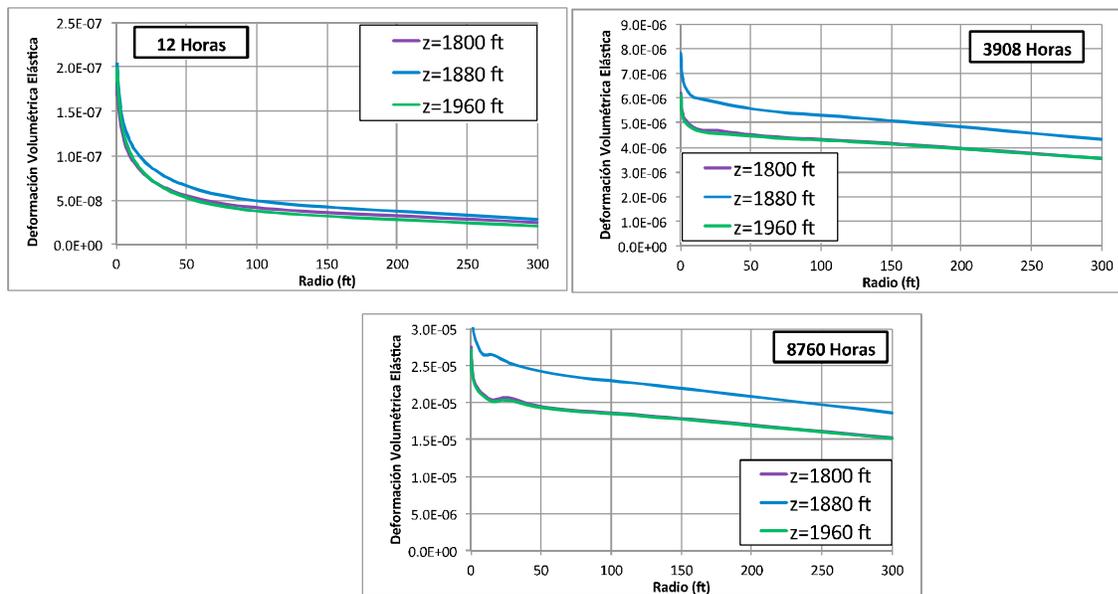
**Comportamiento de la Deformación Elástica.**

La deformación elástica juega un papel fundamental en la estimación del estado de esfuerzos presente en el yacimiento a un tiempo de estudio. De acuerdo al modelo constitutivo empleado, se tiene una componente elástica y una plástica en cuanto a las deformaciones del sistema. A continuación se presentan los resultados de las

deformaciones elásticas con tiempo, a diferentes radios y a diferentes profundidades de análisis.

En la Figura 6-13 se presenta el comportamiento de la deformación volumétrica elástica con radio a diferentes tiempos y profundidades de la formación. Se puede observar que a medida que se avanza en la profundidad radial del yacimiento la deformación elástica es menor, presentando así las mayores deformaciones en la cara del pozo. Respecto al tiempo de producción es notable que a mayor tiempo de producción del pozo, la deformación sea mayor en toda la formación. La deformación volumétrica elástica aumenta con respecto al aumento de la profundidad vertical, debido al incremento del estado de esfuerzos con la vertical relacionada al peso de los estratos superiores.

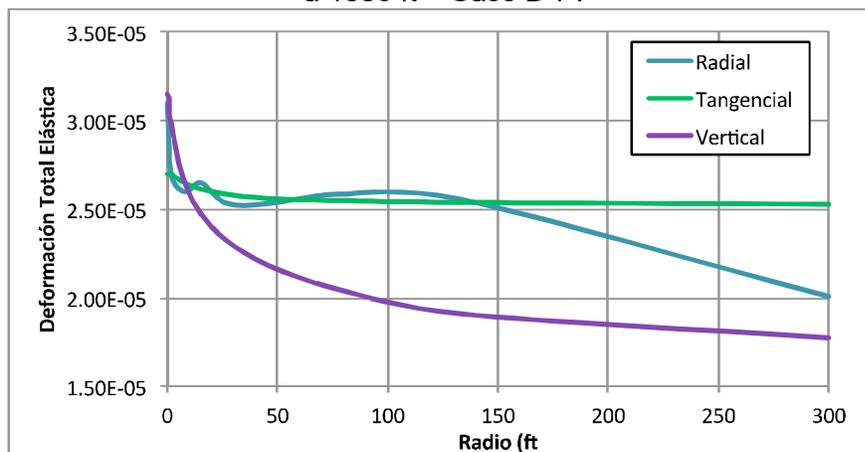
**Figura 6-13:** Comportamiento de la deformación elástica con radio diferentes tiempos de producción y profundidades – Caso D-P.



La Figura 6-14 presenta el comportamiento de la deformación volumétrica elástica para cada dirección, donde se puede observar que la deformación vertical disminuye de acuerdo a la profundidad radial, la deformación tangencial no cambia considerablemente con el radio como respuesta al bajo impacto de flujo en dirección angular, por último la deformación radial decrece con el radio, pero en las cercanías al pozo se evidencia un cambio abrupto en la deformación elástica que impacta la deformación volumétrica presentada anteriormente. Referente a esto, se establece inicialmente que el modelo

numérico puede presentar problemas en este punto de cálculo, relacionado al desarrollo del sistema de ecuaciones en diferencias finitas.

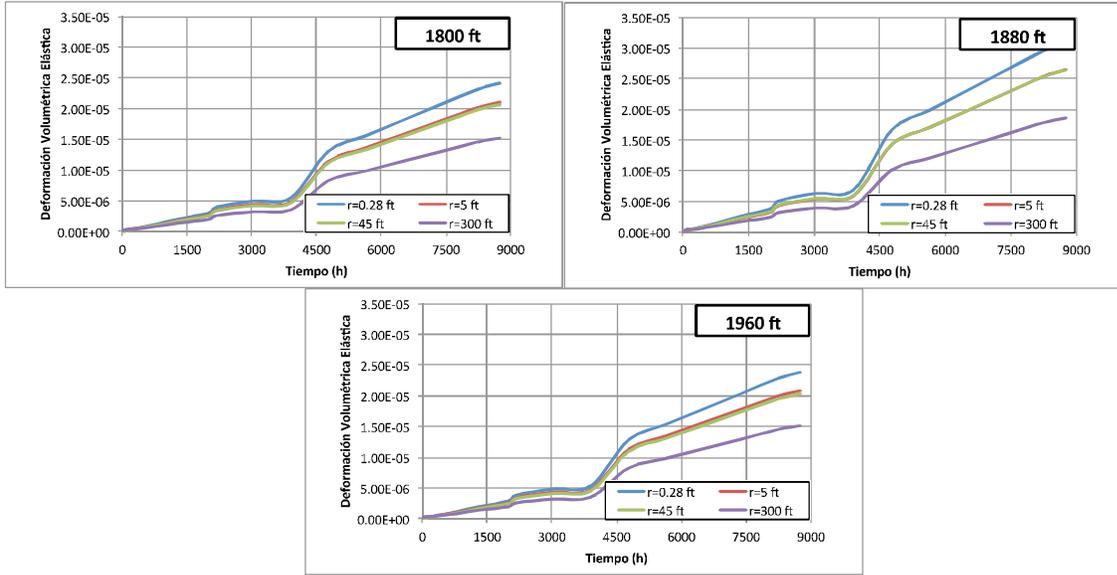
**Figura 6-14:** Comportamiento de la deformación elástica con radio al año de producción a 1880 ft – Caso D-P.



La Figura 6-15 presenta el comportamiento de la deformación elástica con el tiempo a diferentes radios y profundidades verticales de la formación. Se puede observar que la deformación registrada en la cara del pozo es mayor y que aumenta gradualmente con el tiempo debido al proceso de producción del yacimiento, y de la reducción por ende de la presión de poro y aumento del esfuerzo efectivo.

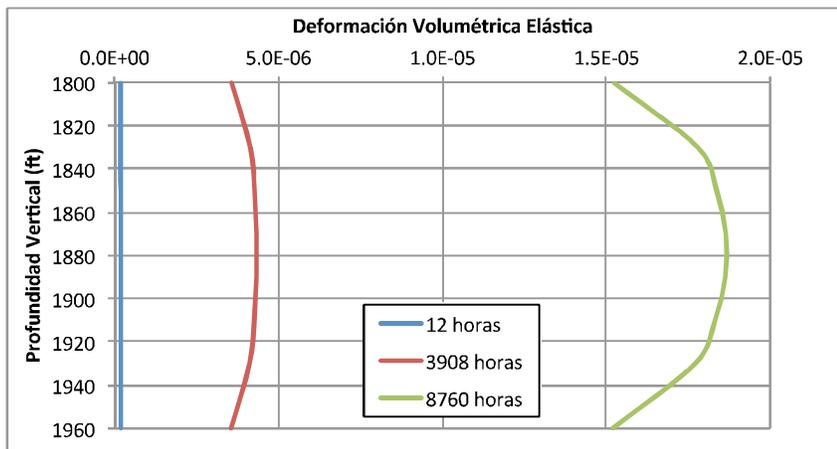
El comportamiento de las curvas está marcado por saltos en diferentes tiempos de simulación, esto se relaciona con la solución numérica del sistema de ecuaciones, ya que como lo plantea Coombe et al. [48] en su trabajo técnico, los sistemas de ecuaciones geomecánicas, presentan alta complejidad y no linealidad, por tanto es efectivo trabajar un sistema de elementos finitos que permite crear formas más representativas y estables para la solución de este tipo de ecuaciones, contrario a la manera de discretización usada en este trabajo que es de diferencias finitas.

**Figura 6-15:** Comportamiento de la deformación elástica con tiempo a diferentes radios y profundidades – Caso D-P.



En la Figura 6-16 se presenta el comportamiento de la deformación elástica con profundidad, es evidente que al aumentar la profundidad la deformación tiende a aumentar, a excepción de los límites internos del yacimiento base y tope donde la deformación empieza a disiparse tendiendo a cero, esto relacionado a la condición de límite externo del yacimiento donde el cambio de deformación es cero, así en los límites del dominio externo la deformación debe alcanzar dicho valor.

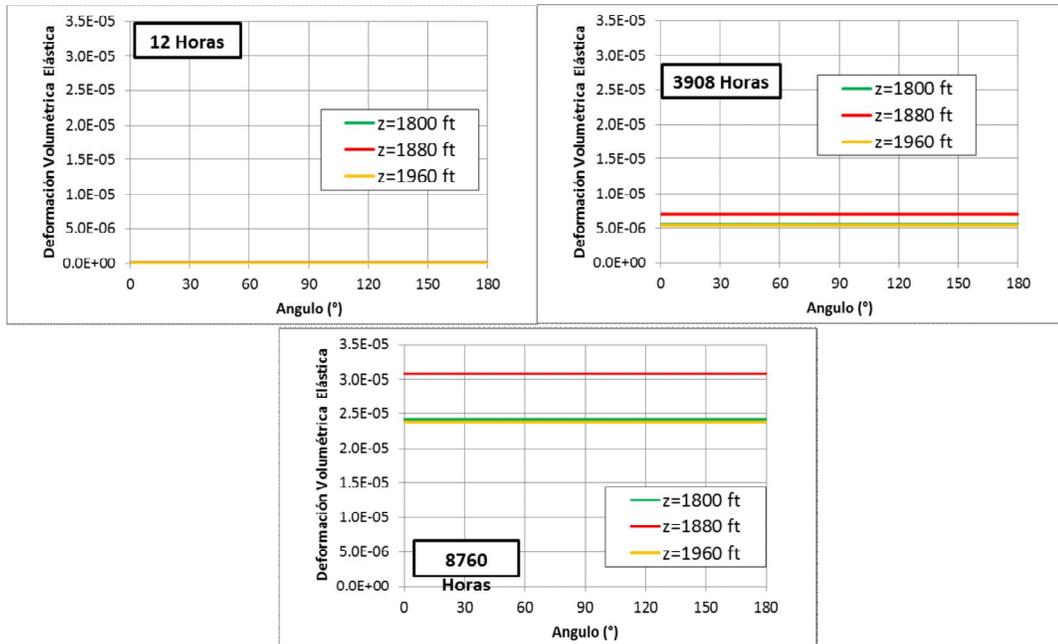
**Figura 6-16:** Comportamiento de la deformación elástica con profundidad a diferentes tiempos de producción – Caso D-P.



En la Figura 6-17 se presenta el comportamiento de la deformación a diferentes ángulos, este análisis se hace por la necesidad de identificar el comportamiento angular de la

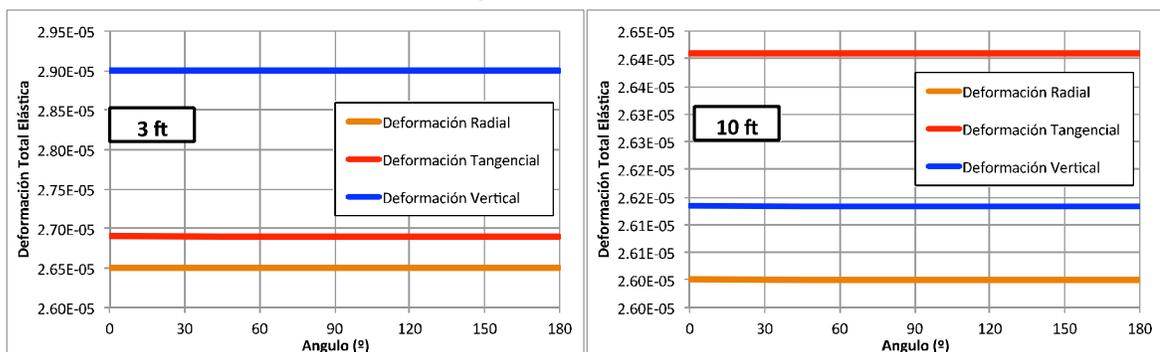
deformación. Debido a la escala del grafico no se evidencia un cambio visible en la deformación, esto relacionado a la predominancia del flujo radial y por tanto la ausencia de una respuesta tangencial, que cuando se traduce en un impacto en el esfuerzo, en la permeabilidad o en la presión no son muy evidentes.

**Figura 6-17:** Comportamiento de la deformación elástica con el ángulo a diferentes profundidades y tiempos de producción – Caso D-P.



En la Figura 6-18 se presenta el comportamiento de la deformación elástica con los ángulos a diferentes radios de yacimiento. Es claro observar la diferencia en magnitud que hay entre cada deformación lo cual se relaciona al perfil presentado en la Figura 6-14.

**Figura 6-18:** Comportamiento de la deformación elástica con el ángulo a diferentes radios y a 1880 ft – Caso D-P.

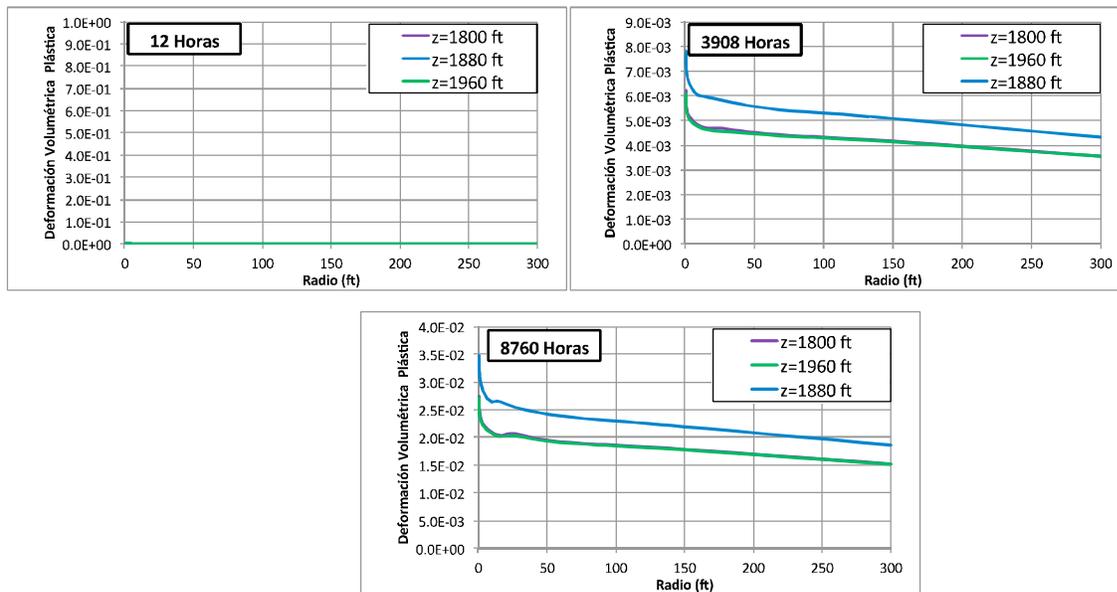


### Comportamiento de la Deformación Plástica.

A continuación se presenta el comportamiento de la deformación plástica del yacimiento en estudio.

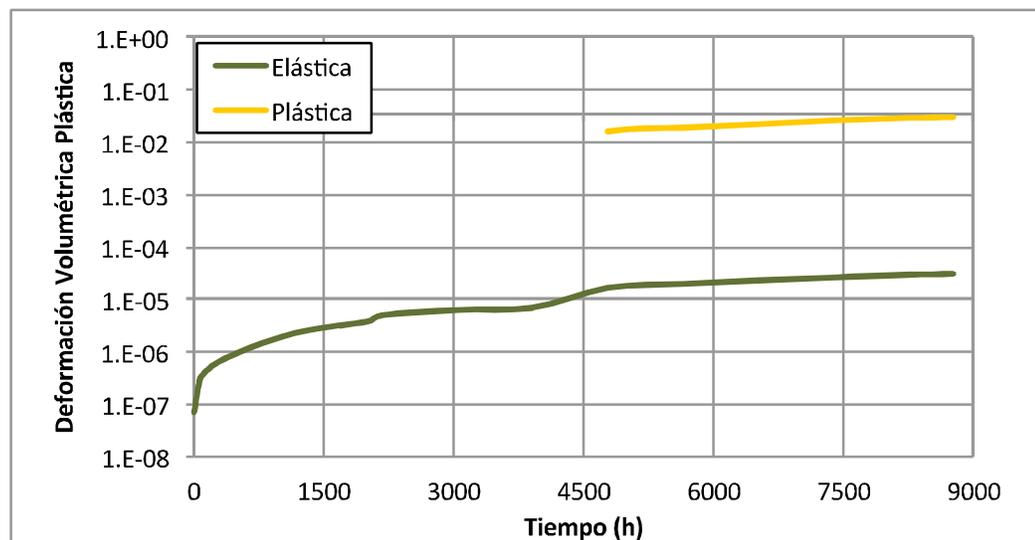
En la Figura 6-19 se puede observar que las mayores deformaciones volumétricas del sistema se presentan en la cara del pozo, zona donde la caída de presión es mayor, y donde se presenta el esfuerzo efectivo promedio de mayor magnitud. Es evidente de igual manera que en toda el área de drenaje del yacimiento se presenta un componente plástico importante, asociado a las propiedades de la roca como su baja consolidación y alta sensibilidad a esfuerzos y deformaciones. El comportamiento de la deformación volumétrica plástica en referencia al radio, tiende a disminuir como respuesta a que la caída de presión en las lejanías a la cara del pozo se reduce al aumentar el radio de análisis.

**Figura 6-19:** Comportamiento de la deformación plástica con radio diferentes tiempos de producción y profundidades – Caso D-P.



Dentro del análisis de la deformación volumétrica con el radio, es importante mencionar de igual manera la diferencia en magnitud de la deformación elástica y la plástica, que está directamente relacionada al comportamiento del estado de esfuerzos efectivos en cada punto de la malla como se puede observar en escala logarítmica en la Figura 6-20.

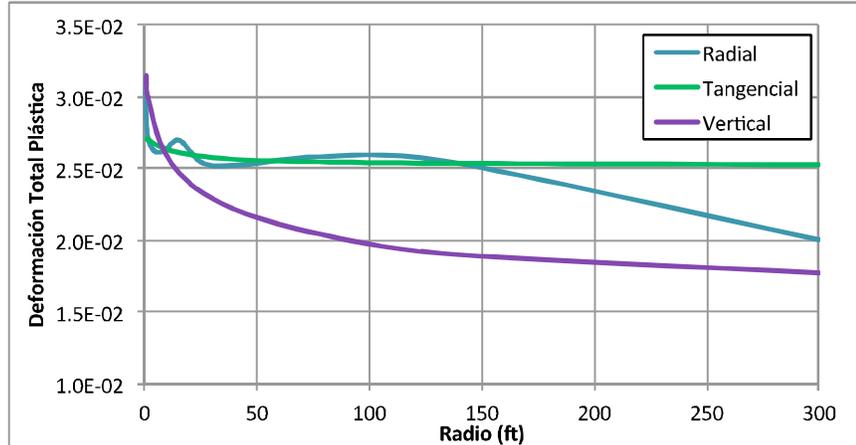
**Figura 6-20:** Comparación de la deformación elástica lineal y la elasto-plástica con el tiempo en la cara del pozo a 1880 ft – Caso D-P.



Es importante tener en cuenta que Han et al. [12] ha presentado resultados similares en cuanto a la diferencia de las deformaciones del sistema, lo que conlleva a concluir que simulación plástica asociada a yacimientos poco consolidados permite un acercamiento al estado de esfuerzos real de la formación en estudio.

En la Figura 6-21 se presenta el comportamiento de las deformaciones totales en función del radio del yacimiento a las 8760 horas de producción a la profundidad media de la formación. La deformación radial presenta un comportamiento anómalo en las cercanías al pozo, que puede ser explicado como respuesta al modelo numérico usado. La deformación tangencial se presenta poco variable debido al poco impacto angular que hay en la producción del yacimiento, por último la deformación vertical disminuye al aumentar la profundidad radial, respuesta que está relacionada al impacto de la deformación tangencial y radial, ya que como se mostró en el desarrollo del modelo matemático cada desplazamiento tiene una influencia importante en el otro, y esto se ve directamente reflejado en las deformaciones.

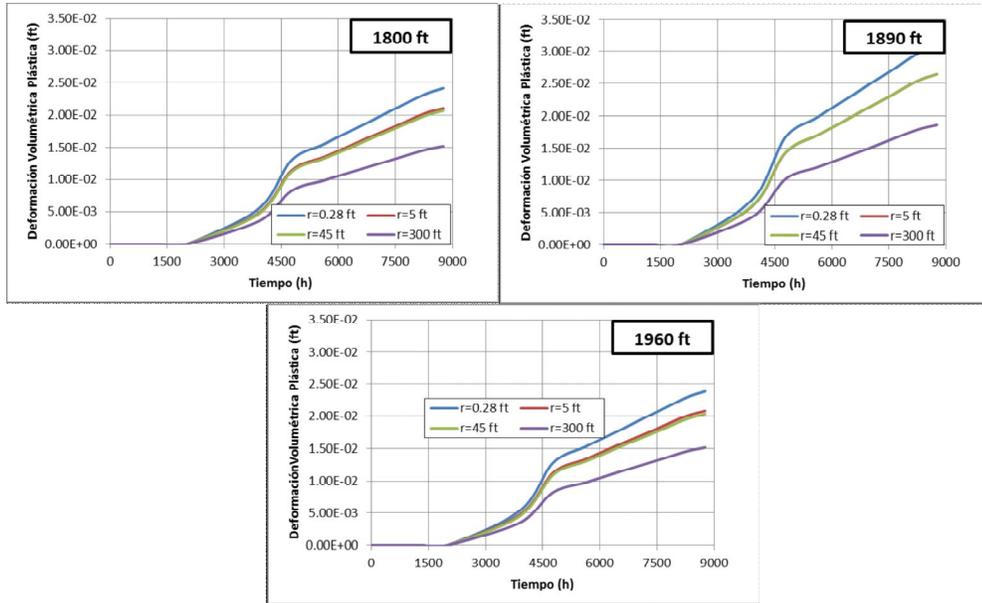
**Figura 6-21:** Comportamiento de la deformación plástica con radio al año de producción a 1880 ft – Caso D-P.



En la Figura 6-22 se presenta el comportamiento de la deformación plástica con el tiempo a diferentes radios y profundidades verticales en el yacimiento. Como se observó en las figuras anteriores, en la cara del pozo se presentan los valores más altos de deformación plástica y a medida que aumenta el radio de estudio la deformación plástica disminuye, esto relacionado a la caída de presión y magnitud del estado de esfuerzos en cada punto del yacimiento.

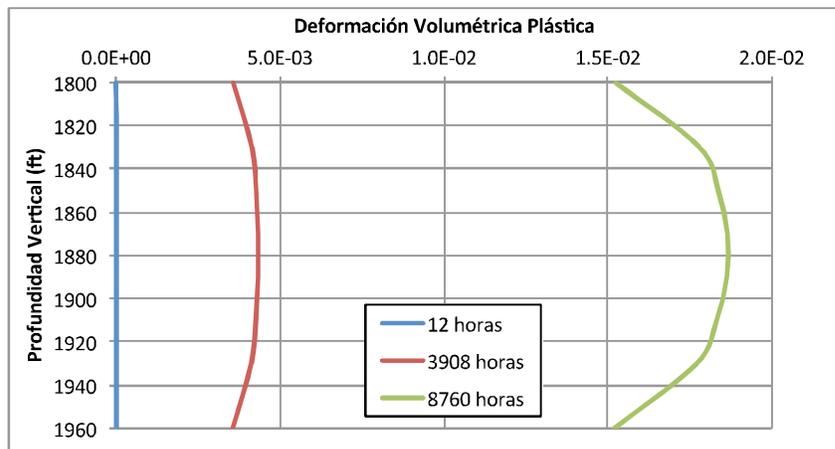
En los tiempos iniciales de simulación no hay presencia de deformaciones permanentes del material, estas deformaciones se evidencian a las 2000 horas de producción aproximadamente, donde comienza un incremento gradual en la magnitud de dichas deformaciones. El salto en el valor de las deformaciones plásticas a las 4500 horas, está relacionado, como se explicó en el caso de la deformación elástica, por el método de discretización del sistema de ecuaciones geomecánicas.

**Figura 6-22:** Comportamiento de la deformación plástica con tiempo a diferentes radios y profundidades – Caso D-P.



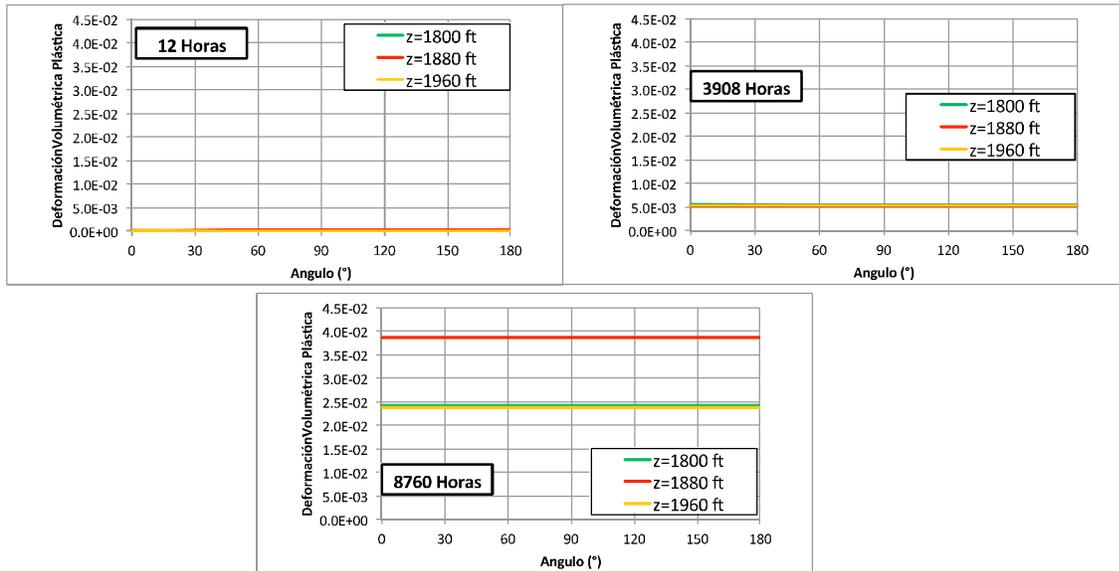
En la Figura 6-23 se presenta el comportamiento de la deformación plástica a diferentes profundidades verticales. Se puede observar un comportamiento similar al de la deformación elástica que muestra una sensibilidad particular en las fronteras del dominio interno del yacimiento, lo cual se relaciona a la condición de límite externo de deformación cero del sistema en dichas fronteras. Igualmente es evidente que a medida que se aumenta en la profundidad vertical, la deformación aumenta de magnitud, de acuerdo al peso de los estratos superiores.

**Figura 6-23:** Comportamiento de la deformación plástica con profundidad a diferentes tiempos de producción – Caso D-P.



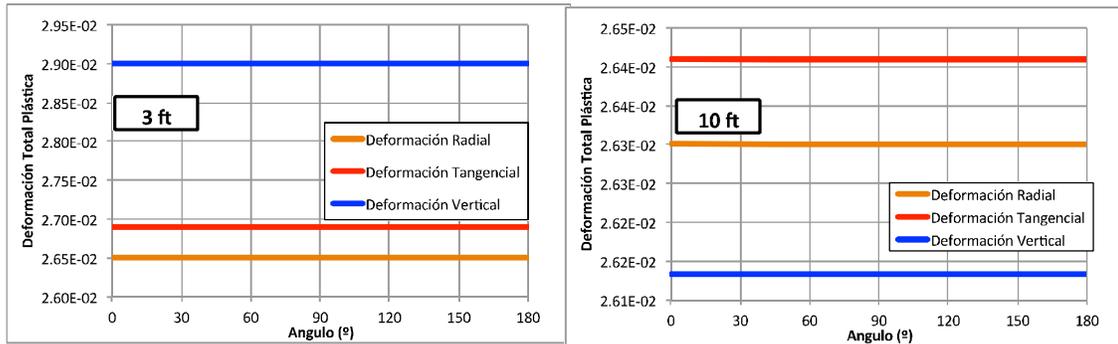
Por ultimo en la Figura 6-24 se presenta el comportamiento de la deformación plástica respecto a los ángulos de la malla cilíndrica, como se observó en el análisis de la deformación elástica, la escala de la gráfica es bastante pequeña y permite observar el comportamiento angular de dicha deformación, la cual difiere por unas milésimas que no son visibles en propiedades como la permeabilidad, el esfuerzo efectivo promedio y la presión de yacimiento.

**Figura 6-24:** Comportamiento de la deformación plástica con el ángulo a diferentes profundidades y tiempos de producción – Caso D-P.



En la Figura 6-25 se presenta el comportamiento de la deformación plástica con los ángulos para diferentes radios. Estos resultados validan los expuestos en la Figura 6-21, donde se presenta el cambio de tendencia de la deformación radial y vertical.

**Figura 6-25:** Comportamiento de la deformación plástica con el ángulo a diferentes radios a 1880 ft – Caso D-P.



**6.1.2 Resultados Criterio Modelo Cam –Clay Modificado.**

A continuación se presentan los resultados para el caso de simulación usando el criterio de Cam – Clay modificado (MCC).

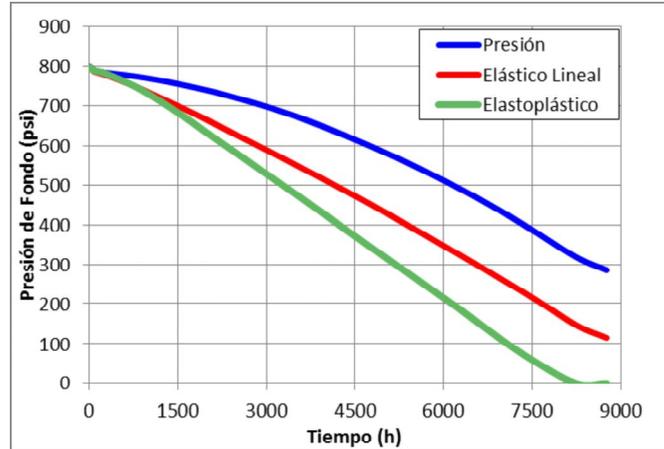
**Comportamiento de la Presión de Yacimiento.**

En la Figura 6-26 se presenta el comportamiento de la presión con el tiempo en la cara del pozo, se observa una caída de presión contundente al considerar el modelo elasto-plástico. En comparación con la Figura 6-1, donde se relaciona el comportamiento de presión para el modelo elasto-plástico Drucker-Prager, es evidente una caída de presión mayor para el caso Cam-Clay modificado, donde se observa que a las 7800 horas aproximadamente el pozo no tiene la energía suficiente para producir más fluido.

La diferencia en resultados observado usando un criterio de cedencia y otro, radica en las propiedades de resistencia propias de cada uno, que permiten definir la inmediatez de la falla en cada nodo.

Dentro del análisis cabe mencionar el impacto del módulo de permeabilidad (Explicado en el Anexo 6) en estos resultados, ya que esta variable es una medida directa de la sensibilidad a esfuerzos y deformaciones por medio de la permeabilidad [37] que se ve reflejada en una respuesta directa en el comportamiento de la presión de yacimiento.

**Figura 6-26:** Comportamiento de la presión con tiempo en la cara del pozo a 1880 ft – Caso MCC.



Para complementar los resultados de la simulación elasto-plástica acoplada, en la Figura 6-27, se presenta el comportamiento del perfil de presión con radio a diferentes profundidades de la formación, en el tope de la formación (1800 ft), en profundidad media (1880 ft) y en la base de la formación (1960 ft), respectivamente.

El perfil de presión es analizado a las 12 horas (0.5 días), 3908 horas (162.8 días), y 8760 horas (365 días) de producción, con la intención de identificar el comportamiento con el tiempo del perfil de presión. Es evidente que la presión disminuye al pasar el tiempo, respuesta clara de tener un pozo abierto a una tasa constante de producción y las mayores caídas de presión se observan en la cara del pozo, a un radio de 0.28 ft. Al año de producción no hay energía en el yacimiento para producir a la tasa de producción definida, relacionado con la caída de presión que sufre el pozo en estudio relacionada en la Figura 6-26. En este caso dicha reducción de presión en el sistema está asociada a la caída de la permeabilidad, y por ende se puede hablar de un mayor daño en la formación a medida que transcurre el tiempo de producción. Esto podrá ser visible en la sección de análisis de la permeabilidad.

**Figura 6-27:** Comportamiento de la presión con radio diferentes tiempos de producción y profundidades – Caso MCC.