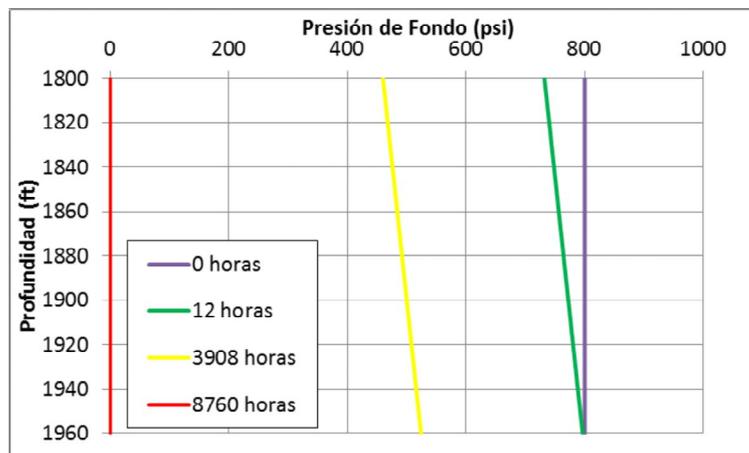


La Figura 6-28 presenta el comportamiento de la presión con la profundidad vertical que permite validar los resultados presentados en la Figura 6-27, se evidencia un cambio gradual en la presión con profundidad, esto al peso de la formación superior sobre la formación en estudio, es importante resaltar que al año de producción (8760 horas) la presión del sistema es 0.

Figura 6-28: Comportamiento de la presión con profundidad a diferentes tiempos de producción – Caso MCC.

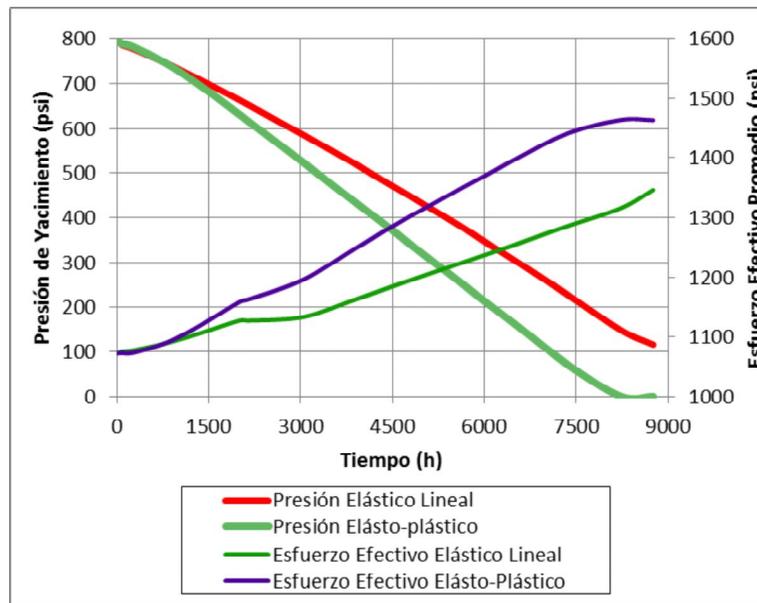


Comportamiento del Esfuerzo Efectivo.

La Figura 6-29 presenta el comportamiento del esfuerzo efectivo con presión para la simulación elástica y elasto-plástica. Se puede observar la diferente magnitud de ambas curvas, relacionado a la diferencia de magnitud en las deformaciones volumétricas totales de la roca que impactan directamente en la aproximación al estado de esfuerzos de la roca. Al relacionar las curvas de esfuerzo efectivo promedio con la presión es claro que a menor presión, el esfuerzo efectivo promedio será mayor, esto relacionado con la definición de esfuerzo efectivo, que es la diferencia entre el esfuerzo total y la presión de poro relacionada con la constante de Biot.

Es visible un cambio de comportamiento a las 1300 horas de producción aproximadamente, donde empieza el comportamiento plástico del material, he influye en la respuesta del esfuerzo efectivo, debido a las componentes adicionales incluidas en el cálculo del estado de esfuerzos. Antes de las 1300 horas se presenta una magnitud similar en ambas curvas, relacionado al comportamiento elástico de la roca.

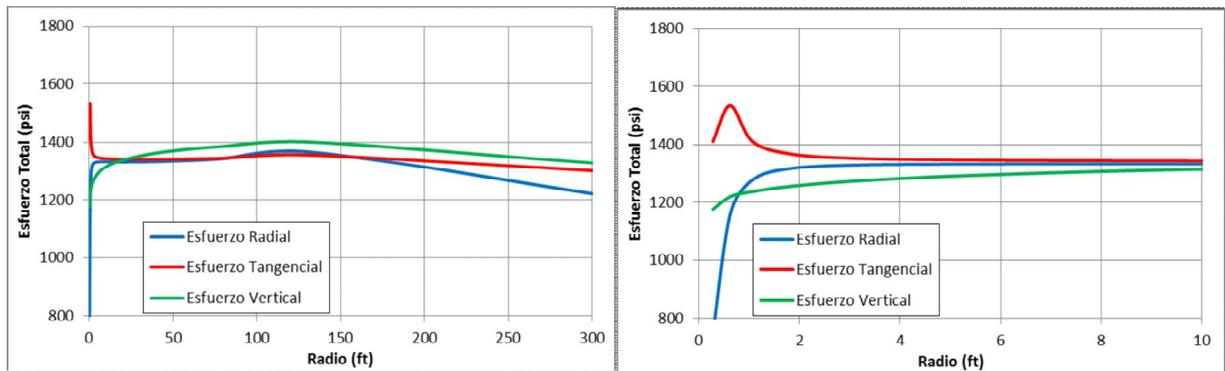
Figura 6-29: Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio y la presión con tiempo en la cara del pozo a 1880 ft – Caso MCC.



En la Figura 6-30 se presenta el comportamiento de los esfuerzos totales con radio, estos resultados son para el último tiempo de simulación a la profundidad media de formación

de 1880 ft. Recordando que el estado de esfuerzos es isotrópico (**Tabla 6-3**) es evidente que al aumentar la profundidad radial los tres esfuerzos totales tienden a estabilizarse en un valor de 1300 psi aproximadamente, y al hacer un zoom de los primeros 10 ft del yacimiento en dirección radial, se evidencia un comportamiento curvo del esfuerzo total tangencial en la cara del pozo, el cual ha sido relacionado a comportamiento plástico de la roca [34]. La deformación plástica tiene efecto en los primeros 3 pies del yacimiento, influyendo en un cambio permanente de la formación productora en esta zona, dicho cambio irreversible es incidente en el daño por presión de la formación que tiene como reflejo el cambio de la permeabilidad y por tanto de presión a medida que produce el pozo.

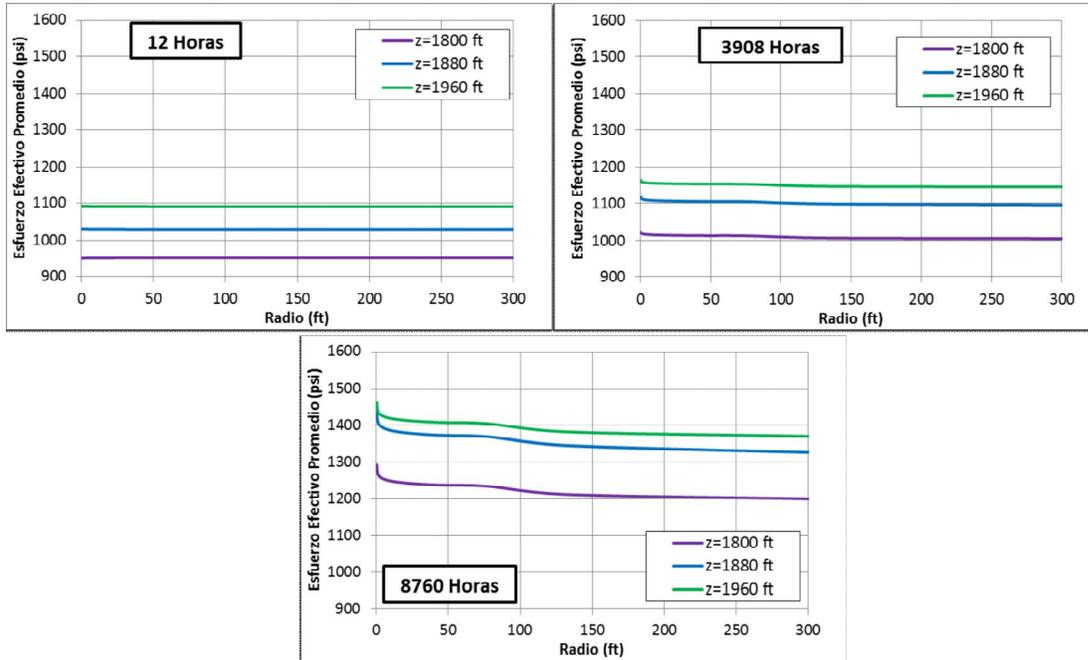
Figura 6-30: Comportamiento del esfuerzo total con radio al año de producción a 1880 ft – Caso MCC.



En la Figura 6-31 se presenta el comportamiento del esfuerzo efectivo promedio con el radio, a diferentes profundidades y tiempos de simulación. La disminución en el perfil de esfuerzo efectivo con radio se debe a que la caída de presión es mayor en la cara del pozo, y lo por tanto allí se alcanza el valor máximo de esfuerzo efectivo promedio.

De igual manera se puede observar el aumento del esfuerzo efectivo con el tiempo como respuesta a la producción de fluidos en el yacimiento. Para los tiempos de simulación analizados, es evidente que el esfuerzo efectivo aumenta con profundidad como consecuencia del aumento en el esfuerzo total debido al peso de los estratos superiores.

Figura 6-31: Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio con radio diferentes tiempos de producción y profundidades – Caso MCC.



En la Figura 6-32 se presenta el comportamiento del esfuerzo efectivo con tiempo a diferentes radios y diferentes profundidades, es evidente que en la cara del pozo se evidencian los valores mayores de esfuerzo efectivo, debido a la relación con la mayor caída de presión, a medida que se aumenta en el radio la magnitud de esfuerzo efectivo disminuye, igualmente es evidente que a mayor profundidad el esfuerzo efectivo promedio es mayor.

En la Figura 6-33 se presenta el comportamiento del esfuerzo efectivo con profundidad en la cara del pozo. Con esta grafica se corroboran los resultados anteriores donde es evidente el incremento del esfuerzo con profundidad.

Figura 6-32: Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio con tiempo a diferentes radios y profundidades – Caso MCC.

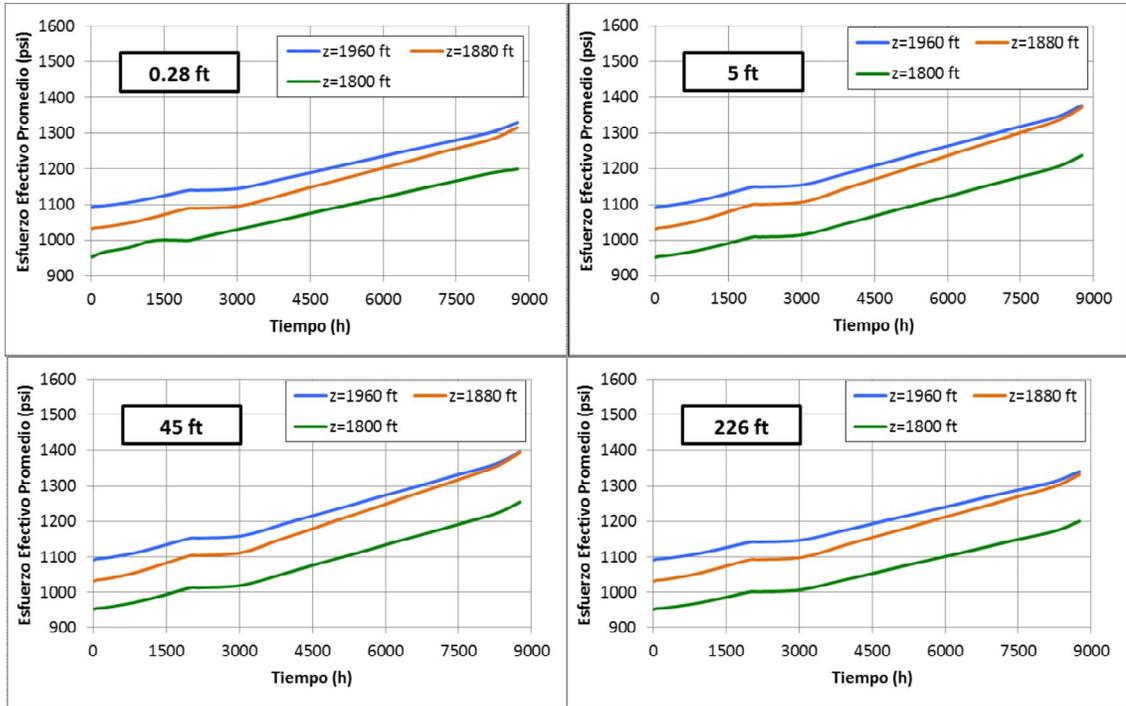
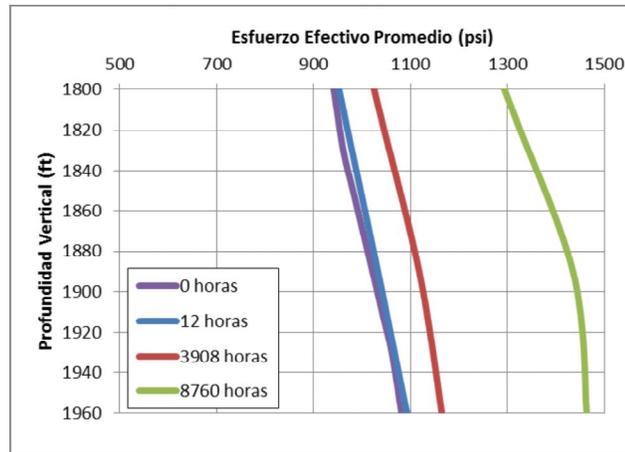


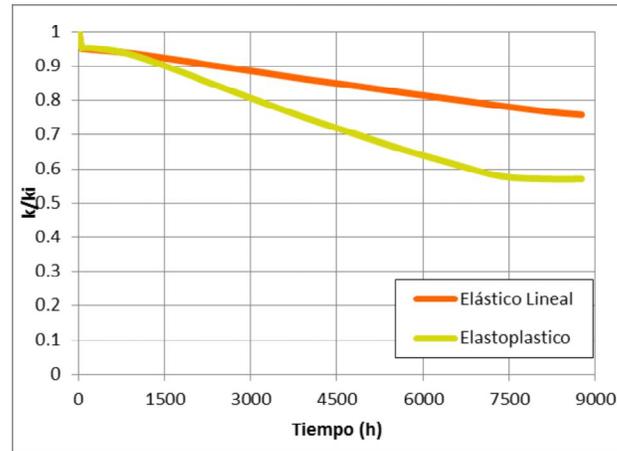
Figura 6-33: Comportamiento del esfuerzo efectivo promedio con profundidad a diferentes tiempos de producción – Caso MCC.



Comportamiento de la Permeabilidad.

En la Figura 6-34 se presenta la comparación para la permeabilidad entre la simulación elástica y la elasto-plástica usando el modelo modificado de Cam-Clay, y donde es evidente la gran diferencia entre ambas curvas, que se relaciona a la estimación de las deformaciones plásticas adicionales en el modelo acoplado elasto-plástico.

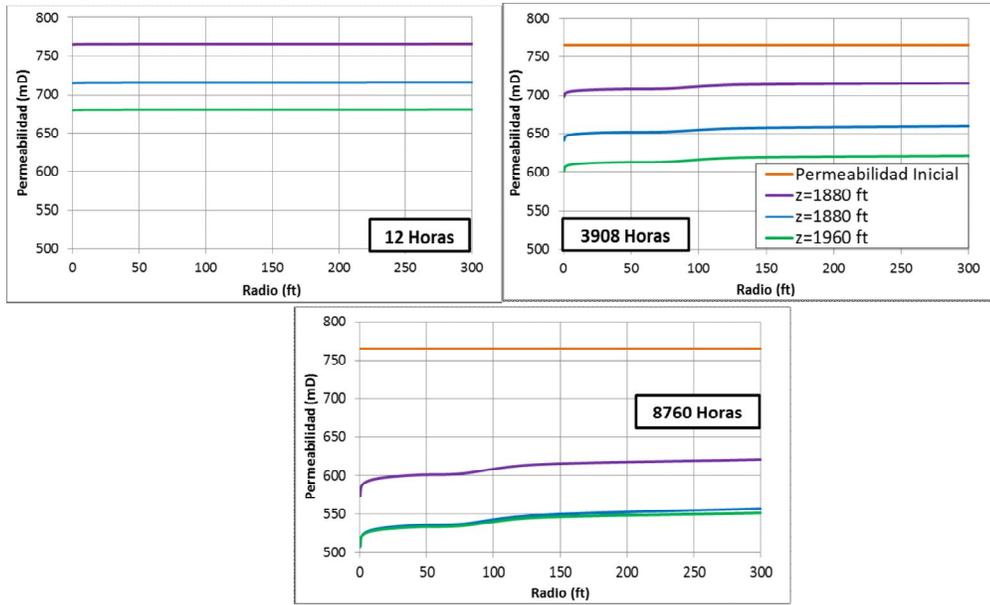
Figura 6-34: Comportamiento de la permeabilidad con tiempo en la cara del pozo a 1880 ft – Caso MCC.



En los primeros tiempos de simulación se observa una caída de la relación de permeabilidad, relacionada a las caídas de presión experimentadas al abrir el pozo a producción, recordando que la formación está abierta totalmente y el impacto en la permeabilidad es mayor. Hasta aproximadamente las 1300 horas de producción la permeabilidad para el modelo elástico y elasto-plástico son similares, validando así lo presentado en el esfuerzo efectivo promedio, y relacionado a que en estos tiempos no hay evidencia aún de comportamiento plástico en la formación.

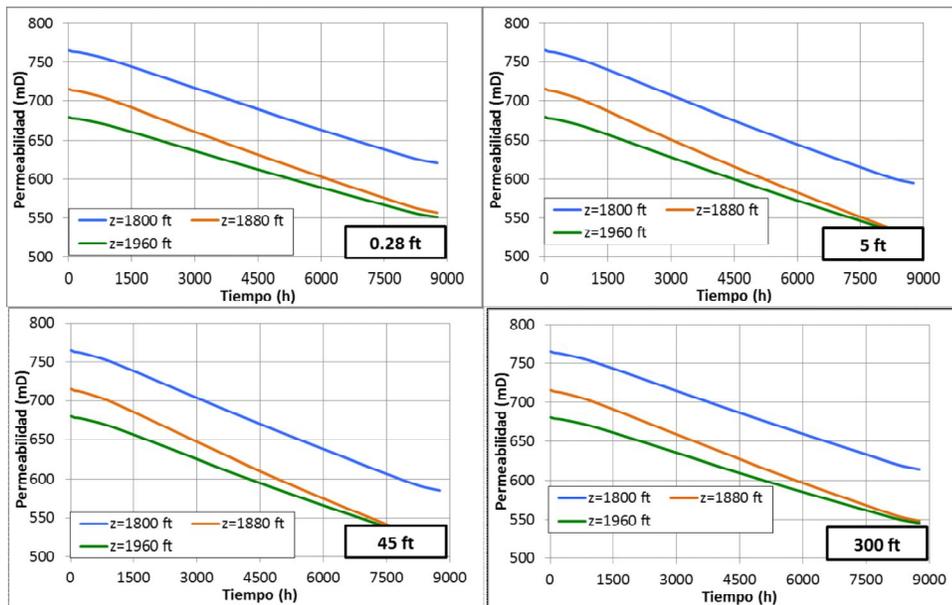
En las Figura 6-35 se presentan los perfiles de permeabilidad con radio, a diferentes tiempos y profundidades de la formación. La permeabilidad disminuye con el tiempo como respuesta al esfuerzo efectivo promedio, el cual aumenta como consecuencia al peso de los estratos superiores. La permeabilidad aumenta con el radio debido a que la presión se mantiene a medida que avanza el perfil radial, y los mayores cambios en la permeabilidad se evidencian en la cara del pozo.

Figura 6-35: Comportamiento de la permeabilidad con radio diferentes tiempos y profundidades – Caso MCC.



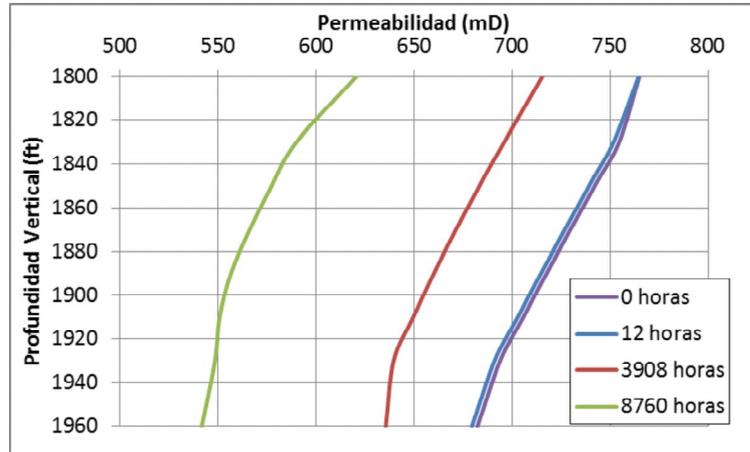
En la Figura 6-36 se presenta el comportamiento de la permeabilidad con tiempo a diferentes radios y profundidades. Se puede observar que la permeabilidad es menor en el radio del pozo y aumenta en cuanto se aleja de la zona de mayor caída de presión del sistema. También es evidente que la permeabilidad disminuye con la profundidad como respuesta a la disminución del tamaño del poro por procesos de compactación, relacionado al peso de las capas superiores de la formación analizada.

Figura 6-36 Comportamiento de la permeabilidad con tiempo a diferentes radios y profundidades – Caso MCC.



Para los tiempos de simulación analizados, la permeabilidad disminuye con profundidad debido al aumento del esfuerzo efectivo, el cual aumenta como consecuencia del peso de los estratos superiores como se puede observar en la Figura 6-37.

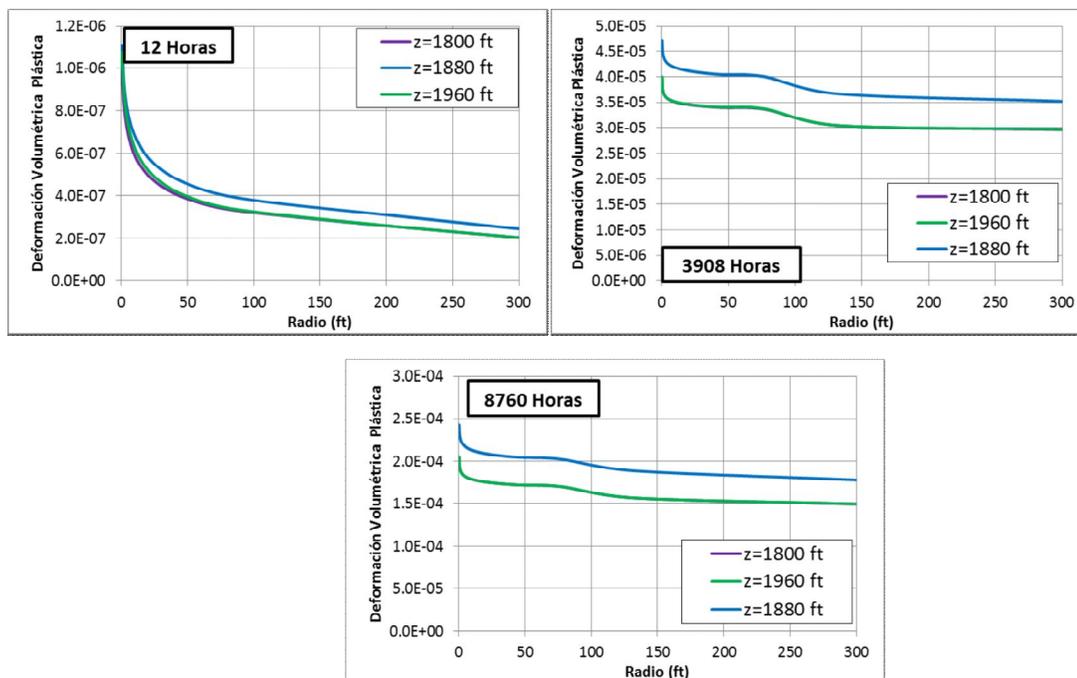
Figura 6-37: Comportamiento de la permeabilidad con profundidad a diferentes tiempos de producción – Caso MCC.



Comportamiento de la Deformación Elástica.

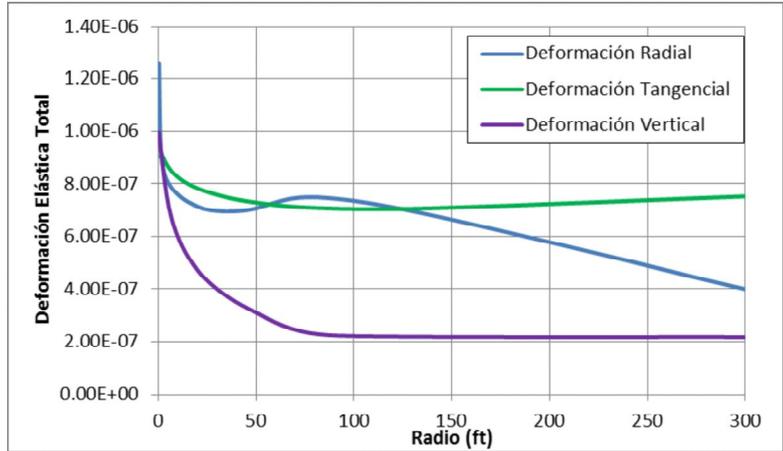
En la Figura 6-38 se presenta el comportamiento de la deformación con radio a diferentes tiempos y profundidades de la formación. Se puede observar que a medida que aumenta la profundidad radial del yacimiento la deformación elástica es menor, con las mayores deformaciones en la cara del pozo. Respecto al tiempo de producción es notable que a mayor tiempo de estar abierto el pozo la deformación sea mayor en toda la formación.

Figura 6-38: Comportamiento de la deformación elástica con radio diferentes radios y profundidades – Caso MCC.



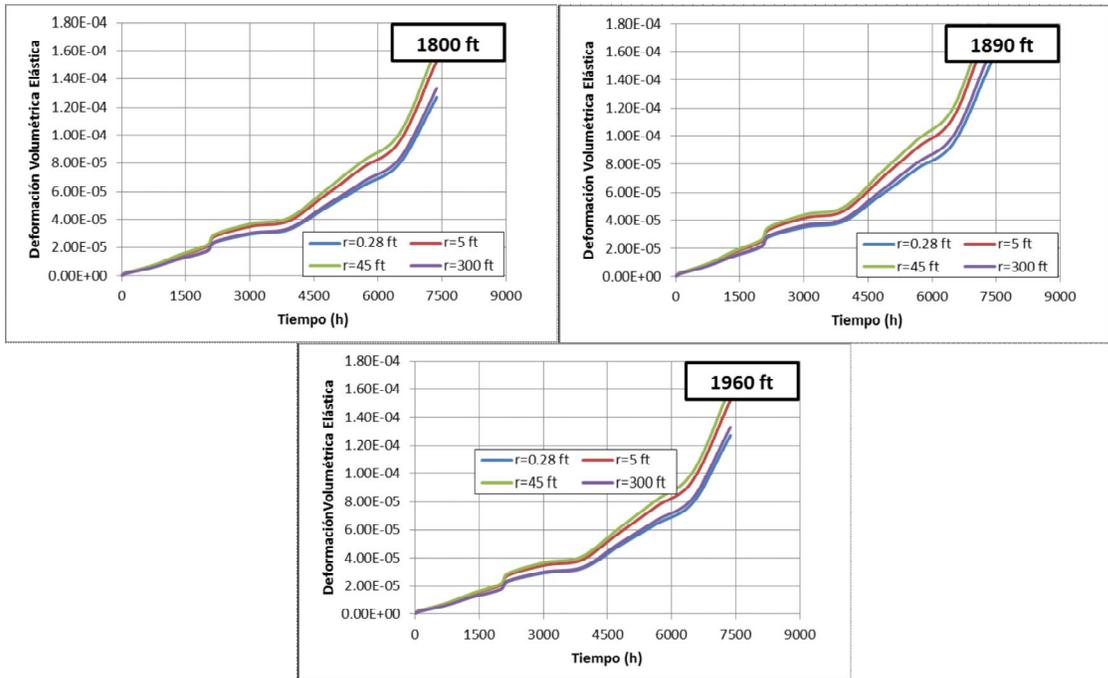
En la Figura 6-39 se presenta el comportamiento de la deformación total para cada dirección, donde se puede observar que la deformación vertical disminuye de acuerdo a la profundidad radial, la deformación tangencial no cambia considerablemente con el radio como respuesta al bajo impacto de flujo en dirección angular, y por último la deformación radial tiende a disminuir a medida que aumenta la profundidad radial, pero en las cercanías al pozo se evidencia un cambio en la deformación elástica (50-100 ft en profundidad radial) que impacta la deformación volumétrica presentada anteriormente.

Figura 6-39: Comportamiento de la deformación elástica con radio al año de producción y a 1880 ft – Caso MCC.



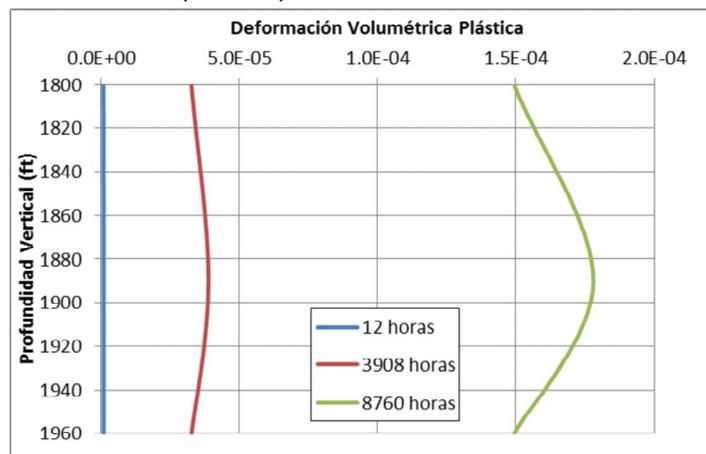
En la Figura 6-40 se presenta el comportamiento de la deformación elástica con el tiempo a diferentes radios y profundidades verticales de la formación. Se puede observar que la deformación registrada en la cara del pozo es mayor y que aumenta gradualmente con el tiempo debido al proceso de producción constante del yacimiento. El comportamiento de las curvas está marcado por saltos en diferentes tiempos de simulación, esto se relaciona con la solución numérica del sistema de ecuaciones.

Figura 6-40: Comportamiento de la deformación elástica con tiempo a diferentes radios y profundidades – Caso MCC.



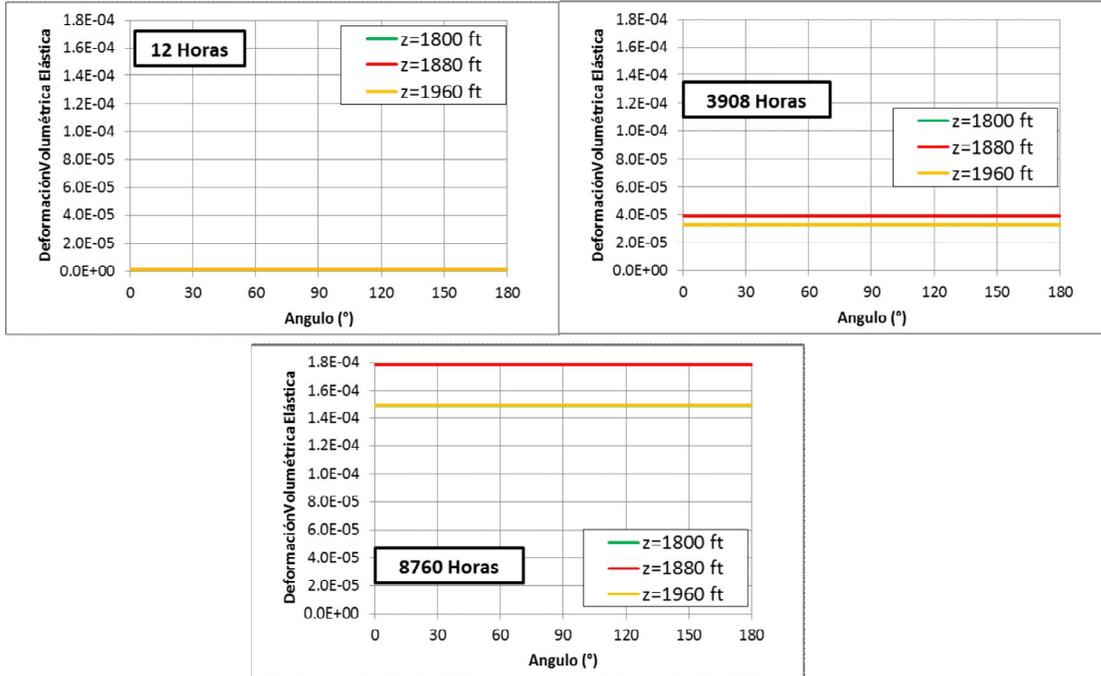
En la Figura 6-41 se presenta el comportamiento de la deformación elástica con profundidad, es evidente que al aumentar la profundidad la deformación tiende a aumentar, a excepción de los límites base y tope donde esta empieza un proceso de disipación tendiendo a cero, esto relacionado a la condición de límite externo del yacimiento donde el cambio de deformación es cero, así en los límites del dominio externo la deformación debe alcanzar dicho valor.

Figura 6-41: Comportamiento de la deformación elástica con profundidad a diferentes tiempos de producción – Caso MCC.



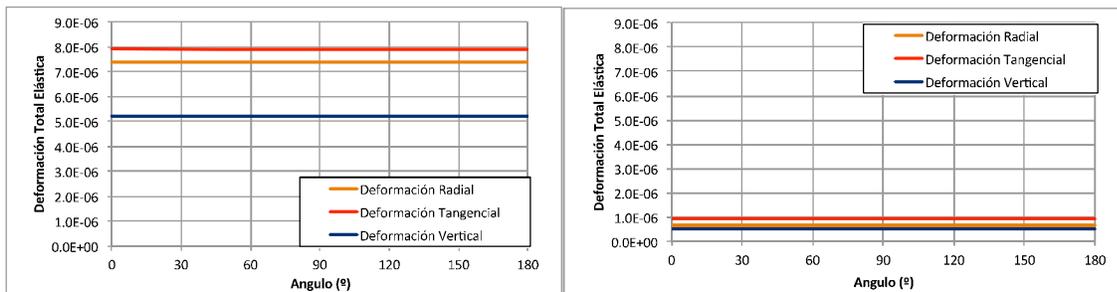
En la Figura 6-42 se presenta el comportamiento de la deformación a diferentes ángulos, este análisis se hace por la necesidad de identificar el comportamiento angular de la deformación. Debido a la escala del gráfico no se evidencia un cambio visible en la deformación, esto relacionado al predominio del flujo radial y por tanto la ausencia de una respuesta tangencial, traducido en la poca evidencia de cambio en el esfuerzo la permeabilidad o la presión.

Figura 6-42: Comportamiento de la deformación elástica con el ángulo a diferentes profundidades y tiempos de producción – Caso MCC.



En la Figura 6-43 se presenta el comportamiento angular de la deformación para diferentes radios validando los resultados de la Figura 6-39 donde se encuentran a diferentes profundidades radiales, diferencias en la magnitud de la deformación total.

Figura 6-43: Comportamiento de la deformación elástica con el ángulo a diferentes radios a 1880 ft – Caso MCC.

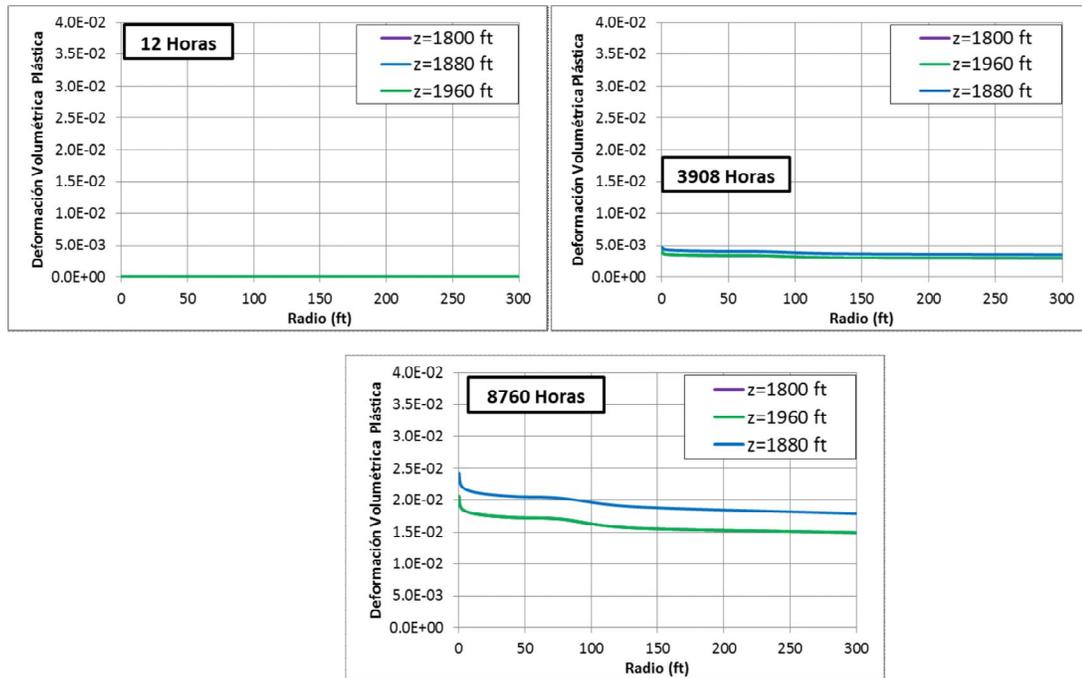


Comportamiento de la Deformación Plástica.

En la Figura 6-44 observa que las mayores deformaciones del sistema se presentan en la cara del pozo, zona donde la caída de presión es mayor y donde se presenta el esfuerzo efectivo promedio de mayor magnitud. Es evidente de igual manera que en a las 12

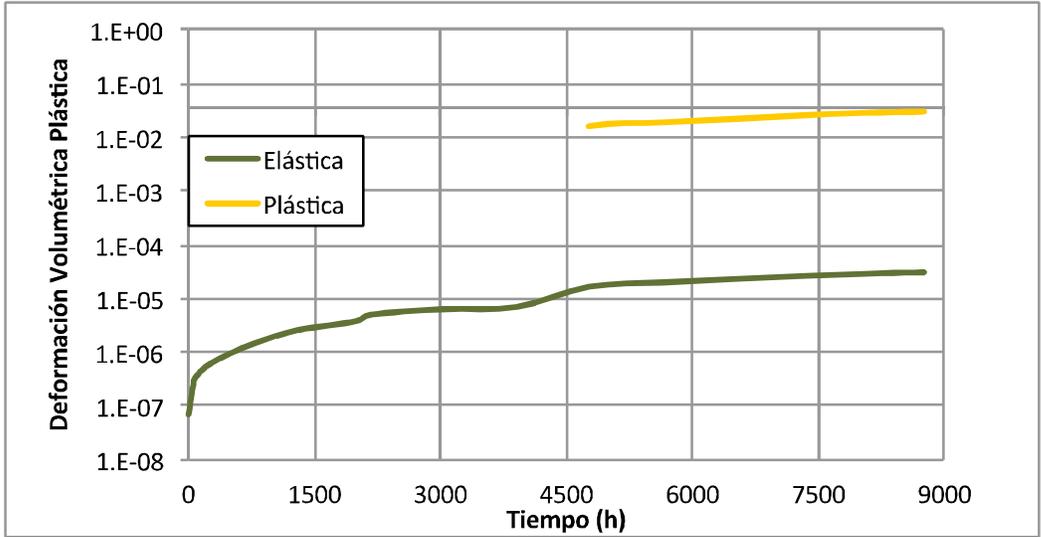
horas de producción no se tiene una presencia de deformación total de sistema. El comportamiento de la deformación plástica en referencia al radio, tiende a disminuir como respuesta a que la caída de presión en las lejanías a la cara del pozo se reduce.

Figura 6-44: Comportamiento de la deformación plástica con radio diferentes radios y profundidades – Caso MCC.



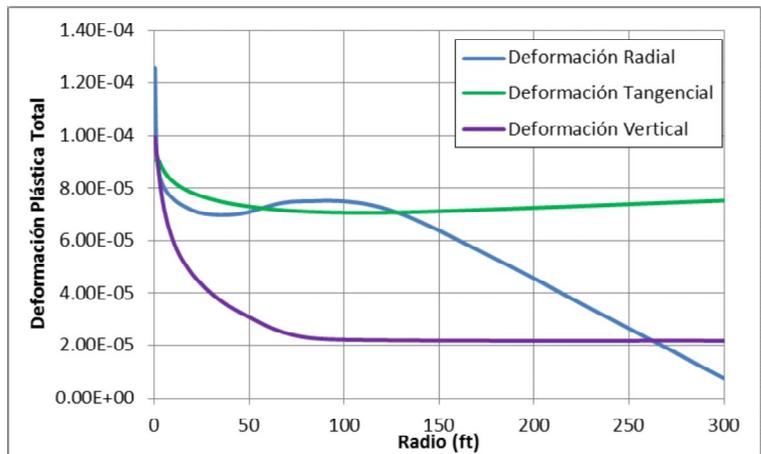
En la Figura 6-45 se presenta la comparación de la deformación plástica del sistema versus la deformación elástica, en escala logarítmica. Es apreciable la similitud en la tendencia de ambas curvas, dejando claro que la deformación total del sistema está ligada claramente a las dos componentes de deformación de la roca.

Figura 6-45: Comparación de la deformación elástica lineal y elasto-plástica con el tiempo en la cara del pozo a 1880 ft – Caso MCC.



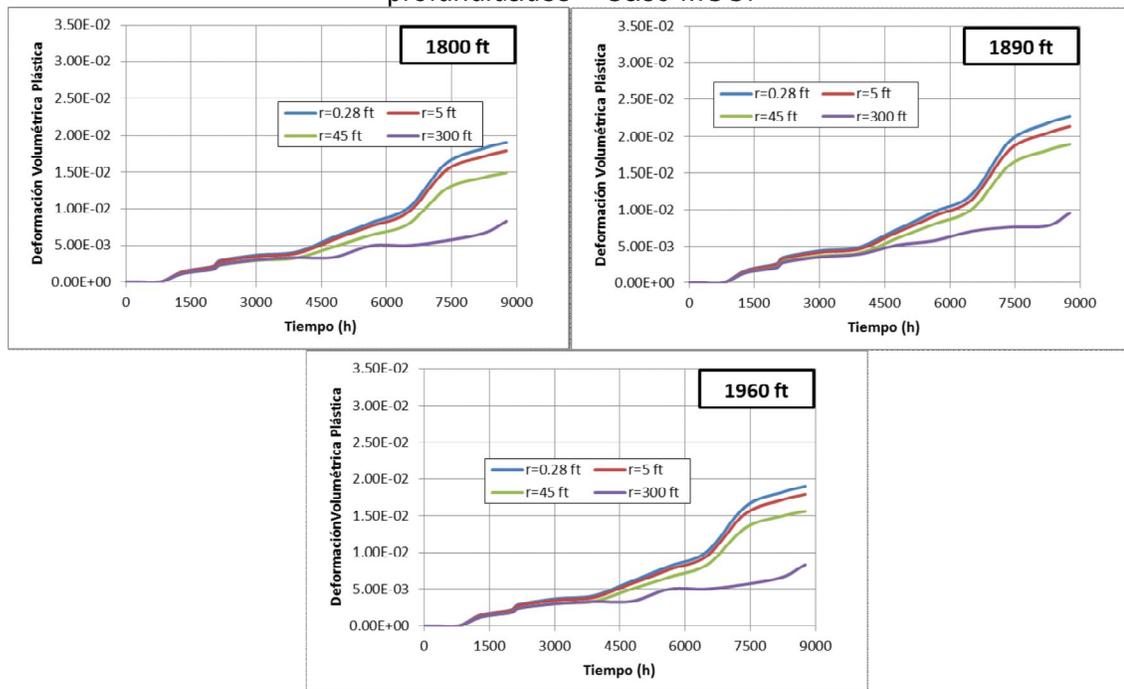
En la Figura 6-46 se presenta el comportamiento de la deformación plástica total en función del radio del yacimiento a las 8760 horas de producción a la profundidad media de la formación. La deformación tangencial se presenta poco variable debido al poco impacto angular que hay en la producción del yacimiento, por último la deformación vertical disminuye al aumentar la profundidad radial, respuesta que está relacionada al impacto de la deformación tangencial y radial, ya que como se mostró en el desarrollo del modelo matemático cada desplazamiento tiene una influencia importante en el otro, y esto se ve directamente reflejado en las deformaciones.

Figura 6-46: Comportamiento de la deformación plástica con radio al año de producción y a 1880 ft – Caso MCC.



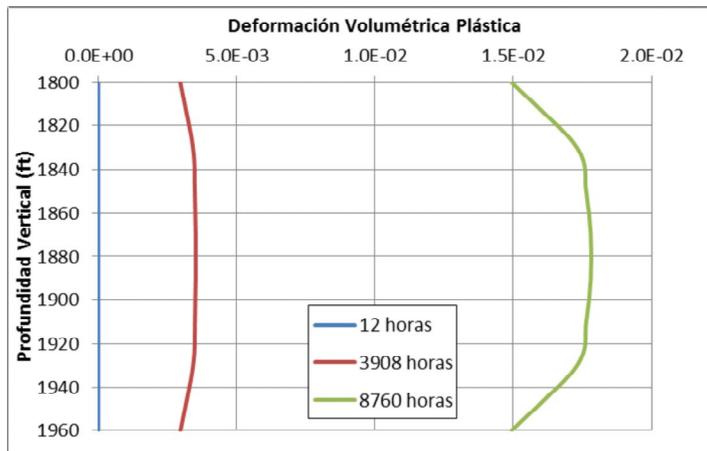
En la Figura 6-47 se presenta el comportamiento de la deformación plástica con el tiempo a diferentes radios y profundidades verticales en el yacimiento. Como se observó en las figuras anteriores, en la cara del pozo de presentan los valores más altos de deformación plástica y a medida que aumenta el radio de estudio la deformación plástica disminuye, esto relacionado a la menor caída de presión y magnitud del estado de esfuerzos en cada punto del yacimiento. En los tiempos iniciales de simulación no hay presencia de deformaciones permanentes del material, estas deformaciones se evidencian a las 1300 horas de producción aproximadamente, donde comienza un incremento gradual en la magnitud de dichas deformaciones.

Figura 6-47: Comportamiento de la deformación plástica con tiempo a diferentes radios y profundidades – Caso MCC.



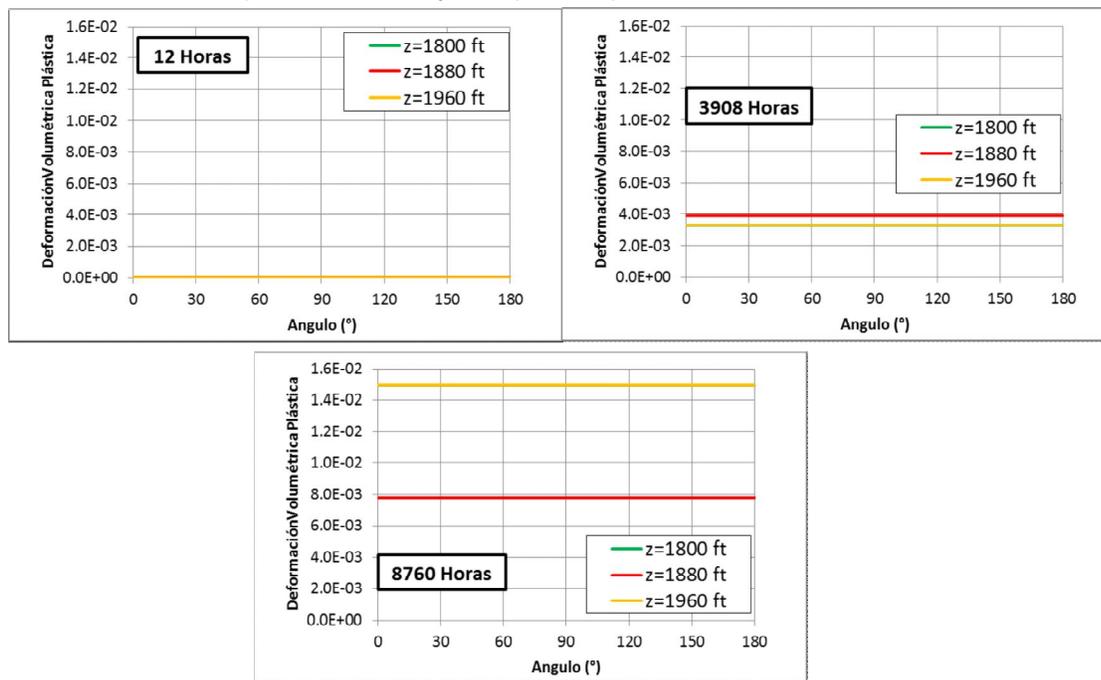
En la Figura 6-48 se presenta el comportamiento de la deformación plástica a diferentes profundidades verticales. Se puede observar un comportamiento similar al de la deformación elástica que muestra una sensibilidad particular en las fronteras del dominio interno del yacimiento, lo cual se relaciona a las condiciones de deformación cero en el limite externo del yacimiento. Igualmente es evidente que a medida que se aumenta en la profundidad vertical, la deformación aumenta de magnitud, de acuerdo al peso de los estratos superiores.

Figura 6-48: Comportamiento de la deformación plástica con profundidad a diferentes tiempos de producción – Caso MCC.



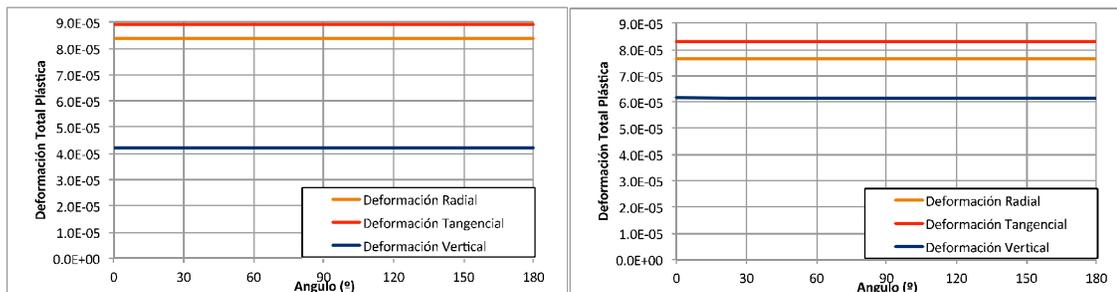
En la Figura 6-49 se presenta el comportamiento de la deformación plástica en función del ángulo de la malla cilíndrica. No se evidencia un cambio respecto al ángulo de dicha propiedad, esto relacionado a que no hay impacto de las líneas de flujo angulares que definan un cambio de periodicidad respecto a este eje.

Figura 6-49: Comportamiento de la deformación plástica con el ángulo a diferentes profundidades y tiempos de producción – Caso MCC.



Por ultimo en la Figura 6-50 se presenta el comportamiento de deformación total plástica respecto al ángulo, que como se explicó anteriormente no presenta una alteración angular en respuesta a que las líneas de flujo predominantes en el sistema son radiales.

Figura 6-50: Comportamiento de la deformación plástica con el ángulo a diferentes radios y a 1880 ft – Caso MCC.



6.1.3 Resultados Sensibilidades.

En esta sección se presentan los resultados relacionados a las sensibilidades hechas con base en las variables geomecánicas correspondientes a cada uno de los modelos plásticos usados.

El estudio de las sensibilidades se divide en dos, inicialmente se hace sensibilidad de valores relacionados a variables geomecánicas, y posterior a esto se sensibiliza la diferencia entre propiedades de los dominios del sistema.

▪ **Resultados Sensibilidades Criterio Drucker – Prager.**

Las sensibilidades con el modelo Drucker-Prager se realizan para el módulo de Young, la razón de Poisson, la cohesión y ángulo de fricción interna. Estas variables definen la ductilidad y resistencia de la roca, por lo cual son esenciales y predominan en los resultados generales de simulación. Cada valor presentado en la .

Tabla 6-4 es escogido desde la literatura como valores propios de rocas poco consolidadas, considerando unas formaciones más competentes que otras.

Tabla 6-4: Valores de las propiedades geomecánicas a sensibilizar. Caso D-P.

Variables de Sensibilidad	Máximo	Mínimo
Módulo de Young (psi)	2.00E+07	2.00E+05

Razón de Poisson	0.35	0.25
Cohesión (psi)	1000	100
Angulo de fricción interna (Grados)	43	26

En la Tabla 6-5 se presentan los resultados relacionados a la presión y la deformación plástica al año de producción (8760 horas), a una profundidad de 1880 ft, en la cara del pozo.

Tabla 6-5: Resultados porcentuales de la sensibilidad a las variables geomecánicas.
Caso D-P.

Variable	Presión		Deformación Plástica	
	% Valor Máximo	%Valor Mínimo	Valor Máximo	Valor Mínimo
Modulo de Young	95.9	72.3	41.7	32.2
Razón de Poisson	48.8	2.5	1.1	21.3
Cohesión	161.2	59.3	67.2	25.8
Angulo de Fricción Interna	59.2	48.8	25.8	21.3

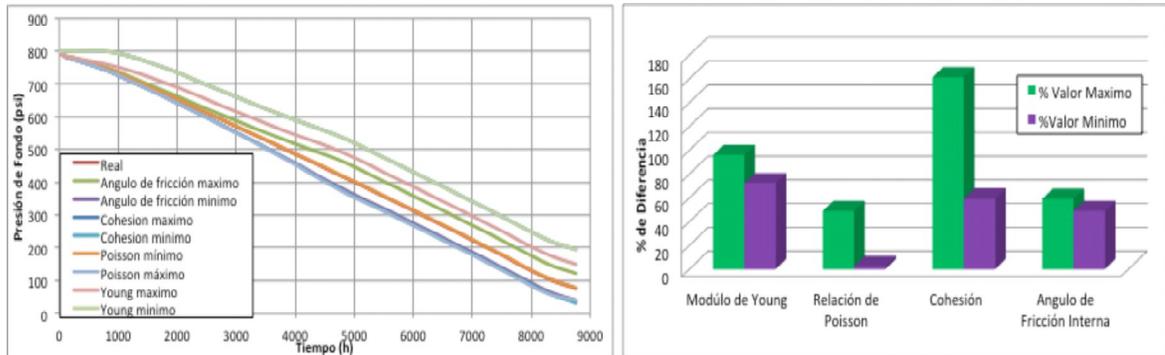
Los porcentajes son obtenidos considerando una diferencia porcentual del valor de deformación plástica volumétrica y de la presión obtenidas en el último tiempo de simulación (8760 horas) en el caso base, (que es supuesto como real) y las obtenidas en cada una de las corridas de sensibilidad. Como los valores están presentados en forma porcentual, es fácil acercarse a un análisis del impacto de la resistencia y la consolidación de la roca de acuerdo a las diferencias en cada variable.

En la Figura 6-51 se presenta el comportamiento con el tiempo de las simulaciones realizadas para los valores mínimos y máximos de cada variable geomecánica, es importante mencionar que los resultados de presión con tiempo son evaluados en la cara del pozo a la profundidad media de la formación 1880 ft. Acompañando el perfil de presión con tiempo está un gráfico de comportamiento porcentual que permite ver la incidencia de cada variable en la presión registrada en la formación al año de producción (8760 horas).

Se puede observar que cuando el material presenta menor consolidación y menor resistencia, la caída de presión es mayor, relacionado a la alta factibilidad en rocas

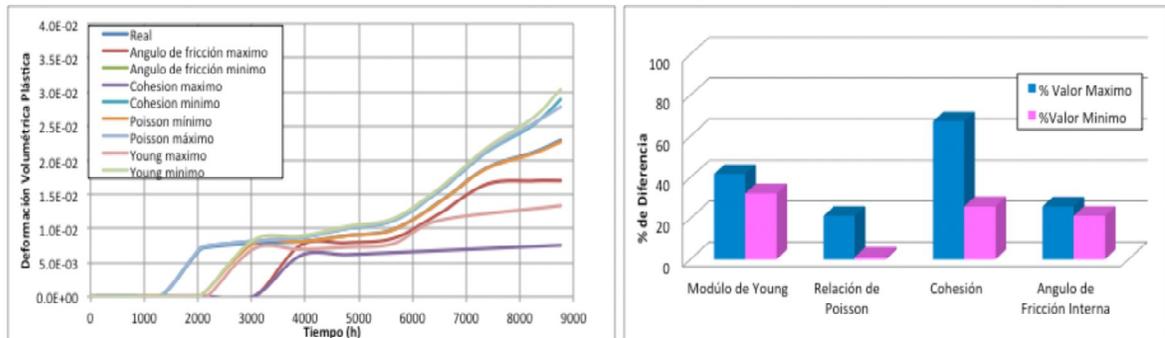
menos competentes de sufrir deformaciones permanentes lo que conlleva a una reducción mayor en la presión. Igualmente es posible identificar que las variables con mayor sensibilidad son la cohesión y el módulo de Young, las cuales relacionan directamente la competitividad del material.

Figura 6-51: Comportamiento con el tiempo y porcentual de la presión para cada variable sensibilizada – Caso DP.



Para acompañar el análisis de la presión, se presenta en la Figura 6-52 el comportamiento de la deformación volumétrica plástica con tiempo y de igual manera de forma porcentual. Es evidente que al tener una propiedad geomecánica de resistencia o consolidación de menor valor, la energía del yacimiento se consumirá aceleradamente lo que lleva a caídas de presión debido a la producción del sistema más altas y por tanto deformaciones permanentes o plásticas que reducen la energía de la formación y tienden a presentar ya un daño geomecánico en la roca.

Figura 6-52: Comportamiento con el tiempo y porcentual de la deformación plástica volumétrica para cada variable sensibilizada – Caso DP.



▪ **Resultados Sensibilidades Criterio Cam – Clay modificado.**

El estudio de sensibilidad para el modelo modificado de Cam-Clay se realiza usando las propiedades geomecánicas de resistencia y elasticidad de la roca, que en este caso se relacionan a las variables de presión efectiva de confinamiento y el ángulo de estado crítico, que están implícitas en el modelo presentado en el Capítulo 3.

Los valores específicos presentados en la Tabla 6-6 relacionados con el modelo de Cam – Clay modificado son supuestos de acuerdo a los valores del caso base obtenidos de la literatura [26], [27], [28] y [29], lamentablemente estas variables no son comunes en estudios geomecánicos elasto-plásticos y la falta de pruebas de laboratorio complica la delimitación adecuada de estas.

Tabla 6-6: Valores de propiedades geomecánicas a sensibilizar. Caso MCC.

Variables de Sensibilidad		
	Máximo	Mínimo
Módulo de Young (psi)	2.00E+07	2.00E+05
Razón de Poisson	0.35	0.25
Presión efectiva de confinamiento (psi)	5000	500
Ángulo de estado crítico (CSL) (Grados)	40	10

En la Tabla 6-7 se presentan los resultados porcentuales para las 7373 horas (307 días) de simulación, en la cara del pozo, a una profundidad de 1880 ft. El análisis se realiza en este tiempo debido a que en este punto el yacimiento perdió su energía y no pudo continuar produciendo naturalmente el petróleo, por tanto se toma como valor de referencia para el análisis de sensibilidad.

Es evidente que las variables que afectan de manera significativa la respuesta de presión, son las relacionadas a la propiedad de resistencia, presión efectiva de confinamiento y a la competitividad de la roca ejemplificada en el módulo de Young.

El impacto del cambio de magnitud de las variables sensibilizadas se presenta en forma porcentual mayor en la presión, esto se ve fundamentado bajo el proceso iterativo que

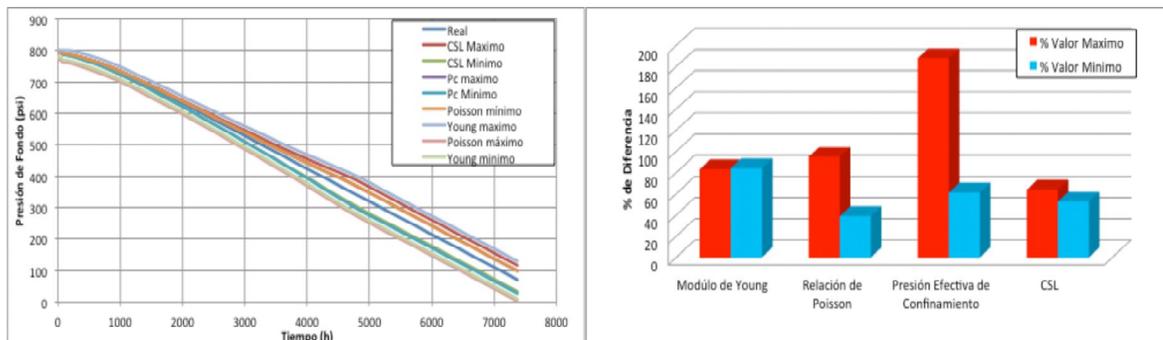
esta impuesto en la solución del sistema de ecuaciones, ya que para el cálculo de la presión se tienen en cuenta cambios en permeabilidad, estado de esfuerzos, entre otros que en si tienen una relación directa con la deformación volumétrica de la roca, pero además tienen otras variables que posibilitan esta diferencia porcentual de mayor magnitud.

Tabla 6-7: Resultados porcentuales de la sensibilidad a las variables geomecánicas. Caso MCC.

Variable	Presión		Deformación Plástica	
	% Valor Máximo	% Valor Mínimo	% Valor Máximo	% Valor Mínimo
Modulo de Young	83.2	84.2	7.1	20.1
Razón de Poisson	94.8	38.9	22.6	9.3
Presión Efectiva de Confinamiento	187.9	61.1	23.3	14.6
CSL	63.8	52.6	15.2	12.5

En la Figura 6-53 se presenta el perfil de presión con el tiempo y se acompaña del grafico de la diferencia porcentual entre el caso base inicial y el trabajado con los nuevos valores de los parámetros geomecánicos. Se puede observar una disminución en presión respecto al caso base inicial cuando se consideran parámetros de resistencia y de consolidación menores a los del caso base, dejando así como conclusión que a menor resistencia de la roca tiende está a presentar deformaciones permanentes mayores que inciden en la perdida de energía del yacimiento.

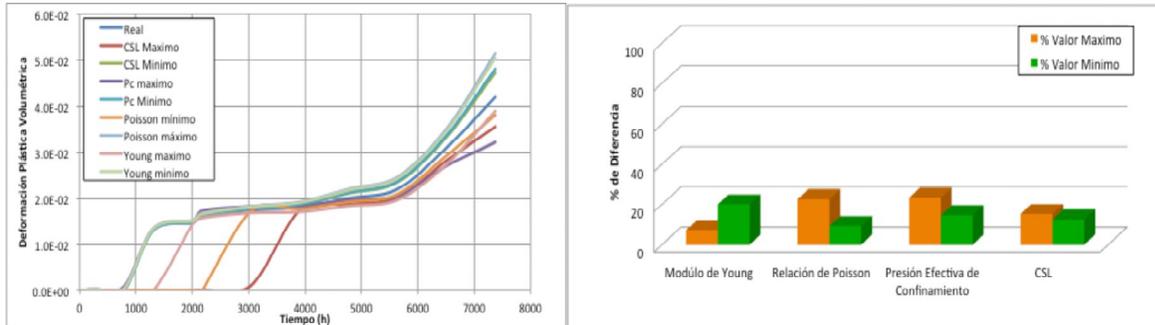
Figura 6-53: Comportamiento con el tiempo y porcentual de la presión para cada variable sensibilizada – Caso MCC.



En la Figura 6-54 se presenta el perfil con tiempo de la deformación plástica volumétrica y la relación porcentual entre el caso base y el simulado con cada variable sensibilizada

para las 7373 horas de producción. Se puede evidenciar la diferencia en los tiempos en los que inicia a presentarse la deformación plástica en la roca, esto relacionado con la resistencia y consolidación que presente el material para cada caso específico. Inicialmente los mayores tiempos de inicio de deformación plástica están asociados a los valores máximos de las variables módulo de Young y ángulo de estado crítico. De acuerdo al diagrama porcentual estas dos variables tienen un impacto considerable cuando se cambian, debido a la relación directa que tienen con la consolidación y resistencia de la roca.

Figura 6-54: Comportamiento con el tiempo y porcentual de la deformación plástica volumétrica para cada variable sensibilizada – Caso MCC.



6.1.4 Resultados Sensibilidad de los Dominios.

La segunda parte del estudio de sensibilidad se realiza para los dominios del sistema, ya que autores como Gutierrez et al. [47] han manifestado el impacto en la presión y otras variables por la diferencia de propiedades geomecánicas en los dominios del sistema. Con base en lo expuesto anteriormente se plantea el estudio de la sensibilidad usando dos arreglos diferentes que son presentados en la Tabla 6-8.

Tabla 6-8: Arreglos para el Estudio de los Dominios.

Arreglos para Sensibilidades con los Dominios	
Arreglo 1	Dominio interno se comporta más deformable que el dominio externo.
Arreglo 2	Dominio externo más deformable que el dominio interno.

De acuerdo a los arreglos expuestos anteriormente, a continuación se presentan los resultados para el modelo de plasticidad de Drucker – Prager, que será una referencia en el impacto de las diferencias de parámetros geomecánicos en los dominios.

En la Tabla 6-9 se presentan las variables para cada dominio, donde se trabajan parámetros relacionados a la resistencia de la roca y a la consolidación. El arreglo 1 define el dominio interno menos consolidado y con menor competitividad contrario al dominio externo que se presenta de mayor resistencia. Por su lado el arreglo 2 presenta el dominio interno más resistente a esfuerzos y deformaciones y el dominio externo propenso a mayores deformaciones permanentes.

Tabla 6-9: Valores para la Sensibilidad de Arreglo 1 y 2.

	Arreglo 1	Arreglo 2
Cohesión dominio interno (psi)	100	500
Cohesión dominio externo (psi)	500	100
Angulo de fricción interna dominio interno (Grados)	26	33
Angulo de fricción interna dominio externo (Grados)	33	26
Módulo de Young dominio interno (psi)	2.00E+05	2.00E+06
Módulo de Young dominio externo (psi)	2.00E+06	2.00E+05
Relación de Poisson dominio interno	0.30	0.25
Relación de Poisson dominio externo	0.25	0.30
Compresibilidad del esqueleto dominio interno (1/psi)	8.00E-11	8.00E-09
Compresibilidad del esqueleto dominio externo (1/psi)	8.00E-09	8.00E-11

En la Figura 6-55 se presentan los resultados de presión, ya que como se mencionó anteriormente es la variable que recoge el comportamiento de la permeabilidad, asociada al estado de esfuerzos que depende del comportamiento directo de las deformaciones de la formación. Para acompañar estos resultados en la Figura 6-56 se presenta el comportamiento de la deformación plástica volumétrica con tiempo para los arreglos y el obtenido en el caso base.

Es evidente que al considerar el dominio interno más deformable, existe una fuerte disipación en las deformaciones del sistema, lo que ayuda a mantener la presión de la formación. Por otro lado cuando se considera la formación más resistente que el dominio externo, se incrementan las deformaciones en lugar de disiparse dando como resultado una pérdida de energía de la formación, mostrándose así como una caída de presión mayor.

La Figura 6-56 permite ver que las deformaciones permanentes de la formación inician en diferentes tiempos de producción, como consecuencia de la resistencia con la que se esté considerando el arreglo. En comparación con el caso base, el arreglo 2 presenta un inicio en las deformaciones plásticas más temprano que el arreglo 1, debido a la diferencia en consolidación de ambos arreglos para ambos dominios, lo que permite analizar que cuando se tiene una formación más débil como dominio externo del sistema este perderá rápidamente su energía productiva.

Figura 6-55: Comportamiento de la presión con el tiempo de producción. Caso D-P.

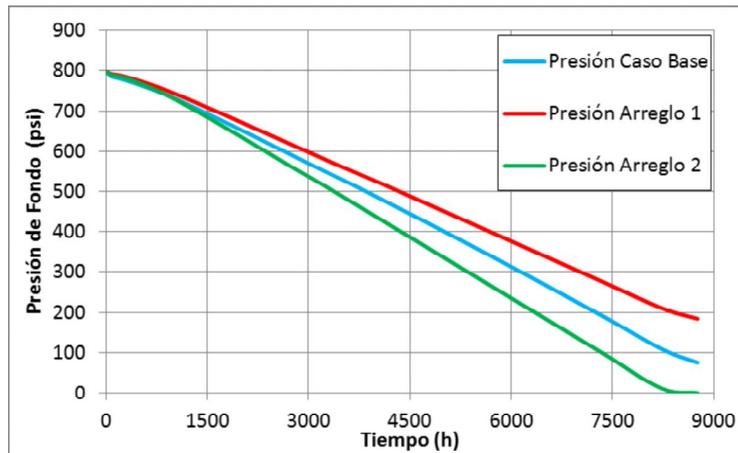
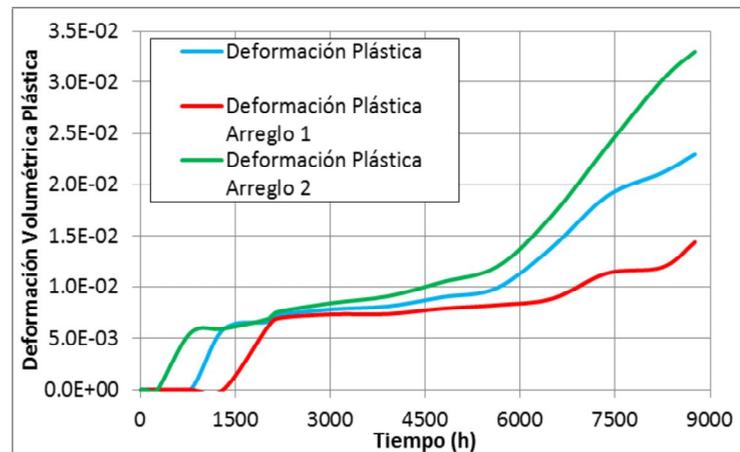


Figura 6-56: Comportamiento de la deformación plástica volumétrica con el tiempo de producción. Caso D-P.



6.2 Resultados CMG.

En esta sección se presentaran los resultados obtenidos con CMG para el caso base. Estos resultados se presentan con la intención de identificar el comportamiento acoplado de flujo de fluidos y geomecánica del simulador comercial CMG y de igual manera realizar una comparación entre los resultados de dicho simulador y el construido en este trabajo. En el Anexo 8 se presenta una compilación del sistema de trabajo del simulador CMG y sus alcances con la simulación geomecánica.

- Datos de Entrada Simulación CMG.

El trabajo con el simulador CMG se enfocó en el análisis del comportamiento geomecánico de una formación poco consolidada que está produciendo un crudo pesado. El estudio se hace usando un modelo elasto-plástico tipo Drucker-Prager y un modelo tipo Cam-Clay modificado, con la intención de realizar un análisis comparativo de los resultados obtenidos en cada modelo, y también para encontrar las diferencias entre las suposiciones realizadas por la compañía CMG en su simulación numérica y el simulador desarrollado en el trabajo de investigación.

- Modelo Drucker-Prager. Inicialmente se evalúa el comportamiento geomecánico del material usando el modelo de cedencia de Drucker-Prager con las características presentadas en la Tabla 6-3.
- Modelo modificado de Cam-Clay. Para la puesta en marcha de la simulación del pozo considerando el modelo modificado de Cam-Clay es necesario tener en cuenta los

parámetros presentados en la Tabla 6-3 y los referenciados a continuación en la Tabla 6-10.

Tabla 6-10 Parámetros de Entrada Modelo Cam Clay Modificado. [42]

Indice de <i>Swelling</i>	0.018
Indice de Compresión	0.13
Relación entre índices de tensión y compresión	1.0
<i>Hardening</i> Inicial (psi)	50

Los datos de la **Tabla 6-10** están relacionados con las condiciones de cedencia del material, dentro de estas condiciones se consideran fenómenos como compresión de la roca, hinchamiento o *Swelling* de la formación y un proceso de *Hardening* o Endurecimiento de la roca. Para este caso, y debido a la complejidad de la obtención de los parámetros descritos en la **Tabla 6-10**, los cuales son muy específicos del material y son conocidos por pruebas de laboratorio, se usan los valores del ejemplo referenciado en la guía de usuario del módulo *STARS* [44]. Los datos relacionados al modelo Cam-Clay modificado difieren de los utilizados en el modelo computacional construido en este trabajo, debido a la simplificación del modelo de falla donde solo se consideran como parámetros de entrada la presión efectiva de pre consolidación y el ángulo de estado crítico [25], [26] y [27]. Es importante aclarar que estas dos propiedades tienen intrínsecas las variables trabajadas por el simulador CMG.

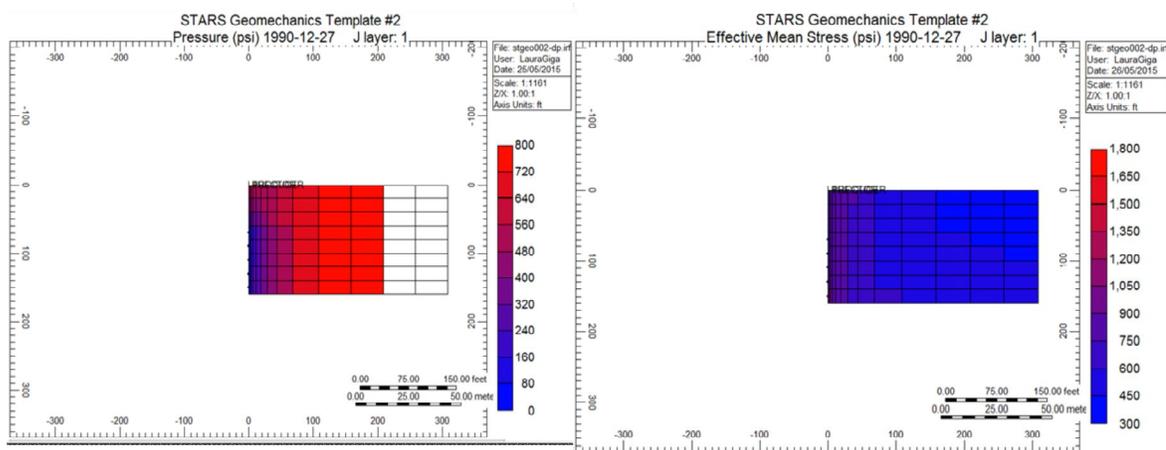
- **Resultados CMG Modelo Drucker - Prager.**

Para el análisis de resultados provenientes del simulador CMG se presentan las curvas de perfil de tiempo de producción para la presión, el esfuerzo efectivo promedio y la deformación plástica volumétrica del sistema, acompañando a estas graficas están los diagramas bidimensionales que permiten ver el comportamiento radial y vertical del cilindro evaluado, al último tiempo de producción (8760 horas – 1 año).

En la **Figura 6-57** se presenta el comportamiento de la presión y el esfuerzo efectivo promedio al último tiempo de simulación, donde se identifica una distribución de presión mayor en las lejanías del pozo y menor en las cercanías a este, relacionado con la

producción continua a la que se sometió el pozo, por su parte el esfuerzo efectivo promedio presenta las mayores magnitudes en la cara del pozo y las menores a profundidades radiales mayores, lo cual es equivalente al comportamiento de la presión, esto considerando la definición de esfuerzo efectivo que relaciona la presión de poro del sistema con la componente de Biot y el esfuerzo total.

Figura 6-57: Comportamiento de presión y esfuerzo efectivo promedio al último tiempo de simulación. Simulador CMG - Caso D-P.



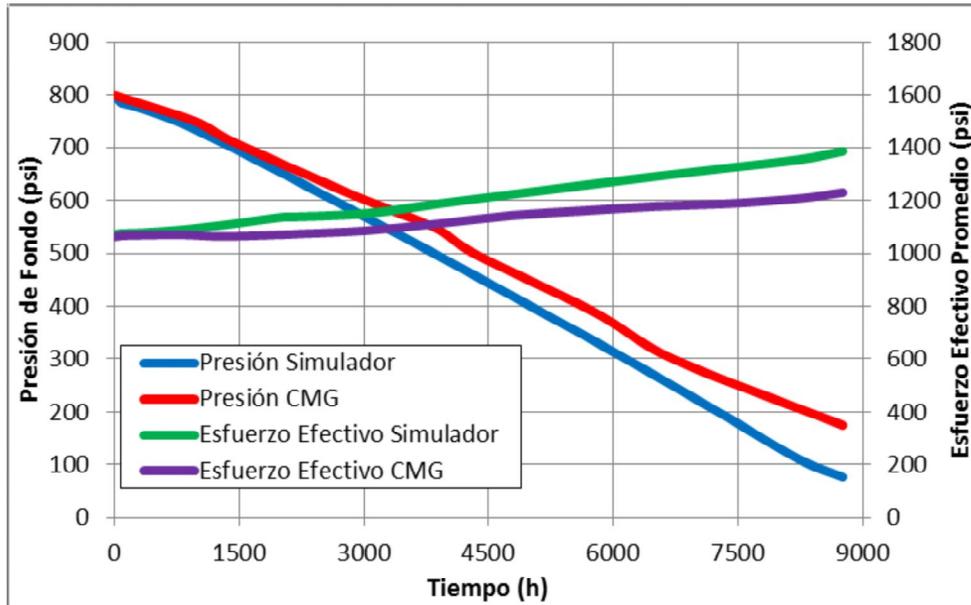
En la **Figura 6-58** se presenta el comportamiento de esfuerzo efectivo promedio y presión relacionados a los resultados obtenidos mediante la herramienta CMG, es posible observar que a medida que el pozo está abierto a producción la caída de presión aumenta considerablemente, la caída de presión al año de producción es de 625 psi esto considerando las deformaciones plásticas del sistema. Por su parte el esfuerzo efectivo promedio aumenta considerablemente con el tiempo debido a liberación de energía de la formación que permite comprimir en mayor magnitud la zona de estudio.

En la **Figura 6-58** es posible observar también los resultados obtenidos con la herramienta construida para la presión de fondo del pozo y el esfuerzo efectivo promedio. Este montaje de resultados obtenidos con las diferentes herramientas se hace con el fin de dar una posible validación a la respuesta obtenida por la herramienta de flujo de fluidos acoplada a geomecánica desarrollada.

Se identifican diferencias en la magnitud de la presión de fondo y del esfuerzo efectivo, teniendo una menor caída de presión para la corrida con el simulador CMG por lo cual el esfuerzo efectivo promedio es menor que el obtenido con la herramienta desarrollada.

Estos resultados diferentes se esperan debido a las consideraciones base de las que parte cada herramienta de simulación, como lo es la simulación totalmente acoplada obtenida con la herramienta desarrollada y la simulación desacoplada que brinda CMG.

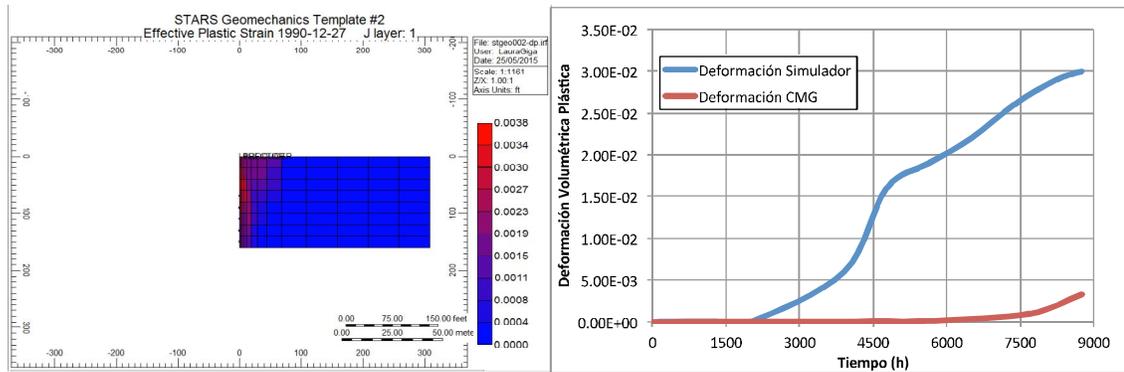
Figura 6-58: Comportamiento de presión y esfuerzo efectivo promedio con el tiempo en la cara del pozo a 1880 ft. Simulador CMG - Caso D-P.



Para acompañar los resultados de presión y esfuerzo efectivo, se presenta en la **Figura 6-59** los perfiles con radio y tiempo de la deformación plástica del sistema, donde se puede observar un inicio de deformación a las 5100 horas aproximadamente de deformación permanente lo que conduce a un daño de la formación mayor que aumenta la caída de presión. Igualmente es importante considerar que el sistema antes de las 5100 horas presenta deformaciones elásticas que aportan igualmente a la caída de presión en la formación.

Al comparar los resultados para la deformación volumétrica plástica con los obtenidos con CMG es evidente la diferencia en magnitudes que da como resultado cada herramienta, esto relacionado a lo observado en la **Figura 6-58**, donde hay una mayor presión al año de producción del pozo como respuesta a una deformación permanente menor.

Figura 6-59: Comportamiento de deformación plástica al último tiempo de simulación y perfil con tiempo de producción. Simulador CMG - Caso D-P.

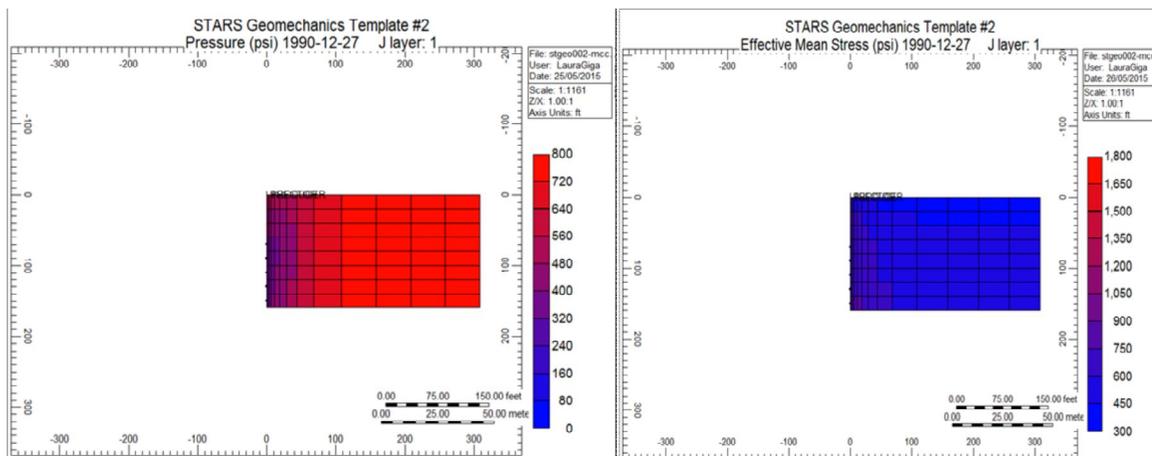


▪ **Resultados CMG Modelo Cam – Clay modificado.**

A continuación se presentan los resultados obtenidos con la herramienta CMG para presión, esfuerzo efectivo promedio y deformación plástica, usando el modelo de cedencia Cam – Clay modificado.

En la **Figura 6-60** se presenta el comportamiento de presión y esfuerzo efectivo en una sección del cilindro simulado en CMG, se puede observar la distribución radial y vertical de la presión y esfuerzo efectivo promedio al último tiempo de producción analizado (8760 horas – 1 año). Es evidente que la caída de presión registrada se alcanza a observar en los bloques cercanos al pozo, donde de igual manera se presentan los mayores valores de esfuerzo efectivo en el sistema.

Figura 6-60: Comportamiento de presión y esfuerzo efectivo promedio al Último Tiempo de simulación. Simulador CMG - Caso MCC.



Para acompañar los resultados de la **Figura 6-60** se presenta el comportamiento de la presión con el tiempo e igualmente el esfuerzo efectivo con el tiempo en la **Figura 6-61**, donde se evidencia la caída de presión del sistema producto de la producción sostenida de petróleo de la formación en estudio. La caída de presión registrada es de 648 psi aproximadamente a un año de producción. El esfuerzo efectivo promedio en relación a la presión de la formación aumenta considerablemente, llegando a un valor de 1318 psi. Es importante mencionar que estas magnitudes son analizadas en la cara del pozo a una profundidad media de 1880 ft.

Comparando los resultados obtenidos con CMG y los de la herramienta desarrollada, se puede observar que la caída de presión es menor con el simulador CMG, donde se alcanza una presión al año de producción de 300 psi aproximadamente, comparado con lo obtenido en la herramienta desarrollada donde no es posible seguir bajo producción natural para extraer el petróleo. El comportamiento del esfuerzo efectivo, ligado directamente a la respuesta de presión es menor con la herramienta CMG que el obtenido con el simulador desarrollado relacionado en su totalidad a la menor caída de presión experimentada en la producción de un año con este simulador.

La diferencia en resultados radica en la simplificación realizada para el modelo de cedencia Cam-Clay antes mencionada.

Por último en la **Figura 6-62** se presenta el comportamiento radial y vertical al último tiempo de simulación de la deformación volumétrica plástica y se acompaña de un perfil de dicha deformación con tiempo. Del perfil de deformación con tiempo es evidente que la deformación permanente del sistema se presenta aproximadamente a las 4000 horas de producción continua de petróleo, este inicio en la deformación permanente marca una tendencia a incrementar con el tiempo, que relaciona directamente el incremento en los esfuerzos totales de la roca reflejados en el esfuerzo efectivo promedio y en la caída de presión del sistema.

Al comparar los resultados de las deformaciones plásticas volumétricas obtenidas con cada simulador, es evidente la diferencia en magnitudes de cada una, relacionada directamente con la caída de presión y el comportamiento del esfuerzo efectivo. Esta diferencia radica en las consideraciones que toma el modelo Cam – Clay modificado para definir la consolidación y dureza de una roca. El análisis trato de hacerse en rocas de

similares características, pero la complejidad de las propiedades enmarcadas en pruebas de laboratorio deja un punto de análisis más riguroso en este caso.

Figura 6-61: Comportamiento de presión y esfuerzo efectivo promedio con el tiempo en la cara del pozo a 1880 ft. Simulador CMG – Caso MCC.

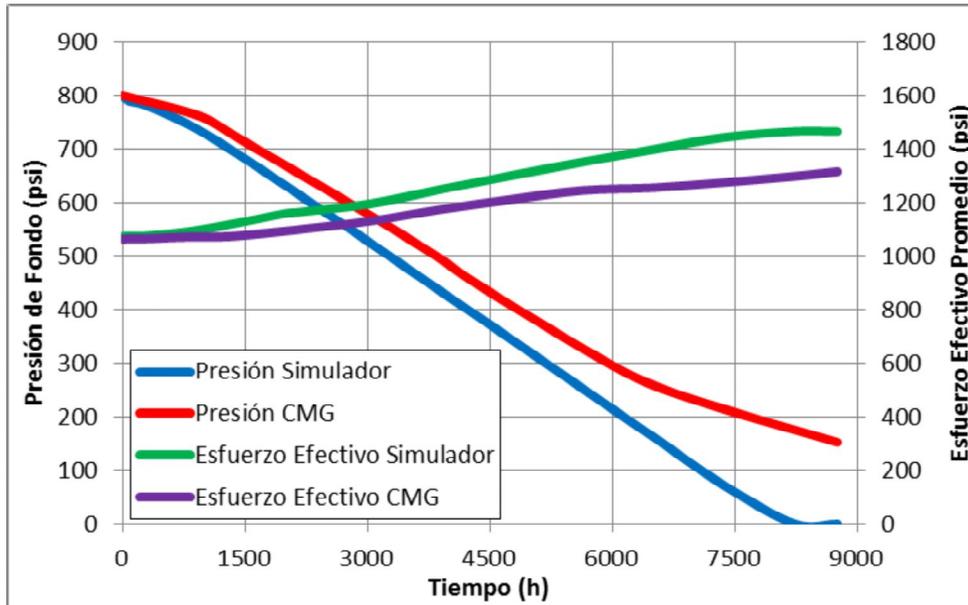
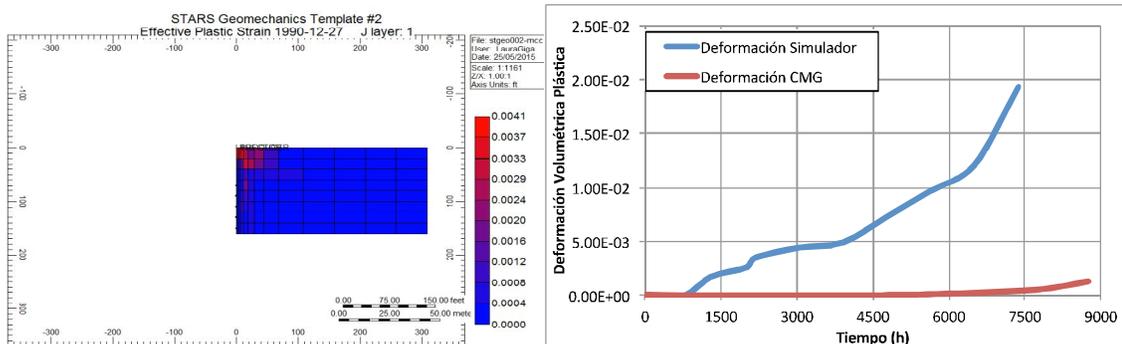


Figura 6-62: Comportamiento de deformación plástica al último tiempo de simulación y perfil con tiempo de producción. Simulador CMG - Caso MCC.



7. Conclusiones y Recomendaciones.

En este capítulo se presenta una recopilación de los puntos más concluyentes de todo el desarrollo en este trabajo. También se realiza una lista de recomendaciones para fortalecer el modelo de simulación.

7.1 Conclusiones

A continuación se presentan las conclusiones del presente trabajo, donde se desarrolló un modelo conceptual, matemático, y computacional que permitió obtener resultados de simulación, que fueron comparados con resultados de una herramienta comercial de simulación.

- La teoría de elasto-plasticidad es un concepto base para entender el comportamiento de arenas de baja consolidación y ha sido desarrollado a lo largo de varias décadas por sus buenos resultados en cuanto a la caracterización de este tipo de arenas.
- Las diferencias expuestas entre la simulación acoplada elástica lineal y elasto-plástica y la simulación desacoplada, permite concluir la necesidad de realizar caracterización de yacimientos usando simulaciones acopladas, que llevan un concepto más general del comportamiento de este tipo de yacimientos.
- La diferencia entre los resultados elástico lineales y elasto-plásticos son visibles, se alcanza a diferenciar el comportamiento de las deformaciones, esfuerzos, propiedades y presión, con esto es concluyente que el método elasto-plástico es más aproximado en cuanto al comportamiento mecánico de la formación.
- El modelo modificado de Cam-Clay ha sido desarrollado para analizar el comportamiento de cedencia de formaciones no consolidadas, pero para el uso de este modelo se hace necesario tener valores reales representativos del

material en estudio, por tanto se concluye que el uso de este tipo de criterios está ligado a un manejo adecuado de los datos característicos de la roca.

- Los resultados de las sensibilidades permiten identificar que una variable altamente sensible a los cambios es el módulo de Young, igualmente variables plásticas propias de cada modelo generan cambios altamente bruscos en los resultados de simulación.
- El manejo de diferentes propiedades geomecánicas en cada uno de los dominios permite aproximar a la realidad el comportamiento de la roca y da a conocer la importancia de hacer un estudio más riguroso en este aspecto.
- Los resultados obtenidos con el simulador comercial CMG son similares, en su generalidad, con los obtenidos mediante la herramienta de simulación desarrollada. Es concluyente por tanto que el simulador desarrollado es una herramienta competitiva para hacer caracterizaciones de un yacimiento de arenas poco consolidadas.

7.2 Recomendaciones

Los resultados presentados en este trabajo de investigación son una aproximación inicial al comportamiento mecánico de yacimientos de baja consolidación, por esta razón en el desarrollo de la herramienta computacional quedan aún pendientes diferentes desarrollos y consideraciones para lograr su mayor uso. A continuación de enumeran algunos puntos pendientes:

- El caudal con el que se trabajó el caso de simulación es constante, sin embargo, normalmente este es variable en toda la vida productiva de un pozo debido a la disminución de la presión del yacimiento. Por esto, se recomienda introducir la historia de producción en el simulador y así tener una respuesta más acercada del comportamiento de la presión del fluido en el yacimiento y de la deformación total de la roca.
- En el desarrollo matemático, numérico y computacional se consideró solo una fase fluente, petróleo pesado. Para robustecer el conocimiento de un yacimiento se hace necesario considerar flujo de agua proveniente de algún acuífero vecino a la formación productora.

-
- Es importante generar aplicativos en la herramienta de simulación que permitan predecir fenómenos geomecánicos en la roca asociados a el comportamiento plástico del material, en este sentido se recomienda replantear la condición de frontera del tope de la formación con el fin de estudiar procesos de subsidencia acoplados a la compactación de la roca.
 - El desarrollo numérico en diferencias finitas de las ecuaciones de equilibrio de geomecánica es muy extenso y complejo de manejar en un lenguaje computacional como lo es la versión *Compaq Visual Fortran 6.6*, donde es muy factible incurrir en errores de signos y de escritura, por tanto se recomienda cambiar la programación del sistema de ecuaciones a una versión actualizada del *Fortran*, o implementar otros métodos de discretización como lo son elementos finitos, volúmenes finitos, etc.
 - El método de solución planteado para dar solución al sistema de ecuaciones de flujo de fluidos y geomecánica es PSOR. Este método permitió encontrar la convergencia de cada sistema de ecuaciones en tiempos aproximados por corrida de 24 a 48 horas, por tanto se extiende la necesidad de implementar métodos de solución más eficaces en cuanto a tiempo para dar solución a estos sistemas de ecuaciones.

8. Bibliografía

- [1] Dusseault, M. (1999). *Petroleum Geomechanics: Excursions into Coupled Behaviour*. Journal of Canadian Petroleum Technology. Volume 38, Number 12. December. SPE 99-12-DA.
- [2] Srithar, T. (1994). *Elasto-plastic deformation and flow analysis in oil sand masses*. Ph. D Thesis. The university of British Columbia.
- [3] Alazard, N., Gadelle, C., G. and Thouvy, A. (1999). *Heavy oil resources and in-situ production: Present and future*. International Energy Agency, 20th Annual Workshop & Symposium: «Collaborative project on enhanced oil recovery».
- [4] Carles, P. and Onaisi, A. (2004). *A New Methodology to Determine the Pre-Consolidation Stress for Evaluating the Compaction Drive in Unconsolidated Heavy Oil Reservoirs*. SPE International Thermal Operations and Heavy Oil Symposium and Western Regional Meeting, 16-18 March, Bakersfield, California. SPE 86978-MS.
- [5] Vaziri, H. (1989). *A New Constitutive Stress Strain Model for Describing the Geomechanical Behavior of Oil Sands*. 40th Annual Technical Meeting of the Petroleum Society of CIM Held in Banff, May 28 to 31. SPE 89-40-67.
- [6] Veeken, C., Walters, J., Kenter, C. and Davies, D. (1989). *Use of Plasticity Models for Predicting Borehole Stability*. ISRM International Symposium, August 30 – September 2, Pau, France. S-1989-106.
- [7] Wan, R., Chan, D. and Kosar, K. (1991). *A Constitutive Model for the Effective Stress-Strain Behavior of Oil Sands*. Journal of Canadian Petroleum Technology. Volume 30, Number 4. SPE 91-04-08.
- [8] Raaen, A. (1996). *Efficient Determination of the Parameters of an Elastoplastic Model*. SPE/ISRM Eurock '96 held Trondheim, Norway. 8-10 July 1996. SPE 47362-MS.
- [9] Vardoulakis, I., Sulem, J., Oulahna, A., Papamichos, E., Unander, T. and Tronvoll, J. (1996). *Elasto-plastic Behavior of a Weak Sandstone*. Eurock '96, Barla. Balkema, Rotterdam.

- [10] Papamichos, E. Vardoulakis and I. Sulem, J. (1999). *Elasto – Plastic Modelling of Red Wildmoor Sandstone. Mechanics Cohesive Frictional Materials*, 215 - 245.
- [11] Gens, A., Vaunat, J. and Garitte, B. (2005). *Elastoplastic Modelling of Hard Soils and Soft Rocks: Formulation and Application*. VIII International Conference on Computational Plasticity.
- [12] Han, G., Stone, T., Liu, Q., Cook, J. and Papanastasiou, P. (2005) *3-D Elastoplastic FEM Modelling in a Reservoir Simulator*. SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston, Texas, January 31– February 2, 2005. SPE 91891.
- [13] Charlez, P. (1997). *The Impact of Constitutive Laws on Wellbore Stability: A General Review*. SPE Drilling & Completion. SPE 28058.
- [14] Doornhof, D., Ktistiansen, T., Nagel, N., Pattilo, P. and Sayers, C. (2006). *Compactación y Subsistencia*. Oilfield Review. 18 (4): 50 - 69.
- [15] Rodriguez, I. (2011). *Numerical Reservoir Simulation Coupled with Geomechanics: State of the Art and Application in Reservoir Characterization*. SPE International student paper at the SPE Annual Technical Conference Exhibition held in Denver, Colorado, USA, 30 October – 2 November. SPE 152364-STU.
- [16] Settari, T. and Walters, D. (2001). *Advances in Coupled Geomechanical and Reservoir Modeling with Applications to Reservoir Compaction*, SPE Journal, September. SPE 74142-PA.
- [17] Denbina, E. and Baker, G. (1998). *Modeling Cold Production for Heavy Oil Reservoirs*. Annual Technical Meeting, Jun 8 – 10, 1998, Calgary, Alberta.
- [18] Musin, K. and Khisamov R. (2010). *Solution to Problem of Evaluation of Unconsolidated Heavy oil Reservoirs in Tatarstan*. SPE Russian Oil and Gas Conference and Exhibition, 26 – 28 October, Moscow, Russia. SPE 136389 –MS.
- [19] Yale, D.P. (2002). *Coupled Geomechanics-Fluid Flow Modeling: Effects of Plasticity and Permeability Alteration*. SPE/ISRM Rock Mechanics Conference. 20-23 October, Irving, Texas. SPE 78202-MS.
- [20] Dos Santos, J. and Schiozer, D. (2003). *Quantifying Production Strategy Impact in Risk Analysis of an E&P Project Using Reservoir Simulation*. SPE Reservoir Simulation Symposium, 3-5 February, Houston, Texas. SPE 79679-MS.
- [21] Chin, L., Raghavan, R and Thomas, L. (1998). *Fully Coupled Analysis of Well Responses in Stress-Sensitive Reservoirs*. SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 27-30 September, New Orleans, Louisiana. SPE 48967-MS.
- [22] Davis R.O. and Selvadurai A.P.S. (1998). *Plasticity and Geomechanics*. Cambridge University Press. ISBN 0521818303.

- [23] Huyakorn, P. S. (1983). *Computational Methods in Subsurface Flow*. Elsevier. ISBN 978-0-12-363480-1.
- [24] Drucker, C. (1951). *A more Fundamental Approach to Stress-Strain Relations*. 1 st U.S. National Congress on Applied Mechanics. ASME, pp. 487-491.
- [25] Roscoe, K., Schofield, A.Ñ., and Thurairajah, (1968). *A Yielding of Clays in States Wetter than Critical*. In *Engineering Plasticity*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., pp. 535—609.
- [26] Schofield, A. and Wroth, P. (1968). *Critical State Soil Mechanics*. Mc Graw-Hill Book Co., London.
- [27] Roscoe, K. H., and Burland, J. B. (1968). *On the Generalized Stress-Strain Behavior of "Wet" Clay*. In *Engineering Plasticity*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K. pp. 535—609.
- [28]] Borja, R. I., and Lee, S. R. (1990). *Cam-Clay Plasticity, part I: Implicit Integration of Elasto-plastic Constitutive Relations*. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering* 78, 49—72.
- [29] Borja, R. I. (1991). *Cam-clay Plasticity, part II: Implicit Integration of Constitutive Equation based on a Nonlinear Elastic Stress Predictor*. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering* 88, 225—240.
- [30] Pietruszczak. S. (2010). *Fundamentals of Plasticity in Geomechanics*. CRC Press. Taylor & Francis Group. ISBN 978-0-415-58516-3.
- [31] Zervos, A., Papanastasiou, P. and Cook, J. (1998). *Elastoplastic Finite Element Analysis of Inclined Wellbores*. SPE/ISRM Rock Mechanics in Petroleum Engineering. Trondheim, Norway. 8-10 July. SPE-47322-MS.
- [32] Zimmerman, R.W. (1986). *Compressibility of Porous Rocks*. *J. Geophys. Res.* No. 91, pp. 12765-77.
- [33] Osorio, J.G., Wills, A. and Alcalde, O. (2002). *A Numerical Model to Study the Formation Damage by Rock Deformation from Well Test Analysis*. International Symposium and Exhibition on Formation Damage Control, Lafayette, Louisiana, February 20-21. SPE 73742.
- [34] Fjaer, E., Holt, R., Raaen, A., Risnes, R. and Horsrud, P. (1992). *Petroleum Related Rock Mechanics*. Ed Elsevier Science. Publishing company inc.
- [35] Settari, A. and Aziz, K. (1974). *Use of Irregular Grid in Coordinates Cylindrical*. *Society of Petroleum Engineers Journal*. August pp 396-412. SPE-4720-PA.
- [36] Chou C. and Pagano N.J. (1992). *Elasticity: Tensor, Dyadic and Engineering Approach*. Dover publication Inc. New York.

- [37] Pedrosa, O. (1986). *A. Pressure Transient Response in Stress – Sensitive Formations*. SPE 56th California Regional Meeting of the Society of Petroleum Engineers, Oakland, USA, 2-4 April. SPE 15115.
- [38] Hawkins and Murray F. (1956). *A Note on the Skin Effect*, Trans, AIME 207, 356-57.
- [39] Settari, A. and Mourits, F.M. (1998). *A Coupled Reservoir and Geomechanical Simulation System*. Society of Petroleum Engineering Journal. Pp 219-226. SPE-50939-PA.
- [40] Tran, D., Settari, A. and Nghiem, L. (2002). *New Iterative Coupling between a Reservoir Simulator and a Geomechanics Module*. SPE/ISRM Rock Mechanics Conference, Irving, Texas, USA, 20-23 October. SPE 78192.
- [41] Tran, D., Buchanan, W. and Nghiem, L. (2010). *Improved Gridding Technique for Coupling Geomechanics to Reservoir Flow*. SPE Journal. SPE 115514-PA.
- [42] Bathe, K. J. (1995). *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 2nd edition .
- [43] Benra, F., Dohmen, H., Pei, J, Schuster, S. and Wan, B. (2011). *A Comparison of One-Way and Two-Way Coupling Methods for Numerical Analysis of Fluid-Structure Interactions*. Journal of Applied Mathematics. Department of Mechanical Engineering, Turbomachinery, Faculty of Engineering Sciences, University of Duisburg-Essen. Duisburg, Germany.
- [44] STARS, Advanced Process & Thermal Reservoir Simulator. (2013). *User's Guide*. Computer Modelling Group Ltd.
- [45] Orozco, S. y Rodas, J. (2005). *Modelamiento de Pruebas de Presión en Yacimientos Sensibles a Esfuerzos, Empleando un Modelo de Flujo con Deformación Elastoplástica*. Trabajo de grado. Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia. Medellín.
- [46] Mavko, G. Mukerji, T. and Dvorkin, J.(1998). *The Rock Physics Handbook*. Cambridge University Press.
- [47] Gutierrez, M. and Lewis, R. (1998). *The Role of Geomechanics in Reservoir Simulation*. SPE/ISRM Rock Mechanics in Petroleum Engineering. Trondheim, Norway. 8-10 July. SPE 47392.
- [48] Coombe, D. Tremblay, B. Tran, D. and Ma, H. (2001) *Coupled Hydro-Geomechanical Modelling of the Cold Production Process*. SPE International Thermal Operations and Heavy Oil Symposium, 12-14 March, Porlamar, Margarita Island, Venezuela. SPE 69719.

- [49] Fung, L. Buchanan, L. and Wan, R. (1994). *Coupled Geomechanical-thermal Simulation for Deforming Heavy-oil Reservoirs*. Journal of Canadian Petroleum Technology. PETSOC-94-04-03.
- [50] Rabe, C. and Odreman, J. (2012). *Dynamic and Static Rock Mechanical Properties of Heavy Oil Sandstones*. ISRM Regional Symposium - 7th Asian Rock Mechanics Symposium, 15-19 October, Seoul, Korea. ISRM-ARMS7-2012-040.
- [51] Vásquez, A. Sánchez, H. McLennan, D. Portillo, Q. Poquioma, W. Blundun, M. and Mendoza, H. (1999). *Mechanical and Thermal Properties of Unconsolidated Sands and Its Applications to the Heavy Oil SAGD Project in the Tia Juana Field, Venezuela*. Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference, 21-23 April, Caracas, Venezuela. SPE-54009-MS.
- [52] Vaziri, H. and Xiao, Y. (2003). *Numerical Evaluation of Geomechanical Parameters Affecting Productivity Index in Weak Rock Formations Part 2: Field Application*. Journal of Canadian Petroleum Technology. Volume 42. PETSOC-03-12-02.
- [53] Mehdi, M. Chalaturnyk, R. and Boisvert J. (2011). *Determination of Equivalent Elastic Moduli for Coupled Geomechanical-Flow Simulation of SAGD*. Canadian Unconventional Resources Conference, 15-17 November, Calgary, Alberta, Canada. SPE-148977-MS.
- [54] Quijada, M. and Stewart, R. (2008). *Characterizing the Elastic Properties And Seismic Signature of a Heavy Oil Sand Reservoir: Manitou Lake, Saskatchewan*. SEG Annual Meeting, 9-14 November, Las Vegas, Nevada. SEG-2008-1789.
- [55] Rubio, C. Doval, J. and Medina, J. (2007). *Rubiales Oil Field: A Heavy-Oil Colombian Example of Excellent Operative PCP Systems Development*. Latin American & Caribbean Petroleum Engineering Conference, 15-18 April, Buenos Aires, Argentina. SPE-107953-MS.
- [56] Cuadros, J. Salamanca, A. Amado, R. Cuadros, G. Rojas, E. and Viramonte, J. (2012). *Horizontal Well Placement for Heavy Oil Production in Colombia*. SPE Heavy Oil Conference Canada, 12-14 June, Calgary, Alberta, Canada. SPE-157926-MS

A. Anexo 1: Modelo Diferencial de Flujo de Fluidos.

Ecuación de Continuidad

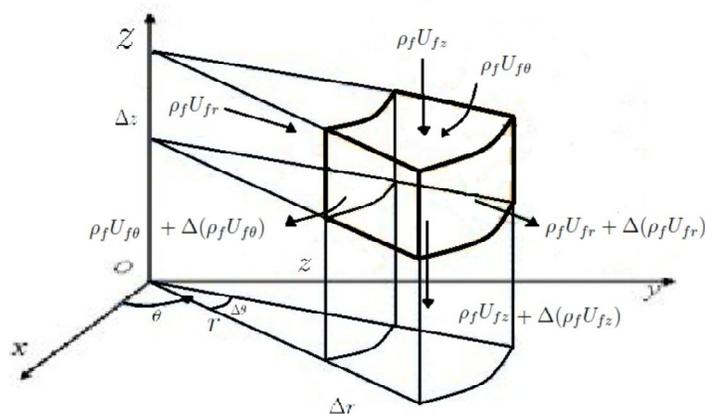
Para describir correctamente el modelo de flujo de fluidos se debe garantizar conservación de la masa del fluido y del sólido. Para asegurar que esta condición se cumpla, se aplica el principio de conservación de la materia en forma infinitesimal.

- **Ecuación de conservación de la masa de fluido.**

La ecuación de conservación de masa de fluido se obtiene a partir de un balance de masa para un elemento de volumen infinitesimal del medio poroso.

Considérese un elemento infinitesimal de volumen poroso de espesor radial Δr , de ancho $\Delta\theta$ y altura Δz a través del cual ocurre flujo de fluidos en las direcciones radial, tangencial y vertical, tal como se ilustra en la **Figura A- 1** Haciendo un balance de masa durante un incremento de tiempo Δt se tiene:

Figura A- 1: Balance de esfuerzos en volumen infinitesimal.



$$masa_{entra})_{\Delta t} - masa_{sale})_{\Delta t} \pm masa_{fuente\ o\ sumideros})_{\Delta t} = acumulacion\ o\ agotam \quad (A-1)$$

Notando la densidad y el volumen de fluido como ρ_f y V_f , respectivamente, se tiene que la masa de fluido está dada por:

$$masa_f = \rho_f V_f = \rho_f A_{transversal} (\phi u_f) \Delta t \quad (A-2)$$

En la Ecuación (A- 2), $A_{transversal}$ es el área transversal al flujo, ϕ es porosidad y u_f es la velocidad del fluido.

Teniendo en cuenta la Ecuación (A- 2) y que existen componentes de flujo radial, tangencial y vertical, los términos $masa_{entra})_{\Delta t}$ y $masa_{sale})_{\Delta t}$ de la Ecuación (A- 1) pueden ser escritos de la siguiente forma:

$$masa_{entra})_{\Delta t} = \rho_f (\phi u_{fr}) (r \Delta \theta \Delta z \Delta t) + \rho_f (\phi u_{f\theta}) \Delta r \Delta z \Delta t + \rho_f (\phi u_{fz}) \frac{\Delta \theta}{2} [(r + \Delta r)^2 - r^2] \quad (A-3)$$

$$masa_{sale})_{\Delta t} = [\rho_f (\phi u_{fr}) + \Delta(\rho_f \phi u_{fr})] [\Delta \theta (r + \Delta r) \Delta z] \Delta t + [\rho_f (\phi u_{f\theta}) + \Delta(\rho_f \phi u_{f\theta})] \Delta t + [\rho_f (\phi u_{fz}) + \Delta(\rho_f \phi u_{fz})] \frac{\Delta \theta}{2} [(r + \Delta r)^2 - r^2] \Delta t \quad (A-4)$$

En las Ecuaciones (A- 3) y (A- 4), u_{fr} , $u_{f\theta}$ y u_{fz} son las velocidades del fluido en la dirección radial, tangencial y vertical, respectivamente.

La masa que entra por fuentes o sumideros está dada por:

$$masa_{fuente\ o\ sumideros})_{\Delta t} = \pm \tilde{q}_f V_t \Delta t \quad (A-5)$$

En la Ecuación (A- 5), V_t es volumen total del elemento infinitesimal y \tilde{q}_f la cantidad de masa que entra o sale por fuentes o sumideros, respectivamente, por unidad de volumen total por unidad de tiempo de observación, el cual está dado por:

$$\tilde{q}_f = \frac{\text{masa}_{\text{fuente o sumideros}}}{V_t \Delta t} \quad (\text{A- 6})$$

El término acumulación o agotamiento en la Ecuación (A- 1) está dada por:

$$\text{acumulacion o agotamiento})_{\Delta t} = \Delta(\rho_f V_t \phi)_t^{r+\Delta t} \quad (\text{A- 7})$$

Reemplazando las Ecuaciones (A- 3) a (A- 7) en la Ecuación (A- 1), despreciando los términos infinitesimales de orden mayor (producto de cinco incrementos), simplificando términos y dividiendo por $V_t \Delta t = r \Delta \theta \Delta r \Delta z \Delta t$, se encuentra la expresión para el balance de masa:

$$-\left[\frac{\rho_f \phi u_{fr}}{r} + \frac{\Delta(\rho_f \phi u_{fr})}{\Delta r} \right] - \frac{1}{r} \frac{\Delta(\rho_f \phi u_{f\theta})}{\Delta \theta} - \frac{\Delta(\rho_f \phi u_{fz})}{\Delta z} = \frac{1}{V_t} \frac{\Delta(\rho_f V_t \phi)}{\Delta t} + \tilde{q}_f \quad (\text{A- 8})$$

En la Ecuación (A- 8), $\tilde{q}_f > 0$ hace referencia a producción de fluidos y $\tilde{q}_f < 0$ para el caso de inyección de fluidos. Tomando límites cuando $\Delta r \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$ y aplicando la definición de derivada, la Ecuación (A- 7) adquiere la forma diferencial:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho_f \phi u_{fr} r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho_f \phi u_{f\theta})}{\partial \theta} - \frac{\partial(\rho_f \phi u_{fz})}{\partial z} = \frac{1}{V_t} \frac{\partial(\rho_f V_t \phi)}{\partial t} + \tilde{q}_f \quad (\text{A- 9})$$

La Ecuación (A- 9) es la ecuación de continuidad para el flujo de fluidos en un medio poroso en coordenadas cilíndricas. Obsérvese que en yacimientos sensitivos a esfuerzos y deformaciones, V_t y ϕ son parámetros dependientes del tiempo, contrario a la suposición generalmente aceptada en simulación convencional de yacimientos.

- **Ecuación de conservación de masa del sólido.**

Considerando que la masa del solido esta dada por la ecuación (A- 10).

$$\text{masa}_s = \rho_s (1 - \phi) u_s A_{\text{transversal}} \Delta t \quad (\text{A- 10})$$

Donde ρ_s es densidad del sólido y u_s es velocidad del sólido, siguiendo un procedimiento análogo al balance de masa del fluido y teniendo en cuenta que la masa del sólido puede ser expresada como:

se obtiene la siguiente ecuación de continuidad del sólido:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial[\rho_s(1-\phi)u_{sr}r]}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial[\rho_s(1-\phi)u_{s\theta}]}{\partial \theta} - \frac{\partial[\rho_s(1-\phi)u_{sz}]}{\partial z} = \frac{1}{V_t} \frac{\partial[\rho_s(1-\phi)]}{\partial t} + \tilde{q}_s \quad (\text{A-11})$$

En la Ecuación (A-11), u_{sr} , $u_{s\theta}$ y u_{sz} son velocidades del sólido en la dirección radial, tangencial y vertical, respectivamente y \tilde{q}_s cantidad de masa de sólido que entra o sale por fuentes o sumideros, respectivamente, por unidad de volumen total por unidad de tiempo de observación.

Ecuación de Difusividad

Usando la ley de Darcy para el flujo de fluido a través del medio poroso del sistema, la velocidad real del fluido en dirección radial y vertical se puede expresar de la siguiente manera:

En dirección radial:

$$\phi u_{fr} = \frac{q_r}{A_t} = -\frac{k_r}{\mu_f} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (\text{A-12})$$

En dirección tangencial:

$$\phi u_{f\theta} = \frac{q_\theta}{A_t} = -\frac{k_\theta}{\mu_f} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (\text{A-13})$$

En dirección vertical:

$$\phi u_{fz} = \frac{q_z}{A_t} = -\frac{k_z}{\mu_f} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{A-14})$$

En las Ecuaciones (A-12) a (A-14), q_r , q_θ y q_z son caudales de fluido en dirección radial, tangencial y vertical, respectivamente, A_t es área transversal, k_r , k_θ y k_z son permeabilidades en la dirección radial, tangencial y vertical respectivamente, μ_f es viscosidad del fluido y p es presión. Dado que el sólido puede encontrarse en movimiento, la velocidad relativa del fluido se expresa como:

$$u_{frelativa)r} = \phi(u_{fr} - u_{sr}) = \frac{q_r}{A_t} \quad (\text{A-15})$$

$$u_{frelativa)\theta} = \phi(u_{f\theta} - u_{s\theta}) = \frac{q_\theta}{A_t} \quad (\text{A-16})$$

$$u_{frelativa)z} = \phi(u_{fz} - u_{sz}) = \frac{q_z}{A_t} \quad (\text{A-17})$$

En las Ecuaciones (A- 15) a (A- 17), $u_{frelativa)i}$ es velocidad relativa del fluido con respecto al sólido en la dirección $i = r, \theta, z$, respectivamente. Combinando las Ecuaciones (A- 12) a (A- 17), se obtienen las ecuaciones para la velocidad del fluido a través del medio poroso:

$$u_{fr}\phi = u_{sr}\phi - \frac{k_r}{\mu_f} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (\text{A-18})$$

$$u_{f\theta}\phi = u_{s\theta}\phi - \frac{k_r}{\mu_f} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (\text{A-19})$$

$$u_{fz}\phi = u_{sz}\phi - \frac{k_z}{\mu_f} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{A-20})$$

Reemplazando las Ecuaciones (A- 18) a (A- 20) en la Ecuación (A- 20) y reorganizando términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \rho_f \frac{k_r}{\mu_f} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\rho_f \frac{k_r}{\mu_f} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_f \frac{k_z}{\mu_f} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_f \phi u_{fr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho_f \phi u_{f\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_f \phi u_{fz}) + \frac{1}{V_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f V_t \phi) + \tilde{q}_f \end{aligned} \quad (\text{A-21})$$

La Ecuación (A- 21) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \left(\rho_f \frac{\mathbf{K}}{\mu_f} \nabla p \right) = \nabla \cdot (\rho_f \phi u_s) + \frac{1}{V_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f V_t \phi) + \tilde{q}_f \quad (\text{A-22})$$

El operador ∇ en la Ecuación (A- 22) es conocido como divergente, y \mathbf{K} es el tensor de permeabilidades. El símbolo ∇U representa el gradiente de una propiedad U en coordenadas cilíndricas y se expresa:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{i} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \quad (\text{A- 23})$$

Donde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ son los vectores unitarios en dirección radial, tangencial y vertical, respectivamente. El símbolo ∇U representa el divergente de una propiedad U en coordenadas cilíndricas y se expresa:

$$\nabla \cdot U = \frac{1}{r} \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \quad (\text{A- 24})$$

Donde U_r, U_θ, U_z , son las propiedades dependientes en la dirección radial, tangencial y vertical, respectivamente. Derivando el primer término del lado derecho de la ecuación (A- 22), se tiene la siguiente expresión:

$$\nabla \cdot \left(\rho_f \frac{\mathbf{K}}{\mu_f} \nabla p \right) = u_s \nabla \cdot (\rho_f \phi) + \rho_f \phi \nabla \cdot (u_s) + \frac{1}{V_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f V_t \phi) + \tilde{q}_f \quad (\text{A- 25})$$

El término $u_s \nabla \cdot (\rho_f \phi)$ es una componente convectiva y puede ser despreciada, pues este producto es un valor pequeño con respecto a los otros términos, además físicamente, esto implica que el yacimiento está sufriendo deformación, pero se mantiene estacionario. La ecuación (A- 25) se expresa como:

$$\nabla \cdot \left(\rho_f \frac{\mathbf{K}}{\mu_f} \nabla p \right) = \rho_f \phi \nabla \cdot (u_s) + \frac{1}{V_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f V_t \phi) + \tilde{q}_f \quad (\text{A- 26})$$

El primer término del lado derecho de la Ecuación (A- 26) puede ser expresado utilizando la ecuación de conservación del sólido (Ecuación (A- 11)), organizándola de forma similar a la Ecuación (A- 22) y despreciando el término de componente convectiva se obtiene:

$$\nabla \cdot (u_s) = -\frac{1}{\rho_s(1-\phi)} \frac{1}{V_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s V_t (1-\phi)) - \frac{\tilde{q}_s}{\rho_s(1-\phi)} \quad (\text{A-27})$$

Desarrollando la derivada indicada en este término, se tiene que:

$$-\frac{1}{\rho_s(1-\phi)} \frac{1}{V_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s V_t (1-\phi)) = -\frac{1}{\rho_s(1-\phi)} \frac{1}{V_t} V_t \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s V_t (1-\phi)) - \frac{\rho_s(1-\phi)}{\rho_s(1-\phi)} \frac{1}{V_t} \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{A-28})$$

$$-\frac{1}{\rho_s(1-\phi)} \frac{1}{V_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s V_t (1-\phi)) = -\frac{1}{\rho_s(1-\phi)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s V_t (1-\phi)) - \frac{1}{V_t} \frac{\partial}{\partial t} (V_t) \quad (\text{A-29})$$

Reemplazando la densidad del sólido por su definición en la expresión anterior:

$$\frac{1}{\rho_s(1-\phi)} \frac{1}{V_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s V_t (1-\phi)) = -\frac{1}{\frac{m_s}{V_s}(1-\phi)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_s}{V_s} (1-\phi) \right) - \frac{1}{V_t} \frac{\partial}{\partial t} (V_t) \quad (\text{A-30})$$

Donde V_s es volumen del sólido. Expresando la porosidad en términos de los volúmenes total y del sólido, la ecuación anterior se puede escribir como sigue:

$$-\frac{1}{\rho_s(1-\phi)} \frac{1}{V_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s V_t (1-\phi)) = -\frac{V_s}{\left(1 - \frac{(V_t - V_s)}{V_t}\right)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{V_s} \left(1 - \frac{(V_t - V_s)}{V_t}\right) \right] - \frac{1}{V_t} \quad (\text{A-31})$$

$$-\frac{1}{\rho_s(1-\phi)} \frac{1}{V_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s V_t (1-\phi)) = -V_t \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{V_t} \right] - \frac{1}{V_t} \frac{\partial}{\partial t} (V_t) \quad (\text{A-32})$$

Derivando el primer término del lado derecho de la ecuación anterior y simplificando:

$$-\frac{1}{\rho_s(1-\phi)} \frac{1}{V_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s V_t (1-\phi)) = -V_t \left(\frac{1}{V_t^2} \frac{\partial V_t}{\partial t} \right) - \frac{1}{V_t} \frac{\partial V_t}{\partial t} \quad (\text{A-33})$$

$$-\frac{1}{\rho_s(1-\phi)} \frac{1}{V_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s V_t (1-\phi)) = 0 \quad (\text{A-34})$$

Por tanto, la Ecuación (A-27) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot (u_s) = -\frac{\tilde{q}_s}{\rho_s(1-\phi)} \quad (\text{A-35})$$

Reemplazando la Ecuación (A- 28) en la Ecuación (A- 26):

$$\nabla \cdot \left(\rho_f \frac{K}{\mu_f} \nabla p \right) = - \frac{(\rho_f \phi \tilde{q}_s)}{\rho_s(1 - \phi)} + \frac{1}{V_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f V_t \phi) + \tilde{q}_f \quad (\text{A- 36})$$

El segundo término del lado derecho de esta ecuación puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{1}{V_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f V_t \phi) = \rho_f \frac{\phi}{V_t} \frac{\partial}{\partial t} (V_t) + \phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f) \quad (\text{A- 37})$$

De la definición de compresibilidad de un fluido puede demostrarse:

$$c_f \frac{\partial}{\partial t} (p) = \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f) \quad (\text{A- 38})$$

El término c_f en la Ecuación (A- 38), es la compresibilidad del fluido. Llevando la Ecuación (A- 38) a la Ecuación (A- 36) se tendrá:

$$\frac{1}{V_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f V_t \phi) = \rho_f \phi \left[\frac{1}{V_p} \frac{\partial}{\partial t} (V_p) + c_f \frac{\partial}{\partial t} (p) \right] \quad (\text{A- 39})$$

Finalmente, reemplazando la Ecuación (A- 39) en la Ecuación (A- 36) se obtiene:

$$\nabla \cdot \left(\rho_f \frac{K}{\mu_f} \nabla p \right) = - \frac{(\rho_f \phi \tilde{q}_s)}{\rho_s(1 - \phi)} + \rho_f \phi \left[\frac{1}{V_p} \frac{\partial}{\partial t} (V_p) + c_f \frac{\partial}{\partial t} (p) \right] + \tilde{q}_f \quad (\text{A- 40})$$

La Ecuación (A- 40) es la primera forma de la ecuación de flujo de fluidos. En este modelo el flujo de fluidos depende del estado de esfuerzos al que está sometido el yacimiento, además de la presión de poro y de las propiedades de roca y fluido. Por esta razón es necesario expresar la ecuación de flujo en función de estas variables. Para tal objetivo se utiliza la siguiente expresión deducida con base en la teoría de compresibilidad de medios porosos de Zimmermman et al. [32]

$$\frac{1}{V_p} \frac{dV_p}{dt} = \frac{1}{\phi} \left[(c_{bc} - c_r(1 + \phi)) \frac{dp}{dt} - (c_{bc} - c_r) \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon_v}{c_{bc}} \right) \right] \quad (\text{A- 41})$$

En la ecuación (A- 41), c_r es la compresibilidad del esqueleto de la roca, c_{bc} es la compresibilidad total de la roca, definida con base en la variación del volumen total con respecto a la presión de confinamiento, a presión de poro constante y ε_v es la deformación volumétrica.

Sustituyendo la Ecuación (A- 41) en la Ecuación (A- 40) y reagrupando términos semejantes se obtiene:

$$\nabla \cdot \left(\rho_f \frac{K}{\mu_f} \nabla p \right) = - \frac{(\rho_f \phi \tilde{q}_s)}{\rho_s (1 - \phi)} + \rho_f \left[(c_{bc} - c_r (1 + \phi)) \frac{dp}{dt} - (c_{bc} - c_r) \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon_v}{c_{bc}} \right) \right] + \tilde{q}_f \quad (\text{A- 42})$$

La Ecuación (A- 42) es la forma final del modelo de flujo de fluidos, la cual está expresada en términos de la presión de poro y de la deformación volumétrica, siendo válida para todo tipo de fluido: compresible, levemente compresible e incompresible. En la ecuación (A- 42) $\varepsilon_v = \bar{\sigma} - c_{bc}$, esta muestra que las propiedades de la roca y el fluido son función de la presión de poro o del estado de esfuerzos o de ambas.

B. Anexo 2: Modelo Diferencial de Deformación Geomecánica de la Roca.

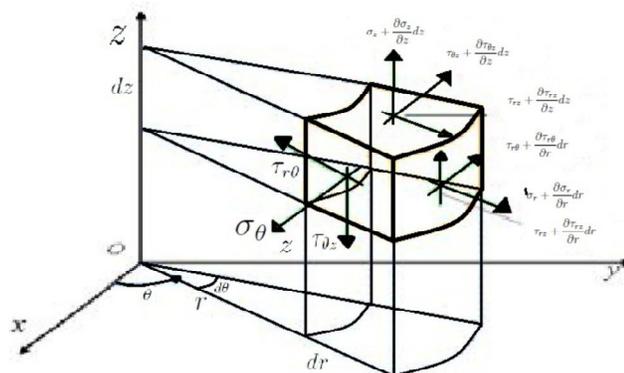
El modelo de deformación geomecánica está basado en el siguiente conjunto de relaciones:

- Relaciones de equilibrio de esfuerzos
- Relaciones deformación – desplazamiento
- Relaciones esfuerzo-deformación-presión.

De acuerdo a la relación esfuerzo – deformación es importante dejar en claro que este modelo lo considerara como elasto-plástico, por lo cual se trabajara como si el sistema se comportara elástico o plástico con pequeñas deformaciones.

El equilibrio de esfuerzos se plantea sobre un elemento de volumen infinitesimal en coordenadas cilíndricas, el cual representa el estado tridimensional de esfuerzos **Figura B- 1**

Figura B- 1: Balance de esfuerzos en volumen infinitesimal.



Relaciones de Equilibrio de esfuerzos: Para conservar el equilibrio de fuerzas después del cambio en la presión se deben cumplir las siguientes ecuaciones de equilibrio de esfuerzos [44]:

$$\frac{\partial \sigma_r^o}{\partial r} + \frac{\sigma_r^o - \sigma_\theta^o}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^o}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^o}{\partial z} + \frac{\partial \Delta \sigma_r}{\partial r} + \frac{\Delta \sigma_r - \Delta \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \alpha \Delta p}{\partial r} = \quad (\text{B- 1})$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^o}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}^o}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta^o}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}^o}{\partial z} + \frac{\partial \Delta \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\Delta \sigma_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha \Delta p}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{B- 2})$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}^o}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}^o}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^o}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z^o}{\partial z} + \frac{\partial \Delta \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\Delta \sigma_{rz}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta \sigma_{\theta z}^o}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \alpha \Delta p}{\partial z} = 0 \quad (\text{B- 3})$$

En las ecuaciones (B- 1), (B- 2), y (B- 3) $\Delta \sigma_i$, $i = r, \theta, z$ es el esfuerzo total incremental en la dirección i ; $\Delta \sigma_{rz}$, $\Delta \sigma_{r\theta}$ and $\Delta \sigma_{\theta z}$ son los esfuerzos de corte incrementales.

Ecuaciones deformación - Desplazamiento: Los desplazamientos incrementales y las deformaciones incrementales se relacionan de la siguiente manera [44].

$$\Delta \varepsilon_r = \frac{\partial \Delta u_r}{\partial r} \quad (\text{B- 4})$$

$$\Delta \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left(\Delta u_r + \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (\text{B- 5})$$

$$\Delta \varepsilon_z = \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \quad (\text{B- 6})$$

$$\Delta \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial \Delta u_r}{\partial \theta} - \Delta u_\theta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial r} \quad (\text{B- 7})$$

$$\Delta \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} + \frac{\partial \Delta u_r}{\partial z} \right) \quad (\text{B- 8})$$

$$\Delta \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial z} \right) \quad (\text{B- 9})$$

En las ecuaciones (B- 4) a (B- 9), $\Delta\varepsilon_i$ y Δu_i , $i = r, \theta, z$ son las deformaciones incrementales normales y los desplazamientos respectivamente, en la dirección i ; $\Delta\varepsilon_{r\theta}$, $\Delta\varepsilon_{rz}$ and $\Delta\varepsilon_{\theta z}$ son deformaciones de corte incrementales. La matriz deformación se puede expresar:

$$[D] = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_\theta & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{zr} & \varepsilon_{z\theta} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (\text{B- 10})$$

La expresión que describe la deformación volumétrica es:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial \Delta u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (\text{B- 11})$$

Donde

$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ y ε_z = Deformaciones en la dirección radial, tangencial y vertical respectivamente.

$\varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{rz}$ y $\varepsilon_{\theta z}$ = Son las deformaciones de cizalla.

u_r, u_θ y u_z = Desplazamientos en las direcciones radial, tangencial y vertical, respectivamente.

Ecuaciones de esfuerzo-deformación-presión para un sólido.

En primer lugar se presentan las ecuaciones entre esfuerzos y deformaciones para el caso elástico. [45] Los esfuerzos para cada dirección serán:

Esfuerzo en dirección radial

$$\sigma_r = 2G\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_v = (2G + \lambda)\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\theta + \lambda\varepsilon_z \quad (\text{B- 12})$$

Esfuerzo en dirección tangencial

$$\sigma_{\theta} = 2G\varepsilon_{\theta} + \lambda\varepsilon_v = \lambda\varepsilon_r + (2G + \lambda)\varepsilon_{\theta} + \lambda\varepsilon_z \quad (\text{B- 13})$$

Esfuerzo en dirección vertical:

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\varepsilon_v = \lambda\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_{\theta} + (2G + \lambda)\varepsilon_z \quad (\text{B- 14})$$

Los esfuerzos de cizalla están dados por:

En dirección $r\theta$

$$\sigma_{r\theta} = 2G(\varepsilon_{r\theta}) \quad (\text{B- 15})$$

En dirección rz

$$\sigma_{rz} = 2G(\varepsilon_{rz}) \quad (\text{B- 16})$$

En dirección $z\theta$

$$\sigma_{\theta z} = 2G(\varepsilon_{\theta z}) \quad (\text{B- 17})$$

En las ecuaciones (B- 12) a (B- 17), G es el modulo de cizalla, λ es el parámetro de Lamé.

De manera matricial las anteriores ecuaciones estarían expresadas así:

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_{\theta} \\ \sigma_z \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_{\theta} \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta z} \end{bmatrix} \quad (\text{B- 18})$$

De una manera más sencilla se puede expresar como

$$\sigma_{ij} = [D_e]\varepsilon_{ij} \quad (\text{B- 19})$$

Donde $[D_e]$ es denominada la matriz elástica.

Ecuaciones geomecánicas para un medio poroso.

El conjunto de ecuaciones (B- 12) hasta (B- 17) se emplean para la descripción de la deformación de un cuerpo sólido (no poroso), contrario a lo necesario para este estudio, por tanto para relacionar estas ecuaciones a medios porosos saturados de fluidos, se debe incluir el concepto de esfuerzo efectivo y trabajar con base en este, el cual considera el esfuerzo total y la presión de poro. [45]

El esfuerzo efectivo se define así:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \alpha p \quad (\text{B- 20})$$

Donde

σ_{ij} = Esfuerzo total

α = Coeficiente de Biot

p = Presión de poro

Teniendo en cuenta la definición de esfuerzo efectivo planteada anteriormente, para el caso elástico las ecuaciones (B- 12) a (B- 17) se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\sigma'_r = 2G\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_v \quad (\text{B- 21})$$

$$\sigma'_\theta = 2G\varepsilon_\theta + \lambda\varepsilon_v \quad (\text{B- 22})$$

$$\sigma'_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\varepsilon_v \quad (\text{B- 23})$$

Al extender la aplicación de la definición de esfuerzo efectivo, en los esfuerzos de cizalladura no se produce ningún cambio, pues en el caso de estos, el esfuerzo efectivo es igual al esfuerzo total dado que la presión de poro actúa en dirección normal a la superficie de la roca. [45]

Las ecuaciones (B- 21), (B- 22) y (B- 23) se tienen para el caso de tener una deformación elástica de la roca. Para hallar las expresiones correspondientes al caso elasto-plástico, se requiere de un análisis diferente que se presentara a continuación.

Incremento de la relación Esfuerzo-Deformación-Presión

Un material puede ser clasificado como elasto-plástico si después de ser cargado más allá de cierto límite (límite de cedencia del material), se presenta en el mismo una deformación permanente (plástica), una vez se ha liberado de la carga a la que inicialmente estaba sometido. El incremento de desplazamiento total en el caso elasto-plástico, está compuesto por una parte elástica y otra plástica, como se muestra a continuación [45]:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (\text{B- 24})$$

Los incrementos en los esfuerzos y las deformaciones elásticas están relacionados por la ley de Hooke generalizada, como se presenta en la ecuación (B- 26):

$$d\varepsilon_{ij} = [D_e]^{-1}d\sigma_{ij} + d\varepsilon_{ij}^p \quad (\text{B- 25})$$

Además, el vector de incremento en los esfuerzos está dado por:

$$d\sigma_{ij} = [D_e](d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^p) \quad (\text{B- 26})$$

Donde $d\varepsilon_{ij}^p$ son los incrementos de la deformación plástica.

De acuerdo a la regla de flujo, los incrementos en la deformación pueden ser derivados a partir de la función llamada potencial plástico, y representada por \bar{Q} [45]. Primero se asume que esta función existe y que los incrementos en la deformación plástica son proporcionales al gradiente de \bar{Q} , por lo tanto:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{d\bar{Q}}{d\sigma_{ij}} \quad (\text{B- 27})$$

Donde λ es una constante de proporcionalidad a ser determinada. Se dice que la regla de flujo es asociada cuando $d\bar{Q}$ se hace idéntica a una función $d\bar{f}$; en caso contrario, se dice que la regla de flujo es “no –asociada”. La regla de flujo no asociada se trabaja cuando la formación de interés presenta una dilatación significativa, en este caso para estudiar la compactación del sistema se dispone del caso más simple que es la regla de flujo asociada.

Para un modelo tridimensional, se tiene que:

$$\frac{d\bar{Q}}{d\sigma_{ij}} = \frac{d\bar{Q}}{d\sigma_{ij}} \frac{d\bar{Q}}{d\sigma_{ij}}, \frac{d\bar{Q}}{d\sigma_{ij}}, \frac{d\bar{Q}}{d\sigma_{ij}}, \frac{d\bar{Q}}{d\sigma_{ij}, d\sigma_{ij}}, \frac{d\bar{Q}}{d\sigma_{ij}} \quad (\text{B- 28})$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\varepsilon_{ij}^p \frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \quad (\text{B- 29})$$

Donde $d\varepsilon_{ij}^p$ es el incremento en la deformación plástica efectiva.

La función \bar{f} es una función escalar de los componentes de los esfuerzos contenidos en el vector σ_{ij} y $\bar{f} = f(\sigma_o)$, en donde σ_o es el esfuerzo de cedencia inicial. Para un valor dado de σ_o , la función \bar{f} forma una superficie en el espacio de los esfuerzos principales. Existen varios modelos para definir el parámetro σ_o de acuerdo a varios autores, como lo son, por ejemplo Mohr-Coulomb y Drucker-Prager.

Reemplazando la ecuación (B- 29) en (B- 26) se obtiene:

$$d\sigma_{ij} = [D_e] \left(d\varepsilon_{ij} - d\bar{\varepsilon}_{ij}^p \frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \right) \quad (\text{B- 30})$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación (B- 30) por el término $\left(\frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}}\right)^T$, se tiene lo siguiente:

$$\left(\frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}}\right)^T d\sigma_{ij} = \left(\frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}}\right)^T [D_e] \left(d\varepsilon_{ij} - d\bar{\varepsilon}_{ij}^p \frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \right) \quad (\text{B- 31})$$

La regla de endurecimiento de un material especifica la respectiva modificación de la superficie de cedencia inicial durante la deformación plástica. Con respecto a lo anterior, se tienen varias reglas disponibles.

Una de las más simples es la llamada regla de endurecimiento isotrópico la cual plantea que las superficies de cedencia posteriores pueden estar representadas por la siguiente expresión:

$$\bar{f}(\sigma_{ij}) = \bar{\sigma}_{ij}(k^*) \quad (\text{B- 32})$$

Donde k^* es el parámetro de endurecimiento y se asume que es función de la deformación plástica efectiva $d\bar{\varepsilon}_{ij}^p$. Dado que k^* es función de $\bar{\varepsilon}_{ij}^p$, la ecuación (B- 28) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\bar{f}(\sigma_{ij}) = \bar{\sigma}_{ij}(\bar{\varepsilon}_{ij}^p) \quad (\text{B- 33})$$

Donde $\bar{\sigma}_{ij}$ es el esfuerzo promedio.

A partir de la ecuación (B- 33), se puede obtener que:

$$\left(\frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}}\right)^T = \frac{d\bar{\sigma}_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij}^p}{d\bar{\varepsilon}_{ij}^p d\sigma_{ij}} \quad (\text{B- 34})$$

Resolviendo:

$$\left(\frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}}\right)^T d\sigma_{ij} = d\bar{\sigma}_{ij} = \frac{d\bar{\varepsilon}_{ij}^p}{d\sigma_{ij}} d\bar{\varepsilon}_{ij}^p = S d\bar{\varepsilon}_{ij}^p \quad (\text{B- 35})$$

Donde S es la pendiente de la curva esfuerzo-deformación plástica efectiva, la cual se muestra a continuación:

Figura (B- 1) Relación efectiva esfuerzo – deformación $\bar{\sigma}_{ij}$ vs $\bar{\varepsilon}_{ij}$: $E = \bar{\sigma}_{ij}/\bar{\varepsilon}_{ij}^e$

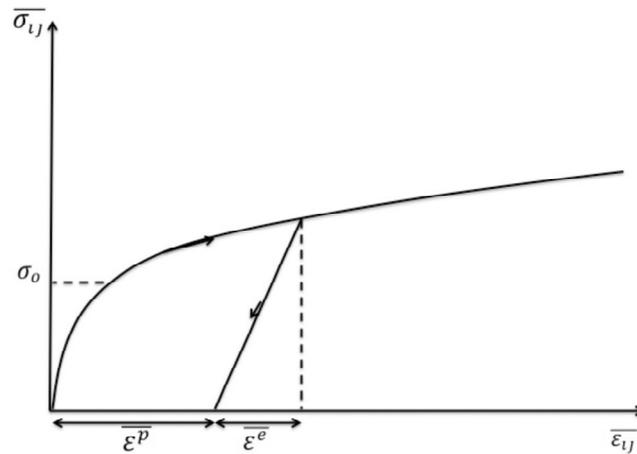
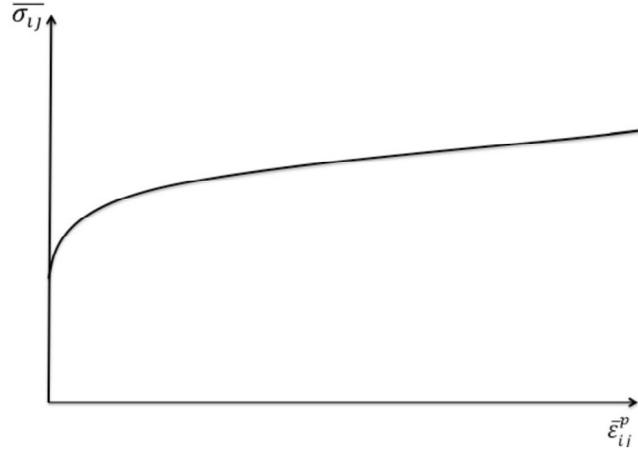


Figura (B- 2) Relación efectiva esfuerzo-deformación $\bar{\sigma}_{ij}$ vs $\bar{\varepsilon}_{ij}^p$: $S = d\bar{\sigma}_{ij}/d\bar{\varepsilon}_{ij}^p$



En las Figura (B- 1) y Figura (B- 2) $\bar{\sigma}_{ij}$ y $\bar{\epsilon}_{ij}$ representan el esfuerzo y la deformación efectiva respectivamente, los cuales son cantidades invariantes expresadas en términos de las componentes de esfuerzos y deformaciones, como se muestra a continuación:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2} \quad (\text{B- 36})$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \left\{ \frac{1}{2} [(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + (\epsilon_{22} - \epsilon_{33})^2 + (\epsilon_{33} - \epsilon_{11})^2] + 3(\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{13}^2 + \epsilon_{23}^2) \right\}^{1/2} \quad (\text{B- 37})$$

La relación entre el esfuerzo efectivo y la deformación efectiva puede ser establecida al llevar a cabo una prueba uniaxial en laboratorio. Dichos parámetros son cantidades invariantes expresadas en términos de las componentes de esfuerzos y deformaciones [45].

Reemplazando la ecuación (B- 35) en la (B- 31) se tiene que:

$$S d\bar{\epsilon}_{ij}^p = \left(\frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \right)^T [D_e] \left(d\epsilon_{ij} - d\bar{\epsilon}_{ij}^p \frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \right) \quad (\text{B- 38})$$

$$S d\bar{\epsilon}_{ij}^p = \left(\frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \right)^T [D_e] d\epsilon_{ij} - \frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} [D_e] d\bar{\epsilon}_{ij}^p \frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \quad (\text{B- 39})$$

Resolviendo la ecuación (B- 39) para $d\bar{\varepsilon}_{ij}^p$:

$$d\bar{\varepsilon}_{ij}^p = \left(S + \left(\frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \right)^T [D_e] \frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \right) = \left(\frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \right)^T [D_e] d\varepsilon_{ij} \quad (\text{B- 40})$$

$$d\bar{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\left(\frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \right)^T [D_e]}{S + \left(\frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \right)^T [D_e] \frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}}} d\varepsilon_{ij} = W_{ij}^T d\varepsilon_{ij} \quad (\text{B- 41})$$

En donde:

$$W_{ij}^T = \frac{\left(\frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \right)^T [D_e]}{S + \left(\frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \right)^T [D_e] \frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}}} \quad (\text{B- 42})$$

Combinando las ecuaciones (B- 30) y (B- 41) se obtiene:

$$d\sigma_{ij} = [D_e] \left([D_e] - [D_e] W_{ij}^T \frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \right) d\varepsilon_{ij} = [D_{ep}] d\varepsilon_{ij} \quad (\text{B- 43})$$

Donde el término $[D_{ep}]$ es conocido como la matriz de elasto-plasticidad. Al examinar las matrices involucradas, se puede demostrar que $[D_{ep}]$ es simétrica (dado que se esta trabajando con una regla de flujo asociada).

$$[D_{ep}] = [D_e] - [D_e] W_{ij}^T \frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \quad (\text{B- 44})$$

Cuando se trabaja con una regla de flujo no asociada, se puede realizar un procedimiento similar al anterior, pero la matriz $[D_{ep}]$ será asimétrica.

Función de cedencia.

Dentro de la evaluación del comportamiento plástico de un material, es necesario definir el criterio de cedencia para evaluar la derivada relacionada con este. Para calcular la matriz de elasto-plasticidad presentado en la ecuación (B- 44), es necesario evaluar el término $\frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}}$, llamado usualmente vector de flujo [45]. Primero, se debe escribir la función de cedencia en la forma:

$$\bar{f} = \bar{f}(J_1, (J'_2)^{1/2}, \theta_0) = 0 \quad (\text{B- 45})$$

Dónde:

J_1 = Primer invariante del tensor de esfuerzos.

J'_2 = Segunda invariante del tensor de esfuerzos deviatoricos.

Derivando la función f con respecto a σ_{ij} , y aplicando la regla de la cadena, se obtiene que:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial J_1} \frac{dJ_1}{d\sigma_{ij}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial (J'_2)^{1/2}} \frac{\partial (J'_2)^{1/2}}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{B- 46})$$

Donde

$$i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3$$

De la ecuación anterior, es necesario hallar la derivada de $\frac{d\theta_0}{d\sigma_{ij}}$, donde el término θ_0 se conoce como el ángulo de Lode, que esta representado por la siguiente expresión:

$$\pi/6 \leq \theta_0 = \frac{1}{3} \text{sen}^{-1} \left[\frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{J'_3}{(J'_2)^{3/2}} \right] \leq \pi/6 \quad (\text{B- 47})$$

En donde:

J'_3 = Tercer invariante del tensor de esfuerzos deviatoricos.

$$\theta_0 = \frac{1}{3} \text{sen}^{-1} \left[\frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{J'_3}{(J'_2)^{3/2}} \right] \quad (\text{B- 48})$$

Lo cual equivale a decir que

$$\text{sen}(3\theta) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{J'_3}{(J'_2)^{3/2}}, \quad (\text{B- 49})$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial[\text{sen}(3\theta_0)]}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{\partial [J'_3 (J'_2)^{-3/2}]}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{\partial [J'_3 \{(J'_2)^{1/2}\}^{-3}]}{\partial\sigma_{ij}} \quad (\text{B- 50})$$

$$3 \cos(3\theta_0) \frac{\partial\theta_0}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{-3\sqrt{3}}{2} \left\{ -3J'_3 (J'_2)^{1/2}{}^{-4} \frac{\partial(J'_2)^{1/2}}{\partial\sigma_{ij}} + \{(J'_2)^{1/2}\}^{-3} \frac{\partial J'_3}{\partial\sigma_{ij}} \right\} \quad (\text{B- 51})$$

Despejando el término $\frac{\partial\theta_0}{\partial\sigma_{ij}}$ de la ecuación anterior se tiene:

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{-\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta_0)} \left\{ \frac{1}{\partial(J'_2)^{3/2}} \frac{\partial J'_3}{\partial\sigma_{ij}} - \frac{3J'_3}{(J'_2)^2} \frac{\partial(J'_2)^{1/2}}{\partial\sigma_{ij}} \right\} \quad (\text{B- 52})$$

Resolviendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial\sigma_{ij}} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial\sigma_{ij}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial(J'_2)^{1/2}} \frac{\partial(J'_2)^{1/2}}{\partial\sigma_{ij}} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta_0)} \right) \frac{1}{\partial(J'_2)^{3/2}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial\theta_0} \frac{\partial J'_3}{\partial\sigma_{ij}} \\ &+ \frac{3\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta_0)} \frac{J'_3}{(J'_2)^2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial\theta_0} \frac{\partial(J'_2)^{1/2}}{\partial\sigma_{ij}} \end{aligned} \quad (\text{B- 53})$$

Agrupando

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial \sigma_{ij}} + \left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial (J'_2)^{1/2}} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta_0)} \right) \frac{J'_3}{(J'_2)^2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \theta_0} \right] \frac{\partial (J'_2)^{1/2}}{\partial \sigma_{ij}} \\ + \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta_0)} \right) \frac{1}{\partial (J'_2)^{3/2}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \theta_0} \right] \frac{\partial J'_3}{\partial \sigma_{ij}} \end{aligned} \quad (\text{B- 54})$$

Despejando el término J'_3

$$J'_3 = \frac{-2 \operatorname{sen}(3\theta_0) (J'_2)^{3/2}}{3\sqrt{3}} \quad (\text{B- 55})$$

Sustituyendo la ecuación (B- 55) en la (B- 54) y simplificando se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial \sigma_{ij}} + \left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial (J'_2)^{1/2}} + \frac{\tan(3\theta_0)}{\partial (J'_2)^{1/2}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \theta_0} \right] \frac{\partial (J'_2)^{1/2}}{\partial \sigma_{ij}} + \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta_0)} \right) \frac{1}{\partial (J'_2)^{3/2}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \theta_0} \right] \quad (\text{B- 56})$$

La expresión (B- 56) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} = \beta_1 \frac{\partial J_1}{\partial \sigma_{ij}} + \beta_2 \frac{\partial (J'_2)^{1/2}}{\partial \sigma_{ij}} + \beta_3 \frac{\partial J'_3}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{B- 57})$$

Donde

$$\beta_1 = \frac{\partial \bar{f}}{\partial J_1} \quad (\text{B- 58})$$

$$\beta_2 = \frac{\partial \bar{f}}{\partial (J'_2)^{1/2}} + \frac{\tan(3\theta_0)}{\partial (J'_2)^{1/2}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \theta_0} \quad (\text{B- 59})$$

$$\beta_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta_0)} \right) \frac{1}{\partial (J'_2)^{3/2}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \theta_0} \quad (\text{B- 60})$$

En la ecuaciones (B- 58) a (B- 60) los términos $\frac{\partial J_1}{\partial \sigma_{ij}}$, $\frac{\partial (J'_2)^{1/2}}{\partial \sigma_{ij}}$ y $\frac{\partial J'_3}{\partial \sigma_{ij}}$ deben ser resueltos una vez se haya establecido un determinado criterio de cedencia. Los términos asociados a las invariantes de esfuerzos son definidos de la siguiente manera:

$$J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (\text{B- 61})$$

$$J'_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \quad (\text{B- 62})$$

$$J'_3 = \frac{1}{3} \sigma'_{ij} \sigma'_{jk} \sigma'_{ki} = \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3 \quad (\text{B- 63})$$

Donde

$$\sigma'_i = \sigma_i - \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (\text{B- 64})$$

Es de tener en cuenta que en la ecuación (B- 57) las constantes β_1 , β_2 y β_3 definen el criterio de cedencia que se desee tomar, dada una función de cedencia \bar{f} en particular propuesta por algún autor [45].

A continuación se presentara el desarrollo para el criterio de cedencia de Drucker-Prager, en donde la función de cedencia está dada por:

$$\bar{f} = \eta J_1 + (J'_2)^{1/2} - \sigma_o \quad (\text{B- 65})$$

En la ecuación (B- 65) aparecen las constantes η y σ_o , que están definidas como:

$$\sigma_o = \frac{6 \cos \phi c}{\sqrt{3}(3 - \text{sen} \phi)} \quad (\text{B- 66})$$

$$\eta = \frac{2 \text{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 - \text{sen} \phi)} \quad (\text{B- 67})$$

Es importante mencionar que las constantes definidas anteriormente dependen de la cohesión c y del ángulo de fricción interna del material ϕ .

Empleando la definición de las invariantes de esfuerzos en la ecuación (B- 65) se tiene que:

$$\eta(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{\sqrt{6}}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_o \quad (\text{B- 68})$$

La ecuación (B- 68) representa la superficie de cedencia en el espacio de los esfuerzos principales.

De acuerdo con las ecuaciones (B- 58), (B- 59) y (B- 60), los coeficientes del vector de flujo para el criterio de cedencia de Drucker-Prager, están dados por:

$$\beta_1 = \frac{\partial \bar{f}}{\partial J_1} = \eta \quad (\text{B- 69})$$

$$\beta_2 = \frac{\partial \bar{f}}{\partial (J'_2)^{1/2}} + \frac{\tan(3\theta_0)}{\partial (J'_2)^{1/2}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \theta_0} = 1 \quad (\text{B- 70})$$

$$\beta_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta_0)} \right) \frac{1}{\partial (J'_2)^{3/2}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \theta_0} = 0 \quad (\text{B- 71})$$

De esta manera la ecuación (B- 57) queda expresada de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} = \eta \frac{\partial J_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial (J'_2)^{1/2}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{B- 72})$$

Los términos $\frac{\partial J_1}{\partial \sigma_{ij}}$ y $\frac{\partial (J'_2)^{1/2}}{\partial \sigma_{ij}}$ deben ser determinados en la ecuación (B- 72).

De acuerdo a la definición del primer invariante de los esfuerzos, el término $\frac{\partial J_1}{\partial \sigma_{ij}}$ esta dado por:

$$\frac{\partial J_1}{\partial \sigma_{ij}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J_1}{\partial \sigma_{11}} \\ \frac{\partial J_1}{\partial \sigma_{22}} \\ \frac{\partial J_1}{\partial \sigma_{33}} \\ \frac{\partial J_1}{\partial \sigma_{12}} \\ \frac{\partial J_1}{\partial \sigma_{23}} \\ \frac{\partial J_1}{\partial \sigma_{31}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B- 73})$$

De acuerdo a la definición la segunda invariante de esfuerzos deviatoricos puede ser expresada así:

$$\frac{\partial (J'_2)^{1/2}}{\partial \sigma_{ij}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial (J'_2)^{1/2}}{\partial \sigma_{11}} \\ \frac{\partial (J'_2)^{1/2}}{\partial \sigma_{22}} \\ \frac{\partial (J'_2)^{1/2}}{\partial \sigma_{33}} \\ \frac{\partial (J'_2)^{1/2}}{\partial \sigma_{12}} \\ \frac{\partial (J'_2)^{1/2}}{\partial \sigma_{23}} \\ \frac{\partial (J'_2)^{1/2}}{\partial \sigma_{31}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \frac{[(\sigma_{11} - \sigma_{22}) - (\sigma_{33} - \sigma_{11})]}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{1}{6} \frac{[(\sigma_{22} - \sigma_{22}) - (\sigma_{11} - \sigma_{22})]}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{1}{6} \frac{[(\sigma_{33} - \sigma_{11}) - (\sigma_{22} - \sigma_{33})]}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{1}{6} \frac{\sigma_{12}}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{1}{6} \frac{\sigma_{23}}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{1}{6} \frac{\sigma_{31}}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \end{bmatrix} \quad (\text{B- 74})$$

Llevando las ecuaciones (B- 73) y (B- 74) a la ecuación (B- 72) se tiene:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} = \begin{bmatrix} \eta \\ \eta \\ \eta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \frac{[(\sigma_{11} - \sigma_{22}) - (\sigma_{33} - \sigma_{11})]}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{1}{6} \frac{[(\sigma_{22} - \sigma_{22}) - (\sigma_{11} - \sigma_{22})]}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{1}{6} \frac{[(\sigma_{33} - \sigma_{11}) - (\sigma_{22} - \sigma_{33})]}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{1}{6} \frac{\sigma_{12}}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{1}{6} \frac{\sigma_{23}}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{1}{6} \frac{\sigma_{31}}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \\ \frac{1}{6} \frac{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}}{\left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right\}^{1/2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} \quad (\text{B-75})$$

Con el objetivo de hallar la matriz correspondiente al estado elasto-plástico $[D_{ep}]$, es necesario obtener el término W_{ij}^T .

$$\text{Recordando que } W_{ij}^T = \frac{\left(\frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \right)^T [D_e]}{s + \left(\frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}} \right)^T [D_e] \frac{d\bar{f}}{d\sigma_{ij}}}$$

Donde $[D_e]$ corresponde a la matriz en estado elástico y está dada por:

$$[D_e] = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \quad (\text{B-76})$$

El termino

$$\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} \right)^T = [a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f] \quad (\text{B-77})$$

Resolviendo para W_{ij}^T se obtiene lo siguiente:

$$W_{ij}^T = \frac{[a(2G + \lambda) + b\lambda + c\lambda; b(2G + \lambda) + a\lambda + c\lambda; c(2G + \lambda) + a\lambda + b\lambda; 2dG; 2eG; 2fG]}{S + a^2(2G + \lambda) + 2a\lambda(b + c) + b^2(2G + \lambda) + 2bc\lambda + c^2(2G + \lambda) + 2d^2G + 2e^2G + 2f^2G} \quad (\text{B- 78})$$

Así, para la matriz elasto-plástica se tiene la expresión:

$$[D_{ep}] = [D_e] - [D_e] \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} W_{ij}^T \quad (\text{B- 79})$$

Sustituyendo la ecuación (B- 76) en la ecuación (B- 79).

$$[D_{ep}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a(2G + \lambda) + b\lambda + c\lambda \\ b(2G + \lambda) + a\lambda + c\lambda \\ c(2G + \lambda) + a\lambda + b\lambda \\ 2dG \\ 2eG \\ 2fG \end{bmatrix} W_{ij}^T \quad (\text{B- 80})$$

Que también puede ser expresada de la siguiente forma:

$$[D_{ep}] = [D_e] - [A] \quad (\text{B- 81})$$

Donde la materia elasto-plástica puede ser expresada así:

$$[D_{ep}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{B- 82})$$

Donde los términos de la matriz [A] son:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{(a(2G + \lambda) + b\lambda + c\lambda)^2}{\psi}; & A_{12} &= \frac{(b(2G + \lambda) + a\lambda + c\lambda)(a(2G + \lambda) + b\lambda + c\lambda)}{\psi}, \\ A_{13} &= \frac{(c(2G + \lambda) + a\lambda + b\lambda)(a(2G + \lambda) + b\lambda + c\lambda)}{\psi}; & A_{14} &= \frac{2dG(a(2G + \lambda) + b\lambda + c\lambda)}{\psi}, \\ A_{15} &= \frac{2dG(a(2G + \lambda) + b\lambda + c\lambda)}{\psi}; & A_{16} &= \frac{2fG(a(2G + \lambda) + b\lambda + c\lambda)}{\psi} \end{aligned} \quad (\text{B- 83})$$

$$\begin{aligned}
A_{21} &= \frac{(b(2G+\lambda)+a\lambda+c\lambda)(a(2G+\lambda)+b\lambda+c\lambda)}{\psi}; A_{22} = \frac{(b(2G+\lambda)+a\lambda+c\lambda)^2}{\psi}; \\
A_{23} &= \frac{(c(2G+\lambda)+a\lambda+b\lambda)(b(2G+\lambda)+a\lambda+c\lambda)}{\psi}; A_{24} = \frac{2dG(b(2G+\lambda)+a\lambda+c\lambda)}{\psi}; A_{25} = \\
&\frac{2dG(b(2G+\lambda)+a\lambda+c\lambda)}{\psi}; A_{26} = \frac{2fG(b(2G+\lambda)+a\lambda+c\lambda)}{\psi}
\end{aligned} \tag{B- 84}$$

$$\begin{aligned}
A_{31} &= \frac{(c(2G+\lambda)+a\lambda+b\lambda)(a(2G+\lambda)+b\lambda+c\lambda)}{\psi}; A_{32} = \frac{(c(2G+\lambda)+a\lambda+b\lambda)(b(2G+\lambda)+a\lambda+c\lambda)}{\psi}; \\
A_{33} &= \frac{(c(2G+\lambda)+a\lambda+b\lambda)^2}{\psi}; A_{34} = \frac{2dG(c(2G+\lambda)+a\lambda+b\lambda)}{\psi}; A_{35} = \frac{2dG(c(2G+\lambda)+a\lambda+b\lambda)}{\psi}; \\
A_{36} &= \frac{2fG(c(2G+\lambda)+a\lambda+b\lambda)}{\psi}
\end{aligned} \tag{B- 85}$$

$$\begin{aligned}
A_{41} &= \frac{2dG(a(2G+\lambda)+b\lambda+c\lambda)}{\psi}; A_{42} = \frac{2dG(b(2G+\lambda)+a\lambda+c\lambda)}{\psi}; A_{43} = \frac{2dG(c(2G+\lambda)+a\lambda+b\lambda)}{\psi}; \\
A_{44} &= \frac{4d^2G^2}{\psi}; A_{45} = \frac{4deG^2}{\psi}; A_{46} = \frac{4dfG^2}{\psi}
\end{aligned} \tag{B- 86}$$

$$\begin{aligned}
A_{51} &= \frac{2eG(a(2G+\lambda)+b\lambda+c\lambda)}{\psi}; A_{52} = \frac{2eG(b(2G+\lambda)+a\lambda+c\lambda)}{\psi}; A_{53} = \frac{2eG(c(2G+\lambda)+a\lambda+b\lambda)}{\psi}; \\
A_{54} &= \frac{4deG^2}{\psi}; A_{55} = \frac{4e^2G^2}{\psi}; A_{56} = \frac{4efG^2}{\psi}
\end{aligned} \tag{B- 87}$$

$$\begin{aligned}
A_{61} &= \frac{2fG(a(2G+\lambda)+b\lambda+c\lambda)}{\psi}; A_{62} = \frac{2fG(b(2G+\lambda)+a\lambda+c\lambda)}{\psi}; A_{63} = \frac{2fG(c(2G+\lambda)+a\lambda+b\lambda)}{\psi}; \\
A_{64} &= \frac{4dfG^2}{\psi}; A_{65} = \frac{4fG^2}{\psi}; A_{66} = \frac{4f^2G^2}{\psi}
\end{aligned} \tag{B- 88}$$

Y ψ esta definida por:

$$\begin{aligned}
\psi &= a^2(2G + \lambda) + a2\lambda(b + c) + b^2(2G + \lambda) + 2bc\lambda + c^2(2G + \lambda) + 2d^2G \\
&\quad + 2e^2G + 2f^2G + S
\end{aligned} \tag{B- 89}$$

Como se puede observar el término ψ esta dado en función del parámetro S conocido como *Hardening*.

La matriz $[A]$ es una matriz simétrica cuyas entradas están expresadas de forma generalizada para cualquier criterio de cedencia que se desee trabajar, en donde habrán unas determinadas expresiones para las entradas de la función de cedencia \bar{f} dadas por a, b, c, d, e y f de acuerdo al criterio de cedencia seleccionado. Estas entradas están dadas en función de los coeficientes del vector de flujo, presentados en las ecuaciones (B- 58) a (B- 60).

De la ecuación (B- 43) se conoce que:

$$d\sigma_{ij} = [D_{ep}]d\varepsilon_{ij} \quad (\text{B- 90})$$

En donde el vector

$$(d\varepsilon_{ij})^T = [d\varepsilon_r, d\varepsilon_\theta, d\varepsilon_z, d\varepsilon_{r\theta}, d\varepsilon_{zr}, d\varepsilon_{\theta z}] \quad (\text{B- 91})$$

Sustituyendo la matriz $[D_{ep}]$ y el vector $(d\varepsilon_{ij})$ en la ecuación (B- 43) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_r \\ d\sigma_\theta \\ d\sigma_z \\ d\sigma_{r\theta} \\ d\sigma_{zr} \\ d\sigma_{\theta r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [(2G + \lambda) - A_{11}]d\varepsilon_r + [\lambda - A_{12}]d\varepsilon_\theta + [\lambda - A_{13}]d\varepsilon_z - A_{14}d\varepsilon_{r\theta} - A_{15}d\varepsilon_{zr} - A_{16}d\varepsilon_{\theta z} \\ [\lambda - A_{21}]d\varepsilon_r + [(2G + \lambda) - A_{22}]d\varepsilon_\theta + [\lambda - A_{23}]d\varepsilon_z - A_{24}d\varepsilon_{r\theta} - A_{25}d\varepsilon_{zr} - A_{26}d\varepsilon_{\theta z} \\ [\lambda - A_{31}]d\varepsilon_r + [\lambda - A_{32}]d\varepsilon_\theta + [(2G + \lambda) - A_{33}]d\varepsilon_z - A_{34}d\varepsilon_{r\theta} - A_{35}d\varepsilon_{zr} - A_{36}d\varepsilon_{\theta z} \\ -A_{41}d\varepsilon_r - A_{42}d\varepsilon_\theta - A_{43}d\varepsilon_{zr} + [2G - A_{44}]d\varepsilon_{r\theta} - A_{45}d\varepsilon_{zr} - A_{46}d\varepsilon_{\theta z} \\ -A_{51}d\varepsilon_r - A_{52}d\varepsilon_\theta - A_{53}d\varepsilon_{zr} - A_{54}d\varepsilon_{r\theta} + [2G - A_{55}]d\varepsilon_{zr} - A_{56}d\varepsilon_{\theta z} \\ -A_{61}d\varepsilon_r - A_{62}d\varepsilon_\theta - A_{63}d\varepsilon_{zr} - A_{64}d\varepsilon_{r\theta} - A_{65}d\varepsilon_{zr} + [2G - A_{66}]d\varepsilon_{\theta z} \end{bmatrix} \quad (\text{B- 92})$$

En un medio poroso, lo que se deforma de la roca es el esqueleto solido de la misma, el cual está siendo sometido a un esfuerzo efectivo, por lo tanto las ecuaciones desarrolladas para solidos son válidas para medios porosos, siempre y cuando se cambie los términos de esfuerzos totales por esfuerzos efectivos siguiendo la definición de este $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \alpha P$.

A continuación se presentan las ecuaciones de esfuerzo-deformación-presión en forma incremental.

En dirección radial.

$$\Delta\sigma_r = [(2G + \lambda) - A_{11}]\Delta\varepsilon_r + [\lambda - A_{12}]\Delta\varepsilon_\theta + [\lambda - A_{13}]\Delta\varepsilon_z - A_{14}\Delta\varepsilon_{r\theta} - A_{15}\Delta\varepsilon_{zr} - A_{16}\Delta\varepsilon_{\theta z} + \Delta(\alpha p) \quad (\text{B- 93})$$

En dirección angular

$$\Delta\sigma_\theta = [\lambda - A_{21}]\Delta\varepsilon_r + [(2G + \lambda) - A_{22}]\Delta\varepsilon_\theta + [\lambda - A_{23}]\Delta\varepsilon_z - A_{24}\Delta\varepsilon_{r\theta} - A_{25}\Delta\varepsilon_{zr} - A_{26}\Delta\varepsilon_{\theta z} + \Delta(\alpha p) \quad (\text{B- 94})$$

En dirección vertical

$$\Delta\sigma_z = [\lambda - A_{31}]\Delta\varepsilon_r + [\lambda - A_{32}]\Delta\varepsilon_\theta + [(2G + \lambda) - A_{33}]\Delta\varepsilon_z - A_{34}\Delta\varepsilon_{r\theta} - A_{35}\Delta\varepsilon_{zr} - A_{36}\Delta\varepsilon_{\theta z} \quad (\text{B-95})$$

En dirección $r\theta$

$$\Delta\sigma_{r\theta} = -A_{41}\Delta\varepsilon_r - A_{42}\Delta\varepsilon_\theta - A_{43}\Delta\varepsilon_{zr} + [2G - A_{44}]\Delta\varepsilon_{r\theta} - A_{45}\Delta\varepsilon_{zr} - A_{46}\Delta\varepsilon_{\theta z} \quad (\text{B-96})$$

En dirección zr

$$\Delta\sigma_{zr} = -A_{51}\Delta\varepsilon_r - A_{52}\Delta\varepsilon_\theta - A_{53}\Delta\varepsilon_{zr} - A_{54}\Delta\varepsilon_{r\theta} + [2G - A_{55}]\Delta\varepsilon_{zr} - A_{56}\Delta\varepsilon_{\theta z} \quad (\text{B-97})$$

En dirección θz

$$\Delta\sigma_{\theta z} = -A_{61}\Delta\varepsilon_r - A_{62}\Delta\varepsilon_\theta - A_{63}\Delta\varepsilon_{zr} - A_{64}\Delta\varepsilon_{r\theta} - A_{65}\Delta\varepsilon_{zr} + [2G - A_{66}]\Delta\varepsilon_{\theta z} \quad (\text{B-98})$$

Esfuerzos incrementales en función de los incrementos en los desplazamientos

En dirección radial

$$\Delta\sigma_r = [(2G + \lambda) - A_{11}]\frac{\partial\Delta u_r}{\partial r} + [\lambda - A_{12}]\left(\frac{1}{r}\left(\Delta u_r + \frac{\partial\Delta u_\theta}{\partial\theta}\right)\right) + [\lambda - A_{13}]\frac{\partial\Delta u_z}{\partial z} - A_{14}\left(\frac{1}{2r}\left(\frac{\partial\Delta u_r}{\partial\theta} - \Delta u_\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial\Delta u_\theta}{\partial r}\right) - A_{15}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta u_z}{\partial r} + \frac{\partial\Delta u_r}{\partial z}\right)\right) - A_{16}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Delta u_z}{\partial\theta} + \frac{\partial\Delta u_\theta}{\partial z}\right)\right) + \Delta(\alpha p) \quad (\text{B-99})$$

En dirección Angular

$$\Delta\sigma_\theta = [\lambda - A_{21}]\frac{\partial\Delta u_r}{\partial r} + [(2G + \lambda) - A_{22}]\left(\frac{1}{r}\left(\Delta u_r + \frac{\partial\Delta u_\theta}{\partial\theta}\right)\right) + [\lambda - A_{23}]\frac{\partial\Delta u_z}{\partial z} - A_{24}\left(\frac{1}{2r}\left(\frac{\partial\Delta u_r}{\partial\theta} - \Delta u_\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial\Delta u_\theta}{\partial r}\right) - A_{25}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta u_z}{\partial r} + \frac{\partial\Delta u_r}{\partial z}\right)\right) - A_{26}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Delta u_z}{\partial\theta} + \frac{\partial\Delta u_\theta}{\partial z}\right)\right) + \Delta(\alpha p) \quad (\text{B-100})$$

En dirección vertical

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_z = & [\lambda - A_{31}] \frac{\partial\Delta u_r}{\partial r} + [\lambda - A_{32}] \left(\frac{1}{r} \left(\Delta u_r + \frac{\partial\Delta u_\theta}{\partial\theta} \right) \right) + [(2G + \lambda) - A_{33}] \frac{\partial\Delta u_z}{\partial z} \\
& - A_{34} \left(\frac{1}{2r} \left(\frac{\partial\Delta u_r}{\partial\theta} - \Delta u_\theta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial\Delta u_\theta}{\partial r} \right) - A_{35} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Delta u_z}{\partial r} + \frac{\partial\Delta u_r}{\partial z} \right) \right) \\
& - A_{36} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\Delta u_z}{\partial\theta} + \frac{\partial\Delta u_\theta}{\partial z} \right) \right)
\end{aligned} \tag{B- 101}$$

En dirección $r\theta$

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_{r\theta} = & -A_{41} \frac{\partial\Delta u_r}{\partial r} - A_{42} \left(\frac{1}{r} \left(\Delta u_r + \frac{\partial\Delta u_\theta}{\partial\theta} \right) \right) - A_{43} \frac{\partial\Delta u_z}{\partial z} \\
& + [2G - A_{44}] \left(\frac{1}{2r} \left(\frac{\partial\Delta u_r}{\partial\theta} - \Delta u_\theta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial\Delta u_\theta}{\partial r} \right) \\
& - A_{45} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Delta u_z}{\partial r} + \frac{\partial\Delta u_r}{\partial z} \right) \right) - A_{46} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\Delta u_z}{\partial\theta} + \frac{\partial\Delta u_\theta}{\partial z} \right) \right)
\end{aligned} \tag{B- 102}$$

En dirección zr

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_{zr} = & -A_{51} \frac{\partial\Delta u_r}{\partial r} - A_{52} \left(\frac{1}{r} \left(\Delta u_r + \frac{\partial\Delta u_\theta}{\partial\theta} \right) \right) - A_{53} \frac{\partial\Delta u_z}{\partial z} \\
& - A_{54} \left(\frac{1}{2r} \left(\frac{\partial\Delta u_r}{\partial\theta} - \Delta u_\theta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial\Delta u_\theta}{\partial r} \right) \\
& + [2G - A_{55}] \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Delta u_z}{\partial r} + \frac{\partial\Delta u_r}{\partial z} \right) \right) - A_{56} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\Delta u_z}{\partial\theta} + \frac{\partial\Delta u_\theta}{\partial z} \right) \right)
\end{aligned} \tag{B- 103}$$

En dirección θz

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_{\theta z} = & -A_{61} \frac{\partial\Delta u_r}{\partial r} - A_{62} \left(\frac{1}{r} \left(\Delta u_r + \frac{\partial\Delta u_\theta}{\partial\theta} \right) \right) - A_{63} \frac{\partial\Delta u_z}{\partial z} \\
& - A_{64} \left(\frac{1}{2r} \left(\frac{\partial\Delta u_r}{\partial\theta} - \Delta u_\theta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial\Delta u_\theta}{\partial r} \right) - A_{65} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Delta u_z}{\partial r} + \frac{\partial\Delta u_r}{\partial z} \right) \right) \\
& + [2G - A_{66}] \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\Delta u_z}{\partial\theta} + \frac{\partial\Delta u_\theta}{\partial z} \right) \right)
\end{aligned} \tag{B- 104}$$

Con las ecuaciones de equilibrio planteadas en las ecuaciones (B- 1), (B- 2) y (B- 3) y tomando en cuenta la definición de cada esfuerzo incremental en cada una de las direcciones se puede obtener la ecuación de equilibrio para cada dirección de esfuerzos.

En la ecuación (B- 1) el término $\frac{\Delta\sigma_r - \Delta\sigma_\theta}{r}$ esta dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\sigma_r - \Delta\sigma_\theta}{r} = \frac{1}{r} & \left[[(2G + \lambda) - A_{11}] - [\lambda - A_{21}] \frac{\partial \Delta u_r}{\partial r} + [\lambda - A_{12}] \right. \\ & - [(2G + \lambda) - A_{22}] \left(\frac{1}{r} \left(\Delta u_r + \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) \right) + [\lambda - A_{13}] \\ & - [\lambda - A_{23}] \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} - (A_{14} - A_{24}) \left(\frac{1}{2r} \left(\frac{\partial \Delta u_r}{\partial \theta} - \Delta u_\theta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial r} \right) \\ & - (A_{15} - A_{25}) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} + \frac{\partial \Delta u_r}{\partial z} \right) \right) \\ & \left. - (A_{16} - A_{26}) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial z} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B- 105})$$

C. Anexo 3: Stencils Ecuaciones de Geomecánica.

En este anexo se presentan los stencils asociados a cada ecuación de equilibrio, como se ha mencionado a lo largo del texto, se desarrolla una discretización en diferencias finitas en nodo centrado. Debido a la extensión del procedimiento de discretización en este texto solo se incluyen los resultados de este.

Stencils de la ecuación de Equilibrio Radial.

$$Bu_{r_{i,j,k}} = -\frac{F_k \gamma_{15_{i,j,k}}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_k \gamma_{25_{i,j,k}}}{r_{i,j,k}} - \frac{F_j \gamma_{16_{i,j,k}}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_j \gamma_{26_{i,j,k}}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_j F_k \gamma_{45_{i,j+1,k}}}{r_i} - \frac{F_j F_k \gamma_{45_{i,j-1,k}}}{r_i} + \frac{F_z \gamma_{52_{i,j,k-1}}}{r_i} - \frac{F_k \gamma_{55_{i,j,k-1}}}{r_i} \quad (\text{C-1})$$

$$Su_{r_{i,j,k}} = \frac{\gamma_{14_{i,j,k}} F_j}{r_i^2} + \frac{\gamma_{24_{i,j,k}} F_j}{r_i^2} - \frac{F_j \gamma_{42_{i,j-1,k}}}{r_i^2} + \frac{C_{j-1} \gamma_{44_{i,j-\frac{1}{2},k}}}{r_i^2} + \frac{F_k F_j \gamma_{54_{i,j,k+1}}}{r_i} - \frac{F_k F_j \gamma_{54_{i,j,k-1}}}{r_i} \quad (\text{C-2})$$

$$Wu_{r_{i,j,k}} = C_{i-1} \gamma_{11_{i-\frac{1}{2},j,k}} - \frac{F_i \gamma_{12_{i-1,j,k}}}{r_{i-1}} - \frac{F_i \gamma_{11_{i,j,k}}}{r_i} - \frac{F_i \gamma_{21_{i,j,k}}}{r_i} \quad (\text{C-3})$$

$$Eu_{r_{i,j,k}} = C_{i+1} \gamma_{11_{i+\frac{1}{2},j,k}} + \frac{F_i \gamma_{12_{i+1,j,k}}}{r_{i+1}} + \frac{F_i \gamma_{11_{i,j,k}}}{r_i} - \frac{F_i \gamma_{21_{i,j,k}}}{r_i} \quad (\text{C-4})$$

$$Nu_{r_{i,j,k}} = -\frac{\gamma_{14_{i,j,k}} F_j}{r_i^2} + \frac{\gamma_{24_{i,j,k}} F_j}{r_i^2} - \frac{F_j \gamma_{42_{i,j+1,k}}}{r_i^2} + \frac{C_{j+1} \gamma_{44_{i,j+\frac{1}{2},k}}}{r_i^2} - \frac{F_k F_j \gamma_{54_{i,j,k+1}}}{r_i} + \frac{F_k F_j \gamma_{54_{i,j,k-1}}}{r_i} \quad (\text{C-5})$$

$$Tu_{r_{i,j,k}} = -\frac{F_k \gamma_{15_{i,j,k}}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_k \gamma_{25_{i,j,k}}}{r_{i,j,k}} - \frac{F_j \gamma_{16_{i,j,k}}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_j \gamma_{26_{i,j,k}}}{r_{i,j,k}} - \frac{F_j F_k \gamma_{45_{i,j+1,k}}}{r_i} + \frac{F_j F_k \gamma_{45_{i,j-1,k}}}{r_i} - \frac{F_z \gamma_{52_{i,j,k+1}}}{r_i} + \frac{F_k \gamma_{55_{i,j,k+1}}}{r_i} \quad (\text{C-6})$$

$$Cu_{r_{i,j,k}} = -\left[Eu_{r_{i,j,k}} + Wu_{r_{i,j,k}} + Nu_{r_{i,j,k}} + Su_{r_{i,j,k}} + Tu_{r_{i,j,k}} + Bu_{r_{i,j,k}} - \left(C_{i+1} \gamma_{11_{i+\frac{1}{2},j,k}} + C_{i-1} \gamma_{11_{i-\frac{1}{2},j,k}} \right) + \frac{\gamma_{12_{i,j,k}}}{r_i^2} - \frac{1}{r_i^2} \left(C_{j+1} \gamma_{44_{i,j+\frac{1}{2},k}} + C_{j-1} \gamma_{44_{i,j-\frac{1}{2},k}} \right) \right] \quad (\text{C-7})$$

$$\begin{aligned}
Fu_{r_{i,j,k}} = & -F_i \left(\sigma_{rr_{i+1,j,k}}^o - \sigma_{rr_{i-1,j,k}}^o \right) - \frac{\sigma_{rr_{i,j,k}}^o - \sigma_{\theta\theta_{i,j,k}}^o}{r_i} - \frac{F_j}{r_i} \left(\sigma_{\theta r_{i,j+1,k}}^o - \sigma_{\theta r_{i,j-1,k}}^o \right) \\
& - F_k \left(\sigma_{zr_{i,j,k+1}}^o - \sigma_{zr_{i,j,k-1}}^o \right) \\
& + \left(F_i F_j \left[\frac{\gamma_{12_{i+1,j,k}}}{r_{i+1}} \left(\Delta u_{\theta_{i+1,j+1,k}} - \Delta u_{\theta_{i+1,j-1,k}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\gamma_{12_{i-1,j,k}}}{r_{i-1}} \left(\Delta u_{\theta_{i-1,j+1,k}} - \Delta u_{\theta_{i-1,j-1,k}} \right) \right] \right. \\
& + F_i F_k \left[\gamma_{13_{i+1,j,k}} \left(\Delta u_{z_{i+1,j,k+1}} - \Delta u_{z_{i+1,j,k-1}} \right) \right. \\
& \left. - \gamma_{13_{i-1,j,k}} \left(\Delta u_{z_{i-1,j,k+1}} - \Delta u_{z_{i-1,j,k-1}} \right) \right] \\
& - \left(\frac{F_i F_j}{r_i} \left[\gamma_{14_{i+1,j,k}} \left(\Delta u_{r_{i+1,j+1,k}} - \Delta u_{r_{i+1,j-1,k}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \gamma_{14_{i-1,j,k}} \left(\Delta u_{r_{i-1,j+1,k}} - \Delta u_{r_{i-1,j-1,k}} \right) \right] - C_{i+1} \gamma_{14_{i+2,j,k}} \Delta u_{\theta_{i+1,j,k}} \right. \\
& \left. - \left(C_{i+1} \gamma_{14_{i+2,j,k}} + C_{i-1} \gamma_{14_{i-2,j,k}} \right) \Delta u_{\theta_{i,j,k}} + C_{i-1} \gamma_{14_{i-2,j,k}} \Delta u_{\theta_{i-1,j,k}} + F_i \gamma_{14_{i,j,k}} \Delta u_{\theta_{i+1,j,k}} \right. \\
& \left. - F_i \gamma_{14_{i,j,k}} \Delta u_{\theta_{i-1,j,k}} \right) \\
& - \left(F_i F_k \left[\gamma_{15_{i+1,j,k}} \left(\Delta u_{r_{i+1,j,k+1}} - \Delta u_{r_{i+1,j,k-1}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \gamma_{15_{i-1,j,k}} \left(\Delta u_{r_{i-1,j,k+1}} - \Delta u_{r_{i-1,j,k-1}} \right) \right] - C_{i+1} \gamma_{15_{i+2,j,k}} \Delta u_{z_{i+1,j,k}} \right. \\
& \left. - \left(C_{i+1} \gamma_{15_{i+2,j,k}} + C_{i-1} \gamma_{15_{i-2,j,k}} \right) \Delta u_{z_{i,j,k}} + C_{i-1} \gamma_{15_{i-2,j,k}} \Delta u_{z_{i-1,j,k}} \right) \\
& - \left(F_i F_k \left[\gamma_{16_{i+1,j,k}} \left(\Delta u_{\theta_{i,j,k+1}} + \Delta u_{\theta_{i+1,j,k+1}} - \Delta u_{\theta_{i,j,k-1}} - \Delta u_{\theta_{i+1,j,k-1}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \gamma_{16_{i-1,j,k}} \left(\Delta u_{\theta_{i-1,j,k+1}} + \Delta u_{\theta_{i,j,k+1}} - \Delta u_{\theta_{i-1,j,k-1}} - \Delta u_{\theta_{i,j,k-1}} \right) \right] \right. \\
& \left. - \frac{F_i F_k}{r_i} \left[\gamma_{16_{i+1,j,k}} \left(\Delta u_{z_{i,j+1,k}} + \Delta u_{z_{i+1,j+1,k}} - \Delta u_{z_{i,j-1,k}} - \Delta u_{z_{i+1,j-1,k}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \gamma_{16_{i-1,j,k}} \left(\Delta u_{z_{i-1,j+1,k}} + \Delta u_{z_{i,j+1,k}} - \Delta u_{z_{i-1,j-1,k}} - \Delta u_{z_{i,j-1,k}} \right) \right] \right) \\
& + \frac{\gamma_{12_{i,j,k}} F_j}{r_i^2} \left(\Delta u_{\theta_{i,j+1,k}} - \Delta u_{\theta_{i,j-1,k}} \right) - \frac{\gamma_{22_{i,j,k}}}{r_i^2} - \frac{\gamma_{22_{i,j,k}} F_j}{r_i^2} \left(\Delta u_{\theta_{i,j+1,k}} - \Delta u_{\theta_{i,j-1,k}} \right) \\
& + \left(\frac{\gamma_{13_{i,j,k}} F_k}{r_i} \left(\Delta u_{z_{i,j,k+1}} - \Delta u_{z_{i,j,k-1}} \right) - \frac{\gamma_{23_{i,j,k}} F_k}{r_i} \left(\Delta u_{z_{i,j,k+1}} - \Delta u_{z_{i,j,k-1}} \right) \right) \\
& + \frac{\gamma_{14_{i,j,k}}}{r_i^2} \Delta u_{\theta_{i,j,k}} - \frac{\gamma_{24_{i,j,k}}}{r_i^2} \Delta u_{\theta_{i,j,k}} + \frac{F_i}{2r_i} \Delta u_{\theta_{i+1,j,k}} - \frac{F_i}{2r_i} \Delta u_{\theta_{i-1,j,k}} - \frac{F_i \gamma_{15_{i,j,k}}}{r_i} \Delta u_{z_{i+1,j,k}} \\
& + \frac{F_i \gamma_{15_{i,j,k}}}{r_i} \Delta u_{z_{i-1,j,k}} + \frac{F_i \gamma_{25_{i,j,k}}}{r_i} \Delta u_{z_{i+1,j,k}} + \frac{F_i \gamma_{25_{i,j,k}}}{r_i} \Delta u_{z_{i-1,j,k}}
\end{aligned} \tag{C-8}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{F_i F_j}{r_i} \left[\gamma_{41, i, j+1, k} \left(\Delta u_{r_{i+1, j+1, k}} - \Delta u_{r_{i-1, j+1, k}} \right) - \gamma_{41, i, j-1, k} \left(\Delta u_{r_{i+1, j-1, k}} - \Delta u_{r_{i-1, j-1, k}} \right) \right] \right) \\
& - \left(\frac{C_{j+1} \gamma_{42, i, j+2, k}}{r_i^2} \Delta u_{\theta_{i, j+1, k}} - \frac{1}{r_i^2} \left(C_{j+1} \gamma_{42, i, j+2, k} + C_{j-1} \gamma_{42, i, j-2, k} \right) \Delta u_{\theta_{i, j, k}} \right. \\
& \left. + \frac{C_{j-1} \gamma_{42, i, j-2, k}}{r_i^2} \Delta u_{\theta_{i, j-1, k}} \right) \\
& - \left(\frac{F_j F_k}{r_i} \left[\gamma_{43, i, j+1, k} \left(\Delta u_{z_{i, j+1, k+1}} - \Delta u_{z_{i, j+1, k-1}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \gamma_{43, i, j-1, k} \left(\Delta u_{z_{i, j-1, k+1}} - \Delta u_{z_{i, j-1, k-1}} \right) \right] \right) \\
& + \frac{F_i F_j}{r_i} \left[\gamma_{44, i, j+1, k} \left(\Delta u_{\theta_{i+1, j+1, k}} - \Delta u_{\theta_{i-1, j+1, k}} \right) - \gamma_{44, i, j-1, k} \left(\Delta u_{\theta_{i+1, j-1, k}} - \Delta u_{\theta_{i-1, j-1, k}} \right) \right] \\
& - \frac{F_j \gamma_{44, i, j, k}}{r_i^2} \left(\Delta u_{\theta_{i, j+1, k}} - \Delta u_{\theta_{i, j-1, k}} \right) \\
& - \frac{F_j F_i}{r_i} \left[\gamma_{45, i, j+1, k} \left(\Delta u_{z_{i+1, j, k}} + \Delta u_{z_{i+1, j+1, k}} - \Delta u_{z_{i-1, j, k}} - \Delta u_{z_{i-1, j+1, k}} \right) \right. \\
& \left. - \gamma_{45, i, j-1, k} \left(\Delta u_{z_{i+1, j-1, k}} + \Delta u_{z_{i+1, j, k}} - \Delta u_{z_{i-1, j-1, k}} - \Delta u_{z_{i-1, j, k}} \right) \right] \\
& - \frac{F_j F_k}{r_i} \left[\gamma_{45, i, j+1, k} \left(\Delta u_{r_{i, j+1, k+1}} - \Delta u_{r_{i, j+1, k-1}} \right) - \gamma_{45, i, j-1, k} \left(\Delta u_{r_{i, j-1, k+1}} - \Delta u_{r_{i, j-1, k-1}} \right) \right] \\
& + \left(\frac{F_j F_k}{r_i} \left[\gamma_{46, i, j+1, k} \left(\Delta u_{\theta_{i, j+1, k+1}} - \Delta u_{\theta_{i, j+1, k-1}} \right) - \gamma_{46, i, j-1, k} \left(\Delta u_{\theta_{i, j-1, k+1}} - \Delta u_{\theta_{i, j-1, k-1}} \right) \right] \right) \\
& + \frac{C_{j+1} \gamma_{46, i, j+2, k}}{r_i} \Delta u_{z_{i, j+1, k}} - \frac{1}{r_i} \left(C_{j+1} \gamma_{46, i, j+2, k} + C_{j-1} \gamma_{46, i, j-2, k} \right) \Delta u_{z_{i, j, k}} \\
& \left. + \frac{C_{j-1} \gamma_{46, i, j-2, k}}{r_i} \Delta u_{z_{i, j-1, k}} \right) + \\
& \left(-F_i F_k \left[\gamma_{51, i, j, k+1} \left(\Delta u_{r_{i+1, j, k+1}} - \Delta u_{r_{i-1, j, k+1}} \right) - \gamma_{51, i, j, k-1} \left(\Delta u_{r_{i+1, j, k-1}} - \Delta u_{r_{i-1, j, k-1}} \right) \right] \right) \\
& - \left(\frac{F_j F_k}{r_i} \left[\gamma_{52, i, j, k+1} \left(\Delta u_{\theta_{i, j+1, k+1}} - \Delta u_{\theta_{i, j-1, k+1}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \gamma_{52, i, j, k-1} \left(\Delta u_{\theta_{i, j+1, k-1}} - \Delta u_{\theta_{i, j-1, k-1}} \right) \right] \right) \\
& - \left(C_{k+1} \gamma_{53, i, j, k+2} \Delta u_{z_{i, j, k+1}} - \left(C_{k+1} \gamma_{53, i, j, k+2} + C_{k-1} \gamma_{53, i, j, k-2} \right) \Delta u_{z_{i, j, k}} \right. \\
& \left. + C_{k-1} \gamma_{53, i, j, k-2} \Delta u_{z_{i, j, k-1}} \right) \\
& - \left(\frac{F_k F_j}{r_i} \left[\gamma_{54, i, j, k+1} \left(\Delta u_{r_{i, j+1, k+1}} - \Delta u_{r_{i, j-1, k+1}} \right) - \gamma_{54, i, j, k-1} \left(\Delta u_{r_{i, j+1, k-1}} - \Delta u_{r_{i, j-1, k-1}} \right) \right] \right) \\
& + F_k F_i \left[\gamma_{54, i, j, k+1} \left(\Delta u_{\theta_{i+1, j, k}} + \Delta u_{\theta_{i+1, j, k+1}} - \Delta u_{\theta_{i-1, j, k}} - \Delta u_{\theta_{i-1, j, k+1}} \right) \right. \\
& \left. - \gamma_{54, i, j, k-1} \left(\Delta u_{\theta_{i+1, j, k+1}} + \Delta u_{\theta_{i+1, j, k}} - \Delta u_{\theta_{i-1, j, k-1}} - \Delta u_{\theta_{i-1, j, k}} \right) \right] \\
& - \frac{F_k \gamma_{54, i, j, k}}{r_i} \left(\Delta u_{\theta_{i, j, k+1}} - \Delta u_{\theta_{i, j, k-1}} \right) \\
& + F_i F_k \left[\gamma_{55, i, j, k+1} \left(\Delta u_{z_{i+1, j, k+1}} - \Delta u_{z_{i-1, j, k+1}} \right) - \gamma_{55, i, j, k-1} \left(\Delta u_{z_{i+1, j, k-1}} - \Delta u_{z_{i-1, j, k-1}} \right) \right] \\
& - \left(C_{k+1} \gamma_{56, i, j, k+2} \Delta u_{\theta_{i, j, k+1}} - \left(C_{k+1} \gamma_{56, i, j, k+2} + C_{k-1} \gamma_{56, i, j, k-2} \right) \Delta u_{\theta_{i, j, k}} \right. \\
& \left. + C_{k-1} \gamma_{56, i, j, k-2} \Delta u_{\theta_{i, j, k-1}} \right) \\
& + \frac{F_j F_k}{r_i} \left[\gamma_{56, i, j, k+1} \left(\Delta u_{z_{i, j+1, k+1}} - \Delta u_{z_{i, j-1, k+1}} \right) - \gamma_{56, i, j, k-1} \left(\Delta u_{z_{i, j+1, k-1}} - \Delta u_{z_{i, j-1, k-1}} \right) \right]
\end{aligned}$$

Stencils de la ecuación de Equilibrio Tangencial.

$$B\mathbf{u}_{\theta i,j,k} = F_i F_k \gamma_{46i+1,j,k} - F_i F_k \gamma_{46i-1,j,k} - \frac{F_k \gamma_{64i,j,k}}{r_i} + C_{k-1} \gamma_{66i,j,k} - \frac{1}{2} \quad (\text{C-9})$$

$$S\mathbf{u}_{\theta i,j,k} = \frac{F_j \gamma_{420i,j,k}}{r_i^2} + \frac{F_k \gamma_{460i,j,k}}{r_{i,j,k}} + \frac{C_{j-1} \gamma_{22i,j-\frac{1}{2},k}}{r_i^2} - \frac{F_j \gamma_{24i,j,k}}{r_i^2} \quad (\text{C-10})$$

$$W\mathbf{u}_{\theta i,j,k} = C_{i-1} \gamma_{44i-\frac{1}{2},j,k} + F_i \gamma_{44i,j,k} - \frac{F_i \gamma_{440i,j,k}}{r_i} - F_k F_i \gamma_{64i,j,k+1} + F_k F_i \gamma_{64i,j,k-1} \quad (\text{C-11})$$

$$C\mathbf{u}_{\theta i,j,k} = - \left(C_{i+1} \gamma_{44i+\frac{1}{2},j,k} + C_{i-1} \gamma_{44i-\frac{1}{2},j,k} \right) - \frac{\gamma_{440i,j,k}}{r_i^2} - \frac{1}{r_i^2} \left(C_{j+1} \gamma_{22i,j+\frac{1}{2},k} + C_{j-1} \gamma_{22i,j-\frac{1}{2},k} \right) - \left(C_{k+1} \gamma_{66i,j,k+\frac{1}{2}} + C_{k-1} \gamma_{66i,j,k-\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{C-12})$$

$$E\mathbf{u}_{\theta i,j,k} = C_{i+1} \gamma_{44i+\frac{1}{2},j,k} - F_i \gamma_{44i,j,k} + \frac{F_i \gamma_{440i,j,k}}{r_i} - F_k F_i \gamma_{64i,j,k+1} + F_k F_i \gamma_{64i,j,k-1} \quad (\text{C-13})$$

$$N\mathbf{u}_{\theta i,j,k} = - \frac{F_j \gamma_{420i,j,k}}{r_i^2} - \frac{F_k \gamma_{460i,j,k}}{r_{i,j,k}} + \frac{C_{j+1} \gamma_{22i,j+\frac{1}{2},k}}{r_i^2} + \frac{F_j \gamma_{24i,j,k}}{r_i^2} \quad (\text{C-14})$$

$$T\mathbf{u}_{\theta i,j,k} = -F_i F_k \gamma_{46i+1,j,k} + F_i F_k \gamma_{46i-1,j,k} + \frac{F_k \gamma_{64i,j,k}}{r_i} + C_{k+1} \gamma_{66i,j,k+\frac{1}{2}} \quad (\text{C-15})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}u_{\theta i,j,k} = & \frac{2\sigma_{r\theta}^o{}_{i,j,k}}{r_i} + F_i \left(\sigma_{r\theta}^o{}_{i+1,j,k} - \sigma_{r\theta}^o{}_{i-1,j,k} \right) + \frac{F_j}{r_i} \left(\sigma_{\theta\theta}^o{}_{i,j+1,k} - \sigma_{\theta\theta}^o{}_{i,j-1,k} \right) \\
& + F_k \left(\sigma_{z\theta}^o{}_{i,j,k+1} - \sigma_{z\theta}^o{}_{i,j,k-1} \right) \\
& - \left(C_{i+1} \gamma_{41}{}_{i+\frac{1}{2},j,k} \Delta u_{r_{i+1},j,k} - \left(C_{i+1} \gamma_{41}{}_{i+\frac{1}{2},j,k} + C_{i-1} \gamma_{41}{}_{i-\frac{1}{2},j,k} \right) \Delta u_{r_{i,j,k}} \right. \\
& \left. + C_{i-1} \gamma_{41}{}_{i-\frac{1}{2},j,k} \Delta u_{r_{i-1},j,k} \right) \\
& - \left(F_i F_j \left[\frac{\gamma_{42}{}_{i+1,j,k}}{r_{i+1}} \left(\Delta u_{\theta_{i+1,j+1,k}} - \Delta u_{\theta_{i+1,j-1,k}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\gamma_{42}{}_{i-1,j,k}}{r_{i-1}} \left(\Delta u_{\theta_{i-1,j+1,k}} - \Delta u_{\theta_{i-1,j-1,k}} \right) \right] + \frac{F_i \gamma_{42}{}_{i+1,j,k}}{r_{i+1}} \Delta u_{r_{i+1},j,k} \right. \\
& \left. - \frac{F_i \gamma_{42}{}_{i-1,j,k}}{r_{i-1}} \Delta u_{r_{i-1},j,k} \right) \\
& - \left(F_i F_k \left[\gamma_{43}{}_{i+1,j,k} \left(\Delta u_{z_{i+1,j,k+1}} - \Delta u_{z_{i+1,j,k-1}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \gamma_{43}{}_{i-1,j,k} \left(\Delta u_{z_{i-1,j,k+1}} - \Delta u_{z_{i-1,j,k-1}} \right) \right] \right) \\
& + \left(\left(\frac{F_i F_j}{r_i} \left[\gamma_{44}{}_{i+1,j,k} \left(\Delta u_{r_{i+1,j+1,k}} - \Delta u_{r_{i+1,j-1,k}} \right) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \gamma_{44}{}_{i-1,j,k} \left(\Delta u_{r_{i-1,j+1,k}} - \Delta u_{r_{i-1,j-1,k}} \right) \right] \right) \right) \\
& - \left(F_i F_k \left[\gamma_{45}{}_{i+1,j,k} \left(\Delta u_{r_{i+1,j,k+1}} - \Delta u_{r_{i+1,j,k-1}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \gamma_{45}{}_{i-1,j,k} \left(\Delta u_{r_{i-1,j,k+1}} - \Delta u_{r_{i-1,j,k-1}} \right) \right] + C_{i+1} \gamma_{45}{}_{i+\frac{1}{2},j,k} \Delta u_{z_{i+1,j,k}} \right. \\
& \left. - \left(C_{i+1} \gamma_{45}{}_{i+\frac{1}{2},j,k} + C_{i-1} \gamma_{45}{}_{i-\frac{1}{2},j,k} \right) \Delta u_{z_{i,j,k}} + C_{i-1} \gamma_{45}{}_{i-\frac{1}{2},j,k} \Delta u_{z_{i-1,j,k}} \right) \\
& - \left(F_i F_k \left[\gamma_{46}{}_{i+1,j,k} \left(\Delta u_{\theta_{i+1,j,k+1}} - \Delta u_{\theta_{i+1,j,k-1}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \gamma_{46}{}_{i-1,j,k} \left(\Delta u_{\theta_{i-1,j,k+1}} - \Delta u_{\theta_{i-1,j,k-1}} \right) \right] \right) \\
& + \frac{F_i F_k}{r_i} \left[\gamma_{46}{}_{i+1,j,k} \left(\Delta u_{z_{i,j+1,k}} + \Delta u_{z_{i+1,j+1,k}} - \Delta u_{z_{i,j-1,k}} - \Delta u_{z_{i+1,j-1,k}} \right) \right. \\
& \left. - \gamma_{46}{}_{i-1,j,k} \left(\Delta u_{z_{i-1,j+1,k}} + \Delta u_{z_{i,j+1,k}} - \Delta u_{z_{i-1,j-1,k}} - \Delta u_{z_{i,j-1,k}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{C-16}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\mathbf{F}_i \mathbf{F}_k \left[\gamma_{61_{i,j,k+1}} \left(\Delta \mathbf{u}_{r_{i+1,j,k+1}} - \Delta \mathbf{u}_{r_{i-1,j,k+1}} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \gamma_{61_{i,j,k-1}} \left(\Delta \mathbf{u}_{r_{i+1,j,k-1}} - \Delta \mathbf{u}_{r_{i-1,j,k-1}} \right) \right] \right) \\
& - \left(\frac{\mathbf{F}_j \mathbf{F}_k}{\mathbf{r}_i} \left[\gamma_{62_{i,j,k+1}} \left(\Delta \mathbf{u}_{\theta_{i,j+1,k+1}} - \Delta \mathbf{u}_{\theta_{i,j-1,k+1}} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \gamma_{62_{i,j,k-1}} \left(\Delta \mathbf{u}_{\theta_{i,j+1,k-1}} - \Delta \mathbf{u}_{\theta_{i,j-1,k-1}} \right) \right] \right) \\
& + \frac{\mathbf{F}_z}{\mathbf{r}_i} \left(\gamma_{62_{i,j,k+1}} \Delta \mathbf{u}_{r_{i,j,k+1}} - \gamma_{62_{i,j,k-1}} \Delta \mathbf{u}_{r_{i,j,k-1}} \right) \\
& - \left(\mathbf{C}_{k+1} \gamma_{63_{i,j,k+\frac{1}{2}}} \Delta \mathbf{u}_{z_{i,j,k+1}} \right. \\
& \quad \left. - \left(\mathbf{C}_{k+1} \gamma_{63_{i,j,k+\frac{1}{2}}} + \mathbf{C}_{k-1} \gamma_{63_{i,j,k-\frac{1}{2}}} \right) \Delta \mathbf{u}_{z_{i,j,k}} \right. \\
& \quad \left. + \mathbf{C}_{k-1} \gamma_{63_{i,j,k-\frac{1}{2}}} \Delta \mathbf{u}_{z_{i,j,k-1}} \right) \\
& - \left(\frac{\mathbf{F}_k \mathbf{F}_j}{\mathbf{r}_i} \left[\gamma_{64_{i,j,k+1}} \left(\left(\Delta \mathbf{u}_{r_{i,j+1,k}} + \Delta \mathbf{u}_{r_{i,j+1,k+1}} - \Delta \mathbf{u}_{r_{i,j-1,k}} \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \Delta \mathbf{u}_{r_{i,j-1,k+1}} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. - \gamma_{64_{i,j,k-1}} \left(\Delta \mathbf{u}_{r_{i,j+1,k+1}} + \Delta \mathbf{u}_{r_{i,j+1,k}} - \Delta \mathbf{u}_{r_{i,j-1,k-1}} - \Delta \mathbf{u}_{r_{i,j-1,k}} \right) \right] \right) \\
& + \mathbf{F}_k \mathbf{F}_i \left[\gamma_{64_{i,j,k+1}} \left(\Delta \mathbf{u}_{\theta_{i+1,j,k+1}} - \Delta \mathbf{u}_{\theta_{i-1,j,k+1}} \right) \right. \\
& \quad \left. - \gamma_{64_{i,j,k-1}} \left(\Delta \mathbf{u}_{\theta_{i+1,j,k+1}} - \Delta \mathbf{u}_{\theta_{i-1,j,k-1}} \right) \right] \\
& - \left(\frac{\mathbf{F}_k}{\mathbf{r}_i} \left(\gamma_{65_{i,j,k+1}} \Delta \mathbf{u}_{r_{i,j,k+1}} - \gamma_{65_{i,j,k-1}} \Delta \mathbf{u}_{r_{i,j,k-1}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \mathbf{F}_i \mathbf{F}_k \left[\gamma_{65_{i,j,k+1}} \left(\Delta \mathbf{u}_{z_{i+1,j,k+1}} - \Delta \mathbf{u}_{z_{i-1,j,k+1}} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \gamma_{65_{i,j,k-1}} \left(\Delta \mathbf{u}_{z_{i+1,j,k-1}} - \Delta \mathbf{u}_{z_{i-1,j,k-1}} \right) \right] \right) \\
& + \frac{\mathbf{F}_j \mathbf{F}_k}{\mathbf{r}_i} \left[\gamma_{66_{i,j,k+1}} \left(\Delta \mathbf{u}_{z_{i,j+1,k+1}} - \Delta \mathbf{u}_{z_{i,j-1,k+1}} \right) \right. \\
& \quad \left. - \gamma_{66_{i,j,k-1}} \left(\Delta \mathbf{u}_{z_{i,j+1,k-1}} - \Delta \mathbf{u}_{z_{i,j-1,k-1}} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{F_i F_j}{r_i} \left[\gamma_{21 i, j+1, k} \left(\Delta \mathbf{u}_{r_{i+1, j+1, k}} - \Delta \mathbf{u}_{r_{i-1, j+1, k}} \right) - \gamma_{21 i, j-1, k} \left(\Delta \mathbf{u}_{r_{i+1, j-1, k}} - \Delta \mathbf{u}_{r_{i-1, j-1, k}} \right) \right] \\
& + \frac{F_j}{r_i^2} \left(\gamma_{22 i, j+1, k} \Delta \mathbf{u}_{r_{i, j+1, k}} - \gamma_{22 i, j-1, k} \Delta \mathbf{u}_{r_{i, j-1, k}} \right) \\
& + \frac{F_j F_k}{r_i} \left[\gamma_{23 i, j+1, k} \left(\Delta \mathbf{u}_{z_{i, j+1, k+1}} - \Delta \mathbf{u}_{z_{i, j+1, k-1}} \right) \right. \\
& - \gamma_{23 i, j-1, k} \left(\Delta \mathbf{u}_{z_{i, j-1, k+1}} - \Delta \mathbf{u}_{z_{i, j-1, k-1}} \right) \left. \right] \\
& - \left(\frac{C_{j+1} \gamma_{24 i, j+\frac{1}{2}, k}}{r_i^2} \Delta \mathbf{u}_{r_{i, j+1, k}} \right. \\
& - \frac{1}{r_i^2} \left(C_{j+1} \gamma_{24 i, j+\frac{1}{2}, k} + C_{j-1} \gamma_{24 i, j-\frac{1}{2}, k} \right) \Delta \mathbf{u}_{r_{i, j, k}} \\
& + \left. \frac{C_{j-1} \gamma_{24 i, j-\frac{1}{2}, k}}{r_i^2} \Delta \mathbf{u}_{r_{i, j-1, k}} \right) \\
& + \frac{F_i F_j}{r_i} \left[\gamma_{24 i, j+1, k} \left(\Delta \mathbf{u}_{\theta_{i+1, j+1, k}} - \Delta \mathbf{u}_{\theta_{i-1, j+1, k}} \right) \right. \\
& - \gamma_{24 i, j-1, k} \left(\Delta \mathbf{u}_{\theta_{i+1, j-1, k}} - \Delta \mathbf{u}_{\theta_{i-1, j-1, k}} \right) \left. \right] \\
& - \left(\frac{F_j F_k}{r_i} \left[\gamma_{25 i, j+1, k} \left(\Delta u_{r_{i, j, k+1}} + \Delta u_{r_{i, j+1, k+1}} - \Delta u_{r_{i, j, k-1}} \right. \right. \right. \\
& - \left. \left. \Delta u_{r_{i, j+1, k-1}} \right) \right. \\
& - \left. \gamma_{25 i, j-1, k} \left(\Delta u_{r_{i, j-1, k+1}} + \Delta u_{r_{i, j, k+1}} - \Delta u_{r_{i, j-1, k+1}} - \Delta u_{r_{i, j, k-1}} \right) \right] \\
& + \frac{F_j F_i}{r_i} \left[\gamma_{25 i, j+1, k} \left(\Delta u_{z_{i+1, j, k}} + \Delta u_{z_{i+1, j+1, k}} - \Delta u_{z_{i-1, j, k}} - \Delta u_{z_{i-1, j+1, k}} \right) \right. \\
& - \left. \gamma_{25 i, j-1, k} \left(\Delta u_{z_{i+1, j-1, k}} + \Delta u_{z_{i+1, j, k}} - \Delta u_{z_{i+1, j-1, k}} - \Delta u_{z_{i-1, j, k}} \right) \right] \\
& - \left(\frac{F_j F_k}{r_i} \left[\gamma_{26 i, j+1, k} \left(\Delta \mathbf{u}_{\theta_{i, j+1, k+1}} - \Delta \mathbf{u}_{\theta_{i, j+1, k-1}} \right) \right. \right. \\
& - \left. \gamma_{26 i, j-1, k} \left(\Delta \mathbf{u}_{\theta_{i, j-1, k+1}} - \Delta \mathbf{u}_{\theta_{i, j-1, k-1}} \right) \right] + \frac{C_{j+1} \gamma_{26 i, j+1/2, k}}{r_i^2} \Delta \mathbf{u}_{z_{i, j+1, k}} \\
& - \frac{1}{r_i^2} \left(C_{j+1} \gamma_{26 i, j+\frac{1}{2}, k} + C_{j-1} \gamma_{26 i, j-\frac{1}{2}, k} \right) \Delta \mathbf{u}_{z_{i, j, k}} \\
& + \left. \frac{C_{j-1} \gamma_{26 i, j-1/2, k}}{r_i^2} \Delta \mathbf{u}_{z_{i, j-1, k}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{F_i \gamma_{410ij,k}}{r_i} \Delta u_{r_{i+1,j,k}} - \frac{F_i \gamma_{410ij,k}}{r_i} \Delta u_{r_{i-1,j,k}} \right) - \frac{\gamma_{420ij,k}}{r_i^2} \Delta u_{r_{i,j,k}} \\
& \quad - \frac{F_k \gamma_{430ij,k}}{r_{i,j,k}} (\Delta u_{r_{i,j,k+1}} - \Delta u_{r_{i,j,k-1}}) \\
& \quad + \left(\frac{F_j \gamma_{440ij,k}}{r_i^2} (\Delta u_{r_{i,j+1,k}} - \Delta u_{r_{i,j-1,k}}) \right) \\
& \quad - \left(\frac{F_k \gamma_{450ij,k}}{r_{i,j,k}} (\Delta u_{r_{i,j,k+1}} - \Delta u_{r_{i,j,k-1}}) + \frac{F_i \gamma_{450ij,k}}{r_i} \Delta u_{z_{i+1,j,k}} \right. \\
& \quad \left. - \frac{F_i \gamma_{450ij,k}}{r_i} \Delta u_{z_{i-1,j,k}} \right) - \frac{F_j \gamma_{460ij,k}}{r_i} \Delta u_{z_{i,j+1,k}} + \frac{F_i \gamma_{460ij,k}}{r_i} \Delta u_{z_{i,j-1,k}}
\end{aligned}$$

Stencils de la ecuación de Equilibrio Vertical.

$$B u_{z_{i,j,k}} = C_{k-1} \gamma_{33ij,k} \frac{1}{2} \quad (\text{C-17})$$

$$S u_{z_{i,j,k}} = - \frac{F_i F_k \gamma_{56i+1,j,k}}{r_i} + \frac{F_i F_k \gamma_{56i-1,j,k}}{r_i} - \frac{F_i \gamma_{560ij,k}}{r_i} + \frac{C_{j-1} \gamma_{66ij-1/2,k}}{r_i} \quad (\text{C-18})$$

$$W u_{z_{i,j,k}} = C_{i-1} \gamma_{55i-\frac{1}{2},j,k} - \frac{F_i \gamma_{550ij,k}}{r_i} - \frac{F_j F_i \gamma_{65ij+1,k}}{r_i} + \frac{F_j F_i \gamma_{65ij-1,k}}{r_i} \quad (\text{C-19})$$

$$\begin{aligned}
C u_{z_{i,j,k}} = & - \left(C_{i+1} \gamma_{55i+\frac{1}{2}} + C_{i-1} \gamma_{45i-\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{r_i} \left(C_{j+1} \gamma_{66ij+\frac{1}{2},k} + C_{j-1} \gamma_{66ij-\frac{1}{2},k} \right) \\
& - \left(C_{k+1} \gamma_{33ij,k+\frac{1}{2}} + C_{k-1} \gamma_{33ij,k-\frac{1}{2}} \right)
\end{aligned} \quad (\text{C-20})$$

$$E u_{z_{i,j,k}} = C_{i+1} \gamma_{55i+\frac{1}{2},j,k} + \frac{F_i \gamma_{550ij,k}}{r_i} - \frac{F_j F_i \gamma_{65ij+1,k}}{r_i} + \frac{F_j F_i \gamma_{65ij-1,k}}{r_i} \quad (\text{C-21})$$

$$N u_{z_{i,j,k}} = \frac{F_i F_k \gamma_{56i+1,j,k}}{r_i} - \frac{F_i F_k \gamma_{56i-1,j,k}}{r_i} + \frac{F_j \gamma_{560ij,k}}{r_i} + \frac{C_{j+1} \gamma_{66ij+1/2,k}}{r_i} \quad (\text{C-22})$$