

$$Tu_{zi,j,k} = C_{k+1} \gamma_{33ij,k+\frac{1}{2}} \quad (\text{C-23})$$

$$\begin{aligned}
Fu_{zi,j,k} = & F_i \left(\sigma_{rz_{i+1,j,k}}^o - \sigma_{rz_{i-1,j,k}}^o \right) + \frac{\sigma_{rz_{i,j,k}}^o}{r_i} + \frac{F_j}{r_i} \left(\sigma_{\theta z_{i,j+1,k}}^o - \sigma_{\theta z_{i,j-1,k}}^o \right) \\
& + F_k \left(\sigma_{zz_{i,j,k+1}}^o - \sigma_{zz_{i,j,k-1}}^o \right) \\
& - \left(C_{i+1} \gamma_{51_{i+\frac{1}{2},j,k}} \Delta u_{r_{i+1,j,k}} - \left(C_{i+1} \gamma_{51_{i+\frac{1}{2},j,k}} + C_{i-1} \gamma_{51_{i-\frac{1}{2},j,k}} \right) \Delta u_{r_{i,j,k}} \right. \\
& \left. + C_{i-1} \gamma_{51_{i-\frac{1}{2},j,k}} \Delta u_{r_{i-1,j,k}} \right) \\
& - \left(F_i F_j \left[\frac{\gamma_{52_{i+1,j,k}}}{r_{i+1}} \left(\Delta u_{\theta_{i+1,j+1,k}} - \Delta u_{\theta_{i+1,j-1,k}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\gamma_{52_{i-1,j,k}}}{r_{i-1}} \left(\Delta u_{\theta_{i-1,j+1,k}} - \Delta u_{\theta_{i-1,j-1,k}} \right) \right] + \frac{F_i \gamma_{52_{i+1,j,k}}}{r_{i+1}} \Delta u_{r_{i+1,j,k}} \right. \\
& \left. - \frac{F_i \gamma_{52_{i-1,j,k}}}{r_{i-1}} \Delta u_{r_{i-1,j,k}} \right) \quad (\text{C-24}) \\
& - F_i F_k \left[\gamma_{53_{i+1,j,k}} \left(\Delta u_{z_{i+1,j,k+1}} - \Delta u_{z_{i+1,j,k-1}} \right) \right. \\
& \left. - \gamma_{53_{i-1,j,k}} \left(\Delta u_{z_{i-1,j,k+1}} - \Delta u_{z_{i-1,j,k-1}} \right) \right] \\
& - \left(\frac{F_i F_j}{r_i} \left[\gamma_{54_{i+1,j,k}} \left(\Delta u_{r_{i+1,j+1,k}} - \Delta u_{r_{i+1,j-1,k}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \gamma_{54_{i-1,j,k}} \left(\Delta u_{r_{i-1,j+1,k}} - \Delta u_{r_{i-1,j-1,k}} \right) \right] + C_{i+1} \gamma_{54_{i+\frac{1}{2},j,k}} \Delta u_{\theta_{i+1,j,k}} \right. \\
& \left. - \left(C_{i+1} \gamma_{54_{i+\frac{1}{2},j,k}} + C_{i-1} \gamma_{54_{i-\frac{1}{2},j,k}} \right) \Delta u_{\theta_{i,j,k}} + C_{i-1} \gamma_{54_{i-\frac{1}{2},j,k}} \Delta u_{\theta_{i-1,j,k}} \right. \\
& \left. - F_i \gamma_{54_{i,j,k}} \Delta u_{\theta_{i+1,j,k}} + F_i \gamma_{54_{i,j,k}} \Delta u_{\theta_{i-1,j,k}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{F}_i \mathbf{F}_k \left[\gamma_{31ij,k+1} \left(\Delta \mathbf{u}_{r_{i+1,j,k+1}} - \Delta \mathbf{u}_{r_{i-1,j,k+1}} \right) \right. \\
& \quad - \gamma_{31ij,k-1} \left(\Delta \mathbf{u}_{r_{i+1,j,k-1}} - \Delta \mathbf{u}_{r_{i-1,j,k-1}} \right) \left. \right] \\
& \quad - \left(\frac{\mathbf{F}_j \mathbf{F}_k}{\mathbf{r}_i} \left[\gamma_{32ij,k+1} \left(\Delta \mathbf{u}_{\theta_{ij+1,k+1}} - \Delta \mathbf{u}_{\theta_{ij-1,k+1}} \right) \right. \right. \\
& \quad - \gamma_{32ij,k-1} \left(\Delta \mathbf{u}_{\theta_{ij+1,k-1}} - \Delta \mathbf{u}_{\theta_{ij-1,k-1}} \right) \left. \right] \\
& \quad + \frac{\mathbf{F}_z}{\mathbf{r}_i} \left(\gamma_{32ij,k+1} \Delta \mathbf{u}_{r_{ij,k+1}} - \gamma_{32ij,k-1} \Delta \mathbf{u}_{r_{ij,k-1}} \right) \left. \right) \\
& \quad - \left(\frac{\mathbf{F}_k \mathbf{F}_j}{\mathbf{r}_i} \left[\gamma_{34ij,k+1} \left(\left(\Delta \mathbf{u}_{r_{ij+1,k}} + \Delta \mathbf{u}_{r_{ij+1,k+1}} - \Delta \mathbf{u}_{r_{ij-1,k}} \right. \right. \right. \right. \\
& \quad - \Delta \mathbf{u}_{r_{ij-1,k+1}} \left. \left. \left. \right) \right] \right. \\
& \quad - \gamma_{34ij,k-1} \left(\Delta \mathbf{u}_{r_{ij+1,k+1}} + \Delta \mathbf{u}_{r_{ij+1,k}} - \Delta \mathbf{u}_{r_{ij-1,k-1}} - \Delta \mathbf{u}_{r_{ij-1,k}} \right) \left. \right] \\
& \quad + \mathbf{F}_k \mathbf{F}_i \left[\gamma_{34ij,k+1} \left(\Delta u_{\theta_{i+1,j,k}} + \Delta u_{\theta_{i+1,j,k+1}} - \Delta u_{\theta_{i-1,j,k}} \right. \right. \\
& \quad - \Delta u_{\theta_{i-1,j,k+1}} \left. \left. \right) \right. \\
& \quad - \gamma_{34ij,k-1} \left(\Delta u_{\theta_{i+1,j,k+1}} + \Delta u_{\theta_{i+1,j,k}} - \Delta u_{\theta_{i-1,j,k-1}} - \Delta u_{\theta_{i-1,j,k}} \right) \left. \right] \\
& \quad - \frac{\mathbf{F}_k \gamma_{34ij,k}}{\mathbf{r}_i} \left(\Delta u_{\theta_{ij,k+1}} - \Delta u_{\theta_{ij,k-1}} \right) \left. \right) \\
& \quad - \left(\frac{\mathbf{F}_k}{\mathbf{r}_i} \left(\gamma_{35ij,k+1} \Delta \mathbf{u}_{r_{ij,k+1}} - \gamma_{35ij,k-1} \Delta \mathbf{u}_{r_{ij,k-1}} \right) \right. \\
& \quad + \mathbf{F}_i \mathbf{F}_k \left[\gamma_{35ij,k+1} \left(\Delta \mathbf{u}_{z_{i+1,j,k+1}} - \Delta \mathbf{u}_{z_{i-1,j,k+1}} \right) \right. \\
& \quad - \gamma_{35ij,k-1} \left(\Delta \mathbf{u}_{z_{i+1,j,k-1}} - \Delta \mathbf{u}_{z_{i-1,j,k-1}} \right) \left. \right] \left. \right) \\
& \quad - \left(\mathbf{C}_{k+1} \gamma_{36ij,k+\frac{1}{2}} \Delta \mathbf{u}_{\theta_{ij,k+1}} - \left(\mathbf{C}_{k+1} \gamma_{36ij,k+\frac{1}{2}} + \mathbf{C}_{k-1} \gamma_{56ij,k-\frac{1}{2}} \right) \Delta \mathbf{u}_{\theta_{ij,k}} \right. \\
& \quad + \left. \mathbf{C}_{k-1} \gamma_{36ij,k-\frac{1}{2}} \Delta \mathbf{u}_{\theta_{ij,k-1}} \right. \\
& \quad + \frac{\mathbf{F}_j \mathbf{F}_k}{\mathbf{r}_i} \left[\gamma_{36ij,k+1} \left(\Delta \mathbf{u}_{z_{ij+1,k+1}} - \Delta \mathbf{u}_{z_{ij-1,k+1}} \right) \right. \\
& \quad - \left. \left. \gamma_{36ij,k-1} \left(\Delta \mathbf{u}_{z_{ij+1,k-1}} - \Delta \mathbf{u}_{z_{ij-1,k-1}} \right) \right] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{F_i F_j}{r_i} \left[\gamma_{61i,j+1,k} \left(\Delta \mathbf{u}_{r_{i+1,j+1,k}} - \Delta \mathbf{u}_{r_{i-1,j+1,k}} \right) - \gamma_{61i,j-1,k} \left(\Delta \mathbf{u}_{r_{i+1,j-1,k}} - \Delta \mathbf{u}_{r_{i-1,j-1,k}} \right) \right] \\
& - \left(\frac{C_{j+1} \gamma_{62i,j+\frac{1}{2},k}}{r_i^2} \Delta \mathbf{u}_{\theta_{ij+1,k}} \right. \\
& - \frac{1}{r_i^2} \left(C_{j+1} \gamma_{62i,j+\frac{1}{2},k} + C_{j-1} \gamma_{62i,j-\frac{1}{2},k} \right) \Delta \mathbf{u}_{\theta_{ij,k}} \\
& + \left. \frac{C_{j-1} \gamma_{62i,j-\frac{1}{2},k}}{r_i^2} \Delta \mathbf{u}_{\theta_{ij-1,k}} \right) \\
& + \frac{F_j}{r_i^2} \left(\gamma_{62i,j+1,k} \Delta \mathbf{u}_{r_{ij+1,k}} - \gamma_{62i,j-1,k} \Delta \mathbf{u}_{r_{ij-1,k}} \right) \\
& - \frac{F_j F_k}{r_i} \left[\gamma_{63i,j+1,k} \left(\Delta \mathbf{u}_{z_{ij+1,k+1}} - \Delta \mathbf{u}_{z_{ij+1,k-1}} \right) \right. \\
& - \left. \gamma_{63i,j-1,k} \left(\Delta \mathbf{u}_{z_{ij-1,k+1}} - \Delta \mathbf{u}_{z_{ij-1,k-1}} \right) \right] \\
& - \left(\frac{C_{j+1} \gamma_{64i,j+\frac{1}{2},k}}{r_i^2} \Delta \mathbf{u}_{r_{ij+1,k}} \right. \\
& - \frac{1}{r_i^2} \left(C_{j+1} \gamma_{64i,j+\frac{1}{2},k} + C_{j-1} \gamma_{64i,j-\frac{1}{2},k} \right) \Delta \mathbf{u}_{r_{ij,k}} \\
& + \left. \frac{C_{j-1} \gamma_{64i,j-\frac{1}{2},k}}{r_i^2} \Delta \mathbf{u}_{r_{ij-1,k}} \right) \\
& + \frac{F_i F_j}{r_i} \left[\gamma_{64i,j+1,k} \left(\Delta \mathbf{u}_{\theta_{i+1,j+1,k}} - \Delta \mathbf{u}_{\theta_{i-1,j+1,k}} \right) \right. \\
& - \left. \gamma_{64i,j-1,k} \left(\Delta \mathbf{u}_{\theta_{i+1,j-1,k}} - \Delta \mathbf{u}_{\theta_{i-1,j-1,k}} \right) \right] \\
& - \frac{F_j \gamma_{64i,j,k}}{r_i^2} \left(\Delta \mathbf{u}_{\theta_{ij+1,k}} - \Delta \mathbf{u}_{\theta_{ij-1,k}} \right) \\
& - \left(\frac{F_j F_k}{r_i} \left[\gamma_{65i,j+1,k} \left(\Delta u_{r_{ij,k+1}} + \Delta u_{r_{ij+1,k+1}} - \Delta u_{r_{ij,k-1}} \right) \right. \right. \\
& - \left. \Delta u_{r_{ij+1,k-1}} \right) \\
& - \left. \gamma_{65i,j-1,k} \left(\Delta u_{r_{ij-1,k+1}} + \Delta u_{r_{ij,k+1}} - \Delta u_{r_{ij-1,k+1}} - \Delta u_{r_{ij,k-1}} \right) \right] \\
& + \frac{F_j F_i}{r_i} \left[\gamma_{65i,j+1,k} \left(\Delta u_{z_{i+1,j+1,k}} - \Delta u_{z_{i-1,j+1,k}} \right) \right. \\
& - \left. \gamma_{65i,j-1,k} \left(\Delta u_{z_{i+1,j-1,k}} - \Delta u_{z_{i-1,j-1,k}} \right) \right] \\
& + \frac{F_j F_k}{r_i} \left[\gamma_{66i,j+1,k} \left(\Delta \mathbf{u}_{\theta_{ij+1,k+1}} - \Delta \mathbf{u}_{\theta_{ij+1,k-1}} \right) \right. \\
& + F_i F_k \left[\gamma_{55i+1,j,k} \left(\Delta \mathbf{u}_{r_{i+1,j,k+1}} - \Delta \mathbf{u}_{r_{i+1,j,k-1}} \right) \right. \\
& \quad \left. - \gamma_{55i-1,j,k} \left(\Delta \mathbf{u}_{r_{i-1,j,k+1}} - \Delta \mathbf{u}_{r_{i-1,j,k-1}} \right) \right] \\
& \quad \left(\dots \right) \quad \left(\dots \right) \quad \left(\dots \right) \quad \left(\dots \right)
\end{aligned}$$

D. Anexo 4: Componentes de la Matriz de Elasto-plasticidad.

En este anexo se presentan las entradas asociadas a la matriz de elasto-plasticidad y necesarias para generar el cálculo de las ecuaciones de equilibrio de esfuerzos. Las constantes de elasto-plasticidad se presentan discretizadas y evaluadas en el nodo i, j, k .

Parámetro ψ evaluado en el nodo (i, j, k)

$$\begin{aligned} \psi_{i,j,k} = & a_{i,j,k}^2(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}2\lambda_{i,j,k}(b_{i,j,k} + c_{i,j,k}) \\ & + b_{i,j,k}^2(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + 2b_{i,j,k}c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} \\ & + c_{i,j,k}^2(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + 2d_{i,j,k}^2G_{i,j,k} + 2e_{i,j,k}^2G_{i,j,k} \\ & + 2f_{i,j,k}^2G_{i,j,k} + S_{i,j,k} \end{aligned} \quad (D-1)$$

Componentes de la matriz A evaluadas en el nodo (i, j, k)

$$A_{11i,j,k} = \frac{(a_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + b_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})^2}{\psi_{i,j,k}} \quad (D-2)$$

$$A_{12i,j,k} = \frac{(b_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})(a_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + b_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (D-3)$$

$$A_{13i,j,k} = \frac{(c_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + b_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})(a_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + b_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (D-4)$$

$$A_{14i,j,k} = \frac{2d_{i,j,k}G_{i,j,k}(a_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + b_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (D-5)$$

$$A_{15i,j,k} = \frac{2e_{i,j,k}G_{i,j,k}(a_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + b_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (D-6)$$

$$A_{16i,j,k} = \frac{2f_{i,j,k}G_{i,j,k}(a_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + b_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D-7})$$

$$A_{21i,j,k} = \frac{(b_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})(a_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + b_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D-8})$$

$$A_{22i,j,k} = \frac{(b_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})^2}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D-9})$$

$$A_{23i,j,k} = \frac{(c_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + b_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})(b_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D-10})$$

$$A_{24i,j,k} = \frac{2d_{i,j,k}G_{i,j,k}(b_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D-11})$$

$$A_{25i,j,k} = \frac{2e_{i,j,k}G_{i,j,k}(b_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D-12})$$

$$A_{26i,j,k} = \frac{2f_{i,j,k}G_{i,j,k}(b_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D-13})$$

$$A_{31i,j,k} = \frac{(c_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + b_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})(a_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + b_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D-14})$$

$$A_{32i,j,k} = \frac{(c_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + b_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})(b_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D-15})$$

$$A_{33i,j,k} = \frac{(c_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + b_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})^2}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D-16})$$

$$A_{34i,j,k} = \frac{2d_{i,j,k}G_{i,j,k}(c_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + b_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D- 17})$$

$$A_{35i,j,k} = \frac{2e_{i,j,k}G_{i,j,k}(c_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + b_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D- 18})$$

$$A_{36i,j,k} = \frac{2f_{i,j,k}G_{i,j,k}(c_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}b_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D- 19})$$

$$A_{41i,j,k} = \frac{2d_{i,j,k}G_{i,j,k}(a_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + b_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D- 20})$$

$$A_{42i,j,k} = \frac{2d_{i,j,k}G_{i,j,k}(b_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D- 21})$$

$$A_{43i,j,k} = \frac{2d_{i,j,k}G_{i,j,k}(c_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + b_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D- 22})$$

$$A_{44i,j,k} = \frac{4d_{i,j,k}^2 G_{i,j,k}^2}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D- 23})$$

$$A_{45i,j,k} = \frac{4d_{i,j,k}e_{i,j,k}G_{i,j,k}^2}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D- 24})$$

$$A_{46i,j,k} = \frac{4d_{i,j,k}f_{i,j,k}G_{i,j,k}^2}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D- 25})$$

$$A_{51i,j,k} = \frac{2e_{i,j,k}G_{i,j,k}(a_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + b_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D- 26})$$

$$A_{52i,j,k} = \frac{2e_{i,j,k}G_{i,j,k}(b_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D- 27})$$

$$A_{53i,j,k} = \frac{2e_{i,j,k}G_{i,j,k}(c_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + b_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D-28})$$

$$A_{54i,j,k} = \frac{4d_{i,j,k}e_{i,j,k}G_{i,j,k}^2}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D-29})$$

$$A_{55i,j,k} = \frac{4e_{i,j,k}^2G_{i,j,k}^2}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D-30})$$

$$A_{56i,j,k} = \frac{4e_{i,j,k}f_{i,j,k}G_{i,j,k}^2}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D-31})$$

$$A_{61i,j,k} = \frac{2f_{i,j,k}G_{i,j,k}(a_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + b_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D-32})$$

$$A_{62i,j,k} = \frac{2f_{i,j,k}G_{i,j,k}(b_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + c_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D-33})$$

$$A_{63i,j,k} = \frac{2f_{i,j,k}G_{i,j,k}(c_{i,j,k}(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) + a_{i,j,k}\lambda_{i,j,k} + b_{i,j,k}\lambda_{i,j,k})}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D-34})$$

$$A_{64i,j,k} = \frac{4d_{i,j,k}f_{i,j,k}G_{i,j,k}^2}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D-35})$$

$$A_{65i,j,k} = \frac{4e_{i,j,k}f_{i,j,k}G_{i,j,k}^2}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D-36})$$

$$A_{66i,j,k} = \frac{4f_{i,j,k}^2G_{i,j,k}^2}{\psi_{i,j,k}} \quad (\text{D-37})$$

E. Anexo 5: Componentes Gamma Asociados a los Stencils de las Ecuaciones de Geomecánica.

En este anexo se presentan las constantes gammas que se encuentran asociadas a los stencils presentados en el Anexo 3, estas constantes son una asociación de los módulos elásticos y las entradas de la matriz de elasto-plasticidad. Para la discretización de los términos localizados en medio del bloque, se utiliza el promedio armónico definido de la siguiente manera:

Dirección radial.

$$a_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)}{\frac{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_{i+\frac{1}{2}}}\right)}{a_{i+1}} + \frac{\ln\left(\frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{r_{i+1}}\right)}{a_i}} \quad (\text{E-1})$$

Dirección tangencial

$$a_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{\frac{\Delta\theta_{j+1} + \Delta\theta_j}{a_{j+1}} + \frac{\Delta\theta_{j+1} + \Delta\theta_j}{a_j}}{\frac{\Delta\theta_{j+1}}{a_{j+1}} + \frac{\Delta\theta_j}{a_j}} \quad (\text{E-2})$$

Dirección vertical

$$a_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{\frac{\Delta z_{k+1} + \Delta z_k}{a_{k+1}} + \frac{\Delta z_{k+1} + \Delta z_k}{a_k}}{\frac{\Delta z_{k+1}}{a_{k+1}} + \frac{\Delta z_k}{a_k}} \quad (\text{E-3})$$

Discretización de Términos γ en la Ecuación de Equilibrio Radial.

$$\begin{aligned}
\gamma_{11i\pm\frac{1}{2},j,k} &= [(2G + \lambda) - A_{11}]_{i\pm\frac{1}{2},j,k} \\
&= 2 \left(\frac{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)}{\frac{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_{i\pm\frac{1}{2}}}\right)}{G_{i\pm 1}} + \frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm\frac{1}{2}}}{r_{i+1}}\right)}{G_i}} \right) + \left(\frac{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)}{\frac{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_{i\pm\frac{1}{2}}}\right)}{\lambda_{i\pm 1}} + \frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm\frac{1}{2}}}{r_{i+1}}\right)}{\lambda_i}} \right) \\
&\quad - \left(\frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm 1}}{r_i}\right)}{\frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm 1}}{r_{i\pm\frac{1}{2}}}\right)}{A_{11i\pm 1}} + \frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm\frac{1}{2}}}{r_{i\pm 1}}\right)}{A_{11i}}} \right)
\end{aligned} \tag{E-4}$$

$$\gamma_{12i\pm 1,j,k} = \lambda_{i\pm 1,j,k} - A_{12i\pm 1,j,k} \tag{E-5}$$

$$\gamma_{13i\pm 1,j,k} = \lambda_{i\pm 1,j,k} - A_{13i\pm 1,j,k} \tag{E-6}$$

$$\gamma_{14i\pm 1,j,k} = \frac{A_{14i\pm 1,j,k}}{2} \tag{E-7}$$

$$\gamma_{15i\pm 1,j,k} = \frac{A_{15i\pm 1,j,k}}{2} \tag{E-8}$$

$$\gamma_{16i\pm 1,j,k} = \frac{A_{16i\pm 1,j,k}}{2} \tag{E-9}$$

$$\gamma_{11i,j,k} = [(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) - A_{11i,j,k}] \tag{E-10}$$

$$\gamma_{21i,j,k1} = [\lambda_{i,j,k} - A_{21i,j,k}] \tag{E-11}$$

$$\gamma_{12i,j,k} = [\lambda_{i,j,k} - A_{12i,j,k}] \quad (\text{E- 12})$$

$$\gamma_{22i,j,k} = [(2G_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k}) - A_{22i,j,k}] \quad (\text{E- 13})$$

$$\gamma_{13i,j,k} = [\lambda_{i,j,k} - A_{13i,j,k}] \quad (\text{E- 14})$$

$$\gamma_{23i,j,k} = [\lambda_{i,j,k} - A_{23i,j,k}] \quad (\text{E- 15})$$

$$\gamma_{14i,j,k} = \frac{A_{14i,j,k}}{2} \quad (\text{E- 16})$$

$$\gamma_{24i,j,k} = \frac{A_{24i,j,k}}{2} \quad (\text{E- 17})$$

$$\gamma_{15i,j,k} = \frac{A_{15i,j,k}}{2} \quad (\text{E- 18})$$

$$\gamma_{25i,j,k} = \frac{A_{25i,j,k}}{2} \quad (\text{E- 19})$$

$$\gamma_{16i,j,k} = \frac{A_{16i,j,k}}{2} \quad (\text{E- 20})$$

$$\gamma_{26i,j,k} = \frac{A_{26i,j,k}}{2} \quad (\text{E- 21})$$

$$\gamma_{41i,j\pm 1,k} = A_{41i,j\pm 1,k} \quad (\text{E- 22})$$

$$\gamma_{42i,j\pm 1,k} = A_{42i,j\pm 1,k} \quad (\text{E- 23})$$

$$\gamma_{43i,j\pm 1,k} = A_{43i,j\pm 1,k} \quad (\text{E- 24})$$

$$\gamma_{44i,j+\frac{1}{2},k} = \left(\frac{\Delta\theta_{j+1} + \Delta\theta_j}{\frac{\Delta\theta_{j+1}}{G_{j+1}} + \frac{\Delta\theta_j}{G_j}} \right) - \frac{\left(\frac{\Delta\theta_{j+1} + \Delta\theta_j}{\frac{\Delta\theta_{j+1}}{A_{44j+1}} + \frac{\Delta\theta_j}{A_{44j}}} \right)}{2} \quad (\text{E- 25})$$

$$\gamma_{44i,j\pm 1,k} = \frac{[2G_{i,j\pm 1,k} - A_{44i,j\pm 1,k}]}{2} \quad (\text{E- 26})$$

$$\gamma_{44i,j,k} = \frac{[2G_{i,j,k} - A_{44i,j,k}]}{2} \quad (\text{E- 27})$$

$$\gamma_{45i,j\pm 1,k} = \frac{A_{45i,j\pm 1,k}}{2} \quad (\text{E- 28})$$

$$\gamma_{46i,j\pm 1,k} = \frac{A_{46i,j\pm 1,k}}{2} \quad (\text{E- 29})$$

$$\gamma_{46i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{\left(\frac{\Delta\theta_{j\pm 1} + \Delta\theta_j}{\frac{\Delta\theta_{j\pm 1}}{A_{46j\pm 1}} + \frac{\Delta\theta_j}{A_{46j}}} \right)}{2} \quad (\text{E- 30})$$

$$A_{51i,j,k\pm 1} = \gamma_{51i,j,k\pm 1} \quad (\text{E- 31})$$

$$A_{52i,j,k\pm 1} = \gamma_{52i,j,k\pm 1} \quad (\text{E- 32})$$

$$\gamma_{53i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{\Delta Z_{k\pm 1} + \Delta Z_k}{\frac{\Delta Z_{k\pm 1}}{A_{53k\pm 1}} + \frac{\Delta Z}{A_{53k}}} \quad (\text{E- 33})$$

$$A_{54i,j,k\pm 1} = \gamma_{54i,j,k\pm 1} \quad (\text{E- 34})$$

$$A_{54i,j,k} = \gamma_{54i,j,k} \quad (\text{E- 35})$$

$$\gamma_{55i,j,k\pm 1} = \frac{[2G_{i,j,k\pm 1} - A_{55i,j,k\pm 1}]}{2} \quad (\text{E- 36})$$

$$\gamma_{56i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{\left(\frac{\Delta Z_{k\pm 1} + \Delta Z_k}{\frac{\Delta Z_{k\pm 1}}{A_{56k\pm 1}} + \frac{\Delta Z}{A_{56k}}} \right)}{2} \quad (\text{E- 37})$$

$$\gamma_{56i,j,k\pm 1} = \frac{A_{56i,j,k\pm 1}}{2} \quad (\text{E- 38})$$

Discretización de Términos γ en la Ecuación de Equilibrio Tangencial.

$$\gamma_{41i\pm\frac{1}{2},j,k} = A_{41i\pm\frac{1}{2},j,k} = \frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm 1}}{r_i}\right)}{\frac{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_{i+\frac{1}{2}}}\right)}{A_{41i\pm 1}} + \frac{\ln\left(\frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{r_{i\pm 1}}\right)}{A_{41i}}} \quad (\text{E- 39})$$

$$\gamma_{42} = A_{42} = A_{42i\pm 1,j,k} \quad (\text{E- 40})$$

$$\gamma_{43} = A_{43} = A_{43i\pm 1,j,k} \quad (\text{E- 41})$$

$$\gamma_{44i\pm 1,j,k} = \frac{[2G_{i\pm 1,j,k} - A_{44i\pm 1,j,k}]}{2} \quad (\text{E- 42})$$

$$\gamma_{44i\pm \frac{1}{2},j,k} = \left(\frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm 1}}{r_i}\right)}{\frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm 1}}{r_{i\pm \frac{1}{2}}}\right)}{G_{i\pm 1}} + \frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm \frac{1}{2}}}{r_{i\pm 1}}\right)}{G_i}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm 1}}{r_i}\right)}{\frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm 1}}{r_{i\pm \frac{1}{2}}}\right)}{A_{44i\pm 1}} + \frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm \frac{1}{2}}}{r_{i\pm 1}}\right)}{A_{44i}}} \right) \quad (\text{E- 43})$$

$$\gamma_{44i,j,k} = \frac{[2G_{i,j,k} - A_{44i,j,k}]}{2} \quad (\text{E- 44})$$

$$\gamma_{45i\pm 1,j,k} = \frac{A_{45i\pm 1,j,k}}{2} \quad (\text{E- 45})$$

$$\gamma_{45i\pm \frac{1}{2},j,k} = \frac{\left(\frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm 1}}{r_i}\right)}{\frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm 1}}{r_{i\pm \frac{1}{2}}}\right)}{A_{45i\pm 1}} + \frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm \frac{1}{2}}}{r_{i\pm 1}}\right)}{A_{45i}}} \right)}{2} \quad (\text{E- 46})$$

$$\gamma_{46i\pm 1,j,k} = \frac{A_{46i\pm 1,j,k}}{2} \quad (\text{E- 47})$$

$$2A_{41i,j,k} = \gamma_{41oi,j,k} \quad (\text{E- 48})$$

$$2A_{42i,j,k} = \gamma_{42oi,j,k} \quad (\text{E- 49})$$

$$2A_{43i,j,k} = \gamma_{43oi,j,k} \quad (\text{E- 50})$$

$$\gamma_{44oi,j,k} = [2G_{i,j,k} - A_{44oi,j,k}] \quad (\text{E- 51})$$

$$\gamma_{45oi,j,k} = A_{45i,j,k} \quad (\text{E- 52})$$

$$\gamma_{46oi,j,k} = A_{46i,j,k} \quad (\text{E- 53})$$

$$\gamma_{21i,j\pm 1,k} = [\lambda_{i,j\pm 1,k} - A_{21i,j\pm 1,k}] \quad (\text{E- 54})$$

$$\gamma_{22} = [(2G + \lambda) - A_{22}] \quad (\text{E- 55})$$

$$\gamma_{22i,j\pm \frac{1}{2},k} = \left[2 \left(\frac{\Delta\theta_{j\pm 1} + \Delta\theta_j}{\frac{\Delta\theta_{j\pm 1}}{G_{j\pm 1}} + \frac{\Delta\theta_j}{G_j}} \right) + \left(\frac{\Delta\theta_{j\pm 1} + \Delta\theta_j}{\frac{\Delta\theta_{j\pm 1}}{\lambda_{j\pm 1}} + \frac{\Delta\theta_j}{\lambda_j}} \right) \right] - \left(\frac{\Delta\theta_{j\pm 1} + \Delta\theta_j}{\frac{\Delta\theta_{j\pm 1}}{A_{22j\pm 1}} + \frac{\Delta\theta_j}{A_{22j}}} \right) \quad (\text{E- 56})$$

$$\gamma_{22i,j\pm 1,k} = [(2G_{i,j\pm 1,k} + \lambda_{i,j\pm 1,k}) - A_{22i,j\pm 1,k}] \quad (\text{E- 57})$$

$$[\lambda_{i,j\pm 1,k} - A_{2i,j\pm 1,k3}] = \gamma_{23} \quad (\text{E- 58})$$

$$\gamma_{24_{i,j\pm \frac{1}{2},k}} = \frac{\left(\frac{\Delta\theta_{j\pm 1} + \Delta\theta_j}{\frac{\Delta\theta_{j\pm 1}}{A_{24j\pm 1}} + \frac{\Delta\theta_j}{A_{24j}}} \right)}{2} \quad (\text{E- 59})$$

$$\frac{A_{24i,j\pm 1,k}}{2} = \gamma_{24_{i,j\pm 1,k}} \quad (\text{E- 60})$$

$$\frac{A_{24i,j,k}}{2} = \gamma_{24_{i,j,k}} \quad (\text{E- 61})$$

$$\frac{A_{25i,j\pm 1,k}}{2} = \gamma_{25_{i,j\pm 1,k}} \quad (\text{E- 62})$$

$$\gamma_{26_{i,j\pm 1,k}} = \frac{A_{26i,j\pm 1,k}}{2} \quad (\text{E- 63})$$

$$\gamma_{26_{i,j\pm \frac{1}{2},k}} = \frac{\left(\frac{\Delta\theta_{j\pm 1} + \Delta\theta_j}{\frac{\Delta\theta_{j\pm 1}}{A_{26j\pm 1}} + \frac{\Delta\theta_j}{A_{26j}}} \right)}{2} \quad (\text{E- 64})$$

$$\gamma_{61_{i,j,k\pm 1}} = A_{61_{i,j,k\pm 1}} \quad (\text{E- 65})$$

$$A_{62_{i,j,k+1}} = \gamma_{62_{i,j,k+1}} \quad (\text{E- 66})$$

$$\gamma_{63i,j,k\pm\frac{1}{2}} = \frac{\Delta z_{k\pm 1} + \Delta z_k}{\frac{\Delta z_{k\pm 1}}{A_{63k\pm 1}} + \frac{\Delta z}{A_{63k}}} \quad (\text{E- 67})$$

$$A_{64i,j,k\pm 1} = \gamma_{6i,j,k\pm 14} \quad (\text{E- 68})$$

$$\gamma_{64i,j,k} = A_{64i,j,k} \quad (\text{E- 69})$$

$$\gamma_{6i,j,k+15} = \frac{A_{65i,j,k+1}}{2} \quad (\text{E- 70})$$

$$\gamma_{66i,j\pm\frac{1}{2},k} = \left(\frac{\Delta z_{k\pm 1} + \Delta z_k}{\frac{\Delta z_{k\pm 1}}{G_{k\pm 1}} + \frac{\Delta z}{G_k}} \right) - \frac{\left(\frac{\Delta z_{k\pm 1} + \Delta z_k}{\frac{\Delta z_{k\pm 1}}{A_{66k\pm 1}} + \frac{\Delta z}{A_{66k}}} \right)}{2} \quad (\text{E- 71})$$

$$\gamma_{66i,j,k\pm 1} = \frac{[2G_{i,j,k\pm 1} - A_{66i,j,k\pm 1}]}{2} \quad (\text{E- 72})$$

Discretización de Términos γ en la Ecuación de Equilibrio Vertical.

$$\gamma_{51i\pm\frac{1}{2},j,k} = \frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm 1}}{r_i}\right)}{\frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm 1}}{r_{i\pm\frac{1}{2}}}\right)}{A_{51i\pm 1}} + \frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm\frac{1}{2}}}{r_{i\pm 1}}\right)}{A_{51i}}} \quad (\text{E- 73})$$

$$A_{52i,j,k} = \gamma_{52i,j,k} \quad (\text{E- 74})$$

$$A_{52i\pm 1,j,k} = \gamma_{52i\pm 1,j,k} \quad (\text{E- 75})$$

$$A_{53i\pm 1,j,k} = \gamma_{53i\pm 1,j,k} \quad (\text{E- 76})$$

$$\gamma_{54i\pm 1,j,k} = \frac{A_{54i\pm 1,j,k}}{2} \quad (\text{E- 77})$$

$$\gamma_{54i\pm \frac{1}{2},j,k} = \frac{\left(\frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm 1}}{r_i}\right)}{\frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm 1}}{r_{i\pm \frac{1}{2}}}\right)}{A_{54i\pm 1}} + \frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm 1}}{r_{i\pm 1}}\right)}{A_{54i}}} \right)}{2} \quad (\text{E- 78})$$

$$\gamma_{54i,j,k} = \frac{A_{54i,j,k}}{2} \quad (\text{E- 79})$$

$$\gamma_{55i\pm 1,j,k} = \frac{[2G_{i\pm 1,j,k} - A_{55i\pm 1,j,k}]}{2} \quad (\text{E- 80})$$

$$\gamma_{55i\pm \frac{1}{2},j,k} = \frac{\left(\left[\frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm 1}}{r_i}\right)}{\frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm 1}}{r_{i\pm \frac{1}{2}}}\right)}{G_{i\pm 1}} + \frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm 1}}{r_{i\pm 1}}\right)}{G_i}} \right] - \left[\frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm 1}}{r_i}\right)}{\frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm 1}}{r_{i\pm \frac{1}{2}}}\right)}{A_{55i\pm 1}} + \frac{\ln\left(\frac{r_{i\pm 1}}{r_{i\pm 1}}\right)}{A_{55i}}} \right] \right)}{2} \quad (\text{E- 81})$$

$$\gamma_{56i\pm 1,j,k} = \frac{A_{56i\pm 1,j,k}}{2} \quad (\text{E- 82})$$

$$A_{51i,j,k} = \gamma_{51oi,j,k} \quad (\text{E- 83})$$

$$A_{52i,j,k} = \gamma_{52oi,j,k} \quad (\text{E- 84})$$

$$A_{53i,j,k} = \gamma_{53oi,j,k} \quad (\text{E- 85})$$

$$\gamma_{54i,j,k} = \frac{A_{54oi,j,k}}{2} \quad (\text{E- 86})$$

$$\gamma_{55i,j,k} = \frac{[2G_{i,j,k} - A_{55oi,j,k}]}{2} \quad (\text{E- 87})$$

$$\gamma_{56i,j,k} = A_{56oi,j,k} \quad (\text{E- 88})$$

$$A_{61i,j\pm 1,k} = \gamma_{61oi,j\pm 1,k} \quad (\text{E- 89})$$

$$\gamma_{62i,j\pm \frac{1}{2},k} = \frac{\Delta\theta_{j\pm 1} + \Delta\theta_j}{\frac{\Delta\theta_{j\pm 1}}{A_{62j\pm 1}} + \frac{\Delta\theta_j}{A_{62j}}} \quad (\text{E- 90})$$

$$A_{62i,j\pm 1,k} = \gamma_{62i,j\pm 1,k} \quad (\text{E- 91})$$

$$\gamma_{63i,j\pm 1,k} = A_{63i,j\pm 1,k} \quad (\text{E- 92})$$

$$\gamma_{64i,j\pm\frac{1}{2},k} = \frac{\left(\frac{\Delta\theta_{j\pm 1} + \Delta\theta_j}{\frac{\Delta\theta_{j\pm 1}}{A_{64j\pm 1}} + \frac{\Delta\theta_j}{A_{64j}}} \right)}{2} \quad (\text{E- 93})$$

$$\gamma_{64i,j\pm 1,k} = \frac{A_{64i,j\pm 1,k}}{2} \quad (\text{E- 94})$$

$$\gamma_{64i,j,k} = \frac{A_{64i,j,k}}{2} \quad (\text{E- 95})$$

$$\gamma_{65i,j\pm 1,k} = \frac{A_{65i,j\pm 1,k}}{2} \quad (\text{E- 96})$$

$$\gamma_{66i,j\pm 1,k} = \frac{[2G_{ij\pm 1,k} - A_{66i,j\pm 1,k}]}{2} \quad (\text{E- 97})$$

$$\gamma_{66i,j\pm\frac{1}{2},k} = \frac{\left[2 \left(\frac{\Delta\theta_{j\pm 1} + \Delta\theta_j}{\frac{\Delta\theta_{j\pm 1}}{G_{j\pm 1}} + \frac{\Delta\theta_j}{G_j}} \right) - \left(\frac{\Delta\theta_{j\pm 1} + \Delta\theta_j}{\frac{\Delta\theta_{j\pm 1}}{A_{66j\pm 1}} + \frac{\Delta\theta_j}{A_{66j}}} \right) \right]}{2} \quad (\text{E- 98})$$

$$[\lambda_{i,j,k\pm 1} - A_{31i,j,k\pm 1}] = \gamma_{31i,j,k\pm 1} \quad (\text{E- 99})$$

$$[\lambda_{i,j,k\pm 1} - A_{32i,j,k\pm 1}] = \gamma_{32i,j,k\pm 1} \quad (\text{E- 100})$$

$$\gamma_{33i,j,k\pm\frac{1}{2}} = \left[2 \left(\frac{\Delta z_{k\pm 1} + \Delta z_k}{\frac{\Delta z_{k\pm 1}}{G_{k\pm 1}} + \frac{\Delta z_k}{G_k}} \right) + \left(\frac{\Delta z_{k\pm 1} + \Delta z_k}{\frac{\Delta z_{k\pm 1}}{\lambda_{k\pm 1}} + \frac{\Delta z_k}{\lambda_k}} \right) \right] - \left(\frac{\Delta z_{k\pm 1} + \Delta z_k}{\frac{\Delta z_{k\pm 1}}{A_{33k\pm 1}} + \frac{\Delta z_k}{A_{33k}}} \right) \quad (\text{E- 101})$$

$$A_{34i,j,k\pm 1} = \gamma_{34i,j,k\pm 1} \quad (\text{E- 102})$$

$$A_{34i,j,k} = \gamma_{34i,j,k} \quad (\text{E- 103})$$

$$\gamma_{35i,j,k\pm 1} = \frac{A_{35i,j,k\pm 1}}{2} \quad (\text{E- 104})$$

$$\gamma_{36i,j,k\pm \frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{\Delta Z_{k\pm 1} + \Delta Z_k}{\frac{\Delta Z_{k\pm 1}}{A_{36k\pm 1}} + \frac{\Delta Z}{A_{36k}}} \right)}{2} \quad (\text{E- 105})$$

$$\gamma_{36i,j,k\pm 1} = \frac{A_{36i,j,k\pm 1}}{2} \quad (\text{E- 106})$$

F. Anexo 6: Modelo Diferencial de Porosidad y Permeabilidad.

En este anexo se deduce la ecuación para el cambio del volumen poroso unitario en función de la deformación total del medio poroso, con el fin de expresar la ecuación de flujo de fluidos en función de esta variable, al igual que la ecuación de porosidad.

Cambio del Volumen Poroso

Como se ha expuesto a lo largo del texto, el comportamiento de flujo del fluido, está conectado con la presión de poro y las propiedades de la roca, al igual que el estado de esfuerzos al que está sometida la región de estudio. Por estos motivos se hace necesario incluir la variación de estas propiedades en la ecuación de flujo de fluidos.

Para llevar a cabo la variación de propiedades de la roca en la ecuación de flujo de fluidos, se trabaja con la ecuación propuesta por Zimmerman et al. [32] donde plantea la teoría de compresibilidad de medios porosos. Matemáticamente, se sabe que el volumen poroso depende del esfuerzo total promedio y de la presión de poro como se muestra en la siguiente expresión:

$$V_p = f(\bar{\sigma}, p) \quad (\text{F- 1})$$

En la ecuación (F- 1) V_p es el volumen poroso, $\bar{\sigma}$ es el esfuerzo total promedio y p es la presión de poro. Tomando la derivada total del volumen poroso con respecto al tiempo en la ecuación anterior y dividiendo por V_p se obtiene:

$$\frac{1}{V_p} \frac{dV_p}{dt} = \frac{1}{V_p} \left(\frac{\partial V_p}{\partial t} \right)_{\bar{\sigma}} \frac{d\bar{\sigma}}{dt} + \frac{1}{V_p} \left(\frac{\partial V_p}{\partial p} \right)_{\bar{\sigma}} \frac{dp}{dt} \quad (\text{F- 2})$$

Para un medio poroso, se definen cuatro compresibilidades a saber [32]

$$\begin{aligned}
 c_{bc} &= -\frac{1}{V_b} \left(\frac{\partial V_b}{\partial \bar{\sigma}} \right)_p \\
 c_{bp} &= \frac{1}{V_b} \left(\frac{\partial V_b}{\partial p} \right)_{\bar{\sigma}} \\
 c_{pp} &= \frac{1}{V_p} \left(\frac{\partial V_p}{\partial p} \right)_{\bar{\sigma}} \\
 c_{pc} &= -\frac{1}{V_p} \left(\frac{\partial V_p}{\partial \bar{\sigma}} \right)_p
 \end{aligned} \tag{F-3}$$

En el anterior conjunto de ecuaciones el primer subíndice indica el volumen que varía (p , poroso y b total) y el segundo subíndice indica si varía la presión de poro p o el esfuerzo total promedio $\bar{\sigma}$ y V_p es el volumen total.

Para el desarrollo de este estudio se toma los esfuerzos de compresión positivos. La deformación volumétrica porosa se define de la siguiente forma:

$$d\varepsilon_v = \frac{dV_p}{dt} \tag{F-4}$$

Usando las definiciones obtenidas en el conjunto de ecuaciones de la expresión (F- 3) y la expresión (F- 4), la ecuación (F- 2) se puede escribir de la siguiente forma:

$$-\frac{1}{V_p} \left(\frac{\partial V_p}{\partial \bar{\sigma}} \right)_p = c_{pc} \frac{d\bar{\sigma}}{dt} - c_{pp} \frac{dp}{dt} \tag{F-5}$$

Zimmerman et al. [32] presentan las siguientes ecuaciones que permiten relacionar las diferentes compresibilidades de la roca:

$$\begin{aligned}
 c_{bc} &= c_{bp} + c_r \\
 c_{pc} &= c_{pp} + c_r \\
 c_{bp} &= \phi c_{pc}
 \end{aligned} \tag{F-6}$$

Con las anteriores relaciones dadas por el conjunto de ecuaciones presentado en la expresión (F- 6) la ecuación (F- 5) puede escribirse de la siguiente forma:

$$-\frac{1}{V_p} \left(\frac{\partial V_p}{\partial \bar{\sigma}} \right)_p = c_{pc} \frac{d\bar{\sigma}}{dt} - (c_{pc} - c_r) \frac{dp}{dt} \quad (\text{F- 7})$$

Dado que las compresibilidades c_r y c_{bc} se obtienen mas facilmente a partir de datos de laboratorio, se recomienda escribir la ecuación (F- 7) en términos de estas propiedades.

Como el modelo geomecánico desarrollado está planteado en función de los desplazamientos, se usa la ley de Hooke, y se escribe la ecuación (F- 7) en términos de estos. La ley general de Hooke se expresa de la siguiente forma:

$$\bar{\sigma} = \frac{\varepsilon_v}{c_{bc}} \quad (\text{F- 8})$$

Reemplazando en la ecuación (F- 7):

$$-\frac{1}{V_p} \frac{dV_p}{d\bar{\sigma}} = c_{pc} \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon_v}{c_{bc}} \right) - (c_{pc} - c_r) \frac{dp}{dt} \quad (\text{F- 9})$$

Reescribiendo y reagrupando términos, la ecuación (F- 7) se escribe como:

$$\frac{1}{V_p} \frac{dV_p}{dt} = \frac{1}{\phi} \left[(c_{bc} - c_r(1 - \phi)) \frac{dp}{dt} - (c_{bc} - c_r) \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon_v}{c_{bc}} \right) \right] \quad (\text{F- 10})$$

La anterior ecuación permite acoplar el modelo geomecánico al modelo de flujo, así el modelo será explícitamente dependiente de la presión de poro y de la deformación volumétrica del medio poroso, es decir, el modelo acoplado será explícitamente dependiente de los desplazamientos.

Ecuación de Porosidad.

Por medio de los estudios desarrollados por Zimmerman et al. [32], se encuentran las expresiones que relacionan la presión de poro y los esfuerzos totales, dado que la

porosidad está definida en función de dos variables, el volumen poroso y el volumen total. Una expresión para la porosidad es la dada en la ecuación (F- 11)

$$\phi = \frac{V_p}{V_b} \quad (\text{F- 11})$$

Derivando a ambos lados de la ecuación anterior y reagrupando términos se tiene:

$$d\phi = \frac{1}{V_p} dV_p - \frac{1}{V_b} dV_b \quad (\text{F- 12})$$

Aplicando la ley de Hooke tanto para el volumen poroso como para el volumen total [32]:

$$\begin{aligned} \frac{dV_p}{V_p} &= -c_{pc}(d\bar{\sigma} - \alpha_p dP) \\ \frac{dV_b}{V_b} &= -c_{bc}(d\bar{\sigma} - \alpha_b dP) \end{aligned} \quad (\text{F- 13})$$

Reemplazando las ecuaciones de la expresión (F- 13) en la ecuación (F- 12) y teniendo en cuenta las relaciones (F- 6) y de acuerdo a Zimmerman [32] $\alpha_p = \alpha_b = 1$ se obtiene:

$$d\phi = -(c_{bc}(1 + \phi) - c_r)(d\bar{\sigma} - dP) \quad (\text{F- 14})$$

En donde $\bar{\sigma}$ es el esfuerzo efectivo promedio.

La anterior ecuación explica la variación de porosidad con el esfuerzo efectivo, como se pretendía.

Discretización de la Ecuación de Porosidad.

La ecuación de porosidad hallada se discretiza utilizando un esquema totalmente implícito, y queda expresada de la siguiente manera:

$$\phi_{i,j,k}^{n+1} - \phi_{i,j,k}^n = (-c_{bci,j,k}^{n+1} + c_{bci,j,k}^{n+1} \phi_{i,j,k}^{n+1} + c_r)(\bar{\sigma}_{i,j,k}^{n+1} - \bar{\sigma}_{i,j,k}^n) \quad (\text{F- 15})$$

Reagrupando términos semejantes, se obtiene la expresión final para la ecuación (F- 15):

$$\phi_{i,j,k}^{n+1} = \frac{-\phi_{i,j,k}^n - (-c_{bci,j,k}^{n+1} - c_r)[(\bar{\sigma}_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}) - (\bar{\sigma}_{i,j,k}^n - p_{i,j,k}^n)]}{1 - c_{bci,j,k}^{n+1}[(\bar{\sigma}_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}) - (\bar{\sigma}_{i,j,k}^n - p_{i,j,k}^n)]} \quad (\text{F- 16})$$

Permeabilidad

El modelo usado para el estudio de la permeabilidad radica en el planteado por Pedrosa [37], donde involucra el concepto de módulo de permeabilidad, como una variable que acompañada del estado de esfuerzos define el grado de sensibilidad a esfuerzos y deformaciones del yacimiento en estudio. Para un medio sensible a esfuerzos, la permeabilidad depende del grado de intensidad del esfuerzo de confinamiento efectivo asociado al cambio en presión de poro y estado dinámico de esfuerzos.

En la ecuación (F- 17) se presenta la permeabilidad como una función de la presión y del esfuerzo de confinamiento absoluto

$$K_{ij} = K_{ij}(P, \sigma_m) \quad (\text{F- 17})$$

En forma diferencial la ecuación (F- 17) puede ser expresada como (F- 18)

$$dK_{ij} = \frac{\partial K_{ij}}{\partial P} dP + \frac{\partial K_{ij}}{\partial \sigma_m} d\sigma_m \quad (\text{F- 18})$$

De acuerdo a la definición del módulo de permeabilidad en correlación a un evento dado, Pedrosa [37] planteó el módulo de permeabilidad por presión presentado en la ecuación (F- 19) y el módulo de permeabilidad por geomecánica planteado en la ecuación (F- 20).

$$\gamma_{ijp} = \frac{1}{K_{ij}} \left(\frac{\partial K_{ij}}{\partial P} \right)_{\sigma_m} \quad (\text{F- 19})$$

$$\gamma_{ijc} = -\frac{1}{K_{ij}} \left(\frac{\partial K_{ij}}{\partial \sigma_m} \right)_p \quad (\text{F- 20})$$

Con las expresiones anteriores, la permeabilidad puede ser expresada como en la ecuación (F- 21):

$$dK_{ij} = \gamma_{ijp} K_{ij} dP - \gamma_{ijc} K_{ij} d\sigma_m \quad (\text{F- 21})$$

Integrando la ecuación (F- 21) asumiendo que los módulos de permeabilidad son constantes para cualquier estado mecánico de presión y esfuerzos,

$$\int_{K_{ijo}}^{K_{ij}} \frac{dK_{ij}}{K_{ij}} = \gamma_{ijp} \int_{P_o}^P dP - \gamma_{ijc} \int_{\sigma_{mo}}^{\sigma_m} d\sigma_m \quad (\text{F- 22})$$

Finalmente la ecuación para permeabilidad considerando esfuerzos totales esta expresada en la ecuación (F- 23).

$$K_{ij}(P, \sigma_m) = K_{ijo} e^{\gamma_{ijp}(P-P_o) - \gamma_{ijc}(\sigma_m - \sigma_{mo})} \quad (\text{F- 23})$$

Ahora bien, el objetivo es definir cómo se comporta finalmente la permeabilidad con el esfuerzo de confinamiento efectivo, que matemáticamente puede ser expresado con la ecuación (F- 24).

$$K_{ij} = K_{ij}(\sigma'_m) \quad (\text{F- 24})$$

De igual manera se puede establecer un módulo de permeabilidad que acople el efecto de la presión de poro y el estado de esfuerzos:

$$\gamma_{ije} = -\frac{1}{K_{ij}} \frac{\partial K_{ij}}{\partial \sigma'_m} \quad (\text{F- 25})$$

Así la permeabilidad, puede ser expresada en forma diferencial de la siguiente manera (F- 26)

$$dK_{ij} = -\gamma_{ije}K_{ij}d\sigma'_m \quad (\text{F- 26})$$

Integrando y asumiendo que el módulo de permeabilidad es una constante para todo estado de esfuerzos efectivos se presenta la ecuación (F- 27).

$$\int_{K_{ij_0}}^{K_{ij}} \frac{dK_{ij}}{K_{ij}} = -\gamma_{ije} \int_{\sigma'_{m_0}}^{\sigma'_m} d\sigma'_m \quad (\text{F- 27})$$

Así, finalmente la permeabilidad en términos del esfuerzo efectivo puede ser expresada por la ecuación (F- 28).

$$K_{ij} = K_{ij_0} e^{-\gamma_{ije}(\sigma'_m - \sigma'_{m_0})} \quad (\text{F- 28})$$

Por lo general, la permeabilidad tangencial es despreciable en comparación con la permeabilidad radial o vertical; así una regla general para el tratamiento de la permeabilidad puede ser expresada por la ecuación (F- 29).

$$K_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ K_{ij} > 0 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (\text{F- 29})$$

A partir de lo anterior, en forma matricial, se tiene la expresión (F- 30).

$$\underline{K}_{ij} = \begin{pmatrix} K_{11_0} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22_0} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma_{ij11e}(\sigma'_m - \sigma'_{m_0})} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\gamma_{ij22e}(\sigma'_m - \sigma'_{m_0})} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\gamma_{ij33e}(\sigma'_m - \sigma'_{m_0})} \end{pmatrix} \quad (\text{F- 30})$$

Además, si se toma un módulo de permeabilidad isotrópico, la permeabilidad en forma matricial estaría expresada por la ecuación (F- 31).

$$\underline{K}_{ij} = e^{-\gamma_{ije}(\sigma'_m - \sigma'_{mo})} \begin{pmatrix} K_{11o} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22o} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33o} \end{pmatrix} \quad (\text{F- 31})$$

Expresando en coordenadas cilíndricas (F- 32)

$$\underline{K}_{ij}(\sigma'_m) = \begin{pmatrix} K_{rr0} e^{-\gamma_{ije}(\sigma'_m - \sigma'_{mo})} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\theta\theta0} e^{-\gamma_{ije}(\sigma'_m - \sigma'_{mo})} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz0} e^{-\gamma_{ije}(\sigma'_m - \sigma'_{mo})} \end{pmatrix} \quad (\text{F- 32})$$

Los cambios de permeabilidad también pueden ser diferenciados desde los procesos de completamiento y producción, dando lugar a daños de formación desde la mecánica de la cementación y terminación del pozo y por el comportamiento termodinámico de los fluidos, como puede ser la presencia de bancos de condensado en la zona cercana a la cara del pozo. Hawkins [38] estableció un modelo sencillo para describir el daño ocasionado por bloqueo en flujo radial, que puede ser expresado en la ecuación (F- 33).

$$S = \left(\frac{K_{rr}}{K_{rrs}} - 1 \right) \ln \left(\frac{r_s}{r_w} \right) \quad (\text{F- 33})$$

Donde los parámetros K_{rr} , K_{rrs} , r_s son respectivamente la permeabilidad radial original del sistema, la permeabilidad dañada (ya sea debido a estimulación o producción) y el radio de daño.

G. Anexo 7: Subrutinas del Modelo Computacional.

En este anexo se presenta una breve descripción de las subrutinas asociadas al modelo computacional y los datos de entrada del simulador.

Datos de Entrada:

Para la correcta inicialización del simulador es necesario dar unos datos iniciales. La carpeta Input, contiene archivos de texto, que pueden permitir el ingreso de las variables necesarias. Los archivos son los siguientes:

- ***Failure Criterion:*** En este archivo se determina el criterio de falla con el que se va a trabajar y las variables necesarias según el criterio escogido.
- ***Geomechanics Variables:*** En este archivo se da el valor proveniente del modelo geomecánico a las propiedades elásticas de la roca.
- ***Grid Conditions:*** En este archivo se discretiza el número de bloques en cada dirección de la malla cilíndrica.
- ***Initial Geomechanical State:*** En este archivo se ingresa el estado inicial de esfuerzos en los tres dominios geomecánicos que trabaja el simulador.
- ***Mechanical Damage Values:*** Se asignan los valores del vector de daño mecánico para que el simulador ajuste.
- ***Numerical Simulation Conditions:*** Se presentan las condiciones de simulación, acoplado o desacoplado y el método de solución del sistema de ecuaciones.
- ***Permeability Modulus Values:*** Se asignan valores al vector de módulo de permeabilidad para el ajuste del simulador.
- ***Pressure Test Schedule:*** Si se tiene un perfil de presiones se define en este archivo.

- **PVT Method:** Se escoge el tipo de correlaciones para caracterizar el fluido, si son para un Black Oil o para un Heavy Oil.
- **Rate Schedule:** Se introduce una historia de producción a representar del pozo en estudio.
- **Well Completion:** En este archivo se ingresa el tipo de completamiento que tiene el pozo.
- **Well Information:** En este archivo se presentan los datos generales característicos del pozo, de la formación y del fluido.

Subrutinas:

- **Elastoplasticidad.f90:** Este es el programa principal del simulador, desde donde se realiza la inicialización y los cálculos del sistema a evaluar.
- **Lineal_Interpolation.f90:** Esta subrutina realiza la interpolación lineal de la variable que se necesite.
- **Modules.f90:** Aquí se presentan los módulos donde se definen las variables globales del programa.
- **Postprocessing_results.f90:** En esta subrutina se realizan los archivos de salida para presentar los resultados del simulador.

El conjunto de subrutinas que comprende el simulador numérico, está dividido en carpetas que permiten la fácil localización de una u otra.

Carpeta PVT Behaviour

- **Heavy_Oil_Properties.f90:** En esta subrutina se presentan las correlaciones necesarias para el cálculo de las propiedades del fluido considerando un crudo pesado.
- **Oil_Correlations.f90:** Esta subrutina calcula las propiedades del fluido cuando se trabaja con un petróleo negro.
- **PVT_Properties_Table.f90:** En esta subrutina se genera una tabla correspondiente a cada propiedad del fluido en función de la presión.

Carpeta Initialization Data

- ***Iterative_variables.f90***: En esta subrutina se realiza el código de las variables iterativas (Daño mecánico y Modulo de permeabilidad).
- ***Well_Information.f90***: Esta subrutina se encarga de leer todos los datos de entrada proveniente de los archivos de texto.

Carpeta Grid Conditions

- ***Generate_Simulation_Grid.f90***: En esta subrutina se genera la malla cilíndrica a trabajar, considerando un dominio externo para las ecuaciones de geomecánica y un interno donde se solucionan dichas ecuaciones y adicionalmente las de presión.
- ***Iterative_Simulation_Variables.f90***: En esta subrutina se dimensionan todas las variables de simulación, teniendo en cuenta el dominio en el que trabajan.
- ***Size_Simulation_Variables.f90***: En esta subrutina se dimensiona el tamaño de las variables de simulación.

Carpeta Initial Conditions

- ***Assingnig_Initial_Conditions.f90***: En esta subrutina se asignan las condiciones iniciales a cada una de las variables del modelo.
- ***Initial_Effective_Stress_Profile.f90***: En esta subrutina se realiza el perfil inicial de los esfuerzos efectivos actuantes en toda la malla de simulación.
- ***Initial_Geomechanical_Properties_Profile.f90***: En esta subrutina se realiza el perfil inicial de las propiedades elásticas en toda la malla de simulación.
- ***Initial_Permeability_Tensor_Profile.f90***: En esta subrutina se realiza el perfil inicial de permeabilidades en toda la malla de simulación.
- ***Initial_Porosity_Profile.f90***: En esta subrutina se realiza el perfil inicial de porosidad en toda la malla de simulación.
- ***Initial_Pressure_Profile.f90***: En esta subrutina se realiza el perfil inicial de presión en toda la malla de simulación.
- ***Initial_PVT_Properties_Profile.f90***: En esta subrutina se realiza el perfil inicial de presión en toda la malla de simulación.

- ***Initial_Resistance_Properties_Profile.f90***: En esta subrutina se realiza el perfil inicial de las propiedades de resistencia en toda la malla de simulación.
- ***Initial_Stress_Profile.f90***: En esta subrutina se realiza el perfil inicial estado de esfuerzos totales en toda la malla de simulación.
- ***Properties_Inicialization.f90***: En esta subrutina se realiza la inicialización de las variables para la simulación.

Carpeta Geomechanical Behavior

- ***Elastoplastic_Matrix.f90***: En esa subrutina se define la matriz de componentes elasto-plásticas.
- ***Rock_Mechanical_Properties_Table.f90***: En esta subrutina se genera la tabla de propiedades elásticas de la roca.
- ***Rock_Resistance_Properties_Table.f90***: En esta subrutina se genera la tabla de propiedades de resistencia de la roca.
- ***Yield_Verification.f90***: En esta subrutina se verifica si los bloques están fallados, realizando una comparación entre el deviatorico propio de cada modelo y el deviatorico definido.

Carpeta Well Completion

- ***Rates_Distribution.f90***: En esta subrutina se realiza la distribución del comportamiento de producción dependiendo del completamiento dispuesto inicialmente.

Carpeta Numerical Simulation

Carpeta Displacements

Carpeta Radial Direction

- ***Elastoplastic_Stencils_Ur.f90***: En esta subrutina se programan los stencils de la ecuación de equilibrio radial.
- ***Gamma_Constants_Radial_Equation.f90***: En esta subrutina se programan las constantes gamma que relacionan las constantes elásticas de la roca con las componentes de la matriz de elasto-

plasticidad, y que son necesaria para el cálculo de los stencils en dirección radial.

- ***Geomechanical_Boundaries_Ur.f90***: En esta subrutina se definen las condiciones de frontera para la ecuación en dirección radial.
- ***Numerical_Method_Ur.f90***: En esta subrutina se programa el método de solución para la ecuación de equilibrio radial.

Carpeta Tangential Direction

- ***Elastoplastic_Stencils_Ut.f90***: En esta subrutina se programan los stencils de la ecuación de equilibrio tangencial.
- ***Gamma_Constants_Tangential_Equation.f90***: En esta subrutina se programan las constantes gamma que relacionan las constantes elásticas de la roca con las componentes de la matriz de elasto-plasticidad, y que son necesaria para el cálculo de los stencils en dirección tangencial.
- ***Geomechanical_Boundaries_Ut.f90***: En esta subrutina se definen las condiciones de frontera para la ecuación en dirección tangencial.
- ***Numerical_Method_Ut.f90***: En esta subrutina se programa el método de solución para la ecuación de equilibrio tangencial.

Carpeta Vertical Direction

- ***Elastoplastic_Stencils_Uz.f90***: En esta subrutina se programan los stencils de la ecuación de equilibrio vertical.
- ***Gamma_Constants_Vertical_Equation.f90***: En esta subrutina se programan las constantes gamma que relacionan las constantes elásticas de la roca con las componentes de la matriz de elasto-plasticidad, y que son necesaria para el cálculo de los stencils en dirección vertical.

- ***Geomechanical_Boundaries_Uz.f90***: En esta subrutina se definen las condiciones de frontera para la ecuación en dirección vertical.
- ***Numerical_Method_Uz.f90***: En esta subrutina se programa el método de solución para la ecuación de equilibrio vertical.

Carpeta Iterative Properties

- ***Geomechanical_Properties_Update.f90***: En esta subrutina se actualizan las propiedades elásticas de la roca con cada paso de tiempo.
- ***Geomechanical_State_Update.f90***: En esta subrutina se actualiza el estado de esfuerzos de la roca con cada paso de tiempo.
- ***Petrophysics_Properties_Update.f90***: En esta subrutina se actualizan las propiedades petrofísicas de la roca, como porosidad y permeabilidad, con cada paso de tiempo.
- ***PVT_Properties_Update.f90***: En esta subrutina se actualizan las propiedades del fluido con cada paso de tiempo.
- ***Geomechanical_Properties_Update.f90***: En esta subrutina se actualizan las propiedades elásticas de la roca con cada paso de tiempo.
- ***Resistance_Properties_Update.f90***: En esta subrutina se actualizan las propiedades de resistencia de la roca con cada paso de tiempo.

Carpeta Pressure

- ***Numerical_Method_Pressure.f90***: En esta subrutina se programa el método numérico que permite dar solución a las ecuaciones de presión.
- ***Pressure_Boundaries.f90***: En esta subrutina se programan las fronteras para la ecuación de flujo de fluidos.
- ***Pressure_Stencils.f90***: En esta subrutina se programan los stencils de la ecuación de flujo de fluidos.

Carpeta Yield Criteria

- ***Cam_Clay_Modified.f90***: En esta subrutina se programa el modelo de cedencia de Cam-Clay Modificado, que permite definir si el material tiene cedencia o no.
- ***Drucker_Prager_Criteria.f90***: En esta subrutina se programa el modelo de cedencia de Drucker-Prager.

H. Anexo 8: Simulador Comercial CMG.

El análisis con el simulador comercial se realiza con el fin de comparar resultados con una herramienta representativa para la industria del petróleo a nivel mundial. En este sentido es importante aclarar que la finalidad de esta tesis no es obtener resultados iguales a las herramientas comerciales, por el contrario, con base a las suposiciones hechas en el desarrollo del programa de cómputo, se busca identificar las diferencias entre los resultados y los conceptos que se manejan en cada herramienta.

El simulador con el que se pretende realizar la comparación de resultados es el proporcionado por la compañía CMG (*Computer Modelling Group*), este simulador tiene un portafolio de herramientas de modelamiento enfocadas a diferentes problemas, a continuación se presenta una breve reseña de las características de los simuladores que trabajan y un análisis de los resultados obtenidos con dicha herramienta.

Características de Simulación de la herramienta CMG.

Las características de simulación de la herramienta CMG, permite un acople de las ecuaciones de flujo de fluidos con geomecánica, por medio de la relación postulada por Settari y Mourits [39] entre la porosidad del yacimiento a la deformación volumétrica y la porosidad verdadera (Ecuación (8-1))

$$\varphi^* = (1 - \varepsilon_v)\varphi \quad (8-1)$$

La porosidad de yacimiento dada por φ^* es determinada por la expresión desarrollada por Tran et al. [42] en 2002 y es validada en cada paso de tiempo por el simulador. Las permeabilidades son calculadas en función a la porosidad del yacimiento o con las deformaciones volumétricas. [41].

La simulación en CMG, tiene las siguientes consideraciones:

- Aproximación a las pequeñas deformaciones.
- Los esfuerzos compresivos son positivos.

Método de Solución.

El método de solución que utilizan los módulos de CMG es elementos finitos, este método numérico permite la aproximación de las ecuaciones diferenciales parciales de geomecánica y flujo de fluidos y está pensado para darle solución a geometrías complejas.

En esencia se trata de una técnica que sustituye el problema diferencial por otro algebraico, aproximadamente equivalente, para el cual se conocen técnicas generales de resolución, para ello se hace uso de la subdivisión de una región sobre la cual están definidas las ecuaciones en formas geométricas simples denominadas elementos finitos. Las propiedades materiales y relaciones gobernantes en estos elementos se expresan en función de los valores desconocidos en las esquinas de los elementos o nodos. Una de las ventajas de este método es la facilidad de implementación en un programa computacional, que a su vez es una condición básica para su utilización ya que para el tratamiento de un problema en particular debe efectuarse un número muy elevado de operaciones para resolver sistemas algebraicos del orden de cientos o miles de ecuaciones. [42]. La generación de la malla se realiza propiamente en el módulo *Builder*, que para este caso será una malla cilíndrica con el pozo en el medio.

Acople.

El simulador CMG trabaja con dos métodos de acoplamiento nombrados, *One Way* y *Two Way*. Independiente del uso de un tipo de acople o del otro, la solución del sistema de ecuaciones está basada sobre una partición donde se separan las soluciones físicas del problema. Uno de los campos a ser analizados es el del comportamiento del fluido y el otro es el del sólido, en este sentido hay un tipo de transferencia de la solución obtenida en cada sistema.

La información intercambiada es dependiente del método de acople. Para el acople *One Way* solo la presión dependiente del fluido que actúa en el sólido se transfiere al sistema de ecuaciones que describen el comportamiento geomecánico, en la **Figura 8-1** se presenta un esquema sencillo de este acople. [43]. Por el contrario para el acople *Two Way* presentado en la **Figura 8-2**, además de tener en cuenta el comportamiento de la presión del fluido sobre el sistema sólido, también se consideran los desplazamientos en la ecuación de flujo. [43].

Figura 8-1: Método de Acople *One Way*. [43].

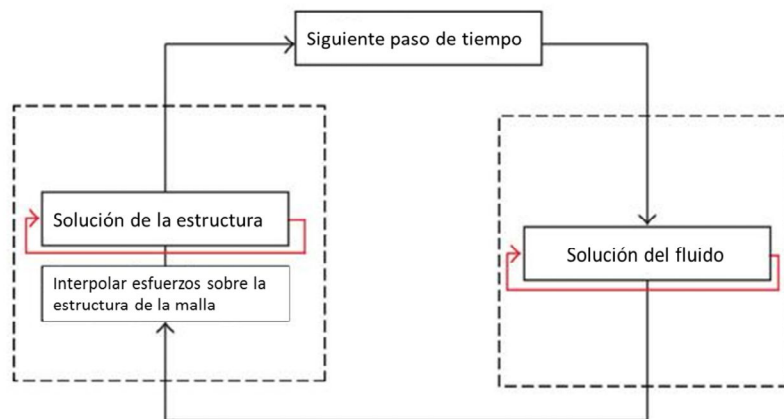
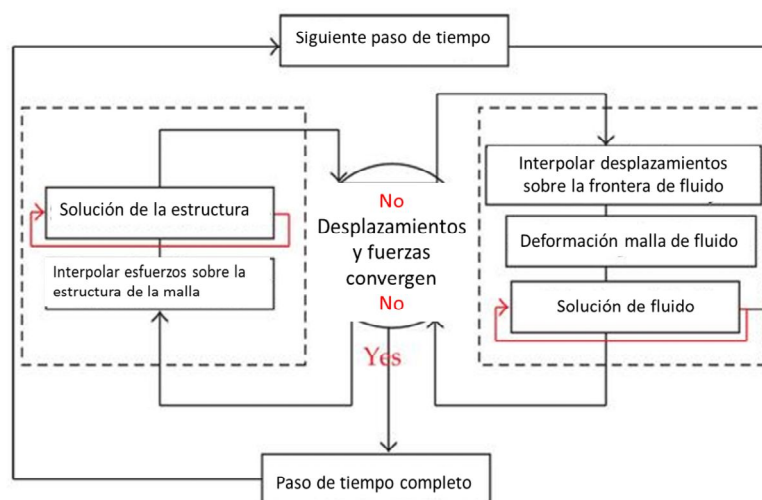


Figura 8-2: Método de Acople *Two Way*. [43].



En general, el acoplamiento *Two Way* es más acertado, especialmente donde el comportamiento del fluido es altamente influenciado por las deformaciones del sólido. El método de acople *One Way* no garantiza la conservación de energía en la interface, sin embargo el método *Two Way* si lo hace. Los beneficios de usar el acoplamiento *One Way* es el ahorro en tiempo de computación, y otro es que la deformación del dominio correspondiente al fluido no necesita ser calculado, lo cual provee una malla de calidad constante. [43].

Modelo Geomecánico Plástico en CMG.

A continuación se presenta una descripción del módulo elasto-plástico que trabaja el modelo STARS del simulador CMG.

El modelo de deformación plástica realiza un análisis del esfuerzo elasto-plástico de los elementos finitos de la formación del yacimiento utilizando un conjunto determinado de condiciones de desplazamiento y tracción de límites. La teoría de plasticidad provee la descripción teórica de la relación entre los esfuerzos y deformaciones que inciden sobre un material que presenta una respuesta elasto-plástica. [44]

Cuando un material se comporta elásticamente, sus propiedades de esfuerzo y deformación pueden escribirse, mediante dos constantes propias del material. Por ejemplo el módulo de Young y la relación de Poisson. Sin embargo, el material puede presentar comportamientos plásticos a un estado mayor de esfuerzo, en este caso, se deberá incluir un criterio de fluencia para describir el estado de esfuerzo en el cual se inicia el flujo plástico. Esto se complica aún más por el hecho de que diferentes clases de materiales presentan diferentes características elasto-plásticas. El comportamiento post-fluencia donde la deformación consiste en componentes tanto elásticos como plásticos, requiere relaciones adicionales para describir la fluencia plástica. [44]

La deformación plástica que ocurre una vez el material alcanza un estado de fluencia a un determinado nivel de esfuerzo se considera irreversible. Los criterios de fluencia de Mohr-Coulomb y de Drucker-Prager, que son apropiados para la descripción de material geológico, se encuentran actualmente disponibles para prescribir la condición de fluencia.

También hay una opción de deformación y endurecimiento isotrópico, que permite al material cobrar mayor resistencia en medida que acumula deformaciones plásticas. [44]. El comportamiento de carga y descarga cíclica a raíz de procesos cíclicos de inyección y producción puede modelarse. Durante el proceso de inyección, el estado de esfuerzo en una determinada ubicación puede alcanzar una condición de fluencia y comenzar a acumular deformaciones plásticas. Cuando se inicia la producción, el material puede ser descargado, lo que produce una disminución en el estado de esfuerzo desde la superficie de fluencia. Durante este período, el material puede perder algunas de las deformaciones elásticas reversibles. [44]

En el caso de un material elasto-plástico, se puede agregar un modelo tope al criterio de fluencia para evitar la compresión hidrostática ilimitada que puede producirse en el material durante la producción. [44]

En el módulo de geomecánica se resuelve el equilibrio de fuerzas de la formación y se calcula la dilatación/compresión volumétrica como resultado de la deformación tanto elástica como plástica. Los cambios de volumen de poro pueden producirse a raíz de la combinación de esfuerzos de compresión/tensión o de corte. Estos cambios de volumen de poro y los cambios conexos de las transmisibilidades se utilizan en el modelo de yacimientos para calcular la masa y el equilibrio energético del yacimiento. [44]