UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Unidad didáctica para la interpretación de la integral definida como el área de una región plana, mediante la modelación de las funciones en Geogebra

Yetza Ximena Díaz Pinzón

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

2015

Unidad didáctica para la interpretación de la integral definida como el área de una región plana, mediante la modelación de las funciones en Geogebra

Yetza Ximena Díaz Pinzón

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora:

Myriam Margarita Acevedo Caicedo

Magister en Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

2015

(Dedicatoria o lema)

A la máxima creación de la naturaleza: mi Lucci

Agradecimientos

Agradezco a Dios por poner en mi camino los planes y las personas adecuadas:

A la profesora Myriam Caicedo para compartirme sus conocimientos e ideas con paciencia y dedicación.

A mi familia y amigos por no permitirme retroceder.

Resumen

En la experiencia como docente del curso de Cálculo integral en el nivel universitario, he evidenciado, en diferentes grupos de estudiantes, dificultades relacionadas con la comprensión, interpretación y aplicación del concepto de integral definida. Aparte de lo anterior, al analizar la discusión del tema, antes mencionado, en libros de texto comúnmente utilizados por los docentes, se observó, que esta discusión es esquemática, formal y poco profunda. Teniendo en cuenta esta problemática, en la unidad didáctica que se presenta en este trabajo se plantea una aproximación intuitiva y secuencial al concepto.

Se describen, en el marco que fundamenta la unidad, elementos relacionados con la historia y la epistemología del concepto de integral, enfatizando en el análisis de los obstáculos epistemológicos y didácticos asociados a ellos y en los aspectos disciplinares relativos a la teoría de integración y en particular a la introducción del concepto de integral definida.

La unidad didáctica se inicia con actividades relacionadas con la determinación de áreas de regiones planas (regulares e irregulares), por recubrimiento, y propone secuencialmente situaciones que permiten aproximarse al concepto formal de integral definida, haciendo énfasis en procesos de visualización y generalización, con el apoyo del software Geogebra.

Palabras claves: Inscrito, circunscrito, recubrimiento, área, suma de Riemann, integral definida.

Abstract

Teaching experience in the course of integral calculus at the university level, I have shown, in different groups of students, difficulties related to the understanding, interpretation and application of the concept of definite integral. Apart from the above, in analyzing the discussion of the topic, above, in textbooks commonly used by teachers, it was noted that this discussion is schematic formal and shallow. Given this problem, in the teaching unit is presented in this paper, intuitive and sequential approach to the concept arises.

Are described under underlying unity, elements related to the history and epistemology of the concept of comprehensive, emphasizing the analysis of epistemological and didactic obstacles associated with them and the disciplinary aspects of the theory of integration and in particular the introduction of the concept of definite integral.

The teaching unit begins with determining related areas of flat regions (regular and irregular), for coating activities and proposes sequentially situations that allow approaching the formal concept of definite integral, emphasizing visualization and generalization processes, with Geogebra support software.

Keywords: Inscribed, circumscribed, covering, area, Sum of Riemann, definite integral.

Contenido

Lista de figuras

Introducción

El cálculo integral es una de las asignaturas del núcleo básico de las carreras de Ingeniería y es usual que los estudiantes universitarios que cursan esta asignatura muestren dificultades, que usualmente se relacionan, con sus conocimientos previos. Los docentes asignados a estos cursos asumen que los estudiantes conocen, interpretan y usan los conceptos básicos del álgebra, la geometría y el cálculo diferencial, que les permitan comprender conceptos y procedimientos que se introducirán en el curso; sin embargo, en la experiencia con diferentes grupos se han evidenciado, entre otras, dos dificultades en los estudiantes: no reconocen, ni interpretan características y propiedades de las funciones representadas gráfica o analíticamente y no han interiorizado aún el concepto de área de una región plana. Los estudiantes se limitan a recordar y usar fórmulas que no relacionan con las propiedades geométricas de las figuras para resolver problemas simples relacionados con triángulos o rectángulos. Estas dificultades inciden desde luego en la interpretación y aplicación del concepto de integral definida y se convierten en un obstáculo para avanzar en el curso de cálculo integral.

Aparte de lo anterior, se ha observado que los estudiantes no han sido motivados en cursos anteriores a usar las herramientas gráficas que los apoyen en el proceso de construcción de los conceptos, a pesar de que hoy en todos los textos se incluyen y proponen actividades relacionada con estas herramientas.

Para aportar a la solución de la problemática antes mencionada se planteó como objetivo de este trabajo: Diseñar una unidad didáctica para los cursos de cálculo integral de la Universidad de Boyacá, para interpretar la integral definida como área de una región plana a partir del estudio gráfico y analítico de funciones, usando el software Geogebra.

Para lograr este objetivo se aplicó inicialmente una prueba diagnóstica y en ella se revisaron conceptos previos, relativos a la noción de área y a la representación y análisis de funciones de variable y valor real. Para fundamentar el análisis de la prueba y diseñar la unidad se construyó el marco histórico, epistemológico, didáctico y disciplinar que se describe en cuatro de los cinco capítulos que conforman este trabajo.

El primer capítulo se inicia con una síntesis de los orígenes y desarrollos de la interpretación de la integral como área de una región plana, desde los planteamientos de los matemáticos griegos: las magnitudes inconmensurables, el axioma de continuidad y el método de exhaución de Eudoxo; la medida del círculo, la cuadratura de la parábola y el método de exploración mecánica de Arquímedes. Posteriormente se discuten algunos aportes de los matemáticos del siglo XVI, entre estos: los de Simón Stevin, Johannes Keppler, Galileo G., Cavalieri y Pierre de Fermat, relativos al concepto de integral definida. Se describen enseguida los desarrollos durante el siglo XVII de Barrow, Newton y Leibniz, y se concluye el capítulo con la referencia a los aportes fundamentales para la estructuración teórica del concepto de integral definida, en los siglos XIX y XX, de Riemann y Jordan.

En la parte inicial del segundo capítulo se describen obstáculos epistemológicos y didácticos relacionados con las dificultades de comprensión del concepto de integral definida que se evidencian en los estudiantes. En lo que respecta a lo epistemológico se refieren, entre otros, los inherentes a los conceptos de número real, límite, e infinito. En lo relativo a lo didáctico se mencionan: tiempo, paso de lo finito a lo infinito y desconexión entre los conceptos de área e integral definida. En la segunda parte del capítulo, y con la intención de relacionar con los obstáculos descritos, se analizan desde esta óptica, algunos textos universitarios y los resultados de la prueba diagnóstica aplicada a los estudiantes que inician el curso de cálculo integral.

En el tercer capítulo se presenta una síntesis de los aspectos disciplinares pertinentes al trabajo entre ellos: área de regiones planas, conjunto medible, sumas de Riemann, concepto y propiedades de la integral definida, funciones Riemann integrables, teorema fundamental del cálculo, medida de Jordan, funciones Jordan integrables. Para esta síntesis se referencian algunos apartes de (Acosta, 2012).

El cuarto capítulo se dedica a los aspectos didácticos, se citan algunas investigaciones relacionadas con el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo a nivel superior. Entre ellas se destaca (Apostol, 1973) sobre la introducción del concepto de integral definida y se citan además otras que proponen el uso de Geogebra para la enseñanza del cálculo integral y la construcción gráfica y analítica de conceptos de área mediante la manipulación de funciones.

El quinto capítulo está dedicado a la unidad didáctica que consta de seis actividades: área de regiones planas regulares e irregulares, polígonos inscritos y área del círculo, área de regiones planas en un sistema cartesiano, área de regiones planas limitadas por curvas y una aproximación al concepto y propiedades de la integral definida (Integral de Riemann).

En la unidad Didáctica se presenta una aproximación intuitiva y secuencial a la interpretación de la integral definida como área, que parte de la noción inicial de área por recubrimiento de una región plana (polígonos regulares e irregulares) y se aproxima paulatinamente al concepto formal de integral definida, haciendo énfasis en procesos de visualización y generalización, con el apoyo del software Geogebra como herramienta para la construcción de curvas, la determinación de intersecciones y la caracterización de regiones del plano. Para cerrar el capítulo se incluye un análisis de resultados de la aplicación de la unidad didáctica a un grupo de estudiantes del curso de cálculo integral.

Se incluyen además una serie de applets y una guía básica (que aparece como anexo) para que los estudiantes que trabajen con la secuencia de actividades puedan usar el Geogebra como herramienta para representar funciones, delimitar regiones del plano y construir iterativamente polígonos inscritos y circunscritos y aproximarse al concepto de integral definida.

En la parte final del trabajo se presentan las conclusiones y las recomendaciones.

1. Marco Histórico

1.1. Orígenes del cálculo

Los orígenes del cálculo, en particular del cálculo integral, se remontan a los trabajos de los matemáticos griegos (entre 400 y 200 años antes de Cristo), evolucionan en los siglos XIV y XVII y se consolidan en los siglos XIX e inicios del XX. A continuación presentamos una síntesis de los aportes más importantes para este desarrollo en cada época.

1.2. La matemática Griega

Matemáticos griegos como Eudoxo de Cnido, Euclides, Arquímedes y muchos otros, contribuyeron de forma trascendental en el desarrollo de la matemática, los fundamentos teóricos de la geometría euclidiana[1] y de la aritmética permitieron iniciar un proceso de estructuración formal de esta disciplina. La discusión que se generó desde esta época, acerca de la naturaleza de los números que no pueden ser expresados como razones de números enteros positivos y la introducción a partir de allí de la noción de inconmensurabilidad, motivó la sustitución de las concepciones aritméticas (propias de la academia Pitagórica) por las geométricas. Se evidenció que no es posible demostrar la inconmensurabilidad entre dos magnitudes empíricamente sino que se requiere de una teoría formal que la sustente y se plantearon entonces argumentos formales sobre la

[1] (Vega, 1991) muestra una amplia descripción del trabajo de Euclides en particular sobre los libros I a iV

existencia de cantidades inconmensurables, renunciando a la argumentación basada solamente en la intuición y en las experiencias físicas.

1.2.1. Eudoxo de Cnido (408 A.C-355 A.C).

Eudoxo de Cnido fue un astrónomo y matemático que contribuyó significativamente al desarrollo de la matemática griega, especialmente en lo relacionado con dos conceptos fundamentales para el cálculo diferencial e integral: la teoría de las proporciones que se antecedente de la teoría de cuadraturas y curvaturas de Arquímedes que se encuentran en el *libro V de los Elementos de Euclides* y el método de exhaución (libro XII. Elementos) antecesor del método de paso al límite.

Para resolver el problema de las magnitudes inconmensurables Eudoxo planteó el que ha sido considerado como el primer proceso lógicamente correcto para resolver el problema de la continuidad, del infinito y los problemas de significado de los números irracionales. En la estructuración de dicho proceso, Eudoxo usó la definición de razón de manera que abarcara tanto magnitudes conmensurables como inconmensurables y de ello se derivó la teoría de la proporcionalidad. Paralelamente planteó el llamado Axioma de Eudoxo - Arquímedes (Definición V.4. Elementos) y propuso el método de exhaución, (Euclides, Proposición X.1). A continuación se describirán más ampliamente los planteamientos de Eudoxo.

La razón y las magnitudes inconmensurables. Para comparar dos magnitudes inconmensurables del mismo tipo, Eudoxo no se centró en analizar el significado de la razón entre ellas sino en establecer una proporción: igualdad de razones de dos pares de magnitudes del mismo tipo; como se plantea en la definición V.5 que se encuentra en el *Libro V de los Elementos de Euclides:*

> "Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente."

En (González, U.P.M, 2008) se explica esta proposición de la siguiente manera:

> "Si a, b son dos magnitudes geométricas del mismo tipo y c, d son también del mismo tipo (aunque no necesariamente del mismo tipo que a y b). Eudoxo define que las razones: $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son proporcionales: $\frac{a}{b} = \frac{C}{d}$, cuando para cualquier par de enteros positivos n y m, se tiene: $na > mb$ y $nc > md$ ó $na = mb$ y $nc = md$, o $na < mb$ y $nc < md$".

Eudoxo introdujo el actualmente denominado "axioma de Eudoxo-Arquímedes" en la definición V.4 de los Elementos de Euclides de la siguiente manera:

> "Se dice que dos magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que supere a la otra".

Posteriormente, Arquímedes enunció este principio haciendo referencia a la adición de magnitudes "tan grandes o tan pequeñas como se quiera"; por una parte lo consideró un axioma y lo enunció en el postulado 5 del Libro I en su obra *Sobre la Esfera y el Cilindro*, de la siguiente manera:

> "Dadas dos líneas, dos superficies o dos sólidos desiguales, la mayor de estas figuras excede a la menor en una magnitud tal que, añadida a sí misma, es capaz de exceder cualquier magnitud propuesta de las que decimos que guardan razón".

En su trabajo *Sobre la Cuadratura de la Parábola,* Arquímedes enuncia el siguiente lema:

Lema 1.2.1. El exceso por el que la mayor de dos áreas desiguales sobrepasa a la inferior, puede, si se añade a sí mismo sobrepasar a toda área finita dada.

Los primeros problemas relacionados con el cálculo que documentan los historiadores son los planteados por Zenon de Elea relativos a la subdivisión sucesiva de magnitudes, que por la concepción que se tenía en ese momento respecto a los procesos infinitos, planteaban paradojas. Desde la escuela platónica, Eudoxo abordó estos problemas basándose en el principio que lleva su nombre, presentado por Euclides como: "*La Proposición X.1. de Los Elementos*", de la siguiente manera:

Proposición 1.2.1. Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se quita una magnitud mayor que su mitad y de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

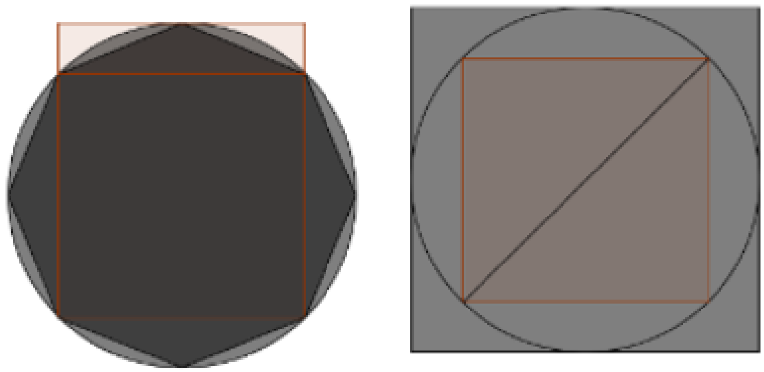
Posteriormente, los griegos quisieron determinar el área de figuras curvilíneas (como círculos o segmentos de parábola), asumiendo que estas tenían área, y esta era una magnitud geométrica del mismo tipo que la de las figuras poligonales.

Para determinar el área $a(A)$ de una figura curvilínea A, los griegos buscaban una sucesión de polígonos $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ aproximando progresivamente sus áreas al área de A, refiriéndose intuitivamente a la idea de límite. Con el método de exhaución, Eudoxo evita esta idea imprecisa de límite planteando que en la sucesión de polígonos $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ se puede encontrar un polígono tal que la diferencia entre el área a determinar y el área de este polígono sea "tan pequeña como se quiera". (Fernández, 2011)

Eudoxo aplicó el método de exhaución para demostrar los teoremas concernientes al círculo, la pirámide y el cono, planteados antes por Hipócrates y Demócrito, respectivamente, y enunciados en las Proposiciones XII.2, XII.7 y XII.10 de *Los Elementos de Euclides*. A continuación se ilustran estos desarrollos.

Área del círculo. Para determinar el Área del círculo se inscribe en él un cuadrado, la diferencia entre el área del círculo y el área del cuadrado es menor que la mitad del área del círculo, puesto que el área del cuadrado inscrito es la mitad del área del cuadrado circunscrito y ésta es mayor que el área del círculo. Luego se bisecan los arcos cuya cuerda es el lado del cuadrado y se determinan así cuatro triángulos isósceles. Con los vértices de estos triángulos se forma un octógono regular inscrito en el círculo. La diferencia entre las áreas de uno cualquiera de los segmentos circulares, determinado por un lado del cuadrado y la circunferencia, y el correspondiente triangulo isósceles, es menor que la mitad del área determinada por el segmento circular y el lado del rectángulo que comparte dos de sus vértices con el octógono. La ilustración del proceso se presenta a continuación.

Figura 1-1. Uso del método de exhaución en la cuadratura de la parábola planteado por Arquímedes. (Eves, 1990).



A partir de la construcción anterior, es posible introducir el Lema de exhaución del círculo:

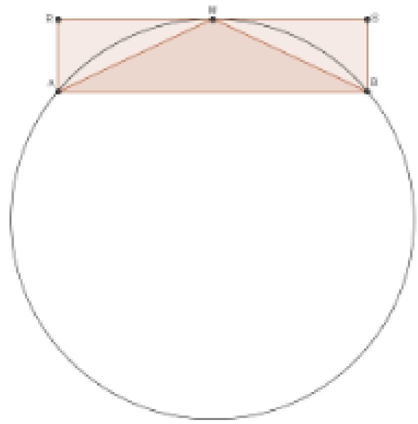
Lema 1.2.2. Dado un círculo C y un número, $e > 0$, existe un polígono regular P inscrito en C tal que $a(C) - a(P) < e$.

Euclides empleó el Método de Exhaución de Eudoxo en el $Libro\ XII$ de los elementos, lo que aporta un medio de comparación dando las razones entre las áreas o volúmenes de las figuras y algunos de sus componentes geométricos. En particular el lema de exhaución, del círculo, es usado al demostrar l*a Proposición XII.2 de los Elementos* (Eves, 1990, pág. 381) (Teoréma de Hipócrates.):

Teorema 1.2.1. Los círculos son entre sí cómo los cuadrados de sus diámetros.

Esto es equivalente a decir que si C_1 y C_2 son dos círculos de radios r_1 y r_2 y sus áreas son $a(C_1)$ y $a(C_2)$, respectivamente, entonces, $\frac{a(C_1)}{a(C_2)} = \frac{(r_1)^2}{(r_2)^2}$.

Figura 1-2. Lema de exhaución aplicado al área del círculo (Eves, 1990)



La construcción anterior ilustra geométricamente el uso del lema de exhaución del círculo para demostrar el *Teorema de Hipócrates,* análogamente el *Teorema 1.2.1.* Garantiza que la razón entre el área de un círculo cualquiera y el cuadrado de su radio es siempre la misma, es constante y esta constante es precisamente el número π, al que Euclides no dio trascendencia, pero Arquímedes le dedicó su obra: *Sobre la Medida del Círculo.* El método de exhaución de Eudoxo dota de consistencia lógica a la matemática al transformar en rigurosos los argumentos infinitesimales de carácter inductivo que daban los matemáticos anteriores.

1.2.2. Arquímedes de Siracusa (287-212 A.C.)

Este matemático usó el método de exhaución como su método de razonamiento en obras como: *Sobre la Cuadratura de la Parábola, Sobre la Esfera y el Cilindro, Sobre la Medida del Círculo, Sobre las Espirales, Sobre Conoides y Esferoides.* Usó el método para demostrar formalmente las cuadraturas y curvaturas que había concebido a través de su método de exploración mecánica. A pesar de sus múltiples inventos prácticos, mostró en sus escritos que daba más importancia a los principios generales que a las aplicaciones. Autores (Hilbert, (s.f.)) (Klein, (s.f.)) del siglo XX han resaltado la importancia que Arquímedes concedió al principio de Eudoxo en la construcción de las estructuras geométricas. A continuación nos referiremos a los trabajos de Arquímedes relacionados con el concepto de integral definida como área de una región plana.

En su trabajo *Medida del círculo,* Arquímedes encontró una muy buena aproximación a π, que se expresa a través de la desigualdad $3+\frac{10}{71}$ <$\pi < 3$ +3 +$\frac{10}{70}$. Para ello estableció relaciones entre perímetro y diámetro y entre el área de un círculo y las áreas de polígonos regulares de $3, 6, 12, 24, 48$ y 96 lados inscritos y circunscritos al círculo.

En la *Cuadratura de la parábola,* Arquímedes trata sobre la cuadratura de un segmento parabólico. Plantea dos métodos para realizar esta cuadratura, uno mecánico y otro geométrico (Eves, 1990, págs. 382-383) se refiere a estas soluciones mediante la siguiente descripción:

Sean C, D, E puntos situados sobre el arco de un segmento parabólico (Figura 1-C), obtenidos al dibujar los segmentos LC, MD, NE paralelos al eje de la parábola a través de los puntos medios L, M, N de AB, CA, CB desde la geometría de la parábola, Arquímedes muestra que:

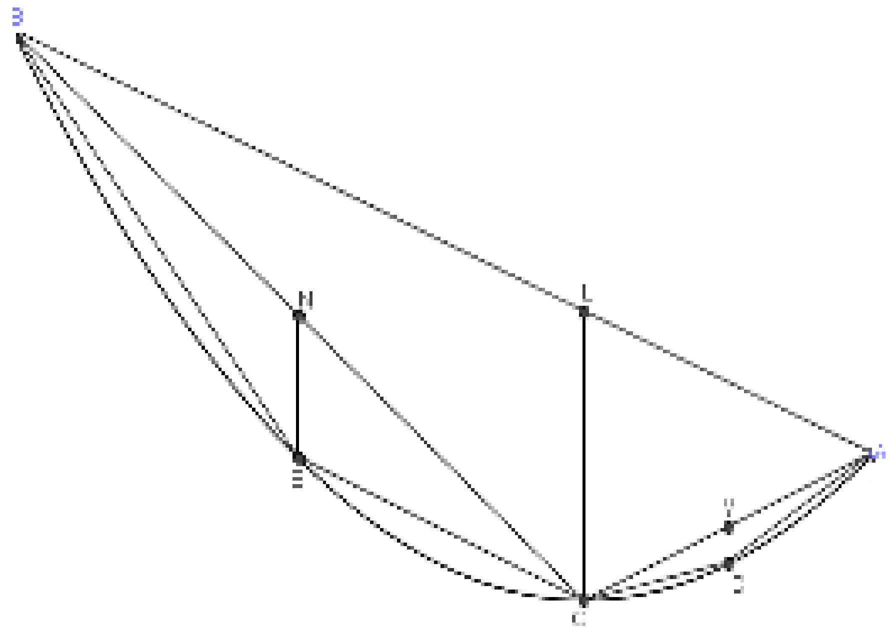
$$\triangle\, CDA + \triangle\, CEB = \frac{\triangle\, ACB}{4}$$

Repitiendo la aplicación de esta idea se sigue que el área del segmento parabólico está dada por:

$\triangle\, ABC + \frac{\triangle ABC}{4} + \frac{\triangle ABC}{4^2} + \frac{\triangle ABC}{4^3}$+…+, factorizando lo anterior puede expresarse como

$\triangle\, ABC(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots)$, y sustituyendo el valor de la suma geométrica se concluye que el área del segmento parabólico es $\frac{4}{3} \triangle\, ABC$

Figura 1-3. Uso del método de exhaución en la cuadratura de la parábola (Eves, 1990)



Arquímedes empleó la doble reducción al absurdo como complemento del método de exhaución. Al resolver el problema de determinar algunas áreas y volúmenes encontró valores equivalentes a los que se obtienen hoy al calcular integrales definidas.

Según lo describe (Gutiérrez, 2006) en 1906 Heirberg descubrió un palimpsesto[2] en el cuál pudo descifrar una carta en la que Arquímedes revelaba las características de su método: exploraba (experimentaba) una relación entre áreas o volúmenes sobre la que había hecho conjeturas y tras haber logrado un resultado coherente procedía a desarrollar la demostración geométrica.

[2] Documento que contenía la carta de Arquímedes a Dositeo, explicando su método de

la exploración mecánica.

Figura 1-4. El Palimpsesto (González, U.P.M, 2008)

Es decir, para determinar el área de una figura plana o el volumen de un determinado cuerpo presentaba el siguiente razonamiento usando su método de exploración mecánica. Sea A la figura o el cuerpo y B otra figura o cuerpo cuya área o cuyo volumen son conocidos, así como sus respectivos centros de gravedad. En una balanza se ubican en un plato porciones muy pequeñas de A y en el otro plato las correspondientes de B, para compararlas (esas porciones muy pequeñas serán segmentos paralelos, en el caso de las figuras o cilindros de altura muy pequeña, en el caso de los cuerpos siendo paralelos los planos a las bases de todos ellos). Cuando se equilibran los elementos de A, colocados en un brazo de la balanza, con los elementos B colocados en el otro brazo se ha determinado el área o el volumen de A.

Con este método Arquímedes determinó el volumen de la esfera, sin embargo, su respeto por el rigor matemático no le permitió aceptarlo como una prueba formal.

El método muestra una potente idea respecto a las magnitudes, concibiéndolas como una composición de un gran número de piezas atómicas. Este método es comparable al moderno método de paso al límite, para determinar el área de una región o el volumen de un sólido. Arquímedes describió perfectamente su método y su esencia es la misma que subyace a la teoría de integración actual como veremos posteriormente.

En su trabajo *Sobre la esfera y el cilindro I y II*, Arquímedes usó su método y demostró resultados que se habían obtenido previamente usando otros procedimientos, como los que se mencionan a continuación:

La superficie esférica es cuatro veces la de su círculo máximo.

Si una esfera está inscrita en un cilindro de altura igual al diámetro de la esfera, entonces tanto el volumen como la superficie total del cilindro, son vez y media el volumen y la superficie de la esfera. La representación geométrica de este enunciado fue encontrada sobre la tumba de Arquímedes en Siracusa.

Arquímedes realizaba las construcciones geométricas en las que basaba sus exploraciones para hacer demostraciones, usaba reflexiones apoyadas en diferentes conceptos, teorías y métodos de razonamiento, como: La teoría de las proporciones, la teoría de los centros de gravedad; la teoría de equilibrios[3], métodos de comprensión y aproximación y la reducción al absurdo.

1.3. La matemática del siglo XVI.

En el siglo XVI algunos matemáticos retomaron el interés por los métodos de Eudoxo y Arquímedes, y se enfocaron en el estudio particular de cuatro problemas a saber: Determinar la tangente a una curva en un punto, Determinar el valor máximo o mínimo de una cantidad, Hallar la longitud de una curva, el área de una región y el volumen de un sólido y finalmente encontrar la velocidad y la aceleración del cuerpo en cualquier instante dada una fórmula de la distancia recorrida por un cuerpo en cualquier tiempo conocido; recíprocamente, dada una fórmula en la que se especifique la aceleración o la velocidad

[3] Una versión actual del método de los equilibrios es citada e ilustrada por (Eves, 1990)

en cualquier instante, encontrar la distancia recorrida por el cuerpo en un período de tiempo conocido.

A continuación se describen algunos de los aportes que hicieron estos matemáticos, relacionados con el posterior desarrollo del cálculo integral.

1.3.1. Simón Stevin (1548 - 1620).

Sustituyó el método de la doble reducción al absurdo usado por Arquímedes por un método de paso directo al límite similar al aquí ilustrado para determinar el área de un segmento parabólico, (Figura 1.4) basándose en la idea de que dos magnitudes son iguales si su diferencia se puede hacer menor que cualquier cantidad arbitrariamente pequeña. Stevin usó este método en su trabajo sobre hidrostática, en el que determinó la fuerza que ejerce la presión de un fluido sobre una presa rectangular vertical. Para ello dividió la presa en tiras horizontales finas y rotó estas tiras sobre sus bordes superior e inferior hasta convertirlas en paralelas a un plano horizontal y a partir de allí usando el método determinó la fuerza en cuestión.

1.3.2. Johannes Kepler (1571 - 1630).

Fue uno de científicos que mostró más interés en el desarrollo de ideas sobre los infinitesimales en conexión con la integración. Recurrió a un procedimiento de integración al interesarse en el cálculo de las áreas relacionadas en su segunda ley, relativa al movimiento de los planetas. Usó el método para encontrar el área de sectores de la elipse, pensando en las áreas como sumas de áreas de polígonos con base infinitamente pequeña. Usó también el método en un problema que requería determinar volúmenes, para hallar la capacidad de barriles de vino.

Sin embargo, Kepler consideró muy dispendioso trabajar la rigurosidad del método de exhaución y retomó lo que Arquímedes había considerado un proceso simplemente heurístico. Asumió la circunferencia como un polígono regular de infinitos lados; si cada uno de estos lados se toma como la base de un triángulo cuyo vértice es el centro del círculo, el círculo queda dividido en un número infinito de delgados triángulos, todos de altura el radio del círculo. Entonces, como el área de cada uno de estos triángulos es igual a la mitad del producto de su base y su altura, el área del círculo es igual a la mitad del producto de su circunferencia y su radio, es decir $\frac{1}{2}(2\pi r)r = \pi r^2$

De forma análoga determinó el volumen de una esfera considerándola compuesta por infinitas pirámides pequeñas cuyo vértice común es el centro de la esfera; concluyó entonces que el volumen de una esfera es un tercio del producto del radio por el área superficial. Aunque con este procedimiento se obtuvieron resultados correctos de forma simple y ha sido una herramienta para ingenieros y físicos, la matemática formal lo rechaza. (Eves, 1990)

1.3.3. Galileo Galilei (1564 - 1642).

Galileo en 1638 dio a conocer su interpretación de la distancia que recorre un objeto como el área bajo la curva tiempo velocidad, considerando que esta área OAB estaba construida con un número infinito de unidades indivisibles $A'B'$ (Fernández, 2011, pág. 4)

La ley de caída. Galileo quiso conocer las leyes matemáticas que rigen el movimiento acelerado de un cuerpo cuando se suelta en el vacío. Dada la gran rapidez de la caída libre, Galileo se aproximó a la fuerza de gravedad haciendo rodar el cuerpo sobre un plano inclinado (pues a mayor inclinación del plano, el cuerpo rodará con mayor rapidez) hasta ubicarlo verticalmente, cuando el cuerpo caerá libremente a lo largo del plano. Midió el tiempo que gastaba el cuerpo recorriendo diferentes distancias, usando el reloj de agua[4] marcándo las posiciones del cuerpo a intervalos iguales de tiempo, a partir del origen. Encontró que las distancias recorridas durante esos intervalos de tiempo estaban en la proporción $1:3:5:7:\ldots$

A mayor inclinación del plano las correspondientes distancias eran mayores, pero se conservaban las relaciones. Esto lo llevó a concluir que esta ley también funciona para el

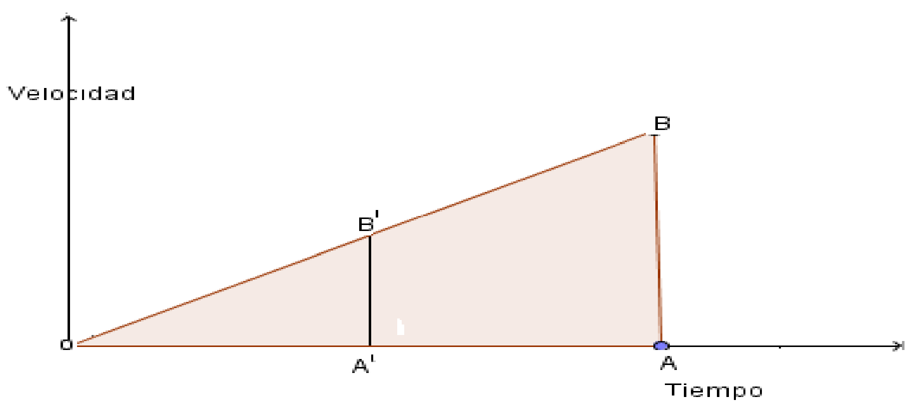
[4] El reloj de agua mide el tiempo por la cantidad de líquido que pasa a través de una pequeña abertura en el fondo de una gran vasija.

caso límite de la caída libre así que la velocidad de este movimiento debe aumentar en proporción simple al tiempo, dada la dependencia entre la distancia recorrida y el tiempo.

> "La distancia total recorrida durante cierto periodo de tiempo es proporcional al cuadrado de este tiempo:
> $1;1+3=4;1+3+5=9;\ \ 1+3+5+7=16;1+3+5+7+9=25;\ldots$"

De esta forma se expresa matemáticamente este resultado considerado como la primera formulación de *La ley de la Caída Libre*, y un paso trascendental en el desarrollo del cálculo integral. La descripción realizada por Galileo en 1632 se puede encontrar en (Pérez, 1992)

Figura 1-5. Galileo, Interpretación de la variación tiempo – velocidad



1.3.4.Bonaventura Cavalieri. (1598-1645)

Cavalieri discípulo de Galileo en su trabajo de fundamentación de las ideas de Kepler, afirmó que un área está formada por segmentos indivisibles y un volumen por segmentos o áreas indivisibles. El hoy conocido *principio de Cavalieri* se establece mediante la siguiente definición:

Definición 1.3.1. Dadas dos figuras planas l y k entre dos líneas paralelas, si toda sección paralela sl de la figura l corresponde a una sección paralela sk de la figura k y el cociente de sus longitudes, $\frac{sl}{sk}=r$ es constante para cada par, entonces el cociente de sus áreas

$\frac{Al}{Ak}$ es el mismo. Con este método Cavalieri encontró el área acotada por funciones del tipo $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, \dots, 9$.

El procedimiento usado por Kepler para hallar el área de una elipse de semiejes a y b es retomado también por Cavalieri y se puede interpretar de la siguiente manera:
Sean la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a < b$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. Al despejar y de cada ecuación se obtiene respectivamente: $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ y $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ .Se tiene entonces que las ordenadas correspondientes de la elipse y la circunferencia están en razón $\frac{b}{a}$. Luego la correspondiente cuerda vertical de la elipse y el círculo están también en esta razón y de acuerdo con *el Primer Principio de Cavallieri* las áreas de la elipse y el círculo están en esta razón, concluyendo que:

$$\acute{A}rea\ de\ la\ elipse = \frac{b}{a}\left(\acute{A}rea\ del\ c\acute{\imath}rculo\right) = \frac{b}{a}(\pi \times a^2) = \pi \times ab$$

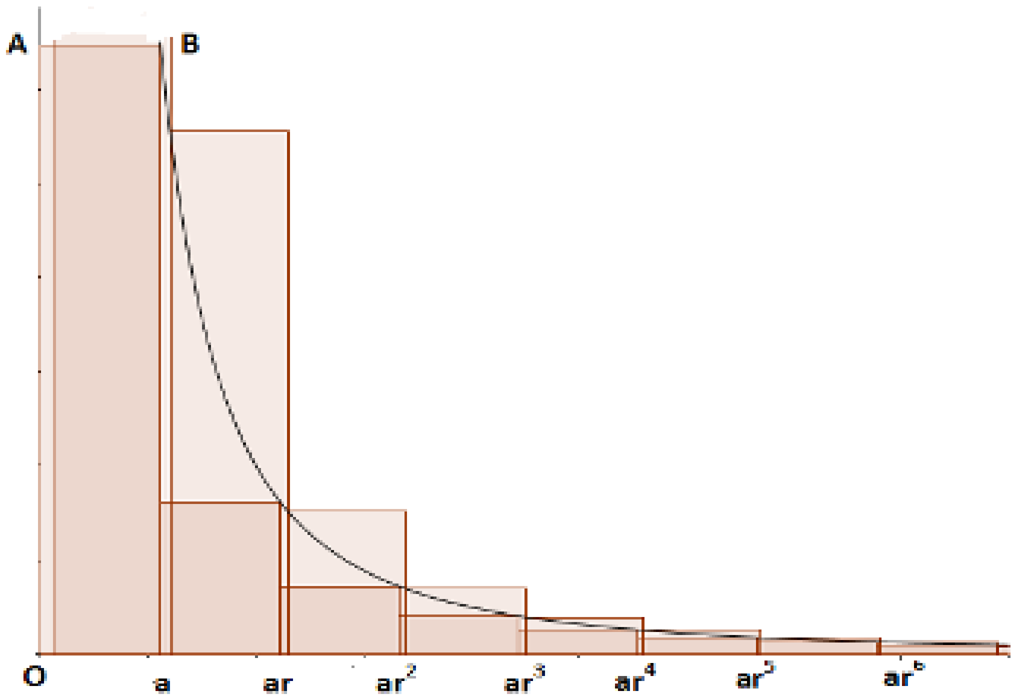
1.3.5. Pierre de Fermat (1601 - 1665)

Fermat obtuvo la cuadratura de áreas limitadas por arcos de hipérbolas del tipo $x^n + y^n = 1\ (m, n\ \in\ \mathbb{N})$. Usaba el método de exhaución pero considerando rectángulos infinitesimales circunscritos a la curva cuyas bases se comportaban como una progresión geométrica de la forma $a^n(a - ar),\ a^n r^n(ar - ar^2),\ a^n r^{2n}(ar^2 - ar^3)$. Al sumar estos infinitos términos se obtiene: $\frac{a^n+1}{1+r+r^2+\cdots+r^n}$, si $r = 1$. Es decir se obtiene el área bajo la curva: $\frac{a^n+1}{(n+1)}$.

Esta forma de determinar la cuadratura muestra aspectos esenciales de la integral definida como:

- División del área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños.
- Aproximación de la suma de esos elementos de área por medio de rectángulos infinitesimales, cuya altura la da la ecuación analítica de la curva.
- Una noción similar a la de límite de una suma cuando el número de elementos de esta crece indefinidamente, mientras estos se hacen infinitamente pequeños.

Figura 1-6. Método de Fermat (Eves, 1990)



El método de Fermat no funcionaba para regiones del tipo $y = \frac{1}{x}$ por lo que Gregorie Saint Vicent (1584 -1667) probó que si las áreas $A; B; C$ son iguales, las alturas correspondientes y_i están en progresión geométrica y el área bajo la curva $y = \frac{1}{x}$ puede expresarse a través de logaritmos.

1.4. La matemática del siglo XVII

Los métodos infinitesimales que los matemáticos propusieron durante el siglo XVI, se fundamentaron en el siglo XVII cuando el filósofo-matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) y el físico-matemático inglés Issac Newton (1642-1727) consolidaron los procedimientos de sus antecesores aportando algoritmos y notaciones que aunque no fueron rigurosos y presentaran debilidades en los procesos demostrativos debido a la poca claridad que en ese tiempo aún se tenía sobre algunos conceptos como los de límite o función, sus trabajos fueron consistentes y suficientes para desarrollar el cálculo.

Newton y Leibniz trabajaron simultáneamente, aunque con enfoques diferentes; la visión de Leibniz era de carácter más geométrico, consideraba la derivada como incrementos infinitamente pequeños, a los que denominó diferenciales; (un incremento de x infinitamente pequeño se llama diferencial de x, y su notación es dx), mientras que para Newton la derivada significaba una velocidad y consideraba las variables como cantidades que fluyen, denominaba fluxiones a lo que Leibniz nombraba como cociente de diferenciales $\frac{dy}{dx}$.

Los discípulos de Newton y Leibniz continuaron los avances, resolviendo problemas y aportando nuevos métodos, aunque fueron cuestionados por la ausencia de rigor en el manejo de los infinitesimales.

1.5. La matemática del siglo XIX

En este periodo los matemáticos se enfocaron más en presentar los métodos con rigurosidad que en resolver problemas, Leonhard Euler (1707 - 1783), Joseph-Louis de Lagrange (1736 -1813), Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 -1830) y Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 -1859) trabajaron en la definición de función, siendo este último quien propuso la definición que actualmente se conoce (Shilov, 2004, pág. 141):

> "y es función de x, si a cada valor de x le corresponde un valor completamente determinado de la y ; además no es importante el método con el que ha sido establecida la correspondencia señalada." P. Dirichlet, 1837.

1.5.1. Agustin Louis Cauchy. (1789 - 1857)

En 1821, L. Cauchy encontró un enfoque lógico y apropiado del cálculo basándose solamente en cantidades finitas y en el concepto de límite, en su obra: *Curso de Análisis de la Escuela Politécnica* presentó rigurosamente los conceptos del cálculo infinitesimal que previamente habían sido tratados pero no concluidos por matemáticos de la revolución francesa[5], Cauchy desarrolló el álgebra de los límites, el concepto de sucesión, la teoría

[5] Se refiere en particular a los matemáticos como Leibniz, Los Bernoulli, Euler o D´Alambert

de series, la noción de convergencia, e introdujo con rigurosidad los conceptos de derivada e integral. Además contribuyó con grandes aportes en lo referente a los problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales[6], los teoremas de existencia y unicidad para la solución de los problemas de valor inicial, la fórmula de acotación de Cauchy, la sucesión de Cauchy, el teorema del límite de Cauchy entre otros tópicos asociados.

1.5.2. Bernhard Riemann (1826 –1866)

Como lo establece (Hormigón, 1992, pág. 13) en 1854 *Riemann en su obra "Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe",* definió por primera ¨ vez el concepto que hoy se conoce como integral de Riemann, iniciando así la teoría de funciones de una variable real. A partir de la suma finita de áreas de rectángulos se aproxima a la integral, la definición y sus implicaciones se encuentran en el **capítulo IV** de este trabajo.

1.5.3.Camille Jordan (1838 - 1932)

A finales del siglo XIX al realizar el cálculo de integrales definidas las características de la función a integrar estaban completamente establecidas, pero ante la necesidad de generalizar la nociones de área de superficies planas, áreas de superficies curvas y de volumen, C. Jordan en su obra *Remarques sus les integrales definies* (1892), introdujo la medida de Jordan. La idea de Jordan consistió en asignar a cualquier dominio una medida interior y otra medida exterior y caracterizar como conjuntos medibles aquellos para los

[6] Una ecuación lineal de primer orden, es la más simple de las ecuaciones diferenciales ordinarias, se denomina el problema de Cauchy (González F. , 2006, págs. 1-2) y es de la forma:

$$\varrho = \begin{cases} y'(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} = F(t,y) \\ y(t = t_0) = y_0 \end{cases}$$

cuales los valores de estas medidas coinciden (Dieulefait, 2003). Una síntesis de esta teoría se presenta en el capítulo IV.

Esta teoría dio origen a la de un área importante del análisis denominada teoría de la medida, que Lebesgue consolido en particular para definir la integral que lleva su nombre (Porter, (s.f.), pág. 5). Una introducción al respecto se encuentra en (Petrus, 2005).

2. Marco Epistemológico

En éste capítulo se discuten algunos de los problemas que se presentan cuando se trata el concepto de integral definida como área bajo una curva, en los primeros semestres universitarios. Se describen algunas creencias y concepciones acerca de la naturaleza del concepto y los obstáculos cognitivos que inciden en el proceso de enseñanza aprendizaje, para ello se retomaron investigaciones nacionales e internacionales, siendo las más relevantes las de Pilar Turégano (1997) (1998) (2007).

2.1. Dificultades y Obstáculos Cognitivos.

Es importante anotar que a pesar de existir investigaciones didácticas en donde se describen y analizan los obstáculos relacionados con el proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo y propuestas para implementar en las aulas, la mayoría de los docentes de matemáticas las desconocen y en la práctica asumen que al iniciar el curso los estudiantes tienen claridad en procedimientos y conceptos de la aritmética, geometría y álgebra básica necesarias para avanzar en la construcción de los conceptos del cálculo. Los vacíos que tienen los alumnos con respecto a estos conocimientos son evidentes, no obstante se continúa sin hacer un alto en el camino para tomar medidas correctivas, se avanza con contenidos que no tienen una base sólida conduciendo al estudiante a aumentar sus dificultades. Estas tienen diversos orígenes y se pueden categorizar como lo indica (Socas, 1997) de la siguiente manera.

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas
- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza.

- Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos.
- Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

De acuerdo con las investigaciones, los errores que evidencian los estudiantes derivados de las dificultades son sistemáticos, difíciles de modificar, no se asocian a las características particulares del alumno y superarlos exige tomar conciencia para alcanzar el nuevo conocimiento. (Socas, 1997) Afirma que:

> "Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores. El error, tiene procedencia diferente, pero, en todo caso, va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste".

De hecho, los estudiantes en su trabajo muestran que poseen conocimientos pero algunos de ellos son paradigmáticos y les hacen difícil concebir nuevos significados; esto se interpone en lo que deberían saber, dando muestra de la existencia de obstáculos (dificultades que son difíciles de superar e inciden en la construcción de nuevo conocimiento) cognitivos, atribuidos esencialmente a tres aspectos:

- *Ontogenéticos:* Se refieren a las condiciones genéticas específicas de los estudiantes, se desarrollan e interiorizan en consecuencia solamente los saberes convenientes a los medios y a los objetivos del individuo.

- *Epistemológicos:* son saltos conceptuales que son inevitables porque son fundamentales para la adquisición de nuevo conocimiento (paso de lo discreto, a lo continuo, aceptación de los números negativos, incompletéz de los racionales, paso de la aritmética al álgebra entre otros). Estos obstáculos están pues relacionados con la naturaleza del conocimiento matemático e históricamente se evidenciaron en el proceso de consolidación del cuerpo de conocimientos de la disciplina.

- *Didácticos:* Son los que provienen de las prácticas de enseñanza, los currículos, los textos; es decir dependen de la forma en que los sistemas educativos gestionan la enseñanza.

Establecer la procedencia del obstáculo cognitivo, permitirá superarlo, interviniendo sobre el subsistema alumno profesor saber y replanteando el enfoque conceptual (Castro, 2006).

En el desarrollo de éste trabajo se han considerado principalmente los aspectos epistemológicos y los aspectos didácticos implícitos en los primeros y que conforman el obstáculo cognitivo, asociando las experiencias locales con los hallazgos de las investigaciones referidas.

2.1.1. Obstáculos epistemológicos

Teniendo en cuenta que gran parte de los errores y dificultades evidenciados en los cursos de cálculo se originan en obstáculos epistemológicos, en este apartado se realizará una breve reflexión sobre representaciones epistemológicas de algunos objetos y conceptos relativos a la integral definida, haciendo referencia a su origen, su desarrollo y las características que los constituyen como elementos útiles y relevantes para la enseñanza. La reflexión epistemológica es muy valiosa pues permite tener una visión objetiva y externa de los objetos y conceptos matemáticos y realizar adaptaciones didácticas intuitivas y comprensibles para el estudiante.

El concepto, de obstáculo epistemológico, apareció por primera vez en el trabajo de Bachelard en 1938[7], pero fue Brousseau (1989) quien lo introdujo en la didáctica de la matemática. Bachelard planteó la necesidad de romper con el paradigma de que los conocimientos son irrefutables; se requiere recurrir a las manifestaciones de los errores para corregirlos, evitando que se integren al cuerpo de conocimientos al poner en tela de juicio concepciones previas para reelaborarlas y modificarlas. Esta idea ha sido apoyada por la historia, la cual muestra que consolidar los conocimientos actuales ha implicado superar fuertes controversias teóricas y aún culturales sobre los objetos que conforman el

7 Un obstáculo epistemológico está ligado al conocimiento, una forma o principio de conocimiento que, efectivo y de campo no restringido de validez, es capaz de establecerse reforzarse durante el desarrollo de una noción, pero que en cierto nivel de este desarrollo vuelve un factor de bloqueo y

estudio del cálculo. En la tesis doctoral de (González A. , 2006) fueron identificados obstáculos epistemológicos que hemos podido evidenciar también en las prácticas de aula.

En general plantea que la dificultad que tiene el estudiante para comprender los conceptos y relacionarlos con conocimientos previamente adquiridos es un problema que proviene del aprendizaje descontextualizado carente de significado y de las prácticas mecanicistas. En lo que respecta a obstáculos relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo la investigación de (González A. , 2006) se refiere a Orton (1983) quien señala que los estudiantes tienen un buen dominio del álgebra algorítmica pero en contraste evidencian dificultades para conceptualizar los procesos relativos al límite y al uso de representaciones, cuando de desarrollar procesos en cálculo de derivadas e integrales se trata.

De acuerdo con (González A. , 2006), en la investigación de Orton se plantea además que interpretar la integral como una suma se constituye en un obstáculo epistemológico para comprender el concepto. En la investigación de (Turegano, 1998) se señala, reforzando el planteamiento anterior, que muchos estudiantes tienden a asociar la integral siempre como un área, por lo que debe ser positiva no aceptan soluciones en las cuales el valor de la integral sea negativo; hace referencia además a situaciones que muestran incoherencia entre el concepto la forma como se ejecuta el trabajo practico, las dificultades con el razonamiento lógico, con las demostraciones y con el análisis y traducción entre las representaciones gráficas y algebraicas.

(González A. , 2006) menciona que los estudiantes prefieren proceder mecánicamente, sin comprender la situación y el contexto a que hace referencia, atribuye este problema a las prácticas educativas, como ya lo había referido (Artigue, 1998). En (Contreras, 2006) se refieren a los obstáculos encontrados por Schneider (1988), que dificultan la comprensión de la integral; entre ellos el hecho de que aparezca un número finito cuando el cálculo del área se hace sumando infinitos rectángulos, y el obstáculo de heterogeneidad de las dimensiones, consistente en tomar como elementos intuitivos los indivisibles para comprender el área. Las dificultades que se han observado a través de experiencias en diferentes cursos de cálculo, se pueden relacionar también con las que categoriza (Artigue, 1998) respecto al campo conceptual del análisis, a saber:

- Dificultades relacionadas con la complejidad de los objetos básicos de este campo conceptual como son los números reales, las funciones y las sucesiones, los cuales por lo general están aún en fase de construcción cuando se introducen conceptos como los de límite derivada e integral.

- Dificultades relativas a la conceptualización de la noción de límite, que es la noción central del campo, y a su dominio técnico.

- Dificultades ligadas con las rupturas necesarias de los modos de pensamientos puramente algebraicos, muy familiares, y las especificidades del trabajo técnico en el cálculo.

Se describen en las anteriores categorías dificultades específicas relacionadas con el cálculo y el análisis ya que se pueden enmarcar desde luego en las mencionadas por Socas y citadas al comienzo de éste capítulo.

A continuación se dará una breve explicación de cómo algunos de los conceptos que fundamentan el campo conceptual del análisis se relacionan con las dificultades que presentan los estudiantes en la construcción del concepto de integral definida, teniendo en cuenta para ello tanto las experiencias en la práctica como las investigaciones consultadas.

Acerca del concepto de límite. Para formalizar el concepto de integral definida se requiere usar el concepto de límite y éste a través de todo su desarrollo histórico presentó diversidad de obstáculos epistemológicos y requirió superar rupturas a medida que evolucionaron las concepciones respecto a su naturaleza, como se menciona en la siguiente cita de (González F. , 2006, pág. 67)

> “El significado cotidiano de la palabra límite, que induce concepciones resistentes del límite como una barrera o el último término de un proceso, o que tiende a restringir la convergencia a la convergencia monótona; - La sobre-generalización de propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos, siguiendo el principio de continuidad enunciado por Leibniz; - La fuerza de la geometría de las formas, que impide a los estudiantes identificar claramente los objetos implicados en el proceso de límite y su

> topología subyacente. Esto hace que para los estudiantes sea difícil apreciar la interacción sutil entre los marcos numéricos y geométricos en el proceso de límite”

La cita anterior respecto a los obstáculos epistemológicos se puede interpretar en los siguientes términos:

- El significado de la palabra límite en el lenguaje cotidiano origina concepciones erróneas y persistentes respecto al concepto matemático, al no entender el significado formal de límite o interpretar restringidamente la noción de convergencia.

- El asumir que todas las propiedades de los procesos finitos se pueden generalizar a procesos infinitos.

- El no diferenciar claramente entre el contexto numérico y el geométrico hace que solamente se asuman las propiedades de los objetos geométricos e impide interpretar el proceso de límite.

A pesar de que los obstáculos epistemológicos antes mencionados se siguen presentando en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto. Estos,al interior de la disciplina misma se superaron desde el punto de vista teórico cuando se fundamentó el análisis (Cauchy- Weierstrass).

Acerca del infinito. La concepción de infinito, desde sus orígenes, ha generado diversidad de obstáculos, el paso de lo finito a lo infinito no fue inmediato. Los Griegos se enfrentaron al problema de lo discreto y lo continuo (magnitudes conmensurables e inconmensurables) y cuando notaron la existencia de conjuntos infinitos (infinitud de los primos) y lo reemplazaron por el método de demostración por reducción al absurdo, pasando por las reflexiones de Galileo acerca del infinito actual y el infinito potencial.

En la edad media el infinito apareció en los trabajos sobre sucesiones y sumas infinitas (aproximaciones de algunos irracionales). Pero es hasta los siglos XVII y XVIII cuando Newton, Leibnitz, Bernoulli y Euler plantean las inconsistencias que se evidenciaban en el tratamiento de las series; Cauchy dio solución a este problema, considerando que los procedimientos infinitos no se podían tratar de la misma manera que los finitos y debían abordarse con herramientas diferentes a las algebraicas y geométricas.

El concepto evolucionó y se consolidó solamente hasta los inicios del siglo XX con la introducción de la teoría de conjuntos con la que G. Cantor (1845 - 1918) rompió el paradigma milenario de los griegos[8] y estructuró la aritmética del infinito actual que permitió definir el límite en el contexto numérico. La definición formal tiene sentido y significado al interior de la comunidad matemática, pero en las aulas sigue existiendo el horror al infinito.

La separación de la geometría y la aritmética. La inconmensurabilidad y su relación con una nueva clase de números que no pueden ser expresados como razones, cuya expansión decimal es infinita no periódica que exige pasar de lo discreto a lo continuo, condujo a la separación entre lo geométrico y lo numérico; transferir la idea de límite de la geometría a la aritmética resultaba complicado debido a la fuerte influencia de la geometría Euclidiana, solo la aparición de las geometrías no Euclidianas y la aritmetización del análisis dio paso a otro tipo de concepciones respecto a la naturaleza de conceptos del análisis como límite, infinito, número real, continuidad, etc. Actualmente, este obstáculo se sigue presentando, pues en la práctica no se ha trabajado en el manejo de las representaciones semióticas, lo cual conduce a que las representaciones aritméticas y geométricas que hace el estudiante, carezcan de coherencia y significado, permanece la dificultad de establecer criterios para relacionar lo gráfico con lo aritmético y con lo algebraico, además el uso inadecuado de recursos TIC tergiversan el significado de los conceptos mencionados (límite, infinito, etc). Al respecto (Artigue, 1998) comenta la diferencia que establece (Tall Vinner, 1981), entre la definición del concepto y la imagen del concepto. Al estudiante no se le ha motivado a interpretar diferentes formas de

[8] Los Griegos afirmaban que *El todo es siempre mayor que la suma de sus partes*, por su parte Cantor definió que: Un conjunto se dice infinito cuando existe una biyección entre él y un subconjunto propio de sí mismo.

representación de un concepto, a traducir entre ellas y esto da origen a que él privilegie algunas formas de representación, lo que limita el significado que asigna a los conceptos.

El concepto de número real. Los estudiantes evidencian diversidad de dificultades respecto al concepto de número real como las relativas al reconocimiento y comprensión de sus diferentes formas de representación: recta numérica y representación decimal; no entienden el significado de propiedades como la completéz y la densidad, tienen dificultades para ordenar o construir números reales en un intervalo dado, no tienen claras las relaciones y diferencias entre los diferentes sistemas numéricos, limitan el conocimiento de los números reales a las aproximaciones finitas que aparecen al operar con la calculadora.

El concepto de número real evolucionó desde el descubrimiento que hicieron los matemáticos de la escuela Pitagórica de las magnitudes inconmensurables al intentar determinar la razón entre el lado y la diagonal de un cuadrado, pasando por la teoría de las proporciones de Eudoxo que permitió ampliar el concepto de razón y avanzar en la aceptación de números no racionales hasta las construcciones del siglo XIX propuestas por R. Dedekind usando cortaduras.

Pero los números reales se introducen en la educación básica de manera empírica, solamente estudiando las operaciones elementales; ocasionalmente se mencionan de manera esquemática y sin ilustración a fondo dos propiedades fundamentales:

- A cada punto de la recta se le asocia un número real; en la recta numérica existen puntos que no corresponden a números racionales, es decir los racionales son incompletos (aparecen entonces los irracionales al construir un segmento de longitud $\sqrt{2}$ diagonal de un cuadrado de lado1).

- Todo número racional tiene representación decimal, periódica o finita, caracterizando los irracionales como aquellos cuya representación decimal no es periódica.

A partir de estas afirmaciones se debe admitir que el conjunto de los números reales está constituido por los números racionales e irracionales, sin dar significado a estos números ni indagar sobre su naturaleza.

Existen diferentes maneras de construir formalmente el conjunto de los números reales, entre estas la de R. Dedekind quien construyó los reales a partir de los racionales, introduciendo la noción de cortadura y usando las propiedades algebraicas y aritméticas de éstos. El conjunto de los números reales posee, entonces, las propiedades aritméticas de los racionales y es además completo.

Esta construcción rigurosa no se presenta en la enseñanza básica y media, sin embargo las nociones aparentemente elementales son confusas para el estudiante y carecen de sentido, dado que se introducen los elementos arbitrariamente, sin definición o significado alguno, se habla de número irracional sin saber qué es, pero se debe admitir como un real.

Por otra parte, el estudiante en su proceso de formación no ha tenido experiencias que le permitan pasar de lo discreto a lo continuo, esto les impide entender los procesos infinitos y asumir conceptos como el de infinito actual (relacionado con la naturaleza de los números reales), y es por ello que a pesar de haber cursado matemáticas básicas y cálculo continúan privilegiando el uso de números enteros en todos sus análisis y representaciones gráficas, un estudiante común solamente maneja el concepto desde su perspectiva discreta como lo menciona (González F. , 2006):

> "Más del cuarenta por ciento de los estudiantes que ingresan a la universidad en Francia consideran que, si dos números A y B, satisfacen la condición:
>
> $\mathrm{n} < 0|\mathrm{A}-\mathrm{B}| < \frac{1}{\mathrm{n}}$, no son necesariamente iguales, sino solamente muy próximos, infinitamente próximos, de cierta manera sucesores"

Las funciones. Al igual que sucede con el concepto de límite, comprender el concepto de función abarca dos dimensiones: la de proceso y la de objeto y éste conocimiento, influye trascendentalmente en la comprensión de la integral definida.

Las definiciones de función que dan los estudiantes no tienen relación con los criterios que determinan que una relación sea funcional, la continuidad es un elemento casi intrascendente, al pensar en una función, pues se han acostumbrado a asumir implícitamente que todas las funciones son continuas.

Este problema no es nuevo, se identificó como un obstáculo desde el *Principio de continuidad de Leibnitz,* ¿se transfiere o no una propiedad de una sucesión convergente a su límite?, obstáculo que fue recurrente en los trabajos de Bernoulli, Euler y D´Alambert. Paralelamente, la concepción de función de Euler, como expresión analítica, fue extendida a Newton y Leibniz quienes no daban importancia a la naturaleza de las variables; al formalizar el concepto de límite y precisar el concepto de función real de variable real, este obstáculo fue teóricamente superado.

Cuando el estudiante trabaja con las funciones maneja aisladamente y en ocasiones de forma incoherente, las diferentes representaciones de la función. Normalmente para describir la función asocia una expresión algebraica, construye una tabla con pocos valores, usualmente toma números naturales o a lo sumo enteros y traza una gráfica, en este punto empieza a cometer errores con el uso de los signos y las potencias, errores que lo llevan a conclusiones erróneas. Por ejemplo, al tabular la función $f(x) = x^2$ y evaluar $f(3)$ y $f(-3)$ obtienen 9 y -9 y confirman estos resultados incorrectos con el uso inadecuado de los paréntesis en la calculadora; confunden además ax con x^a; errores de este tipo muestran que el estudiante no es consciente del significado de las operaciones ni aplica propiedades, solo opera sin sentido.

Se evidencian esencialmente tres concepciones relativas al concepto de función: como una gráfica, como una tabla de valores o como una expresión algebraica, pero se les dificulta asociarlas y relacionarlas simultáneamente. Cuando inician sus estudios universitarios tienen un conocimiento muy limitado de las funciones, incluso las representaciones gráficas y simbólicas se reducen a la función lineal y a lo sumo a la cuadrática, esta última con muchas inconsistencias; desconocen otro tipo de funciones y las diferentes formas de representación, en particular tienen problemas muy álgidos con las funciones racionales e incluso con las constantes por el tipo de expresión algebraica que se les asocia.

Es importante reiterar que una comprensión del concepto de función que permita avanzar en el análisis de los conceptos del cálculo diferencial e integral supone estar en capacidad de reconocer e interpretar sus diferentes formas de representación y efectuar traducciones entre ellas, determinar dominio, codominio, rango, paridad, decidir si la función es o no inyectiva, biyectiva o sobreyectiva, representarla gráficamente a partir de una expresión algebraica y viceversa, modelar situaciones de variación usando funciones etc.

La investigación didáctica ha demostrado que si bien los obstáculos epistemológicos, antes descritos, inciden en los errores y dificultades que evidencian los estudiantes para comprender los conceptos de función, límite, infinito, continuidad, los obstáculos didácticos que se mencionarán en el siguiente aparte influyen de manera muy significativa en los bajos niveles de apropiación de estos conceptos.

2.1.2. Obstáculos Didácticos

Algunos de los obstáculos didácticos[9] que dificultan el aprendizaje de los conceptos relacionados con la integral definida, son descritos por algunos investigadores en didáctica de la matemática:

De acuerdo a (González F. , 2006), el tiempo que se dedica al tema es una limitante para que el estudiante comprenda los conceptos, agrega que los contenidos se introducen de manera formal y no se dedica tiempo para aproximaciones formales constructivas, que tienen mayor riqueza en la construcción y comprensión del concepto.

En (González A. , 2006) se señala que por su parte, Orton 1983 se expresa en la misma dirección y comenta las formas inadecuadas de introducir el concepto de integral definida que dificultan la comprensión de éste, plantea entre otros, que al ilustrar la definición de integral definida se suele presentar en la práctica de aula una curva sin patologías, un intervalo positivo, se usa un número razonable de rectángulos..., pero no se insiste en cuáles de estos elementos son esenciales y cuáles no.

Lo anterior implica que la integral se identifique exclusivamente como un área y esto origina problemas cuando se propone la integral de una función negativa.

[9] Los obstáculos didácticos referidos son: 1. Tiempo y presentación informal de los contenidos, 2. El pensamiento visual, 3. Concepto de área desconectado del concepto de integral definida.

El trabajo precario que el estudiante ejecuta con la imagen del concepto en relación con el contexto, le confiere unos significados erróneos en cuanto al tipo de inferencias acerca de la variación de una función que se pueden hacer a partir de una gráfica.

(González A. , 2006, pág. 27) al recopilar diferentes consideraciones sobre el manejo del pensamiento visual confirma que los estudiantes no conectan concretamente los aspectos visuales con lo procedimental y con lo conceptual, prefiriendo el pensamiento algebraico y los procesos mecánicos, y enuncia las razones que Eisenberg y Dreyfus (1991) plantean para que lo visual se considere secundario: lo visual es más difícil de percibir y de enseñar, además, las creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas promueven que lo visual no es matemático.

Paralelamente Artigue (citado por (González A. , 2006, pág. 27)) afirma que las creencias y hábitos sobre el estatus y el papel del registro gráfico actúan como obstáculos didácticos y han de ser explícitamente cuestionados para conseguir los cambios epistemológicos necesarios tanto en los profesores como en los estudiantes.

Pasar de lo finito a lo infinito además de considerarse como un obstáculo epistemológico también resulta ser un obstáculo didáctico pues los estudiantes llegan a la universidad con una formación en matemática básica relacionada con los procesos finitos de cuantificación y en la matemática universitaria deben abordar los procesos infinitos, asumiendo que en los dos últimos grados de la media se ha trabajado en una fundamentación previa de los conceptos relacionados con ellos (número real, función, límite, variación etc.) (Dolores, 2000)

En nuestro contexto los procesos infinitos se trabajan superficialmente en el último grado de secundaria y se retoman en la universidad en el curso de cálculo diferencial, hasta este punto el infinito es considerado solamente un símbolo, el estudiante tiene poca comprensión a cerca de las manifestaciones del infinito y sus implicaciones en procesos de derivación o integración.

Como se comentó en apartes anteriores para que los estudiantes superen los obstáculos cognitivos que dificultan el aprendizaje se requiere replantear el enfoque conceptual. En lo que concierne a los cursos de cálculo, el enfoque tradicional suele ser inadecuado, específicamente sobre el concepto de integral definida. (Turegano, 1998) plantea:

> "El tratamiento dado a los conceptos de área y de integral no favorecía el poder establecer una adecuada conexión entre ellos, fundamentalmente porque no se tenían en cuenta simultáneamente las tres etapas que consideramos clave en el aprendizaje: 1. Construir la noción de área como magnitud autónoma, 2. Construir una aplicación (medida) entre superficies y números que se pueda extender al máximo de superficies planas, 3. Construir el concepto de integral partiendo del concepto de área."

Es importante anotar que en nuestro medio el concepto de área que se menciona en la cita anterior se trabaja con los estudiantes desde la básica primaria (de Primero a Quinto) en el desarrollo del pensamiento métrico y los sistemas de medida; posteriormente en la básica secundaria y media (de Sexto a Undécimo) se avanza en el pensamiento métrico y se suponen comprendidos los conceptos de patrón y unidad de área, sistemas de unidades y su aplicación en la determinación de áreas de regiones planas, sin embargo en el curso de cálculo integral se evidencian dificultades para comprender la relación entre el área y la integral definida, las nociones son imprecisas, seguramente porque en el aula los conceptos y etapas a que hace referencia la cita anterior no son conocidas o se presentan de forma esquemática y poco profunda.

Tradicionalmente se piensa que conceptualizar el área se reduce a pensar tan solo en el triángulo y el rectángulo y las fórmulas para determinar sus áreas. Al proponer regiones poligonales diferentes pocos estudiantes alcanzan a percibir y proponer triangulaciones o cuadraturas que permitan encontrar una aproximación al área de éstas: la dificultad es aún mayor cuando estas regiones están limitadas por curvas. La enseñanza de los conceptos de área e integral definida está más sujeta a las condiciones y requisitos de los currículos que a las necesidades del estudiante o a las del conocimiento en sí, por esta razón se subestiman las características de elementos básicos pero fundamentales en la construcción de estos conceptos.

La integral definida debería introducirse en una forma más intuitiva apoyada de manera más significativa sobre el concepto de área de una región plana que ha construido previamente el estudiante; al respecto (Turegano, 1998, pág. 236) manifiesta:

> "La integral es una continuación de la idea de área, que los estudiantes conocen desde los primeros días de la escuela y, como decía Lebesgue: ¿No entenderían los estudiantes más fácilmente que, al pasar de la geometría al análisis, nada ha cambiado sino el lenguaje, que era más geométrico antes, pero más analítico después?"

La propuesta didáctica que se diseñó retoma esta perspectiva partiendo de situaciones informales y el manejo de recursos que acerquen al estudiante desde concepciones simples para llegar a las complejas permitiendo que el mismo interprete la integral definida usando el concepto de área una vez formalizado y comprendido.

Tanto los obstáculos epistemológicos como los didácticos mencionados en este capítulo, son recurrentes y persisten en la actualidad, aunque en teoría se han resuelto con mucha rigurosidad, además de que se han manifestado en diversos estudios y han sido divulgados no obstante, la práctica en un aula común está alejada de su estudio, solo se dedica tiempo a la preparación básica de los temas, lo cual no permite que se modifiquen las prácticas pedagógicas e impide que se avance en los niveles de comprensión de los conceptos.

2.1.3. Revisión de Textos

Los textos que se utilizan en las aulas influyen, usualmente, en las prácticas docentes y en el tipo de situaciones que se proponen en la clase; se utilizan textos físicos o electrónicos y es muy frecuente que la selección de un texto no esté precedida por un análisis de sus características y carencias. Debido al tipo de énfasis la profundidad con que se discuten los conceptos, las representaciones que privilegia, los problemas que propone, el lenguaje, etc, esta selección puede generar en los estudiantes diferentes tipos de obstáculos.

A continuación (tabla 2-1), se muestra un breve análisis de la presentación del tema en dos textos universitarios.

TEXTO A. *Cálculo con geometría analítica.* Octava edición.

TEXTO B. *Cálculo DIferencial e Integral*, sexta edición de James Stewart.

Tabla 2-1: Análisis comparativo entre el texto A y el texto B.

TEMA	PRESENTACIÓN DEL TEXTO	CONSIDERACIONES
Antiderivada	En (Larson), el capítulo de Integración se introduce con el tema de antiderivadas o primitivas e integración indefinida. Definen y representan la antiderivada tal como lo hace (Stewart), pero incluyen la demostración del teorema de representación y enfatizan en la notación simbólica y en asociar (identificar) la integral indefinida con la antiderivada. En (Stewart) este tema hace parte de las aplicaciones de la derivada, cita el concepto de antiderivada, su representación a través de un teorema. A partir de la regla de la potencia muestra como obtener antiderivadas de x^n e ilustran con algunos ejemplos.	(Larson) presenta de forma más amplia y clara el concepto de antiderivada, explica el significado de los símbolos y argumenta formalmente sobre la validez de la representación. Posiblemente por la insistencia en la regla de la potencia y la no ampliación sobre las condiciones para aplicarla, el estudiante a partir de la introducción de la primitiva de una potencia realiza generalizaciones incorrectas a funciones arbitrarias, que generan errores en el cálculo de integrales y la solución de problemas de aplicación.
Problemas de valor inicial	En los dos textos se presentan problemas que requieren determinar la solución particular de una ecuación diferencial dadas las condiciones iniciales, es decir problemas que indagan por el cálculo de antiderivadas y su evaluación. En (Larson) el conjunto de soluciones particulares es denominado familia de antiderivadas de una función, mientras que en (Stewart) se	Los dos textos proponen problemas de física donde requieren usar las antiderivadas, pero suponen conocimiento previo del estudiante de conceptos como: funciones de posición, velocidad y aceleración y las relaciones entre ellas. Esto en la práctica resulta ser una dificultad para que los estudiantes puedan modelar situaciones físicas usando antiderivadas.

	denominan traslaciones verticales de la gráfica de una antiderivada.	
Área	(Stewart) hace referencia al área de un rectángulo y su fórmula y plantea que a partir de allí es posible determinar el área de algunos polígonos regulares e irregulares. A continuación utilizan el área del rectángulo para determinar aproximaciones al área de regiones planas, sumando áreas de rectángulos, determinan áreas por exceso y defecto, refinan la partición hasta dar el paso al límite y definir la integral. En (Larson) hacen referencia al área del rectángulo y el triángulo e introducen el problema de determinar el área de una región del plano limitada por una curva, es decir generalizar el concepto de área. Ilustran la idea cuando la región está limitada por una curva parabólica, realizan particiones y construyen rectángulos, determinan sus áreas, refinan la partición y pasan al límite. En (Larson) se presenta además un problema físico que requiere usar representaciones gráficas y tabular la función para calcular la integral.	Para el estudiante es fácil obtener resultados cuando el proceso solo implica manejar la formula convencional del área de un rectángulo, pero al introducir la sumas infinitas y límites infinitos se originan obstáculos epistemológicos que impiden generalizar el concepto de área. La presentación de un problema relativo a la determinación de una distancia, (Stewart) introduce funciones no explícitas y exige al estudiante interpretar datos y modelos gráficos y modelar el problema usando una integral. Supera de esta forma la idea errónea de que los conceptos del cálculo permiten estudiar exclusivamente funciones definidas explícitamente, usando fórmulas.
Sumas de Riemann e integral definida	En (Stewart) se motiva la introducción de las sumas de Riemann con la interpretación de la integral en contextos diferentes al área, define la integral por paso al límite y aclaran el significado de	En el texto [21] la diferencia entre la suma de Riemann y la integral definida no es explicita, sin embargo dejan clara su interpretación mediante los ejemplos y las representaciones gráficas, mientras que el texto de

	la suma de Riemann para f positiva o negativa. El texto (Stewart), es más específico que el texto (Larson), pues define secuencialmente sumas de Riemann, integral definida, analiza y aplica propiedades y relaciona conceptos de continuidad y derivabilidad. Ilustra con ejemplos la interpretación de la integral definida como área de una región.	(Larson) es teóricamente más específico, establece y analiza propiedades. (Stewart) acude con más frecuencia a explicaciones gráficas, mientras que (Larson) presenta demostraciones y aplicaciones que requieren un nivel más elaborado de análisis. (Larson) enuncia en las aplicaciones de la integral definida el teorema del cambio total, de esta manera rompe con la idea de asociar la integral definida exclusivamente al área.
Teorema fundamental del cálculo.	En (Stewart) este teorema es presentado luego de aclarar algunas propiedades de la integral definida y de ciertas funciones con respecto a la continuidad y la derivabilidad, literalmente expresan: “la derivada de una integral definida con respecto a su límite superior es el integrando evaluado en ese límite superior”. Relacionando estrechamente la teoría de derivación e integración, para posteriormente presentar la demostración del teorema. (Larson) presenta el teorema fundamental del cálculo, haciendo refiriendo elementos históricos relacionados con los trabajos de Newton y Leibniz El texto hace una aclaración referente a la diferencia entre	En (Stewart) la demostración del teorema resulta un ejercicio de reconstrucción interesante pues se acude a varios conceptos del cálculo diferencial y propiedades de las funciones. Lamentablemente en los cursos de Ingeniería no es usual adentrarse en este contexto, se va directamente a la aplicación haciendo a un lado los detalles históricos y analíticos de los temas. (Larson) es más didáctico al ofrecer una estrategia para utilizar el teorema fundamental del cálculo, y mostrar ejemplos aplicados a funciones diversas, mientras que (Stewart) se centra más en la teoría.

	integrales definidas e indefinidas, enfatizando en la dificultad que puede presentarse al relacionar simbólicamente las antiderivadas y las integrales. También aclaran que el teorema fundamental del cálculo es eficaz siempre y cuando se conozcan las antiderivadas de las funciones. En seguida se realizan aplicaciones del teorema y se introduce *el Teorema del cambio total* como principio de aplicación a las razones de cambio que aparece en problemas de otras disciplinas.	

Los dos textos analizados incluyen introducciones históricas, aplicaciones y además, discusiones teóricas y analíticas, sin embargo en la práctica estos aportes se pasan por alto y se acude de inmediato a los aspectos algorítmicos y procedimentales. En los cursos de ingeniería, por ejemplo, la introducción y el análisis de las demostraciones se suprime y tampoco se tienen en cuenta hechos históricos que relacionen los conceptos; esto conduce a que cuando a un estudiante se le pregunta ¿qué es un determinado elemento?, él contesta al como es dio elemento, y hace descripciones operacionales, pues no tiene un referente conceptual claro que le permita explicar con sus propias palabras o usando la simbología adecuada.

En ambos textos cada sección se cierra proponiendo una serie de ejercicios y problemas, que no solo involucran la práctica de procesos operacionales sino también el desarrollo de conceptos y aplicaciones a situaciones prácticas.

A pesar de que algunos textos ofrecen herramientas interesantes y explicaciones muy completas y plantean problemas que invitan a realizar indagaciones y proyectos, estas herramientas no se usan de forma adecuada, generalmente por carencia de tiempo para desarrollar el programa (uno de los obstáculos didácticos mencionados).

2.1.4. Prueba Diagnóstica

Se diseñó una prueba (Anexo A) de diez items y se aplicó a 16 estudiantes de Ingeniería antes de iniciar el curso de cálculo integral. La prueba se desarrolló en una sesión de 120 minutos. Aparte de los problemas propuestos se solicitó a los estudiantes plantear observaciones y comentarios respecto a las dificultades encontradas en la prueba.

En el instrumento se pueden identificar dos categorías de preguntas:

- CA. Las preguntas de esta categoría requieren para su solución de conocimientos elementales de geometría, aritmética o álgebra. Se asumía desde la estructura de la prueba que algunas preguntas de esta categoría eran de bajo nivel de dificultad y su solución se podría encontrar de manera directa, siempre y cuando los conocimientos básicos de los alumnos estuvieran bien fundamentados. En esta categoría se ubican los ítems 1, 2, 3, 4, 6 y 8, referidos al concepto de área de regiones planas regulares e irregulares. La mayoría de los enunciados presentan una figura que apoya la comprensión y análisis del problema. El objetivo fundamental de estas preguntas era explorar si el estudiante tiene claro el concepto de área de una región plana, e identificar los procesos y procedimientos que utiliza para determinarla. Una de las preguntas además exploraba si se diferencia entre área y perímetro.

- CB. Los ítems 5, 7, y 9 exploran también la noción de área, pero se diferencian de los anteriores porque proponen regiones ubicadas en un sistema de coordenadas cartesianas y exploran además si hay una noción intuitiva de la inscripción y circunscripción de polígonos regulares en una región limitada por curvas, como punto de partida para la introducción de la integral definida en su interpretación como área.

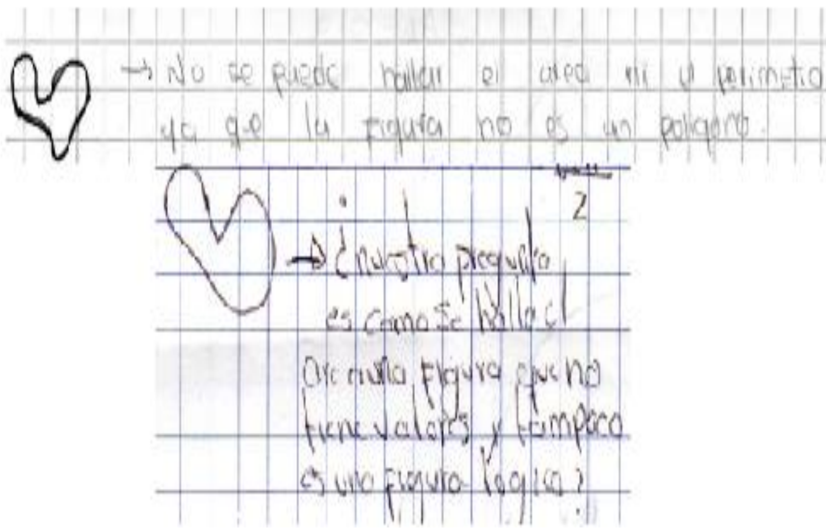
2.1.5. Análisis de resultados de la prueba diagnóstica.

En el análisis de la prueba las respuestas de los estudiantes se organizaron como se comentó antes en dos categorías. Algunos procedimientos de estas categorías se incluyen en la síntesis y en el anexo 2, se incluyen las soluciones más completas de cada categoría. Este análisis fue un punto de partida para estructurar la unidad didáctica.

Tabla 2-2: Análisis de resultados de la prueba diagnóstica. Categoría CA

CATEGORÍA CA
PREGUNTA 1
Para la región1 no se presentaron soluciones concretas, algunos estudiantes coinciden en que la región no tiene área porque es una figura irregular, otros plantean algunas preguntas: - “¿cómo hallar el área de una figura que no tiene valores ni es una figura lógica?”, otros saben que la región tiene área pero dicen que no saben cómo hallarla porque la figura no es definida, o porque no tiene valores, o porque no tiene forma o por no ser un polígono. Solamente un estudiante plantea que mediría la figura a su alrededor y de esta manera obtendría el área. Los argumentos que dieron los estudiantes y los adjetivos con los que describen la figura muestran que el problema de determinar el área de una región está muy ligado a tener definida una forma poligonal y preferiblemente regular; al abordar regiones no poligonales se pone en duda la posibilidad de determinar un área, lo cual sugiere que no dan significado al concepto en situaciones prácticas y reales de aplicación en el que las regiones usualmente son irregulares. (Figura 2-A)

Figura 2-1. Concepción inicial de un área no poligonal.



En el caso de la figura 2 (hexágono regular), ninguno de los estudiantes pudo determinar el área, algunos dividieron el hexágono en 2 trapecios y plantearon que se debían determinar las áreas de los trapecios y sumarlas pero desconocían o no recordaban una fórmula que les permitiera hacerlo; otros estudiantes propusieron que para hallar el área de un hexágono se debía determinar el perímetro y luego multiplicar este valor por el apotema y dividir en dos. Algunos plantearon fórmulas pero no las desarrollaron.

En la figura 3 (triángulo) la mayoría de los estudiantes enunciaron la fórmula convencional para hallar el área de un triángulo, sin embargo solamente tres estudiantes tuvieron en cuenta el hecho de que era equilátero y debían hallar la altura para lo cual aplicaron el teorema de Pitágoras.

Algunos asumen que por ser un triángulo equilátero para determinar su área basta multiplicar lados y dividir por dos o que la altura de este triángulo tiene igual medida que su lado.

En la figura 4 (pentágono inscrito en la circunferencia) solamente una persona mencionó la idea de usar el radio de la circunferencia para determinar el área de esta región, sin embargo, no concretó una expresión.

En la figura 5 (pentágono irregular) algunos dividieron la región en un triángulo y un rectángulo, hallaron las áreas de cada uno y las sumaron; en el caso del triángulo aunque plantearon bien la fórmula no supieron dar una expresión para determinar la altura, normalmente la asociaron a un lado común. Otros partieron la región en tres: un rectángulo y dos triángulos rectángulos y usaron el *Teorema de Pitágoras* para hallar la altura de estos, por cuestiones de notación (asignaron la misma notación para el área y la altura) no obtuvieron la expresión correcta. El hecho de que esta figura tuviera medidas numéricas facilitó el razonamiento sobre las formulas, esto indica que los estudiantes tienen dificultades para hacer generalizaciones, a través de variables.

Los estudiantes acuden a fórmulas y términos sin tener claridad sobre las propiedades geométricas de la figuras, aplican fórmulas sin identificar claramente elementos y diferenciar propiedades. En algunos casos tomaron como patrón de medida la cuadrícula de la hoja para reconstruir los polígonos regulares, de esa manera asignaron valores por estimación y llegaron a una formula, aunque se les dificultó manipular aritméticamente los valores no numéricos, es decir no estaban claros los conceptos algebraicos elementales.

En general, los estudiantes recuerdan las fórmulas para hallar el área de un triángulo y un rectángulo, cuando se proponen figuras diferentes a éstas en ocasiones tienden a subdividirlas en triángulos o rectángulos. Se evidencian, como se comentó antes, problemas con el concepto de área, se limitan a identificar dos o tres figuras canónicas, pero si la región es irregular como no se conoce una fórmula es imposible hablar de área. No diferencian lo conceptual de lo algorítmico. Persiste además la confusión entre área y perímetro, presente desde niveles básicos.

PREGUNTA 2
Para resolver esta pregunta algunos estudiantes hicieron referencia al cateto opuesto y al adyacente para diferenciar el ángulo recto, pero lograron determinar la base y la altura y aplicar la fórmula correctamente, otros dijeron haber obtenido el resultado por ensayo y error probando en cada respuesta dada, pero muestran confusión entre los conceptos de área y perímetro. En el siguiente texto se aplica el *Teorema de Pitágoras* para determinar el cateto desconocido, aunque no llega a la solución correcta por errores con signos y notación. “Para hallar el cateto restamos la hipotenusa cuadrada con el cateto cuadrado y a ese resultado le sacamos la raíz”. A continuación realizaron el procedimiento. Concluyeron incorrectamente que tanto el área como el perímetro miden $3\ cm$. En otros casos resolvieron el problema correctamente usando el *Teorema de Pitágoras*, la definición correcta de área y perímetro del triángulo y dibujaron la gráfica, sin hacer comentario alguno.
PREGUNTA 4
Se evidencian dificultades para dibujar el cuadrilátero. Hay tendencia a confundir los vértices con los lados, los vértices no son nominados correctamente, por ello el ángulo recto no aparece en la ubicación correcta y las dimensiones no corresponden a las dadas; por otra parte, determinan el perímetro del cuadrilátero y no el área, argumentando que “no es posible hacerlo por la falta de proporción de los lados”. Propusieron en algunos casos fórmulas que involucran razones trigonométricas, pero en la figura construida no se identifican correctamente los lados y los ángulos así que la aplicación de la fórmula no tiene sentido. En otros casos determinan el área multiplicando los cuatro lados. Ningún estudiante dibujó el cuadrilátero con las condiciones dadas ni obtuvo correctamente el valor del área.

PREGUNTA 6
Un grupo de estudiantes interpretó correctamente la relación, igualaron las expresiones correspondientes a las áreas de cada figura y dibujaron las figuras con medidas correctas; en otros casos realizaron correctamente el proceso pero no dibujaron, argumentando que como no había un solo rectángulo que cumpliera las condiciones, no se podía resolver. En algunas soluciones se evidenció confusión entre los conceptos de radio y perímetro, otros expresan que el área de un círculo no puede ser dada en unidades cuadradas y por ello el problema no tiene solución. Posiblemente asumen que la referencia a unidades cuadradas está relacionada exclusivamente con un cuadrado. En otro caso el estudiante inscribió un rectángulo en el círculo tratando de adecuar o aproximar las medidas a la condición del enunciado. La mayoría de los estudiantes, resolvieron el problema correctamente y con argumentos válidos, muchos de los que no coincidieron con la respuesta preguntaron: ¿es importante la forma del rectángulo?
PREGUNTA 8
La mayoría hallaron las áreas de cada una de las figuras y luego sumaron, solo un estudiante afirmó que la sección superior no coincidía con un arco de circunferencia (es de anotar que la imagen lo sugería) y por este motivo no se podía hallar su área entonces restringió el cálculo a las áreas de cada polígono y sumó.

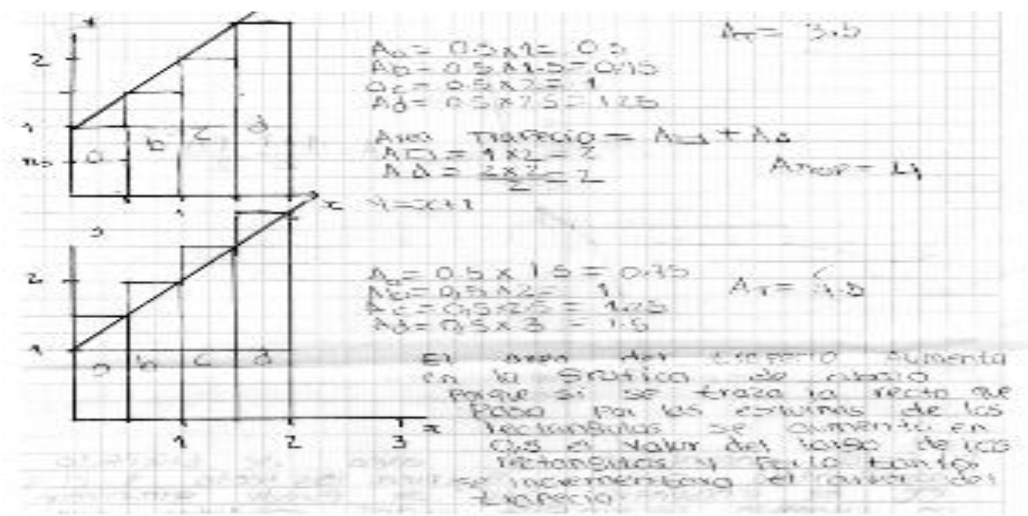
Tabla 2-3: Análisis de resultados de la prueba diagnóstica. Categoría 2

CATEGORÍA CB
PREGUNTA 5
El cincuenta y seis por ciento de los estudiantes no dieron respuesta alguna, entre los demás estudiantes aparecen quienes tienen la idea de cómo hallar el área, sin embargo los términos y símbolos usados no son correctos y hacen confusas las descripciones, aparecen buenos planteamientos, donde hallan las áreas de cada uno de los rectángulos

inscritos y de cada uno de los circunscritos, no obstante el área del polígono queda inconclusa.

La ilustración, encontrada al final de la tabla, se considera la mejor respuesta. Allí, hacen una construcción a partir de la función usando los puntos adecuados encuentran el área de los rectángulos inscritos; análogamente mediante el mismo proceso hallan el área de los rectángulos circunscritos y comparan con el área obtenida al subdividir el trapecio en un rectángulo y un triángulo.

Figura 2-2. Respuesta más pertinente de la prueba.



PREGUNTA 7

La representación gráfica en el plano cartesiano normalmente es inadecuada. Por ejemplo, algunos estudiantes construyeron correctamente la gráfica de la función cuadrática, pero no trazan la recta $x = 1$ sino la recta $y = 1$. Otros estudiantes bosquejan una región incorrecta que no satisface las condiciones de enunciado, toman como referencia un cuadrado unitario, lo que indica que entienden que es posible hallar el área por recubrimiento, pero como no determinaron correctamente la región no pueden obtener la solución.

La mayoría de los estudiantes no resolvieron este problema pues expresaron que no asocian la pregunta con sus conocimientos. En algunos casos solo elaboraron una gráfica que no correspondía a las condiciones dadas.
PREGUNTA 9
En esta pregunta las respuestas más comunes se fundamentaron en graficar usando tabulación pero sin dar solución al problema; una duda frecuente es “no sé cómo hallar el área de una región curva”. El uso incorrecto de los signos les hace cometer errores al graficar de tal manera qué la gráfica resultante no coincide con las condiciones planteadas ni hay evidencia de que exista una idea gráfica previa para evitar representaciones inadecuadas, las escalas en el plano no son bien usadas. En algunas situaciones realizan descripciones literales de cómo hallar el área sin figura alguna, pero cometen errores al operar dando por sentado que el trapecio no tiene base; además, suponen que al tabular x es la base y y es la altura no hay consistencia algorítmica ni conceptual en cuanto al procedimiento; en otros casos usan la noción de simetría de la gráfica con respecto al eje y, sin embargo no concretan como sería la figura cerrada a pesar de que usan la fórmula para hallar el área de un rectángulo planteando medidas arbitrarias.
PREGUNTA 10
Algunos de los planteamientos de los estudiantes respecto a la determinación del área de una región plana se citan a continuación: ▪ “Para hallar el área de una región plana se deben calcular los puntos de corte en el eje x". ▪ “Para calcular el área de cualquier figura plana se requiere conocer la dimensión de sus lados y el tipo de figura formada”. ▪ “Para calcular el área de cualquier figura plana debemos identificar la figura y aplicarle la respectiva fórmula”.

▪ "Para determinar el área de una región plana siempre se buscará encontrar el número de unidades o figura iguales que pueden construirse dentro de la superficie mayor". ▪ "Para hallar el área de una región plana se requiere el conocimiento de las medidas con las cuales se puede determinar al menos el perímetro, ya que en algunos casos se requiere de este. En ocasiones es necesario triangular una figura. Básicamente se puede decir que podemos hallar el área de cualquier región plana sabiendo como determinar el área de un triángulo, el área de un rectángulo y el área de una circunferencia". ▪ "Para hallar un área de cualquier región plana cuando se encuentra bajo una función y sobre el eje x se utiliza o se tabula la función y luego se remplazan, se localizan en un plano cartesiano, luego la región que queda dentro de la gráfica es nuestra área". En algunos casos los estudiantes no dieron una descripción sino que plantearon preguntas respecto a la determinación del área.

Tabla 2-4: Análisis de la prueba diagnóstica – Reflexiones de los estudiantes

REFLEXIONES DE LOS ESTUDIANTES
Los estudiantes presentaron además comentarios y reflexiones generales sobre su propio desempeño y su criterio respecto a la dificultad de cada problema. Estas reflexiones dejan ver vacíos conceptuales y la poca trascendencia que se ha dado a la enseñanza de la geometría como herramienta para resolver problemas de otros dominios de la matemática.

Entre los comentarios de los estudiantes se identifican diferentes aspectos, algunos aseguran que no tienen ni idea sobre el tema o que nunca han recibido información al respecto, que tienen confusión entre las diferencias que hay entre áreas y perímetros o entre los de hipotenusa y catetos. Otros reconocen que entienden los enunciados del taller, pero no recuerdan las fórmulas o los conceptos que deben aplicar específicamente, que aunque en el bachillerato estudiaron los temas dejaron a un lado la práctica y las respuestas que dieron se basaron en bases previas o en la intuición. También aseguran que la prueba contribuyó a recordar conocimientos respecto a las áreas y que es importante revisar los temas de geometría ya que se hace necesaria su aplicación en diferentes problemas. Que hacen falta más conocimientos sobre elementos geométricos, por lo que no están preparados para resolver ese tipo de ejercicios. Por otra parte se consultó a los estudiantes si durante su formación académica, habían utilizado recursos digitales o software para aprender matemáticas, todos coincidieron en que han usado calculadoras graficadoras, pero que no saben aprovechar correctamente las funciones de éstas incluso en lo relativo a las operaciones básicas, pero ningún tipo de software relacionado.

Tabla 2-5: Análisis de la prueba diagnóstica. Comentarios y consideraciones generales

COMENTARIOS Y CONSIDERACIONES GENERALES
Las descripciones y las soluciones presentadas por los estudiantes permiten proponer algunas conclusiones. Usualmente los estudiantes no diferencian entre los aspectos conceptuales, procedimentales y algorítmicos en lo que respecta a la noción de área; son comunes las dificultades para reconocer propiedades de figuras planas y construir figuras teniendo en cuenta propiedades y condiciones. Los estudiantes evidencian problemas para representar funciones en el plano cartesiano, se limitan a tabular pero no han

interiorizado las propiedades de los diferentes tipos de funciones, ni las características de las gráficas.

Algunos estudiantes asumen que para determinar el área de un polígono arbitrario, se multiplican las medidas de todos sus lados estableciendo posiblemente una analogía incorrecta con la expresión para el área de un rectángulo o con la forma de determinar el perímetro. Se identifican en las soluciones problemas relativos tanto a la construcción y caracterización de las figuras geométricas como al uso de la notación; frecuentemente se evidencia confusión entre los conceptos de área y perímetro posiblemente por no diferenciar entre la superficie y el borde o frontera de la región; cuando se propone triangular una región, normalmente consideran exclusivamente triángulos rectángulos, pues para los demás triángulos les resulta difícil determinar la altura; para cualquier problema que involucre triángulos, proponen aplicar el Teorema de Pitágoras olvidando que solamente es válido para triángulos rectángulos.

Los estudiantes tienen nociones generales sobre el área de regiones poligonales, pero al enfrentarse a una región limitada por curvas surgen dificultades, además la simbología que manejan es limitada, cualquier variación en nomenclatura desestabiliza el concepto y limita las soluciones, esto impide generalizar resultados a partir de objetos individuales.

Las fórmulas más conocidas son las convencionales para hallar el área de un rectángulo, de un triángulo y de un círculo pero ni siquiera en estos casos utilizan las unidades de medida, generalmente las ignoran.

Se evidencian obstáculos epistemológicos y didácticos en los estudiantes; perciben de forma compleja los objetos básicos y sus relaciones, hay una separación entre la geometría y la aritmética que se pone en evidencia a través de las representaciones aritméticas y geométricas que presentaron en cada punto. La mayoría tiene dificultades en asociar lo gráfico con lo aritmético y con lo algebraico de manera coherente y las construcciones están limitadas a figuras básicas y simbología inadecuada.

En cuanto a los obstáculos didácticos los estudiantes dan cuenta del poco tiempo que dedicaron en los niveles básicos al estudio de la geometría, de esta manera la perciben de manera muy informal sin concederle la importancia que tiene realmente. El rechazo al pensamiento visual también es visible en el análisis de la prueba, pues, aunque elaboraron muchas figuras, éstas dan cuenta de la poca práctica que hay al respecto. Aunque fallara la herramienta aritmética o algebraica, si el estudiante tuviera una concepción adecuada de las imágenes sus construcciones serán más precisas y podría imaginarlas con solo visualizar la expresión matemática que las describe.

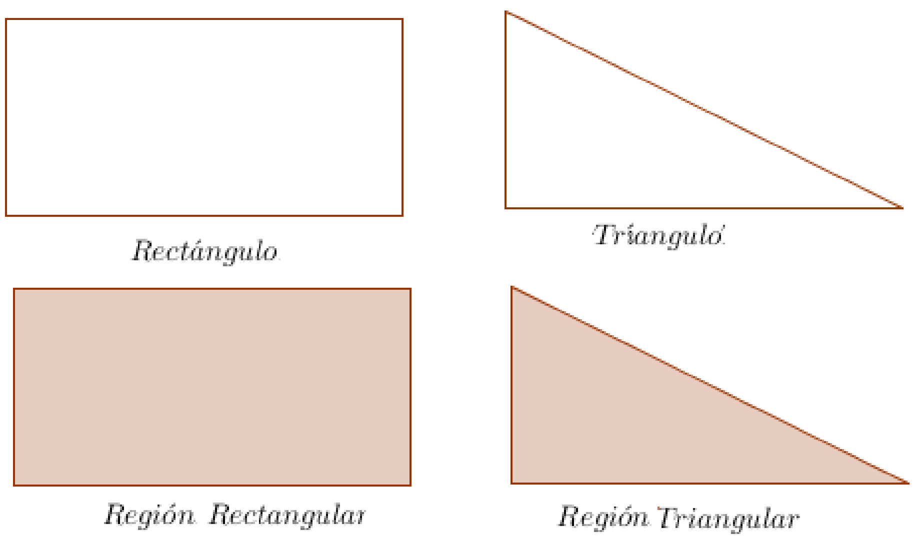
En cuanto a la desconexión entre el concepto de área y el de integral definida, hasta este punto de la prueba y de acuerdo a los resultados, se percibe que el estudiante solamente es capaz de dimensionar áreas basándose en las formas rectangulares y triangulares, por lo tanto para acercarlos al concepto de integral definida se deben superar estos obstáculos.

3. Marco Disciplinar

3.1. Áreas de regiones rectangulares y triangulares.

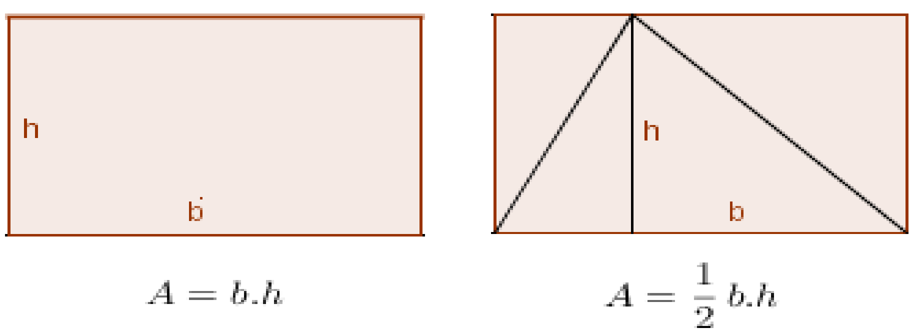
Ante los problemas encontrados es importante partir de la caracterización de un triángulo y una región triangular, así como la de un rectángulo y una región rectangular, esta distinción facilitará entender la diferencia entre área y perímetro, la FIGURA 3-A ilustra estas definiciones y se encuentran formalmente expuestas en (Moise, 1964, pág. 291).

Figura 3-1. Relación entre área y Perímetro



En geometría Euclídea la forma más simple de una región plana es una región rectangular, cuya área está definida como el producto de la base b del rectángulo por su altura h: ($A = b * h$) (Carrillo A.) (Moise, 1964, pág. 295)[10] y el área de una región triangular de base b y altura h es la mitad del área de la región rectangular antes mencionada, es decir $A = \frac{b*h}{2}$. Una vez determinada el área de una región triangular, es posible determinar áreas de regiones poligonales, dado que: “una región poligonal es la unión de un número finito de regiones triangulares en un plano” (Moise, 1964, pág. 291).

Figura 3-2. Relación áreas de regiones triangulares y rectangulares.



Para determinar el área de una región poligonal, puede aplicarse el postulado de la adición de áreas.

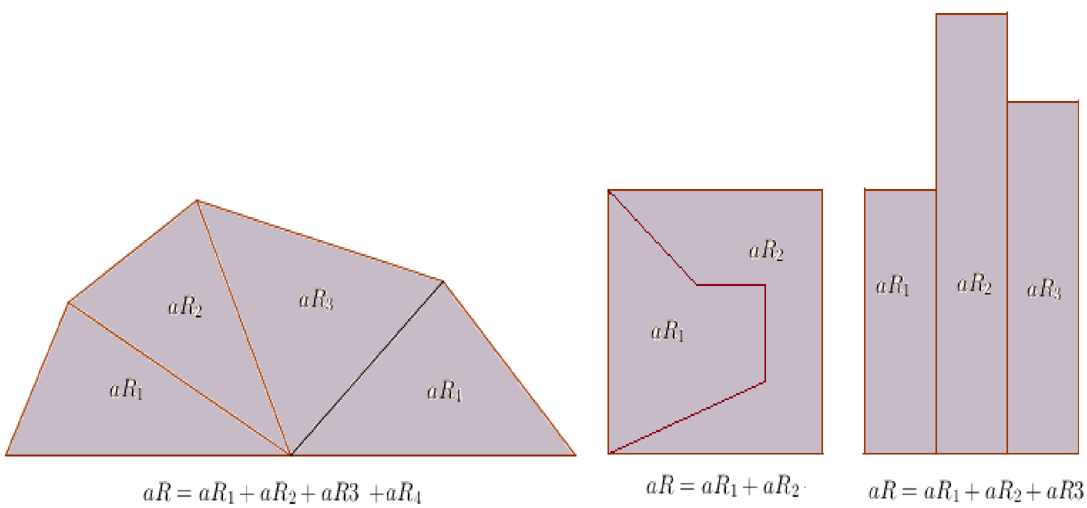
[10] El Teorema 11.1 (Moise, 1964, pag. 295), es análogo al axioma cinco de la definición axiomática de área dada por (Apostol, 1973).

3.1.1. Postulado de la adición de áreas.

Supóngase que la región R es la reunión de dos regiones R_1 y R_2 de áreas $a(R_1)$ y $a(R_2)$ respectivamente, y que R_1 y R_2 se intersecan a lo sumo en un número finito de segmentos y puntos, entonces el área de la región $R,\ es,\quad a(R) = a(R_1) + a(R_2)$.

Nota: El postulado anterior se puede generalizar a una región $\boldsymbol{R}$ que sea unión de un número finito de regiones $\boldsymbol{R_i},\ \ \mathbf{1} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n}$ con la condición de que cada par de regiones se intersequen, dos a dos, a lo más en un número finito de segmentos y puntos.

Figura 3-3. Postulado de la adición de áreas.



Definición. Conjunto medible. Un conjunto del plano se dice medible si se le puede asignar un número real al que se le denomina área (Definición 3.1.2.), la colección de todos estos conjuntos de notará $\mathcal{M}$. Las figuras que se estudiarán pertenecen a $\mathcal{M}$ y el área está caracterizada a través de los siguientes axiomas.

3.1.2. Definición axiomática de área

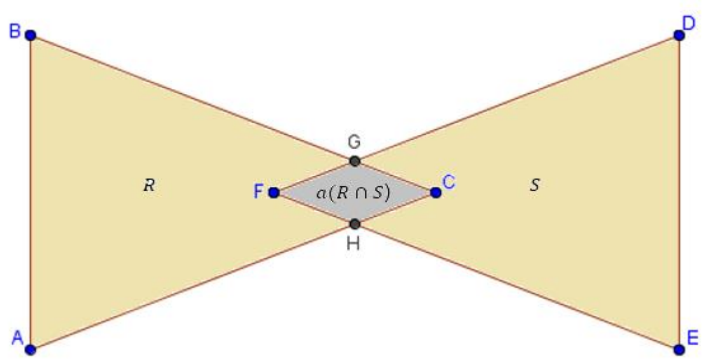
Sea $\mathcal{M}$ una colección de conjuntos medibles y a una función de dominio $\mathcal{M}$, que asigna a cada subconjunto R de la colección, un número real $a(R)$ que cumple las siguientes propiedades:

- *Propiedad de no negatividad*. Para cada conjunto R de $\mathcal{M}$ se tiene $a(R) \geq 0$.

Nota: Tanto un conjunto formado por un punto, como un conjunto finito de puntos o una colección finita de segmentos de recta en el plano tienen todos medida cero: $(R) = 0$.

- *Propiedad aditiva.* Si R y S pertenecen a $\mathcal{M}$ entonces $R \cup S$ y $R \cap S$ también pertenecen a $\mathcal{M}$, y se cumple $a(R \cup S) = a(R) + a(S) - a(R \cap S)$.

Figura 3-4. Propiedad aditiva



- *Propiedad de la diferencia.* Si R y S pertenecen a $\mathcal{M}$ y $R \subseteq S$, entonces $S - R \in \mathcal{M}$ y se tiene que $a(S - R) = a(S) - a(R)$.
- *Invariancia por congruencia*. Si $R \in \mathcal{M}$ y S es congruente con R, entonces $S \in \mathcal{M}$ y $a(R) = a(S)$.

- *Elección de escala.* Todo rectángulo[11] Q pertenece a $\mathcal{M}$ y si los lados de este rectángulo tienen longitudes h y k, entonces $a(Q) = hk$.
- *Propiedad de Exhaución.* Sea P un conjunto que puede encerrarse entre dos regiones R y S, de modo que $R \subseteq P \subseteq S$. Si existe uno y solo un número c que satisface las desigualdades $a(R) \leq c \leq a(S)$, para todas las regiones escalonadas (Vease numeral 3.5) R y S, que satisfagan $R \subseteq P \subseteq S$, entonces P es medible y $a(P) = c$

Estas propiedades se aplican si la región a la que hacemos referencia está determinada sobre un plano cartesiano. En particular en esta síntesis nos interesa determinar el área de una región R del plano limitada por una función escalonada y uno de los ejes coordenados (región poligonal). Para calcular esta área se particiona la región en una colección finita de rectángulos y sumando las áreas de estos rectángulos es posible determinar un número positivo único, el área de R, $a(R)$. Esta área dependerá del tamaño y la forma de la región pero no de su posición (Moise, 1964, pág. 293)[12]

3.2. El área de regiones más generales

Para determinar áreas de regiones más generales (no poligonales) es posible retomar el método propuesto por los matemáticos griegos descrito ya en el capítulo 1, el Método de exhaución.

Recordemos que para hallar áreas de regiones limitadas por cónicas, Arquímedes (287 – 212 A.C.) usó el conocido método de exhaución, en el que usaba polígonos inscritos y circunscritos a la región para aproximarse a su área. Se ilustra su planteamiento en los siguientes ejemplos.

---

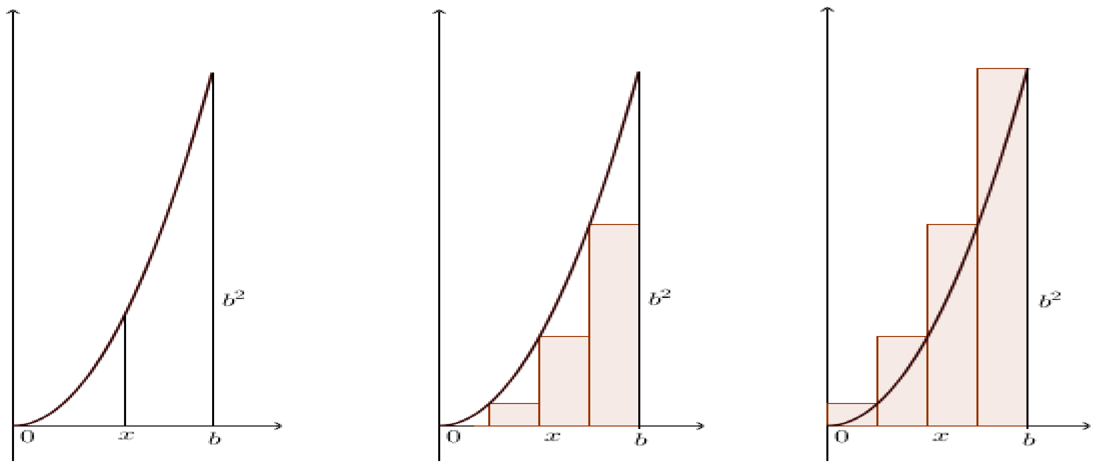
[11] Esta propiedad muestra la necesidad de distinguir entre rectángulo y región rectangular, tal como se mencionaron en la introducción de este capítulo.
[12] Ver postulado de la congruencia.

Ejemplo 1: Área de una región circular. Se inscribe y circunscribe sucesivamente en la región polígonos de n lados, para cada valor de n, el área del polígono inscrito es menor que el área del círculo y el área del polígono circunscrito es mayor, al aumentar el número n de lados de los polígonos, las áreas de éstos serán, cada vez, más próximas al área de la región circular[13].

Ejemplo 2: Área de una región limitada por un segmento parabólico. Arquímedes probó que el área de un segmento parabólico que se puede encerrar en un rectángulo de base b y altura b^2 es exactamente un tercio del área del rectángulo, esto lo hizo usando dos conjuntos de rectángulos: Un conjunto de rectángulos interiores al segmento parabólico para hacer aproximación por defecto, el área del segmento parabólico es mayor que la suma de las áreas de dicho conjunto de rectángulos. Y un segundo conjunto de rectángulos exteriores al segmento parabólico para aproximarse por exceso al área del segmento parabólico, que resulta menor que la suma de las áreas de los rectángulos exteriores. Ilustraciones del método de exhaución para determinar el área de un segmento parabólico pueden encontrarse en los textos de cálculo integral como introducción a este tema, véase la demostración rigurosa en: (Apostol, 1973, págs. 4-9)

[13] En https://www.geogebra.org/m/1187900, puede observarse una construcción secuencial de los polígonos inscritos en la circunferencia que permite aproximarse al área del círculo.

Figura 3-5. Aplicación del método de exhaución.



3.3. Área de regiones planas limitadas por diferentes tipos de curvas. Sumas de Riemann.

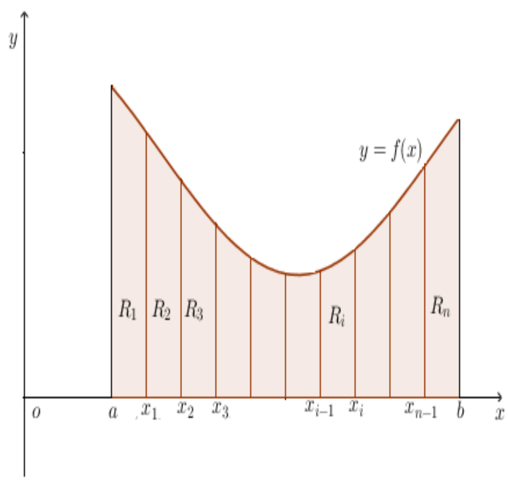
El método de exhaución[14] se empezó a utilizar aproximadamente 18 siglos antes de la introducción del algebra simbólica y de la fundamentación de las primeras ideas del cálculo diferencial, pero se constituyó en una herramienta fundamental para definir área de regiones planas más generales y aproximarse al concepto de integral como veremos en este aparte[15].

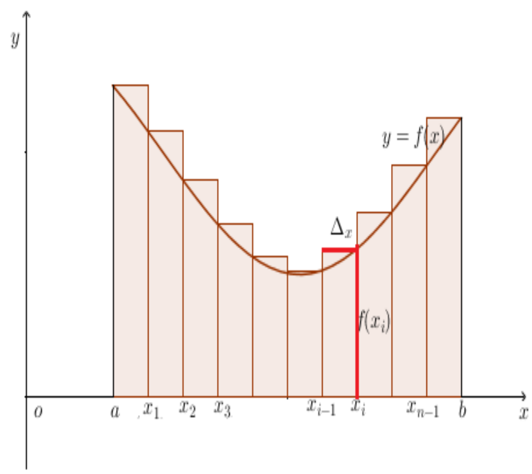
Sea f una función de variable y valor real, continua y positiva y consideremos la región R, limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a,\ x = b$ y el eje x. Vamos a usar el método de exhaución para determinar el área de la región *R*. Subdividimos el intervalo $[a, b]$, en n

[14] En https://www.geogebra.org/m/136069 se puede ver una construcción del método de exhaución.
[15] En https://www.geogebra.org/m/218323 se encuentra un aplicativo para ilustrar las sumas de Riemman.

subintervalos de longitud $\Delta_x = \frac{b-a}{n}$, así: $[x_{0,} x_1]$, $[x_{1,} x_2]$, $[x_{2,} x_3]$,…,$[x_{n-1,}\ x_n]$, donde $x_0 = a$ y $x_n = b$. y $x_1 = a + \Delta_x$, $x_2 = a + 2\Delta_x$, $x_3 = a + 3\Delta_x$

Figura 3-6. Rectángulos de aproximación.





Trazando perpendiculares desde los puntos extremos de los subintervalos, se determinan n regiones (franjas). El área total encerrada por la curva, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ correspondería a la suma de las áreas de las franjas. Como no es posible determinar el área de estas franjas de manera exacta, se requiere construir rectángulos cuyas áreas se aproximen a las áreas de cada una de ellas. Para la franja i-ésima R_i, construimos un rectángulo de base Δ_x y altura[16] $f(x_i)$, siendo $f(x_i)$, el valor de f en el punto extremo de la derecha, de tal forma que el área del i-ésimo rectángulo será $f(x_i)\,\Delta_x$. Al sumar las áreas de los n rectángulos se encontrará una aproximación $\boldsymbol{D_n}$ al área de R con

[16] Este proceso es similar a realizar aproximaciones por exceso en el método de exhaución.

$$\boldsymbol{D_n} = f(x_1)\,\Delta_x + f(x_2)\,\Delta_x + \cdots + f(x_n)\,\Delta_x$$ [17]

Si la cantidad n de franjas se incrementa indefinidamente, la cantidad de rectángulos se incrementa indefinidamente, y la base Δ_x de estos rectángulos es cada vez menor, obteniendo así, cada vez, una mejor aproximación al área de la región. Esto permite definir el área de R, de la siguiente manera:

Definición: El área A de la región R limitada por la gráfica de una función continua y positiva $f,$ el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos R_i de base Δ_x y altura $f(x_i)$ (con x_i punto extremo de la derecha del subintervalo i-ésimo en la partición).

$$A = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\,\Delta_x + f(x_2)\,\Delta_x + \cdots + f(x_n)\,\Delta_x],$$

Por ser f continua es posible demostrar que este límite existe. Veamos:

Si en lugar de tomar los extremos derechos de la partición se toman los extremos izquierdos se obtiene también una aproximación al área A de la región $R,$

$$I_n = [f(x_0)\Delta_x + f(x_1)\Delta_x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta_x], \text{ y:}$$

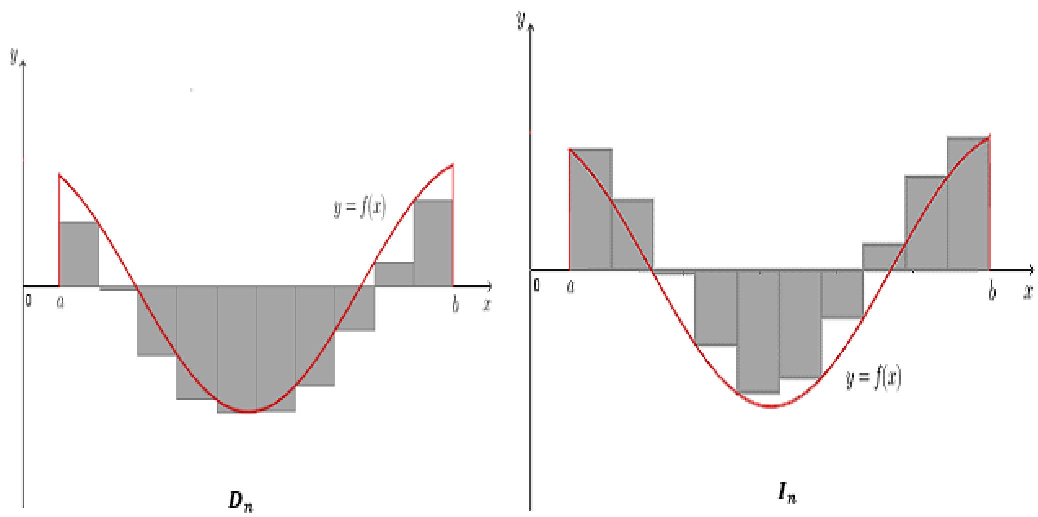
$$A = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_0)\,\Delta_x + f(x_1)\,\Delta_x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta_x]$$

Como f es una función continúa, se concluye que: $\lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} I_n = A$

[17] $\boldsymbol{D_n}$ aproximación al área por rectángulos de alturas determinadas por extremos derechos del subintervalo e $\boldsymbol{I_n}$ aproximación al área por rectángulos de alturas determinadas por extremos izquierdos del subintervalo.

Nota. Es posible tomar como altura del i-ésimo rectángulo la imagen de cualquier $x_i{}^*$, que esté entre x_{i-1} y x_i (no necesariamente un extremo) y definir así el área de la región de una forma más general. La suma de las áreas de los rectángulos construidos, cualquiera que sea la elección del punto $x_i{}^*$, $\sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\,\Delta_x$ es denominada *suma de Riemann.* Si $f(x) \geq 0$, para todo x en un intervalo dado, la suma de Riemann se interpreta como la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación, sin embargo, si f toma tanto valores positivos como negativos en el intervalo, las áreas de los rectángulos que quedan por debajo del eje x se determinan mediante la expresión $-f(x_i)\Delta_x$, así la suma de Riemman se interpreta como la suma de las áreas de los rectángulos que se encuentran arriba del eje x, con los opuestos aditivos de las áreas de los rectángulos que estén por debajo del eje x. La idea se ilustra en las siguientes construcciones:

Figura 3-7. Rectángulos de altura un valor extremo



Obsérvese que si f es una función continua y acotada, al construir rectángulos de aproximación se determinan funciones escalonadas que encierran la curva f. Y entonces, aproximarse al área encerrada por la curva f y el eje x por rectángulos de aproximación es equivalente a determinar el área encerrada por el eje x y cada una de las funciones escalonadas que encierran la curva. Esta idea nos permite caracterizar las *funciones Riemann integrables.*

3.3.1. Sumas superiores e inferiores de Riemman

- ***Definición.*** Sea f una función acotada de variable real y $P_n = \{x_0,\ t_1,\ t_2, \dots, t_{n-1}, t_n\}$, una partición[18] de $[a, b]$. Para cada $i = 0, \dots, n-1$, existen, el ínfimo $m_i \coloneqq \inf\{f(x): x_i \leq x \leq x_{i+1}\}$ y el supremo $M_i \coloneqq \sup\{f(x): x_i \leq x \leq x_{i+1}\}$ de f sobre $[x_i, x_{i+1}]$. La sumas superiores de f respecto a la partición, que notaremos: $S(f,\ P_n)$ y las sumas inferiores de f respecto a la partición, que notaremos: $I(f,\ P_n)$, en (Patil, 2006, pág. 63) se definen respectivamente como:

$$S(f, P_n) = \sum_{i=0}^{m-1} m_i(x_{i+1} - x) \quad \text{y} \quad I(f,\ P_n) = \sum_{i=0}^{m-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

Es decir las sumas superiores e inferiores, son respectivamente, sumas de las áreas de rectángulos de aproximación situados por encima y por debajo de la gráfica de f.

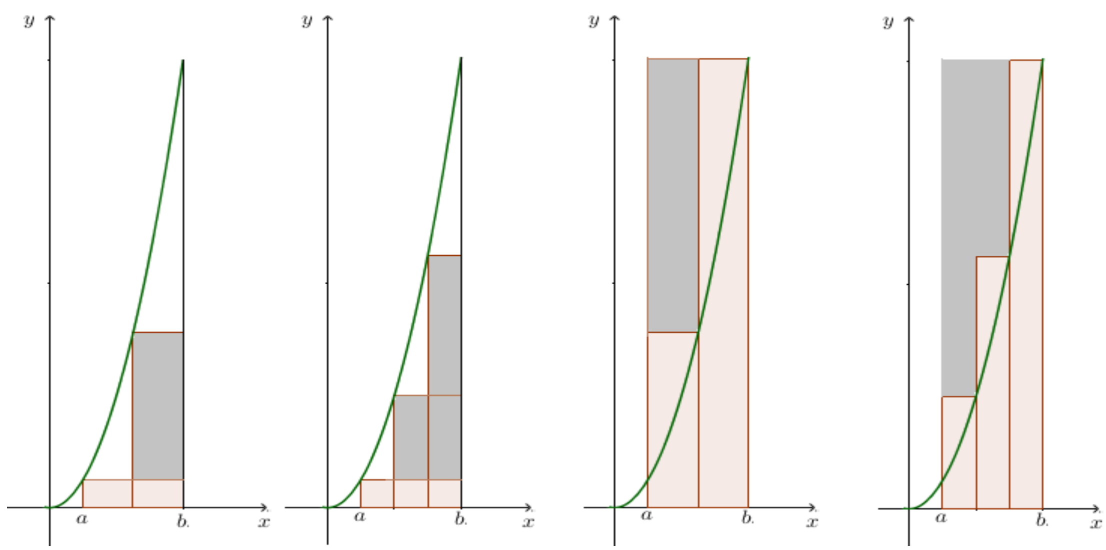
Nota: Es claro que para asegurar la existencia de m_i y M_i es indispensable que la función f sea acotada.

Como para cada $i = 0, \dots, n-1$, $m_i(x_{i+1} - x) \leq M_i(x_{i+1} - x_i)$ se tiene que, $I(f,\ P_n) \leq S(f, P_n)$. El siguiente lema permite ordenar las sumas inferiores y las sumas superiores a medida que se consideran refinamientos de una partición.

[18] Una partición del intervalo $[a, b]$ es una colección finita de puntos en el intervalo, incluidos los extremos a y b; los puntos de la partición se enumeran así: $a = x_0 < x_1 < x < \cdots x_{n-1} < x_n = b$.

Lema 3.3.1: Sean P_n y Q_n dos particiones del intervalo $[a, b]$, si Q_n es un refinamiento de P_n , es decir $P_n \subseteq Q_n$, entonces $S(f, P_n) \leq S(f, Q_n)$ y $I(f,\ P_n) \geq I(f,\ Q_n)$.

Figura 3-8. Ilustración del lema 3.3.1.



La ilustración indica que al refinar la partición P_n, la suma inferior va aumentando pues cada rectángulo se divide en otros de altura igual o superior, y el área siempre aumenta. Por otro lado al refinar la partición P_n, la suma superior va disminuyendo pues cada rectángulo se divide en otros de altura igual o inferior, y el área siempre disminuye.

Demostración: Para el caso en que Q_n contiene solo un punto más que P_n, es decir

$P_n = \{x_0,\ x_1,\ x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$, y $Q_n = \{x_0,\ x_1,\ x_2, x_k, s,\ x_{k+1} \dots, x_{n-1}, x_n\}$, con

$$a = x_0 < \ x_1 < \ x_2 < \ x_k < \ s < \ x_{k+1} < \cdots < x_{n-1} < \ x_n = b.$$

Sean $n^{\prime} := \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq s\}$ y $n^{\prime\prime} := \inf\{f(x) : s \leq x \leq x_{k+1}\}$. Entonces:

$$I(f,\ P_n\ ) = \sum_{i=0}^{n-1} n_i(x_{i+1} - x_i)$$ Y

$$I(f,\ Q_n\ ) = \sum_{i=0}^{k-1} n_i(x_{i+1} - x_i) + n^{'}(s - x_k) + n^{''}(x_{k+1} - s) + \sum_{i=k+1}^{n-1} n_i(x_{i+1} - x_i).$$

Por consiguiente para probar la desigualdad $I(f,\ P_n\ ) \leq I(f,\ Q_n\ )$, es suficiente probar que $n_k(x_{k+1} - x_k) \leq n^{'}(\mathrm{s} - x_k) + n^{''}(x_{k+1} - s)$. Ahora, como $\{f(x) : x_k \leq x \leq s\} \subseteq \{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$, se tiene entonces

$$n_k = \inf\{f(x) \setminus x_k \leq x \leq x_{k+1}\} < \inf\{f(x) \setminus x_k \leq x \leq s\} = n^{'},$$

de manera similar $n_k \leq n^{''}$ por lo tanto

$$n_k(x_{k+1} - x_k) = n_k(s - x_k) + n_k(x_{k+1} - s) \leq n^{'}(\mathrm{s} - x_k) + n^{''}(x_{k+1} - s).$$

De donde, para este caso, se tiene que $I(f,\ P_n\ ) \leq I(f,\ Q_n\ )$; similarmente se puede demostrar que $S(f,\ P_n\ ) \geq S(f,\ Q_n\ )$.

En general la partición Q_n puede obtenerse de la partición P_n mediante la adjunción sucesiva (paso a paso) de una colección finita de puntos, es decir que existe una secuencia de particiones $P_n = P_1,\ P_2, \ldots, P_r = Q_n$, tales que P_{j+1} contiene solamente un punto más que P_j, entonces:

$I(f,\ P_n\ ) = I(f,\ P_1\ ) \leq, \ldots, \leq\ I(f,\ P_r\ ) = I(f,\ Q_n\ )$ y

$S(f,\ P_n\ ) = I(f,\ P_1\ ) \geq, \ldots, \geq\ S(f,\ P_r\ ) = S(f,\ Q_n\ )$, esto prueba el lema enunciado.

Del lema anterior se deduce el siguiente corolario.

Corolario. Sean P_1 y P_2 dos particiones del intervalo $[a, b]$ y sea f una función de variable real, acotada en el intervalo $[a, b]$. Entonces $I(f, P_1) \leq S(f, P_2)$.

Nota: el Corolario garantiza, que cualquier suma superior $S(f, P')$ es mayor o igual que la mayor de todas las sumas inferiores.

Demostración: Existe una partición Q, que contiene tanto a la partición P_1, como a la partición P_2, $Q := P_1 \cup P_2$.

Por el lema anterior, se tiene que $I(f, P_1) \leq I(f, Q) \leq S(f, Q) \leq S(f, P_2)$, de donde $sup\, I(f, P_n) :\ P_n$ es una partición de $[a, b] \leq S\left(f, P_n^{´}\right)$ para cada partición $P_n^{´}$ de $[a, b]$.

Esto a su vez significa que el supremo $\{\sup\{I(f, P_n): P_n$ es una partición de $[a, b]\}$ es el límite inferior del conjunto de todas las sumas superiores de f, entonces $\{\sup\{I(f, P_n): P_n$ es una partición de $[a, b]\} \leq \inf\{S(f, P_n): P_n$ es una partición de $[a, b]$. Estos dos valores, están entre la suma superior y la suma inferior de f para toda partición P_n de $[a, b]$.

Luego $\{I\left(f, P_n^{´}\right) \leq \sup\{I(f, P_n): P_n$ es una partición de $[a, b]\} \leq \{S(f, P_n^{´})$ y además $I\left(f, P_n^{´}\right) \leq \inf\{S(f, P_n) \setminus\ P_n$ es una partición de $[a, b]\} \leq S(f, P_n^{´})$ para toda partición $P_n^{´}$ de $[a, b]$ por lo tanto en algún momento $\sup\{I(f, P_n) \setminus\ P_n$ es una partición de $[a, b]\}$ = $\inf\{S(f, P_n): P_n$ es una partición de $[a, b]\}$; en este caso, este valor es el único entre las suma superior y la suma inferior de f para todas las particiones.

Nota: Este valor es el candidato ideal para ser la medida del área A de la región R limitada por la gráfica de una función continua *f*, $f(x) \geq 0$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Por otra parte, $sup\{I(f, P_n) \setminus\ P_n$ es una partición de $[a, b]\}$ < $inf\{S(f, P_n) \setminus\ P_n$ es una partición de $[a, b]\}$, entonces cada número t, entre $sup\{I(f, P_n) \setminus\ P_n$ es una partición de $[a, b]\}$ e $inf\{S(f, P_n) \setminus\ P_n$ es una partición de $[a, b]\}$ satisfacerá $I\left(f, P_n^{´}\right) \leq t \leq S(f, P_n^{´})$ para todas las particiones $P_n^{´}$ de $[a, b]$.

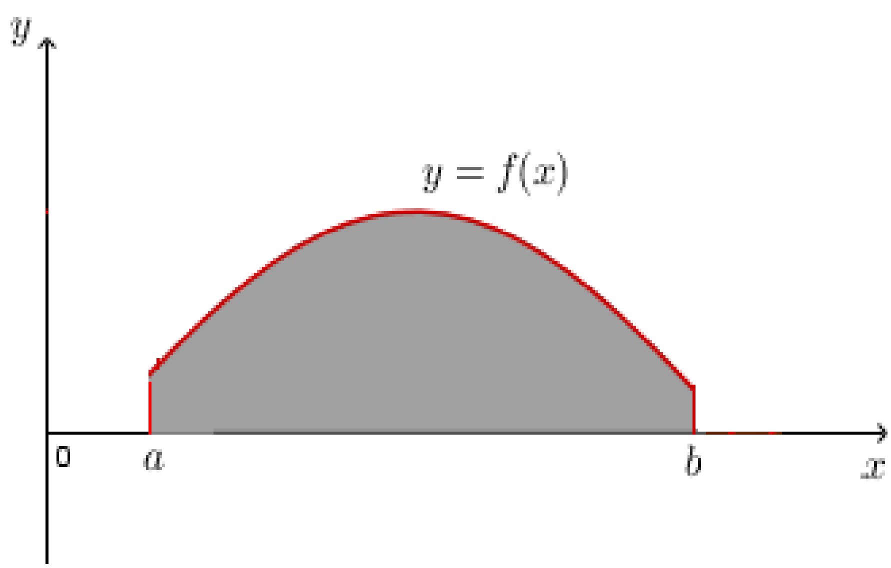
A partir del análisis anterior es posible formalizar el concepto de integral definida y caracterizar las funciones Riemann integrables.

Definición[19]. Sea f una función continua definida para $a \leq x \leq b,$ y una partición P_n del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de longitud $\Delta_x = (b-a)/n$; con $x_0 = a,\ x_1, \ldots, x_n$ los puntos extremos de estos subintervalos, y x_{i^*} un punto arbitrario (punto muestra) en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. *La integral definida de f, desde $x = a$ hasta $x = b$,* se define como (Stewart, pág. 361)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i^*})\, \Delta_x$$

Si $f(x) \geq 0$, la integral $\int_a^b f(x)dx$ [20] se interpreta como el área bajo la curva $y = f(x)$, desde $x = a$ hasta $x = b$.

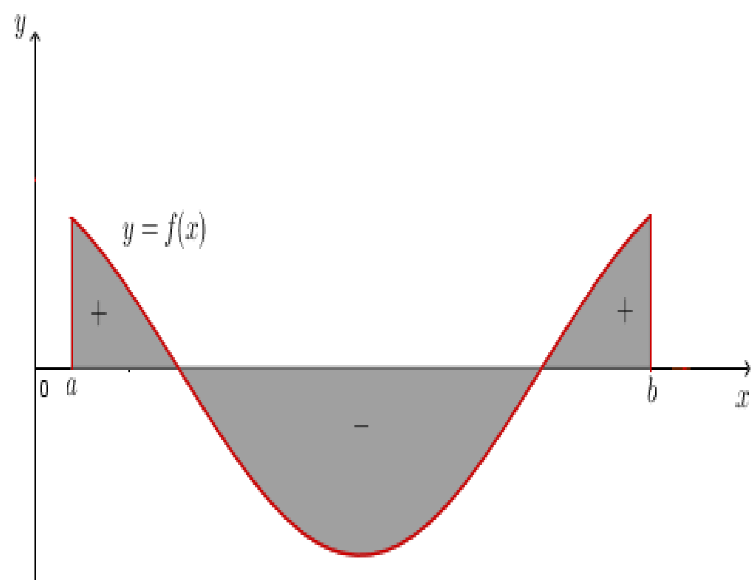
Figura 3-9. Integral definida como área bajo la curva



[20] El símbolo ∫ fue introducido por Leibniz a finales del siglo XVII para caracterizar la sumatoria, $f(x)$ es el integrando y a y b son los límites de integración.

Por otra parte si f toma tanto valores positivos como negativos al considerar el límite de la suma de Riemann, se obtiene una integral definida que puede interpretarse como una diferencia de áreas: $\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2$; donde A_1 es el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje x en el semiplano superior ($y > 0$) y A_2 es el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje x en el semiplano inferior ($y < 0$) .

Figura 3-10. Integral definida como diferencia de áreas.



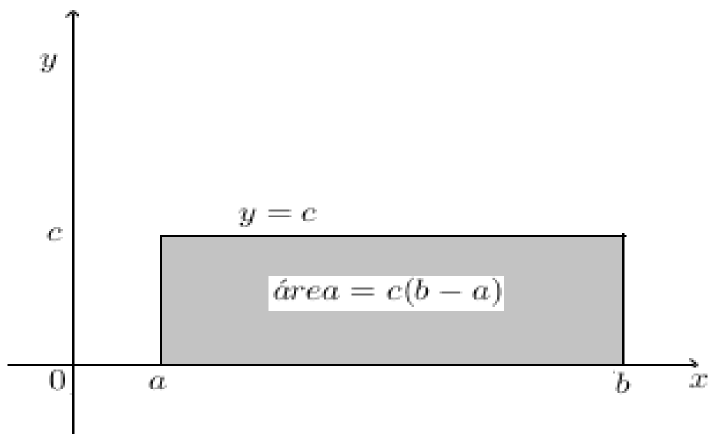
Aplicando las propiedades de la sumatoria y de los límites es posible concluir que la integral definida tiene las siguientes propiedades.

Nota: la suma de Riemman $\sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\,\Delta_x$ es una aproximación a la integral definida.

3.4. Propiedades de la integral definida.

1. Si $f(x) = c$, c una constante arbitraria, entonces $\int_a^b c\, dx = c(b-a)$

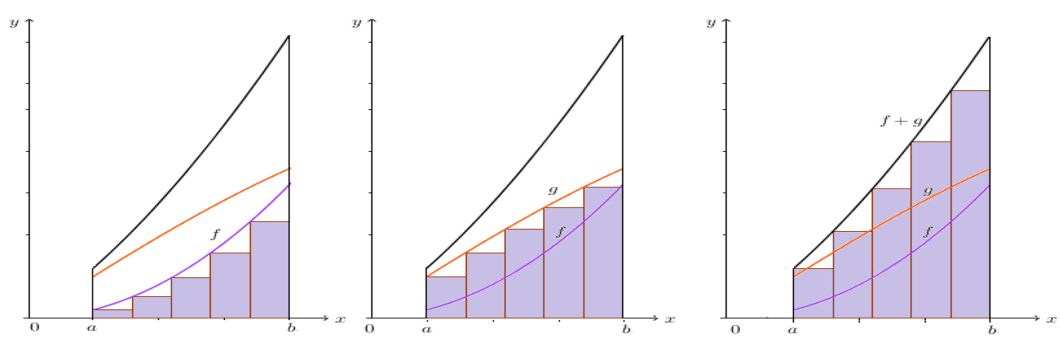
Figura 3-11. Área limitada por una función constante.



El área de la región limitada por una función constante y las rectas $x = a$ y $x = b$ es el área del rectángulo de base $b - a$ y altura c.

2. Sean f y g funciones continuas entonces, $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b [f(x)dx + \int_a^b g(x)dx]$

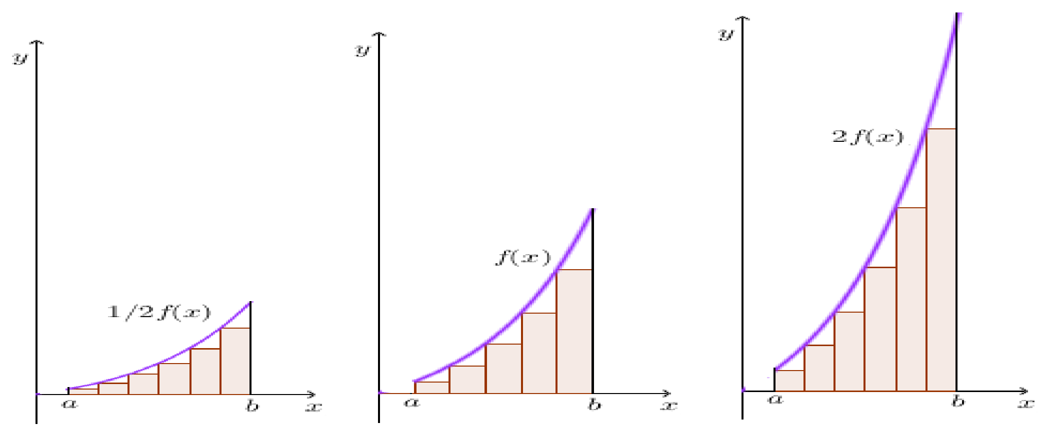
Figura 3-12. Integral de una suma de funciones.



Es decir, la integral definida de una suma de funciones continuas, es la suma de las integrales[21]. Si f y g son funciones positivas, entonces el área de la región limitada por la curva $f(x)+g(x)$, las rectas $x=a$ y $x=b$, y el eje x, es la suma de las áreas de la región limitada por la curva $f(x)$ y las rectas $x=a$ y $x=b$, y el eje x y la región limitada por la curva $g(x)$ y las rectas $x=a$ y $x=b$ y el eje x. Esta propiedad puede demostrarse construyendo las sumas de Riemman para f y g y aplicando las propiedades de los límites y de la sumatoria, teniendo en cuenta además, que tanto *f* como *g* son continuas y suma de funciones continuas es continua.

3. Sea c una constante arbitraria, y f una función continua, entonces $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$.

Figura 3-13. Integral de una constante por una función



En las gráficas **(Figura 4-12)** se ilustra, con un ejemplo, esta propiedad. Para una función continua f, la integral $\int_a^b 2f(x)dx$ es el doble de la integral de $f(x)$ entre a y b y que

[21] En https://www.geogebra.org/m/20548 puede apreciarse la modelación de estas propiedades.

$\int_a^b 1/2f(x)dx$, es la mitad de la integral $\int_a^b f(x)dx$. Es decir el área de la región original se amplía o se reduce de acuerdo al valor del factor c.

4. Sean f y g continuas $\int_a^b[f(x) - g(x)]dx = \int_a^b[f(x)dx - \int_a^b[g(x)dx$

Figura 3-14. Integral de función diferencia.

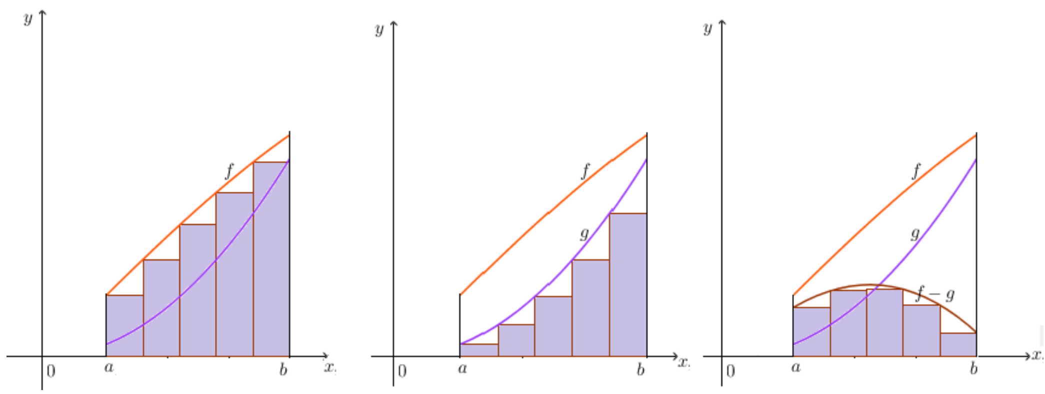
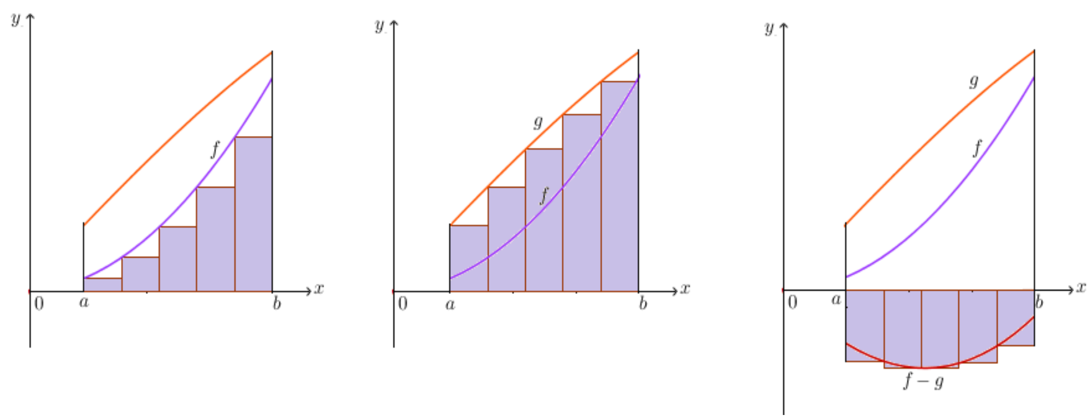


Figura 3-15. Integral de función diferencia[22].



[22] En el caso que $f(x) \leq g(x)$, resultará un número negativo y la integral se interpretará como una diferencia de áreas.

Nota. Si la integral definida de una función existe, la función se dice Riemman integrable, sin importar el punto muestra que elijamos para construir la suma de Riemman, el límite existe y converge a un único valor. La función f se dice entonces Riemman integrable. Aclararemos esta nota más adelante.

3.5. Funciones escalonadas.[23]

Definición: Una función f cuyo dominio es un intervalo cerrado $[a,b]$ se dice que es escalonada, si existe una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a,b]$ tal que f es constante en cada subintervalo abierto de P. Es decir, para cada $k = 1, 2, \dots, n$ existe un número real c_K tal que $f(x) = c_k$, si $x_{k-1} < x < x_k$.

3.5.1. Integrales definidas de funciones escalonadas

Para obtener el valor de la integral de una función escalonada se determina el área del rectángulo de base $(\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_{k-1}})$, longitud del intervalo k-*ésimo,* y altura la constante correspondiente $\boldsymbol{c_K}$ **,** es decir se determina para cada *k* , el producto: $\boldsymbol{c_K} \times (\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_{k-1}})$, y luego se suman todos los productos obtenidos. (Apostol, 1973).

La integral de f de a hasta b, se define entonces como:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \times (x_k - x_{k-1})$$

[23] Las funciones escalonadas también son denominadas constantes a trozos.

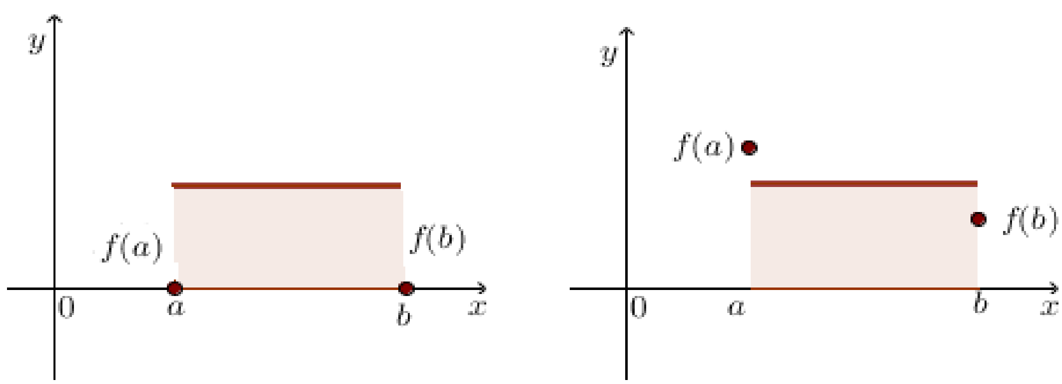
El valor de la integral es independiente de los valores que tome la función en los extremos del intervalo, por lo tanto, si f es constante en el intervalo abierto (a, b), esto es $f(x) = c$, si $a < x < b$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = c\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = c(b - \text{a}).$$

Nota: Esta expresión no depende de la elección de la partición, siempre y cuando, f sea constante en los subintervalos abiertos de dicha partición; por tanto puede refinarse la partición y el valor de la integral es el mismo.

Independientemente de cuales sean los valores de $f(a)$ y $f(b)$ en (a, b). Si $c > 0$ y $f(x) = c$, para todo x en el intervalo (a, b), la región determinada es un rectángulo de base $(b - a)$ y altura c, por lo tanto su área es $c(b - a)$, y es ésta la integral definida de f en (a, b).

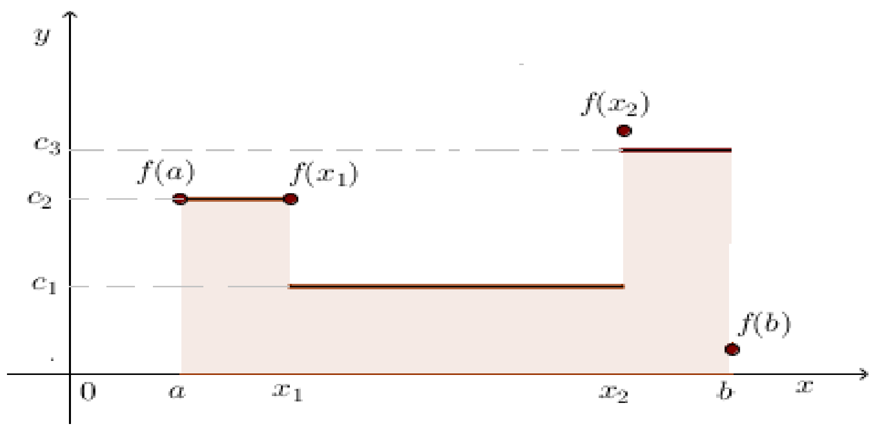
Figura 3-16. Integral definida de una región rectangular



La figura ilustra que al cambiar el valor de la función en los puntos extremos a y b, cambia el conjunto de ordenadas que definen la función, pero el valor de la integral definida es el área de la región rectangular determinada.

Si f es una función escalonada (constante a trozos) se determina un conjunto finito de rectángulos y la integral definida de la función f es la suma de las áreas de estos rectángulos, y esta suma es independiente de los valores que toma la función en cada punto de división (extremo de subintervalos sobre los que se define la función).

Figura 3-17. Integral definida de una función escalonada



En (Figura 3-P) se muestra la gráfica de una función escalonada f tal que:

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & si\ a < x < x_1 \\ c_2 & si\ x_1 < x < x_2 \\ c_3 & si\ x_2 < x < b \end{cases}$$

La integral definida de la función f es entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = c_1 \times (x_1 - a) + c_2 \times (x_2 - x_1) + c_3 \times (b - x_2).$$

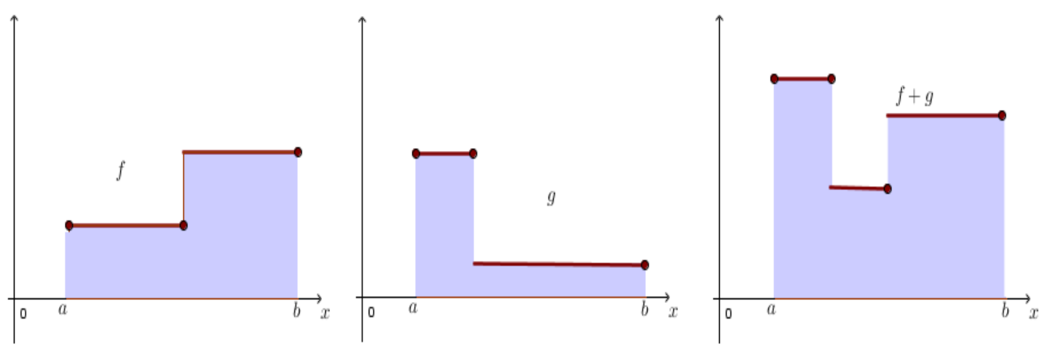
3.5.2. Propiedades de la integral definida de una función escalonada.

Sean f y g funciones escalonadas definidas en el intervalo $[a, b]$ entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- *Propiedad Aditiva.* La integral definida de la suma de f y g es igual a la suma de las integrales.

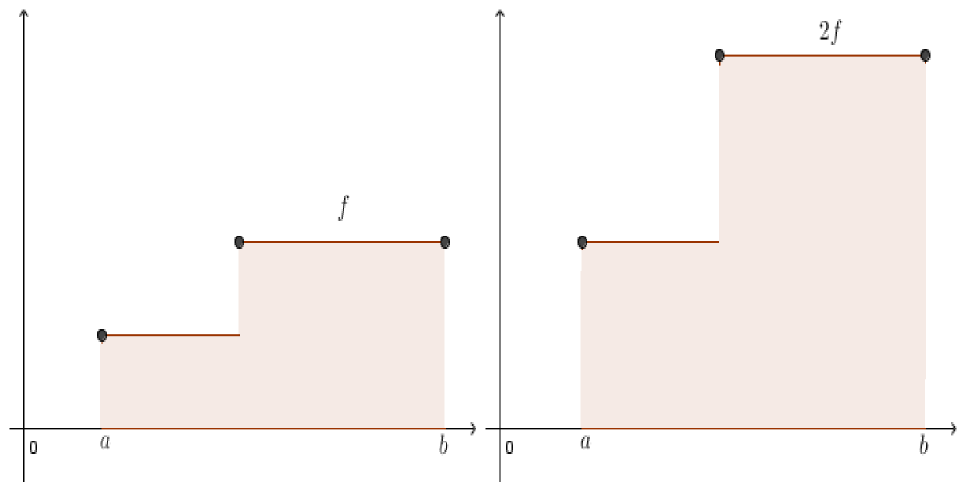
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Figura 3-18. Integral definida de una función escalonada. Propiedad aditiva



- *Propiedad Homogénea*. Si C es un número real arbitrario y f es una función escalonada en $[a, b]$ entonces.

Figura 3-19. Integral definida de una función escalonada. Propiedad Homogénea (c=2)

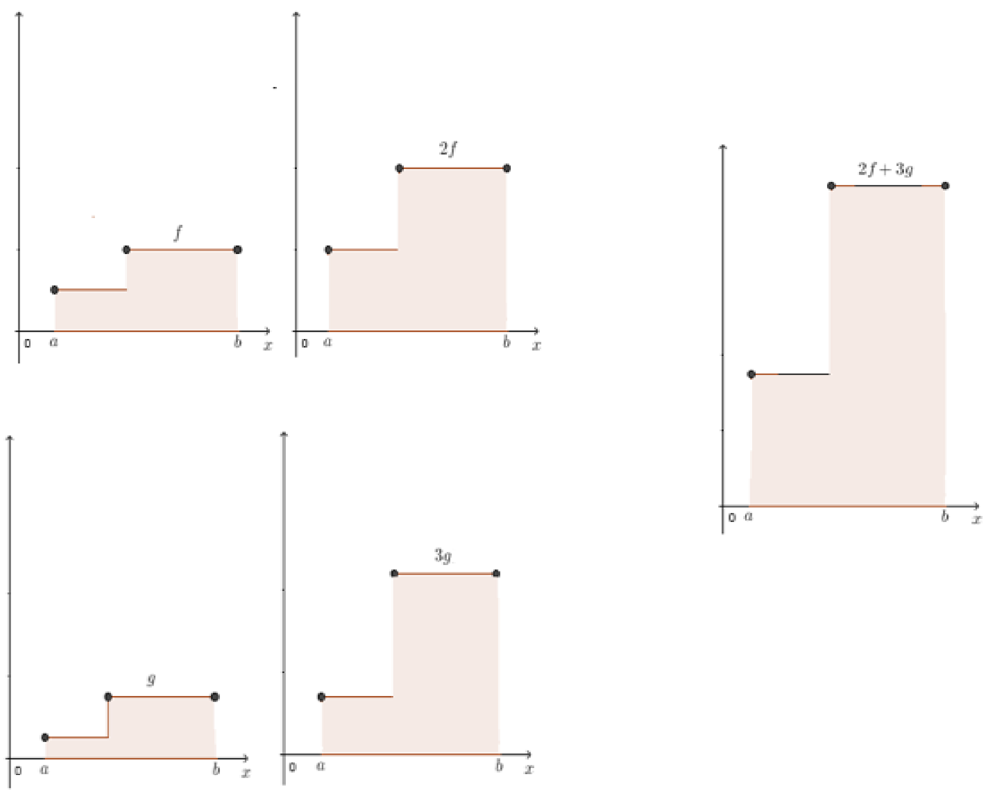


Las dos propiedades anteriores son casos particulares de la llamada propiedad de linealidad.

- *Propiedad de Linealidad.* Si C_1 y C_2 son números reales arbitrarios y f y g funciones escalonadas definidas en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b [C_1 f(x)dx + C_2 g(x)]dx = C_1 \int_a^b f(x)dx + C_2 \int_a^b g(x)dx$$

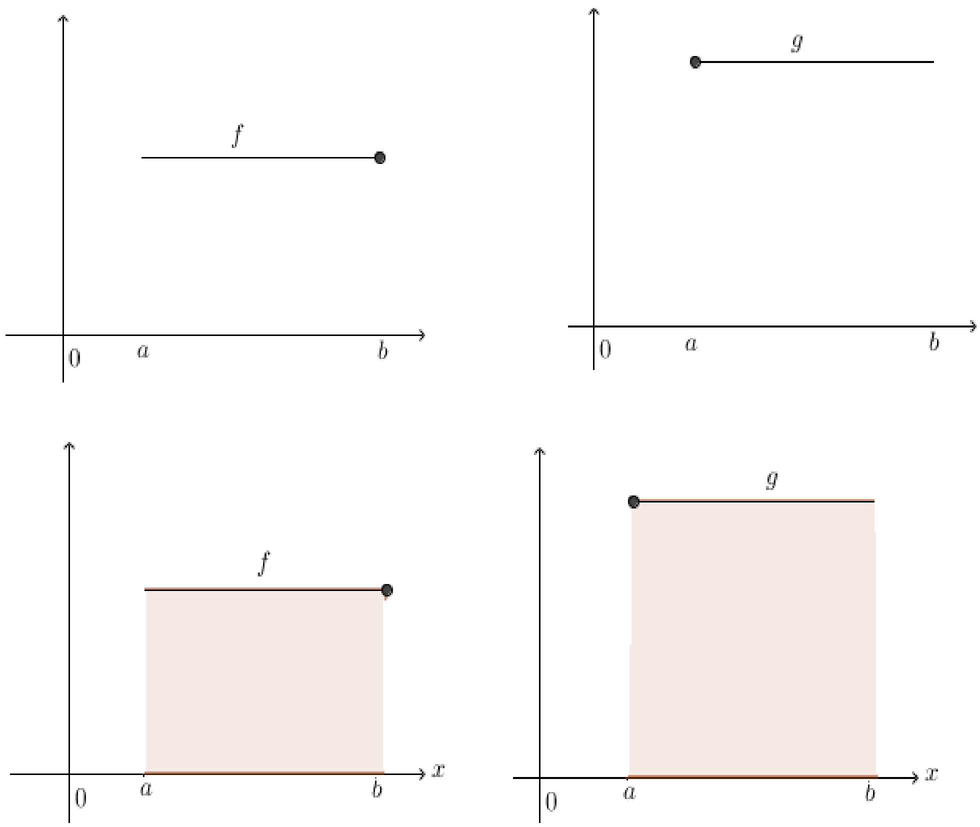
.Figura 3-20. Integral definida de una función escalonada. Propiedad de Linealidad



- *Teorema de comparación.* Sean f y g funciones escalonadas definidas en el intervalo $[a, b]$ y $f(x) < g(x)$, para todo $x \in [a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

Figura 3-21. Integral definida de una función escalonada. Teorema de comparación

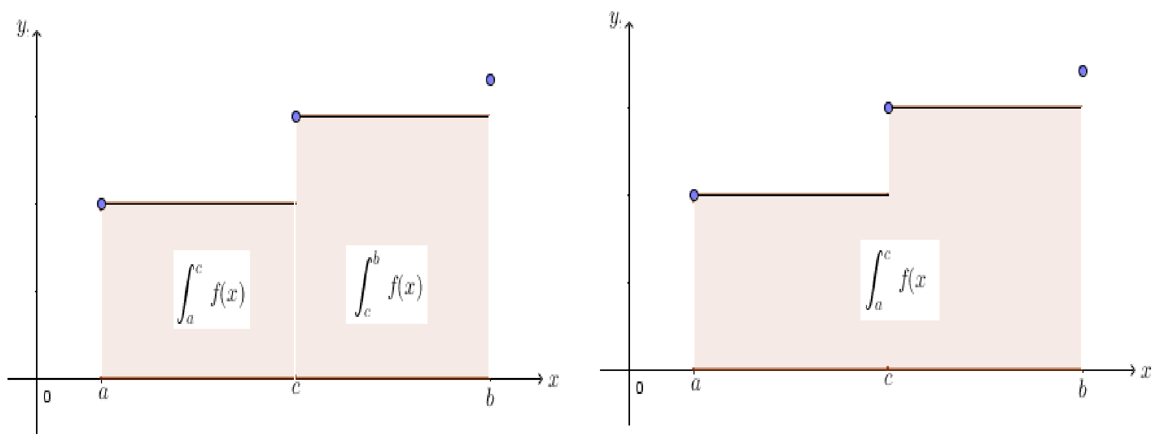


En la primera parte de este capítulo se había hecho referencia al Postulado de Aditividad de áreas (Numeral 3.1.1): Si una región R es reunión de dos o más regiones que se intersecan, dos a dos, a lo sumo en un número finito de segmentos y puntos, el área de la región R, es la suma de las regiones que la componen. La propiedad que se enuncia a continuación es consecuencia de este postulado.

- *Postulado de Aditividad de áreas.* Sea f una función escalonada definida en el intervalo $[a, b]$, si $a < c < b$, entonces

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

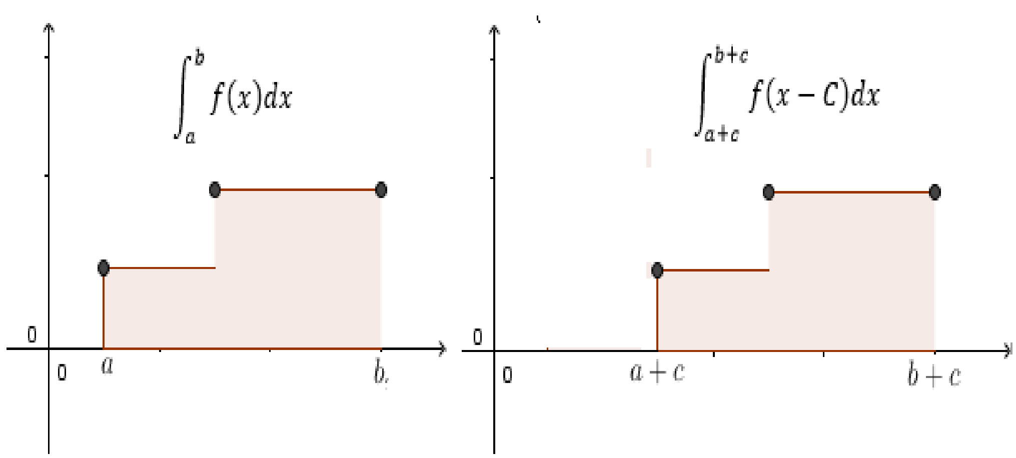
Figura 3-22. Integral definida de una función escalonada. Postulado de aditividad de áreas.



- *Invarianza de la integral definida por una traslación.* Sea f una función escalonada definida en el intervalo $[a, b]$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x + c)dx$$

Figura 3-23. Integral definida de una función escalonada. Postulado de aditividad de áreas.



La propiedad anterior resulta natural desde luego, porque la geometría de trasformaciones establece que el área de figuras planas es invariante por traslación.

- *Efecto de la dilatación o contracción del intervalo de integración.* Sea f una función escalonada definida en el intervalo $[a,b]$ y k un real, $k > 0$ entonces

$\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx = k\int_{a}^{b} f(x)dx$, o lo que es lo mismo $\int_{a}^{b} f(x) = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx$

Es decir, la integral definida de una función escalonada, f, definida en un intervalo $[a,b]$, se puede determinar considerando la integral definida de una función escalonada g definida en el intervalo $[ka,kb]$, tal que $g(x) = f\left(\frac{x}{k}\right)$, si $ka \leq x \leq kb$ y multiplicando esta última integral por $\frac{1}{k}$, siendo $k > 0$ cualquier real.

Nota: Si a y b son reales tales que $a < b$, $\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{a}^{b} f(x)dx$. Y si $a = b$, $\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$

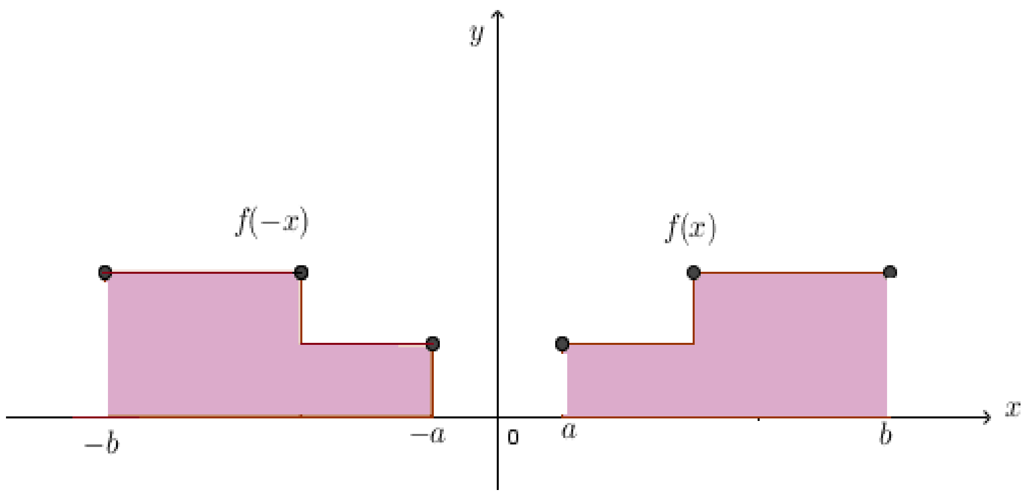
De la nota anterior se puede concluir que la aditividad es válida, incluso en el caso:

$a < b < c$ y que además la propiedad de dilatación o contracción del intervalo de integración se puede generalizar a cualquier $k \neq 0$.

- *Reflexión de la integral.* Sea f una función escalonada definida en un intervalo $[a,b]$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)dx$$

Figura 3-24. Integral definida de una función escalonada. Reflexión de la integral



La gráfica ilustra, que al considerar la función $g(x) = f(-x)$, el dominio de esta nueva función resulta de reflejar el intervalo (a, b) con respecto al eje y, y el rango de g coincide con el rango de f , de ello se concluye que las áreas de los rectángulos que se determinan para calcular las integrales coinciden, de donde el valor de las dos integrales es el mismo.
El análisis de la integral de funciones escalonadas permite, como lo comentamos anteriormente, fundamentar la teoría acerca de funciones *Riemann Integrables o* $\mathcal{R} - Integrables$ como se verá en el siguiente apartado de acuerdo con (Sánchez F. , (s.f.)).

3.6. Funciones Riemann Integrables - $\boldsymbol{\mathcal{R} - Integrables}$.

Definición. Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada, es decir, existe $M > 0$, tal que $|f(x)| < M$ para todo $x \in [a, b]$. Se dice que f es Riemann integrable o $\mathcal{R} - Integrable$ en $[a, b]$ si para todo $\varepsilon > 0$ existen funciones escalonadas h, k cuyo dominio de definición es el intervalo $[a, b]$, tales que

a) $h \leq f \leq k$ b) $\int_a^b (k(x) - h(x))\, dx < \varepsilon$

b)

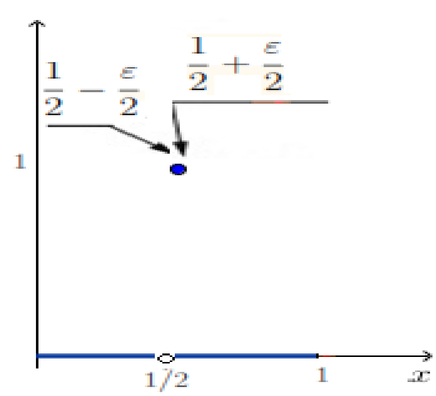
A continuación se presentan algunos ejemplos de funciones Riemann integrables y no Riemann integrables.

- Ejemplo 1. Veamos que las funciones escalonadas son Riemann integrable. Sea f una función escalonada de variable real, para demostrar que es Riemman integrable basta considerar h y k tales que $h = k = f$, desde luego se tiene que $h \leq f \leq k$ y por tanto se cumple que $\int_0^1 (k(x) - h(x))dx < \varepsilon$.

- Ejemplo 2. Sea f una función de variable real, $f(x) = 0\ para\ todo\ x \neq \frac{1}{2}$ y $f(\frac{1}{2}) = 1$. Para demostrar que es Riemann integrable, consideramos $h = 0$ y k definida de la siguiente manera.

Figura 3-25. Ejemplo de función Riemann integrable

$$k(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right] \\ 0, & en\ cualquier\ otro\ punto\ del\ intervalo\ [0,1] \end{cases}$$

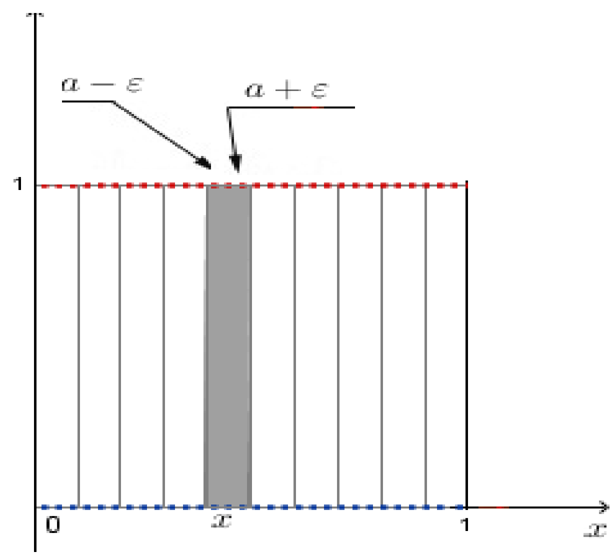


Se tiene que $h \leq f \leq k$, y si se consideran las sumas de Riemman, tanto las inferiores como las superiores, estas se acercan al mismo valor ε, se cumple entonces que $\int_0^1 (k(x) - h(x))dx = \int_0^1 k(x)dx < \varepsilon$. Por lo tanto f es Riemman Integrable.

- Ejemplo 3. Función de Dirichlet. Sea f una función de variable real definida en el intervalo $[0,1]$, de la siguiente manera (Petros, 2005).

Figura 3-26. Ejemplo de función no Riemann integrable (función de Dirichlet)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 1, & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



Debido a que entre dos números racionales existen infinitos números irracionales y que recíprocamente, entre dos números irracionales existen infinitos números racionales, la gráfica de la función es una secuencia lineal de puntos de ordenada 1 y otra secuencia lineal de puntos de ordenada 0.

Al intentar construir las sumas superiores e inferiores *(Sumas de Riemman),* para la función de Dirichlet, aun haciendo particiones muy finas del intervalo, las sumas de Riemann no convergen al mismo límite. Dado que para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $a \in \mathbb{R}$, se tiene que,

$\inf\{f(x)/x \in (a-\mathcal{E}\,,\ a+\mathcal{E})\} = 0$ y $\sup\{f(x)/x \in (a-\mathcal{E}\,,\ a+\mathcal{E})\} = 1$; por tanto la función no es Riemann integrable.

Nota: Esta función se genera al responder la pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un punto del intervalo $[0,1]$ al azar el punto elegido sea irraciona?[24].

Se puede demostrar además que las funciones constantes, excepto en un número finito de puntos en los que toman valores arbitrarios, son Riemann Integrables (Sánchez F. , (s.f.)).

Otros ejemplos de funciones Riemann Integrables son las monótonas (crecientes o decrecientes), las continuas y las funciones elementales[25] (Ivorra, (s.f.)) son $\mathfrak{R}$-integrables en los intervalos en los que sean continuas.

Nota: Son ejemplos de funciones elementales en un intervalo $[a,b]$ los polinomios, las funciones racionales en su dominio de definición, las funciones e^x, $logx$, si $0 < a < b$, $sen(x)$ y $\cos(x)$, así como $tg(x)$ y $arctag(x)$ en su dominio de definición, también, $arcsen(x)$, $arccos(x)$, $senh(x), \cosh(x)$ y $tgh(x)$ y sus inversas.

La teoría anteriormente expuesta describe el origen algebráico y geométrico del concepto de integral definida. El siguiente teorema permite relacionar la teoría de integración introducida hasta ahora, con la teoría de derivación:

[24] Al realizar este experimento, si se obtiene un número irracional, se asigna 1 y si se obtiene un racional, se asigna cero.

[25] (Ivorra, (s.f.)) hace una descripción formal del concepto de funciones elementales.

3.7. Primer Teorema fundamental del cálculo.

Sea f una función definida en un intervalo $[a,b]$ tal que para cada x en $[a,b]$ f es integrable en $[a,x]$. Sea c tal que $a \leq c \leq b$ y definamos una nueva función F asi:

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt, \text{ si } a \leq x \leq b$$

Entonces existe la derivada de F, $F'(x)$ en cada punto x del intervalo abierto (a,b) en el que f es continua, y para tal x se tiene: $F'(x) = f(x)$.

Demostración. Sea x un punto en el que f es continua y para x (supuesto fijo), se considera el cociente

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

El objetivo es demostrar que el cociente anterior tiende a $f(x)$ cuando $h \to 0$.

El numerador puede expresarse como:

$$F(x+h)-F(x) = \int_c^{x+h} f(t)dt - \int_c^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Si se expresa $f(t)$ como: $f(t) = f(x) - [f(t) - f(x)]$ se obtiene:

$$F(x+h)-F(x) = \int_x^{x+h} f(x)dt + \int_x^{x+h} [f(t)-f(x)]dt = hf(x) + \int_x^{x+h} [f(t)-f(x)]dt.$$

De donde

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x) + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} [f(t)-f(x)]dt$$

Por lo tanto para concluir la demostración se requiere demostrar que $F'(x) = f(x)$, es decir que:

$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t) - f(x)]dt = 0$, teniendo en cuenta que f es continua en x.

Tomando $G(h) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t) - f(x)]dt$, debe demostrarse entonces que $G(h) \to 0$ cuando $h \to 0$. O lo que es lo mismo que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $G(h) < \varepsilon$ siempre que $0 < h < \delta$.

Por ser f continua en x, dado un ε existe un número positivo δ tal que:

$$|f(t) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon, \text{ siempre que } \qquad x - \delta < t < x + \delta.$$

Si se elige h de manera que $0 < h < \delta$, entonces cada t en el intervalo $[x, x + h]$ satisface $x - \delta < t < x + \delta$ y por tanto se verifica $|f(t) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ para cada t de este intervalo. Aplicando la propiedad $\left|\int_x^{x+h} g(t)dt\right| \le \int_x^{x+h}|g(t)|dt$, cuando $g(t) = f(t) - f(x)$, de la desigualdad en $|f(t) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$, se obtiene la relación:

$$\left|\int_x^{x+h}[f(t) - f(x)]dt\right| \le \int_x^{x+h}|f(t) - f(x)|dt \le \int_x^{x+h}\frac{1}{2}\varepsilon dt = \frac{1}{2}h\varepsilon < h\varepsilon.$$

Al dividir por h se verifica que $G(h) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t) - f(x)]dt < \varepsilon$ para $0 < h < \delta$.

Análogamente, si $h < 0$ se demuestra que $G(h) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t) - f(x)]dt < \varepsilon$ que se verifica siempre que $0 < |h| < \delta$ y se completa la demostración.

El teorema anterior motiva la siguiente definición:

Definición. Función primitiva. Una función P se llama primitiva (o antiderivada) de una función f, en un intervalo abierto I si la derivada de P es f, esto es, si $P'(x) = f(x)$ para todo x en I.

El siguiente teorema da herramientas para determinar la primitiva P de una función continua f.

3.8. Segundo teorema fundamental del cálculo.

Sea f continua en un intervalo abierto I, y sea P una primitiva cualquiera de f en I. Entonces para cada c y cada x en I, se tiene que:

$$P(x) = P(c) + \int_c^x f(t)dt$$

Demostración. Se define una función F tal que $F(x) = \int_c^x f(t)dt$. Puesto que f es continua en cada x de I, el primer teorema fundamental del cálculo garantiza que $F'(x) = f(x)$ para todo x de I. Es decir, F es una primitiva de f en I.

Ya que dos primitivas de f difieren tan solo en una constante, se tiene que $F(x) - P(x) = k$ para una constante k. Cuando $x = c$, dado que $F(c) = \int_c^c f(t)\,dt = 0$. Se concluye que $-P(c) = k$. Por consiguiente, $F(x) - P(x) = -P(c)$.

Sustituyendo $F(x)$ en la expresión se tiene:

$$P(x) = P(c) + \int_c^x f(t)dt \text{ , o } \int_c^x f(t)dt = P(x) - P(c).$$

Del teorema anterior, se deduce la llamada *Regla de Barrow*, que permite determinar la integral definida si se conoce una primitiva.

3.8.1. Regla de Barrow.

Sea f continua en [a, b] y $P(x)$ una primitiva de f en $[a,b]$, entonces se verifica:
$\int_a^b f(x)dt = P(x)|_a^b = P(b) - P(a)$.

Nota: Aunque toda función continua es integrable, existen funciones (trascendentes y algebraicas) de las que no se conoce una antiderivada elemental (Ivorra, (s.f.)) (la antiderivada no puede expresarse en términos de funciones elementales), por lo tanto no es posible aplicar la Regla de Barrow.

Algunos ejemplos de funciones cuya antiderivada no es una función elemental son los siguientes:

$$\int_a^x sen(t^2)dt \text{[26]}, \qquad \int_a^b e^{-t^2/2}\,dt, \qquad \int_a^b x^2\sqrt[3]{1+x^2}dx \text{[27]}$$

La integral de Riemman se definió a partir de la construcción de rectángulos de aproximación (Ortega, 2011, págs. 5, 12), pero también es posible aproximarse a la integral construyendo otro tipo de regiones de aproximación, esta idea se ilustra en el siguiente apartado.

[26] La demostración de que esta función no es elemental la hizo el matemático Joseph Liouville, en 1835.

3.9. Funciones Jordan integrables.

A continuación se hará una descripción del método de Jordan, el cual generaliza el método de exhaución y se fundamenta en el siguiente postulado:

Si A, B son conjuntos medibles y $A \subset B$ entonces $a(A) \leq a(B)$.

Jordan (Frink, 1933) asignó una medida de área a conjuntos que pueden aproximarse, suficientemente bien por Dominios Fundamentales, que se definen de la siguiente manera:

Definición. Un conjunto R que puede descomponerse como unión finita de cuadrados C_i de lados paralelos a los ejes x y y , todos de lado r, es decir : $\boldsymbol{R} = \bigcup_{\boldsymbol{I=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{C_i}$**,** se denomina *Dominio Fundamental* (Dieulefait, 2003, pág. 38)[28] y su área se define como: $n \times r^2$.

3.9.1. Medidas interior y exterior de Jordan

Definición. Sea F un conjunto acotado en el plano[29] si sobre el plano, se construye una cuadrícula (formada por cuadrados de lado r) trazando paralelas a los ejes, y se considera el conjunto R formado por todos los cuadrados contenidos en F, ***R es un dominio fundamental contenido en F.*** Al variar r, se obtiene una familia V de dominios fundamentales contenidos en F.

Considerando la familia V de dominios fundamentales, es posible definir la medida del conjunto acotado F pues dado que las áreas de cada uno de los rectángulos que conforman

[28] De forma más simple puede definirse como un conjunto que es unión finita de rectángulos de lados paralelos a los ejes.

[29] Un conjunto F del plano es acotado cuando existe algún círculo que lo contiene.

el dominio fundamental están uniformemente acotadas, existe el supremo de las áreas y se denominará *medida interior de Jordan de F.*

Análogamente, al considerar los dominios fundamentales $R \cup R'$, que se forman al tomar de un reticulado de lado r, aquellos cuadrados que tengan algún punto en común con F, al variar r, se obtiene una familia W de dominios fundamentales que contienen a F. Ya que las áreas son no negativas, existe el ínfimo y se denominará medida exterior de Jordan de F.

Como cada elemento de W contiene a cualquiera de los elementos de V, entonces $R_i \in V,\ R_j \cup R'_j \in V$ entonces $R_i \subset F \subset R_j \cup R'_j$ por lo tanto $a(R_i) \leq a\big(R_j \cup R'_j\big)$ asi que $suparea(R) \leq infarea(R \cup R')$, Además,

$$suparea(R) = \lim_{r \to 0} a(R_r) \quad \text{y} \quad infarea(R \cup R') = \lim_{r \to 0} a(R_r \cup R'_r)$$

3.9.2. Conjuntos Jordan medibles.

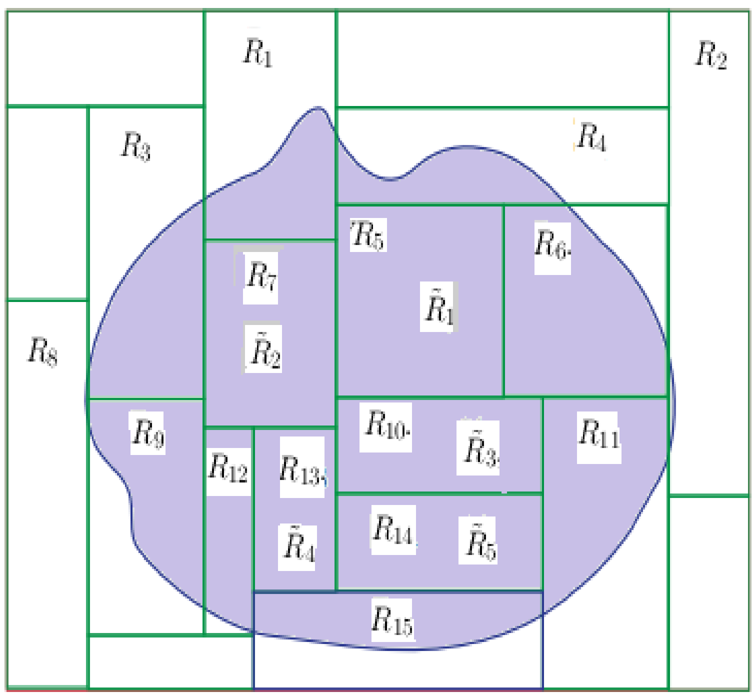
Un conjunto F del plano es medible Jordan cuando $suparea(R) = infarea(R \cup R')$. Este valor común se denominará medida de Jordan $m(F)$. Se puede demostrar que F es medible Jordan si y solo si.

$$\lim_{r \to 0} a(R_r) = \lim_{r \to 0} a(R_r \cup R'_r) = \lim_{r \to 0} a(R_r) + \lim_{r \to 0} a(R'_r),$$

Lo cual implica que F es medible si y solo si $\lim_{r \to 0} a(R_r) = 0$.

En general F es medible Jordan si y solo si la frontera $Fr(F)$ tiene medida exterior y medida de Jordan cero, dicho de otra manera F es medible Jordan si es acotado, y su frontera, $Fr(F)$, tiene contenido cero[30].

Figura 3-27. Conjunto Jordan medible. Representación geométrica (Porter, (s.f.), pág. 4).



Geométricamente los Conjuntos Medibles Jordan son aquellos para los que se puede encontrar una aproximación a su área, construyendo polígonos que sean la unión de rectángulos contenidos en el conjunto y esta área sea de medida cero.

---

[30] La definición de R_r y $R_r \cup R'_r$, permite establecer que R'_r, es un dominio fundamental que contiene a la frontera de F: $Fr(F)$, por lo tanto, $\lim_{r\to 0} a(R_r) = m_i(Fr(F)) = 0$.

- **Ejemplo 1.** Un intervalo I cerrado, un intervalo abierto o un intervalo de la forma $\mathbb{Q}[a_i, b_i)$ son medibles Jordan.
- **Ejemplo 2**. Los conjuntos finitos. $A = \{x_{1,} x_{2,\dots} x_{n,}\}$, son medibles Jordan, pues al elegir subintervalos de la forma: $I_1 = \left[x_1 - \frac{\epsilon}{4}, x_1 + \epsilon/4\right]$, $I_2 = \left[x_2 - \frac{\epsilon}{8}, x_1 + \epsilon/8\right], \dots$. se tiene que: $A \subset I_1 \cup \dots \cup I_n$ y $|I_1| + \cdots + |I_n| = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \cdots < \epsilon$. También al tomar $A \subset [x_1, x_1] \cup \dots \cup [x_n, x_n]$, la suma de longitudes es cero. Entonces es Jordan medible.
- **Ejemplo 3**. unidimensionalmente el conjunto $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, no es Jordan medible pues $inf(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 1$ pero $sup(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$.

El siguiente teorema relaciona la integral de Riemman con la medida de Jordan.

Teorema. Sea $F \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado, es decir, F está contenido en el intervalo $[a, b]$, a F es medible en el sentido de Jordan (tiene contenido), si y solo si la función característica χ_F es Riemman integrable en $[a, b]$. En este caso se define la medida de F como $\mu(F) = \int \chi_F$. (Vera, 2008, pág. 261)

- **Ejemplo 4.** El subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por: $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ es Jordan medible.

Sea G_1 la unión de los rectángulos $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times \left[0, 1 - \frac{i}{n}\right], i = 1, \dots, n$ y sea G_2 la unión de los rectángulos indicados. Se tiene que $G_1 \subset F \subset G_2$ y $\mu(G_2) - \mu(G_1) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. Por lo tanto existe el contenido de F y de esta manera χ_F es integrable.

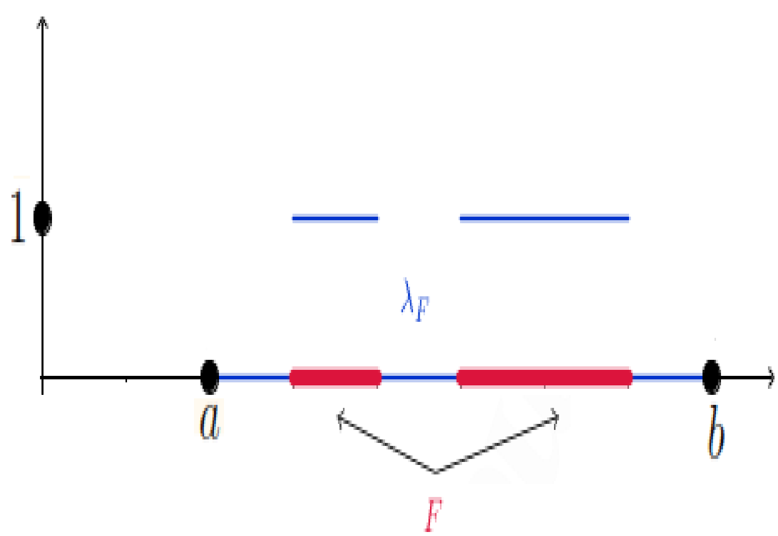
El valor de la integral puede obtenerse como el límite de las medidas de G_1 al tomar el límite en n, o tomando la integral iterada:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \chi_F(x,y)dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \frac{1}{2}$$

Nota: La función característica χ_F, está definida de la siguiente manera (Sánchez F. , 2015, pág. 20):

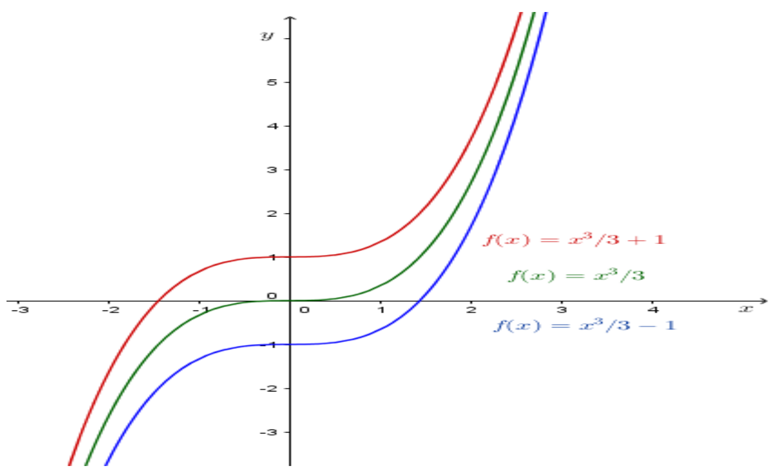
$$\chi_F : x \in [a,b] \to \begin{cases} 1, si\ x \in F \\ 0, si\ x \notin F \end{cases}$$

Figura 3-28. Función característica



3.10. Problemas de valor inicial

Figura 3-29. Familia de antiderivadas. Problemas de valor inicial



La gráfica ilustra miembros de la familia de antiderivadas de la función $f(x) = x^2$. En general observamos que una función admite infinitas antiderivadas que solo se diferencian en una constante k, cualquier función de la forma $y = \frac{x^3}{3} + k$ es una antiderivada de f, es decir que al derivar cada uno de estos miembros, se obtendrá la función f.

Definición. Una función F es una antiderivada de f sobre un intervalo I, si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.

Si queremos entonces conocer la expresión algebraica (o gráfica) de una función a partir de su derivada, necesitamos como dato adicional el valor de la función en un punto determinado, y esto nos lleva a los llamados problemas de valor inicial.

Definición. Sea f una función definida en un intervalo I y $P(x_0, y_0)$ un punto del plano XY tal que $x_0 \in I$.

Un problema de valor inicial (o valores iniciales) es aquel en que se requiere determinar una función $y = y(x)$ que sea solución de la ecuación diferencial

$\frac{dy}{dx} = f(x)$ y satisfaga la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

Para hallar una función cuya derivada es una función conocida, se procede de la siguiente manera:

i). Se determina la solución general de la ecuación diferencial integrando los dos miembros se obtiene la expresión: $y = F(x) + k$, es decir se obtiene la familia de funciones cuya derivada es $f(x)$.

ii). Se determina la solución particular que satisface las condiciones iniciales, esto es se calcula el valor de $k, así$:

$y(x_0) = F(x_0) + k = y_0$, por lo tanto $k = y_0$- $F(x_0)$, de tal manera que

$$y = F(x) + (y_0\text{- } F(x_0)\ )$$

La definición abarca problemas simples tales como conocer la posición de un objeto en un instante dado si se conoce la velocidad, o saber la cantidad de agua que se ha fugado durante cierto periodo, si se conoce la razón variable, a la que se pierde el agua, entre otras interesantes aplicaciones, que pueden abordarse resolviendo ecuaciones diferenciales, tema que no corresponde a este trabajo.

4. Marco Didáctico

En los capítulos anteriores se referenciaron algunas investigaciones didácticas fundamentadas en el análisis histórico y epistemológico del concepto de integral definida y en ellas, como se mencionó, se pueden identificar elementos importantes para la construcción de la propuesta didáctica. Este capítulo presenta una síntesis de algunas investigaciones relacionadas con el proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida. Las investigaciones, se organizan en dos categorías:

4.1. Investigaciones relativas a la introducción del concepto de Integral Definida.

En (Turegano, 1997) la investigadora propone iniciar el curso de cálculo con el concepto de integral definida, fundamentado en la noción de área de una región plana y usando en el proceso de visualización herramientas informáticas; todo esto sin abordar previamente los conceptos de límite y derivada. Nótese que la introducción sugerida tiene en cuenta el desarrollo histórico de los conceptos del cálculo (como se mencionó en el capítulo I) y se conserva aún en textos como el de (Arguedas, 2010) la discusión presentada en la componente disciplinar de este trabajo. En éste artículo la autora además muestra el análisis de problemas y situaciones que se ilustran mediante gráficos y tablas. Otras publicaciones de esta investigadora retoman esos fundamentos y muestran las implicaciones didácticas de la evolución y superación por parte de los estudiantes, de los obstáculos epistemológicos y cognitivos (mencionados en capítulos anteriores) cuando el profesor implementa la propuesta (Turegano, 1998) (2007).

Con respecto a las aplicaciones de la integral definida en (Hernández, 2007), el autor presenta su propuesta como una respuesta a la necesidad de aportar a la carencia de habilidades de los estudiantes para identificar problemas que puedan ser modelados usando la integral definida y solucionarlos. Basándose en las etapas propuestas por George Polya para plantear y resolver problemas, propone y demuestra un teorema referido a las condiciones “necesarias y suficientes” que debe tener un problema para que pueda ser modelado con una integral definida, e ilustra con algunos ejemplos.

En (Acosta, 2012) se presenta una secuencia didáctica que comprende tres momentos: el problema del área, el trapecio curvilíneo y los procedimientos geométricos para evaluar integrales definidas y la necesidad de una fórmula general para evaluar integrales definidas. El objetivo fundamental de la propuesta es la comprensión del concepto de integral definida a través de métodos geométricos y requiere destinar tiempos suficientes a cada uno de los momentos. Afirman los autores que con la presentación tradicional, el poco tiempo de que se dispone conduce al estudiante a utilizar fórmulas sin significado y mecanizar procedimientos sin la apropiación previa del concepto.

4.2. Investigaciones relativas al uso de las tecnologías.

En (Cano) se presentan guías de trabajo que plantean diferentes situaciones para aproximarse al concepto de integral definida, las situaciones parten de conceptos básicos de la geometría plana y el análisis de áreas de regiones planas y enfatizan en el uso de los métodos de Euclides, Arquímedes y las sumas de Riemann, apoyados en la mediación gráfica del software Geogebra.

En (Carrillo A.) el autor presenta una unidad didáctica con estrategias para construir gráficas de algunas funciones elementales. Incluye un video tutorial del uso de Geogebra, este trabajo es dirigido a estudiantes de grado noveno de educación básica. Esta unidad didáctica no hace referencia a la integral definida, pero se retoma por tratarse de una estrategia para que el estudiante comprenda y manipule el concepto de función apoyado en el uso de Geogebra. Lo anterior dado que la representación gráfica de las funciones y el análisis de sus propiedades son dificultades que los estudiantes de los primeros semestres evidéncian y que se comentaron en la introducción de este trabajo de grado.

4.3. El uso de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas.

Como lo ilustra la síntesis anterior, en la actualidad las propuestas didácticas sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, incluyen con frecuencia herramientas e instrumentos tecnológicos. Al respecto (Artigue, 1998) refiere lo siguiente:

> "Por todas partes en el mundo se definen nuevos programas, nuevos currículos, que tratan de encontrar una forma de introducirse en este campo conceptual que sea, al mismo tiempo, rica en significación y accesible. De hecho, las aproximaciones intuitivas basadas en el uso de Tecnologías informáticas, calculadoras y computadoras parecen ser las más generalmente privilegiadas". (Artigue, 1998, pág. 40)

Al introducir las TIC en el aula de matemáticas, los sistemas de representación usuales se convierten en sistemas de representación ejecutables que pueden tener diversos grados de trascendencia, bien pueden convertirse en herramientas que amplifiquen un proceso o herramientas que permitan una reorganización cognitiva e incluso ir más allá hasta renovar conceptualmente al objeto de estudio así estas herramientas se convierten en instrumentos.

En la actualidad tanto docentes como estudiantes usan la internet, con el fin de complementar o aclarar las ideas que no se lograron consolidar en las clases o en el estudio de los textos, la pertinencia de estos recursos depende de la buena elección que haga el aprendiz, puede elegir temas específicos, ejercicios puntuales, o extender su estudio al aprendizaje profundo de un tema si es su interés y cuenta con la disciplina requerida. Pero algunas personas buscan soluciones rápidas y puntuales a un problema o pregunta, entonces, la herramienta se limita a proporcionar reglas que no explican a profundidad el problema, se hacen a un lado las demostraciones, las características y propiedades de los objetos matemáticos, aún la simbología se torna irrelevante y simplemente se adquiere una receta para desarrollar un ejercicio.

Los estudiantes consultan frecuentemente sitios como: Khan Academy, una web perteneciente a la categoría de los MOOCS, que ofrece diferentes dimensiones de un tema y explica los procesos de manera muy precisa a través de videos (Khan, s.f.). También el sitio wolframalpha, (LLC, s.f.) donde se pueden encontrar las soluciones de ejercicios, al introducir una expresión matemática y definir una operación sobre ella, el sistema arroja una solución, si se quiere paso a paso y además presenta varias características de la expresión que pueden aún obtenerse en PDF.

4.3.1. Geogebra

Uno de los softwares, matemáticos, más utilizado en la actualidad en geometría y como apoyo en el trabajo con álgebra y cálculo es el Geogebra (Hohenwarter M. , s.f.), la unidad didáctica que se desarrolló en este trabajo utiliza en algunas actividades este software como herramienta de mediación, por ser un software de código abierto[31]. Geogebra une la geometría dinámica y el cálculo simbólico mediante procesos ejecutables, no es un programa de dibujo, sino de construcción lo cual exige establecer relaciones matemáticas bien definidas entre los objetos, de tal manera que las construcciones que se planteen podrían ser manipuladas conservando sus relaciones estructurales, Con Geogebra se permite Investigar, manipular, intuir, argumentar generalizar, descubrir y representar[32].

[31] En 2001 Markus Hohenwarter creó el software como resultado de su proyecto de tesis (Carrillo A. , Geogebra como recurso para unas nuevas matemáticas).

[32] http://www.wolframalpha.com/input/ %i=int+x %5E3-6x

Se espera que el software se convierta en instrumento TIC para centrarse en la elaboración e interpretación de conceptos más que en el cálculo o en las operaciones.

En (Carrillo A.) se destacan algunas ventajas del uso de Geogebra, describiéndolo como una alternativa práctica para agilizar el trabajo de aula a partir de la gráfica, al evitar la enseñanza estática y el uso expresiones simbólicas se pueden trabajar los mismos contenidos de forma diferente, la introducción del software crea una escuela moderna ya que se incorporan nuevos recursos accesibles a los aparatos que los alumnos manejan, produciendo más variedad metodológica , actividades diferentes, flexibilidad, protagonismo del alumno, mejor comprensión, actividades colaborativas, simulación de procesos que en metodología tradicional son complicados, permite la posibilidad de crear laboratorios de matemáticas y además la ejecución no requiere conocimientos técnicos avanzados.

El software Geogebra se desarrolla continuamente de manera colaborativa, y puede usarse en diversos contextos y niveles educativos, con Geogebratube[33], por ejemplo, se pueden diseñar actividades propias para trabajar diferentes temas de matemáticas, en particular los de cálculo integral. En[34][35], se pueden apreciar opciones y ventajas que tiene esta herramienta como apoyo en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

4.3.2. Uso de Geogebra en la enseñanza del cálculo

A continuación se describen algunos estudios relacionados con el uso del software que sirvieron que como referente en el desarrollo de la unidad didáctica. En (Attorps, 2001) se

[33] http://tube.geogebra.org/

[34] http://www.ibertic.org/geogebra.php

[35] http://redesoei.ning.com/video/conferencia-el-futuro-de-geogebra-zsolt-lavicza

encuentra una investigación fenomenográfica, donde analizaron los datos provenientes de test y post test aplicado a estudiantes de ingeniería, durante las clases de cálculo, los resultados mostraron que el uso del software impacta positivamente en los niveles de aprendizaje de los estudiantes. En (Hohenwarter M. H., 2008) se destaca la utilidad de los recursos de Geogebra en la manipulación de objetos matemáticos de todo nivel, gracias a que permite usar representaciones gráficas y simbólicas simultáneamente, además destacan que los applets construidos con Geogebra muestran la esquematización de conceptos teóricos y permiten la creación de interfaces graficas sofisticadas para crear actividades dinámicas que llevan al estudiante a abordar los conceptos en su dimensión semántica y sintáctica lo cual motiva el aprendizaje de las matemáticas, en un artículo que se expresa en el mismo sentido (Mehanovic) se destaca el potencial del programa para la creación de situaciones didácticas que hacen posible el aprendizaje autónomo que ofrecen los elementos dinámicos y la interacción.

En (Carrillo A.) describen algunas de las herramientas de cálculo simbólico para trabajar tópicos como factorización de números y polinomios, operaciones con fracciones algebraicas, resolución de ecuaciones, Resolución de sistemas de ecuaciones, discusión de sistemas, cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo de límites, sumas y productos de series. La sencillez y dinamismo del programa, comentan, despierta la intuición y creatividad del estudiante para acercarse a los conceptos de forma amena. Aparte de lo anterior en un video (Carrillo A.), presenta herramientas de Geogebra para el estudio y representación de funciones.

5. Unidad Didáctica

5.1. Introducción

El concepto de área de una región plana es fundamental para abordar uno de los tópicos centrales del cálculo integral, el de integral definida, es por ello que en esta unidad didáctica, se profundiza inicialmente en la noción de área por recubrimiento de regiones poligonales y no poligonales, elemento que permite aproximarse al análisis del área de regiones, del plano, limitadas por curvas, recubriendo superficies con regiones poligonales, y luego, pasar a definir formalmente la integral.

5.2. Objetivos

5.2.1. Objetivo General

Profundizar en el análisis y aplicación del concepto de área de regiones planas para fundamentar el concepto de integral definida.

5.2.2. Objetivos Específicos

- Determinar el área de diferentes tipos de regiones planas usando recubrimiento.
- Determinar áreas de regiones limitadas por líneas rectas en el plano cartesiano.

- Determinar áreas de regiones limitadas por curvas en el plano cartesiano.
- Interpretar intuitivamente el concepto de integral definida.
- Visualizar geométricamente las propiedades de la integral definida.
- Usar el software Geogebra como apoyo para construir gráficas de funciones e identificar y caracterizar regiones del plano.

5.3. Características de la unidad.

La unidad didáctica está constituida por seis actividades. Se plantean en ellas situaciones que retoman conceptos y procedimientos estudiados por los estudiantes en la educación media y en los semestres básicos universitarios. Se usan tres tipos de representaciones de la función (gráficas, fórmulas y tablas) con el apoyo de Geogebra y se proponen secuencias de preguntas de diferentes niveles de complejidad.

5.4. Metodología

Se sugiere desarrollar las actividades en el aula teniendo en cuenta las siguientes etapas:

- Aproximación intuitiva a los conceptos básicos.
- Formalización de los conceptos.
- Aplicación y socialización por parte de los estudiantes de sus planteamientos y soluciones para puntualizar conceptos y procedimientos elaborados.

En cada una de estas etapas el estudiante podrá hacer uso del software Geogebra con el fin de contrastar sus soluciones y análisis gráfico con las construcciones que se pueden realizar usando el software. Previo a las actividades los estudiantes deben disponer de un manual de instrucciones y de links que les permitan acceso a los applets correspondientes.

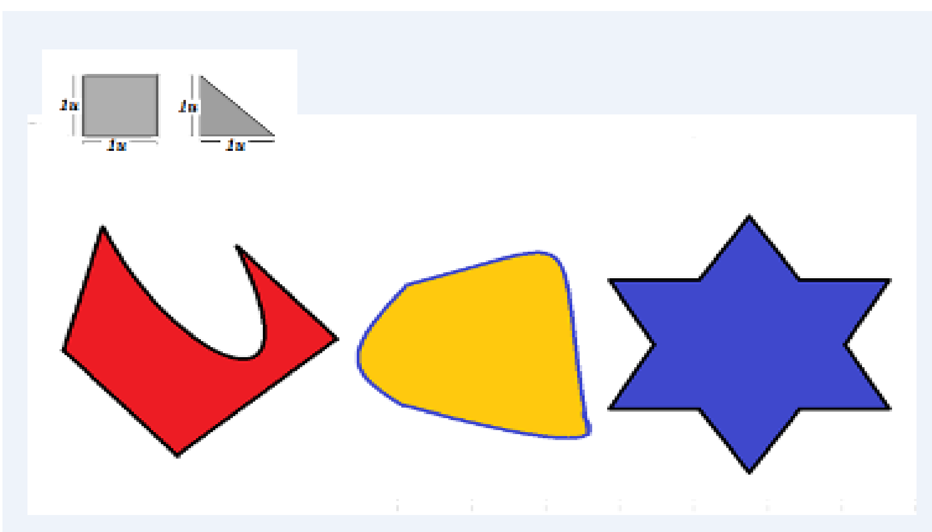
5.5. Actividades

5.5.1. Actividad 1. Área de regiones planas regulares e irregulares.

Objetivos

- Determinar el área de regiones planas diversas usando recubrimientos
- Determinar el área de polígonos regulares e irregulares usando diferentes patrones o unidades con el fin de aproximarse a una fórmula general.
- Reconocer propiedades de los polígonos y relacionarlas con las expresiones que permiten determinar sus áreas.

1. Observe las regiones planas que se presentan a continuación y los patrones de área que aparecen en la parte superior izquierda.



a) Estime el perímetro de cada una de las figuras. Explique su procedimiento.

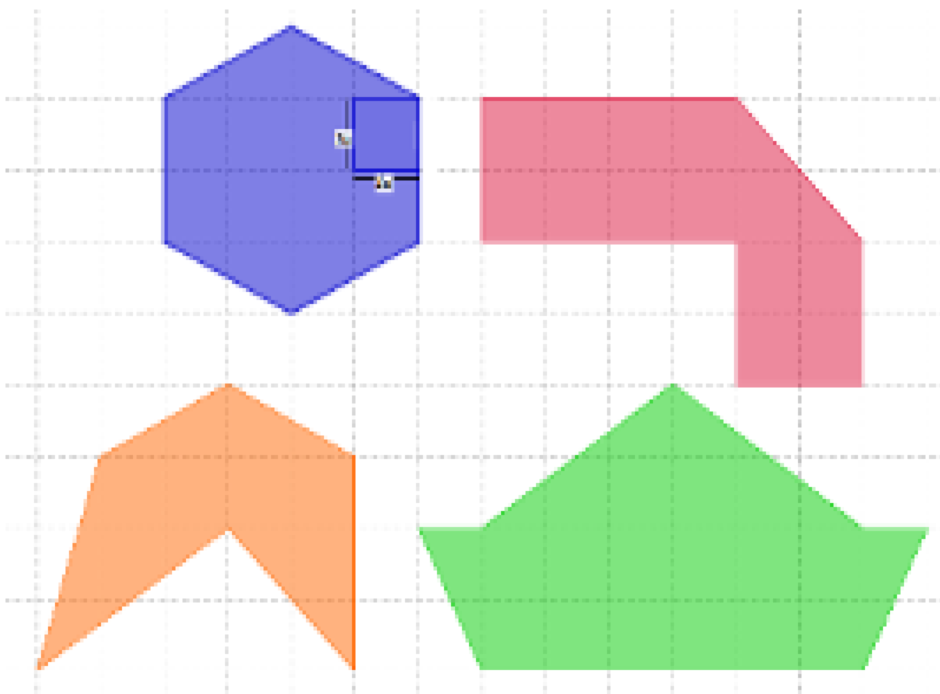
b) Use los patrones indicados para determinar el área (aproximada) de las regiones. Sugerencia: Recorte las regiones y los patrones y recubra.

c) Explique el procedimiento que utilizo para aproximar las áreas.

d) ¿Qué observa?

e) Estime ahora el perímetro de cada una de las regiones y explique cómo procedió y que unidades utilizó.

2. Observe ahora los siguientes polígonos regulares e irregulares dibujados sobre una cuadricula.



a) Determine el área (en unidades cuadradas) de estos polígonos

b) ¿Cuál es el de mayor área?

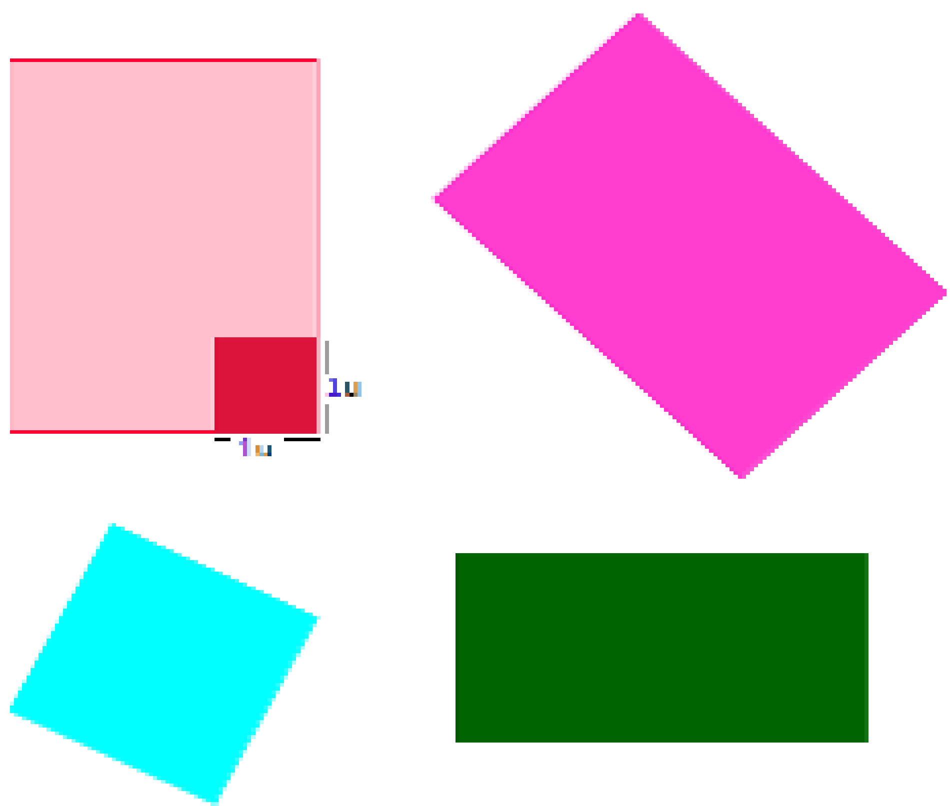
c) Determine el perímetro de cada uno de los polígonos.

d) ¿Cuál es el de menor perímetro?

3. Construya polígonos convexos y no convexos de $16u^2$ de área. Determine el perímetro de cada uno de ellos. Sugerencia: Utilice una cuadrícula si lo requiere.

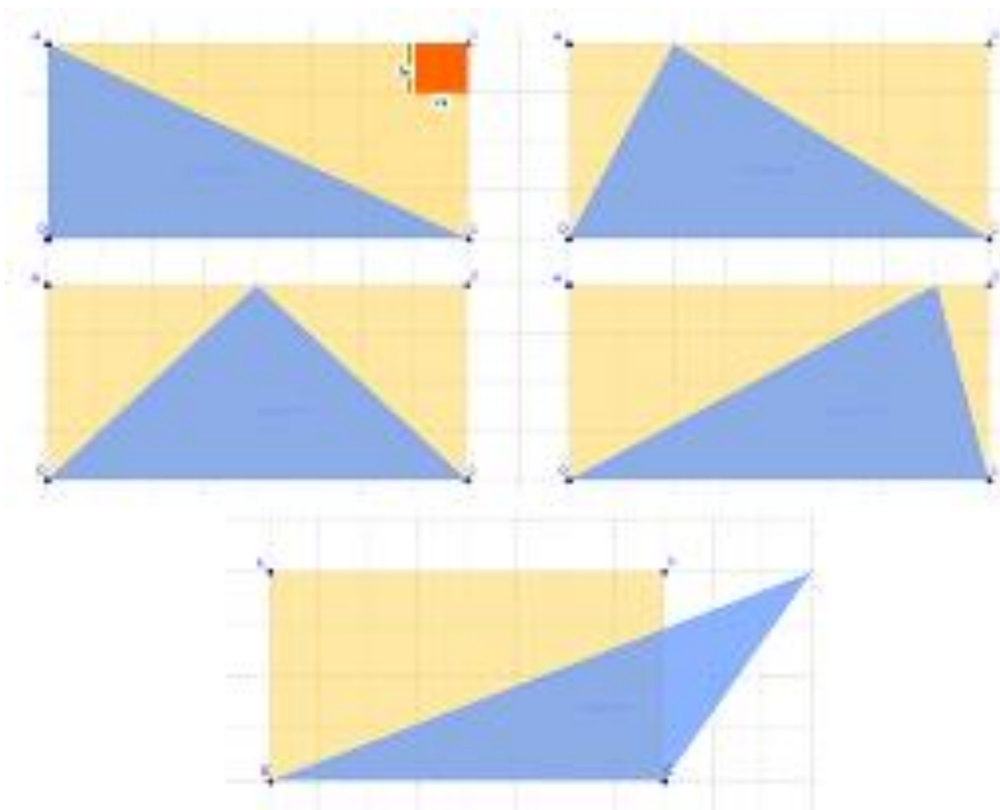
4. Construya tres cuadriláteros diferentes, que tengan 20 unidades de perímetro. ¿Cuál de ellos es el de mayor área?

5. Observe los siguientes rectángulos y la unidad de área señalada en uno de ellos.



a) Determine el perímetro (usando la unidad indicada) y el área de cada uno de estos rectángulos Sugerencia: cortar y recubrir.
b) Halle las dimensiones de cada uno de los rectángulos.
c) Exprese el área de cada uno, en términos de sus dimensiones.
d) ¿Que concluye?

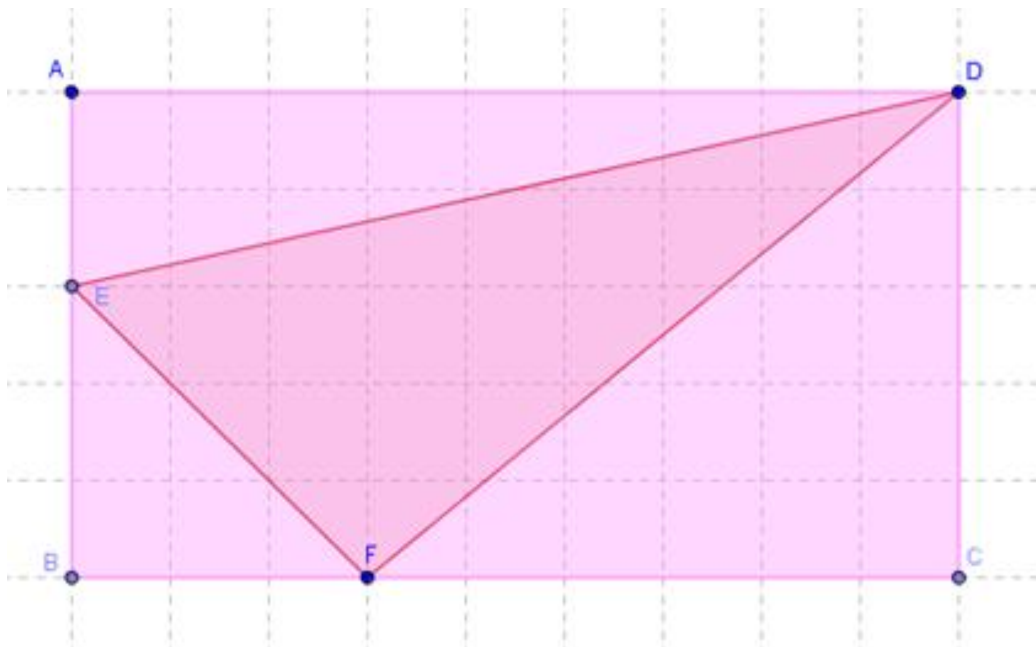
6. En el rectángulo ABCD dibujado sobre una cuadrícula, se construyeron diferentes triángulos inscritos; por lo menos uno de los lados de estos triángulos coincide con un lado del rectángulo.[36]



[36] Vease: https://www.geogebratube.org/student/m61734

a) ¿Cuál es el área del rectángulo ABCD?
b) Determine el área (aproximada en unidades cuadradas) de cada triángulo.
c) ¿Cuál es la medida de la base y la altura de cada uno?.
d) Ahora use en cada caso la fórmula para determinar el área. Explique su respuesta usando argumentos geométricos.
e) Compare estas áreas con los resultados encontrados en b). ¿Qué concluye?
f) Compare el área del rectángulo con las áreas de cada uno de los triángulos. ¿Que concluye?

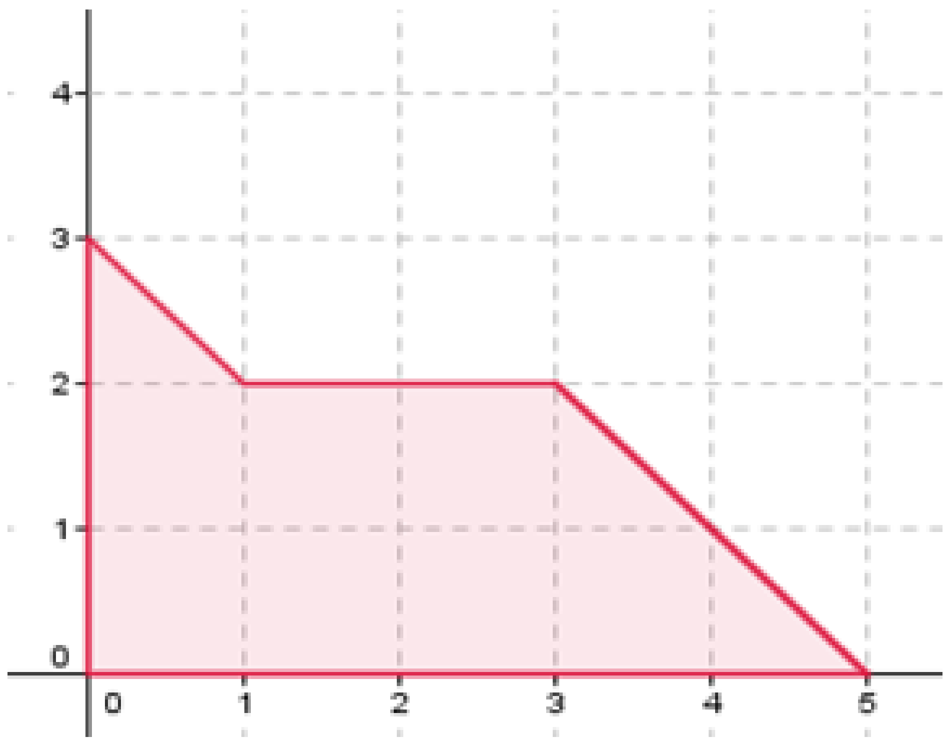
7. El rectángulo y el triángulo que observa a continuación fueron construidos sobre una cuadrícula.



a) Determine el área del rectángulo.

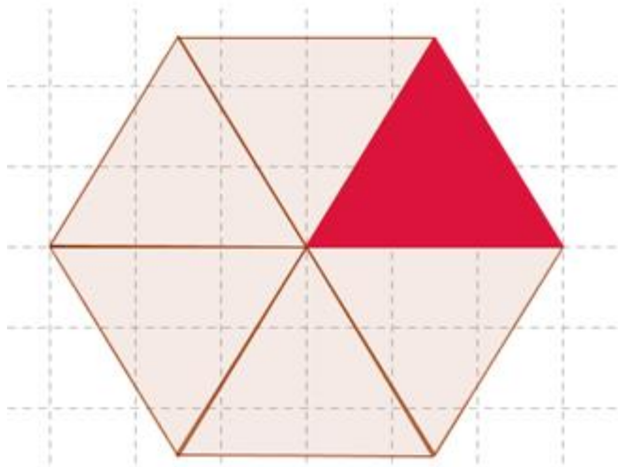
b) Utilice diferentes procedimientos para determinar el área del triángulo ΔEDF Explique sus procedimientos. Use argumentos y propiedades geométricas que conozca.

8. En el sistema coordenado que se presenta a continuación se observa una región sombreada.

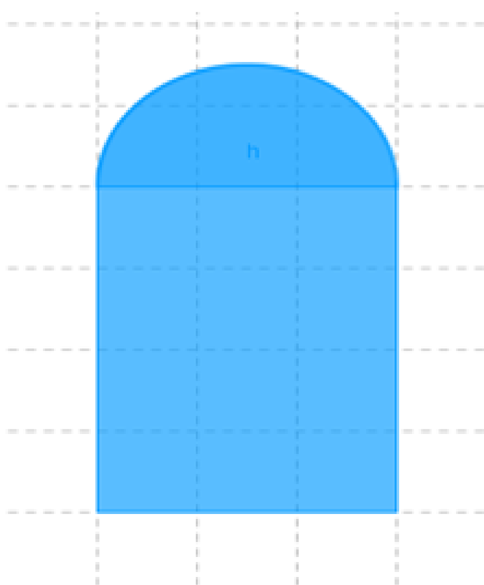


a. Use tres procedimientos diferentes para determinar su área. Describa cada uno de ellos.

9. Determine el área del triángulo sombreado en el hexágono regular y úsela para encontrar su área.



10. La figura sombreada sobre la cuadricula está formada por un rectángulo y una semicircunferencia. Y su perímetro es de P unidades.

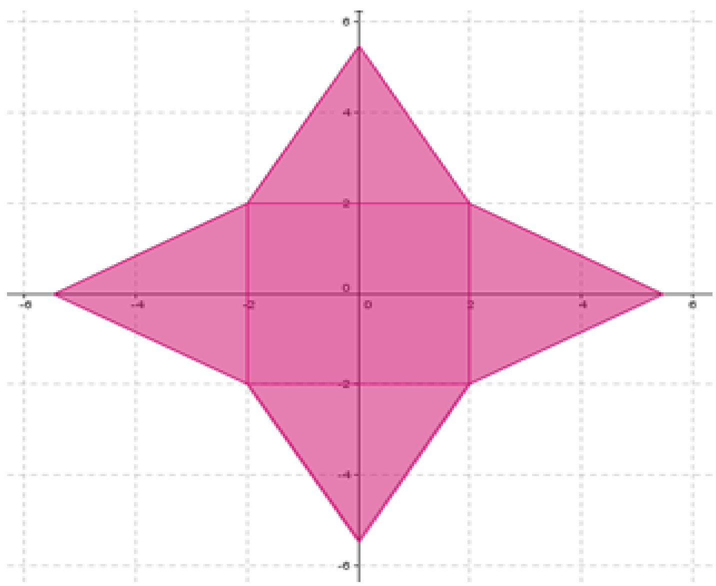


a) Encuentre una expresión que describa el perímetro P de esta figura.

b) ¿Cuál es el área (en unidades cuadradas) de esta figura?

c) Si $P = 30u$, ¿Qué valor tiene el área?

11. La siguiente figura se construyó sobre un sistema coordenado y está formada por un cuadrado y cuatro triángulos equiláteros congruentes. Halle el perímetro y el área de esta figura



12. Una estación de radio ubicada en un punto $P:(x,y)$ emite señal en todas las direcciones hasta una distancia de 40 millas.

a) Utilice un plano cartesiano para ilustrar la situación anterior.

b) Use la ilustración para determinar el área de cobertura de la estación. Explique el procedimiento que utiliza.

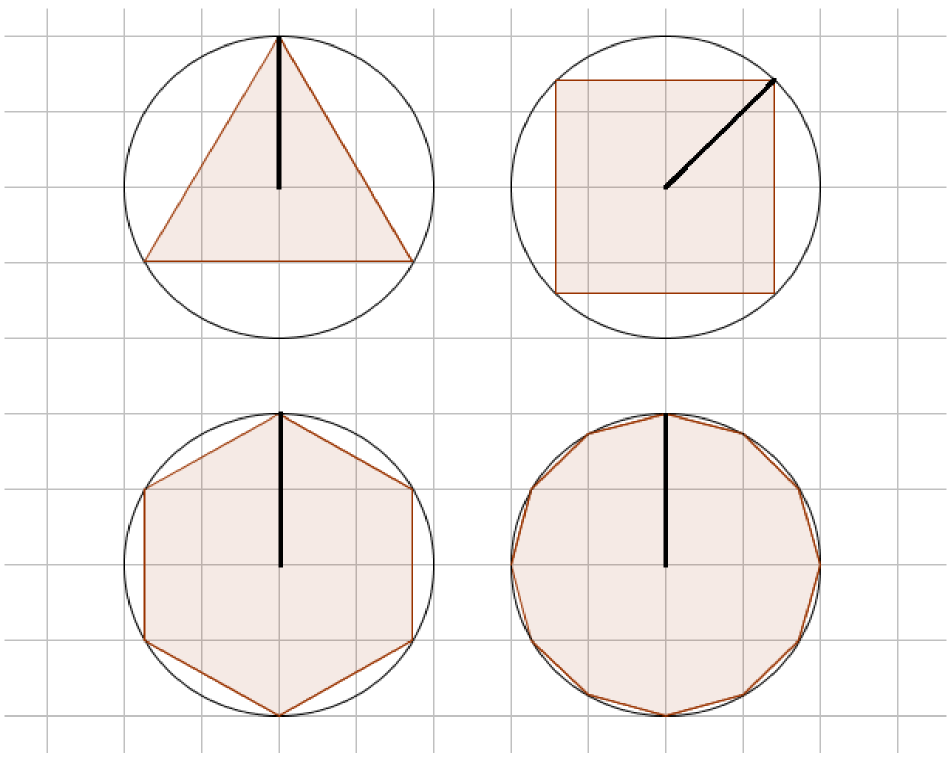
13. Explore las actividades que aparecen en los siguientes links, verifique propiedades de las construcciones, compare con los resultados obtenidos y escriba que aporta la geometría dinámica en la comprensión de los conceptos planteados en el taller.

Regiones planas	**Polígonos regulares e irregulares**	
https://www.geogebratube.org/student/b75139; https://www.geogebratube.org/student/m19313 https://www.geogebratube.org/student/m317471 https://www.geogebratube.org/student/m63932 https://www.geogebratube.org/student/m39900	https://www.geogebratube.org/student/m28853 https://www.geogebratube.org/student/m156375 https://www.geogebratube.org/student/m30687	
Rectángulos y triángulos	**Regiones Sombreadas**	
https://www.geogebratube.org/student/b74885 https://www.geogebratube.org/student/m61734 https://www.geogebratube.org/student/m153996 https://www.geogebratube.org/student/b78192 https://www.geogebratube.org/student/m62410 https://tube.geogebra.org/student/m313735	https://www.geogebratube.org/student/m6149; https://tube.geogebra.org/student/b75139#material/14941	

5.5.2. Actividad 2. Polígonos inscritos y área del círculo.

Objetivo: Aproximarse al área del círculo.

1. En un círculo de radio $2\ unidades$ se inscribieron algunos polígonos regulares que usted puede observar en las siguientes figuras.



   a. Exprese el perímetro y el área de cada uno de estos polígonos en función del radio. Explique su procedimiento.

   b. Use Geogebra para inscribir, en circunferencias de radio 3, 4, 5,.. unidades, polígonos cada vez de mayor número de lados. Determine el perímetro y el área de estos polígonos.

En el sitio http://www.geogebra.org/m/32025 puede determinar aproximaciones al área del círculo, construyendo polígonos inscritos, en una circunferencia de radio dado.

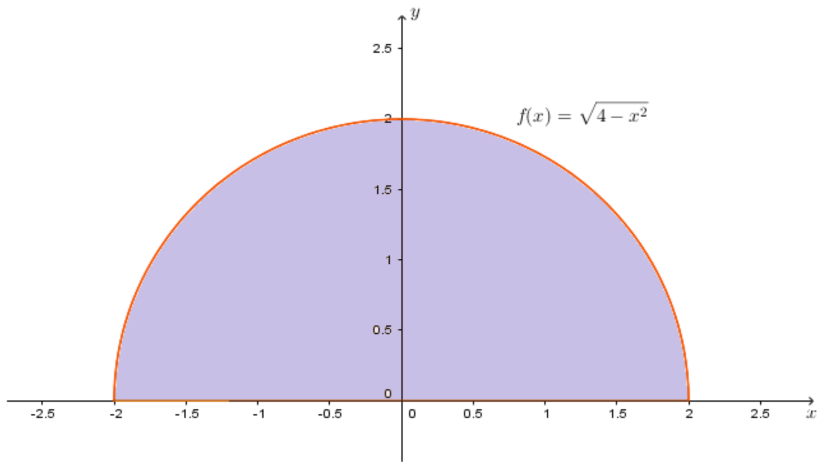
c. Con la información obtenida en los items a. y b, complete tablas como la siguiente.

Polígono inscrito	Perímetro del Polígono	Área del Polígono pol´ıgono
$1\ lados$		
$2\ lados$		
$3\ lados$		
$4\ lados$		
.		
.		
.		
$n\ lados$		$A_n =$

a. Use, en cada caso, la expresión $A = \pi \times r^2$, para determinar el área de los círculos dados.

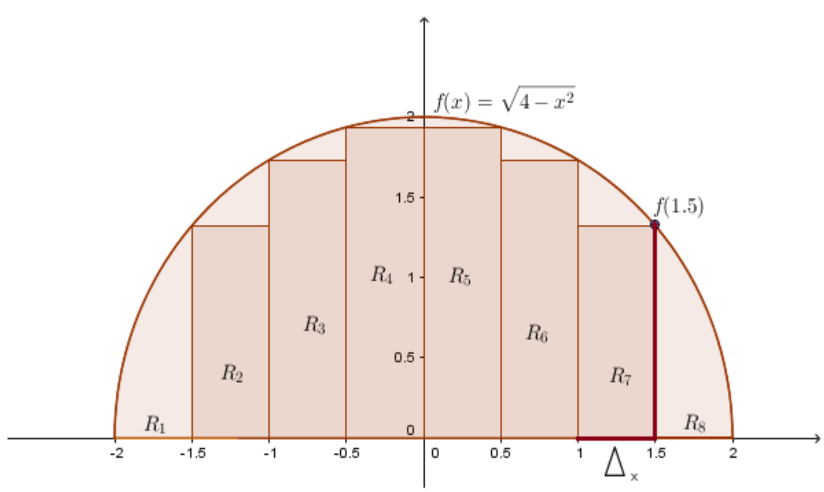
b. ¿Qué sucede, en cada caso, con el área del polígono inscrito, cuando el número de lados (n) es muy grande?, ¿qué sucedería con esta área si $n \to \infty$?

2. La semicircunferencia que se representa a continuación en un plano coordenado tiene 2 unidades de radio.



a. Halle el área del semicírculo (región sombreada).

b. Considere ahora el intervalo $[-2, 2]$, y divídalo, sucesivamente, en $2, 4, 6, \ldots 12$ subintervalos, de igual longitud. Construya, en cada caso, rectángulos inscritos en el semicírculo, cuya base sea la longitud del subintervalo, y con altura la imagen (por la relación que define el semicírculo) de uno de los extremos del intervalo; como se ilustra en la siguiente figura.



c. Determine, en cada caso, las áreas de los rectángulos construidos, súmelas y complete la siguiente tabla.

$N°$ $Rectángulos$	$Base\ de\ cada\ rectángulo$	$Área\ de\ cada\ rectángulo$	$Suma\ de\ las\ áreas\ de\ los\ rectángulos$
2			
4			
6			
8	$\Delta_X = 0.5$	$a(R_{1)}) =$ $a(R_{2)}) =$ . . . $a(R_{8)}) =$	$a(R_1) + a(R_2) + \cdots + a(R_8) =$
. . .			
n			

d. Compare en cada caso la suma de las áreas de los rectángulos, construidos, con el área determinada en el ítem a). ¿Qué concluye?

e. ¿Qué sucede si el número, n, de rectángulos es muy grande?. Use argumentos geométricos para explicar su respuesta.

3. A continuación se muestra un círculo de radio r, dividido en sectores circulares de igual área (figura 1). Imagine que se cortan los sectores circulares y se disponen como se muestra en la figura 2.

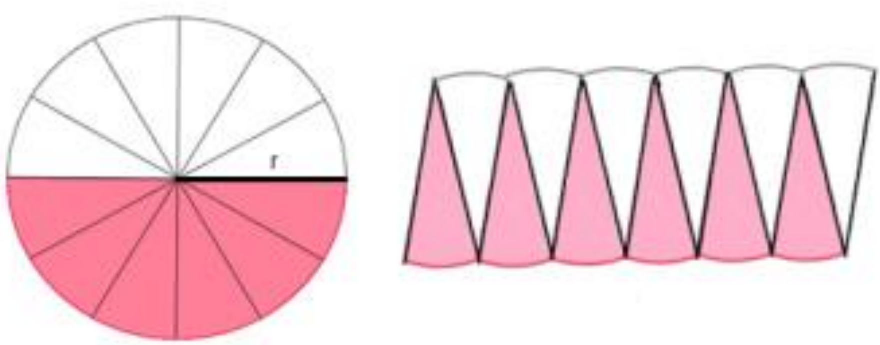


Figura 1 *Figura 2*

A medida que el número de sectores circulares crece, es posible asumir que la figura 2 se aproxima a un paralelogramo, ¿porqué?, ¿cuáles serían las dimensiones de este paralelogramo?, ¿cuál su área?, ¿qué concluye?

4. Compare las tres aproximaciones obtenidas en los puntos 1, 2 y 3. ¿Qué concluye?

5. Ejecute los comandos y utilice las herramientas que se muestran en los siguientes links:

https://tube.geogebra.org/student/m23344

https://tube.geogebra.org/student/m32025

https://tube.geogebra.org/student/m111060

6. ¿Qué aportan las construcciones de los links citados al análisis presentado en los puntos 1,2,3?

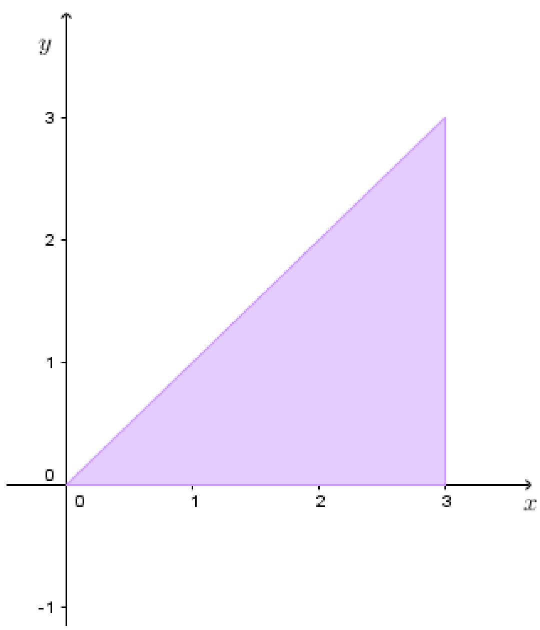
5.5.3. Actividad 3. Áreas de regiones planas construidas sobre un plano cartesiano.

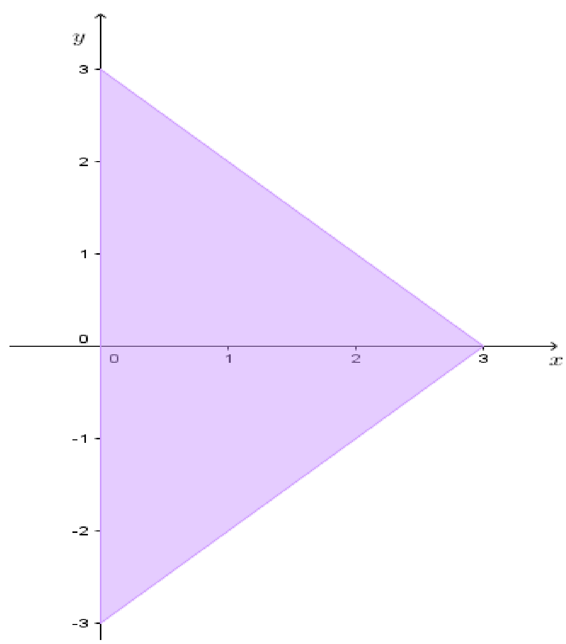
Objetivos

- Profundizar en el análisis de las propiedades y formas de representación de la función lineal.

- Determinar áreas de regiones limitadas por líneas rectas en un plano coordenado.

1. En los planos cartesianos que usted observa en los siguientes recuadros aparecen sombreadas dos regiones. Estas regiones están limitadas por líneas rectas.





a. Determine las ecuaciones de las rectas que limitan cada una de las regiones.
b. Halle el área de las regiones sombreadas utilizando al menos dos procedimientos diferentes. Explíquelos.

2. Las coordenadas de los vértices de un cuadrilátero son: A: $(5,3)$, B: $(3,3)$, C: $(1,1)$, D: $(7,1)$.

   a. Construya el cuadrilátero.
   b. Halle el área del cuadrilátero $ABCD$.
   c. Construya ahora diferentes polígonos que tengan la misma área del cuadrilátero $ABCD$. Señalando las coordenadas de sus vértices.
   d. ¿Cuál de los polígonos que construyó es el de mayor perímetro?

3. Representе en un plano cartesiano las siguientes rectas:

$$y = -x + 5, \qquad y = -x + 10, \qquad y = x + 5, \qquad y = x.$$

a. Halle sus puntos de intersección.
b. Sombree la región del plano limitada (encerrada) por estas rectas.
c. Determine el perímetro y el área de esta región. Describa sus procedimientos.

4. Represente en un plano cartesiano las siguientes rectas:

$$2x + 3y - 6 = 0 \ , \qquad x - y - 7 = 0, \quad , \qquad y - 4 = 0.$$

   a. Determine los puntos de intersección de estas rectas.
   b. Sombree la región del plano limitada por estas rectas.
   c. Determine el perímetro y el área de esta región. Describa sus procedimientos.

5. Realice la siguiente secuencia de construcciones:

a. En un sistema coordenado, construya el cuadrilátero cuyos vértices son los puntos:

$$A: (6,5),\ B:\ (-3,5),\ C:\ (-3,-2),\ D:\ (6,-2).$$

b. Sobre el mismo plano, dibuje las rectas: $y = x + 1$ y $y = -x + 4$.

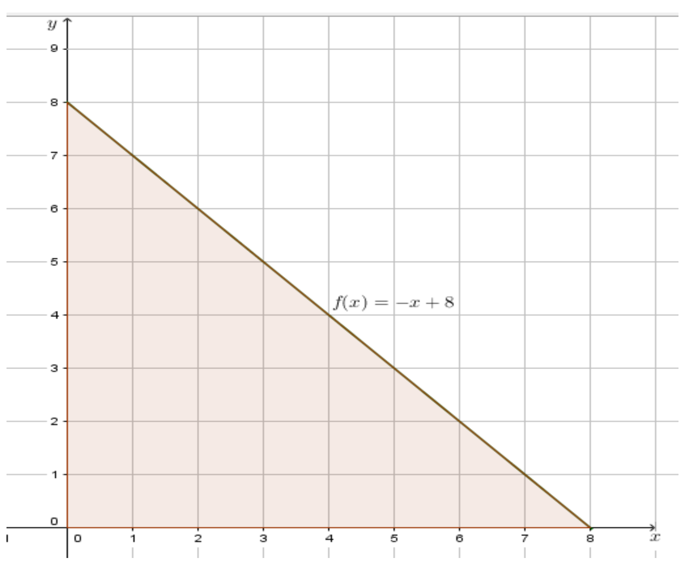
c. Determine los puntos de intersección entre las rectas, y los puntos de intersección entre las rectas y el cuadrilátero. Sombree las regiones que se determinan.

d. Determine el área del cuadrilátero descrito en a.

e. Halle el área de cada una de las regiones determinadas en c. y súmelas.

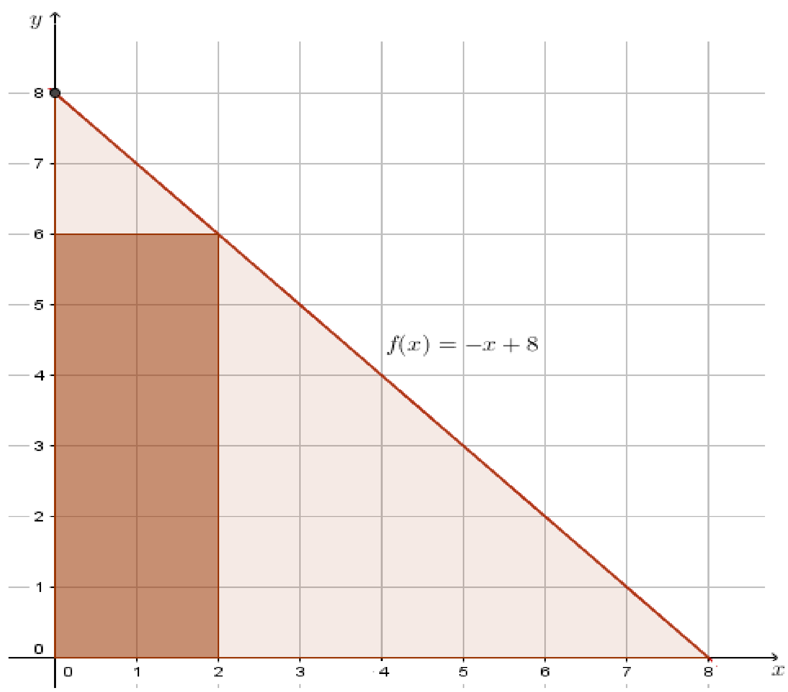
f. Compare los resultados obtenidos en d. y e. ¿Qué concluye?

6. La región sombreada, en el plano, está limitada por la recta $y = -x + 8$, el eje x y el eje y.



a. Determine el área de la región sombreada. Explique el procedimiento que usó.

b. En el eje x subdivida el intervalo $[0,8]$ en subintervalos de longitud 2 y con base la longitud de estos subintervalos construya rectángulos de altura la imagen por *f* del extremo izquierdo subintervalo. Observe el ejemplo ilustrado en la siguiente figura.

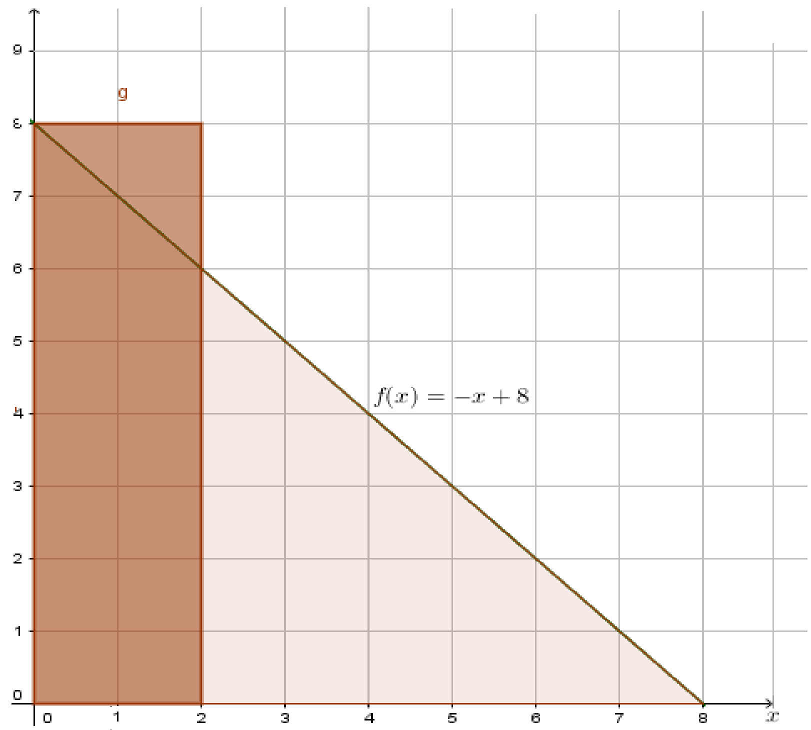


c. ¿Cuál es la altura de cada uno de esos rectángulos?

d. ¿Cuál es el área de cada uno de esos rectángulos?

e. Sume las áreas de estos rectángulos. ¿Qué resultado obtiene?

f. En el eje x, subdivida el intervalo $[0,8]$ en subintervalos de longitud 2 y con base la longitud de estos subintervalos construya rectángulos de altura la imagen por *f* del extremo derecho del subintervalo. Observe la ilustración.



g. ¿Cuál es la altura de cada uno de esos rectángulos?

h. ¿Cuál es el área de cada uno de esos rectángulos?

i. Sume las áreas de estos rectángulos. ¿Qué resultado obtiene?

j. Compare los resultados que obtuvo en e) e i) con el obtenido en a). ¿Que concluye?.

7. Analice las construcciones que aparecen en los siguientes links donde se generalizan la idea planteadas en las secuencias anteriores. Describa cómo se determinan aproximaciones a las áreas de regiones planas.

http://tube.geogebra.org/material/show/id/160896

http://tube.geogebra.org/material/show/id/130532

http://archive.geogebra.org/en/upload/files/spanish/Bua/FUNCLINEAL.html

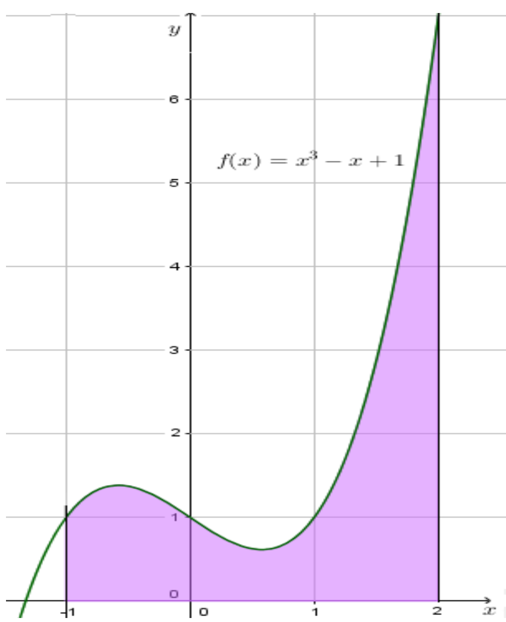
http://www.matematicasvisuales.com/html/historia/archimedes/parabola.html

5.5.4. Actividad 4. Área de regiones planas limitadas por curvas.

Objetivo.

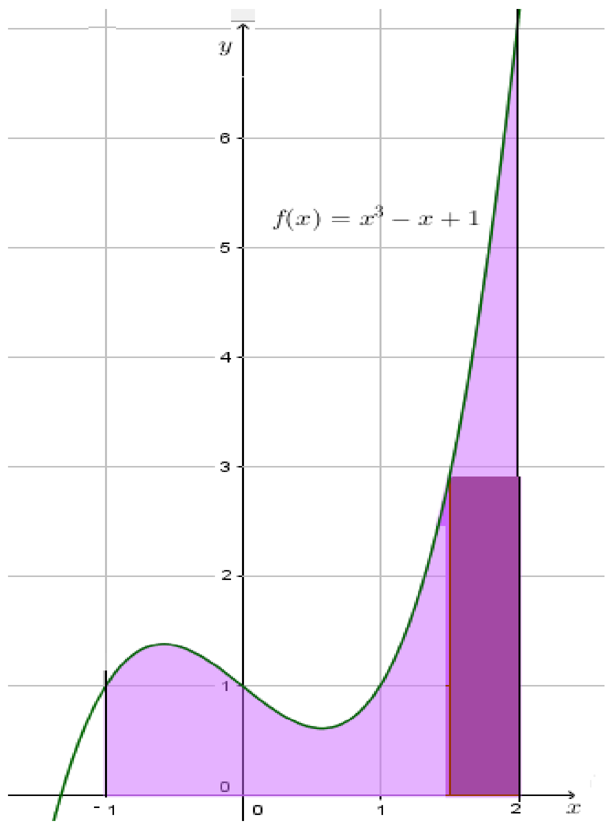
Determinar aproximaciones al área de una región del plano limitada por una curva y los ejes coordenados

1. La región sombreada en el plano está limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - x + 1$, las rectas $x = -1$, $x = 2$, y el eje x. Use la cuadrícula para estimar el área de esta región. Explique su procedimiento.



2. Ahora subdivida el intervalo $[-1,2]$, en subintervalos de longitud $1/2\ unidad$, y con esta medida, de la base, construya rectángulos cuya altura sea la imagen por *f* del extremo izquierdo del subintervalo, como se observa en la siguiente ilustración.

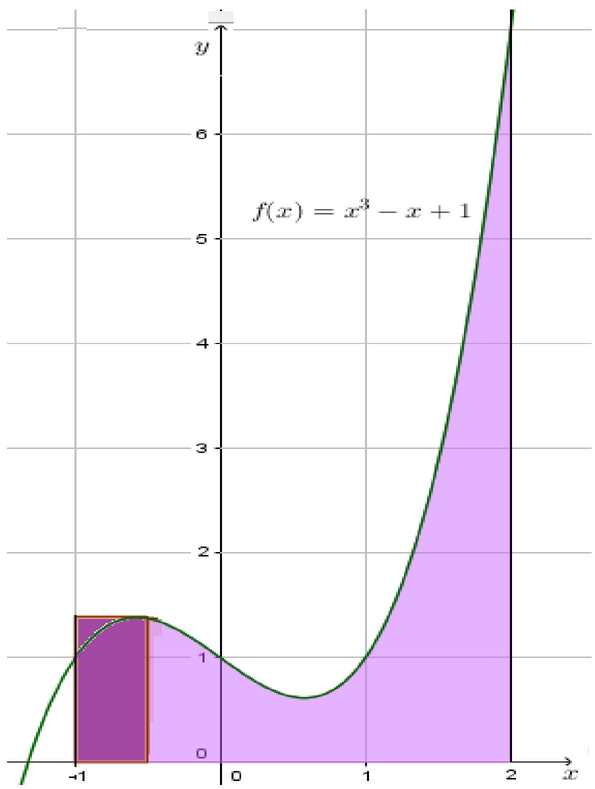
5.5.5. Actividad 5. La integral definida. Sumas de Riemann



1. ¿Cuál es la altura de cada uno de esos rectángulos?
2. ¿Cuál es el área de cada uno de esos rectángulos?

3. Sume las áreas de los rectángulos. ¿Qué valor obtiene? Compare con el valor estimado en 1.

4. Subdivida el intervalo $[-1, 2]$, en subintervalos de longitud $^1/_2\,unidad$, y con esta medida de la base, construya rectángulos cuya altura sea la imagen por f del extremo derecho del subintervalo. Observe el ejemplo de la siguiente ilustración.



5. ¿Cuál es la altura de cada uno de esos rectángulos?

6. ¿Cuál es el área de cada uno de esos rectángulos?

7. Sume las áreas de los rectángulos. ¿Qué valor obtiene?. Compare con el valor estimado en 1

8. Compare los resultados que obtuvo en 5. y 9. con su estimación de 1. ¿Qué concluye?

9. Repita el procedimiento anterior subdividiendo el intervalo en subintervalos de longitud $1/_4$ y posteriormente en subintervalos de longitud $1/_8$

10. Compare con los valores obtenidos en 4 y 9 ¿Qué concluye?

11. Ejecute ahora los comandos y utilice las herramientas que se muestran en los siguientes links:

https://www.geogebra.org/m/33959

http://www.geogebra.org/m/1538575

https://tube.geogebra.org/material/simple/id/112439

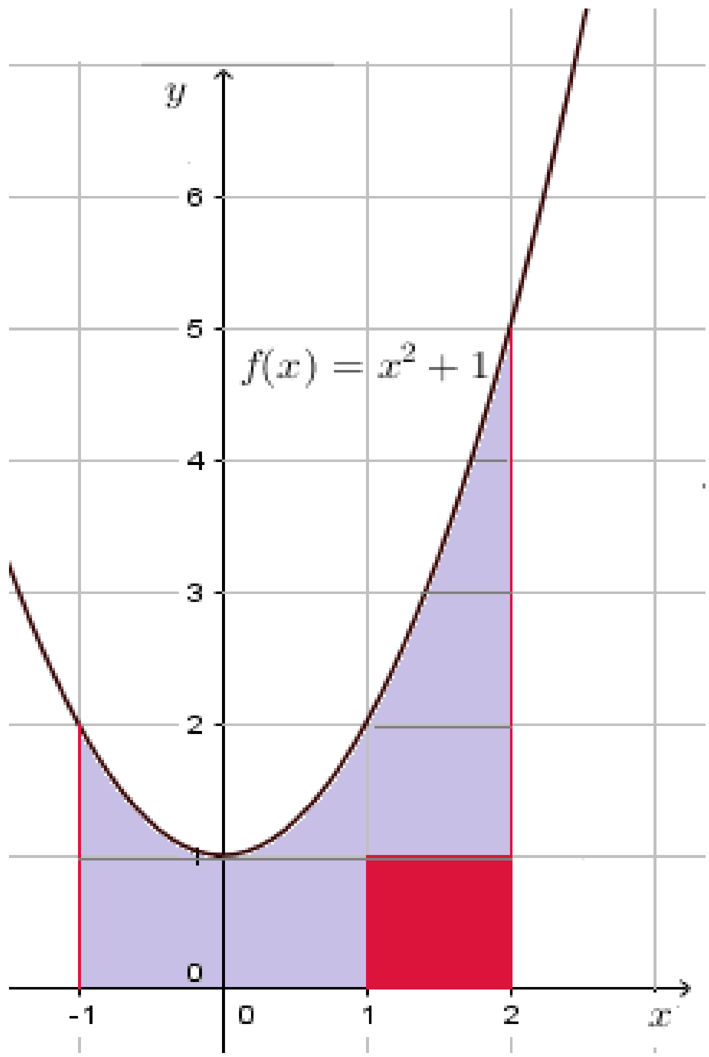
https://tube.geogebra.org/material/simple/id/719393

https://tube.geogebra.org/material/simple/id/855605

12. ¿Qué aportan las construcciones de los links citados al análisis que realizó en los puntos 1 a 12?

Objetivo. Determinar integrales definidas usando sumas de Riemann

1. La región sombreada en la figura está acotada por las gráficas de $f(x) = x^3 + 2$, $x = -1$, $x = 2$ y el eje x. Sobre la región se señala una cuadrícula.



- **Recubriendo el área de una región plana con un patrón.**

a. Estime el área de la región sombreada usando como unidad de medida (o patrón) el área del cuadrado remarcado en el interior.

- **Aproximación al área por sumas de Riemman.**

a. Divida el intervalo $[-1, 2]$ en subintervalos de longitud $\Delta_x = \frac{2-(-1)}{6}$
b. Determine puntos extremos de cada subintervalo. $x_0 = -1,\ x_1 = ?,\ x_2 = ?, \ldots, x_5 = 2.$
c. Halle $f(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$
d. Construya ahora rectángulos de base Δ_x y altura $f(x_i)$, con $i = 0, 1, 2, \ldots, 5$
e. Halle las áreas de los rectángulos anteriores, súmelas y compare esta suma con el resultado obtenido en el punto 1.a.
f. Construya ahora rectángulos de base Δ_x y altura $f(x_i)$, para $i = 1, 2, \ldots, 6$
g. Halle las áreas de los rectángulos de *g*, súmelas y compare el resultado con el obtenido en el punto 1.a
h. Compare los resultados obtenidos en e. y g. ¿Qué concluye?

i. Repita el proceso anterior dividiendo el intervalo $[-1, 2]$ en 12 subintervalos de la misma longitud. ¿Qué concluye

- **Paso al límite.**

a. Divida el intervalo $[-1,2]$ en n subintervalos de longitud: $\Delta_x = \frac{2-(-1)}{n}$.
b. Determine los puntos extremos de cada subintervalo: $x_0 = -1, x_1 = -1 + \Delta_x$, $x_2 = x_1 + 2\Delta_x,\ \ldots,\ x_n = 2.$ $\quad x_i = x_1 + \mathrm{i}\,\Delta_x$

c. Determine $f(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$

d. Halle una expresión para el área del rectángulo i-ésimo

e. Sume las áreas de los rectángulos construidos y usando propiedades del límite y la sumatoria, determine el área de la región.

f. Compare el resultado obtenido con los resultados del punto 1.a y 2.e, 2.h en e y g. ¿Qué concluye?

14. Analice la construcción que aparece en los links.

http://tube.geogebra.org/material/show/id/52946

http://tube.geogebra.org/student/m1991

http://www.xente.mundor.com/ilarrosa/GeoGebra/Aproximaciones_integral_definida.html

15. Qué aportan las construcciones de los links al análisis de las actividades propuestas en las actividades 1 a 4?

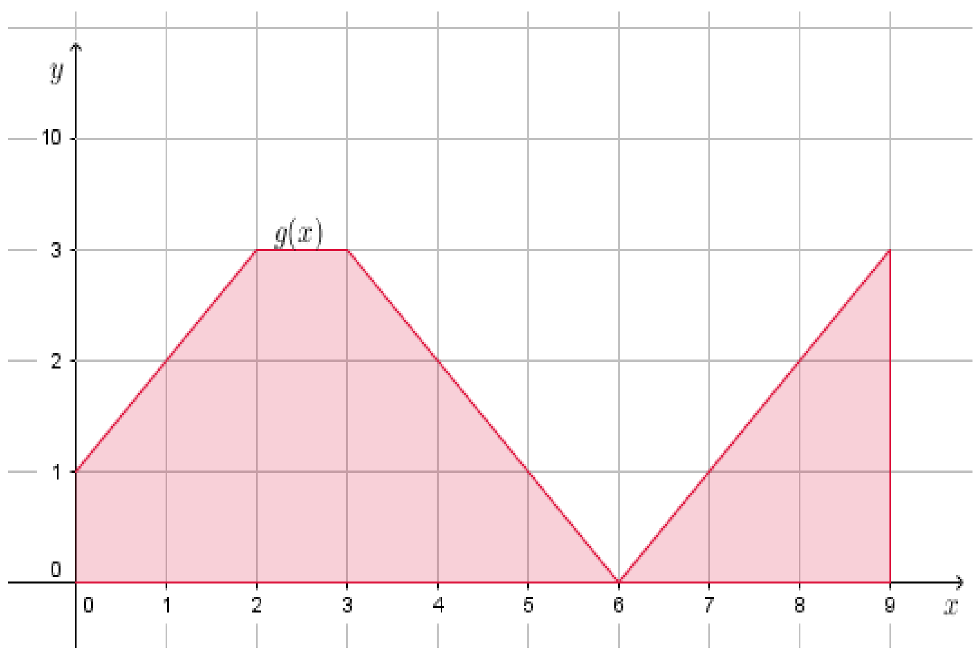
5.5.6. Actividad 6. Secuencia General

Objetivos.

- Caracterizar región del plano cuya área puede relacionarse con el cálculo de una la integral definida.
- Interpretar intuitivamente el concepto de integral definida.
- Visualizar geométricamente propiedades de la integral definida.
- Analizar algunas aplicaciones del teorema fundamental del cálculo.

- **Área de regiones planas, limitadas por rectas.**

La región sombreada en el plano cartesiano está limitada por la gráfica de una función $g(x)$ definida en el intervalo $[0, 2]$, el eje x, el eje y y la recta $x = a$



a. Subdivida la región sombreada (mínimo) en 4 regiones poligonales. Determine las áreas de estas regiones y súmelas. ¿Qué valor obtiene?

b. Repita el proceso anterior subdividiendo la región sombreada en forma diferente a la que uso en 1. ¿Qué concluye?

1. Construya ahora las gráficas de la funciones $5g(x)$ y $-2g(x)$.

    a. Determine las áreas de las regiones limitadas por las gráficas de las nuevas funciones, el eje x, el eje y y la recta $x = 9$.
    b. Compare con los resultados obtenidos en el punto 1.a con los obtenidos en el punto 2.a. ¿Qué concluye?

2. Determine ahora las regiones del plano limitadas

   (i) por la función $f(x) = 4$, el eje y, y la recta $x = 3$

   (ii) por la función $g(x) = x$, el eje x y la recta $x = 3$.

   Halle las áreas de estas regiones y súmelas-.

3. Determine la región del plano limitada por la gráfica de la función $h(x) = x + 4$, el eje x, el eje y, y la recta $x = 3$. Halle el área de esta región y compare con el valor obtenido en 3. ¿Qué concluye?

4. Determine ahora la región limitada por la gráfica de la función $6h(x)$, el eje x, el eje y, y la recta $x = 3$. Halle su área y compare con el área obtenida en 4. ¿Qué concluye
5. Considere ahora las siguientes regiones del plano

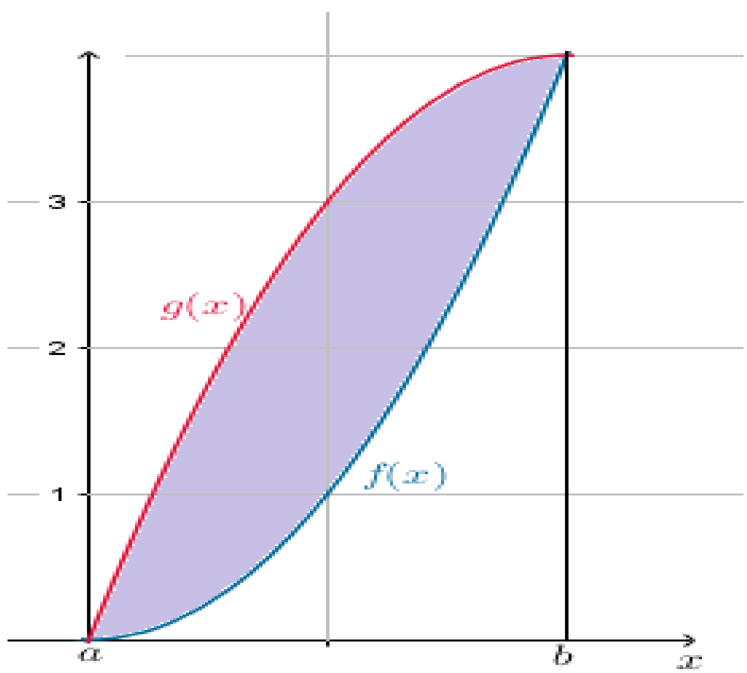
   R_1 : Determinada por la gráfica de una función de variable y valor real f, el eje x, la recta $x = a$ y la recta $x = b$. $\acute{A}rea\ de\ R_1 = A_1$

a. ¿Es **siempre** posible afirmar que el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)+g(x)$, el eje x, la recta $x=a$ y la recta $x=b$. es A_1+A_2?, explique claramente su respuesta.

b. ¿Es correcto afirmar que el área de la región del plano limitada por la función $kf(x)$, el eje x, la recta $x=a$ y la recta $x=b$, es kA_1, para cualquier valor de k?. Explique su respuesta.

- **Área entre curvas.**

1. En la siguiente figura se presentan las gráficas de dos funciones f y g en el intervalo $[a,b]$. Para todo x en ese intervalo se tiene que $g(x)>f(x)$.



a. Usando uno de los procedimiento descritos en las actividades anteriores encuentre una aproximación al área encerrada por las gráficas de las funciones f, g , las rectas $x=a$ y $x=b$.

b. Considere ahora la región acotada por la gráfica de la función f y las rectas $x = a$ y $x = b$. Determine una aproximación al área de esta región usando uno de los procedimientos usados en las actividades anteriores.

c. Considere ahora la región acotada por la gráfica de la función g y las rectas $x = a$ y $x = b$. Determine una aproximación al área de esta región usando el mismo método que seleccionó en a.

d. Calcule la diferencia entre las aproximaciones obtenidas en c y en b. Compare ahora, con la aproximación que obtuvo en a), ¿qué concluye?

2. Dibuje sobre el mismo plano cartesiano las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$.

   a. Determine los puntos de intersección de estas gráficas.

   b. Sean a y b los puntos de intersección, que determinó en a, siendo a < b; ¿es $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$?, ¿Es $g(x) \leq f(x)$, para todo $x \in [a, b]$?.

   c. Halle ahora una aproximación al área de la región limitada por las gráficas de f, g y las rectas $x = a$ y $x = b$.

   d. Usando el mismo método que empleó en el punto c, halle una aproximación al área de la región limitada por la gráfica de g y las rectas $x = a$ y $x = b$.
   e. Usando el mismo método que empleó en d, halle una aproximación al área de la región limitada por la gráfica de f y las rectas $x = a$ y $x = b$.
   f. Calcule la diferencia entre las aproximaciones obtenidas en d) y e). Compare con la aproximación encontrada en c, ¿qué concluye?

- **Teorema Fundamental del cálculo – Regla de Barrow**

1. Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{3}$

a. Evalúe la función *f* en $x = 3$ y en $x = 0$

b. Determine $f(3) - f(0)$

2. Derive la función $f(x) = \frac{x^3}{3}$

3. Dibuje la gráfica de la función $f'(x)$ en el intervalo $[0,3]$

4. Halle el área de la región determinada por la gráfica de $f'(x)$, el eje x, y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

5. Compare los valores obtenidos en 1.b y 4. ¿Qué concluye?

- **Aplicaciones de Geogebra.**

1. Estudie las propuestas que aparecen en los siguientes links. Use la herramienta de cálculo simbólico de Geogebra (Anexo 3) y proponga sus propias construcciones.

http://tube.geogebra.org/material/show/id/54263

http://tube.geogebra.org/material/show/id/339

https://tube.geogebra.org/material/show/id/285657

http://tube.geogebra.org/student/m14979

http://tube.geogebra.org/material/show/id/1107

http://tube.geogebra.org/student/m20548

http://tube.geogebra.org/material/show/id/11857

https://www.geogebratube.org/student/m9006

5.6. Análisis de resultados de la aplicación de la unidad didáctica

A continuación se presenta un análisis global de la aplicación de las actividades que conforman la unidad didáctica, no se puntualizan los resultados de cada actividad, solamente se hace mención a los problemas que llamaron más la atención o donde hubo mayor discusión.

Las actividades de la unidad didáctica propuesta fueron aplicadas a un grupo de diez estudiantes de la asignatura cálculo integral, en modalidad de tutorías extraclase. Se trabajaron paralelamente con el avance del currículo previsto en el programa, con el fin de profundizar en el análisis y aplicación del concepto de área de regiones planas para fundamentar el concepto de integral definida. Se tuvieron en cuenta las siguientes etapas en el desarrollo de cada actividad:

- Aproximación intuitiva a los conceptos básicos.
- Formalización de los conceptos.
- Aplicación y socialización por parte de los estudiantes de sus planteamientos y soluciones para puntualizar conceptos y procedimientos elaborados.

Se usó el Geogebra explorando los links sugeridos y además otras construcciones que los estudiantes realizaron por su cuenta.

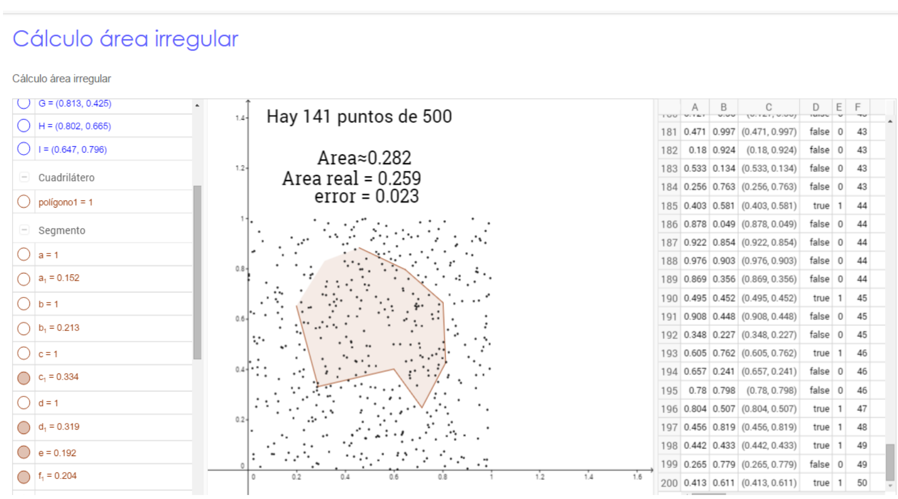
En el desarrollo de la primera actividad los estudiantes evidenciaron dificultades similares a las encontradas en la prueba diagnóstica, sin embargo, el hecho de aplicar la prueba en modalidad de taller, les permitió explorar herramientas para dar aportes más significativos y coherentes con respecto a lo planteado. Además, el uso del Geogebra amplió las posibilidades, pues se reconocen de forma dinámica las propiedades y los movimientos de los objetos.

Específicamente en esta actividad, los estudiantes tuvieron problemas para estimar el perímetro y el área de las figuras no poligonales, usaron los patrones dados pero no lograron aproximarse a una expresión o fórmula general.

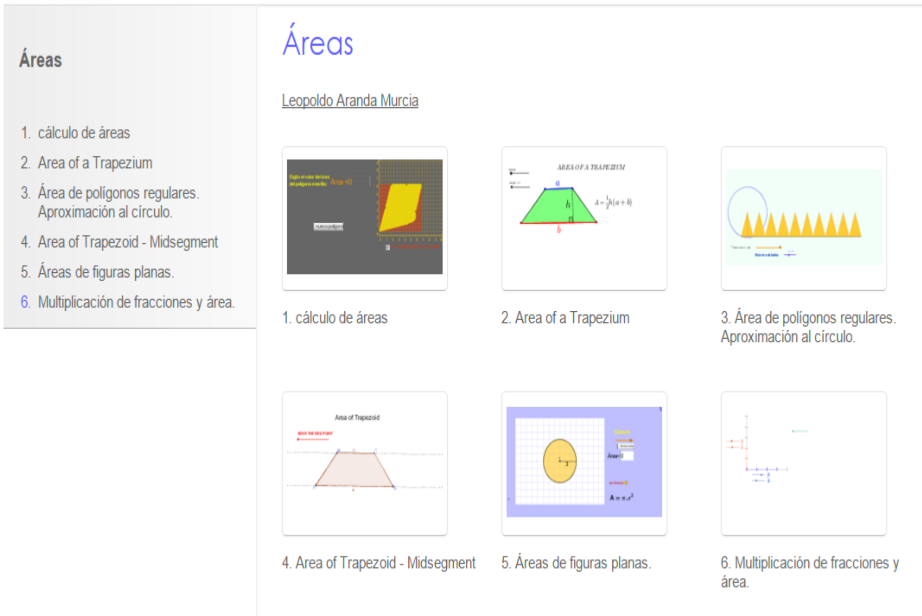
Se observó que en las actividades que requerían determinar áreas o perímetros de rectángulos o triángulos o figuras construidas sobre una cuadrícula, resultaron de menor complejidad, sin embargo en algunos casos prevalece la confusión entre área y perímetro y el uso inadecuado de las unidades de medida a pesar que se indicaron en el enunciado. Desconocen además la relación entre áreas de determinados polígonos, rectángulo y triángulo por ejemplo.

En el ejercicio 8 de la actividad 2, la mayoría de los estudiantes dividieron la región en regiones triangulares y rectangulares pero en diferentes posiciones y usaron la cuadrícula como patrón de medida de esta manera sumaron áreas y obtuvieron el área mayor.

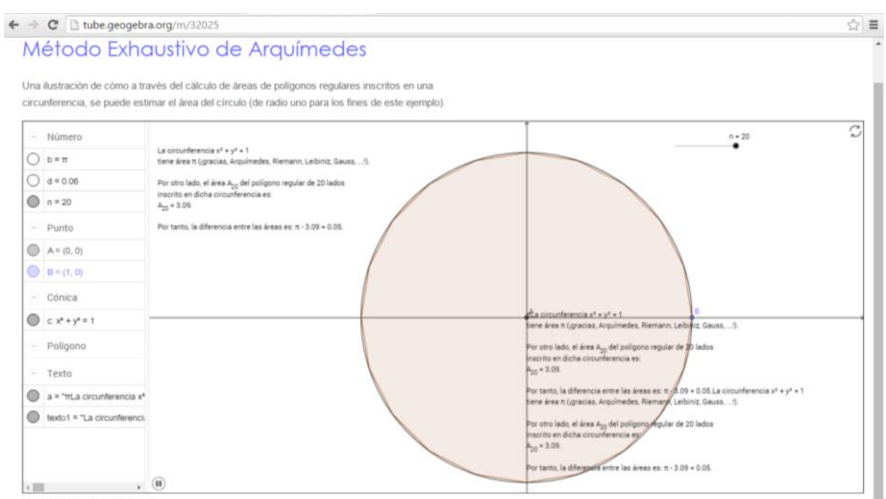
En cuanto a la exploración en geogebra, la actividad propuesta en https://tube.geogebra.org/student/m19313, condujo a discutir en particular, si al eliminar un segmento o incluso un punto del contorno del polígono, el área continuaba siendo igual, pero al explorar estos elementos aclararon la diferencia entre área y perímetro.



También en el sitio https://www.geogebra.org/material/simple/id/75139# pudieron explorar y comparar diferentes formas de abordar las áreas incluso usando fracciones donde usualmente evidencian gran dificultad.



En la actividad 2, utilizaron el Geogebra y apoyados en el sitio http://www.geogebra.org/m/32025 completaron la tabla propuesta. Es importante comentar que para muchos era desconocida la idea de que el área del circulo puede aproximarse por las áreas de polígonos inscritos, de esto infirieron que podría usarse la misma técnica para hallar el área de regiones no poligonales arbitrarias, como las propuestas en la primera actividad



Con respecto a la pregunta:

¿Qué sucede, en cada caso, con el área del polígono inscrito, cuando el número de lados (n), es muy grande?, ¿qué sucedería con esta área si $n \to \infty$?

Algunos dijeron que el área sería infinita, otros que el área no existiría ya que superaría (se saldría del contorno establecido), y otros propusieron que al aproximar a infinito infinitos polígonos, era necesario ampliar el radio de la circunferencia

A partir del segundo punto de la actividad 2 se empezaron a generar conflictos por la introducción de lenguaje simbólico, surgieron dudas en torno al infinito, y a la notación de intervalos, en esa discusión resultaron ideas interesantes, por ejemplo alguien preguntó sobre el área de un segmento, para algunos resultaba ser cero bajo el argumento que sería comparable a un rectángulo con base pero sin altura, también dijeron que el área no existía, a lo que otros argumentaron que si existía un objeto debía existir el área aunque fuera cero. En tormo a estas dudas surgió implícitamente la idea de los conjuntos medibles sin embargo, aunque pueda explicarse el tema solo se hacen referencias pues el programa del curso no aborda estas temáticas y tatar el tema implicaría quitar tiempo a otras tópicos.

En el sitio https://tube.geogebra.org/student/m23344, los estudiantes pudieron corroborar que el área del círculo también puede aproximarse a través de triangulaciones sucesivas.

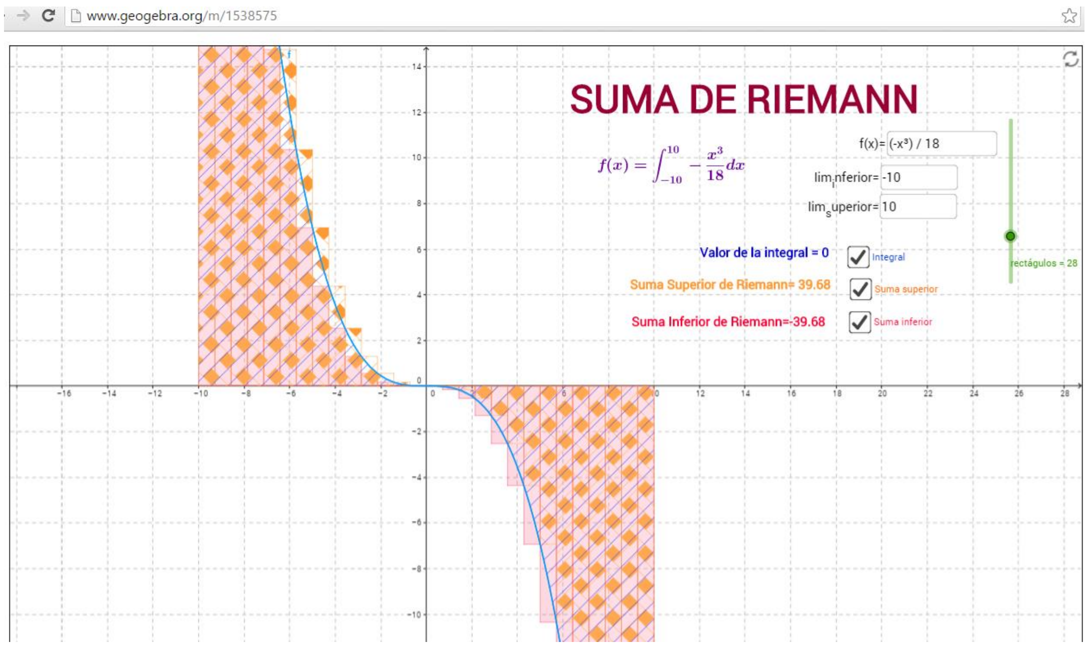
Una duda persistente en esta actividad es: qué sucedía al aproximar a infinito, aunque los estudiantes previamente en el cálculo diferencial debieron haber estudiado el tema, no lo conectan al tema nuevo pues no ven relación alguna entre la aproximación del área por polígonos y la aproximación de la recta secante a una tangente.

En cuanto a la opinión sobre que aportan las construcciones propuestas en los links, en general las respuestas coincidieron respecto a que permiten ver con precisión lo que no pueden construir por si mismos, ya que han perdido la habilidad de dibujar y además no tienen conocimientos claros sobre las características de las figuras, sobre todo cuando se deben construir circunferencias o curvas. Resaltaron además que mediante el uso del software optimizan el tiempo y dinamizan las construcciones de forma inmediata, lo cual facilita hacer conjeturas, proceso que es más lento cuando deben construir las figuras manualmente.

En el desarrollo de la actividad 3, aunque en el inicio algunos tuvieron problemas para graficar las funciones, gracias a las cuadrículas pudieron establecer con precisión los rectángulos. Cuando se indago por procedimientos diferentes usaron rectángulos y triángulos para hacer subdivisiones guiados por la idea de tomar un patrón y trazar una cuadrícula como se había sugerido previamente en la actividad 1. Además en la discusión pudieron establecer que la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos excede al área del triángulo que se formaba, y que análogamente la suma de los rectángulos inscritos es menor que el área de tal rectángulo, y que la medida que sobra en los rectángulos circunscritos podría cubrir la medida que les falta a los rectángulos inscritos para cubrir el triángulo.

En la actividad 4, el análisis de los links les permitió empezar a familiarizarse con las sumas superiores e inferiores de forma más precisa, en el sitio http://tube.geogebra.org/m/130532, los estudiantes pudieron experimentar los cambios que se presentan en el área de las regiones de aproximación cuando se aumenta el número de rectángulos inscritos, sin embargo, de forma manual tuvieron dificultades para precisar los extremos de los intervalos y persiste la duda de lo que sucede cuando se habla de un número infinito de rectángulos

En esta actividad seis los estudiantes ya estaban familiarizados con el programa y no solo usaron los links sugeridos, sino que hicieron sus propias construcciones argumentando que gastaban menos tiempo y obtenían mayor precisión que la obtenida al hacer las figuras manualmente, En este punto las conjeturas que planteaban eran más ajustadas a la regularidad observada y las sustentaban con argumentos sólidos.



Como se comentó anteriormente se evidencian dificultades sistemáticas respecto a los conceptos de límite e infinito, que pueden estar relacionadas con los obstáculos epistemológicos inherentes a estos conceptos, que se mencionaron en otro de los capítulos, y con las dificultades relativas a uso del lenguaje simbólico, el manejo básico de las herramientas algebraicas y el reconocimiento de propiedades de la sumatoria y los limites.

En el sitio https://tube.geogebra.org/student/m9006 mostraron una secuencia para hacer una construcción hasta llegar a la relación con la integral definida.

En conclusión, la realización de la actividad permitió fundamentalmente que los estudiantes relacionaran el área de una región con la integral definida; el uso del programa Geogebra enriqueció la habilidad para reconocer funciones y sus variaciones.La idea de infinito sigue un poco imprecisa porque el estudiante no concibe que una región que esté acotada pueda particionarse infinitamente, consideran que este infinito supera la medida de la región y surgen contradicciones con la medición del área por considerar el infinito una medida muy grande que sobrepasaría cualquier región.

El uso del programa puede ser beneficioso, si como en este caso apoya las explicaciones teóricas de la clase, quienes participaron en la actividad percibieron según lo manifiestan, que el curso de cálculo integral va más allá de adquirir técnicas de integración y se les facilitó trabajar posteriormente con temas como el de sólidos de revolución, pues se apoyaron de manera sistemática en el análisis gráfico.

Es importante resaltar que el hecho de que la secuencia parta de situaciones o problemas sencillos e intuitivos y avance paulatinamente a niveles superiores de formalización, permite no solamente consolidar las nociones previas acerca del área de una región plana y trascender la idea de que referirse a un área, está ligado a usar una fórmula, sino admitir como posibles y valiosas, las estrategias de estimar, recubrir y aproximarse al valor de un área con recubrimientos cada vez mejores (particiones más finas) y finalmente en este proceso relacionar de manera significativa la integral definida con el área de una región plana.

Se sugiere usar la unidad paralelamente o como complemento de la clase regular, ya que la formulación de los ejercicios planteados (aunque son elementales y cotidianos) permite al estudiante reflexionar en la conceptualización de elementos propios de la integral que previamente no había considerado o que no lo podría hacer en un clase magistral tradicional.

Conclusiones y recomendaciones

Del análisis del marco Histórico, epistemológico, disciplinar y didáctico y del diseño e implementación de la unidad didáctica objeto fundamental de este trabajo, se pueden inferir las siguientes conclusiones.

- El origen del cálculo integral se remonta a los matemáticos griegos, quienes usaron, hace más de 2000 años el método de exhaución (Eudoxo) para determinar áreas de regiones planas. Este método fue retomado exitosamente por Arquímedes (287 A.C -212 A.C) para encontrar áreas de círculos y otras figuras planas. Pero, fue necesario esperar a la introducción de símbolos, técnicas algebraicas, y conceptos fundamentales relacionados con el infinito y la continuidad, para que el método se transformara, gradualmente, en lo que hoy conocemos como el cálculo integral.

  La revisión del proceso antes descrito permitió reconocer estrategias didácticas adecuadas para trabajar en el aula la interpretación de la integral definida, como área de una región plana, pasando desde lo intuitivo hasta lo formal.

- En investigaciones relacionadas con la educación matemática a nivel superior se han evidenciado obstáculos ontogénicos, epistemológicos y didácticos relacionados con los conceptos fundamentales del cálculo: función, número real, límite, infinito, continuidad, tales conceptos se asocian a las prácticas pedagógicas y curriculares que aún enfatizan en aspectos puramente procedimentales y no en los aspectos conceptuales. Esto impide a los estudiantes interrelacionar diferentes conceptos y dominios de la matemática, que se asumen trabajados en niveles previos.

- Investigaciones didácticas consultadas para la construcción de este trabajo corroboran observaciones de la práctica personal con respecto a las dificultades que presentan los estudiantes universitarios en la construcción del concepto de integral definida. Algunas de ellas, relacionadas con conceptos previos antes citados como el de área, número real, función, límite y otras relacionadas con lenguaje y formas de representación: uso de notación, simbología, análisis e interpretación de representaciones gráficas, etc.

- En algunos de los textos de cálculo integral (los más usados a nivel universitario) que se revisaron, si bien se introduce el concepto de integral definida secuencialmente: método de exhaución, paso al límite y definición, no se profundiza en la interpretación de la integral definida como área, ni el concepto mismo de área pues se asume que ha sido trabajado en niveles anteriores. Aparte de ello en el aula, el texto se retoma de forma mecánica y desordenada atendiendo simplemente a los requerimientos del programa pero sin tener en cuenta las dificultades que puede presentar el estudiante en la construcción del concepto.

- Los resultados y el análisis de la prueba diagnóstica aplicada a un grupo de estudiantes de ingeniera, permitió reconocer dificultades respecto al concepto de área de una región plana, que se asocia usualmente, al uso de fórmulas para determinar áreas de rectángulos y triángulos y de algunos polígonos elementales, no está clara la noción de área por recubrimiento y por ello cuando se requiere determinar el área de regiones no poligonales no se identifican procedimientos de aproximación fundamentales para construir e interpretar la integral definida.

- Teniendo en cuenta el análisis de la prueba diagnóstica, las carencias de los textos, las dificultades evidenciadas desde la práctica y los reportes de investigación, la unidad didáctica construida en este trabajo, profundizó en la relación entre el concepto de área de una región plana y la integral definida, usando el software Geogebra, para visualizar dinámicamente gráficas y procesos. Esta perspectiva permite avanzar en la comprensión de la interpretación de la integral definida en términos del área, hecho que se corroboró al implementar esta unidad didáctica a un grupo de estudiantes de cálculo integral.

Con respecto a la implementación y enriquecimiento de la unidad didáctica, se sugiere:

- Proponer la unidad didáctica en las aulas antes de presentar la teoría formal del cálculo integral.

- Complementar el trabajo de la unidad didáctica con la discusión y análisis de elementos históricos relacionados con el origen y desarrollo de conceptos y estructuras relacionados con el cálculo integral, pues aparte de motivar a los estudiantes, les permite apreciar la evolución y dificultades que se dieron en el proceso.

- Complementar la unidad didáctica (si se considera necesario) con actividades relacionadas con el concepto y formas de la representación de la función y aspectos básicos del cálculo diferencial.

- Incluir en la clase de matemáticas el uso de software especializado, como el Geogebra, con una buena orientación, se puede constituir en una potente herramienta para analizar y solucionar problemas de cálculo

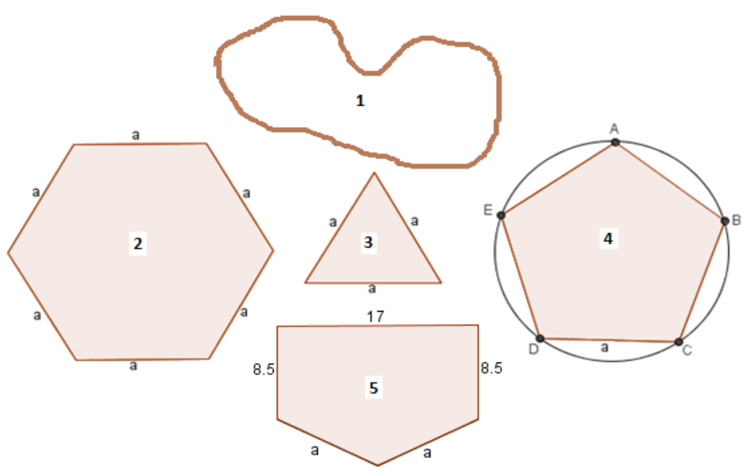
A. Anexo: Prueba Diagnóstica.

UNIVERSIDAD DE BOYACA

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERIA

CALCULO INTEGRAL

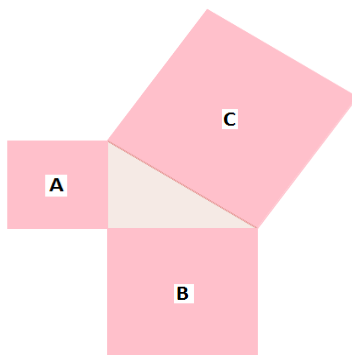
1. Observe las regiones planas que se encuentran a continuación y describa en cada caso un procedimiento para determinar el área de cada una de ellas.



2. Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 5cm y uno de sus catetos mide 4cm. Entonces, es posible afirmar que el área y el perímetro del triángulo son respectivamente:

A. $6cm^2\ y\ 12\ cm$ B. $12\ cm^2\ y\ 6\ cm$ C. $10\ cm^2\ y\ 9\ cm$ D. $9cm\ y\ 10\ cm^2$

3. Los cuadrados que aparecen sombreados en la siguiente figura, se construyeron sobre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo y sus áreas son A, B y C respectivamente. ¿Es correcto afirmar que A + B = C? Justifique claramente su respuesta, ilustre con un ejemplo.



4. Sea ABCD un cuadrilátero. Se sabe que las medidas de sus lados son AD = 17 pies, DC = 15 pies, BC = 19 pies, AC = 26 pies respectivamente y que el ángulo ABC es recto. Dibuje el cuadrilátero, determine su área y explique el procedimiento empleado.

5. En las siguientes ilustraciones aparece la gráfica de la función $f(x) = x + 1$, en los dos casos se construyeron algunos rectángulos desde $x = 0$ hasta $x = 2$.

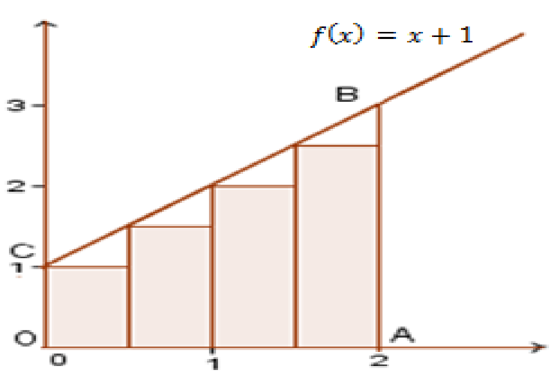


figura 1

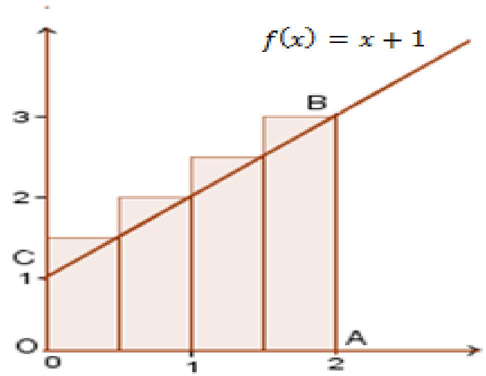


figura 2

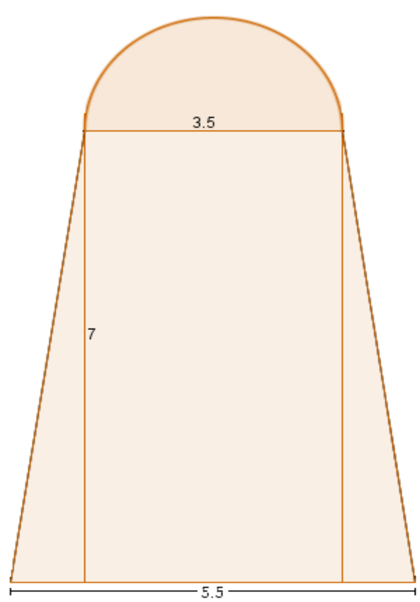
a. Halle las áreas de los rectángulos que aparecen en la figura 1 (izquierda) y súmelas.
b. Halle las áreas de los rectángulos que aparecen en la figura 2 (derecha) y súmelas.
c. Determine el área del cuadrilátero O A B C y compare con las áreas anteriores. ¿Que concluye?

6. Un círculo de radio 4 unidades y un rectángulo tienen la misma área. ¿Cuáles son las medidas de los lados del rectángulo? Justifique gráfica y analíticamente.

7. Sea $h(x) = x^3 - 6x$.

   a. Represente la función $h(x)$ en un plano cartesiano.
   b. Proponga un procedimiento que le permita encontrar un valor aproximado del área de la región comprendida entre la gráfica de la función $h(x)$, la recta $x = 1$, la recta $x = 2$ y el eje x.

8. Determine el área de la siguiente región.



.

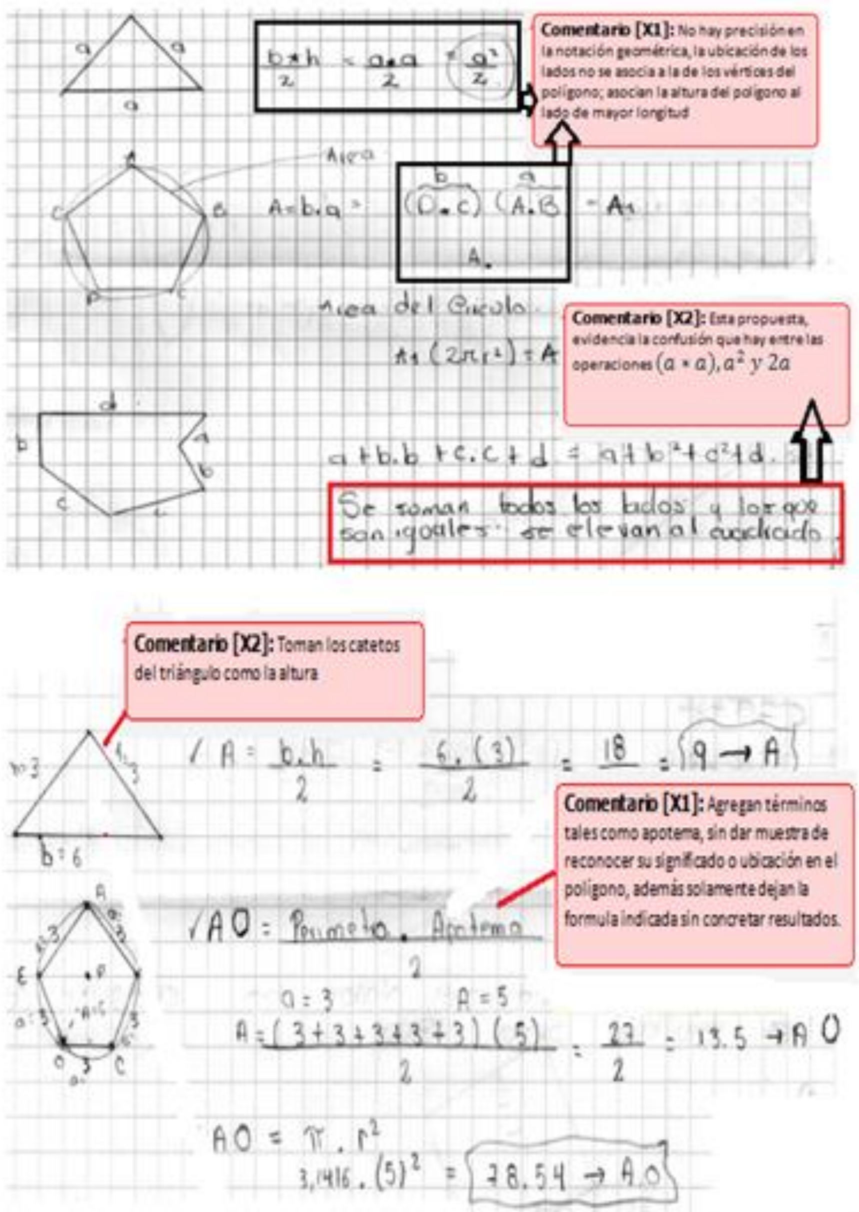
9. La región limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^2$, las rectas $x = 0$, $x = 1$ y el eje x, tiene un área de $\frac{1}{3}u^2$.

   a. Represente la región descrita en el plano cartesiano.
   b. Proponga un procedimiento que le permita encontrar el área de la región y compare su respuesta con el área dada en el enunciado.

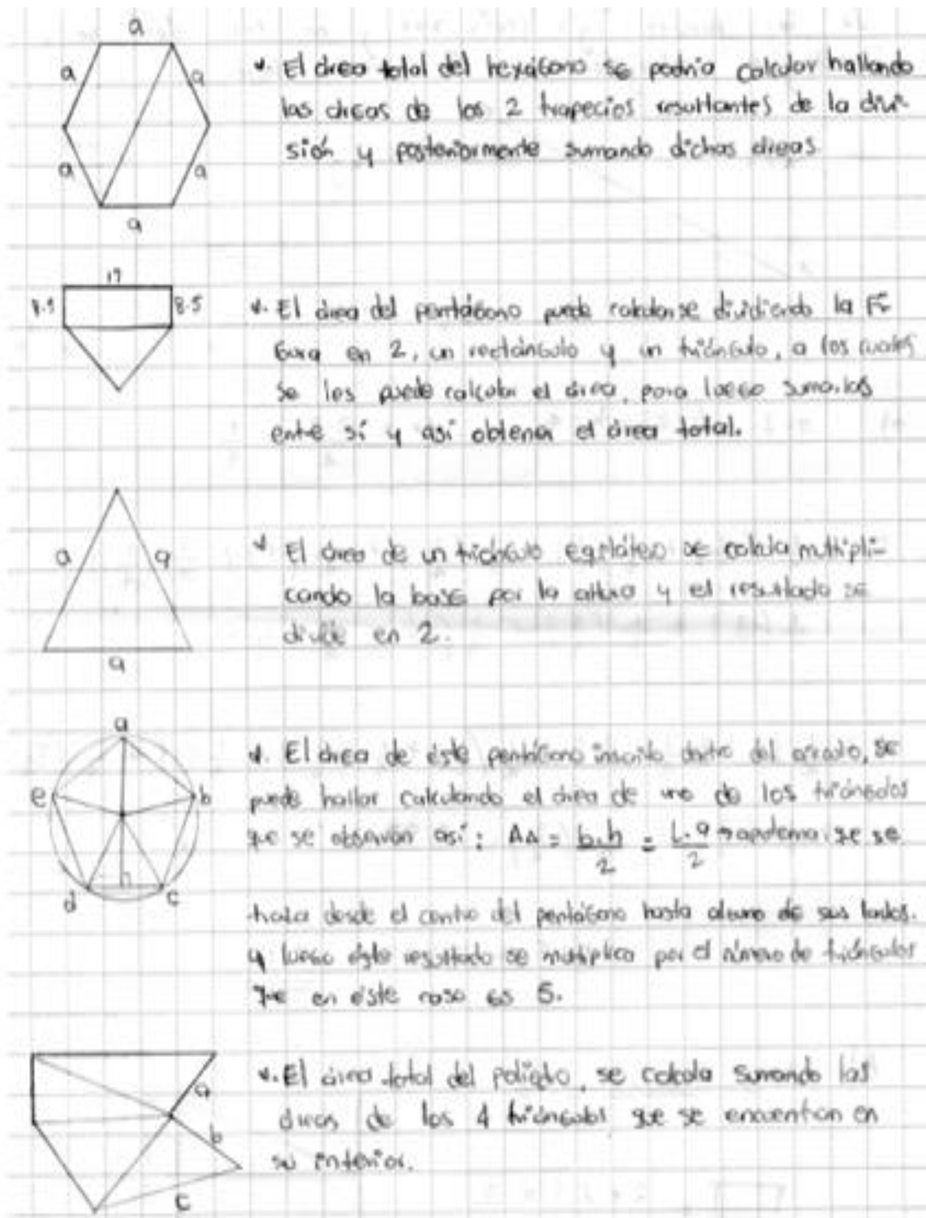
10. Teniendo en cuenta los procedimientos que utilizó para resolver las preguntas anteriores, describa un método general que le permita hallar el área de cualquier región del plano.

B. Anexo: Algúnas respuestas de la prueba diagnóstica.

B.1.Concepción de áreas no poligonales



B.2. Caracterización de áreas de polígonos.



El área total del hexágono se podría calcular hallando las áreas de los 2 trapecios resultantes de la división y posteriormente sumando dichas áreas

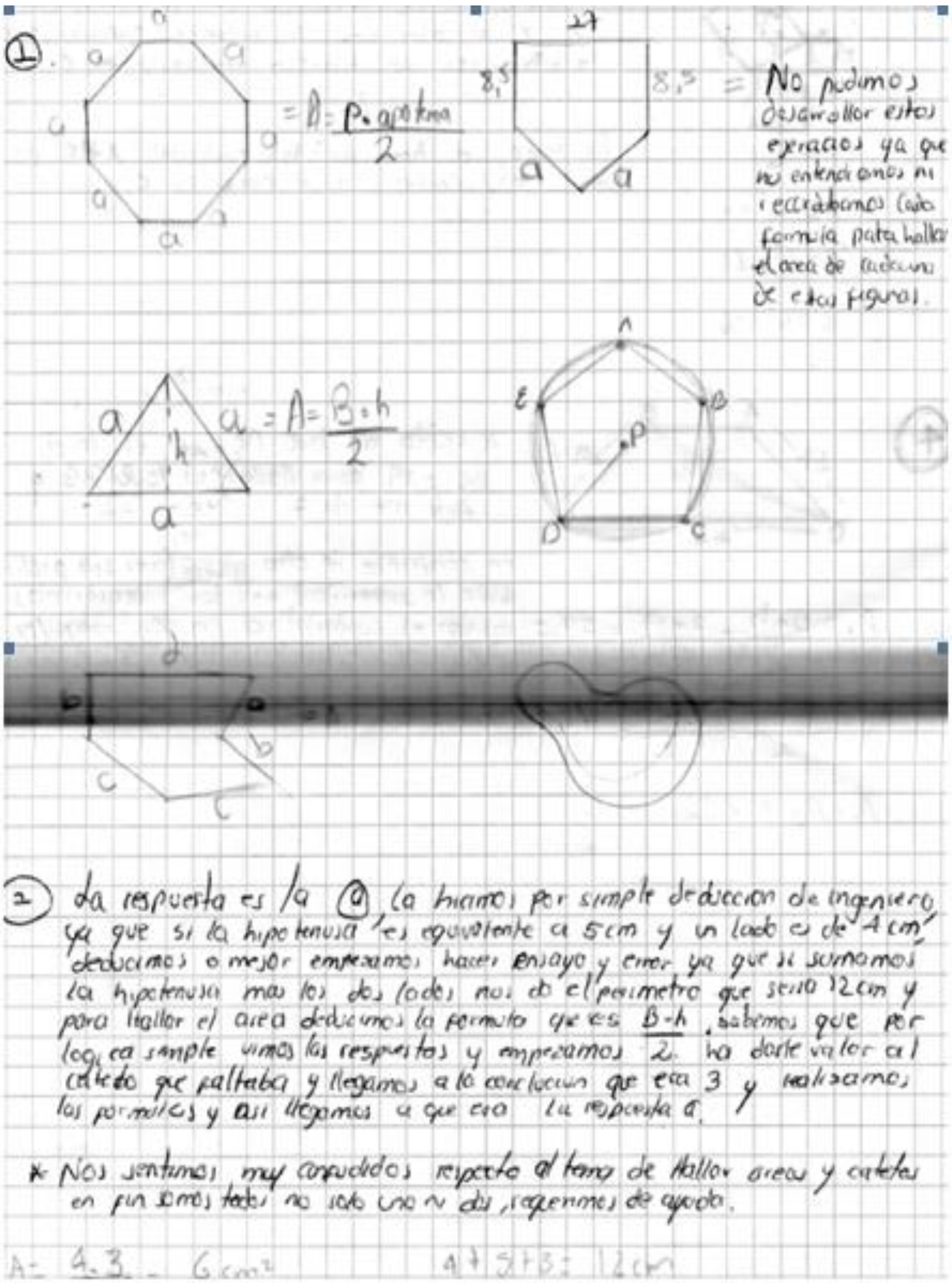
El área del pentágono puede calcularse dividiendo la figura en 2, un rectángulo y un triángulo, a los cuales se les puede calcular el área, para luego sumarlos entre sí y así obtener el área total.

El área de un triángulo equilátero se calcula multiplicando la base por la altura y el resultado se divide en 2.

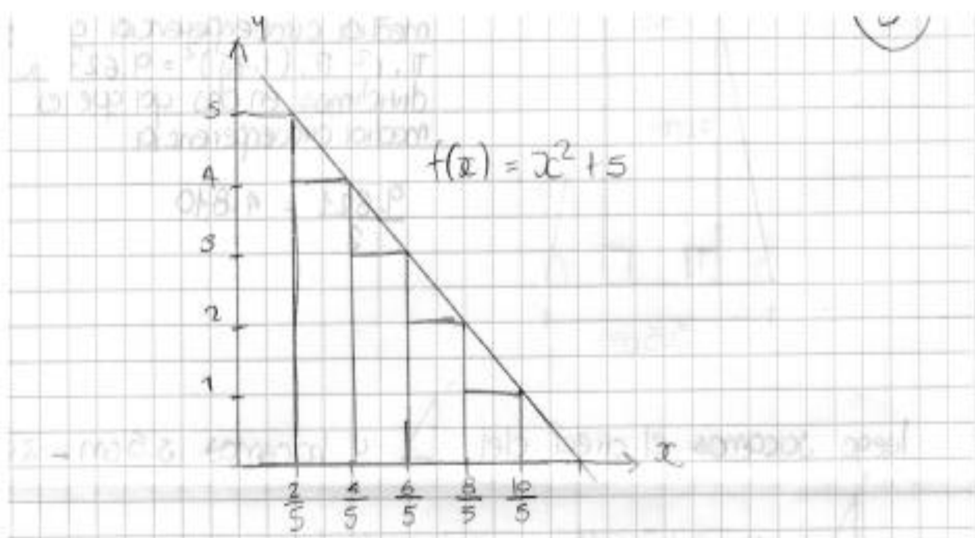
El área de este pentágono inscrito dentro del círculo, se puede hallar calculando el área de uno de los triángulos que se observan así: $A\Delta = \frac{b.h}{2} = \frac{L.a}{2}$ → apotema: que se traza desde el centro del pentágono hasta alguno de sus lados. y luego este resultado se multiplica por el número de triángulos que en este caso es 5.

El área total del polígono, se calcula sumando las áreas de los 4 triángulos que se encuentran en su interior.

B.3. Deducciones erróneas



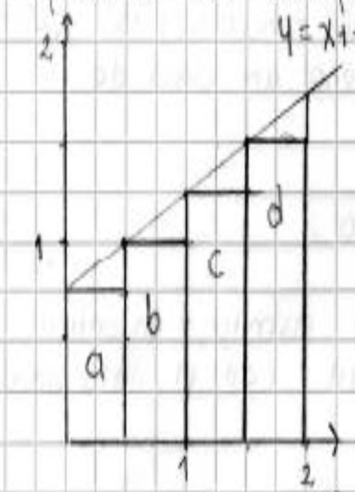
B.4. Sumando rectángulos inscritos (pregunta 5)



1. hallan el area de la grafica f(x y reste $x=0$ y $x=5$
2. 5 relanbla por el area de la region de la imobelppolos
3. Utilizan no tenban los para aproximar el area por defecto
4. la base de cada rectenbula dibujado es 2/5
5. la altura puede obtenerse evaluando f en el punto terminal derecho de intervalo
6. Se expresa la suma de las areas de la 5 rectangulos
7. Se suman y ya

B.5. Comparación de áreas

9. En las dos figuras siguientes, aparece la gráfica de la función $y = f(x) = x+1$, y en las dos construyeron rectángulos de la misma base.



$A_a = 0.5 \times 1 = 0.5$ $\qquad A_T = 3.5$

$A_b = 0.5 \times 1.5 = 0.75$

$A_c = 0.5 \times 2 = 1$

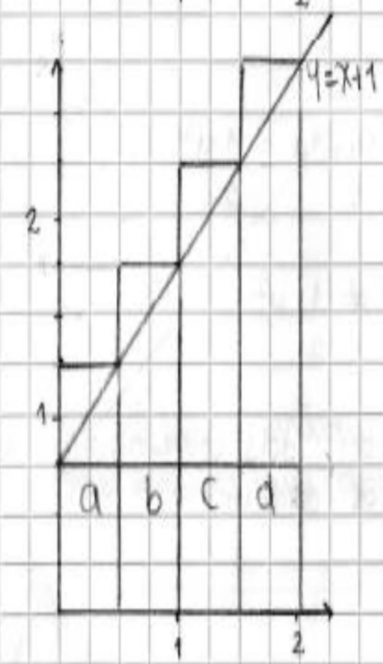
$A_d = 0.5 \times 2.5 = 1.25$

Área trapecio $= A_{\square} + A_{\triangle}$

$A_{\square} = 1 \times 2 = 2$

$A_{\triangle} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$

$A_{trap} = 4.$



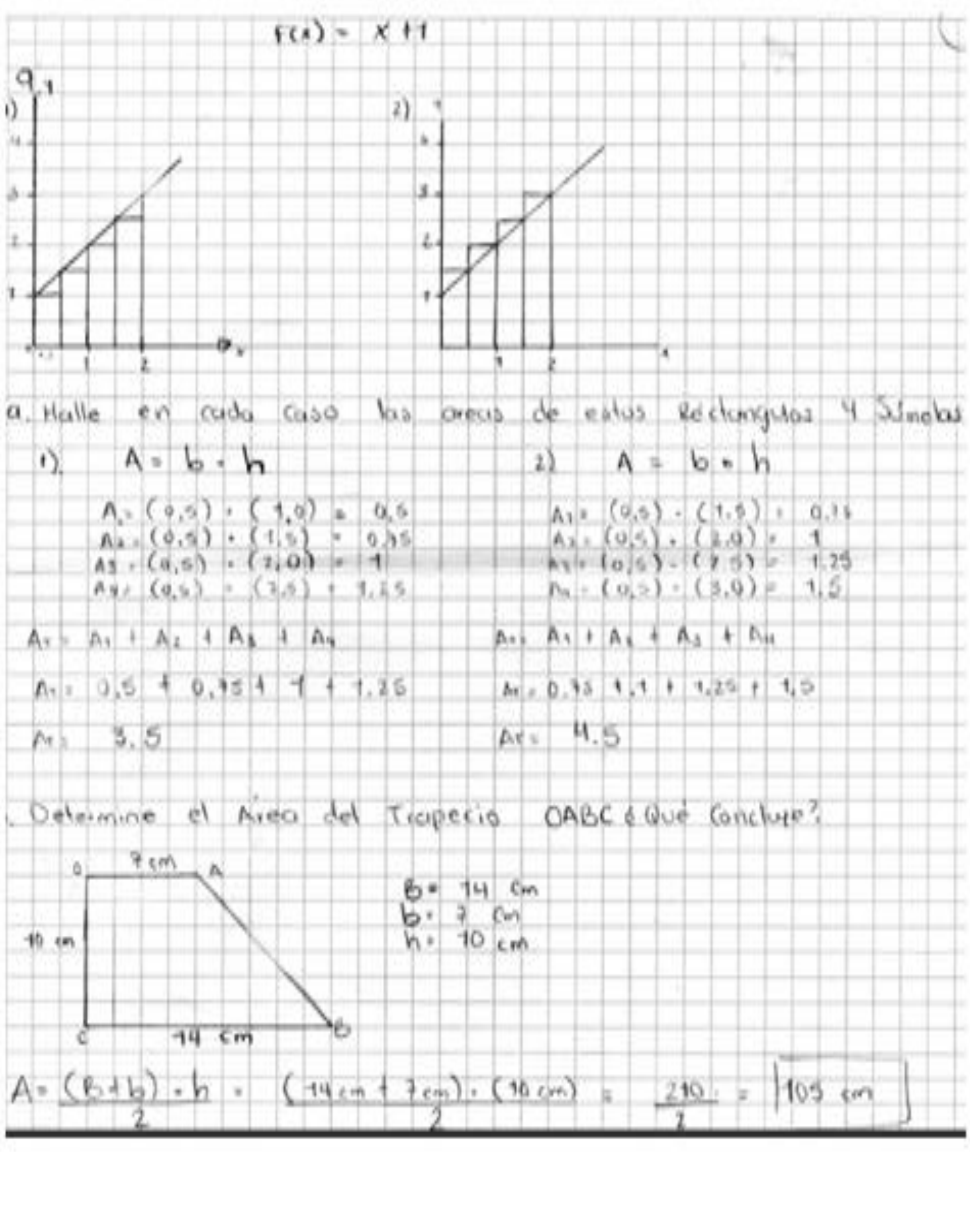
$A_a = 0.5 \times 1.5 = 0.75$

$A_b = 0.5 \times 2 = 1$

$A_c = 0.5 \times 2.5 = 1.25$ $\qquad A_T = 4.5$

$A_d = 0.5 \times 3 = 1.5$

B.6. Mejor aproximación al área



$f(x) = x + 1$

a. Halle en cada caso las areas de estos Rectangulos y Súmelas

1) $A = b \cdot h$

$A_1 = (0,5) \cdot (1,0) = 0,5$
$A_2 = (0,5) \cdot (1,5) = 0,75$
$A_3 = (0,5) \cdot (2,0) = 1$
$A_4 = (0,5) \cdot (2,5) = 1,25$

$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$
$A_T = 0,5 + 0,75 + 1 + 1,25$
$A_T = 3,5$

2) $A = b \cdot h$

$A_1 = (0,5) \cdot (1,5) = 0,75$
$A_2 = (0,5) \cdot (2,0) = 1$
$A_3 = (0,5) \cdot (2,5) = 1,25$
$A_4 = (0,5) \cdot (3,0) = 1,5$

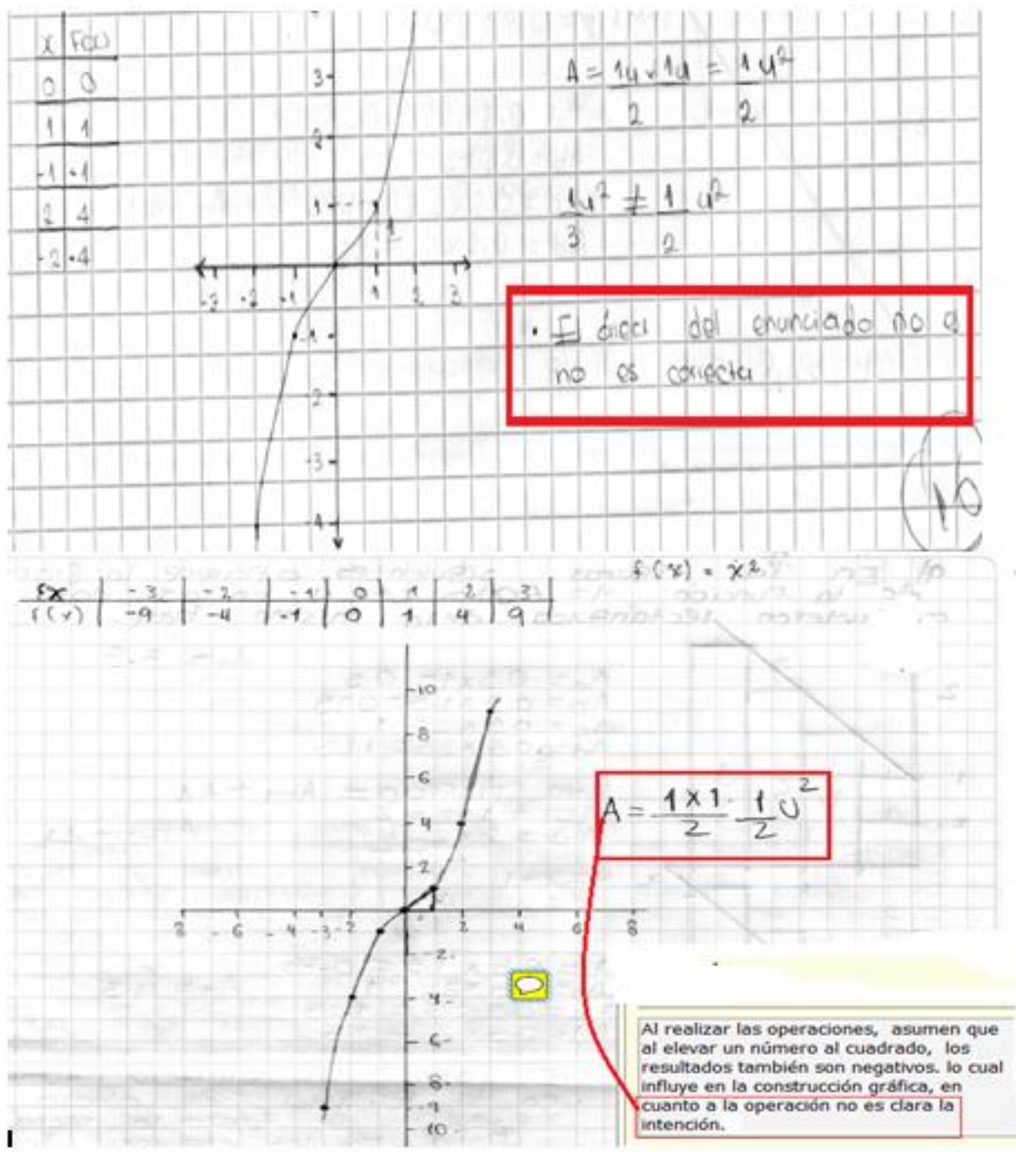
$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$
$A_T = 0,75 + 1 + 1,25 + 1,5$
$A_T = 4.5$

Determine el Área del Trapecio OABC ¿Qué Concluye?

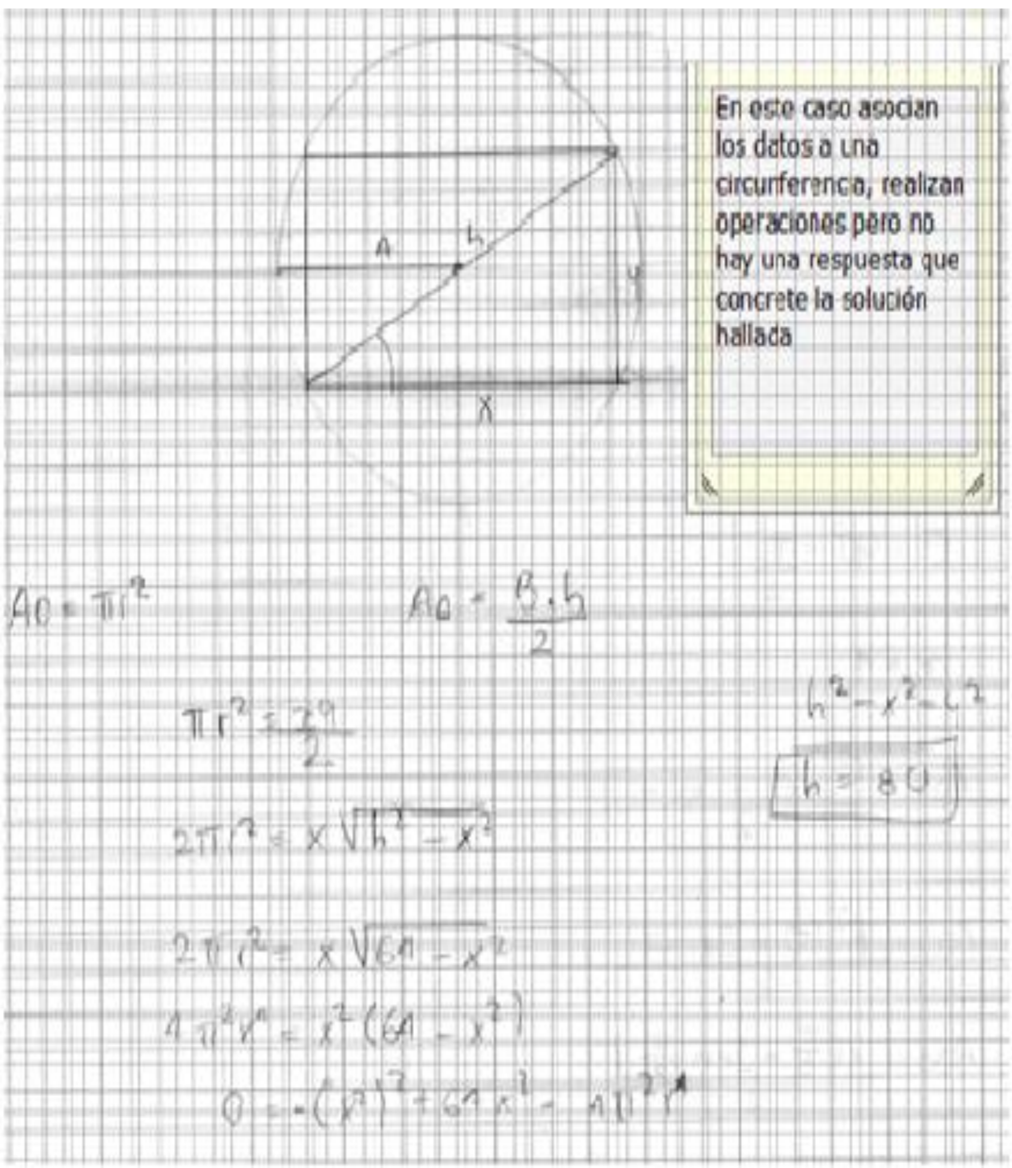
$B = 14$ cm
$b = 7$ cm
$h = 10$ cm

$$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(14\text{ cm} + 7\text{ cm}) \cdot (10\text{ cm})}{2} = \frac{210}{2} = \boxed{105\text{ cm}}$$

B.7. Representaciones incorrectas x^3 por x^2 (pregunta 9)



B.8. Representaciones incorrectas - circunferencia por región cuadrática



C. Anexo: Guía básica de Geogebra

Recurso TIC de formación en el aula de matemáticas

BLOQUE 1. AMBIENTACION.

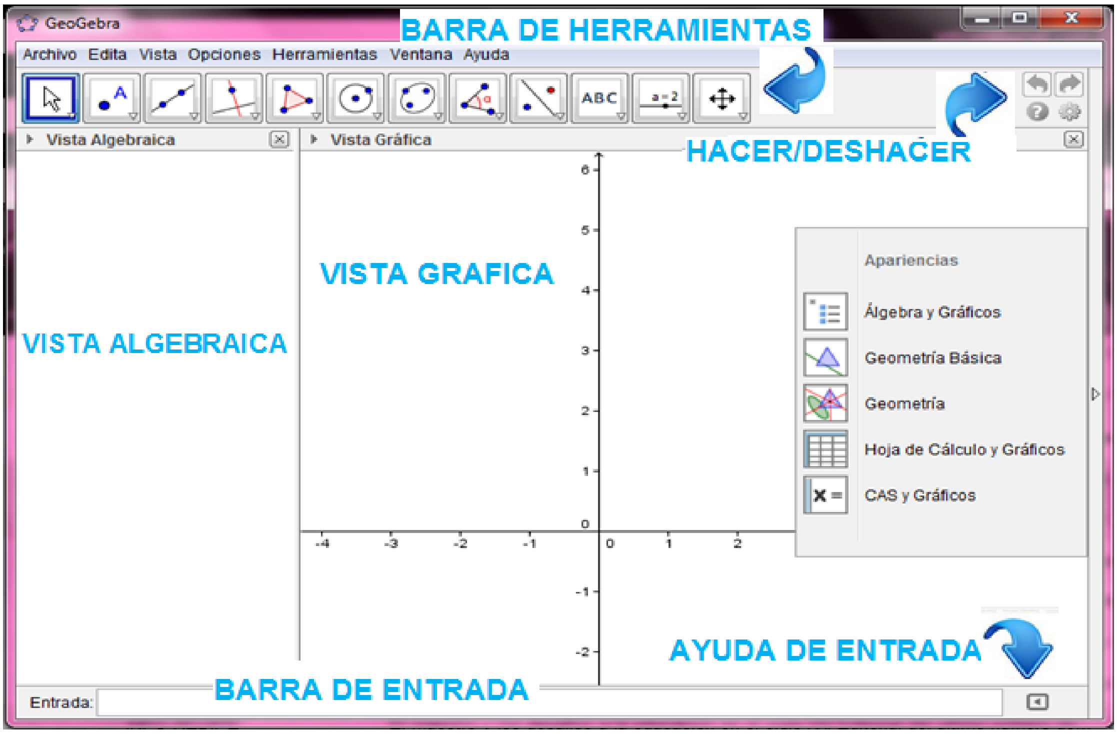
Algunas características y recursos de Geogebra.

- *GeoGebra es un programa de geometría dinámica con la ventaja de tener código abierto.* ***www.geogebra.org.***

- *Provee herramientas para que los profesores creen hojas de trabajo.* ***www.geogebratube.org,*** *disposición de manuales y tutoriales* ***wiki.geogebra.org,*** *foro de usuarios en* ***www.geogebra.org/forum****, una aplicación para Chrome App Google.* ***www.tinyurl.com/GeoGebra-ChromeApp.***
- *Es un paquete versátil para la enseñanza y aprendizaje en todos los niveles, une interactivamente geometría, algebra, tablas, gráficos, cálculo y estadística, facilitando a los estudiantes la creación de construcciones y modelos matemáticos.*

- *Remite desde el principio a la geometría de coordenadas con una ventana algebraica que mantiene a la vista los valores que toman las variables y las coordenadas de los puntos en cada momento, esto lo hace especialmente apto para el estudio de funciones ya que las relaciones entre gráfica y expresión algebraica aparecen más evidentes.*

- *Para el dibujo con regla y compás supone algunas pequeñas dificultades fácilmente resolubles si cambiamos un poco la forma de pensar y el tipo de razonamientos que utilizamos.*



VISTA INICIAL DE GEOGEBRA[37]

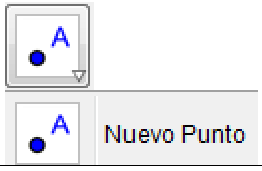
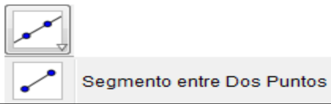
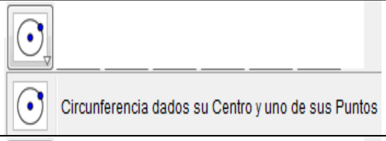
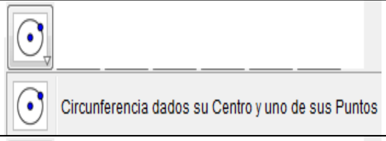
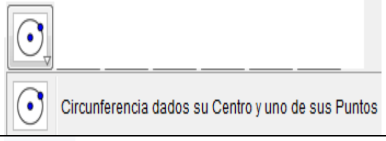
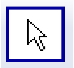
BLOQUE 2. GEOMETRÍA A TRAVÉS DE GEOGEBRA

Ejemplo 1: *Construir una rosa a partir de un segmento AB*

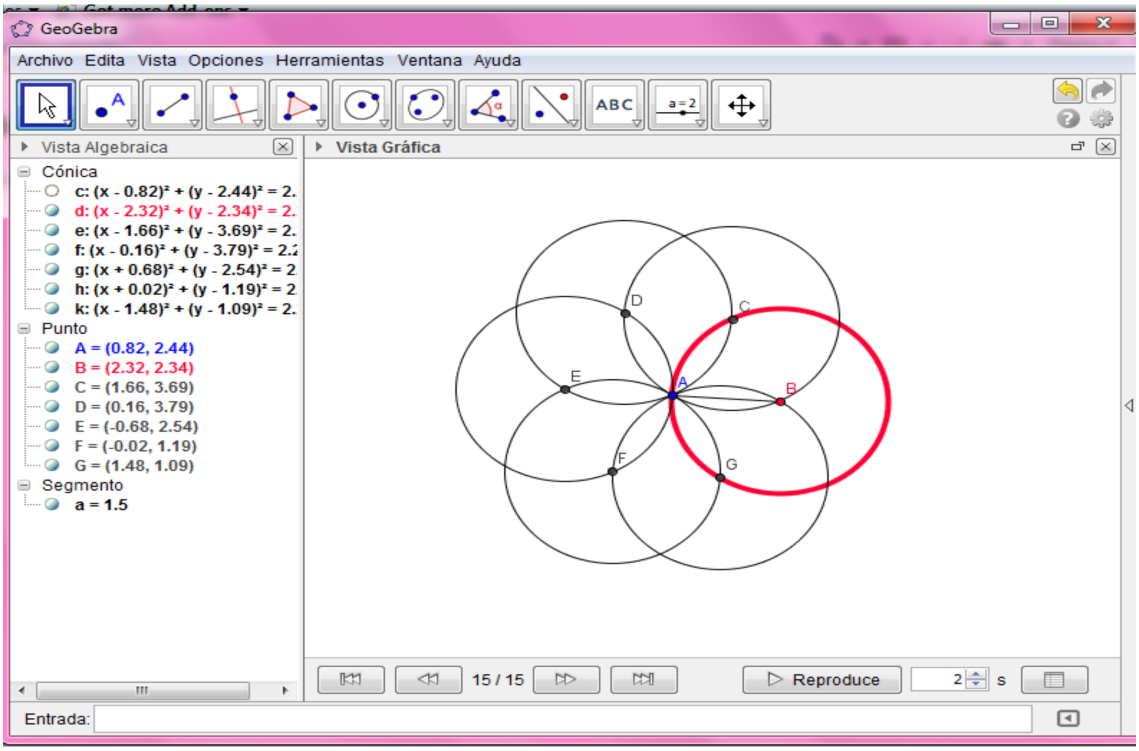
Preparación: *Ocultar los ejes dando Click derecho sobre la pantalla vista grafica*

Pasos de construcción

[37] Usando las herramientas en la respectiva barra, pueden hacerse construcciones en la vista gráfica con el mouse. Al mismo tiempo las coordenadas y ecuaciones correspondientes se mostraran en la vista algebraica. La barra de entrada es usada para entrar coordenadas, ecuaciones, comandos y funciones directamente, estas son mostradas de inmediato en la vista gráfica y en la vista algebraica antes de presionar la tecla enter, En GeoGebra geometría y algebra trabajan simultáneamente.

1		*Fijar los puntos A y B haciendo click sobre la herramienta nuevo punto*
2		*Trazar el segmento AB*
3		*Construir una circunferencia con centro en A y radio el segmento AB*
4		*Construir el primer pétalo, i.e. una segunda circunferencia cuyo centro es B y el radio es AB*
5		*Secuencialmente construir los otros petalos tomando como centro, la intersección de cada una de las circunferencias anteriores con la circunferencia inicial y extremo el punto A hasta formar la rosa.*
6		*Con la herramienta de movimiento, establecer los atributos arrastrando sobre los puntos A o B. (Observar el comportamiento de la vista algebraica)*

Resultado

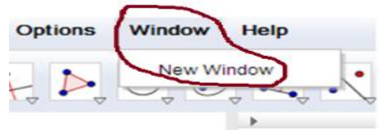


BLOQUE 3. ESTUDIO Y REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES.

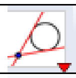
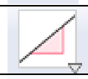
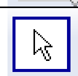
Ejemplo 1: *Crear la función f (x) = sin (x), su derivada y su tangente a un punto en f. Incluyendo su triángulo de pendiente.*

METODO 1. *Punto sobre la gráfica de la función*

Preparación: *Abrir una ventana nueva usando*

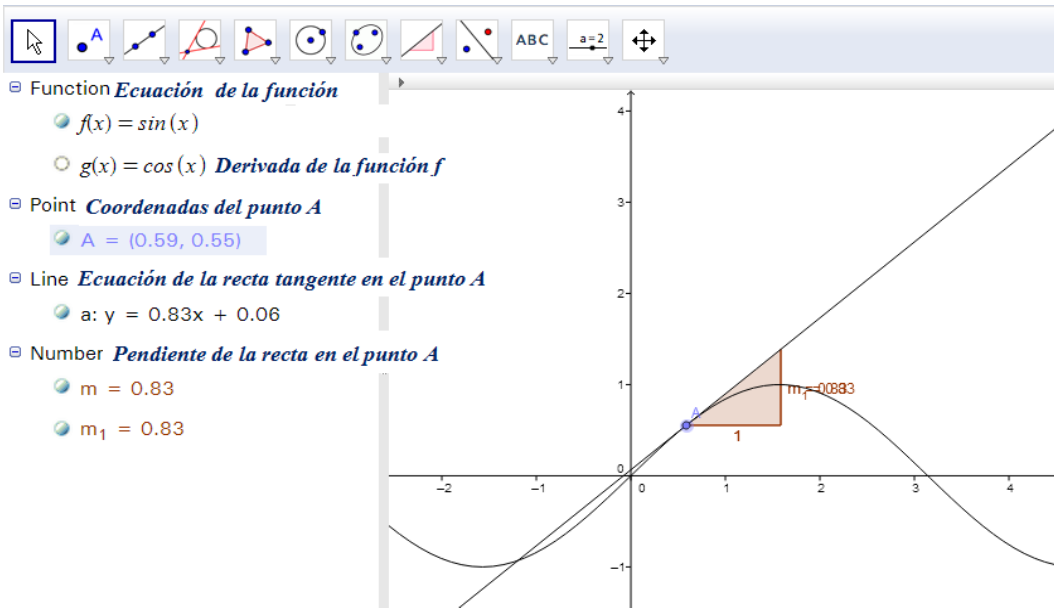


Pasos de construcción:

<table>
<tr><td>1</td><td></td><td>Introducir la función f(x)=sinx en la barra de entrada y presionar la tecla enter</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td>Elegir la herramienta nuevo punto y dar click sobre la gráfica de la función f, esta acción creará un punto unido a la función.</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td>Elegir la herramienta tangente, dar click sobre el punto A y la función f</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>Usar la herramienta de movimiento, arrastrar el punto A sobre la función f, observar el comportamiento de la recta tangente.</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>Elegir la herramienta pendiente (slope), dar click sobre el punto A.</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td>Nuevamente usar la herramienta de movimiento, arrastrar el punto A sobre la función f y observar el comportamiento del triángulo de la pendiente.</td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td>Introducir el comando Derivative [f(x)] en la barra de entrada y pulsar la tecla enter. Observar la vista algebraica.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Tips y aplicaciones:
Introducir una función diferente. Ejemplo f(x)= ln(x)

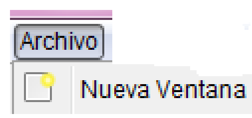
Ver aplicación en http://platea.pntic.mec.es/curso20/123_geogebra/2010/Luis_Javier_Vilda_Cabria/interferencias.html</td></tr>
</table>

Resultado

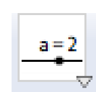


MÉTODO 2. *Punto con coordenada – x "a" (Esta es otra versión de la construcción anterior usando la barra de entrada.*

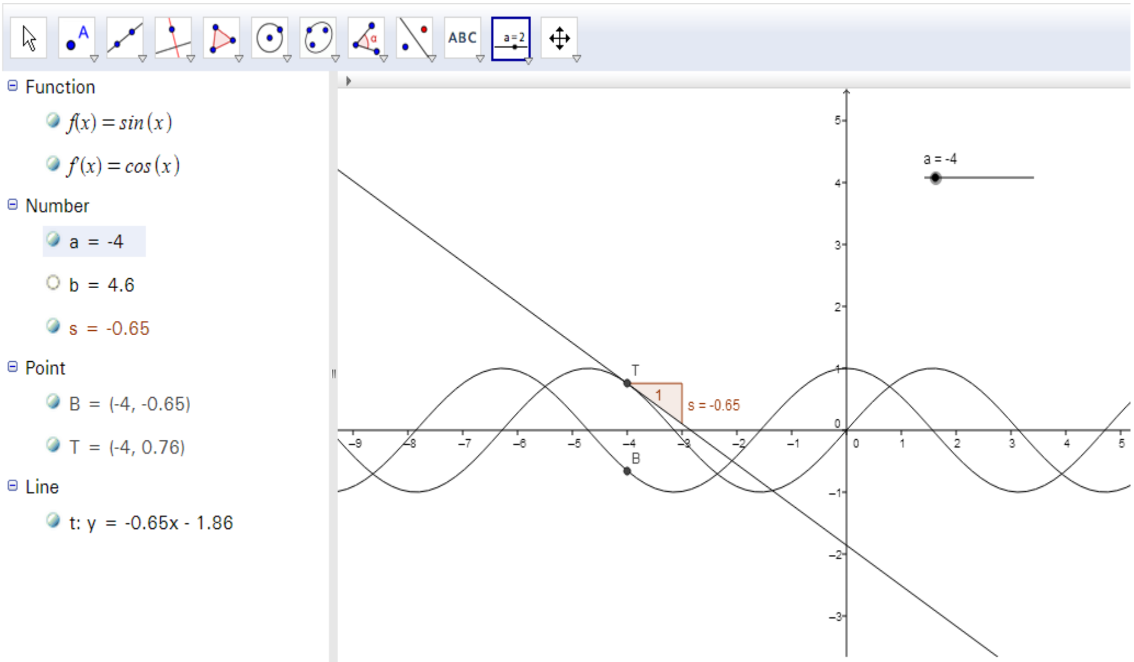
Preparación: *Abrir un nuevo archivo o nueva ventana.*



Pasos de construcción: *digitar los siguientes comandos en la barra de entrada y presionar "enter" después de cada línea*

<table>
<tr><td>1</td><td>f(x)=sin(x)</td><td rowspan="7">Tips y aplicaciones

✓ Para mover el número a puede crear un deslizador, determinando un intervalo para desplazarse a través de la gráfica de la función, arrastrando el mouse sobre el deslizador
✓ Al ocultar los botones azules de la pantalla algebraica, se ocultan las respectivas características.
✓ Esta función particularmente, puede aplicarse para estudiar los parámetros de las ondas sinusoidales</td></tr>
<tr><td>2</td><td>a=2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>T= (a,f(a))</td></tr>
<tr><td>4</td><td>t=Tangent [a,f]</td></tr>
<tr><td>5</td><td>s=Slope[t]</td></tr>
<tr><td>6</td><td>B=(x(T), s)</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Derivative[f]</td></tr>
</table>

Resultado

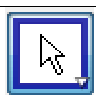
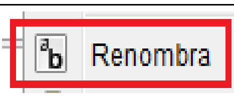
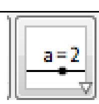


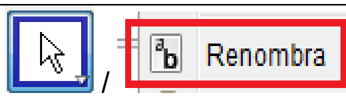
Ejemplo 2: *Suma de Riemman.* Calcular el valor de una integral definida, (área bajo la curva) de una función *f(x).*

Preparación: *Abrir una ventana nueva usando* 

. Para el ejemplo se tomara ***f(x)=ln(x)***

Pasos de construcción:

1		*Introducir la función* ***f(x)=ln(x)*** *en la barra de entrada y presionar la tecla enter*
2		*En la barra de entrada digitar* **sumainf** *y aparecerá por defecto el comando general para establecer la función, los extremos del intervalo y el número de rectángulos respectivamente.*
3	 / 	*Usar la herramienta de movimiento, arrastrar el objeto denominado* a = 3.52 *dar click derecho / Renombra / en la ventana que aparece dar nuevo nombre al objeto señalado, para el caso* Si = 3.52
4		*Crear un deslizador denominado n; min=1, max=50. Este determina el número de rectángulos.*

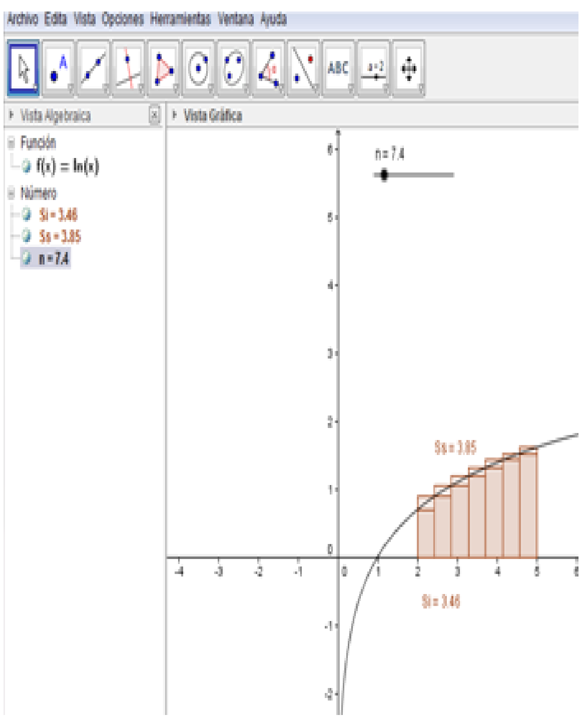
5	Definición: SumaInferior[f, 2, 5, n]	*Elegir* Si = 2.08 / *click derecho/propiedades del objeto* / *básico. Reestablecer el número de rectángulos como n.*
6	Entrada: **SumaSuperior[f(x), 2, 5, n]**	*En la barra de entrada digitar* **sumasup** *y aparecerá por defecto el comando general para establecer la función, los extremos del intervalo y el número de rectángulos respectivamente.*
7		*Usar la herramienta de movimiento, arrastrar el objeto denominado* a = 3.73 *dar click derecho / Renombra / en la ventana que aparece dar nuevo nombre al objeto señalado, para el caso* Ss = 3.73

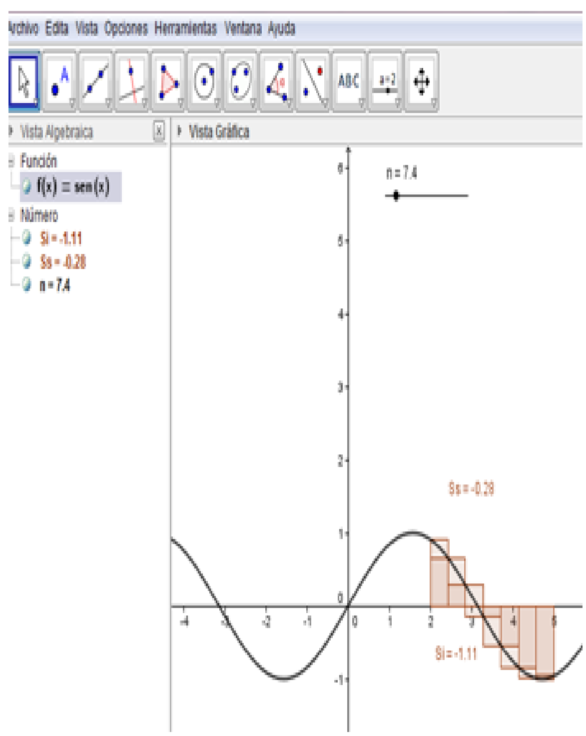
Tips y aplicaciones:

Introducir una función diferente. Dar click sobre los objetos Si = 3.52 y Ss = 3.73 *para cambiar el intervalo si es necesario.*

El método es muy útil cuando no es posible utilizar el Teorema fundamental del cálculo.

Resultados: izquierda $f(x) = lnx$, derecha $f(x) = sinx$

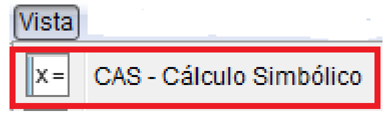




BLOQUE 4. CÁLCULO SIMBÓLICO CON GEOGEBRA.

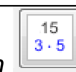
Ejemplo 1: Intersección de funciones polinómicas. *Intersecar una parábola con una función lineal mediante la determinación de las raíces de su diferencia.*

Preparación: *En la barra de herramientas seleccionar:*

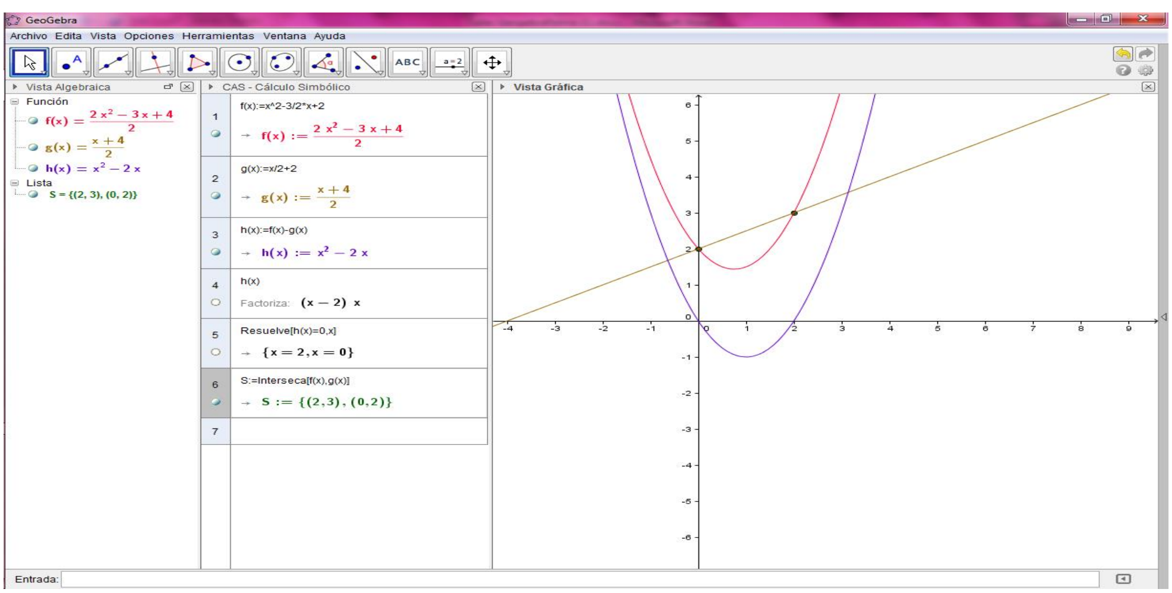


La vista CAS solo esta disponible para versiones Geogebra 4.2 en adelante

Pasos de construcción

1	*Entrar el comando f(x):=x^2-3/2*x+2 dentro de la primera fila, para definir f(x); evaluar presionando enter.*
2	*Entrar g(x):=x/2+2 in la segunda fila.*
3	*Definir h(x) como h(x):=f(x)-g(x) en la tercera fila.*
4	*Introducir h(x) en la cuarta fila y dar click sobre la herramienta de factorización*  *Las raíces se pueden leer de inmediato.*
5	*En la quinta fila, escribir Solve[h(x)=0,x] para confirmar la solución*
6	*En la sexta fila, crear los puntos de intersección digitando: S:=Intersect[f(x),g(x)].*

Resultados



Bibliografía

Acosta, R. (2012). Procedimientos geométricos para evaluar integrales definidas y sus implicaciones didácticas. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa*, *25.* México D. F. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/4166/1/AcostaProcedimientosALME2012.pdf

Apostol, T. (1973). *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al algebra lineal.* Barcelona: Reverte.

Arguedas, Y. C. (2010). Propuesta para la enseñanza del cálculo utilizando las TIC como recurso didáctico en el curso MA-1210. CostaRica. Obtenido de http://www.innovacesal.org/innovap ublic/archivos/publica/area02t ema01/62/archivos/P C CC B0

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisi elemental. ¿Que se puede aprender de las investigaciones y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Obtenido de http://www.redalyc.org/pdf/335/33510104.pdf

Attorps, I. B. (2001). The use of mathematics software in university mathematics. *Reporte de investigación presentado en el 7th Congress of the European Sosiety for Research in Mathematics Education Polonia.*

Brousseau, G. (1989). Les obstaclesépistémologiques et la didactique des mathématiques. . Montréal: CIRADE Les éditionsAgenceArc inc.

Brousseau, G. (1989). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. Obtenido de http://fractus.uson.mx/Papers/Brousseau/ObstaculosBrousseau.htm

Cano, E. (s.f.). Unidad didáctica para la enseñanza del concepto de integral definida en la educación media. Obtenido de http://www.bdigital.unal.edu.co/view/divisions/fac=5Fcie=5Fmed/2014.htmlsthash.tGQ32V

Carrillo, A. ((s.f.)). Uso del Geogebra en la enseñanza del cálculo artículos de septiembre. Obtenido de http://redesoei.ning.com/video/taller-estudio-y-representación-defunciones-con-geogebra Agustín

Carrillo, A. (s.f.). Geogebra como recurso para unas nuevas matemáticas. Obtenido de http://junior.info.pl/en/video/sND4Kwlutjs/AgustC3 %ADn- Carrillo-Geogebra-como-recurso-para-unas-nuevas-matemáticas Agustín Carrillo:

Carrillo, A. (s.f.). Uso del Geogebra en la enseñanza del cálculo. Obtenido de http://redesoei.ning.com/video/taller-estudio-y-representación-defunciones-con-geogebra Agustín

Castro, N. T. (2006). Obstáculos cognitivos asociados al aprendizaje de función real. (U. d. Salle, Ed.) *1*(2), 29-32.

Contreras, A. O. (2006). Complejidad ontosemiotica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Relime, 9*(1), 65-84.

Dieulefait, V. (2003). Medida de Jordan. *Miscelanea Matemática, 37*, 29-63. Recuperado el julio de 2015, de http://albertofest.matcuer.unam.mx/Misc37/Dieulefait.pdf

Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. El futuro del cálculo infinitesimal. En I. ICME-8 (Ed.). (págs. 155-181). Sevilla: Iberoamericana. Obtenido de http://datateca.unad.edu.co/contenidos/551109/Trabajocolaborativo/articuloscolaborativo/Articulos

Eves, H. (1990). *An Introduction to the History of Mathematics.* (Saunders Series).

Fernández, L. (2011). La história como herramienta didáctica: el concepto de integral. Recuperado el junio de 2014, de http://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/1642/Laura%20Fern%C3%A1ndez%20Fern%C3%A1ndez.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Frink, O. (Julio de 1933). Jordan Measure and Riemman Integration. *24*(3), 518-526. Recuperado el Septiembre de 2015, de http://www.jstor.org/stable/1968175

González, A. (2006). La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje. Obtenido de htpp://tesis.bbtk.ull.es/ccppytec/cp257.pdf

González, F. (febrero de 2006). Métodos numéricos aplicados a las ecuaciones diferenciales. Obtenido de http://fglongatt.org/OLD/Archivos/Archivos/SP_II/Capitulo2-4.pdf

González, U.P.M. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los nconmensurables. La teoría de la proporción y el método de exhaución. *Sigma*(33), 114. Obtenido de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-573/es/contenidos/información/dia6sigma/essigma/adjuntos/sigma33/solucioneudoxo33.pdf

Gutiérrez, S. (2006). El método: una carta reveladora de Arquímedes a Erastóstenes. (53), 69-73. Obtenido de http://revistasuma.es/IMG/pdf/53/069-073.pdf

Hernández, R. (30 de Agosto de 2007). Propuesta didáctica para identificar cuando la integral definida es aplicable para resover un problema. *Actualidades Investigativas en Educación, 7*, 1-120.

Hilbert, D. ((s.f.)). *Fundamentos de la geometría.* Obtenido de [13] Hilbert D.(s.f.). Fundamentos de la geo http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/elementseuclides2.pdf.

Hohenwarter, M. (s.f.). *Geogebra*. Obtenido de https://www.geogebra.org/

Hohenwarter, M. H. (2008). Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics Software Geogebra. *Reporte de investigación presentado en el 11sth International Congress on Mathematical Education (ICME11).* Monterrey. Obtenido de http://www.geogebra.org/publications/2008-ICME-TSG16- Calculus-GeoGebra-Paper.pdf

Hormigón, M. (20 de Marzo de 1992). Las matemáticas en el siglo XIX. Ediciones AKAL. Obtenido de https://books.google.com.co/books?id=T0nWDXsnteMC&pg=PA13&lpg=PA13&dq=historia+de+los+problemas+de+valor+inicial&source=bl&ots=3hZuZ766g7&sig=VLTdM4Snz3IxPfVh9luY9Bbq-UE&hl=es&sa=X&authuser=1&redir_esc=y#v=onepage&q=historia%20de%20los%20problemas%20de%20

Integral Definida. Su aplicación en el cálculo de áreas de regiones planas. (s.f.). Recuperado el noviembre de 2014, de http://www.fca.unl.edu.ar/Intdef/Historia1.htm#XVII

Ivorra, C. ((s.f.)). Funciones sin primitiva elemental. Recuperado el septiembre de 2015, de https://www.uv.es/ivorra/Libros/Primitivas.pdf

Khan, S. (s.f.). *KhanAcademy*. Obtenido de https://es.khanacademy.org/math/integral-calculus

Klein, F. ((s.f.)). *Matemática elemental desde un punto de vista superior.* Obtenido de http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/elementseuclides2.pdf.

Larson, R. (s.f.). *Cálculo con geometría analítica.* (octava ed., Vol. 1). McGraw Hill Interamericana.

LLC, W. A. (s.f.). Obtenido de http://www.wolframalpha.com/

Mehanovic, S. (s.f.). Learning based on dynamic software Geogebra. (L. University, Ed.) Obtenido de https://isis.ku.dk/kurser/blob.aspx %feltid=229084

Moise, E. (1964). *Geometría Moderna.* Addison Wesley.

Ortega, J. (Julio de 2011). Análisis IV. Obtenido de http://www.maia.ub.es/cag/docencia/anali-IV.pdf

Patil, D. (Noviembre de 2006). Riemann Integration. Recuperado el Septiembre de 2015, de http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF02834475#/page-1

Pérez, L. (1992). Trabajos presentados en el CEP de Málaga. Obtenido de http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Biografias/11-1-b-galileo.html.

Petros, T. (20 de Noviembre de 2005). *Tio Petros*. Obtenido de Tio Petros: http://tiopetrus.blogia.com/2005/112001-la-funcion-de-dirichlet.php

Petrus, T. (11 de Noviembre de 2005). De la Esperanza a la Integral de Lebesgue. Obtenido de http://tiopetrus.blogia.com/2005/111101-de-la-esperanza-a-la-integral-de-lebesgue.php

Porter, F. ((s.f.)). Measure Theory. Recuperado el julio de 2015, de http://www.hep.caltech.edu/~fcp/math/measureTheory/measureTheory.pdf

Sánchez, F. ((s.f.)). Funciones Riemann integrables. *Cálculo II*. (U. d. Extremadura, Ed.) Recuperado el Agosto de 2015, de http://matematicas.unex.es/~fsanchez/calculoII/02.pdf.

Sánchez, F. (20 de febrero de 2015). Cálculo II. Funciones Riemann Integrables. (D. d. Extremadura, Ed.) Extremadura. Obtenido de http://matematicas.unex.es/~fsanchez/calculoII/02.pdf

Shilov, G. (Noviembre de 2004). ¿Qué es una función? Obtenido de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_25/14_una_funcion.pdf

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la educacion secundaria. .

Stewart, J. (s.f.). *Cálculo diferencial e integral* (sexta ed.).

Tio Petros. (s.f.). Recuperado el octubre de 2015, de http://tiopetrus.blogia.com/2005/112001-la-funcion-de-dirichlet.php

Turegano, P. (1997). El aprendizaje del concepto de integral. *Suma, 26*, 39-52. Obtenido de http://revistasuma.es/IMG/pdf/26/039-052.pdf

Turegano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo de las ciencias. (D. d.-L. Mancha, Ed.) *2*(16), 233-249. Obtenido de http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/21531/21365

Turegano, P. (2007). Imágenes del concepto de Integral definida, Ensayos. *22*, 17-57. Obtenido de http://Dialnet- ImagenesDelConceptoDeIntegralDefinida-2591546 %20(2).pdf

Vega, L. (1991). *Elementos Euclides. Libros I-IV.* Recuperado el 2015, de http://www.ict.edu.mx/acervo_ciencias_mate_Euclides%201%20Elementos-I-IV%20-.pdf

Vera, G. (27 de Octubre de 2008). Lecciones de Análisi Matemático II. Obtenido de http://ocw.um.es/ciencias/analisis-matematico-ii/material-de-clase-1/am-ii.pdf