



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

**Problema Límite con Frontera
para Aislamiento Magnético
en un Diodo al Vacío**

Dairo Rocha Castellanos

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2016

Problema Límite con Frontera para Aislamiento Magnético en un Diodo al Vacío¹

Dairo Rocha Castellanos²

Trabajo de investigación presentado para optar al título de:
MAGISTER EN CIENCIAS – MATEMÁTICA APLICADA

Director:
Ph.D. Alexander Sinitsyn³
Codirector:
Ph.D. Juan Galvis⁴

Línea de investigación:
Modelación matemática
Grupo de investigación:
Análisis de ecuaciones diferenciales en modelos de aislamiento magnético

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2016

¹Realizado en L^AT_EX 2_ε

²drochac@unal.edu.co

³asinitsyne@unal.edu.co

⁴jcgalvisa@unal.edu.co

Nota de Aceptación:

Trabajo de investigación
Aprobado

Director: Alexander Sinitsyn

Codirector: Juan Galvis

Jurado: Juan Hernández

Jurado: Félix Soriano

Bogotá, Abril de 2016

*A mis incondicionales padres Anita y Marcelo
y a la memoria de mi querido abuelo Antonio.*

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis queridos padres Anita Castellanos y Marcelo Rocha quienes me han brindado todo su apoyo y confianza a lo largo de los años, han sorteado las dificultades y siempre han manteniendo esa alegría y optimismo en cada momento, en especial a mi querida madre, el pilar de la familia.

A mi querido abuelo Antonio Rocha al que extraño cada día, pero que se ha convertido en el ángel de la guarda en todo momento y lugar.

Al profesor Alexander Sinitsyn por su apoyo constante y sus asesorías académicas.

Finalmente debo agradecer a los profesores Juan Galvis, Juan Hernández y Félix Soriano, cuyos comentarios y observaciones han ayudado con la presentación del documento.

Resumen

En este trabajo se estudia el modelo límite de aislamiento magnético para un diodo plano al vacío propuesto por N. Ben Abdallah, P. Degond y F. Méhats en *Mathematical models of magnetic insulation*, Physics of Plasma, Vol. 5, 1998, pp. 1522–1534. El modelo está conformado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias Vlasov–Maxwell no lineales, de segundo orden y con una singularidad en el origen

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = j_x \frac{1 + \varphi(x)}{\sqrt{[1 + \varphi(x)]^2 - 1 - [a(x)]^2}}, \quad \frac{d^2a(x)}{dx^2} = j_x \frac{a(x)}{\sqrt{[1 + \varphi(x)]^2 - 1 - [a(x)]^2}},$$

sujeto a las condiciones de frontera

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = \varphi_L, \quad \varphi'(0) = \beta, \quad a(0) = 0, \quad a(1) = a_L, \quad a'(0) = \alpha,$$

donde x es la posición, a es el potencial magnético, φ es el potencial eléctrico, j_x es la corriente independiente de x y α , β , a_L , φ_L son parámetros. Un diodo plano al vacío compuesto por un cátodo emisor de electrones y un ánodo receptor produce aislamiento magnético. El voltaje aplicado entre los filamentos perfectamente conductores del diodo atrae los electrones desde el cátodo hacia el ánodo generando una corriente eléctrica, que a su vez produce un campo magnético en el plano perpendicular a la trayectoria del haz. La intensidad del campo magnético es lo suficientemente fuerte como para obligar a los electrones a regresar al cátodo. Mediante un cambio de variable apropiado, se define el potencial efectivo del diodo como

$$\theta(x) \equiv [1 + \varphi(x)]^2 - 1 - [a(x)]^2$$

y se utiliza una aproximación por serie de Taylor hasta segundo orden para determinar θ como una función explícita de x . El aislamiento magnético ocurre cuando este potencial es negativo. En esta investigación se construye un método semi–analítico para proveer las condiciones necesarias de un diodo magneto–aislante. Se utiliza una aproximación numérica para fijar el potencial efectivo y calcular los potenciales eléctrico y magnético transitorios, así como los parámetros en la frontera. Algunos valores numéricos particulares son considerados. Se contempla el método de Green para el caso particular de valores nulos en la frontera asociados al potencial magnético. Algunas aplicaciones sobre aislamiento magnético son mencionadas.

Palabras clave: aislamiento magnético, caso límite, diodo plano al vacío, serie de Taylor, sistema Vlasov–Maxwell, potencial efectivo, potenciales transitorios, parámetros de frontera, método semi–analítico, aproximación numérica.

Abstract

In this document the limit model of magnetic insulation for a vacuum plane diode is studied. This model was proposed by N. Ben Abdallah, P. Degond and F. Méhats in *Mathematical models of magnetic insulation*, Physics of Plasma, Vol. 5, 1998, pp. 1522–1534. The model consists of a system of Vlasov–Maxwell nonlinear second order ordinary differential equations with a singularity at the origin

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = j_x \frac{1 + \varphi(x)}{\sqrt{[1 + \varphi(x)]^2 - 1 - [a(x)]^2}}, \quad \frac{d^2a(x)}{dx^2} = j_x \frac{a(x)}{\sqrt{[1 + \varphi(x)]^2 - 1 - [a(x)]^2}},$$

subject to the boundary conditions

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = \varphi_L, \quad \varphi'(0) = \beta, \quad a(0) = 0, \quad a(1) = a_L, \quad a'(0) = \alpha,$$

where x is the position, a is the magnetic potential, φ is the electric potential, j_x is the x -independent current and α , β , a_L , φ_L are parameters. A vacuum plane diode composed by a cathode electron emitter and a receiver anode produces magnetic insulation. The applied voltage between the perfectly conductive filaments of diode attracts electrons from the cathode to the anode generating an electrical current, which in turn produces a magnetic field in the plane perpendicular to the beam path. Intensity of magnetic field is strong enough to force electrons to turn back to the cathode. By appropriate changing of variable, the effective potential of diode is defined as

$$\theta(x) \equiv [1 + \varphi(x)]^2 - 1 - [a(x)]^2$$

and a second order Taylor series approach is used to determine θ as an explicit function of x . Magnetic insulation occurs when this potential is negative. A semi-analytical method that provides conditions for a magnetic-insulated diode is built. A numerical approximation is used to set the effective potential and calculate the electric and magnetic transient potentials and parameters at the border. Some particular numerical values are considered. Green's method for particular case of boundary null values associated to magnetic potential is contemplated. Some applications of magnetic insulation are mentioned.

Keywords: Magnetic insulation, limit case, vacuum plane diode, Taylor series, Vlasov–Maxwell system, effective potential, transient potentials, boundary parameters, semi-analytical method, numerical approximation.

Índice general

Índice general	xv
Índice de figuras	xvii
Índice de cuadros	xix
Introducción	xxiii
1. El Caso Límite	1
1.1. Reducción del Sistema	2
1.2. Aproximación por Serie de Taylor	4
1.2.1. Requerimientos Propios del Potencial Efectivo	6
1.2.2. Condiciones de Frontera	8
1.2.3. Condición para Aislamiento Magnético	12
1.3. Ilustración de Algunos Casos Particulares	36
1.4. Resumen del Capítulo	46
2. Potencial Efectivo Constante	49
2.1. Desarrollo de la Primera Derivada	50
2.1.1. Caso Particular $\alpha = 0$	51
2.1.2. Caso Particular $\theta = \theta^\dagger$	52
2.1.3. Resultados Numéricos	54
2.2. Funciones de Green	57
2.2.1. Potencial Magnético como Función de Green	57
2.3. Aplicaciones	61
2.4. Resumen del Capítulo	62
Conclusiones	65
Bibliografía	69

Índice de figuras

1.	Esquema del diodo plano al vacío.	XXIV
1.1.	Funciones z_i vs θ_L dadas por (1.36).	9
1.2.	Gráfica de \tilde{Z}_L vs θ_L dada por (1.53).	14
1.3.	Polinomios Q vs K_2 dados por (1.50).	16
1.4.	Curvas ζ vs K dadas por (1.55).	17
1.5.	Ecuaciones σ_i vs θ_L dadas por (1.56).	18
1.6.	Curvas K_{\pm} vs θ_L proporcionadas por la ecuación (1.58).	19
1.7.	Curvas $K_{1\pm}^{\pm}$ vs θ_L proporcionadas por la ecuación (1.60).	20
1.8.	Curvas Q^{\pm} vs K_2 asociadas a los Cuadros 1.3–1.4.	22
1.9.	Curvas q_0 vs K_1 dadas desde (1.51).	23
1.10.	Curvas $K_{1\pm}^{(q_0)}$ vs θ_L dadas desde (1.62).	24
1.11.	Curvas q_1 vs K_1 dadas desde (1.51).	25
1.12.	Curvas $K_{1\pm}^{(q_1)}$ vs θ_L dadas desde (1.65).	26
1.13.	Curvas q_2 vs K_1 dadas desde (1.51).	27
1.14.	Curva $K_1^{(q_2)}$ vs θ_L dada desde (1.66).	28
1.15.	Curvas m_L y b_L dadas por la función $q_2 = m_L K_1 + b_L$ descrita en (1.51).	29
1.16.	Curva q_3 vs θ_L dada por (1.51).	30
1.17.	Parábolas Z vs K_1 dadas por (1.35).	31
1.18.	Curva Z^* vs θ_L dada por (1.68).	34
1.19.	Forma general de la curva Q vs K_2 dada por (1.50).	35
1.20.	Gráfico $K_{1+}^{(q_0)}$ vs θ_L dado por (1.62).	36
1.21.	Gráfico Z_{\max} vs θ_L dado por (1.71).	37
1.22.	Gráfico θ vs x dado por (1.27) para $\theta_L = 1/9$, $K_1 = -18$ y $K_{2(\text{med})} = 1.351101035$	39
1.23.	Gráfico θ' vs θ dado por (1.37) para $\theta_L = 1/9$, $K_1 = -18$ y $K_{2(\text{med})} = 1.351101035$	40
1.24.	Gráfico θ vs x dado por (1.27) para $\theta_L = 1/9$, $K_1 = -18$ y $K_{2(\text{der})} = 2.1248134946$	42
1.25.	Gráfico θ' vs θ dado por (1.37) para $\theta_L = 1/9$, $K_1 = -18$ y $K_{2(\text{der})} = 2.1248134946$	43
2.1.	Gráfica de θ^{\dagger} vs x^{\dagger} con el potencial efectivo dado por (2.26) y las constantes tabuladas en el Cuadro 1.8 para $j_x = 1.5$	55
2.2.	Gráfica de k_0 vs x^{\dagger} dada por (2.27) para el arreglo descrito en la Figura 2.1.	56
2.3.	Gráficas de los potenciales ψ^{\dagger} , φ^{\dagger} y a^{\dagger} vs x^{\dagger} dadas respectivamente por (2.28), (2.29) y (2.30).	57
2.4.	Gráficas de α^{\dagger} , a_L^{\dagger} , $\frac{a_L^{\dagger}}{\alpha^{\dagger}} = \frac{\sinh k_0}{k_0}$, ψ_L^{\dagger} y φ_L^{\dagger} vs x^{\dagger} dadas respectivamente por (2.31), (2.32), (2.33) y (2.34).	58

Índice de cuadros

1.1.	Valores arbitrarios para θ_L y $K_1 = 0$ con los cuales se calculan los \tilde{q}_i desde (1.51), \tilde{Z}_L desde (1.53) y K_2 desde (1.50).	15
1.2.	Valores arbitrarios para θ_L y $K_1 = K_2 = K$ con los cuales se calculan los σ_i desde (1.56), K_{\min} y ζ_{\min} desde (1.57) y K_{\pm} desde (1.58).	18
1.3.	Valores arbitrarios para $1/3 < \theta_L \leq 5/3$ con los cuales se calculan los coeficientes q_i^-	21
1.4.	Valores arbitrarios para $1/3 < \theta_L \leq 5/3$ con los cuales se calculan los coeficientes q_i^+	21
1.5.	Cálculo de los z_i dados por (1.35) y q_3 dada por (1.51).	30
1.6.	Cálculo de los posibles valores K_1 utilizando las fórmulas (1.62)–(1.67).	32
1.7.	Resultados para cuatro valores $\theta_L > 0$ utilizando los K_1 obtenidos en el Cuadro 1.6 y los z_i tabulados en el Cuadro 1.5.	33
1.8.	Resultados numéricos para $\theta_L = 1/9$, $K_1 = -18$ y $K_{2(\text{med})} = 1.351101035$ variando la corriente j_x	38
1.9.	Resultados numéricos para $\theta_L = 1/9$, $K_1 = -18$ y $K_{2(\text{der})} = 2.1248134946$ variando la corriente j_x	41
1.10.	Cortes horizontales dados por la fórmula (1.72).	44
1.11.	Asíntotas dadas por la fórmula (1.73).	44
1.12.	Intervalos espaciales donde se produce el aislamiento magnético asociados a $K_{2(\text{med})} = 1.351101035$ y $K_{2(\text{der})} = 2.1248134946$	45
2.1.	Resultados numéricos para los potenciales transitorios y sus parámetros asociados a $j_x = 1.5$, $\theta_L = 1/9$, $\beta = 0.8926393786$, $K_1 = -18$, $K_2 = K_{2(\text{der})} = 2.124813494$	54

Lista de Símbolos y Abreviaturas

Símbolos organizados por orden de aparición:

x	— Distancia recorrida por los electrones
\mathbb{E}	— Campo eléctrico
\mathbb{B}	— Campo magnético
j_x	— Densidad de corriente independiente de x
φ	— Potencial eléctrico
a	— Potencial magnético
φ_L	— Tensión externa aplicada
a_L	— Campo magnético externo
β	— Condición de frontera $\varphi'(0)$
α	— Condición de frontera $a'(0)$
x^*	— Punto de retorno (partícula en trampa)
θ	— Potencial efectivo
θ_L	— Condición de frontera $\theta(1)$ —parámetro de referencia—
$f \approx \theta'$	— Función de aproximación para la serie de Taylor
$f_L^{(\eta)}$	— Derivada η -ésima de f evaluada en $\theta = \theta_L$
$f_0^{(\eta)}$	— Derivada η -ésima de f evaluada en $\theta = 0$
ε	— Constante de integración que aparece al resolver $\theta'(x) \approx f(\theta)$
R_L	— Denominador que aparece al resolver x en función de θ mediante serie de Taylor
$K_{1,2}$	— Constantes escaladas definidas como $k_{1,2}/j_x$
Z	— Polinomio de segundo grado en K_1 que aparece al considerar $\arg\{R_L\} > 0$
$z_{0,1,2}$	— Coeficientes dependientes de θ_L asociados al polinomio Z
Ω	— Cantidad que aparece al considerar la condición de frontera $\theta(1) \approx \theta_L$
Q	— Polinomio de tercer grado en K_2 que aparece al considerar la condición de frontera $\theta'(0) \approx 2\beta$
$q_{0,1,2,3}$	— Coeficientes asociados al polinomio Q que dependen de θ_L y K_1
\tilde{Z}_L	— Polinomio Z evaluado en θ_L y $K_1 = 0$
\tilde{Q}	— Polinomio Q evaluado en $K_1 = 0$
$\tilde{q}_{0,1,2,3}$	— Coeficientes asociados al polinomio \tilde{Q} dependientes de θ_L
ζ	— Polinomio de segundo grado en K obtenido al considerar $K_1 = K_2 = K > 0$ en la función Z

$\sigma_{0,1,2}$	—	Coefficientes dependientes de θ_L asociados al polinomio ζ
K_{\min}	—	Valor que toma K cuando la curva ζ alcanza su punto más bajo
ζ_{\min}	—	Valor que toma ζ cuando se evalúa en $K = K_{\min}$
K_{\pm}	—	Valores de K que establecen el intervalo para el cual la función ζ es negativa
K_1^{\pm}	—	Valores que toma K_1 en función de θ_L tales que el polinomio Z puede escribirse como un producto de monomios en K_1
Z^{\pm}	—	Polinomio Z dependiente de θ_L y evaluado en $K_1 = K_1^{\pm}$
K_2^{\pm}	—	Valores que toma K_2 cuando se considera $K_1 = K_1^{\pm}$
Q^{\pm}	—	Polinomio Q evaluado en K_1^{\pm} y K_2^{\pm}
$q_{0,1,2,3}^{\pm}$	—	Coefficientes asociados al polinomio Q^{\pm}
$K_1^{(q_{0,1,2,3})}$	—	Dominio de valores K_1 especificados para cada curva $q_{0,1,2,3}$
$K_{1\pm}^{(q_0)}$	—	Valores de K_1 para los cuales la curva q_0 alcanza su mínimo ($q_0 = 0$)
$\overline{K}_1^{(q_0)}$	—	Valor que toma K_1 cuando la curva q_0 alcanza su máximo relativo
$K_{1\pm}^{(q_1)}$	—	Valores de K_1 que producen el mínimo relativo (–) y el máximo relativo (+) en la curva q_1
m_L	—	Pendiente de la recta q_2 en función de θ_L
b_L	—	Punto de corte de la recta q_2 con el eje vertical dependiente de θ_L
K_1^*	—	Valor de K_1 que indica el vértice de la curva Z
Z^*	—	Cantidad en función de θ_L que determina los vértices de la curva Z
$K_{(\text{izq,med,der})}$	—	Raíces K_2 que satisfacen numéricamente el polinomio $Q \approx 0$
Z_{\max}	—	Valor máximo que puede tomar la función Z cuando se fija θ_L
x_c	—	Valores de x para los cuales $\theta = 0$ (cortes)
x_a	—	Valores de x para los cuales $\theta \rightarrow \pm\infty$ (asíntotas)
θ^\dagger	—	Potencial efectivo transitorio
k_0	—	Factor de separación
x^\dagger	—	Parámetro de control espacial
\overline{x}_i^\dagger	—	Punto interior del i -ésimo intervalo magneto–aislante
θ_i^\dagger	—	Potencial efectivo transitorio i -ésimo calculado como $ \theta(\overline{x}_i^\dagger) $
$G(x, \xi)$	—	Función de Green con intervalos $0 \leq x \leq \xi$ y $\xi \leq x \leq 1$, $\xi \in [0, 1]$
$L[*]$	—	Operador Sturm–Liouville
$W(a_1, a_2)$	—	Determinante Wronskiano para las funciones a_1 y a_2

Abreviaturas:

i.e.	—	Esto es
VM	—	Vlasov–Maxwell
EDO	—	Ecuación diferencial ordinaria

Introducción

El estudio de los dispositivos que operan con energías muy elevadas está asociado con fenómenos poco comunes y comportamientos no lineales de las ecuaciones que los gobiernan. En el campo de la electrodinámica, cuando los electrones están en movimiento se genera una corriente eléctrica que a su vez produce un campo magnético en un plano perpendicular al desplazamiento de las partículas. Cuando la corriente es elevada el campo magnético producido es lo suficientemente intenso como para alterar la trayectoria de los electrones e incluso puede llegar a interrumpirla por completo.

Los diodos al vacío fueron algunos de los primeros dispositivos empleados para conducir corriente eléctrica. Si bien en la década de los años treinta del siglo pasado Lagmuir y Compton ya habían llevado a cabo estudios sobre la conducción en diodos, sólo hasta la década de los sesenta se registraron los primeros documentos sobre aislamiento magnético provocado por corrientes muy grandes. Se denomina aislamiento magnético al fenómeno que modifica el transporte de electrones impidiendo su curso normal. A mediados de la década de los noventa, un grupo de investigación de la universidad de Toulouse reavivó la discusión sobre aislamiento magnético planteando la formulación moderna del problema. De este grupo ha hecho parte hasta la fecha el profesor Alexander Sinytsin, director del presente trabajo de investigación.

En este documento se estudia el fenómeno de aislamiento magnético que ocurre al interior de un diodo plano al vacío cuando la corriente que se desplaza a lo largo del eje X , produce un campo magnético en el plano YZ (perpendicular al desplazamiento de los electrones) desviando el haz a tal punto que si la corriente es muy elevada, los electrones no alcanzan el ánodo (véase Figura 1).

En los últimos años, distintos autores han obtenido un considerable número de resultados teóricos exitosos [2][19]. Pese a ello la simulación numérica del problema de aislamiento magnético produjo dificultades importantes y a la fecha, siguen sin resolverse¹. En este trabajo se emplean algunos métodos numéricos y analíticos como herramienta de apoyo para una mejor comprensión del fenómeno de aislamiento magnético y se describe el comportamiento de los parámetros y sus rangos de valores asociados al diodo plano al vacío.

¹Distintos autores han utilizado con éxito métodos numéricos tipo Newton mediante la aproximación de diferencias del Jacobiano y la aproximación de Stephens, construyendo el denominado método de auto-aceleración con tasa sub-cuadrática de convergencia [8].

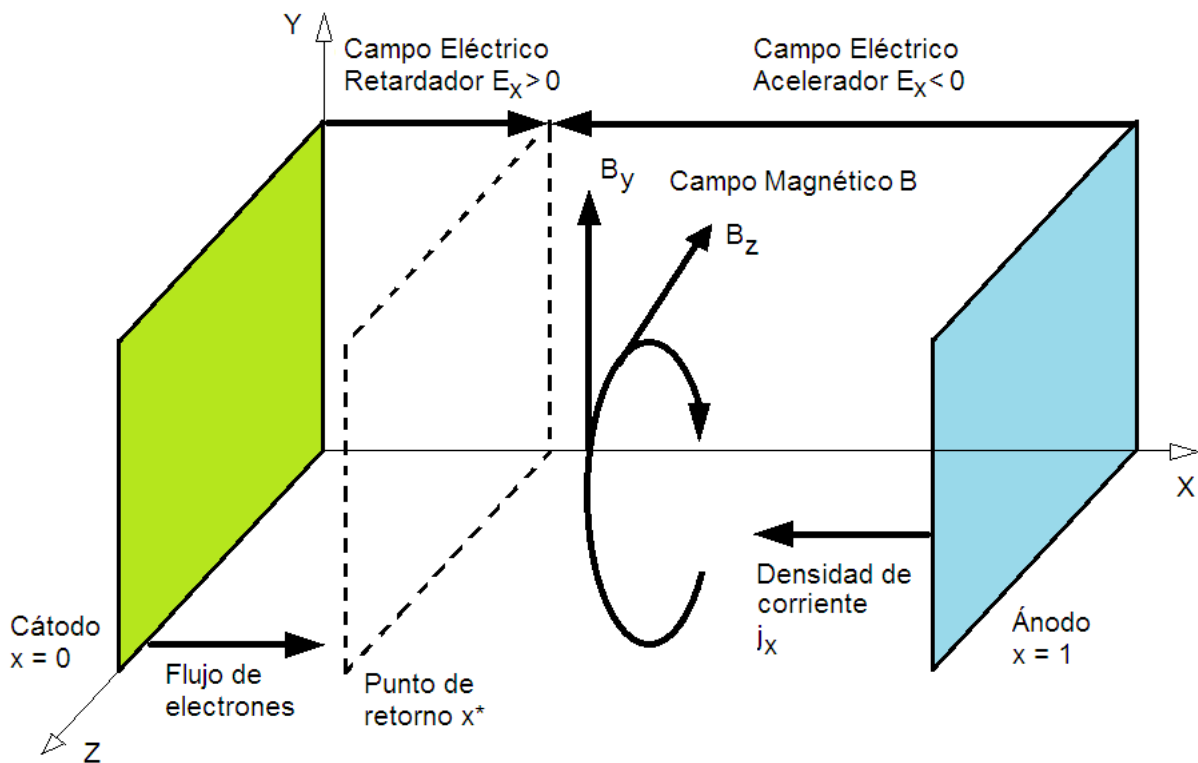


Figura 1: Esquema del diodo plano al vacío. Los electrones que emergen del cátodo sólo alcanzan el ánodo cuando j_x es pequeño y el campo electromagnético ejerce poca influencia. Pero si j_x es muy grande, los electrones no logran alcanzar el ánodo, el campo electromagnético es fuerte y el radio de curvatura disminuye hasta obligarlos a volver al cátodo en algún punto de retorno x^* .

La descripción cualitativa que se hace en este documento se centra en el estudio semi-analítico del fenómeno de aislamiento magnético en el denominado caso límite. Se discuten algunas de sus características físicas y se hace una breve mención acerca de las aplicaciones en física e ingeniería que se llevan a cabo en la actualidad.

Descripción del Sistema

El diodo plano al vacío está compuesto por un filamento incandescente el cual calienta un electrodo llamado *cátodo* y por efecto termo-iónico emite electrones cuando alcanza una determinada temperatura. Estos electrones son conducidos por un potencial positivo hacia otro electrodo llamado *ánodo* el cual se encuentra localizado a una distancia $L = 1$ (véase Figura 1). El flujo libre de electrones (i.e. sin colisiones con otras partículas) se garantiza cuando el sistema se encuentra en un recipiente al vacío² [2].

Si en el cátodo se controla la emisión de electrones tal que ésta se mantenga baja, la distribución de potencial en el espacio de separación cátodo-ánodo se puede representar por una línea recta

²En algunos casos el filamento incandescente actúa como filamento y cátodo simultáneamente.

que une los puntos correspondientes al potencial del cátodo y el potencial del ánodo. El voltaje que se aplica entre ambos electrodos genera una intensidad de campo eléctrico E dirigido desde el ánodo hacia el cátodo.

Los electrones emitidos por el cátodo tienen una velocidad de escape mayor o igual que cero y son atraídos por el potencial positivo del ánodo, lo que produce una corriente eléctrica dirigida en sentido positivo ánodo–cátodo. La región donde ocurre este proceso se denomina región de emisión limitada³. Si se incrementa el voltaje aplicado al filamento, la temperatura también aumenta y en consecuencia la emisión de electrones es mayor.

Si los electrones emitidos desde el cátodo tienen velocidad nula, cerca del mismo ocurre un incremento en la cantidad de partículas produciendo una nube de electrones denominada carga espacial en el espacio inter–electródico⁴. Esta carga altera la distribución de potencial y produce un potencial negativo cerca del cátodo, en donde se presenta su máxima densidad. Este potencial negativo obliga a los electrones con bajas velocidades a regresar al cátodo.

Cuando Langmuir y Compton examinaron los fenómenos no lineales que ocurrían en los diodos al vacío de alta energía, establecieron una formulación explícita para la corriente de saturación en los diodos planos y aproximaciones en los diodos cilíndricos y esféricos [13]. Child y Langmuir encontraron que cuando hay una elevada emisión de electrones desde el cátodo, cerca del mismo se forma un campo eléctrico retardador en dirección opuesta al campo acelerador (Figura 1). El campo retardador sólo puede ser superado si la energía cinética de los electrones emitidos desde el cátodo es mayor que la energía potencial producida por el voltaje. Si la velocidad de emisión no es lo suficientemente grande, los electrones no pueden vencer la barrera de potencial y en consecuencia son obligados a detenerse y retornar al cátodo.

Cuando se forma carga espacial en el diodo plano al vacío tal que la corriente máxima se limita a un valor que depende del voltaje aplicado y la distancia de separación interelectródica, este régimen se denomina Child–Langmuir. La región donde actúa el campo retardador no sólo contiene los electrones en tránsito hacia el ánodo, sino también aquellos que han sido devueltos al cátodo.

Si el voltaje constante aplicado al filamento es tal que se alcanza el equilibrio dinámico, la cantidad de electrones que alcanzan el ánodo y la cantidad que regresa al cátodo es igual a la cantidad de electrones emitidos por el cátodo. En consecuencia, puede darse o que la corriente en el ánodo es menor que la emitida o que el cátodo produce más electrones de los que llegan al ánodo [8]. Si los electrones inmersos en la región de carga espacial logran superar el campo retardador, éstos irán hacia el ánodo formando una corriente normal de densidad j_x .

Las cargas eléctricas en movimiento producen corriente la cual a su vez genera campos magnéticos en el plano perpendicular al movimiento de las cargas. Como el sentido de estos campos está determinado por la regla de la mano derecha, si la corriente viaja en sentido negativo del eje X , el campo producido está en el plano YZ y las componentes generadas son B_Y y B_Z (Figura 1).

³Si no hay emisión en el cátodo, el diodo se comporta como un capacitor de placas planas paralelas al cual se le aplica una diferencia de potencial [19].

⁴En esta región de carga espacial ocurre el fenómeno de plasma.

Cuando una carga con velocidad no nula ingresa a una región bajo el efecto de un campo magnético perpendicular a su trayectoria, esa carga experimenta la conocida fuerza de Lorentz que modifica su trayectoria con una tendencia circular. Si la densidad de corriente incrementa, el campo es más intenso y el cambio de trayectoria es más pronunciado, lo que produce una disminución en el radio de curvatura. En consecuencia, a corrientes elevadas el electrón es desviado y no alcanza el ánodo (aislamiento magnético).

También puede ocurrir que la corriente continúe incrementándose de tal modo que supere el valor para el cual hay aislamiento magnético. En este caso, el radio de curvatura es cada vez más pequeño y el electrón puede regresar a su trayectoria original. Si el ánodo y el cátodo invierten polaridades, los electrones son repelidos y la corriente inversa es casi nula debido a la cola positiva de la distribución Maxwelliana de electrones [2].

El enfoque propuesto por Langmuir y Compton ya ha sido desarrollado en los trabajos de Greengard, Raviart [10], Degond, Raviart [6][7], Abdallah, Degond, Méhats [4], entre otros. Este enfoque consiste en estudiar el problema de auto-consistencia en estado estacionario de aislamiento magnético Vlasov–Maxwell (VM) en el límite particular de carga con comportamiento asintótico, analizando en detalle la capa de carga espacial en un diodo plano al vacío. Al introducir un pequeño parámetro positivo y un conjunto de variables adimensionales apropiadas en el sistema (escalamiento), el problema se transforma en uno que es singularmente perturbado.

El problema que se estudia en este trabajo es el denominado *caso límite*, el cual aparece cuando dicho parámetro tiende a cero; por supuesto las leyes de conservación en el sistema VM se satisfacen. El efecto de aislamiento magnético aparece bajo la influencia de un campo magnético fuerte aplicado externamente, pues los electrones emitidos desde el cátodo no alcanzan el ánodo y son desviados de nuevo hacia el cátodo. Aquí la capa electrónica implica un campo electromagnético nulo, lo cual puede darse de dos modos básicos: en el primer modo encontramos que cuando el campo magnético es fuerte, los electrones no logran alcanzar el ánodo y son desviados de regreso al cátodo ya que la componente de la densidad de corriente es cero⁵. Para el segundo modo, en cambio, si el campo magnético no es lo suficientemente fuerte como para producir aislamiento en el diodo plano al vacío, entonces la componente de la densidad de corriente no se anula y el modelo puede ser visto como una aproximación a las ecuaciones de Maxwell.

Planteamiento Matemático

El fenómeno del aislamiento magnético se analiza en el marco de la física de plasmas y se describe bajo tres enfoques: la aproximación como partículas sencillas, la teoría cinética y la descripción de fluidos. En este trabajo se ha tomado como referencia la descripción de la teoría cinética fundamentada en las ecuaciones de Klimontovich y Liouville [18]. Con estas ecuaciones se suelen estudiar las propiedades del plasma a nivel microscópico proporcionando detalles con alto grado de aproximación. Sin embargo, cuando el nivel de detalle es muy elevado, se obtiene demasiada información que para efectos prácticos resulta poco útil.

⁵En este caso el modelo da una descripción completa del proceso físico que gobierna el diodo plano al vacío.

En este sentido, la teoría cinética propone tres alternativas: la ecuación de Klimontovich para el nivel de detalle más alto, las ecuaciones de Vlasov–Boltzmann para un nivel de detalle intermedio y el análisis de fluidos macroscópicos de partículas cargadas para un nivel de detalle bajo.

Si bien la ecuación de Klimontovich junto con las de Maxwell proporcionan un análisis exacto de un sistema de plasma, sus soluciones son tan específicas que pierden utilidad, pues indican los puntos del espacio físico donde está localizada una partícula. Por supuesto, es mucho más útil obtener el valor promedio de la distribución de partículas. Es aquí donde emerge la ecuación de Vlasov la cual fue planteada como una aproximación más práctica que la de Klimontovich ya que trabaja con la función de distribución y aplica para sistemas de plasma compuestos por partículas con cargas y masas puntuales sin efectos colisionales (o cuando menos imperceptibles).

Precisamente, el diodo plano al vacío que se estudia en este documento posee estas características y en consecuencia, el problema de investigación abordado en este trabajo es un tema que se deriva de estudiar la ecuación de la teoría cinética de Vlasov a un nivel de detalle intermedio [2]. La ecuación de Vlasov es escrita como

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{a} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

donde $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$ representa la función de distribución del sistema, \mathbf{x} es la posición, \mathbf{v} es la velocidad y $\mathbf{a} = \mathbf{f}/m$ es la aceleración debida a la fuerza \mathbf{f} de Lorenz. Para el caso del diodo plano al vacío la función de distribución es invariante en el tiempo y en consecuencia $\partial F/\partial t = 0$. De este modo la ecuación de Vlasov se reduce a

$$\mathbf{v} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

con \mathbf{E} el campo eléctrico y \mathbf{B} el campo magnético. El sistema que se estudia está compuesto por partículas con carga q y masa puntual m que pueden alcanzar velocidades comparables con la de la luz c , por lo tanto es necesario considerar la siguiente ecuación relativista que relaciona masa y energía

$$\varepsilon(\mathbf{P}) = mc^2(\gamma - 1),$$

donde \mathbf{P} es el momento de la partícula, ε denota la energía cinética relativista y $\gamma = \sqrt{1 + \frac{|\mathbf{P}|^2}{m^2 c^2}}$ es el factor relativista de Lorentz. El diodo plano al vacío está compuesto por dos electrodos perfectamente conductores que son el cátodo ($X = 0$) y el ánodo ($X = 1$), aquí supuestos como planos infinitos y paralelos al plano YZ (Figura 1).

Se dice que un diodo plano al vacío está en conducción cuando la polarización produce un movimiento de electrones desde el cátodo hacia el ánodo. Estos electrones son sometidos a un campo electromagnético externo aplicado el cual no tiene influencia sobre la componente Z del momento de la partícula. En consecuencia, esta componente se toma como nula y se produce un confinamiento de electrones al plano XY (i.e., $Z = 0$). Estos campos se escriben como

$$\mathbf{E}_{\text{ext}} = E_{\text{ext}}\mathbf{X}, \quad \mathbf{B}_{\text{ext}} = B_{\text{ext}}\mathbf{Z},$$

tales que $E_{\text{ext}} \leq 0$ y $B_{\text{ext}} \geq 0$. El flujo de partículas considerado aquí para el diodo plano al vacío es estacionario y sin colisiones. Además, la función de distribución es independiente de las componentes en Y de las posiciones de las partículas del sistema. Esto sugiere que el sistema se puede representar como la distribución media de electrones en el espacio.

El modelo 1.5-dimensional de Vlasov–Maxwell que describe este sistema está conformado respectivamente por la ecuación de Vlasov no colisional, la ley de Poisson y la ley de Ampere

$$\begin{aligned} V_X \frac{\partial F}{\partial X} + e \left(\frac{d\Phi}{dX} - V_Y \frac{dA}{dX} \right) \frac{\partial F}{\partial P_X} + e V_X \frac{dA}{dX} \frac{\partial F}{\partial P_Y} &= 0 && \text{(Vlasov)}, \\ \frac{d^2 \Phi}{dX^2} &= \frac{e}{\epsilon_0} N(X), && X \in (0, L) && \text{(Poisson)}, \\ \frac{d^2 A}{dX^2} &= -\mu_0 J_Y(X), && X \in (0, L) && \text{(Ampere)}, \end{aligned}$$

con Φ el potencial electrostático, A el potencial magnético, V la velocidad, P el momento, e la carga, ϵ la permitividad, μ la permeabilidad, N la densidad de partículas y J la densidad de corriente. Las condiciones de frontera tanto para la función de distribución como para los potenciales en el ánodo y el cátodo son

$$\begin{aligned} F(0, P_X, P_Y) &= G(P_X, P_Y), && P_X > 0, \\ F(L, P_X, P_Y) &= 0, && P_X < 0, \\ \Phi(0) &= 0, && \Phi(L) = \Phi_L = -LE_{\text{ext}}, \\ A(0) &= 0, && A(L) = A_L = LB_{\text{ext}}. \end{aligned}$$

Si se evalúan las condiciones de frontera en el ánodo para los potenciales en el sistema de Maxwell, tanto N como J_Y se anulan ya que los campos eléctricos y magnéticos son idénticos a los externos, los cuales a su vez son constantes.

Por la mecánica relativista se sabe que la masa de una partícula libre se relaciona con su momento y energía mediante la ecuación

$$\mathbf{V}(\mathbf{P}) = \frac{\mathbf{P}}{\gamma m} = \nabla_P \varepsilon(\mathbf{P}).$$

Las cantidades macroscópicas del sistema VM que definen la densidad de partículas y las dos componentes de la densidad de corriente son respectivamente

$$\begin{aligned} N(X) &= \int_{R^2} F(X, P_X, P_Y) dP_X dP_Y, \\ J_X(X) &= -e \int_{R^2} V_X(\mathbf{P}) F(X, P_X, P_Y) dP_X dP_Y, \\ J_Y(X) &= -e \int_{R^2} V_Y(\mathbf{P}) F(X, P_X, P_Y) dP_X dP_Y. \end{aligned}$$

La ecuación VM establece dos regímenes principales para el modelo de diodo plano al vacío descrito aquí. El primero ocurre cuando se aplica un campo magnético fuerte impidiendo que los

electrones alcancen el ánodo y obligándolos a retroceder al cátodo ($J_X = 0$); éste régimen exige aplicar el sistema VM con todo rigor. El segundo régimen ocurre al aplicar un campo magnético el cual no es lo suficientemente fuerte como para hacer retroceder los electrones al cátodo ($J_X \neq 0$) y permite que el modelo VM pueda aproximarse a las ecuaciones de Maxwell tradicionales.

La deducción rigurosa del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales que se estudian en este trabajo (caso límite) se puede consultar en [4] y se resume como sigue: primero se plantea una definición de los momentos asociados con la función de distribución de la partícula en la frontera del cátodo. Luego, para las partículas entrantes se define la densidad de partículas, la densidad de corriente y la densidad de energía cinética. En seguida se hace un cambio de variables por otras adimensionales para cada magnitud considerada y finalmente se ajusta el régimen Child–Langmuir para ejercer control sobre el sistema.

El sistema límite se deduce luego de tener en cuenta que sobre cada trayectoria del electrón (en el espacio de fase) la energía y el momento canónico son constantes (invariantes). En este límite los electrones son inyectados con velocidad nula puesto que la energía y el momento desaparecen. En consecuencia

$$\begin{aligned} p_y(x) &= a(x), \\ p_x(x) &= [1 + \varphi(x)]^2 - 1 - [a(x)]^2. \end{aligned}$$

A partir de aquí se define el potencial efectivo como la relación

$$\theta(x) = [1 + \varphi(x)]^2 - 1 - [a(x)]^2,$$

de tal modo que si el potencial θ es positivo en la cercanía del cátodo, los electrones ingresan al diodo plano al vacío. Siempre será cierto que $\theta'(0) \geq 0$. El valor de θ en el ánodo es

$$\theta_L = (1 + \varphi_L)^2 - 1 - a_L^2.$$

Si $\theta < 0$ los electrones no logran alcanzar el ánodo y son devueltos al cátodo por la acción del campo magnético. Aquí se dice que el diodo se encuentra magnéticamente aislado. En cambio, si $\theta > 0$ todos los electrones alcanzan el ánodo y el diodo se encuentra libre de aislamiento.

Tomando en cuenta estas consideraciones (entre otras), al combinarlas con las ecuaciones de Poisson y Ampere se obtiene el sistema límite que examinamos en este documento

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= j_x \frac{1+\varphi(x)}{\sqrt{[1+\varphi(x)]^2-1-[a(x)]^2}}, & \varphi(0) &= 0, & \varphi(1) &= \varphi_L, \\ a''(x) &= j_x \frac{a(x)}{\sqrt{[1+\varphi(x)]^2-1-[a(x)]^2}}, & a(0) &= 0, & a(1) &= a_L, \end{aligned}$$

en el cual las incógnitas son los potenciales eléctrico φ y magnético a (ambos adimensionales), así como la corriente j_x la cual es independiente de x . Para un examen más detallado acerca de la existencia de soluciones semitriviales y soluciones completas del problema se puede consultar las referencias [2][4][8].

Plan de Trabajo

El caso límite originalmente fue formulado como un problema compuesto por un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen un sistema VM estacionario relativista. Estas ecuaciones dependen de tres parámetros internos: la densidad de corriente j_x y los potenciales eléctrico φ y magnético a cercanos al cátodo. Tanto la corriente como los potenciales son inicialmente desconocidos y requieren condiciones de frontera apropiadas que permitan su determinación. La dependencia del modelo con los parámetros definidos desde las condiciones de frontera, implican la existencia de una función no lineal que gobierna el sistema.

En el Capítulo 1 se efectúa una reducción del sistema de ecuaciones introduciendo el cambio de variable denominado *potencial efectivo*. La ecuación diferencial que resulta de este proceso se resuelve utilizando aproximaciones por series de Taylor hasta segundo orden para encontrar una función explícita $\theta = \theta(x)$. En seguida se discuten los requerimientos propios de esta función y luego se aplican las condiciones de frontera del problema.

Posteriormente se considera la condición para aislamiento magnético $\theta < 0$ y se hace un análisis por casos para determinar el comportamiento del potencial efectivo; se examina en detalle cada una de las variables. Los gráficos y los cuadros son los elementos más importantes en este desarrollo ya que ayudan a caracterizar cada uno de los parámetros involucrados.

Este capítulo concluye con la selección de algunos valores numéricos para obtener resultados particulares que satisfacen cada etapa del proceso. Se hace un breve resumen del método semi-analítico construido y se establecen las condiciones necesarias para que el fenómeno de aislamiento magnético ocurra en el diodo plano al vacío.

En el Capítulo 2 se construye otro método semi-analítico el cual consiste en fijar el potencial efectivo y resolver el sistema de ecuaciones diferenciales original asemejándolas a EDOs de segundo orden con soluciones transitorias. Con este procedimiento se pueden obtener los potenciales eléctrico y magnético (los cuales no son resueltos en el Capítulo 1) para un θ fijo, considerando algunos de los valores numéricos particulares obtenidos en el capítulo previo.

En seguida se continúa con una discusión del método de Green el cual es empleado para encontrar el potencial magnético en el caso particular cuando las condiciones de frontera originales son nulas tanto en el cátodo como en el ánodo. Este capítulo concluye haciendo una breve mención sobre algunas de las aplicaciones más conocidas sobre aislamiento magnético en la actualidad.

Capítulo 1

El Caso Límite

El caso límite se plantea como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con una singularidad en el punto $x = 0$, en el sentido que la segunda derivada es discontinua en el punto de partida de los electrones, mientras que el sistema alrededor del límite es gobernado por EDOs no lineales [2][4][8]. Nuestra tarea preliminar consiste en encontrar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales VM en el caso límite el cual describe el régimen del diodo plano al vacío no aislado y viene dado por

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = j_x \frac{1 + \varphi(x)}{\sqrt{[1 + \varphi(x)]^2 - 1 - [a(x)]^2}}, \quad (1.1)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}a(x) = j_x \frac{a(x)}{\sqrt{[1 + \varphi(x)]^2 - 1 - [a(x)]^2}}, \quad (1.2)$$

donde φ es el potencial electrostático precisado por la diferencia de voltaje que se aplica entre el cátodo $x = 0$ y el ánodo $x = 1$, a es el potencial magnético y j_x es la densidad de corriente no-nula e independiente de x (véase Figura 1). Tanto la corriente como los potenciales son inicialmente desconocidos y requieren condiciones de frontera apropiadas que permitan su determinación. El sistema (1.1)–(1.2) se encuentra sujeto a las siguientes condiciones de frontera en $x = [0, 1]$

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0, & \varphi(1) &= \varphi_L, & \varphi'(0) &= \beta, \\ a(0) &= 0, & a(1) &= a_L, & a'(0) &= \alpha. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Resulta de particular interés encontrar una simplificación al problema resolviéndolo a través de parámetros fijados en las condiciones de frontera, con lo cual el comportamiento de sus soluciones se ajustan (en buena medida) al modelo físico. Los valores de los parámetros encontrados se pueden emplear como una aproximación inicial apropiada para el sistema completo.

Para evitar algún conflicto con el sentido físico del problema, se considerarán únicamente las soluciones no negativas del sistema (1.1)–(1.2), esto es, $\varphi \geq 0$ y $a \geq 0$ sobre el intervalo de determinación $[0, 1]$ ¹. El campo magnético externo a_L y la tensión aplicada en el diodo φ_L guardan estrecha relación con los parámetros α y β , respectivamente, y por supuesto con la corriente j_x .

¹El sistema (1.1)–(1.2) fue estudiado en [4] considerando $\alpha \neq 0$ y $\beta = 0$ para $x = 0$ (régimen Child–Langmuir);

1.1. Reducción del Sistema

A continuación introducimos un cambio de variable apropiado el cual nos permitirá combinar las ecuaciones (1.1)–(1.2) junto con las condiciones (1.3) y reducirlo a una sola ecuación diferencial con sus propias condiciones. En seguida resolvemos esa ecuación diferencial mediante aproximaciones de Taylor hasta segundo orden y finalmente realizamos un cuidadoso análisis para establecer los criterios necesarios para que ocurra el fenómeno de aislamiento magnético en el diodo plano al vacío.

Dado que el valor del argumento en la raíz de (1.1)–(1.2) tiene un importante significado físico y en adelante seguirá siendo utilizado, introducimos la definición del *potencial efectivo* del diodo

$$\theta(x) \equiv [1 + \varphi(x)]^2 - 1 - [a(x)]^2, \quad (1.4)$$

cuyos valores de frontera asociados son

$$\theta(0) = 0, \quad \theta(1) = [1 + \varphi_L]^2 - 1 - a_L^2 \equiv \theta_L, \quad \theta'(0) = 2\beta \geq 0. \quad (1.5)$$

De la última condición en (1.5) se deduce que la constante β es estrictamente positiva o a lo sumo nula. Si $\theta'(0) > 0$ los electrones no pueden ser emitidos desde el cátodo siempre que éste no se encuentre conectado al potencial $\theta > 0$ que alimenta al diodo. En cambio, cuando $\theta < 0$ los electrones radiados no pueden alcanzar el ánodo pues el campo electromagnético los refleja de vuelta al cátodo. Esto se conoce como *aislamiento magnético*. En el caso particular $\theta'(0) = 0$, se obtiene el denominado régimen Child–Langmuir, el cual ocurre si y sólo si $\beta = 0$.

Debemos tener en cuenta que cuando se consideran las condiciones de frontera (1.5) la ecuación diferencial es no negativa². Nuestro principal objetivo consiste en estudiar los fenómenos que ocurren en un diodo plano al vacío compuesto por dos placas ideales cuyo flujo de electrones es descrito por el sistema no–lineal (1.1)–(1.2) y está sujeto a las condiciones de frontera (1.3).

Si utilizamos el cambio de variable (1.4) en las ecuaciones (1.1) y (1.2), éstas se convierten respectivamente en

$$\frac{\varphi''}{1 + \varphi} = j_x \theta^{-1/2} \quad (1.6)$$

y

$$\frac{a''}{a} = j_x \theta^{-1/2}. \quad (1.7)$$

fue resuelto empleando los valores iniciales de Cauchy y luego se hicieron los ajustes pertinentes para satisfacer todas las condiciones de frontera (1.3). En este trabajo estudiamos numéricamente el caso numérico general con $\beta \neq 0$.

²De hecho, θ puede anularse en algunos puntos del diodo dando lugar a caminos cerrados o partículas en trampa. Al final de este capítulo haremos una breve discusión numérica sobre este importante aspecto.

Derivando el potencial (1.4) respecto a x tenemos

$$\frac{1}{2}\theta' = (1 + \varphi)\varphi' - aa', \quad (1.8)$$

y al derivar una vez más obtenemos que

$$\frac{1}{2}\theta'' = (1 + \varphi)\varphi'' - aa'' + (\varphi')^2 - (a')^2. \quad (1.9)$$

Ahora usamos las ecuaciones (1.6) y (1.7) para escribir (1.9) como

$$\frac{1}{2}\theta'' = (\varphi')^2 - (a')^2 + j_x\theta^{-1/2}[(1 + \varphi)^2 - a^2], \quad (1.10)$$

pero note que el paréntesis en el último término a la derecha de (1.10) corresponde según (1.4) justamente a $\theta + 1$. De esta manera

$$\frac{1}{2}\theta'' = j_x[\theta^{1/2} + \theta^{-1/2}] + (\varphi')^2 - (a')^2. \quad (1.11)$$

Para dejar (1.11) únicamente en términos de la variable θ , primero debemos transformar la diferencia $(\varphi')^2 - (a')^2$ despejando $1 + \varphi$ desde (1.6) y despejando a en (1.7); en seguida las combinamos con la primera derivada de θ previamente calculada en (1.8). Esto nos da

$$j_x\theta^{-1/2}\theta' = 2\varphi'\varphi'' - 2a'a''.$$

Nótese que esta ecuación puede reescribirse como la derivada³

$$[2j_x\theta^{1/2}]' = [(\varphi')^2 - (a')^2]', \quad (1.12)$$

de tal modo que al derivar (1.11) y combinarla con el resultado (1.12) obtenemos una ecuación diferencial no lineal de tercer orden en θ , que es

$$\theta''' = 2j_x(3\theta^{1/2} + \theta^{-1/2})'. \quad (1.13)$$

Integramos (1.13) para reducir el grado de diferenciación

$$\theta'' - 2j_x(3\theta^{1/2} + \theta^{-1/2}) = k_1, \quad (1.14)$$

donde k_1 es una constante de integración que debemos determinar. Para reducir un grado más, se multiplica (1.14) por $2\theta'$ e integramos nuevamente

$$(\theta')^2 = 8j_x\theta^{1/2}(\theta + 1) + 2k_1\theta + k_2, \quad (1.15)$$

³Usando el hecho que para una función diferenciable $y(x)$ se satisface $(y^l)' = ly^{l-1}y'$, con l real.

donde k_2 es otra constante de integración la cual podemos establecer de inmediato notando que al evaluar (1.15) en $x = 0$ junto con las condiciones de frontera (1.5) nos conduce hasta

$$k_2 = 4\beta^2 \geq 0. \quad (1.16)$$

Finalmente, desde (1.15) despejamos θ' y resolvemos esta EDO separando las variables e integrando

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\theta \left[4j_x \tilde{\theta}^{1/2} (\tilde{\theta} + 1) + k_1 \tilde{\theta} + 2\beta^2 \right]^{-1/2} d\tilde{\theta} = \int_0^x d\tilde{x} = x. \quad (1.17)$$

La integral a la izquierda en (1.17) no es una integral que se pueda resolver por algún método estándar dado que no es posible encontrar una antiderivada para el integrando. En el mejor de los casos, la solución analítica más apropiada quedaría en términos de integrales elípticas de primera y segunda especie⁴ [1].

Es evidente que la principal dificultad para resolver la integral en (1.17) se debe a la raíz en el integrando y por supuesto, para poder calcularla numéricamente se requiere un programa que resuelva integrales especiales. En cualquier caso, la solución para el potencial efectivo θ siempre vendrá dado en forma *implícita* y un resultado de esta naturaleza, es poco práctico para nuestros intereses. Por lo tanto, es evidente la necesidad de probar otro método para encontrar una solución de θ y posteriormente φ y a como funciones *explícitas* de x , de tal modo que nos permitan estudiar con más transparencia y concisión el fenómeno de aislamiento magnético que ocurre al interior del diodo plano al vacío.

1.2. Aproximación por Serie de Taylor

Volvamos al resultado (1.15). Si despejamos la derivada del potencial efectivo encontramos

$$\theta'(x) = \pm [8j_x \theta^{3/2} + 8j_x \theta^{1/2} + 2k_1 \theta + k_2]^{1/2}, \quad (1.18)$$

donde k_1 y $k_2 = 4\beta^2$ son constantes de integración que debemos determinar. La ambigüedad de signo \pm que aquí emerge la mantendremos hasta el final del capítulo. La idea consiste en aproximar mediante una serie de Taylor el lado derecho de (1.18) por un polinomio de segundo grado en θ alrededor de algún valor θ_L , el cual en adelante usaremos como parámetro principal del desarrollo. Definimos entonces la función de aproximación real como

$$f(\theta) = \pm [8j_x \theta^{1/2} (\theta + 1) + 2k_1 \theta + k_2]^{1/2}, \quad (1.19)$$

y calculamos sus dos primeras derivadas con respecto a la variable $\theta \in \mathbb{R}$, a saber

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= [2j_x \theta^{-1/2} (3\theta + 1) + k_1] f^{-1}, \\ f''(\theta) &= \{j_x \theta^{-3/2} (3\theta - 1) - [2j_x \theta^{-1/2} (3\theta + 1) + k_1]^2 f^{-2}\} f^{-1}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

⁴Incluso si las constantes k_1 y β son nulas, la solución vendría dada por una función Beta incompleta [1].

Claramente la función de aproximación f debe ser no nula para todo θ . De acuerdo con (1.20), los valores $\theta \leq 0$ quedan descartados puesto que, por un lado, las derivadas de (1.19) evaluadas en $\theta = 0$ producen indeterminaciones, y por otro lado, los valores $\theta < 0$ se excluyen para cualquier función de la forma $\theta^{\pm|2l+1|/2}$ con $l \in \mathbb{Z}$. Introducimos entonces el parámetro del desarrollo

$$\theta_L > 0,$$

Al comparar (1.18) y (1.19) es evidente que la aproximación por serie de Taylor plantea $\theta'(x) \approx f(\theta)$ alrededor de $\theta = \theta_L$, con lo cual se sigue de inmediato que $\theta'(x) \neq 0$ para todo $0 \leq x \leq 1$. Ahora, por la tercera condición en (1.5) se tiene que $\theta'(0) = 2\beta$ pero como la derivada del potencial efectivo en cualquier punto del intervalo de determinación debe ser diferente de cero, es claro que $\beta > 0$. En consecuencia desde (1.16) tenemos la relación estricta

$$k_2 > 0.$$

Esta situación nos conduce de entrada hasta un escenario muy importante: el régimen Child–Langmuir **no tiene lugar** en nuestra discusión⁵. Introducimos la notación para las *constantes*

$$f_L = f^{(0)}(\theta_L), \quad f'_L = f^{(1)}(\theta_L), \quad f''_L = f^{(2)}(\theta_L).$$

El desarrollo de Taylor hasta segundo orden para $f(\theta)$ alrededor de θ_L es construido como

$$f(\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} f_L^{(r)} (\theta - \theta_L)^r = f_L + f'_L (\theta - \theta_L) + \frac{1}{2} f''_L (\theta - \theta_L)^2 + O(f_L^{-1}). \quad (1.21)$$

En vista que f_L es relativamente grande, es razonable ignorar el término asintótico $O(f_L^{-1})$ [12], luego, dejamos que las funciones (1.19)–(1.20) tomen la forma

$$\begin{aligned} f(\theta) &\approx \frac{1}{2} f''_L (\theta - \theta_L)^2 + f'_L (\theta - \theta_L) + f_L, \\ f'(\theta) &\approx f''_L (\theta - \theta_L) + f'_L, \\ f''(\theta) &\approx f''_L. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Las fórmulas (1.22) son de utilidad en el sentido que las $f_L^{(\eta)}$ podrán determinarse completamente usando (1.19)–(1.20), siempre y cuando se conozca el arreglo paramétrico $(j_x; \theta_L; k_1, k_2)$. Utilizamos la relación de aproximación asociada al desarrollo de Taylor

$$\theta'(x) \approx f(\theta), \quad (1.23)$$

tal que de la primera expresión en (1.22) tenemos

$$\frac{d\theta}{dx} \approx \frac{1}{2} f''_L (\theta - \theta_L)^2 + f'_L (\theta - \theta_L) + f_L.$$

⁵Esto es, el caso $\beta = 0$ no será considerado en esta investigación.

Resolvemos esta EDO por separación de variables

$$x \approx \int \frac{d\theta}{f(\theta)} = \frac{2}{R_L} \arctan \left[\frac{f_L''(\theta - \theta_L) + f_L'}{R_L} \right] + \varepsilon, \quad (1.24)$$

donde ε es una constante de integración y hemos definido la cantidad

$$R_L \equiv \pm \{2f_L f_L'' - (f_L')^2\}^{1/2} \neq 0, \quad (1.25)$$

la cual trae consigo una segunda ambigüedad de signo \pm que será importante decidir más adelante. Para determinar ε usamos la segunda condición en (1.5) tal que cuando $x = 1$, el potencial efectivo es justamente $\theta(1) = \theta_L$. Esto produce

$$\varepsilon = 1 - \frac{2}{R_L} \arctan \frac{f_L'}{R_L}.$$

De esta manera, el resultado (1.24) nos permite despejar el potencial θ como una función *explícita* de x , a saber

$$\theta(x) \approx \frac{R_L}{f_L''} \tan \left[\frac{R_L}{2}(x-1) + \arctan \frac{f_L'}{R_L} \right] + \theta_L - \frac{f_L'}{f_L''}, \quad (1.26)$$

o si se prefiere

$$\theta(x) \approx A \tan(Bx + C) + D, \quad (1.27)$$

donde

$$A = \frac{R_L}{f_L''} \neq 0, \quad B = \frac{R_L}{2} \neq 0, \quad C = -\frac{R_L}{2} + \arctan \frac{f_L'}{R_L}, \quad D = \theta_L - \frac{f_L'}{f_L''}. \quad (1.28)$$

Nótese que la constante $D = \theta_L - \frac{f_L'(\theta_L)}{f_L''(\theta_L)}$ tiene precisamente la forma estándar del algoritmo Newton–Raphson $x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i)}{F'(x_i)}$ para todo $i \geq 0$, con $x_i = \theta_L$, $x_{i+1} = D$, $F = f'$ y cuya iteración sucesiva se emplea con frecuencia para localizar numéricamente los ceros de una función f' con variable real θ_L [12]. La función (1.27) constituye el primer gran resultado de la investigación que hemos llevado a cabo aquí.

1.2.1. Requerimientos Propios del Potencial Efectivo

Es natural que la función (1.27) traiga consigo una serie de *requerimientos* que debemos tener en cuenta para nuestra discusión, pero antes de examinarlos cuidadosamente, por comodidad vamos a introducir el siguiente cambio de variable en notación *escalada* para las cantidades

$$K_1 \equiv \frac{k_1}{j_x}, \quad K_2 \equiv \frac{k_2}{j_x} > 0, \quad (1.29)$$

con las cuales prescindimos de las constantes k_i y j_x y empleamos las nuevas cantidades K_i .

1.2.1.1. Primer Requerimiento: $f(\theta_L) \neq 0$.

Dado que las derivadas obtenidas en (1.20) son funciones con dependencia inversa de f_L , no se puede permitir que (1.19) tome valores nulos para ningún arreglo $(\theta_L; K_1, K_2)$, i.e.

$$f_L = \pm j_x^{1/2} \left\{ 8\theta_L^{1/2}(\theta_L + 1) + 2K_1\theta_L + K_2 \right\}^{1/2} \neq 0.$$

Adicional a esto, por la relación de aproximación (1.23) $f \neq 0$ implica que $\theta' \neq 0$. Por lo tanto, pueden darse dos situaciones: por un lado, si $A = 0$ entonces $\theta = D$ (constante) y por tanto $\theta' = 0$; por otro lado, si $B = 0$ entonces $\theta = A \tan C + D$ (constante) y por tanto $\theta' = 0$. Queda claro entonces que tanto A como B deben ser constantes no nulas tal y como fueron definidas en (1.28). De esta manera, el requerimiento $f_L \neq 0$ exige

$$K_2 \neq -2\theta_L^{1/2} \left[\theta_L^{1/2} K_1 + 4(\theta_L + 1) \right]. \quad (1.30)$$

1.2.1.2. Segundo Requerimiento: $f_L'' \neq 0$.

Esta condición salta a la vista si examinamos (1.26). Empleando la segunda derivada en (1.20) se deduce que

$$K_2 \neq \frac{\theta_L^{3/2} K_1^2 + 6\theta_L(\theta_L + 1)K_1 + 4\theta_L^{1/2}(3\theta_L^2 + 2\theta_L + 3)}{3\theta_L - 1}, \quad \theta_L \neq \frac{1}{3}. \quad (1.31)$$

1.2.1.3. Tercer Requerimiento: $\theta \rightarrow \pm\infty$.

Este requerimiento involucra directamente al dominio $x \in [0, 1]$ y se refiere a aquellos valores para los cuales el potencial efectivo es indeterminado. Al ser $\theta(x)$ una función tangente, sus asíntotas ocurrirán en intervalos impares de $\pi/2$ del argumento. Por tanto, debido a (1.26) deducimos que

$$x \neq 1 + \frac{(2l+1)\pi}{R_L} - \frac{2}{R_L} \arctan \frac{f_L'}{R_L}, \quad \text{para todo } l \in \mathbb{Z}, \quad (1.32)$$

y podemos usar (1.19), (1.20) y (1.22) para escribir las constantes R_L y f_L' como

$$\begin{aligned} R_L &= \pm j_x^{1/2} \left\{ 2\theta_L^{-3/2}(3\theta_L - 1) - 3j_x f_L^{-2} [2\theta_L^{-1/2}(3\theta_L + 1) + K_1]^2 \right\}^{1/2} \neq 0, \\ f_L' &\approx \pm j_x^{1/2} \left[2\theta_L^{-1/2}(3\theta_L + 1) + K_1 \right] \left[8\theta_L^{1/2}(\theta_L + 1) + 2\theta_L K_1 + K_2 \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

1.2.1.4. Cuarto Requerimiento: $\arg\{R_L\} > 0$.

Esta condición asoma aquí como la más fuerte y se deduce tanto de (1.26) como de (1.32) en el sentido que obligamos a la constante R_L no sólo a tomar valores distintos de cero, sino que además le estamos exigiendo a su argumento evaluar cantidades estrictamente positivas. Esto puede resumirse como

$$f_L f_L'' > \frac{1}{2} (f_L')^2. \quad (1.34)$$

Es evidente que el lado derecho de (1.34) da siempre un valor positivo ó a lo sumo nulo, en cuyo caso particular se tendría por (1.20) que

$$K_1 = -2\theta_L^{-1/2}(3\theta_L + 1) < -4\sqrt{3}.$$

Ahora, el producto a la izquierda de (1.34) debe ser no-nulo y positivo en cualquier caso, por lo que f_L y f_L'' son constantes del mismo signo y diferentes de cero

$$\text{sign}\{f_L\} = \text{sign}\{f_L''\}, \quad f_L \neq 0, \quad f_L'' \neq 0,$$

tal y como se planteó arriba en el Primer y el Segundo Requerimientos. Utilizando la fórmula para R_L obtenida en (1.33), la condición $\arg\{R_L\} > 0$ nos conduce hasta

$$K_2 > z_0 + z_1 K_1 + z_2 K_1^2 \equiv Z(\theta_L; K_1), \quad (1.35)$$

donde los coeficientes $z_i = z_i(\theta_L)$ vienen dados por las expresiones

$$z_0 = \frac{2\theta_L^{1/2}(15\theta_L^2 + 10\theta_L + 7)}{3\theta_L - 1}, \quad z_1 = \frac{4\theta_L(3\theta_L + 2)}{3\theta_L - 1}, \quad z_2 = \frac{3\theta_L^{3/2}}{2(3\theta_L - 1)}. \quad (1.36)$$

En la Figura 1.1 podemos apreciar las gráficas de los coeficientes z_i en función de θ_L . En vista que la relación (1.35) constituye el segundo resultado importante de este documento, más adelante retomaremos este aspecto con todo detalle.

1.2.2. Condiciones de Frontera

Previo a la determinación de las regiones en el espacio interelectrónico $[0, 1]$ donde ocurre aislamiento magnético, es preciso examinar el modo en que influyen las condiciones de frontera (1.5) en nuestra discusión. En esta sección vamos a deducir una de las relaciones más importantes del documento, la cual junto al potencial (1.27) y la condición (1.35) conforman los tres resultados principales de esta investigación. Para empezar es útil calcular la derivada del potencial efectivo (1.27) y escribirla como

$$\theta'(x) \approx AB \sec^2(Bx + C) = \frac{B}{A} [A^2 + (\theta - D)^2], \quad (1.37)$$

donde A , B , C y D están definidas por (1.28).

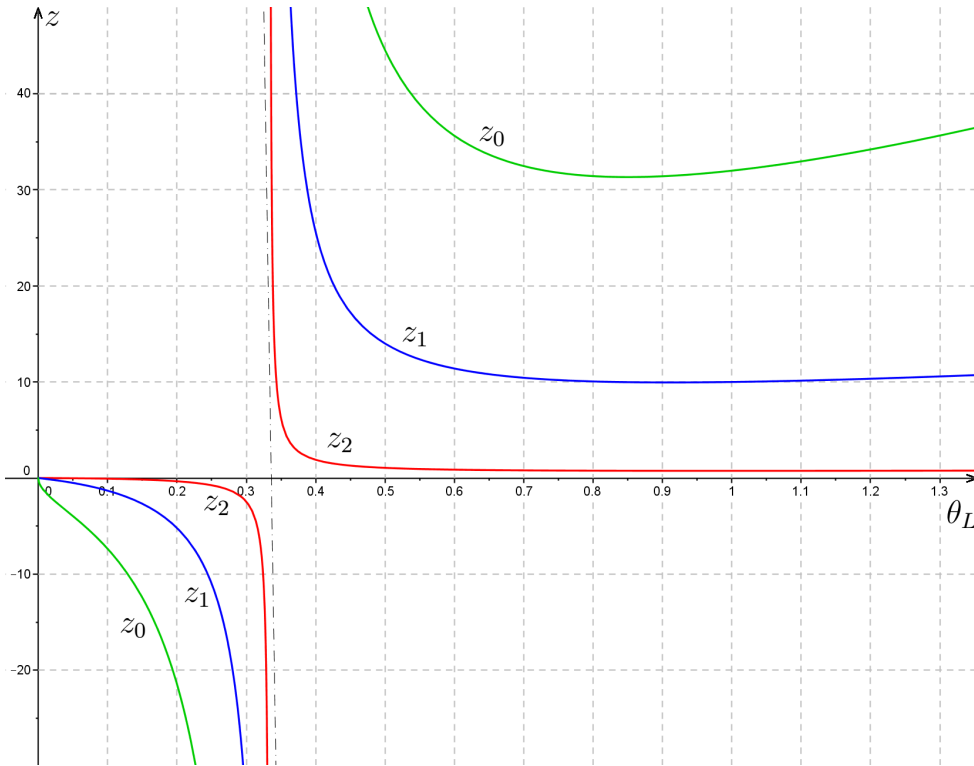


Figura 1.1: Funciones z_i vs θ_L dadas por (1.36) con asíntota vertical en $\theta_L = 1/3$: z_0 verde, z_1 azul, z_2 rojo. Para valores $\theta_L \in (0, 1/3)$ los coeficientes z_i serán negativos, provocando que la familia de curvas $Z(\theta_L; K_1)$ definidas en (1.35) dibujen parábolas cóncavas hacia abajo en el plano Z vs K_1 y cuyos máximos absolutos estarán localizados siempre por debajo del eje de las abscisas (véase más adelante la Figura 1.17). En este caso los valores Z serán estrictamente negativos y cualquier valor $K_2 > 0$ satisface la condición (1.35). Por otro lado, para valores $\theta_L > 1/3$ los coeficientes z_i serán positivos, las curvas Z dibujarán parábolas cóncavas hacia arriba, y dado que habrán valores Z tanto positivos como negativos entonces (si es posible) debemos ser cuidadosos con la elección de los K_2 tales que satisfagan (1.35).

1.2.2.1. Primera Condición: $\theta(0) \approx 0$.

Al aplicar la primera condición planteada en (1.5) a la función (1.27) nos conduce hasta

$$\tan C \approx -\frac{D}{A}. \tag{1.38}$$

Empleando las fórmulas (1.28) y (1.25) se llega a

$$\tan B - \Omega B \approx 0,$$

donde hemos definido la cantidad

$$\Omega \equiv \frac{2\theta_L}{2f_L - \theta_L f'_L} \neq 0.$$

Si utilizamos (1.38) en (1.27), podemos eliminar la constante C del potencial efectivo y obtener

$$\theta(x) = \frac{A^2 + D^2}{A \cot Bx + D}, \quad (1.39)$$

o si usamos las relaciones (1.22), (1.25) y (1.28) tendremos

$$\theta(x) = \frac{2f_0}{R_L \cot\left(\frac{R_L x}{2}\right) - f'_0}, \quad (1.40)$$

donde por comodidad hemos introducido las constantes

$$\begin{aligned} f_0 &\equiv \frac{1}{2} f_L'' \theta_L^2 - f_L' \theta_L + f_L \neq 0, \\ f'_0 &\equiv -f_L'' \theta_L + f_L' \neq 0. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Para evitar indeterminaciones es evidente que el denominador en (1.40) debe ser no-nulo, así

$$x \neq \frac{2}{R_L} \arctan \frac{R_L}{f'_0}, \quad (1.42)$$

y dado que tanto f_0 como f'_0 son cantidades diferentes de cero, por la función de aproximación definida en (1.19) y sus derivadas (1.20), el cambio de variable (1.29) y la segunda ecuación en (1.33), podemos deducir respectivamente que

$$\begin{aligned} 3K_2^2 + 3\theta_L^2 K_1^2 + 6\theta_L K_1 K_2 + \theta_L^{1/2} (23\theta_L + 27) K_2 + 2\theta_L^{3/2} (9\theta_L + 17) K_1 + 4\theta_L (5\theta_L^2 + 30\theta_L + 21) &\neq 0, \\ K_2 \neq \frac{-3\theta_L^{3/2} K_1^2 + 2\theta_L (3\theta_L^4 - 4\theta_L^3 - 16\theta_L - 8) K_1 + 4\theta_L^{1/2} (6\theta_L^5 - 2\theta_L^4 - 8\theta_L^3 - 21\theta_L^2 - 22\theta_L - 5)}{\theta_L^{1/2} K_1 - 3\theta_L^4 + 4\theta_L^3 + 6\theta_L + 2}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

1.2.2.2. Segunda Condición: $\theta(1) \approx \theta_L$.

Combinamos la segunda condición de frontera planteada en (1.5) con (1.38) para obtener

$$\tan B \approx \frac{\theta_L A}{A^2 + D^2 - \theta_L D}. \quad (1.44)$$

Desde (1.19)–(1.20) y haciendo uso de la definición recién introducida en la Primera Condición

$$\Omega \equiv \frac{2\theta_L}{2f_L - \theta_L f_L'} = \frac{2j_x^{-1} \theta_L f_L}{3\theta_L K_1 + 2K_2 + 2\theta_L^{1/2} (5\theta_L + 7)}, \quad (1.45)$$

empleamos las equivalencias (1.22), (1.25) y (1.28) en la relación (1.44) para encontrar justamente que

$$\tan B - \Omega B \approx 0, \quad (1.46)$$

tal y como había sido obtenida en la página anterior. El denominador en (1.45) no puede ser nulo, por lo tanto se exige que

$$K_2 \neq -\frac{3}{2}\theta_L K_1 - \theta_L^{1/2}(5\theta_L + 7). \quad (1.47)$$

Por supuesto, el lado izquierdo de (1.46) no puede ser indeterminado y los valores del argumento de la tangente que produzcan asíntotas se deben excluir. Entonces debe satisfacerse que

$$R_L \neq (2l + 1)\pi, \quad \text{para todo } l \in \mathbb{Z}. \quad (1.48)$$

Las condiciones Primera y Segunda sugieren que para valores grandes de θ_L se da la tendencia $R_L \rightarrow 0$ con $\Omega \rightarrow \infty$, mientras que cuando $\theta_L \rightarrow 0$, tenemos la situación opuesta, esto es, $R_L \rightarrow \infty$ con $\Omega \rightarrow 0$. En ambos casos se produce una inconsistencia evidente. De aquí concluimos que el parámetro θ_L no puede tomar valores ni demasiado grandes ni demasiado pequeños, y como por ahora no disponemos de una información más precisa, se hace necesario posponer para más adelante la tarea de determinar con exactitud el intervalo que caracteriza al parámetro θ_L .

1.2.2.3. Tercera Condición: $\theta'(0) \approx 2\beta > 0$.

La última condición en (1.5) nos permite demostrar la relación (1.16). Combinando (1.28), (1.37), (1.40) y (1.41) llegamos a

$$2\beta \approx \frac{B}{A}[A^2 + D^2] = f_0, \quad (1.49)$$

que al compararse con (1.16), en efecto nos conduce hasta

$$k_2 \approx 4\beta^2 \approx f_0^2 > 0,$$

o en términos de las cantidades escaladas (1.29) produce

$$f_0^2 - j_x K_2 \approx 0.$$

Esta condición genera una consecuencia mucho más fuerte de lo aparente. Si usamos las fórmulas (1.19)–(1.20) evaluadas en $\theta = \theta_L$ para desarrollar el trinomio

$$(f_L - \theta_L f'_L + 2 - 10\theta_L^2 f''_L)^2 - j_x K_2 \approx 0,$$

al multiplicar esta expresión por $4j_x^{-4} f_L^6$ y llevando a cabo un extenso tratamiento algebraico, vamos a obtener una relación independiente de j_x con la forma

$$Q(\theta_L; K_1, K_2) = q_0 + q_1 K_2 + q_2 K_2^2 + q_3 K_2^3 \approx 0, \quad (1.50)$$

la cual emerge aquí como el tercer resultado más importante de esta investigación, donde las funciones $q_i = q_i(\theta_L; K_1)$, $i = 0, 1, 2, 3$, vienen dadas por los polinomios

$$\begin{aligned} q_0 &= \theta_L^2 [3\theta_L K_1^2 + 2\theta_L^{1/2}(17 + 9\theta_L)K_1 + 4(21 + 30\theta_L + 5\theta_L^2)]^2, \\ q_1 &= 4\theta_L^3 K_1^3 + 6\theta_L^{5/2}(31 - 5\theta_L)K_1^2 + 4\theta_L^2(327 + 226\theta_L - 117\theta_L^2)K_1 + 8\theta_L^{3/2}(311 + 525\theta_L + 57\theta_L^2 - 141\theta_L^3), \\ q_2 &= 4\theta_L^{3/2}(19 - 9\theta_L)K_1 + 3\theta_L(99 + 62\theta_L - 53\theta_L^2), \\ q_3 &= 4\theta_L^{1/2}(3 - \theta_L). \end{aligned} \tag{1.51}$$

Los coeficientes q_i sugieren un tratamiento más cuidadoso. Dados θ_L y K_1 podemos determinar los q_i (aunque es evidente que q_3 no depende de K_1) para luego fijarlos y resolver numéricamente el polinomio de tercer grado (1.50)⁶. Con este procedimiento deberíamos encontrar por lo menos una raíz real K_2 que satisfaga apropiadamente $Q \approx 0$. Además, si este valor obedece por (1.35) la condición $K_2 > Z > 0$, conforme a los requerimientos mencionados y las condiciones asociadas a θ , dispondremos al fin de un arreglo completo $(\theta_L; K_1, K_2)$ que se ajusta plenamente a las exigencias advertidas por el problema. Con ello se logra describir un diodo plano al vacío magneto–aislante modelado a través de aproximaciones numéricas tipo Taylor hasta segundo orden. Más adelante haremos un examen más riguroso de los coeficientes q_i .

1.2.3. Condición para Aislamiento Magnético

Hasta aquí ya hemos logrado deducir una función explícita para el potencial efectivo, describir sus requerimientos asociados y vincularla a las condiciones de frontera del problema. Sin embargo, aún no hemos caracterizado los pormenores del aislamiento magnético, i.e., los intervalos en los cuales podemos describir cada parámetro contemplado y los valores del dominio que le satisfacen.

La situación que naturalmente se debiera esperar corresponde a

$$\theta > 0,$$

en cuyo caso se estaría analizando el régimen *sin* aislamiento magnético, ya que los electrones entran al diodo en la cercanía del cátodo y como el potencial efectivo es no negativo, todas las partículas alcanzan el ánodo. El caso de interés es la situación opuesta. Se presenta cuando los electrones no pueden alcanzar el ánodo y son reflejados de vuelta al cátodo por la acción del campo magnético, con lo cual el potencial efectivo será negativo

$$\theta(x) < 0. \tag{1.52}$$

Esta particularidad tiene un importante significado físico y se denomina *condición para aislamiento magnético* [2][8].

⁶También podríamos llevar a cabo un procedimiento semejante si los datos que conocemos son $(\theta_L; K_2)$ y necesitamos calcular las raíces K_1 . Sin embargo, la relación $K_2 > Z$ dada por (1.35) sugiere que es más útil ocuparnos en resolver (1.50) tal y como está planteada.

En esta investigación nos hemos dado a la tarea de caracterizar el potencial efectivo $\theta(x)$. La expectativa generada es que al emplear aproximaciones por series de Taylor se logre, primero, encontrar una función explícita que describa este potencial y segundo, determinar con precisión los intervalos que satisfacen (1.52). Pues bien, queda claro que la primera parte ya se logró al obtener la función (1.26), la cual depende del arreglo paramétrico $(\theta_L; K_1, K_2)$. Dado que esta función es del tipo tangente, tenemos una alta probabilidad de satisfacer lo segundo. Para ello es necesario caracterizar con total precisión los intervalos que definen cada parámetro del mencionado arreglo.

Se debe tener en cuenta que la condición (1.52) corresponde a una interpretación *física* del problema, puesto que si se emplea de manera literal provocaría una evidente inconsistencia matemática desde el sistema de EDOs original (1.1)–(1.2); aquí se estudia el caso límite asociado a variables reales. De hecho, si contemplamos (1.52) como una condición estrictamente matemática, al aplicarla a la expresión (1.26) nos encontraríamos con que $x < 0$, lo cual es impropcedente ya que el intervalo de determinación es $[0, 1]$. Los valores $\theta < 0$ son explicados físicamente como las regiones del espacio interelectrónico en los cuales ocurre el aislamiento magnético.

Por otro lado, recordemos que la ecuación diferencial no lineal (1.18) contiene las constantes k_1 y k_2 , las cuales fueron escaladas en (1.29) como $K_1 = j_x^{-1}k_1$ y $K_2 = j_x^{-1}k_2$. A continuación vamos a examinar una serie de *casos* particulares en los cuales analizaremos algunos valores específicos que pueden asumir estas constantes. La idea consiste en descartar gradualmente las elecciones que conduzcan a contradicciones tal que nuestra discusión vaya clarificándose en la medida que se agotan las posibilidades.

1.2.3.1. Caso i: $K_1 = 0, K_2 > 0$.

Para esta primera suposición asumimos que la constante k_1 es nula e intentaremos establecer condiciones apropiadas sobre θ_L y K_2 . Desde (1.35) tenemos

$$K_2 > \frac{2\theta_L^{1/2}(15\theta_L^2 + 10\theta_L + 7)}{3\theta_L - 1} = Z(\theta_L; 0) \equiv \tilde{Z}_L. \quad (1.53)$$

La Figura 1.2 muestra el gráfico trazado por la función \tilde{Z}_L definida en (1.53). Es claro que esta función entrega valores en todos los reales excepto en el rango $(0, 31.33)$ lo cual, en principio, no debería ser un obstáculo para satisfacer la condición (1.35). Ahora es necesario determinar K_2 con precisión, para lo cual usaremos algunas estimaciones de θ_L junto con $K_1 = 0$ en los polinomios (1.51); en seguida resolvemos numéricamente $Q(\theta_L; 0, K_1) \approx 0$ desde (1.50). Los coeficientes $\tilde{q}_i = q_i(\theta_L; 0)$, $i = 0, 1, 2, 3$, quedan

$$\begin{aligned} \tilde{q}_0 &= 16\theta_L^2(21 + 30\theta_L + 5\theta_L^2)^2, \\ \tilde{q}_1 &= 8\theta_L^{3/2}(311 + 525\theta_L + 57\theta_L^2 - 141\theta_L^3), \\ \tilde{q}_2 &= 3\theta_L(99 + 62\theta_L - 53\theta_L^2), \\ \tilde{q}_3 &= 4\theta_L^{1/2}(3 - \theta_L). \end{aligned}$$

Un breve análisis de estos coeficientes revela que $\tilde{q}_0 > 0$ para todo θ_L ; $\tilde{q}_1 \geq 0$ para $0 < \theta_L \leq 2.3689959783$ y $\tilde{q}_1 < 0$ para $\theta_L > 2.36$; $\tilde{q}_2 \geq 0$ para $0 < \theta_L \leq 2.0715257059$ y $\tilde{q}_2 < 0$ para

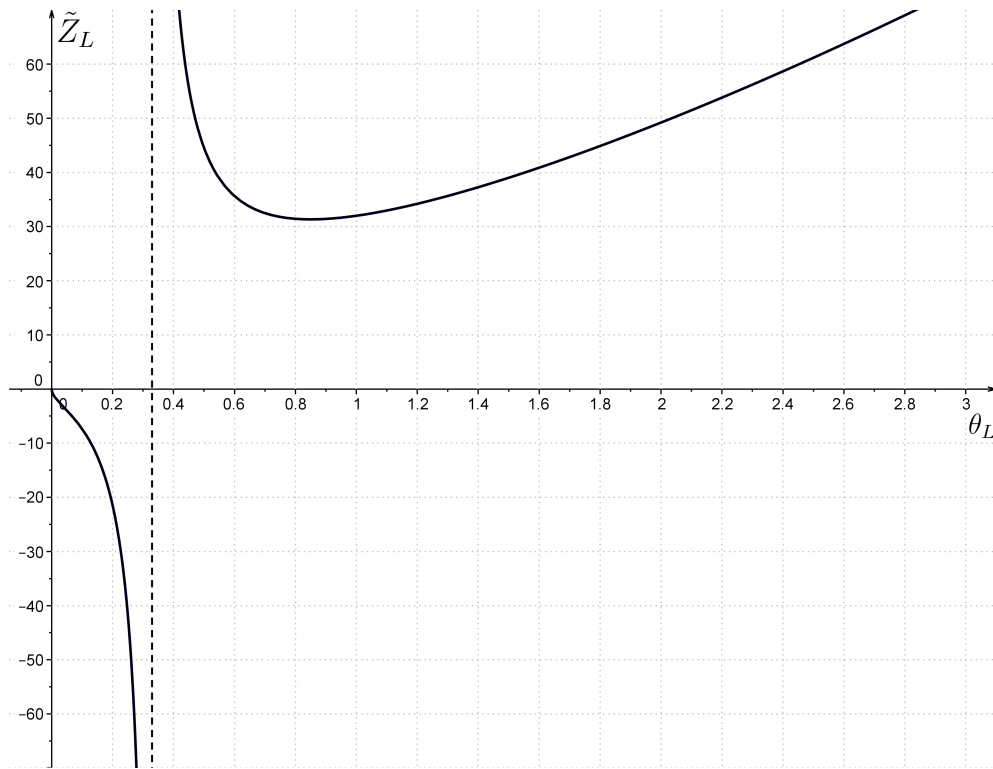


Figura 1.2: Gráfica de \tilde{Z}_L vs θ_L dada por (1.53) con asíntota vertical en $\theta_L = 1/3$. Para valores $\theta_L \in (0, 1/3)$ vemos que $\tilde{Z}_L < 0$ es un trazo monótonamente decreciente mientras que para valores $\theta_L > 1/3$ la función $\tilde{Z}_L > 0$ dibuja un trazo cuya forma es cóncava hacia arriba con un mínimo relativo en $\frac{5+2\sqrt{15}}{15} \simeq 0.84$, por lo que la ramificación positiva de \tilde{Z}_L es decreciente cuando $1/3 < \theta_L < 0.84$ y es creciente para los demás valores $\theta_L > 0.84$. Note que para $\theta_L > 1/3$ a cada imagen \tilde{Z}_L le corresponderán dos valores del dominio θ_L siempre y cuando $\theta_L \neq 0.84$ en cuyo caso $Z(0.84; 0) \simeq 31.33$ es único.

$\theta_L > 2.07$; $\tilde{q}_3 \geq 0$ para $0 < \theta_L \leq 3$ y $\tilde{q}_3 < 0$ para $\theta_L > 3$. Ahora, para deducir cuáles son los valores K_2 que satisfacen simultáneamente (1.35) y (1.50), debemos obtener los ceros de la función de dos variables

$$\tilde{Q}(\theta_L; K_2) = \tilde{q}_0 + \tilde{q}_1 K_2 + \tilde{q}_2 K_2^2 + \tilde{q}_3 K_2^3. \quad (1.54)$$

Dada la evidente dificultad para encontrar las raíces en una función de este tipo (de las cuales además no se dispone mucha información), en adelante vamos a recurrir a la evaluación directa empleando algunos θ_L (relevantes y arbitrarios) con apoyo del software libre para visualización gráfica GeoGebra 5.0. Para ilustrar este procedimiento, en el Cuadro 1.1 hemos considerado diez valores arbitrarios $\theta_L > 0$, tres a la izquierda de $1/3$ y los demás a la derecha, con el fin de obtener gráficamente los K_2 y decidir si satisfacen o no tanto (1.35) como (1.50).

Por un lado podemos notar que el valor $\theta_L = 3$ es el único que produce dos raíces (una positiva y otra negativa) pues la curva \tilde{Q} vs K_2 dibuja una parábola cóncava hacia abajo con máximo

θ_L	\tilde{q}_0	\tilde{q}_1	\tilde{q}_2	\tilde{q}_3	\tilde{Z}_L	K_2
1/60	2.054709885	5.504200973	5.000930556	1.540586709	-1.94894863	-1.1072908852
1/6	303.6628944	217.4224553	53.9305	4.626813959	-14.8330212	-4.090442963
19/60	1542.009275	682.1265509	107.6526806	6.039984057	-262.701791	-6.4535483694
7/20	2021.176806	821.1068821	119.917875	6.27104457	291.9585373	-6.9754952488
$\frac{5+2\sqrt{15}}{15}$	28999.84774	4460.086561	289.1168948	7.928545493	31.33157823	-15.3364928
$\frac{39+8\sqrt{15}}{60}$	85833.0453	7831.943815	347.1585472	7.921154053	33.76841034	-21.291672
2.071	751241.361	9296.314836	9.197×10^{-7}	5.345336368	50.83210131	-41.046482021
2.368	1295853.311	1.691×10^{-5}	-366.477322	3.884850231	57.90280651	-48.350490507
3	3504384	-58529.4608	-1728	0	74.47818473	-65.048130333 31.176914541
5	35046400	-1186368.22	-13740	-17.8885438	137.997338	-663.7204475 -127.5169929 23.148090121

Cuadro 1.1: Valores arbitrarios para θ_L y $K_1 = 0$ con los cuales se calculan los q_i desde (1.51), \tilde{Z}_L desde (1.54) y K_2 desde (1.50). Los valores θ_L que satisfacen la condición (1.53) son los tres primeros que pertenecen al dominio $(0, 1/3)$. Para todos los demás valores $\theta_L > 1/3$ ésta condición no se satisface.

absoluto en $\tilde{Q}(3; -16.93) = 4 \times 10^6$. Todos los valores $\theta_L > 3$ van a producir cada uno tres raíces (dos negativas y una positiva), mientras que todos los valores $0 < \theta_L < 3$ sólo entregarán una raíz (negativa).

Por otro lado es claro que toda raíz negativa contradice la hipótesis $K_2 > 0$, con lo cual sólo nos queda analizar las raíces positivas que aparecen para valores $\theta_L \geq 3$. No hace falta extendernos más para deducir que ninguna raíz positiva satisface la condición (1.53) ya que siempre nos vamos a encontrar con que $\tilde{Z}_L > K_2$. Este importante desperfecto lo podemos apreciar en la Figura 1.3. Con esto concluimos que K_1 no puede ser nulo y en consecuencia el Caso i queda descartado.

1.2.3.2. Caso ii: $K_1 = K_2 = K > 0$.

Si suponemos ahora que ambas constantes escaladas K_1 y K_2 tienen un mismo valor real positivo y no nulo K , la condición (1.35) toma ahora la forma cuadrática

$$\zeta(\theta_L; K) \equiv \sigma_0 + \sigma_1 K + \sigma_2 K^2 < 0, \quad (1.55)$$

donde los coeficientes $\sigma_i = \sigma_i(\theta_L)$ vienen dados por (véase Figura 1.5)

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 4\theta_L^{1/2}(15\theta_L^2 + 10\theta_L + 7), \\ \sigma_1 &= 2(12\theta_L^2 + 5\theta_L + 1), \\ \sigma_2 &= 3\theta_L^{3/2}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Dado que θ_L es no negativo, los σ_i siempre serán positivos por lo que la familia de curvas $\zeta(\theta_L; K)$ dibujará parábolas cóncavas hacia arriba en el plano, tal y como se muestra en la Figura 1.4.

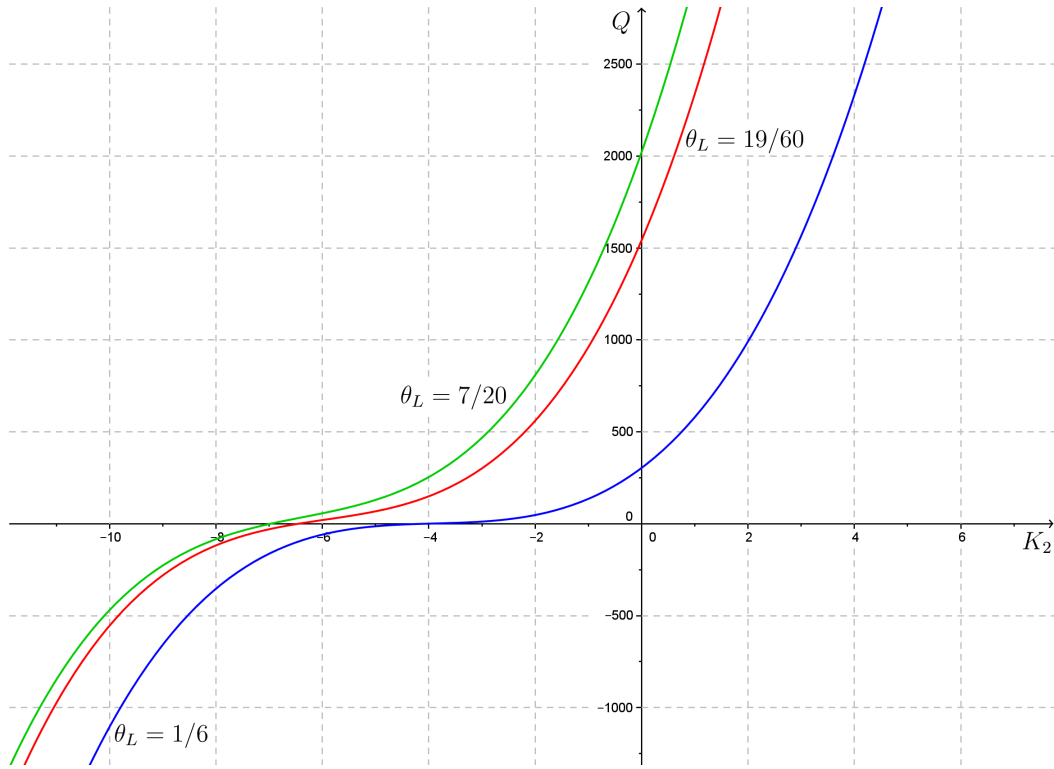


Figura 1.3: Polinomios Q vs K_2 dados por (1.50) para $K_1 = 0$ y θ_L fijos según el Cuadro 1.1: $\theta_L = 1/6$ azul, $\theta_L = 19/60$ rojo, $\theta_L = 7/20$ verde. Estas cúbicas son curvas ascendentes de izquierda a derecha con un único corte horizontal en la región de las abscisas negativas para todo $0 < \theta_L < 3$.

Esto sugiere que a cada θ_L se le asocia una parábola con un mínimo absoluto $\zeta_{\min} = \zeta(K_{\min})$ donde K_{\min} y ζ_{\min} son funciones de θ_L que vienen dadas por⁷

$$\begin{aligned} K_{\min}(\theta_L) &= -\frac{12\theta_L^2 + 5\theta_L + 1}{3\theta_L^{3/2}} \leq -\frac{92\sqrt{3}}{27} \simeq -5.90, \\ \zeta_{\min}(\theta_L) &= \frac{(3\theta_L - 1)(12\theta_L^3 + 4\theta_L^2 + 13\theta_L + 1)}{3\theta_L^{3/2}}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Ahora bien, sólo un reducido grupo de parábolas entre todas las pertenecientes a la familia $\zeta(\theta_L; K)$ satisfacen (1.55). Para averiguar cuáles son los valores θ_L apropiados basta con resolver el discriminante

$$\sigma_1^2 - 4\sigma_0\sigma_2 = 0,$$

el cual nos conduce hasta el polinomio

$$36\theta_L^4 + 35\theta_L^2 - 10\theta_L - 1 = 0,$$

⁷Es claro que K_{\min} deberá ser negativo para no entrar en conflicto con (1.55). Por su parte, ζ_{\min} es no negativa e inversamente proporcional a θ_L cuando $0 < \theta_L \leq 1/3$ y es negativa y directamente proporcional para $\theta_L > 1/3$. La cota $K_{\min} = -5.90$ ocurre cuando $\theta_L = 3/4$.

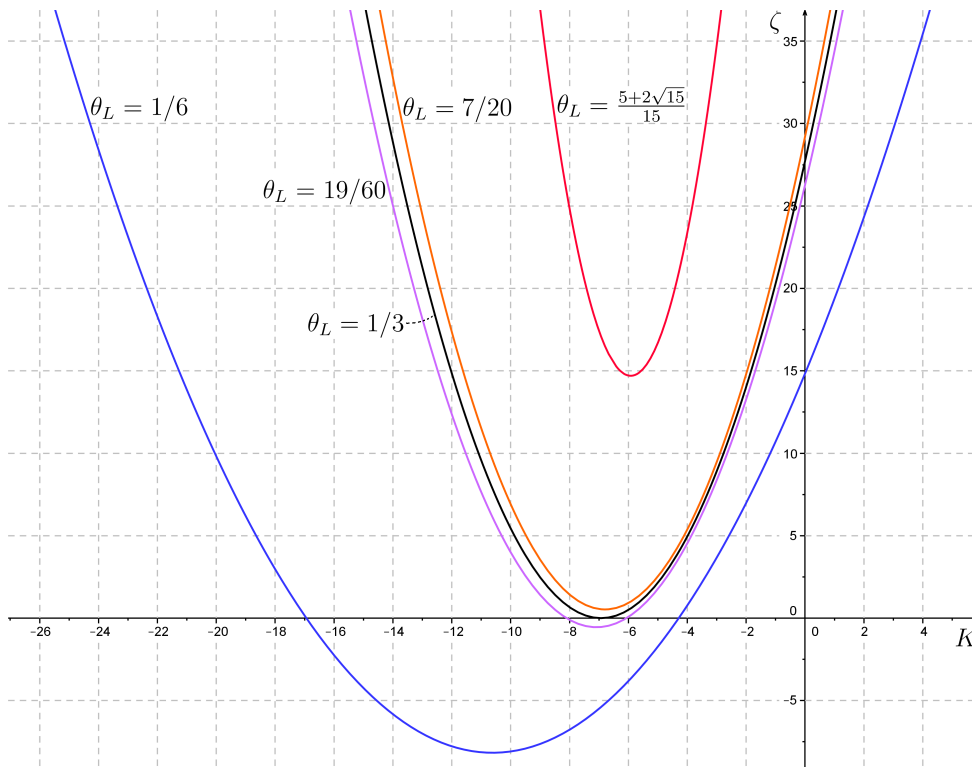


Figura 1.4: Curvas ζ vs K dadas por (1.55). De izquierda a derecha: $\theta_L = 1/6$ azul, $\theta_L = 19/60$ púrpura, $\theta_L = 1/3$ negro, $\theta_L = 7/20$ naranja, $\theta_L = \frac{5+2\sqrt{15}}{15}$ rojo. El conjunto de valores θ_L que satisfacen (1.55) es el perteneciente al dominio $(0, 1/3)$. En este caso las parábolas siempre tendrán vértice negativo y estará localizado en el intervalo (K_-, K_+) , valores asociados a las raíces de ζ . El vértice correspondiente a $\zeta = 0$ ocurre sólo cuando $\theta_L = 1/3$, en cuyo caso $K = -4\sqrt{3} \simeq -6.92$.

cuyas raíces reales son $\theta_L = -0.0783685215$ y $\theta_L = 1/3$, de las cuales por supuesto, consideramos la positiva. En la Figura 1.4 notamos que cualquier trazo que construyamos para valores del dominio $\theta_L \in (0, 1/3)$ la curva cortará el eje de las abscisas en dos puntos K distintos⁸.

Esto sugiere la existencia del rango

$$K_- < K < K_+,$$

el cual, en principio, va a proporcionar los valores K adecuados con los puntos K_{\pm} dados por la fórmula (véase la Figura 1.6)

$$K_{\pm} = \frac{-(12\theta_L^2 + 5\theta_L + 1) \pm \sqrt{1 + 10\theta_L - 35\theta_L^2 - 36\theta_L^4}}{3\theta_L^{3/2}}. \quad (1.58)$$

⁸Excepto, claro está, cuando $\theta_L = 1/3$ el cual proporciona a $K = K_{\pm} = -4\sqrt{3} \simeq -6.92$ como único corte y a la vez mínimo absoluto.

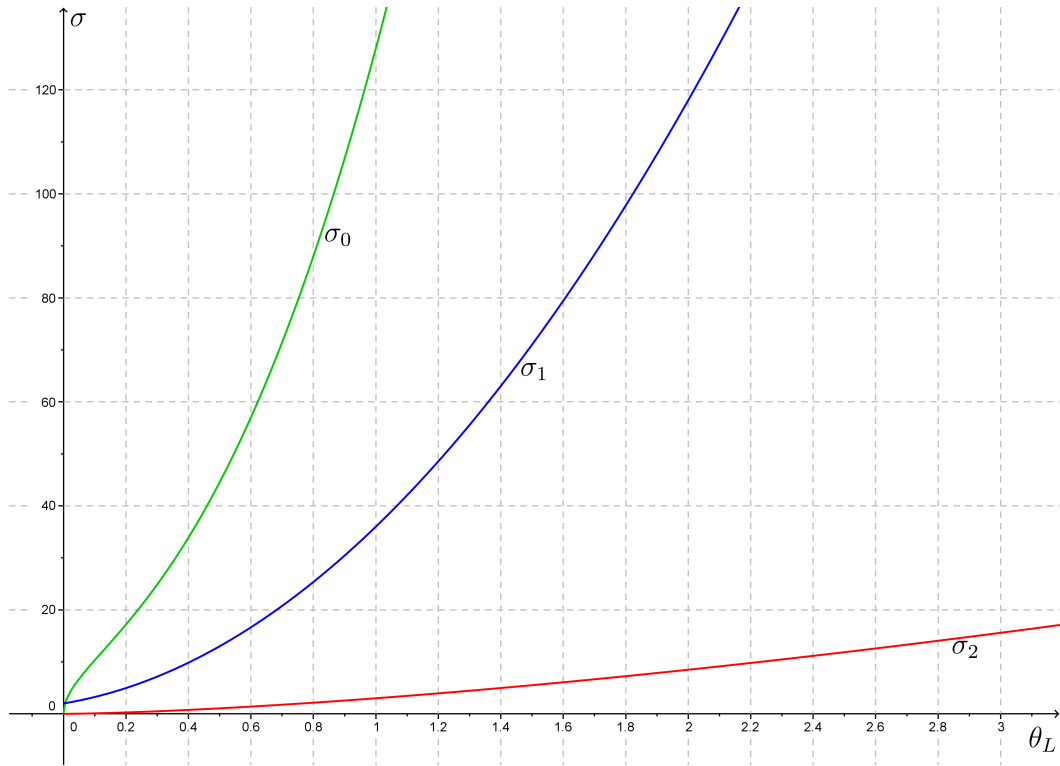


Figura 1.5: Ecuaciones σ_i vs θ_L dadas por (1.56): σ_0 verde; σ_1 azul; σ_2 rojo. Todas las curvas son no negativas y monótonamente crecientes. Es claro que para todo $\theta_L > 0$ siempre será cierto que $\sigma_0 > \sigma_1 > \sigma_2$.

θ_L	σ_0	σ_1	σ_2	K_{\min}	ζ_{\min}	K_-	K_+
1/6	14.83302122	$4\bar{3}$	0.2041241452	-10.61445	-8.164965809	-16.93901087	-4.289900232
19/60	26.2701791	$7.5\bar{7}\bar{3}$	0.5345948622	-7.083245528	-0.551710627	-8.099127573	-6.067363483
1/3	27.71281292	8	0.5773502692	-6.92820323	0	-6.92820323	-6.92820323
7/20	29.19585373	8.44	0.6211883772	-6.79343039	0.5275774822	-	-
$\frac{5+2\sqrt{15}}{15}$	97.07734455	27.82634227	2.349868367	-5.920830004	14.69982345	-	-

Cuadro 1.2: Valores arbitrarios para θ_L y $K_1 = K_2 = K$ con los cuales se calculan los σ_i desde (1.56), K_{\min} y ζ_{\min} desde (1.57) y K_{\pm} desde (1.58). Como los valores $7/20$ y $\frac{5+2\sqrt{15}}{15}$ no pertenecen al intervalo $(0, 1/3]$ entonces no se producen datos K_{\pm} (véase Figuras 1.4 y 1.6).

En el Cuadro 1.2 se toman en cuenta algunos valores arbitrarios para $\theta_L > 0$ con los cuales han sido calculadas las cantidades (1.56)–(1.58) y se ilustran en la Figura 1.4. Notamos que los valores $0 < \theta_L \leq 1/3$ son los que producen datos K_{\pm} , sin embargo, de nuevo aparece una dificultad importante y es precisamente que los K determinados por el dominio $K_- < K < K_+$ siempre son negativos, lo cual contradice la hipótesis planteada en un principio para el Caso ii. En consecuencia y aún sin que sea necesario contemplar la condición (1.50), esta posibilidad también queda excluida⁹.

⁹Desde la Figura 1.4 es claro que una situación en la que podríamos esperar simultáneamente que $\zeta < 0$ y $K > 0$ sería posible si y sólo si σ_0 no fuese estrictamente positiva, ni siquiera en el límite $\theta_L \rightarrow 0$.

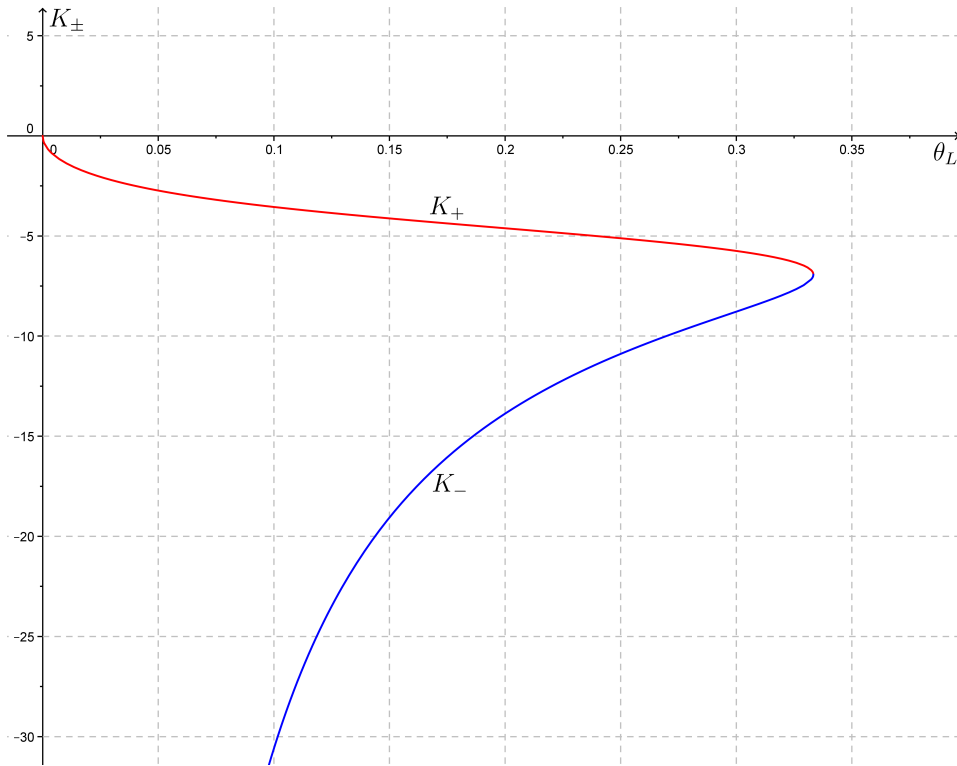


Figura 1.6: Curvas K_{\pm} vs θ_L proporcionadas por la ecuación (1.58): K_+ rojo, K_- azul. Las imágenes entregadas por las funciones K_{\pm} son siempre negativas y sólo toman valores en el dominio $0 < \theta_L \leq 1/3$ tales que en $\theta_L = 1/3$ las curvas coinciden produciendo $K_- = K_+ = -4\sqrt{3} \simeq -6.92$.

1.2.3.3. Caso iii: $K_1 = K_1^{\pm}$, $K_2 > 0$.

Supongamos ahora que existen valores θ_L tales que permiten escribir la función cuadrática Z definida en (1.35) como el producto

$$Z(\theta_L; K_1) = z_2 K_1^2 + z_1 K_1 + z_0 = z_2 (K_1 - K_1^-)(K_1 - K_1^+), \quad (1.59)$$

donde las K_1^{\pm} son funciones que dependen exclusivamente del parámetro θ_L y vienen dadas por la fórmula (véase la Figura 1.7)

$$K_1^{\pm}(\theta_L) = \frac{-4(3\theta_L + 2) \pm 2\sqrt{(3\theta_L - 1)(5 - 3\theta_L)}}{3\theta_L^{1/2}}. \quad (1.60)$$

El argumento en la raíz de (1.60) claramente impone una restricción sobre los valores θ_L , a saber

$$\frac{1}{3} < \theta_L \leq \frac{5}{3}. \quad (1.61)$$

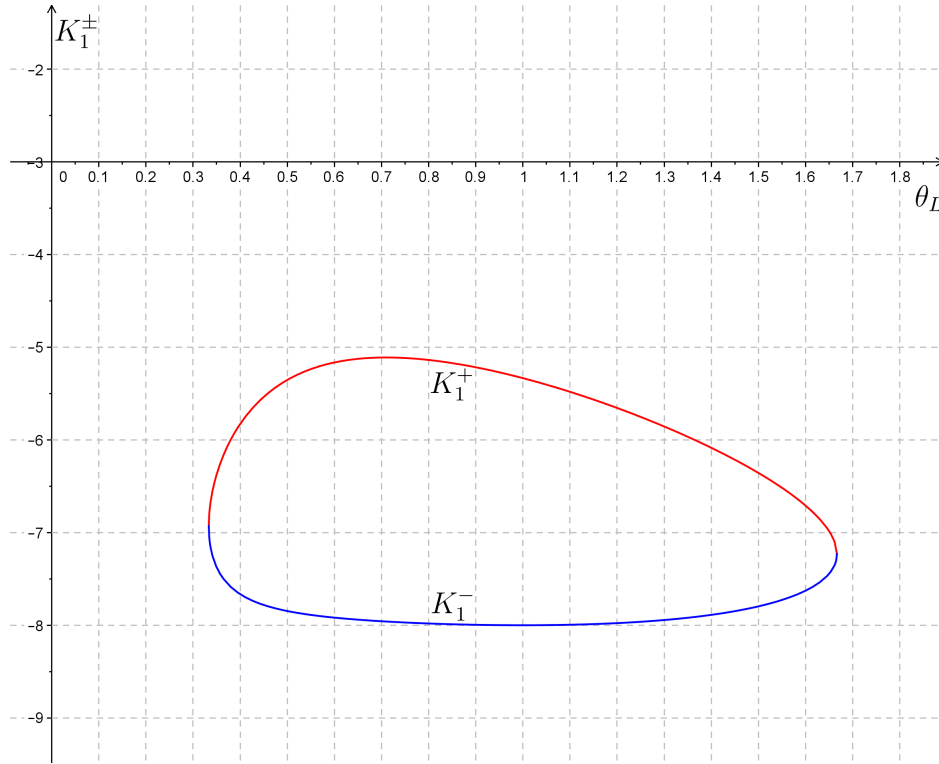


Figura 1.7: Curvas K_1^\pm vs θ_L proporcionadas por la ecuación (1.60): K_1^+ rojo, K_1^- azul. Nótese que cuando $\theta_L \rightarrow 1/3$, $K_1^- = K_1^+ \rightarrow -4\sqrt{3} \simeq -6.92$, mientras que cuando $\theta_L = 5/3$, $K_1^- = K_1^+ = -28/\sqrt{15} \simeq -7.22$. La curva K_1^+ alcanza su valor máximo en $\theta_L = 0.7097861359$ lo cual da $K_1^+(0.70) = -5.110391701$, mientras que la curva K_1^- alcanza su mínimo en $\theta_L = 1$ y da $K_1^-(1) = -8$. De esta manera tenemos el rango de valores negativos $K_1 \in [-8, -5.11]$.

Los límites (1.61) definen el intervalo semiabierto $\theta_L \in (\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]$ como una importante referencia numérica para los cálculos considerados en este Caso iii. De acuerdo con la Figura 1.7, siempre será válido que $K_1^+ \geq K_1^-$ para todo $1/3 < \theta \leq 5/3$, lo cual sugiere en general que

$$K_1 - K_1^+ \leq K_1 - K_1^-.$$

Si multiplicamos a ambos lados de esta desigualdad por $z_2(K_1 - K_1^\pm)$ obtenemos

$$0 \leq z_2(K_1 - K_1^+)^2 \leq Z \leq z_2(K_1 - K_1^-)^2 < K_2.$$

En vista que (1.61) proporciona un intervalo bien definido para los θ_L , vamos a suponer ahora que $K_1 = K_1^\pm$ es una cantidad que podemos determinar a plenitud considerando algunos valores arbitrarios para $\theta_L \in (\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]$. Esto en principio nos va a permitir calcular K_2 resolviendo numéricamente (1.50). Tengamos en cuenta que al suponer $K_1 = K_1^\pm$, desde (1.59) se deduce que $Z(\theta_L; K_1^\pm) = Z^\pm \rightarrow 0$ para todo $1/3 < \theta_L \leq 5/3$. Esto lo podemos corroborar con los resultados tabulados en los Cuadros 1.3–1.4.

θ_L	q_0^-	q_1^-	q_2^-	q_3^-	K_1^-	Z^-	K_2^-
17/50	14.78314404	33.208498	24.86308713	6.204132816	-7.22824773	-2×10^{-9}	-1.3708158072
2/3	0.2323762852	2.58120067	8.637048004	7.620634755	-7.94618621	1×10^{-10}	-0.7234465892
1	0	0	4	8	-8	0	-0.5
4/3	1.2996×10^{-4}	-0.20873187	8.002291013	7.698003589	-7.92820323	-1.2×10^{-9}	-1.0650030764
83/50	13.80376711	-24.1883501	22.28509292	6.905876918	-7.369360233	-3×10^{-10}	-4.1794516648
5/3	35.11659813	-20.4009005	$26.\bar{6}$	6.885303727	-7.229568913	-3×10^{-10}	-4.7278575262

Cuadro 1.3: Valores arbitrarios para $1/3 < \theta_L \leq 5/3$ con los cuales se calculan los coeficientes q_i^- desde (1.51), Z^- desde (1.59), K_1^- desde (1.60) y $K_2^- \neq 0$ desde (1.50) resolviendo $Q^- = 0$.

θ_L	q_0^+	q_1^+	q_2^+	q_3^+	K_1^+	Z^+	K_2^+
17/50	34.64719224	58.57959	33.01805954	6.204132816	-6.583104994	-6×10^{-9}	-1.7953477834
2/3	485.6057582	352.8871379	88.69628533	7.620634755	-5.117759085	1×10^{-10}	-4.4578011084
1	1024	545.1851852	$110.\bar{6}$	8	-5. $\bar{3}$	1×10^{-10}	-6.104860743
4/3	948.8503503	421.7171943	94.21993121	7.698003589	-5.92820323	-7×10^{-10}	-6.8815695882
83/50	76.3174494	-5.3671263	32.42629375	6.905876918	-7.077388219	-4×10^{-10}	-5.245296897
5/3	35.11659813	-20.4009005	$26.\bar{6}$	6.885303727	-7.229568913	-3×10^{-10}	-4.7278575262

Cuadro 1.4: Valores arbitrarios para $1/3 < \theta_L \leq 5/3$ con los cuales se calculan los coeficientes q_i^+ desde (1.51), Z^+ desde (1.59), K_1^+ desde (1.60) y $K_2^+ \neq 0$ desde (1.50) resolviendo $Q^+ = 0$.

Note que los valores Z^\pm que aparecen en los Cuadros 1.3–1.4 son muy cercanos al cero, tal y como se esperaba. Los valores K_2^\pm han sido obtenidos desde (1.50) resolviendo numéricamente los polinomios $Q^\pm = Q(\theta_L; K_1^\pm, K_2^\pm) = 0$, cuyos coeficientes $q_i(\theta_L; K_1^\pm) = q_i^\pm$ son positivos en todo momento¹⁰. Algunas de las gráficas Q vs K_2 se ilustran en la Figura 1.8.

Estos resultados contienen varias inconsistencias a considerar. Por un lado, los valores K_2^\pm deben ser estrictamente mayores que Z^\pm y ninguno de los resultados que aparecen en los Cuadros 1.3–1.4 satisface esta condición; por otro lado, al considerar $K_1 = K_1^\pm$ se sabe que $Z = 0$ y en consecuencia los K_2 deben ser estrictamente positivos, lo cual evidentemente no se cumple. Esto se puede apreciar en los trazos de la Figura 1.8. En este sentido, no nos queda más alternativa sino descartar por completo el Caso iii.

1.2.3.4. Caso iv: $K_1 < 0$, $K_2 > 0$ (caso general).

Para considerar un caso *general* en el que el arreglo $(\theta_L; K_1, K_2)$ sea consistente con todos los requerimientos, condiciones e hipótesis contempladas en el estudio del diodo plano al vacío magneto–aislante modelado numéricamente vía Taylor, primero haremos un breve recuento de los casos anteriores y el por qué fueron excluidos.

- Caso i. Suposición: $K_1 = 0$, $K_2 > 0$.

De (1.35) se obtiene $K_2 > \tilde{Z}_L$. Luego se consideran algunos valores θ_L arbitrarios en (1.51) y se resuelven numéricamente. Estos datos se tabulan en el Cuadro 1.1. Se encuentra que

¹⁰Con excepción del coeficiente q_1^\pm , dado que $q_1^- < 0$ para $\theta_L > 1.29334183368$ y $q_1^+ < 0$ para $\theta_L > 1.656672221$.

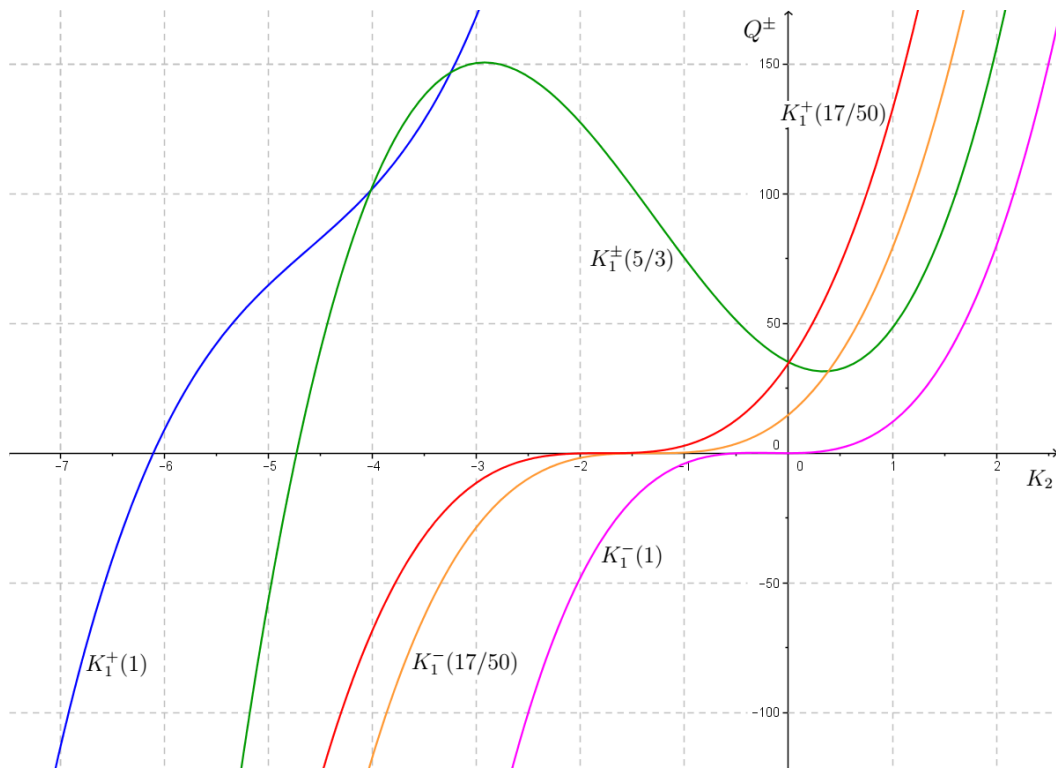


Figura 1.8: Curvas Q^\pm vs K_2 asociadas a los Cuadros 1.3–1.4. De izquierda a derecha: $K_1^+(1)$ azul, $K_1^\pm(5/3)$ verde, $K_1^+(17/50)$ roja, $K_1^-(17/50)$ naranja, $K_1^-(1)$ púrpura. Nótese que el arreglo $(\theta_L; K_1^\pm) = (5/3; -28/\sqrt{15})$ es el único que produce curvas idénticas ($K_1^- = K_1^+$ en color verde). Como los q_i dados por (1.51) son no negativos, las curvas que se dibujan son trazos ascendentes vía polinomios de tercer grado con una única raíz real que siempre corta al eje de las abscisas negativas para todo $\theta_L \in (\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]$. No obstante, hay una excepción que se da para el arreglo $(\theta_L; K_1^-) = (1; -8)$, el cual es el único polinomio que produce dos raíces reales, a saber, $K_2^- = -1/2$ y $K_2^- = 0$. Esto se debe a que es el único que contiene los coeficientes nulos $q_0 = q_1 = 0$.

los θ_L satisfacen (1.54) pero como todos los K_2 obtenidos dan negativos, se produce una contradicción con una de las hipótesis iniciales. De este modo se concluye que K_1 no puede ser nulo y en consecuencia se descarta el Caso i.

- Caso ii. Suposición: $K_1 = K_2 = K > 0$.

La condición (1.35) se convierte en $\zeta = \sum_{l=0}^2 \sigma_l K^l < 0$. Como θ_L es positivo, los σ_i son positivos y las curvas $\zeta(K)$ se trazan como parábolas cóncavas hacia arriba que pueden tener vértices positivos o negativos. El examen realizado muestra que los valores $\theta_L \in (0, 1/3)$ son los que satisfacen (1.55) produciendo curvas con vértices negativos en el dominio $K_- < K < K_+$. En el Cuadro 1.2 se consideran algunos valores θ_L arbitrarios pero todos los valores K obtenidos son negativos contradiciendo la hipótesis inicial. Se concluye entonces que las constantes K_1 y K_2 no pueden ser iguales y por tanto el Caso ii queda descartado.

- Caso iii. Suposición: $K_1 = K_1^\pm, K_2 > 0$.

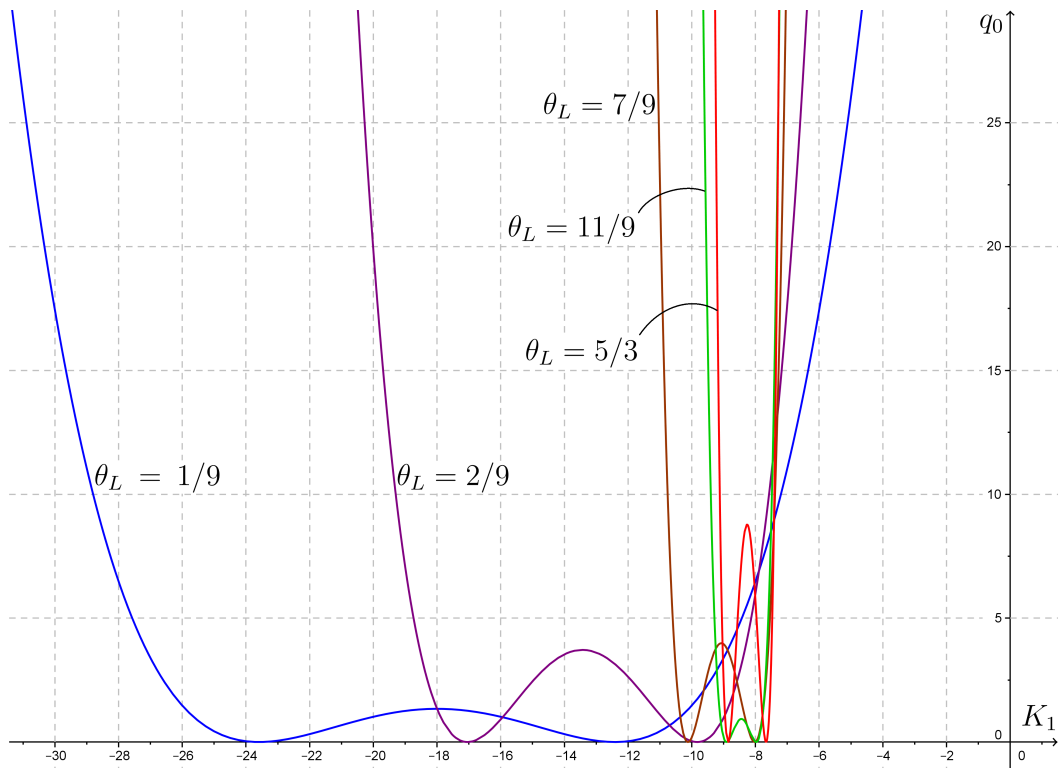


Figura 1.9: Curvas q_0 vs K_1 dadas desde (1.51). De izquierda a derecha: $\theta_L = 1/9$ azul, $\theta_L = 2/9$ púrpura, $\theta_L = 7/9$ marrón, $\theta_L = 11/9$ verde, $\theta_L = 5/3$ rojo. Los trazos se localizan siempre por encima del eje de las abscisas ($q_0 \geq 0$); cada uno de ellos tiene dos mínimos absolutos que coinciden con las raíces de $q_0 = 0$ y un máximo relativo dado por (1.63) (véase Figura 1.10).

En este caso se asume que existen valores θ_L tales que la función Z en (1.35) puede escribirse como $Z = z_2(K_1 - K_1^-)(K_1 - K_1^+)$, donde las K_1^\pm vienen dadas por (1.60). Esta relación permite deducir que $\theta_L \in (1/3, 5/3]$ con $K_1^- < K_1^+$. Se procede a resolver desde (1.50) los polinomios $Q^\pm = 0$. El análisis de resultados muestra, por un lado, que los valores K_2^\pm no son estrictamente mayores que Z^\pm , y por otro lado, que de acuerdo con los Cuadros 1.3–1.4 ninguno de los K_2 obtenidos es positivo. En este sentido también descartamos el Caso iii.

Si bien en estos casos se prueba sin éxito algunas consideraciones particulares, al menos ya se tiene la certeza que K_1 y K_2 no pueden ser iguales, la función cuadrática Z no se puede factorizar como un producto de monomios en K_1 , ninguna de las cantidades K_1 o K_2 puede ser nula y tanto K_2 como $\theta_L \neq \frac{1}{3}$ deben ser estrictamente positivas.

En el análisis que hicimos en la sub–subsección 1.2.2.3 para la Tercera Condición, se concluyó que dados $(\theta_L; K_1)$ era posible determinar los q_i y luego resolver numéricamente el polinomio de tercer grado (1.50) para encontrar al menos una raíz real K_2 que satisfaga tanto $Q \approx 0$ como $K_2 > Z > 0$ dada por (1.35).

Para caracterizar los intervalos asociados a cada parámetro del arreglo $(\theta_L; K_1, K_2)$, vamos a retomar la expresión (1.50) y analizar en detalle el comportamiento de cada uno de los coeficientes

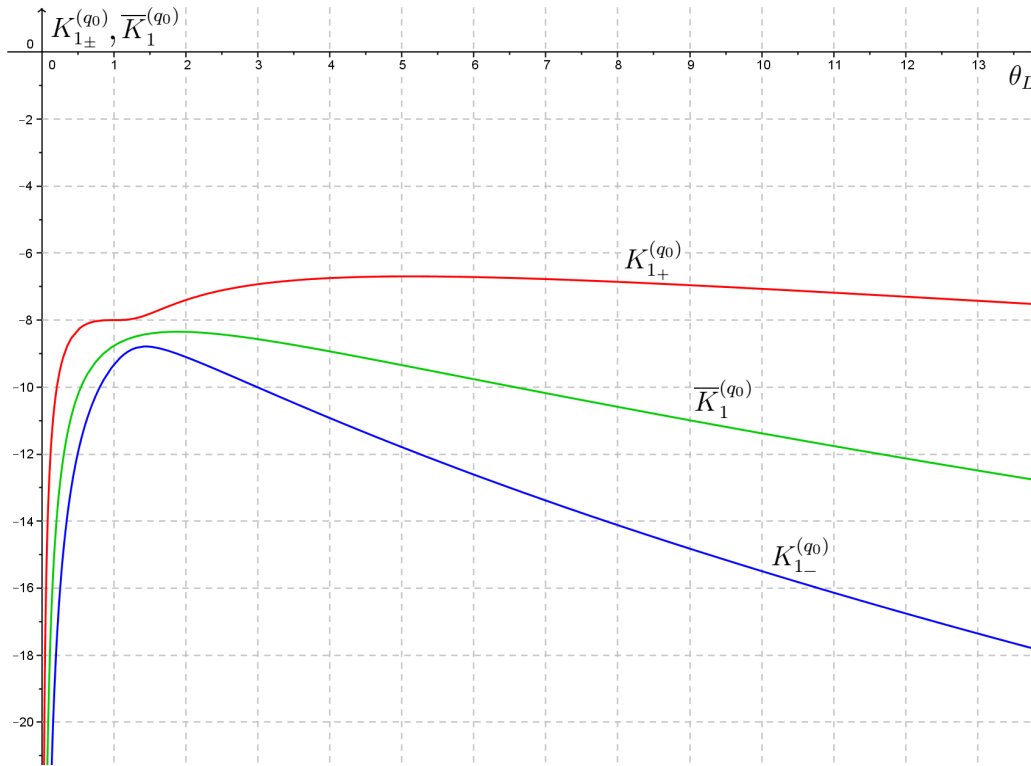


Figura 1.10: Curvas $K_{1\pm}^{(q_0)}$ vs θ_L dadas desde (1.62). El trazo $K_{1+}^{(q_0)}$ (rojo) tiene un mínimo relativo en $\theta_L = 1$ y un máximo absoluto en $\theta_L = 5.1285160567$; $K_{1-}^{(q_0)}$ (azul) tiene máximo en $\theta_L = 1.4429125146$; y la curva $\bar{K}_1^{(q_0)}$ (verde) dada por (1.63) tien máximo en $\theta_L = 17/9 = 1.\bar{8}$. Las tres curvas son negativas para todo $\theta_L > 0$.

q_i en función de K_1 para algunos valores $\theta_L > 0$ fijos. De esta manera podremos referir con precisión cómo influyen los q_i en el desarrollo del problema.

1.2.3.5. Comportamiento de los coeficientes q_0 cuando se fija θ_L .

En la Figura 1.9 podemos apreciar que todas las curvas q_0 vs K_1 toman forma de “w” independientemente del valor θ_L que escojamos. Los cortes con el eje de las abscisas ocurren cuando

$$K_{1\pm}^{(q_0)} = \frac{-(9\theta_L + 17) \pm \sqrt{21\theta_L^2 - 54\theta_L + 37}}{3\theta_L^{1/2}} < 0. \quad (1.62)$$

El valor medio de los $K_{1\pm}^{(q_0)}$ proporciona el máximo relativo de la curva q_0 (véase Figura 1.10)

$$\bar{K}_1^{(q_0)} = \frac{K_{1+}^{(q_0)} + K_{1-}^{(q_0)}}{2} = -\frac{9\theta_L + 17}{3\theta_L^{1/2}} \leq -2\sqrt{17} \simeq -8.24. \quad (1.63)$$

La única forma en la que la curva q_0 vs K_1 se vea afectada por θ_L ocurre en la medida que este parámetro tome valores cada vez más grandes, pues $\bar{K}_1^{(q_0)}$ será cada vez mayor y los puntos de

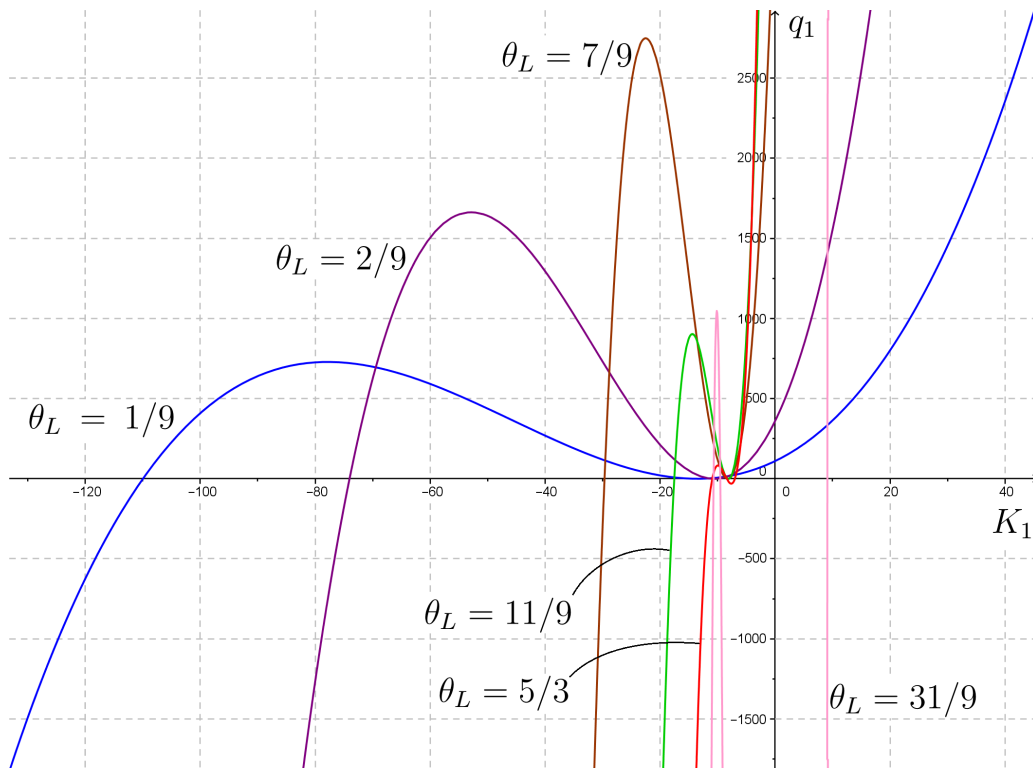


Figura 1.11: Curvas q_1 vs K_1 dadas desde (1.51). De izquierda a derecha: $\theta_L = 1/9$ azul, $\theta_L = 2/9$ púrpura, $\theta_L = 7/9$ marrón, $\theta_L = 11/9$ verde, $\theta_L = 5/3$ rojo, $\theta_L = 31/9$ rosa. Los trazos se comportan de tres maneras: para valores $0 < \theta_L < 5/3$ las curvas q_1 son anchas y tienen las tres raíces negativas; para $\theta_L \rightarrow 5/3^-$ las curvas q_1 tienen una anchura cada vez más pequeña pero sus tres raíces siguen siendo negativas; para valores $\theta_L > 5/3$ la anchura vuelve a incrementar pero ahora siempre aparecerá una raíz positiva sin importar cuán grande sea θ_L .

Los cortes $K_{1\pm}^{(q_0)}$ se irán juntando progresivamente a la vez que se desplazan hacia la derecha, pero sin llegar jamás a coincidir ni con el cero ni entre si. Los puntos críticos θ_L asociados a las curvas (1.62) se muestran en la Figura 1.10 y se encuentran resolviendo el polinomio

$$(\theta_L - 1)(35\theta_L^3 - 265\theta_L^2 + 489\theta_L - 259) = 0.$$

1.2.3.6. Comportamiento de los coeficientes q_1 cuando se fija θ_L .

En la Figura 1.11 se observa que las curvas q_1 vs K_1 producen cúbicas ascendentes de izquierda a derecha con todas sus raíces reales ocurriendo cuando $q_1 = 0$, esto es, las raíces de

$$2\theta_L^{3/2} [K_1^{(q_1)}]^3 + 3\theta_L(31 - 5\theta_L) [K_1^{(q_1)}]^2 + 2\theta_L^{1/2}(327 + 226\theta_L - 117\theta_L^2) [K_1^{(q_1)}] + 4(311 + 525\theta_L + 57\theta_L^2 - 141\theta_L^3) = 0. \quad (1.64)$$

Al derivar (1.64) con respecto a $K_1^{(q_1)}$ e igualar a cero, obtenemos la fórmula que proporciona el mínimo relativo $K_{1-}^{(q_1)}$ y máximo relativo $K_{1+}^{(q_1)}$ (los puntos críticos de q_i cuando se fija θ_L)

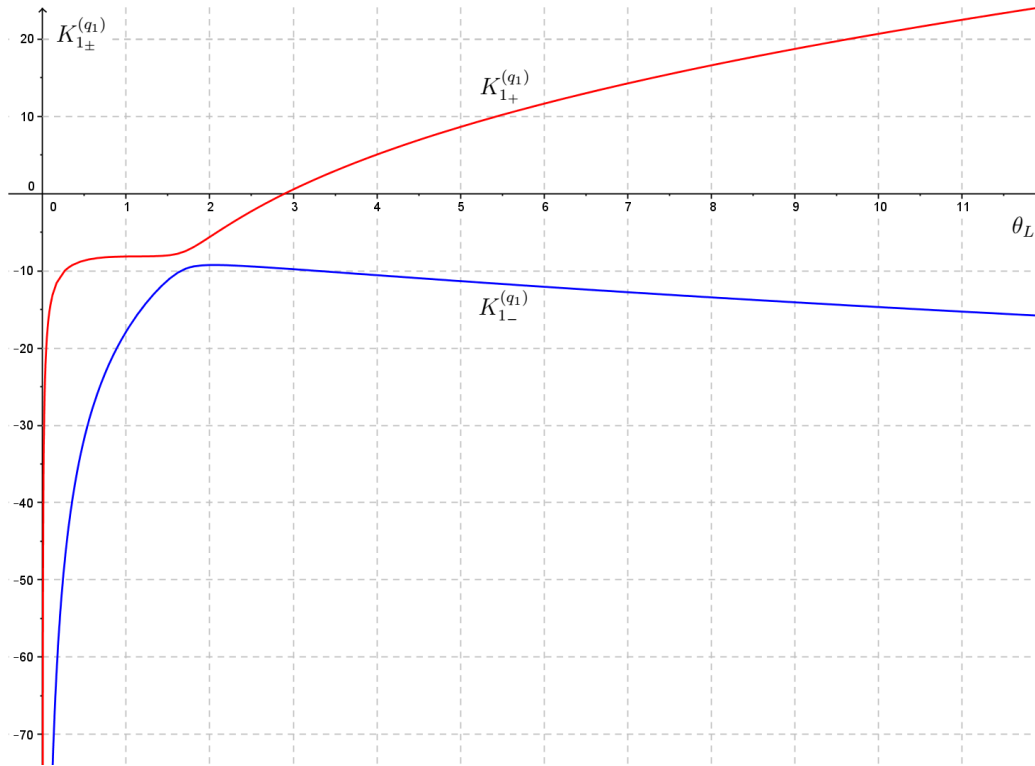


Figura 1.12: Curvas $K_{1\pm}^{(q_1)}$ vs θ_L dadas desde (1.65): $K_{1+}^{(q_1)}$ rojo, $K_{1-}^{(q_1)}$ azul. La curva $K_{1+}^{(q_1)}$ entrega imágenes negativas para valores $0 < \theta_L < \frac{113+2\sqrt{12757}}{117} \simeq 2.89$ e imágenes no negativas para $\theta_L > 2.89$. La curva $K_{1-}^{(q_1)}$ entrega valores negativos para todo $\theta_L > 0$ alcanzando su máximo absoluto en $\theta_L = 2.0467352887$ donde $K_{1-}^{(q_1)} \leq K_{1-}^{(q_1)}(2.04) = -9.234550442$.

$$K_{1\pm}^{(q_1)} = \frac{3(5\theta_L - 31) \pm \sqrt{3(543\theta_L^2 - 1834\theta_L + 1575)}}{6\theta_L^{1/2}}. \quad (1.65)$$

En la Figura 1.12 podemos apreciar el comportamiento de los $K_{1\pm}^{(q_1)}$, mientras que en la Figura 1.11 se ilustran algunos trazos de las cúbicas

$$q_1 = \mu_3 K_1^3 + \mu_2 K_1^2 + \mu_1 K_1 + \mu_0,$$

donde los coeficientes μ_i son constantes. Nos interesa encontrar el valor θ_L para el cual

$$\mu_0 = -4(141\theta_L^3 - 57\theta_L^2 - 525\theta_L - 311) = 0,$$

en cuyo caso se tendría que $K_1 = 0$ es una de las raíces de $q_1 = 0$ y las otras dos raíces vienen dadas por la fórmula

$$K_{1\mu}^{\pm} = \frac{-\mu_2 \pm \sqrt{\mu_2^2 - 4\mu_1\mu_3}}{2\mu_3}.$$

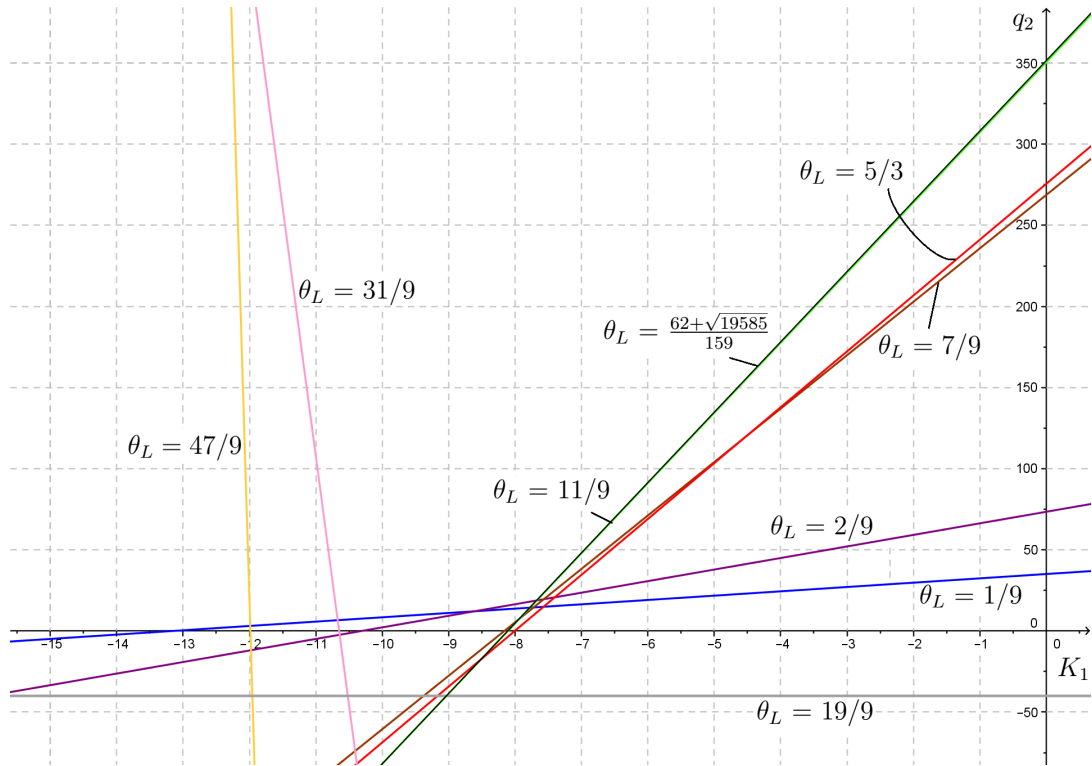


Figura 1.13: Curvas q_2 vs K_1 dadas desde (1.51): $\theta_L = 1/9$ azul, $\theta_L = 2/9$ púrpura, $\theta_L = 7/9$ marrón, $\theta_L = 11/9$ verde, $\theta_L = \frac{62+\sqrt{19585}}{159}$ negro, $\theta_L = 5/3$ rojo, $\theta_L = 19/9$ gris, $\theta_L = 31/9$ rosa, $\theta_L = 47/9$ amarillo. La pendiente de la recta $m_L = m(\theta_L) = 4\theta_L^{3/2}(19 - 9\theta_L)$ será positiva para $0 < \theta_L \leq 19/9 = 2.\bar{1}$ (rectas ascendentes) y negativa para los demás $\theta_L > 2.\bar{1}$ (rectas descendentes). El corte con el eje horizontal es el valor K_1 descrito por la fórmula (1.66) mientras que el corte con el eje vertical viene dado por $b_L = b(\theta_L) = 3\theta_L(99 + 62\theta_L - 53\theta_L^2)$, el cual será positivo para $0 < \theta_L \leq \frac{31+8\sqrt{97}}{53} \simeq 2.07$ y negativo para los demás $\theta_L > 2.07$. Cuando $\theta_L = 2.\bar{1}$, la curva q_2 será una recta horizontal con punto de corte en $b(2.\bar{1}) = -40.03292181$ correspondiente a $m_L = 0$.

Al resolver numéricamente el polinomio $\mu_0 = 0$ se obtienen los ceros $\theta_L = -1.1667422353$, $\theta_L = -0.7979984238$ y $\theta_L = 2.3689959783$, de los cuales sólo tomamos en cuenta el no negativo. Ahora, para garantizar que $\theta_L = 2.368$ sea un valor apropiado, debemos encontrar el dominio de valores para el discriminante

$$\mu_2^2 - 4\mu_1\mu_3 = \theta_L^2(2097\theta_L^2 - 6406\theta_L + 3417) \geq 0,$$

cuyas raíces son $\theta_L = 0.6886462792$ y $\theta_L = 2.366193969$, i.e., el dominio de los θ_L positivos es tal que $\theta_L \notin (0.688, 2.366)$. Esto significa que el valor $\theta_L = 2.368$ es apropiado, en cuyo caso $K_1 = 0$, $K_{1\mu}^+(2.368) = -8.823491588$ y $K_{1\mu}^-(2.368) = -9.844246956$ serían las raíces de $q_1 = 0$ cuando $\mu_0 = 0$. En la Figura 1.11 podemos apreciar que para valores $\theta_L < 2.368$ las cúbicas q_1 tienen todas sus raíces negativas, mientras que para valores $\theta_L > 2.368$ siempre aparecerá una raíz positiva. Queremos averiguar si este comportamiento es reiterativo analizando las curvas q_2 .

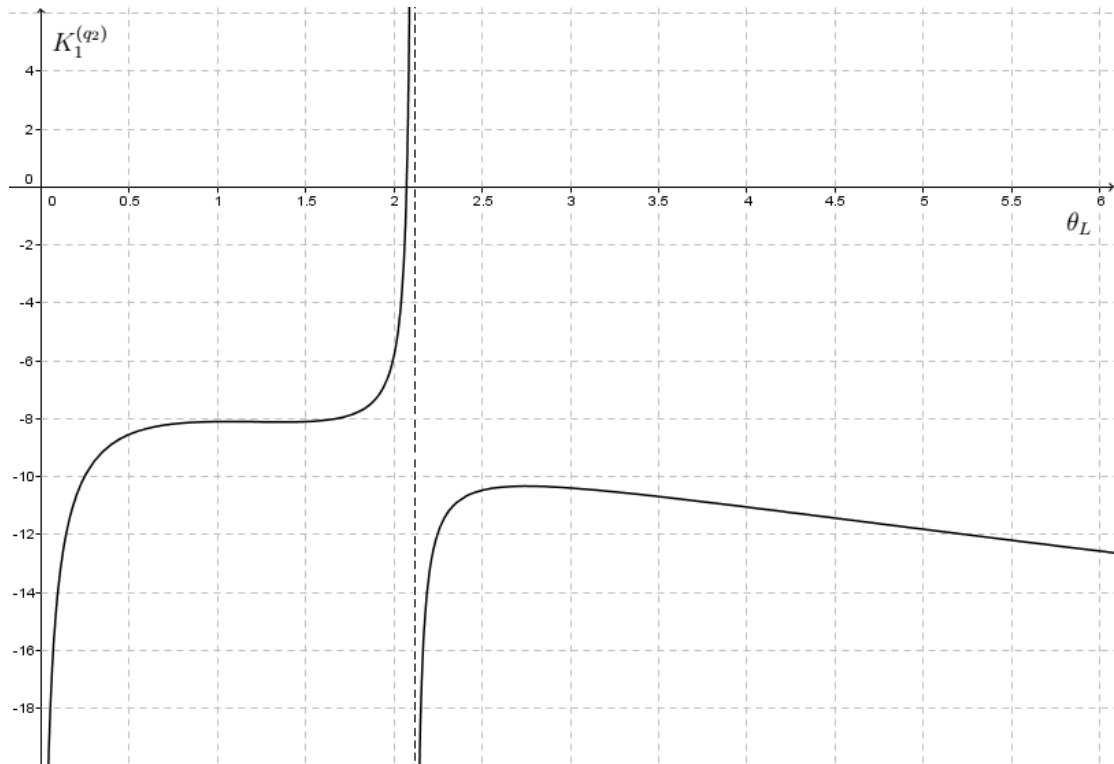


Figura 1.14: Curva $K_1^{(q_2)}$ vs θ_L dada desde (1.66) con una asíntota en $\theta_L = 19/9 = 2.\bar{1}$. La ramificación a la izquierda de la asíntota tiene un máximo en $\theta_L = 1.0528399943$, un mínimo en $\theta_L = 1.3632847726$ y corta al eje de las abscisas en $\theta_L = 2.071525706$. La ramificación a la derecha de la asíntota tiene un máximo absoluto en $\theta_L = 2.7473972456$ y siempre es negativa.

1.2.3.7. Comportamiento de los coeficientes q_2 cuando se fija θ_L .

En la Figura 1.13 se muestran las rectas q_2 vs K_1 para algunos θ_L . Estas rectas claramente tienen la forma $q_2 = m_L K_1^{(q_2)} + b_L$. Cuando $q_2 = 0$, los valores K_1 vienen dados por la fórmula

$$K_1^{(q_2)} = \frac{3(99 + 62\theta_L - 53\theta_L^2)}{4\theta_L^{1/2}(9\theta_L - 19)}, \quad (1.66)$$

la cual tiene una asíntota vertical en $\theta_L = 19/9 = 2.\bar{1}$. En la Figura 1.14 se puede apreciar que $K_1^{(q_2)}$ toma valores no negativos para $\frac{31+8\sqrt{97}}{53} \simeq 2.07 \leq \theta_L < 2.\bar{1}$, mientras que para todos los demás valores positivos $\theta_L \notin [2.07, 2.\bar{1})$ predominarán las imágenes $K_1^{(q_2)} < 0$.

De acuerdo con las Figuras 1.13 y 1.15 las rectas q_2 serán cuasi-horizontales en la medida que $\theta_L \rightarrow 0$, mientras que se obtendrán rectas cuasi-verticales para $\theta_L \rightarrow \infty$ cuya inclinación máxima estará dada por¹¹ $\vartheta_{\max} = |\tan^{-1}[m(1.2\bar{6})]| = 88^\circ 40' 41.38''$.

¹¹El valor $\theta_L = 1.2\bar{6}$ es el valor para el cual la curva m_L vs θ_L alcanza su máximo relativo (véase Figura 1.15).

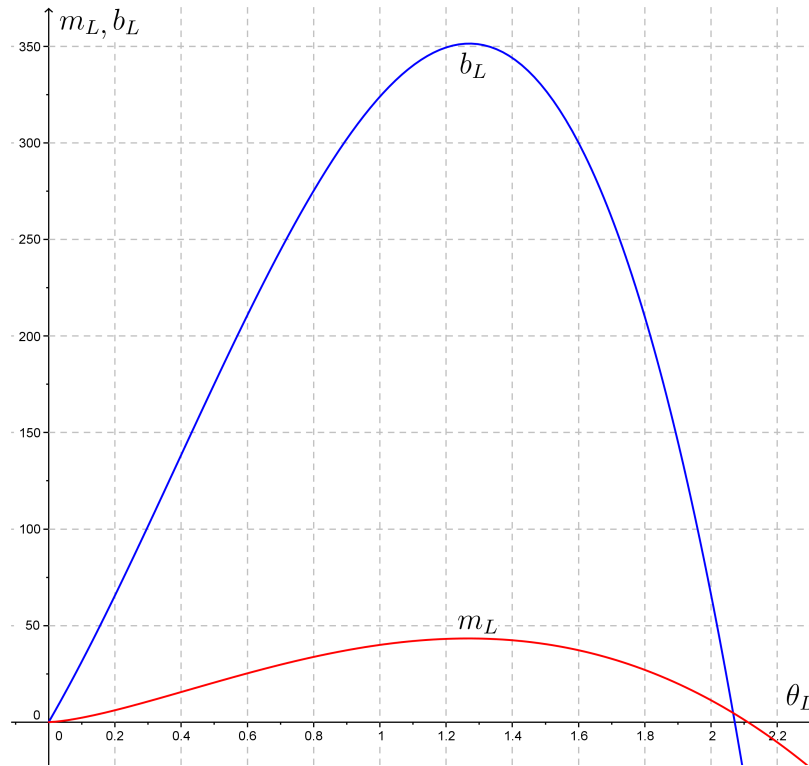


Figura 1.15: Curvas m_L (rojo) y b_L (azul) dadas por la función $q_2 = m_L K_1 + b_L$ descrita en (1.51). Está a escala 1 a 250. La pendiente m_L tiene un máximo absoluto en $\theta_L = \frac{19}{15} = 1.2\bar{6}$, luego, m_L es creciente para valores $0 < \theta_L < 1.2\bar{6}$ y decreciente para $\theta_L > 1.2\bar{6}$; de aquí se tiene que $m_L \leq m(1.2\bar{6}) = 43.33782349$. Por su parte el corte b_L tiene un máximo relativo en $\theta_L = \frac{62 + \sqrt{19585}}{159} \simeq 1.27$ cuya imagen es $b(1.27) = 351.4965075$ (véase en la Figura 1.13 el corte vertical producido por el trazo de color negro). Ambas curvas coinciden en $\theta_L = 2.0666504486$.

1.2.3.8. Comportamiento de los coeficientes q_3 .

En la Figura 1.16 se muestra la curva $q_3(\theta_L)$ la cual es claramente independiente de K_1 . Para nuestros intereses los coeficientes q_3 no proporcionan mayor información. ■

Como es de notar, las curvas q_0 , q_1 y q_2 tienen todas en común una predominancia de los valores $K_1 < 0$ en donde se produce la mayoría de las raíces $q_i = 0$. Vamos a utilizar algunos de los valores θ_L considerados en las Figuras 1.9–1.13 para calcular los z_i definidos en (1.35) y construir las gráficas Z vs K_1 . Estos resultados se ilustran en el Cuadro 1.5.

Los vértices de las curvas Z vienen dados por la fórmula

$$K_1^* = -\frac{z_1}{2z_2} = -\frac{4(3\theta_L + 2)}{3\theta_L^{1/2}}, \quad (1.67)$$

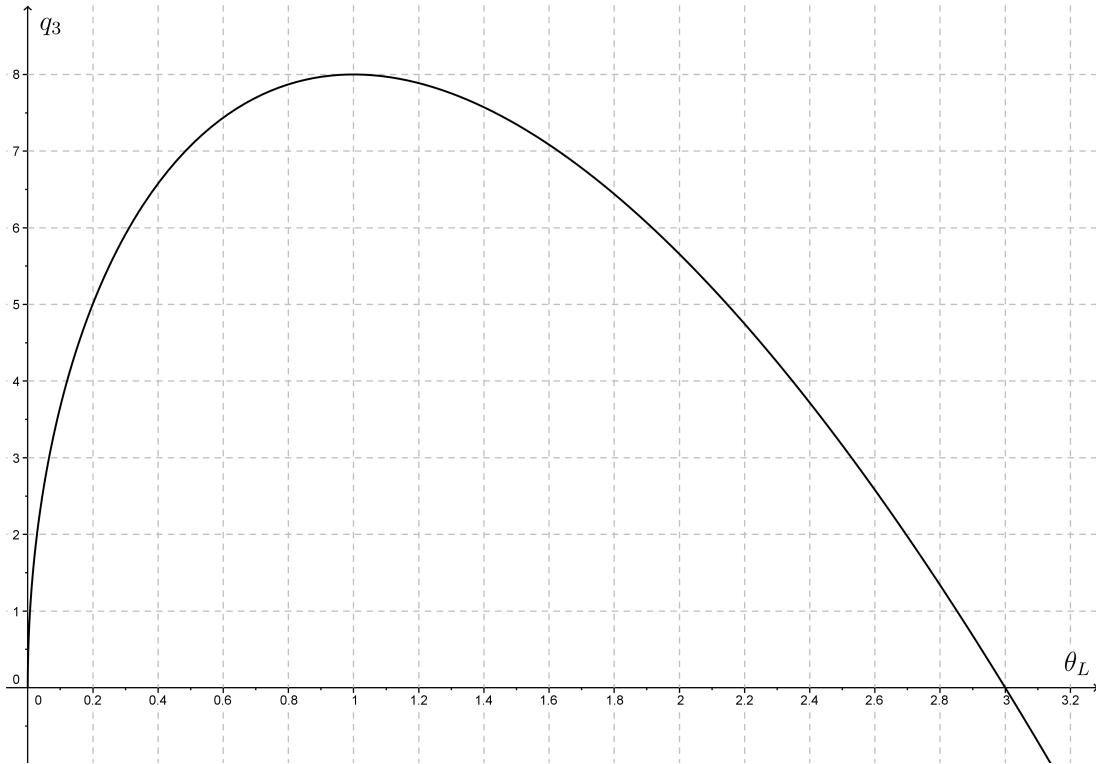


Figura 1.16: Curva q_3 vs θ_L dada por (1.51). Se observa un trazo cóncavo hacia abajo con un máximo absoluto en $\theta_L = 1$ para el cual $q_3(1) = 8$, por tanto las imágenes son $q_3(\theta_L) \leq 8$ para todo $\theta_L > 0$. La curva interseca al eje de las abscisas en $\theta_L = 3$ (i.e. $q_3 = 0$) y en consecuencia, para valores $0 < \theta_L \leq 3$ se tiene $q_3 \geq 0$ mientras que para $\theta_L > 3$ se producen valores $q_3 < 0$.

θ_L	1/9	2/9	7/9	11/9	5/3	31/9	47/9
z_0	-8.296	-28.17951469	31.55303415	34.51746541	42.17248533	87.25776742	145.9308026
z_1	-1.5	-7.1	10.1	10.38	11.6	18.20634921	25.16
z_2	-0.083	-0.47140452	0.7716774657	0.7600598478	0.8068715305	1.027385091	1.220514266
q_3	3.851	5.237828009	7.839263144	7.861629133	6.885303727	-3.299415919	-20.31305067

Cuadro 1.5: Cálculo de los z_i dados por (1.35) y q_3 dada por (1.51) para algunos valores de θ_L . De acuerdo con la Figura 1.17, por el signo de z_2 hay dos parábolas cóncavas hacia abajo ($\theta_L = 1/9$ y $\theta_L = 2/9$); las restantes son cóncavas hacia arriba.

y se localizan en los K_1 negativos tal y como podemos apreciar en la Figura 1.17. Las imágenes de Z evaluadas en K_1^* corresponden justamente a los vértices de las parábolas y están dadas por la fórmula (véase Figura 1.18)

$$Z^* \equiv Z(K_1^*) = \frac{2}{3}\theta_L^{1/2}(3\theta_L - 5). \quad (1.68)$$

En la Figura 1.17 notamos el modo en que se comportan las parábolas $Z(\theta_L; K_1)$ a medida que varía θ_L .

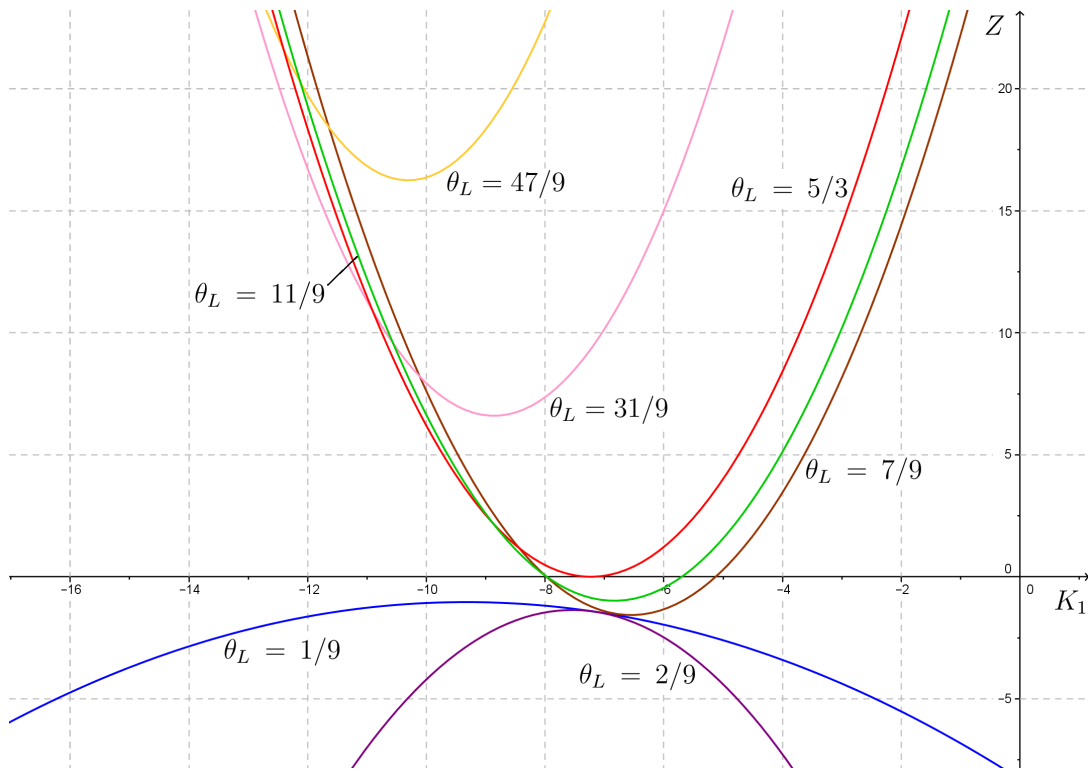


Figura 1.17: Parábolas Z vs K_1 dadas por (1.35) para valores fijos de θ_L y asociadas al Cuadro 1.5: $\theta_L = 1/9$ azul, $\theta_L = 2/9$ púrpura, $\theta_L = 7/9$ marrón, $\theta_L = 11/9$ verde, $\theta_L = 5/3$ rojo, $\theta_L = 31/9$ rosa, $\theta_L = 47/9$ amarillo. Entre todas las parábolas Z , la curva cuyo vértice está localizado *más* hacia el extremo derecho es aquella calculada en $\theta_L = 2/3$; esto impone un máximo y por lo tanto es cierto que $K_1^* \leq K_1^+(2/3) = -8\sqrt{6}/3 \simeq -6.53$.

Como se vio en la Figura 1.1, para valores $0 < \theta_L < 1/3$, los coeficientes z_i son todos negativos y las parábolas que se dibujan son cóncavas hacia abajo, están trazadas por debajo del eje de las abscisas, su vértice es negativo y en consecuencia entregan imágenes $Z < 0$. Para valores $1/3 < \theta_L \leq 5/3$, los coeficientes z_i son positivos, las parábolas son cóncavas hacia arriba y cortan al eje de las abscisas en los puntos dados por la fórmula (1.60). Esto produce dos tipos de imágenes: $Z \leq 0$ (vértices negativos) para $K_1^- \leq K_1 \leq K_1^+$ y $Z > 0$ (vértices positivos) para todo¹² $K_1 \notin (K_1^-, K_1^+)$.

Por último, para valores $\theta_L > 5/3$ los coeficientes z_i son positivos, las parábolas son cóncavas hacia arriba, sus vértices son positivos y todas las curvas se trazan por encima del eje de las abscisas produciendo imágenes $Z > 0$. Acto seguido calculamos los valores $K_2 > 0$ resolviendo la cúbica $Q \approx 0$ desde (1.50), de tal modo que éstas raíces satisfagan la condición (1.35). Para ello vamos a tomar como referencia los análisis que recién hicimos sobre el comportamiento de los coeficientes q_i para establecer qué valores K_1 podemos considerar. En el Cuadro 1.6 se recopilan algunos posibles valores para elegir los K_1 fijando al parámetro θ_L . El Cuadro 1.7 emerge aquí como uno de los resultados más importantes de esta investigación.

¹²Note que $Z = 0$ aparece sólo cuando $\theta_L = 5/3$ y $K_1 = -28\sqrt{15}/15 \simeq -7.22$, de tal manera que el vértice de la parábola coincide con el eje de las abscisas.

θ_L	1/9	2/9	7/9	11/9	5/3	31/9	47/9
$K_{1-}^{(q_0)}$	-23.59099806	-17.04314726	-10.12020841	-8.906524731	-8.858649266	-10.41843743	-11.97589335
$K_{1+}^{(q_0)}$	-12.40900194	-9.826910424	-8.022086296	-7.978110566	-7.666079678	-6.82367156	-6.694825565
$\overline{K}_1^{(q_0)}$	-18	-13.43502884	-9.071147352	-8.442317648	-8.262364472	-8.621054497	-9.335359456
$K_{1_{(izq)}}^{(q_1)}$	-109.9475122	-74.01834555	-29.66709223	-17.53401232	-10.93267282	-10.69421792	-12.23409425
$K_{1_{(med)}}^{(q_1)}$	-14.67210731	-11.27446574	-8.4225514	-8.25786754	-8.423265216	-9.5390607846	-10.729922863
$K_{1_{(der)}}^{(q_1)}$	-12.38038045	-9.8130509	-8.022022015	-7.9773907266	-6.9803487247	9.0977499785	19.7549873
$K_{1-}^{(q_1)}$	-77.81389741	-52.86435517	-22.51975877	-14.39626204	-9.93346279	-10.12531439	-11.49105852
$K_{1+}^{(q_1)}$	-13.51943592	-10.53955288	-8.221351706	-8.116585023	-7.624061713	2.701628576	9.351705308
$K_{1_{(q_2)}}^{(q_2)}$	-13.15432099	-10.30966	-8.16123288	-8.107305043	-8.004165582	-10.64992921	-11.98639779
K_1^*	-9.3	-7.5424723	-6.551384199	-6.834257144	-7.229568913	-8.860528233	-10.30779273

Cuadro 1.6: Cálculo de los posibles valores K_1 utilizando las fórmulas (1.62)–(1.67) para algunos θ_L dados. Las cantidades $K_{1_{(izq)}}^{(q_1)}$, $K_{1_{(med)}}^{(q_1)}$ y $K_{1_{(der)}}^{(q_1)}$ corresponden a las tres raíces reales del polinomio (1.64) obtenidas numéricamente y organizadas respectivamente de menor a mayor.

Como podemos apreciar en el Cuadro 1.7, de los cuatro valores empleados para θ_L los dos primeros $\theta_L = 1/9$ y $\theta_L = 2/9$ tienen muchas similitudes dado que ambos se localizan en el rango $0 < \theta_L < 1/3$. De acuerdo con la Figura 1.17 todas las imágenes Z obtenidas son negativas, luego, cualquier $K_2 > 0$ será suficientemente adecuado para nuestros intereses.

El polinomio $Q \approx 0$ provee tres raíces K_2 que en su orden satisfacen $K_{2_{(izq)}} < K_{2_{(med)}} < K_{2_{(der)}}$. Se puede inferir que cuando $K_1 = K_{1-}^{(q_0)}$, no hay raíz K_2 negativa porque su corte izquierdo pasa por el origen; cuando $K_1 = K_{1+}^{(q_0)}$ se da un caso único en el cual su corte izquierdo da una raíz negativa, el corte medio pasa por el origen y el corte derecho da una raíz positiva; también vemos que tanto para $K_1 = K_{1_{(der)}}^{(q_1)}$ como para $K_1 = K_1^*$, los polinomios sólo tienen una raíz negativa ya que todos los coeficientes q_i asociados a Q son negativos.

Lo anterior sugiere que, a excepción de $K_1 = K_{1_{(der)}}^{(q_1)}$ y $K_1 = K_1^*$, todos los demás valores referidos en el Cuadro 1.6 satisfacen a plenitud las ya reiteradas condiciones necesarias para obtener un adecuado arreglo magneto–aislante $(\theta_L; K_1, K_2)$, con $\theta_L \in (0, 1/3)$. La Figura 1.19 muestra la gráfica con la forma general de una curva $Q(\theta_L; K_1, K_2)$ asociada a $0 < \theta_L < 1/3$ que caracteriza el fenómeno de aislamiento magnético en el diodo plano al vacío modelado numéricamente vía polinomios de Taylor en segundo grado.

El tercer valor que se muestra en el Cuadro 1.7 es $\theta_L = 7/9$ y está localizado en el rango $1/3 < \theta_L \leq 5/3$. Todas las imágenes Z asociadas con $\theta_L = 7/9$ son positivas a excepción de Z^* ya que K_1^* es el punto medio entre los cortes K_1^- y K_1^+ dados por¹³ (1.60). Las raíces K_2 conservan las mismas características mencionadas en los párrafos anteriores, con la salvedad que aquí ninguna de las raíces satisface la condición (1.35) ya que como vemos $Z > K_2$ y en consecuencia estos valores quedan descartados. Ésta es una conclusión que podemos extender sin pérdida de generalidad a todos los valores que pertenezcan al intervalo $\theta_L \in (1/3, 5/3]$.

¹³Véase las curvas de color marrón en la Figura 1.17; la curva color rojo corresponde al caso especial $\theta_L = 5/3$ para el cual $K_1^* = K_1^\pm$.

θ_L	K_1	Z	q_0	q_1	q_2	$K_{2(\text{izq})}$	$K_{2(\text{med})}$	$K_{2(\text{der})}$
$\frac{1}{9}$	-23.59099806	-17.97712066	2.9660×10^{-18}	47.37704285	-27.83113886	0	2.74	4.78
	-12.40900194	-1.825348485	3.3204×10^{-18}	-0.034666143	1.98751746	-0.53	0	0.01
	-18	-7.296	1.340385857	9.435147078	-12.9218107	-0.12	1.35	2.12
	-109.9475122	-844.6381194	97322.87159	1.708×10^{-6}	-258.1151766	-17.31	24.33	59.98
	-14.67210731	-3.412246002	0.558860877	2×10^{-9}	-4.047430193	-0.32	0.52	0.85
	-12.38038045	-1.810745048	1.4122×10^{-4}	6×10^{-9}	2.063841434	-0.53
	-77.81389741	-391.8360084	17252.75501	728.4658555	-172.4255371	-7.61	16.29	36.08
	-13.51943592	-2.497324943	0.171574059	-0.694682489	-0.9736398197	-0.42	0.24	0.43
	-13.15432099	-2.253699258	0.083000631	-0.6238720005	-6.6×10^{-9}	-0.45	0.15	0.30
	-9.3	-1.037	2.637839384	8.980744804	10.18930041	-0.93
$\frac{2}{9}$	-17.04314726	-43.91213838	4.4×10^{-19}	104.310719	-47.96561152	0	3.55	5.60
	-9.826910424	-3.821933896	4.4×10^{-19}	-0.056530508	3.438862563	-0.67	0	0.01
	-13.43502884	-17.73004766	3.719765694	20.81077438	-22.26337447	-0.15	1.75	2.65
	-74.01834555	-2084.518075	293574.4903	-2.9931×10^{-5}	-453.8253651	-22.64	32.03	77.25
	-11.27446574	-7.927451186	1.530438622	-1.7×10^{-7}	-6.872719696	-0.41	0.68	1.04
	-9.8130509	-3.792173958	2.2038×10^{-4}	1.7×10^{-8}	3.537590135	-0.67
	-52.86435517	-969.6611614	52163.3967	1662.604025	-303.136055	-10.00	21.46	46.41
	-10.53955288	-5.596222443	0.471457698	-1.487728827	-1.637607555	-0.53	0.31	0.52
	-10.30966309	-4.971542104	0.231911082	-1.339914081	-2.93×10^{-8}	-0.57	0.20	0.36
	7.5424723	-1.36183524	10.33856288	24.72657235	19.71193439	-1.28
$\frac{7}{9}$	-10.12020841	8.26062223	9.6790×10^{-18}	131.0382581	-64.49908362	0	3.65	4.57
	-8.022086296	0.1012584516	6.0493×10^{-19}	-1.0496×10^{-3}	4.581388095	-0.58	0	0.0002
	-9.071147352	3.33168629	3.98903359	26.37605571	-29.95884773	-0.13	1.82	2.12
	-29.66709223	410.7671651	589569.643	-7.38×10^{-6}	-708.0783804	-25.48	37.86	77.94
	-8.4225514	1.133995975	1.522277718	-2.04×10^{-6}	-8.603887492	-0.36	0.69	0.77
	-8.022022015	0.1011125488	5.9912×10^{-8}	-9.3×10^{-7}	4.583504541	-0.58
	-22.51975877	195.2014022	106432.2084	2749.184729	-472.7531038	-11.52	25.35	46.47
	-8.221351706	0.5841949032	0.471533823	-1.61870363	-1.97940664	-0.46	0.34	0.37
	-8.16123288	0.4320365446	0.244719036	-1.47240436	7×10^{-9}	-0.50	0.23	0.26
	-6.55138419	-1.567852634	90.73281289	119.7159804	53.00411552	-2.59
$\frac{47}{9}$	-11.97589335	19.64659427	2.1380×10^{-12}	5815.32039	-14.0402259	-17.26	0	16.57
	-6.694825565	32.18246222	1.0908×10^{-14}	-336786.8168	-7072.708741	-291.26	-56.92	0
	-9.335359456	17.4045911	325409.9943	-66991.80579	-3543.374486	-152.05	-26.37	3.99
	-12.23409425	20.77932655	13692.54826	-3×10^{-4}	331.0707701	18.30
	-10.729922863	16.46792863	169194.9654	-3.1×10^{-4}	-1679.402805	-81.41	-10.76	9.50
	19.7549873	1119.315526	4714909508	1.49×10^{-3}	-42425.49513	-2032.38	-367.20	311.01
	-11.49105852	17.9593044	36195.28977	10066.83281	-662.0698458	-43.12	-3.04	13.57
	9.351705308	487.9741553	783989298.4	-2568996.241	-28520.48159	-1281.90	-245.02	122.87
	-11.98639779	19.68950178	20.68137674	5627.6297	-4.7×10^{-6}	-16.64	-0.003	16.64
	-10.30779273	16.2504405	243128.8067	-13925.98119	-2243.621403	-102.63	-15.39	7.57

Cuadro 1.7: Resultados para cuatro valores $\theta_L > 0$ utilizando los K_1 obtenidos en el Cuadro 1.6 y los z_i tabulados en el Cuadro 1.5 para calcular las imágenes Z desde (1.35). Los coeficientes q_0 , q_1 y q_2 son calculados desde (1.51) tales que al fijarlos, con ellos se obtienen numéricamente las raíces K_2 al resolver las cúbicas $Q \approx 0$ desde (1.50). Esto proporciona, en su orden (a lo sumo) tres cortes: $K_{2(\text{izq})} < K_{2(\text{med})} < K_{2(\text{der})}$ tal y como aparecen en la Figura 1.19. Los valores q_3 no dependen de K_1 y se muestran en el Cuadro 1.5 junto con los coeficientes z_i .

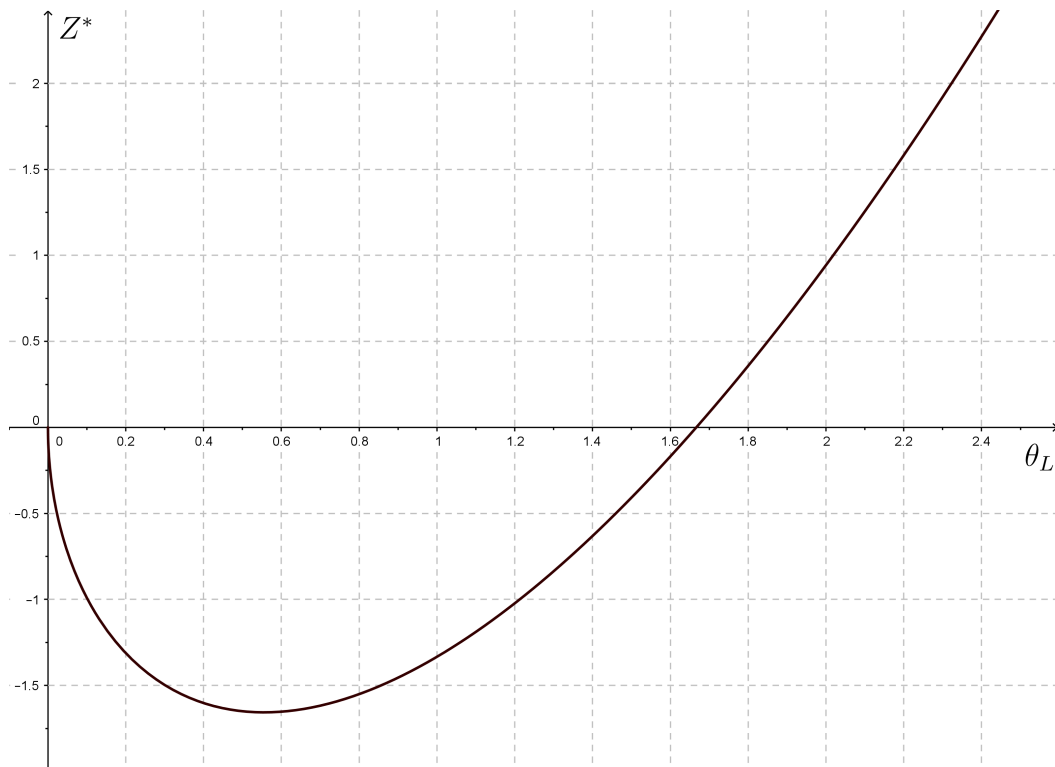


Figura 1.18: Curva Z^* vs θ_L dada desde (1.68) con mínimo absoluto en $\theta_L = 5/9$ y valores $Z^* \geq -\frac{20\sqrt{5}}{27} \simeq -1.65$. Esta gráfica sugiere que los vértices de las curvas Z son negativos en el intervalo $\theta_L \in (0, 5/3)$ y positivos para los demás $\theta_L > 5/3$.

El último valor que aparece en el Cuadro 1.7 es $\theta_L = 47/9$ perteneciente al rango $\theta_L > 5/3$. De acuerdo con la Figura 1.17, notamos que todas las imágenes Z asociadas son no negativas y que de las tres raíces K_2 asociadas a Q , sólo una de ellas es no negativa pero de nuevo encontramos que $Z > K_2$ y por tanto ninguna de ellas satisface a rigor la condición (1.35). En consecuencia estos valores también quedan descartados. Igual que en el párrafo anterior, ésta conclusión es extensible sin pérdida de generalidad a cualquier valor $\theta_L > 5/3$.

Dicho esto, finalmente disponemos de un valioso resultado concreto: **el parámetro θ_L está obligado a tomar valores únicamente en el intervalo**

$$0 < \theta_L < 1/3. \quad (1.69)$$

Este dominio obliga a descartar de manera inmediata la factorización (1.59). Desde la Figura 1.17 notamos que las curvas $Z(K_1)$ asociadas al intervalo (1.69) corresponden a aquellas que se dibujan cóncavas hacia abajo y alcanzan su máximo absoluto en el punto K_1^* dado por (1.67), descartando incluso aquellas que cortan el eje horizontal. Con esto se reafirma desde (1.68) que la condición $Z^* < 0$ se satisface a plenitud (véase la Figura 1.18).

En la Figura 1.17 también podemos apreciar que la apertura de la parábola es cada vez más grande en la medida que se toman valores cercanos a $\theta_L \rightarrow 0$, mientras que se cierra drásticamente

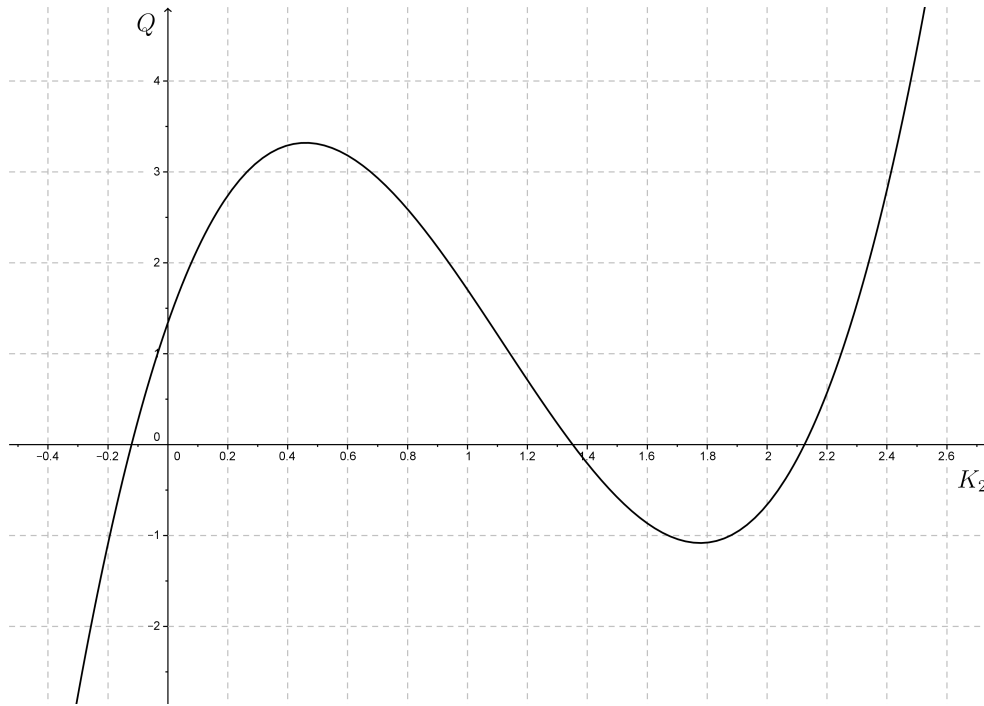


Figura 1.19: Forma general de la curva Q vs K_2 dada por (1.50) para valores $\theta_L \in (0, 1/3)$ y los K_1 tabulados en el Cuadro 1.6 (a excepción de $K_1 = K_{1(\text{der})}^{(q_1)}$ y $K_1 = K_1^*$). La gráfica mostrada corresponde a $\theta_L = 1/9$ y $K_1 = -18$ cuyas raíces son $K_{2(\text{izq})} = -0.1212136752$, $K_{2(\text{med})} = 1.3511010351$ y $K_{2(\text{der})} = 2.1248134946$ (véase Cuadro 1.7). De acuerdo con las Figuras 1.9–1.16 vemos que en este intervalo los coeficientes q_0 , q_1 y q_3 son no negativos mientras que q_2 es negativo. Esta combinación produce cúbicas ascendentes de izquierda a derecha; su primer corte $K_{2(\text{izq})}$ es negativo o a lo sumo nulo en cuyo caso $K_1 = K_{1-}^{(q_0)}$; el segundo corte $K_{2(\text{med})}$ es positivo o cuando menos nulo en cuyo caso $K_1 = K_{1+}^{(q_0)}$; el tercer corte $K_{2(\text{der})}$ es siempre positivo. Esto sugiere que tanto $K_{2(\text{med})}$ como $K_{2(\text{der})}$ emergen como buenos candidatos para nuestros intereses.

cuando nos acercamos a $\theta_L \rightarrow 1/3$. No obstante, en cualquier caso el valor máximo que puede tomar Z será precisamente aquel dado por (1.68) y como éste siempre es negativo, cualquier valor $K_2 > 0$ bastará para satisfacer (1.35), tal y como acabamos de comentar.

El último aspecto importante que nos falta por discutir es el dominio de los valores K_1 . Como ya se mencionó en el Cuadro 1.7, notamos que cuando $K_1 = K_{1+}^{(q_0)}$ el polinomio $Q(\theta_L; K_{1+}^{(q_0)}, K_2) \approx 0$ asociado a los valores $\theta_L \in (0, 1/3)$ provee respectivamente las raíces K_2 negativa–nula–positiva, de las cuales, por supuesto se descartan las dos primeras. Sin embargo $K_{1+}^{(q_0)}$ no es el valor más grande de los diez valores K_1 considerados en los Cuadros 1.6 y 1.7, ya que como podemos notar $K_{1+}^{(q_0)} < K_{1(\text{der})}^{(q_1)} < K_1^*$ y precisamente son estos dos valores $K_{1(\text{der})}^{(q_1)}$ y K_1^* los *únicos* que no producen raíces válidas. Entonces, sin pérdida de generalidad, por (1.62) podemos establecer la condición (véase Figura 1.20)

$$K_1 \leq \max_{\theta_L \in (0, 1/3)} K_1 = K_{1+}^{(q_0)} < K_{1+}^{(q_0)}(1/3) = \frac{4}{3}(2 - 5\sqrt{3}) \simeq -8.88. \quad (1.70)$$

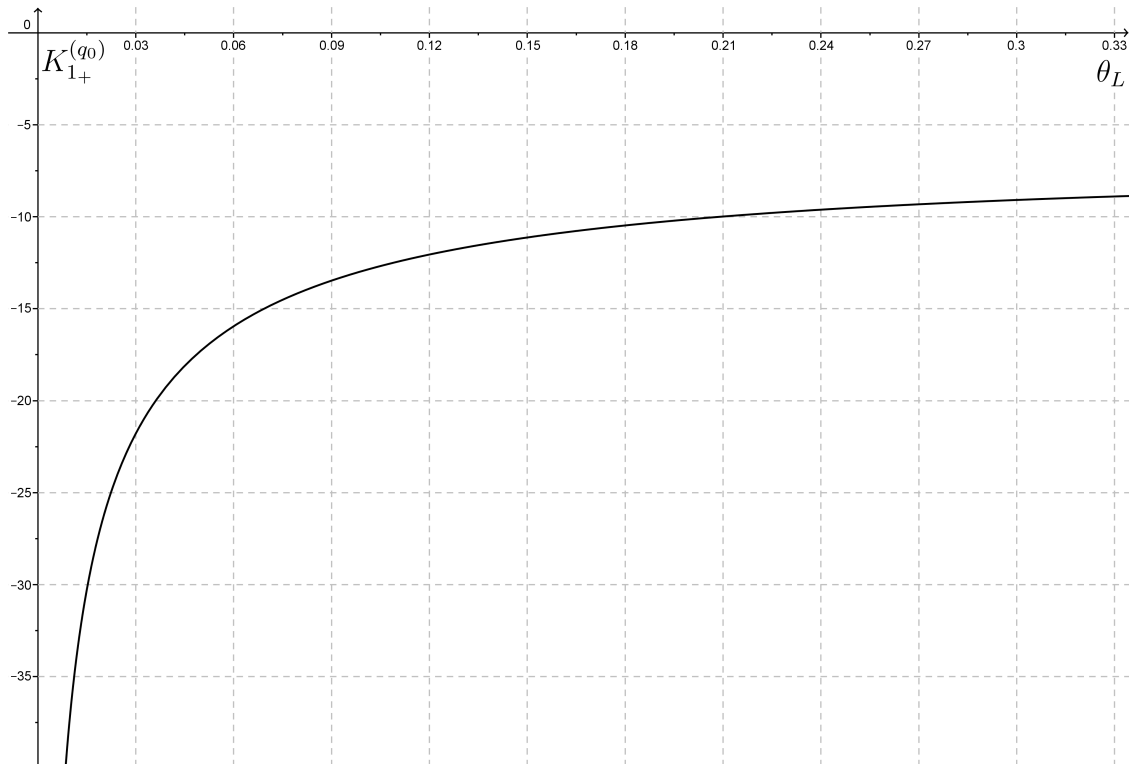


Figura 1.20: Gráfico $K_{1+}^{(q_0)}$ vs θ_L dado por (1.62). Podemos observar que para todo $\theta_L > 0$ esta función asintótica en el origen produce valores negativos y por tanto para que la condición (1.70) se satisfaga basta notar que cuando $\theta_L \rightarrow 1/3$, $K_{1+}^{(q_0)} \rightarrow -8.88$ y en consecuencia $K_1 < -8.88$.

La ecuación (1.70) sugiere que de todos los posibles valores $K_{1+}^{(q_0)}$ asociados a $\theta_L \in (0, 1/3)$, el correspondiente a -8.88 es el más grande e inalcanzable. La Figura 1.20 nos muestra que justo allí está localizada la asíntota $\theta_L = 1/3$, razón por la cual todo K_1 que se considere apropiado debe ser estrictamente menor que este límite. Ahora, la existencia de un K_1 máximo implica que hay un Z máximo y lo podemos determinar combinando (1.70) con (1.35) hasta obtener (véase Figura 1.21)

$$Z < Z_{\max} \equiv \max_{\theta_L \in (0, 1/3)} Z = \frac{2\theta_L^{1/2}}{3(3\theta_L - 1)} \left[45\theta_L^2 + 2(173 - 40\sqrt{3})\theta_L + 21 + 8(2 - 5\sqrt{3})(3\theta_L + 2)\theta_L^{1/2} \right] < 0. \quad (1.71)$$

1.3. Ilustración de Algunos Casos Particulares

Los resultados de la sección anterior nos proporcionan un método eficaz para construir un arreglo $(\theta_L; K_1, K_2)$ que se ajusta adecuadamente a las condiciones planteadas en esta investigación. De hecho, como lo podemos apreciar en el Cuadro 1.7, para cada valor $0 < \theta_L < 1/3$ con los $K_1 < -8.88$ asociados, dispondremos de dos valores $K_{2(\text{med})}$ y $K_{2(\text{der})}$ que conforman en propiedad

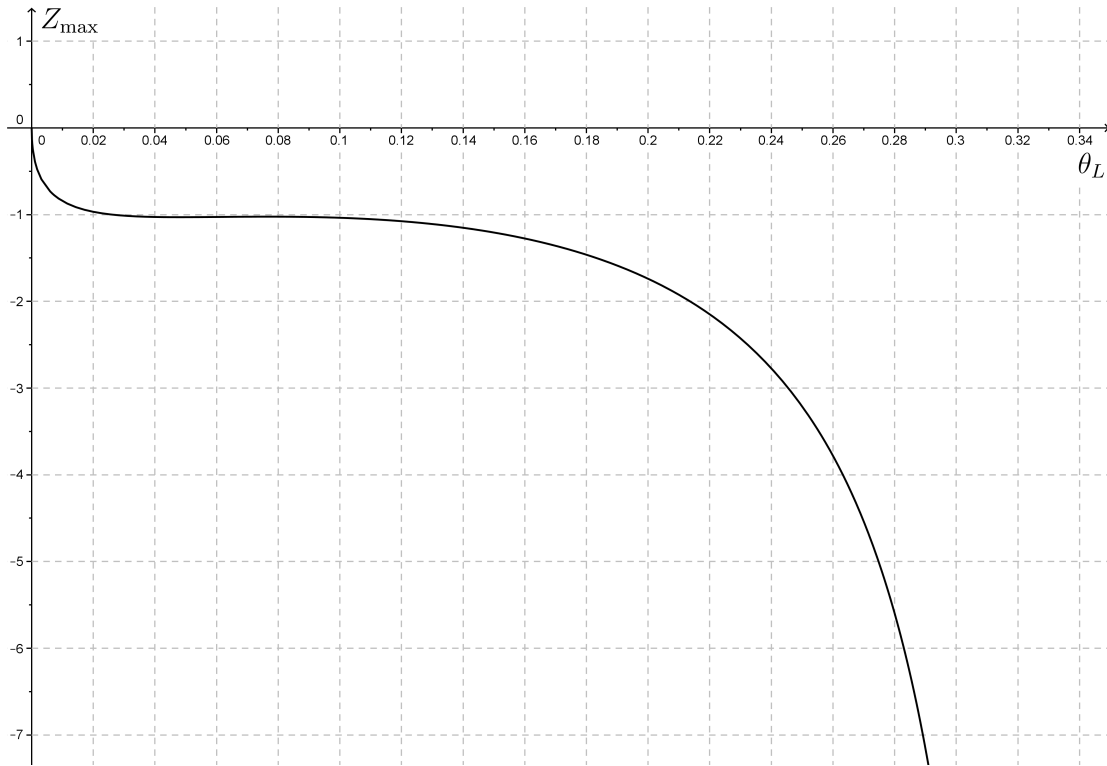


Figura 1.21: Gráfico Z_{\max} vs θ_L en el dominio $\theta_L \in (0, 1/3)$ dado por (1.71). La curva trazada es monótonamente decreciente con un mínimo relativo en $\theta_L = 0.0480273996$ y un máximo relativo en $\theta_L = 0.0767808785$; sólo entrega imágenes negativas y $Z_{\max} \rightarrow -\infty$ cuando $\theta_L \rightarrow 1/3^-$.

dos arreglos legítimos $(\theta_L; K_1, K_{2(\text{med})})$ y $(\theta_L; K_1, K_{2(\text{der})})$, cada uno de los cuales permite describir un diodo plano al vacío magneto–aislante modelado numéricamente vía series de Taylor de segundo orden.

Recordemos que a lo largo del documento nos habíamos encontrado con dos ambigüedades de signo: la primera asociada con la función de aproximación f_L definida en (1.19) y la segunda asociada a la cantidad R_L definida en (1.25). Comencemos resolviendo esta última.

Observe desde (1.28) que la constante D siempre es positiva ya que para cualquier arreglo $(\theta_L; K_1, K_2)$ siempre será cierto que $\theta_L > f'_L/f''_L$. Por su parte, las constantes A , B y C dependen de R_L , luego, si dejamos que R_L tome algún signo \pm , cada una de estas constantes adoptará el mismo signo de R_L . Esto supone que al hacer el análisis de signos para la función tangente (1.27), por ser una función impar queda claro que su lado derecho siempre dará positivo. Con esto concluimos que **el signo de la cantidad R_L definida en (1.25) no tiene relevancia** para los cálculos numéricos.

Ahora, para decidir cual debe ser el signo de la función f_L , primero conviene elegir algún arreglo magneto–aislante $(\theta_L; K_1, K_2)$ que satisfaga (1.35) y (1.50). Suponga que consideramos los valores contemplados en la Figura 1.19: $(1/9; -18, 1.351101035)$ y $(1/9; -18, 2.1248134946)$, a la vez que se varía la corriente j_x . Con estos datos se hace el cálculo de todas las constantes y parámetros estudiados en este capítulo los cuales se muestran en los Cuadros 1.8 y 1.9.

	$j_x = 0.5$	$j_x = 1.0$	$j_x = 1.5$
k_1	-9	-18	-27
k_2	0.6755505175	1.351101035	2.026651553
β	0.4109594011	0.5811843587	0.7118025724
f_L	-0.3962726321	-0.56041413	-0.686364332
f'_L	12.61757587	17.84394692	21.85428247
f''_L	424.4633798	600.2818685	735.1921398
f_0	0.8219188136	1.162368733	1.423605145
f'_0	-34.54502189	-48.85403847	-59.83373306
R_L	22.26229239	31.48363582	38.55942151
A	0.0524480872	0.0524480872	0.0524480872
B	11.13114619	15.74181791	19.27971075
C	18.41207142	13.8013997	10.26350686
D	0.0813851642	0.0813851642	0.0813851642
$\theta(0)$ (degradanes)	0.0988445944	0.0942690086	0.0908820923
$\theta(0)$ (radianes)	-0.05820933	0.5001886073	0.2065653348
$\theta(1)$ (degradanes)	0.1111111111	0.1111111111	0.1111111111
$\theta(1)$ (radianes)	0.5580659178	0.5580659178	0.5580659178
$\theta'(0)$	1.989533467	2.813625212	3.445973049
$\theta'(D)$	0.5838073269	0.8256282395	1.011183952
$\theta'(0)/2$	0.9947667335	1.406812606	1.722986525

Cuadro 1.8: Resultados numéricos para $\theta_L = 1/9$, $K_1 = -18$ y $K_{2(\text{med})} = 1.351101035$ variando la corriente j_x . Los k_i se obtuvieron desde (1.29), β desde (1.16), f'_L desde (1.19)–(1.20), $f_0^{(n)}$ desde (1.41), R_L desde (1.25) tomando el valor absoluto de su argumento, A , B , C , D desde (1.28), $\theta(0)$ y $\theta(1)$ desde (1.27), $\theta'(0)$ y $\theta'(D)$ desde (1.37). Se destacan los valores idénticos para A , D y $\theta(1)$ independientes de la corriente, siendo este último (en degradanes) precisamente el valor esperado $\theta_L = 1/9$. El valor absoluto de todas las cantidades calculadas es directamente proporcional a la corriente excepto C y $\theta(0)$. La cantidad B es directamente proporcional a j_x pues a mayor corriente, la gráfica θ vs x tendrá más ramificaciones. Esto favorece la aparición de más intervalos donde el potencial efectivo es negativo y por tanto magneto–aislante (véase Figura 1.22). Nótese además la enorme diferencia que hay entre los valores β y $\theta'(0)/2$, los cuales debieran ser cuando menos cercanos. Esto sugiere que el valor $K_{2(\text{med})} = 1.35$ no es el más adecuado.

De allí se puede observar que los signos de f'_L y f''_L son iguales y opuestos al signo de f_L . Si escogemos el signo positivo para la función f_L , el signo de f'_L será negativo y por tanto $|C|$ da un número grande. Esto produce un desfase importante en la función tangente (1.27) y provoca un error de consideración cuando se calcula $\theta(0)$, bastante lejos del valor esperado el cual debe ser cercano a cero. Este argumento es suficiente para concluir sin pérdida de generalidad que **el signo a elegir para f_L es el negativo**.

Otro punto de vista que conduce a la misma elección de signo puede llevarse a cabo de la siguiente manera. Si comparamos la derivada del potencial efectivo (1.37) con la tercera condición en (1.5), es claro que la suma de cuadrados entre el paréntesis a la derecha de (1.37) siempre va a dar

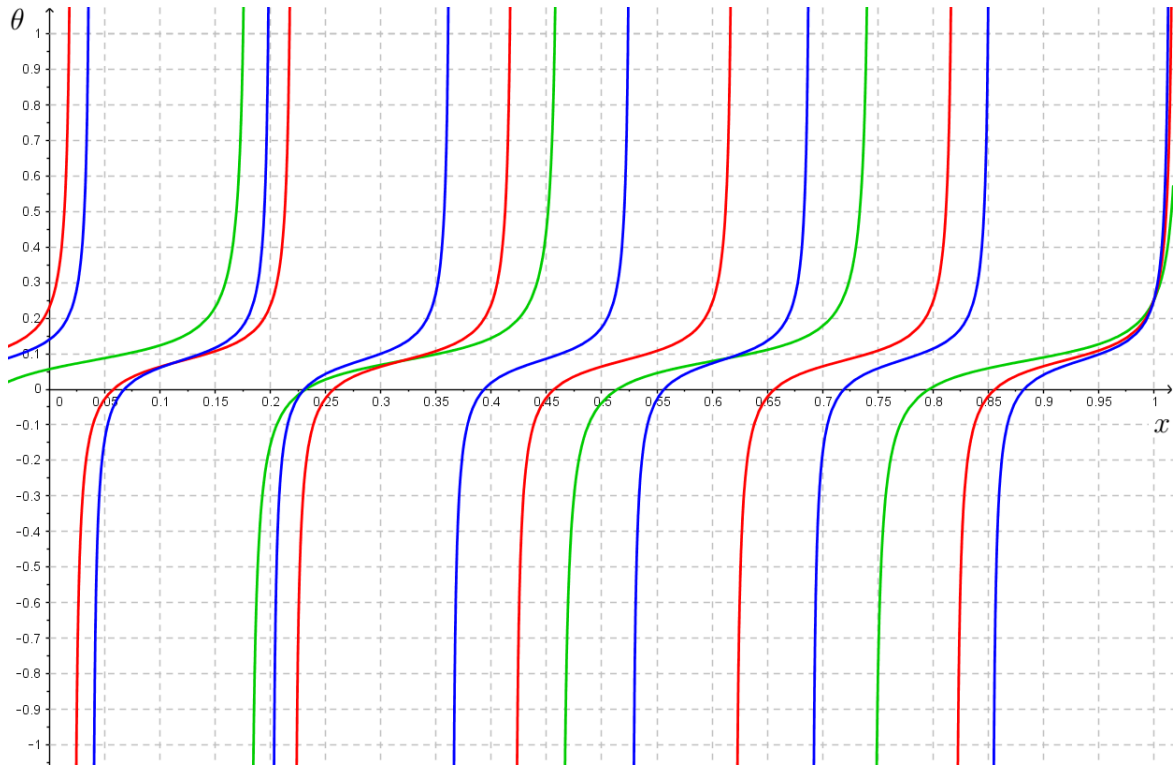


Figura 1.22: Gráfico θ vs x dado por (1.27) para $\theta_L = 1/9$, $K_1 = -18$ y $K_{2(\text{med})} = 1.351101035$ de acuerdo con los valores tabulados en el Cuadro 1.8: $j_x = 0.5$ verde, $j_x = 1$ rojo, $j_x = 1.5$ azul. Los trazos mostrados han sido calculados usando el signo negativo en (1.19), ya que con el signo positivo se obtendría que todos los valores del Cuadro 1.8 cambiarían de signo (excepto β , R_L , B y D) dibujando trazos descendentes que implican una derivada $\theta' < 0$ y contradirían la tercera condición en (1.5). Ahora, respecto a las dos primeras condiciones en (1.5) podemos decir que $\theta(0) \approx 0$ se satisface plenamente mientras que $\theta(1) \approx 1/9$ es apenas tolerable para $j_x = 0.5$.

una cantidad no negativa; por su parte el factor $B/A = f_L''/2$ dependerá del signo que tome f_L'' . Esto sugiere que el signo de $\theta'(x)$ será el mismo que le corresponda a f_L'' . Para la segunda derivada en (1.20) notamos que la cantidad entre corchetes es negativa ya que $0 < \theta_L < 1/3$ (con la corriente j_x siempre positiva), mientras que f_L^{-1} por supuesto llevará el mismo signo que f_L . Pues bien, según (1.5) la condición $\theta'(0) \geq 0$ resuelve la cuestión obligándonos a considerar en (1.19) únicamente el signo negativo propio de f_L .

Con lo anterior, en las Figuras 1.22–1.25 y los Cuadros 1.8–1.11 analizamos los dos resultados particulares obtenidos a partir del Cuadro 1.7 para los arreglos $(\theta; K_1, K_{2(\text{med})})$ y $(\theta; K_1, K_{2(\text{der})})$ con tres valores j_x .

En el Cuadro 1.8 consideramos el arreglo $(1/9; -18, 1.351101035)$. Allí podemos apreciar que los valores absolutos de todas las variables son directamente proporcionales a la corriente salvo C y $\theta(0)$ las cuales disminuyen a medida que incrementa j_x . Las condiciones de frontera $\theta(0)$ y $\theta(1)$ son bastante satisfactorias en virtud de las condiciones (1.5), a excepción de $\theta'(0)/2$ la cual se aleja considerablemente del valor esperado β . Por su parte en el Cuadro 1.8 consideramos el arreglo $(1/9; -18, 2.1248134946)$. De allí resaltamos que los valores β y $\theta'(0)/2$ son bastante cercanos, lo

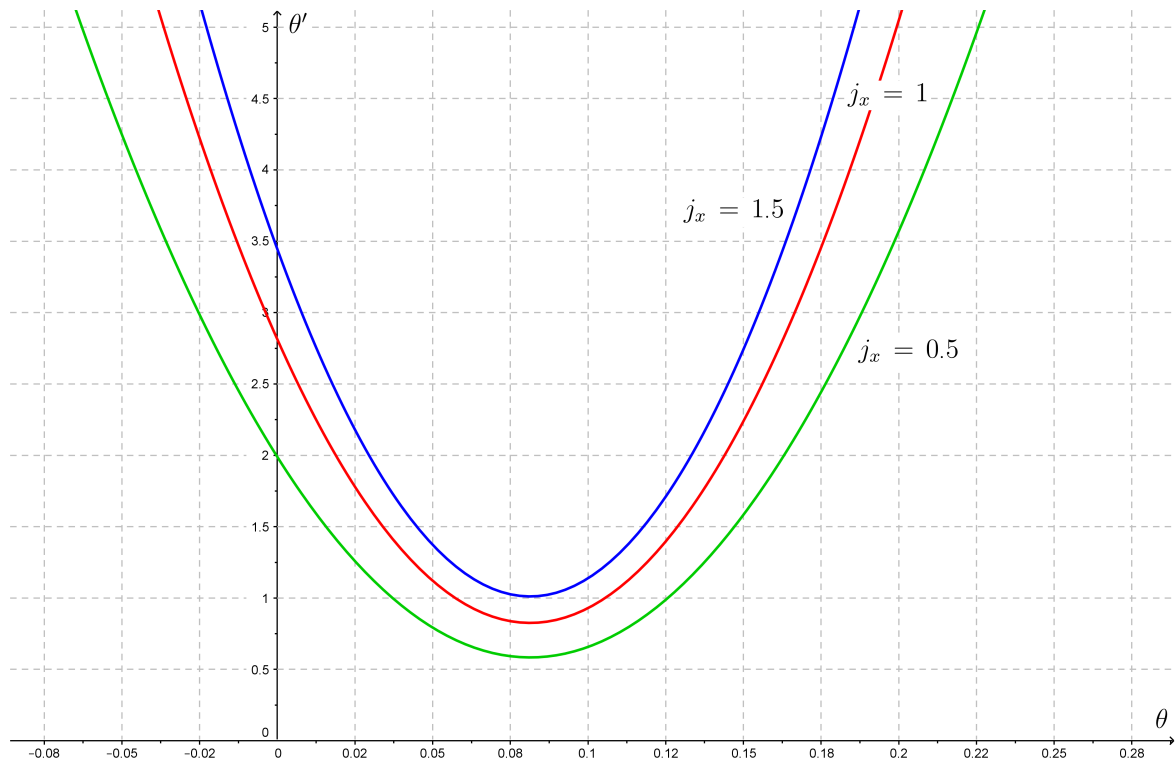


Figura 1.23: Gráfico θ' vs θ dado por (1.37) para $\theta_L = 1/9$, $K_1 = -18$ y $K_{2(\text{med})} = 1.351101035$: $j_x = 0.5$ verde, $j_x = 1$ rojo, $j_x = 1.5$ azul. Cada curva corta al eje vertical en $\theta' = 2\beta$ tal y como fuera planteado en la tercera condición de (1.5). El vértice de cada parábola viene dado por $\theta = D$ y corresponde al mínimo absoluto de la curva θ' .

cual es un claro indicio de que el valor $K_{2(\text{der})} = 2.12$ proporciona los arreglos numéricos con el error más bajo posible. En ambos cuadros los valores D son apropiadamente cercanos al cero.

Las Figuras 1.22 y 1.24 corresponden a las gráficas de los potenciales efectivos descritos por (1.27), cuyos cálculos numéricos fueron tabulados en los Cuadros 1.8 y 1.9. Podemos apreciar que los trazos tangentes alternan imágenes positivas y negativas a medida que θ varía con x , produciendo tantos intervalos de potencial negativo como asíntotas haya. Es en estas regiones donde ocurre el aislamiento magnético. Para determinar el tamaño de estos intervalos magneto–aislantes debemos calcular la distancia que hay entre una asíntota de la curva tangente ($\theta = -\infty$) y un corte con el eje x consecutivo ($\theta = 0$).

Los cortes horizontales ocurren cuando $\theta = 0$, en cuyo caso desde (1.27) se tendría que

$$x = \frac{1}{B} \left[\arctan \left(-\frac{D}{A} \right) - C \right].$$

Sin embargo, desde (1.38) se tiene que el arcotangente corresponde precisamente al valor C , lo cual nos conduce hasta la solución trivial $x = 0$ y no nos dice nada acerca de los otros puntos de corte. En este sentido conviene trabajar la función (1.27) de la siguiente manera. Definamos

	$j_x = 0.5$	$j_x = 1.0$	$j_x = 1.5$
k_1	-9	-18	-27
k_2	1.062406747	2.124813494	3.187220241
β	0.5153655855	0.7288370006	0.8926393786
f_L	-0.737487781	-1.042965223	-1.277366308
f'_L	6.779773337	9.588047403	11.74291188
f''_L	74.53049101	105.4020312	129.0905971
f_0	-1.030731171	-1.457674001	-1.785278757
f'_0	-1.501392331	-2.123289397	-2.600487799
R_L	12.48583115	17.65763175	21.62609393
A	0.167526484	0.1675264845	0.1675264845
B	6.242915575	8.828815875	10.81304696
C	22.25892784	19.67302754	17.68879645
D	0.0201446724	0.0201446724	0.0201446724
$\theta(0)$ (degradanes)	0.0887120418	0.080038878	0.0735731014
$\theta(0)$ (radianes)	0.0957752812	0.1379871727	-0.039275293
$\theta(1)$ (degradanes)	0.1111111111	0.1111111111	0.1111111111
$\theta(1)$ (radianes)	0.0935278344	0.0935278344	0.0935278344
$\theta'(0)$	1.060976228	1.500446971	1.837664732
$\theta'(D)$	1.045853699	1.479060486	1.811471745
$\theta'(0)/2$	0.530488114	0.7502234855	0.918832366

Cuadro 1.9: Resultados numéricos para $\theta_L = 1/9$, $K_1 = -18$ y $K_{2(\text{der})} = 2.1248134946$ variando la corriente j_x . Los k_i se obtuvieron desde (1.29), β desde (1.16), f'_L desde (1.19)–(1.20), $f_0^{(n)}$ desde (1.41), R_L desde (1.25) tomando el valor absoluto de su argumento, A , B , C , D desde (1.28), $\theta(0)$ y $\theta(1)$ desde (1.27), $\theta'(0)$ y $\theta'(D)$ desde (1.37). Al igual que en el Cuadro 1.8 se destaca los valores idénticos para A , D y $\theta(1)$ con la diferencia que ahora los valores f_0 cambian de signo. Los valores $\theta(0)$ son ligeramente más cercanos al cero en comparación con los del Cuadro 1.8, siendo el que corresponde a $j_x = 1.5$ el más pequeño de todos. El contraste entre ambos cuadros sugiere que al tomar valores altos para K_2 y j_x el error en la aproximación se reduce.

$$\Theta \equiv \theta - D = A \tan(Bx + C).$$

Los ceros al lado izquierdo de esta expresión ocurren cuando $Bx + C = \pi n$, i.e.

$$x_c = \frac{\pi n - C}{B}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.72)$$

donde n representa el número de cortes que la función $\theta(x)$ tiene con el eje de las abscisas y en vista que los valores contemplados son tales que $D \rightarrow 0$, entonces se tiene que $\Theta \rightarrow \theta$. Ahora, como el intervalo de determinación del problema es $0 \leq x \leq 1$ podemos acotar los x_c como

$$\left| 2 \left(\frac{\pi n - C}{B} \right) - 1 \right| \leq 1.$$

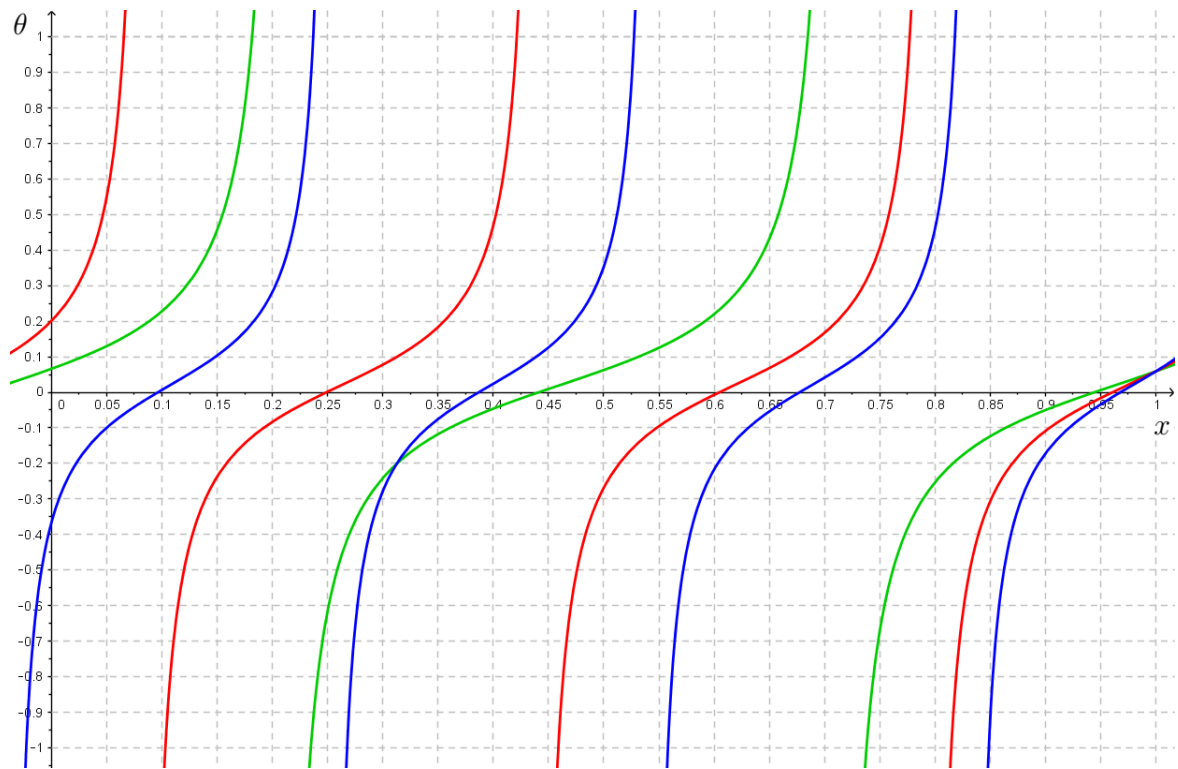


Figura 1.24: Gráfico θ vs x dado por (1.27) para $\theta_L = 1/9$, $K_1 = -18$ y $K_{2(\text{der})} = 2.1248134946$ de acuerdo con los valores tabulados en el Cuadro 1.9: $j_x = 0.5$ verde, $j_x = 1$ rojo, $j_x = 1.5$ azul. Note que al aumentar el valor de K_2 se produce una menor frecuencia de trazos en comparación con la Figura 1.22; los valores $\theta(1)$ pierden precisión significativamente, siendo la curva menos distante al valor teórico $\theta_L = 1/9$ la correspondiente al trazo $j_x = 1.5$.

Las asíntotas del potencial efectivo ocurren cuando $Bx + C = \pi(2\tilde{n} + 1)/2$, i.e.

$$x_a = \frac{(2\tilde{n} + 1)\pi - 2C}{2B}, \quad \tilde{n} \in \mathbb{Z}, \quad (1.73)$$

donde \tilde{n} representa la cantidad de asíntotas asociadas a θ y obedecen

$$\left| \frac{(2\tilde{n} + 1)\pi - 2C}{2B} - 1 \right| < 1.$$

El tamaño de los intervalos magneto–aislantes asociados a los tramos donde el potencial efectivo es negativo viene dado por la expresión

$$|x_c - x_a| = \frac{\pi}{2} \left| \frac{2(n - \tilde{n}) - 1}{B} \right|.$$

Esto sugiere que habrán tantos intervalos magneto–aislantes como asíntotas tenga el potencial efectivo. Ahora, para efectos prácticos, la longitud de estos intervalos puede determinarse de

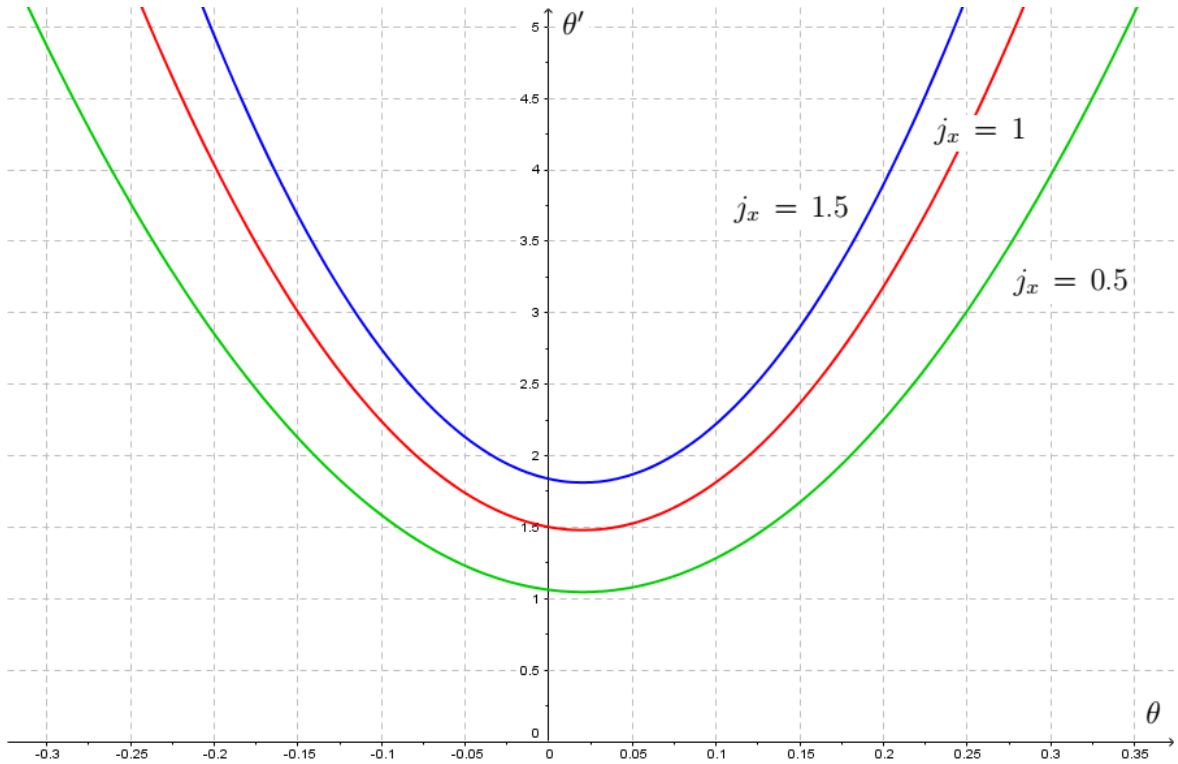


Figura 1.25: Gráfico θ' vs θ dado por (1.37) para $\theta_L = 1/9$, $K_1 = -18$ y $K_{2(\text{der})} = 2.1248134946$: $j_x = 1$ rojo, $j_x = 1.5$ azul, $j_x = 0.5$ verde. Cada curva corta al eje vertical en $\theta' = 2\beta$ tal y como fuera planteado en la tercera condición de (1.5). El vértice de cada curva viene dado por $\theta = D$ y corresponde al mínimo absoluto de θ' , tal y como ocurre en la Figura 1.23.

inmediato cuando un corte y una asíntota son consecutivos ($n = \tilde{n}$), en cuyo caso la última expresión se reduce a

$$|x_c - x_a| = \frac{\pi}{2|B|}. \quad (1.74)$$

Nótese que la función (1.27) es $\frac{\pi}{B}$ -periódica, esto sugiere que entre más grande sea B , más ramificaciones tendrá la gráfica θ vs x . La expresión (1.74) concuerda con estos resultados en el sentido que si B es grande, el tamaño de los intervalos magneto–aislantes es pequeño. Además, el factor $1/2$ aparece por la simetría impar de la función tangente.

Una forma alternativa para determinar los puntos de corte, las asíntotas y los intervalos magneto–aislantes puede llevarse a cabo de la siguiente manera. Primero determinamos el tamaño del intervalo utilizando (1.74), lo cual debe dar un número menor que uno. En seguida averiguamos cuántas veces cabe este número en la unidad calculando su inverso multiplicativo y tomando su parte entera (piso). Si el resultado es impar significa que el arreglo tiene el mismo número de cortes que de asíntotas; si es par significa que hay más cortes que asíntotas. Cuando se conoce el primer corte de la curva tangente en $[0, 1]$ podemos encontrar los demás mediante la fórmula

$$(x_c)_l = (x_c)_0 + l \frac{\pi}{|B|}, \quad l = 1, 2, \dots$$

j_x	n	0.5	1.0	1.5
$K_{2(\text{med})}$	4			0.1194449328
	5		0.1211145739	0.2823930545
	6	0.0393027361	0.3206844502	0.4453411762
	7	0.3215371620	0.5202543265	0.6082892979
	8	0.6037715878	0.7198242029	0.7712374196
	9	0.8860060136	0.9193940792	0.9341855413
$K_{2(\text{der})}$	6			0.1073480468
	7		0.2625630739	0.3978852715
	8	0.4603319321	0.6183970496	0.6884224961
	9	0.9635571665	0.9742310253	0.9789597207

Cuadro 1.10: Cortes horizontales dados por la fórmula (1.72) y asociados a los Cuadros 1.8–1.9 y las Figuras 1.22–1.24: $K_{2(\text{med})} = 1.351101035$ y $K_{2(\text{der})} = 2.1248134946$. Como el potencial efectivo (1.27) es una función $\frac{\pi}{|B|}$ -periódica, la cantidad de cortes es directamente proporcional a j_x pero inversamente proporcional a K_2 . Los valores n considerados son aquellos que dan $0 \leq x_c \leq 1$.

j_x	\tilde{n}	0.5	1.0	1.5
$K_{2(\text{med})}$	3			0.0379708719
	4		0.0213296357	0.2009189936
	5		0.2208995120	0.3638671153
	6	0.1804199490	0.4204693884	0.5268152370
	7	0.4626543749	0.6200392647	0.6897633587
	8	0.7448888007	0.8196091410	0.8527114804
$K_{2(\text{der})}$	6		0.0846460860	0.2526166592
	7	0.2087193149	0.4404800618	0.5431538838
	8	0.7119445493	0.7963140375	0.8336911084

Cuadro 1.11: Asíntotas dadas por la fórmula (1.73) y asociadas a los Cuadros 1.8–1.9 y las Figuras 1.22–1.24: $K_{2(\text{med})} = 1.351101035$ y $K_{2(\text{der})} = 2.1248134946$. Como el potencial efectivo (1.27) es una función $\frac{\pi}{|B|}$ -periódica, en el dominio $x \in (0, 1)$ siempre aparecerá por lo menos una asíntota, de otro modo no habrían potenciales efectivos negativos y en consecuencia no habría aislamiento magnético en el diodo plano al vacío. Los valores \tilde{n} considerados son aquellos que producen $0 < x_a < 1$.

y análogamente para las asíntotas se puede utilizar

$$(x_a)_l = (x_a)_0 + \frac{2l+1}{2} \frac{\pi}{|B|}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Empleando los resultados de los Cuadros 1.8 y 1.9, ilustramos este método en los Cuadros 1.10–1.12 asociados a los arreglos $(1/9; -18, 1.351101035)$ y $(1/9; -18, 2.1248134946)$. Lo anterior sugiere que para el intervalo de determinación $x \in [0, 1]$ debe haber como mínimo un corte en $x_c \rightarrow 0$ y una asíntota en $0 < x_a < 1$, y como la cantidad de intervalos magneto-aislantes

j_x	(x_a, x_c)	0.5	1.0	1.5
$K_{2(\text{med})}$	x_1^*	[0, 0.0393027361)	(0.0213296357, 0.1211145739)	(0.0379708719, 0.1194449328)
	x_2^*	(0.1804199490, 0.3215371620)	(0.2208995120, 0.3206844502)	(0.2009189936, 0.2823930545)
	x_3^*	(0.4626543749, 0.6037715878)	(0.4204693884, 0.5202543265)	(0.3638671153, 0.4453411762)
	x_4^*	(0.7448888007, 0.8860060136)	(0.6200392647, 0.7198242029)	(0.5268152370, 0.6082892979)
	x_5^*		(0.8196091410, 0.9193940792)	(0.6897633587, 0.7712374196)
	x_6^*			(0.8527114804, 0.9341855413)
$K_{2(\text{der})}$	x_1^*	(0.2087193149, 0.4603319321)	(0.0846460860, 0.2625630739)	[0, 0.1073480468)
	x_2^*	(0.7119445493, 0.9635571665)	(0.4404800618, 0.6183970496)	(0.2526166592, 0.3978852715)
	x_3^*		(0.7963140375, 0.9742310253)	(0.5431538838, 0.6884224961)
	x_4^*			(0.8336911084, 0.9789597207)

Cuadro 1.12: Intervalos espaciales donde se produce el aislamiento magnético asociados a $K_{2(\text{med})} = 1.351101035$ y $K_{2(\text{der})} = 2.1248134946$. Para cada intervalo, el límite inferior (izquierda) corresponde a la asíntota y el superior (derecha) al corte consecutivo. Son intervalos abiertos puesto que el aislamiento magnético ocurre para potenciales negativos que sean no nulos o indeterminados. Cuando el origen $x = 0$ se localiza justo en medio de una asíntota y un corte, ese intervalo es semiabierto y un poco más pequeño que los demás.

está determinada por el número de asíntotas, entonces si hay \tilde{n} asíntotas, habrá \tilde{n} intervalos magnetoaislantes y $n = \tilde{n} + 1$ cortes.

También cabe destacar que al ser $\theta(x)$ una función tangente, para los $x \rightarrow x_a^+$ se obtendrán potenciales negativos de magnitudes tan elevadas como se quiera. Estos puntos son los denominados *puntos de retorno* o *partículas en trampa* x^* ya que allí se produce el cambio de $\theta > 0$ a $\theta < 0$.

Los puntos de retorno x_i^* asociados al i -ésimo intervalo magnetoaislante corresponden en número a la cantidad de asíntotas propias de $\theta(x)$. De hecho, una mayor cantidad de intervalos no necesariamente implica una región magnetoaislante más grande; por el contrario, entre menos asíntotas haya, el intervalo neto en $(0, 1)$ será mayor. Esto sugiere que si requerimos $x^* \rightarrow 0$ entonces $\tilde{n} \rightarrow \infty$. Todos los intervalos tienen el mismo tamaño $|x_c - x_a|$ dado por (1.74) excepto aquellos sesgados en $x = 0$ o $x = 1$, los cuales serán más pequeños.

Finalmente, en las Figuras 1.23 y 1.25 se muestra el comportamiento parabólico de θ' respecto a θ cuyos trazos se comportan como curvas cuadráticas cóncavas hacia arriba. Dado que los potenciales efectivos son curvas tangenciales ascendentes, su pendiente es positiva para toda x , lo cual hace que $\theta'(\theta)$ dibuje parábolas siempre por encima del eje de las abscisas; sus vértices se localizarán en el primer cuadrante y en consecuencia producirán $\theta'(D) < \theta'(0) = 2\beta$.

Los resultados anteriores nos permiten describir de una manera adecuada el comportamiento aproximado del potencial efectivo $\theta(x)$ asociado a un diodo plano al vacío bajo la influencia de aislamiento magnético. Concluimos esta primera parte de la investigación haciendo un resumen de las conclusiones obtenidas considerando las $k_{1,2}$ en lugar de las cantidades escaladas $K_{1,2}$.

1.4. Resumen del Capítulo

Sea $j_x \neq 0$ la densidad de corriente independiente de x que se suministra a un diodo plano al vacío compuesto por un cátodo $x = 0$ y un ánodo $x = 1$. Considere el potencial magnético $a(x) \geq 0$ y el potencial electrostático $\varphi(x) \geq 0$ precisado por la diferencia de voltaje aplicado en el espacio interelectrónico $[0, 1]$.

El caso límite en el cual se describe el régimen del diodo plano al vacío no aislado está gobernado por el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales VM

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi}{dx^2} &= j_x \frac{1+\varphi}{\sqrt{(1+\varphi)^2 - 1 - a^2}}, \\ \frac{d^2a}{dx^2} &= j_x \frac{a}{\sqrt{(1+\varphi)^2 - 1 - a^2}},\end{aligned}\tag{1.75}$$

el cual está sujeto a las siguientes condiciones de frontera

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 0, & \varphi(1) &= \varphi_L, & \varphi'(0) &= \beta, \\ a(0) &= 0, & a(1) &= a_L, & a'(0) &= \alpha,\end{aligned}\tag{1.76}$$

donde el campo magnético externo a_L y la tensión aplicada φ_L precisan respectivamente sus propios parámetros $(j_x; \alpha)$ y $(j_x; \beta)$. Se define el potencial efectivo del diodo como la función

$$\theta(x) = [1 + \varphi(x)]^2 - 1 - [a(x)]^2,\tag{1.77}$$

cuyas condiciones de frontera asociadas son

$$\theta(0) = 0, \quad \theta(1) = (1 + \varphi_L)^2 - 1 - a_L^2 \equiv \theta_L, \quad \theta'(0) = 2\beta \geq 0.\tag{1.78}$$

Al combinar el sistema (1.75) con la definición (1.77) sujeta a las condiciones (1.78), se obtiene la EDO no lineal en la variable θ

$$\theta' = \pm [8j_x\theta^{3/2} + 8j_x\theta^{1/2} + 2k_1\theta + k_2]^{1/2},\tag{1.79}$$

donde k_1 y $k_2 = 4\beta^2$ son constantes reales no nulas. La aproximación mediante serie de Taylor del lado derecho de (1.79) a un polinomio de segundo grado en θ alrededor de algún parámetro $\theta_L > 0$ produce la solución semi-analítica explícita

$$\theta(x) \approx A \tan(Bx + C) + D,\tag{1.80}$$

donde las constantes A , B , C y D vienen dadas por (1.28) y dependen del arreglo paramétrico $(j_x; \theta_L; k_1, k_2)$, el cual satisface las relaciones

$$\begin{aligned}4j_x^2\theta_L^{1/2}(15\theta_L^2 + 10\theta_L + 7) + 8j_x\theta_L(3\theta_L + 2)k_1 + 3\theta_L^{3/2}k_1^2 &< 2j_x(3\theta_L - 1)k_2, \\ q_3k_2^3 + q_2k_2^2 + q_1k_2 + q_0 &\approx 0,\end{aligned}\tag{1.81}$$

con las funciones $q_i = q_i(j_x; \theta_L; k_1)$ dadas por los polinomios

$$\begin{aligned} q_0 &= \theta_L^2 [3\theta_L k_1^2 + 2j_x \theta_L^{1/2} (17 + 9\theta_L) k_1 + 4j_x^2 (21 + 30\theta_L + 5\theta_L^2)]^2, \\ q_1 &= 4\theta_L^3 k_1^3 + 6j_x \theta_L^{5/2} (31 - 5\theta_L) k_1^2 + 4j_x^2 \theta_L^2 (327 + 226\theta_L - 117\theta_L^2) k_1 + 8j_x^3 \theta_L^{3/2} (311 + 525\theta_L + 57\theta_L^2 - 141\theta_L^3), \\ q_2 &= 4j_x \theta_L^{3/2} (19 - 9\theta_L) k_1 + 3j_x^2 \theta_L (99 + 62\theta_L - 53\theta_L^2), \\ q_3 &= 4j_x \theta_L^{1/2} (3 - \theta_L). \end{aligned} \quad (1.82)$$

El régimen para aislamiento magnético se produce cuando

$$\theta(x) < 0, \quad (1.83)$$

el cual se satisface si y sólo si ocurre simultáneamente que

$$\begin{aligned} 0 &< \theta_L < 1/3, \\ j_x^{-1} k_1 &\leq \frac{-(9\theta_L + 17) + \sqrt{21\theta_L^2 - 54\theta_L + 37}}{3\theta_L^{1/2}} < \frac{4}{3} (2 - 5\sqrt{3}) < 0, \\ k_2 &= \begin{cases} k_{2(\text{med})} \\ k_{2(\text{der})} \end{cases}, \quad k_{2(\text{der})} > k_{2(\text{med})} > 0, \end{aligned} \quad (1.84)$$

donde $k_{2(\text{med,der})}$ son las raíces positivas no nulas que resuelven numéricamente el polinomio de tercer grado en (1.81).

Ahora, como la gráfica del potencial efectivo es tangencial, en $x \in [0, 1]$ habrá tantos intervalos de potencial negativo como asíntotas tenga la curva θ vs x ; estos intervalos se denominan regiones magneto–aislantes y su tamaño viene dado por

$$\frac{\pi}{2|B|}. \quad (1.85)$$

Bajo estas condiciones es posible aproximar el potencial θ mediante la función (1.80) tal que se produzca aislamiento magnético en un diodo plano al vacío para el caso límite.

Capítulo 2

Potencial Efectivo Constante

En el Capítulo anterior nos dimos a la tarea de estudiar el caso límite haciendo una reducción el sistema (1.1)–(1.2) a una sola ecuación diferencial (1.18) con solución aproximada (1.27). Tomando en cuenta la naturaleza tangencial de la función y las condiciones de frontera asociadas (1.5), se construyó un entorno apropiado para que la condición magneto–aislante (1.52) tuviera lugar. Luego de un minucioso análisis y algunas consideraciones numéricas, en la Sección 2.4 sintetizamos toda la investigación llevada a cabo hasta aquí.

Sin embargo, es evidente que hemos entregado una solución en términos de una variable apropiadamente definida como lo es el potencial efectivo θ , prescindiendo de los potenciales originales eléctrico φ y magnético a . Si bien disponemos de la expresión semi–analítica explícita (1.27), todavía debemos sortear con una enorme dificultad como es la de resolver el sistema límite (1.1)–(1.2) reescrito ahora como

$$\begin{aligned}\varphi'' - H(x)(1 + \varphi) &= 0, \\ a'' - H(x)a &= 0,\end{aligned}$$

donde la función no lineal

$$H(x) = \frac{j_x}{\sqrt{\theta(x)}} = \frac{j_x}{\sqrt{A \tan(Bx + C) + D}},$$

tiene discontinuidades en el origen para el intervalo de determinación¹ $[0, 1]$. En este capítulo proponemos una solución numérica alternativa a este inconveniente introduciendo un parámetro de control espacial x^\dagger el cual fija el potencial efectivo como θ^\dagger y resuelve el sistema (1.1)–(1.2) de una manera mucho más cómoda.

Nuestra tarea consiste en obtener numéricamente resultados razonables, determinando el valor de los potenciales (φ, a) y los parámetros del sistema (φ_L, α, a_L) que hasta el momento no han sido precisados empleando el método del Capítulo 1.

¹Note que si la función tangente es indeterminada (asíntotas), los potenciales φ y a que se obtienen son funciones lineales de x , mientras que si $\theta = 0$ (cortes), la función H no está definida.

2.1. Desarrollo de la Primera Derivada

Comencemos haciendo el cambio de variable

$$\psi(x) \equiv 1 + \varphi(x), \quad (2.1)$$

con ψ siempre positiva dado que $\varphi \geq 0$. Las ecuaciones (1.6) y (1.7), quedan respectivamente

$$\psi'' - j_x \theta^{-1/2} \psi = 0, \quad \frac{\psi''}{\psi} = j_x \theta^{-1/2}, \quad (2.2)$$

$$a'' - j_x \theta^{-1/2} a = 0, \quad \frac{a''}{a} = j_x \theta^{-1/2}. \quad (2.3)$$

Como las ecuaciones (2.2) y (2.3) tienen ambas la misma forma, por estar igualadas a la misma cantidad $j_x \theta^{-1/2}$ podemos combinarlas y obtener

$$\psi a'' - a \psi'' = 0. \quad (2.4)$$

Si adicionamos y sustraemos $a' \psi'$ a la izquierda de la igualdad (2.4) ésta se convierte en

$$[\psi a' - a \psi']' = 0, \quad (2.5)$$

lo cual sugiere que al integrar obtendremos

$$\psi a' - a \psi' = \text{constante}. \quad (2.6)$$

Ahora reescribimos las condiciones de frontera (1.3) como

$$\begin{aligned} \psi(0) &= 1, & \psi(1) &= 1 + \varphi_L = \psi_L, & \psi'(0) &= \beta, \\ a(0) &= 0, & a(1) &= a_L, & a'(0) &= \alpha. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Podemos utilizar éstas condiciones para determinar el valor de la constante en (2.6) evaluándola en $x = 0$. Esto nos conduce hasta

$$\psi a' - a \psi' = \alpha. \quad (2.8)$$

Dado que $\psi > 1$, podemos dividir (2.8) entre ψ^2 para reescribir el lado izquierdo como la derivada del cociente

$$\left(\frac{a}{\psi} \right)' = \frac{\alpha}{\psi^2}, \quad (2.9)$$

y separando las variables obtenemos

$$a(x) = \alpha\psi(x) \int_0^x \frac{d\tilde{x}}{\psi^2(\tilde{x})}. \quad (2.10)$$

Ahora, si se prefiere podemos dividir (2.8) entre a^2 para obtener

$$\psi(x) = -\alpha a(x) \int_0^x \frac{d\tilde{x}}{a^2(\tilde{x})}, \quad (2.11)$$

requiriendo que $a \neq 0$. Las ecuaciones (2.10) y (2.11) proponen que al tener conocimiento de uno de los potenciales, se obtiene el otro de manera inmediata, lo que a su vez entregaría una expresión explícita para θ . Veamos si cabe la posibilidad que α sea una constante nula.

2.1.1. Caso Particular $\alpha = 0$

En este caso particular (2.8) se reduce a

$$\frac{a'}{a} = \frac{\psi'}{\psi},$$

igualdad cuyos términos corresponden a las derivadas de los logaritmos

$$\ln a - \ln \psi = \ln q,$$

con q una constante que puede determinarse usando (2.7) cuando $x = 1$. Esto da

$$q_L = \frac{a_L}{\psi_L}. \quad (2.12)$$

De este modo encontramos la relación directa

$$a(x) = q_L \psi(x). \quad (2.13)$$

Ahora utilizamos el cambio de variable (1.4) combinado con (2.13) para determinar la forma del potencial efectivo

$$\theta = r\psi^2 - 1 = \frac{r}{1-r}a^2 - 1, \quad (2.14)$$

donde $r \equiv 1 - q_L^2$ será una constante positiva si y sólo si $\psi_L > a_L$. En cualquiera de los dos casos $\theta(a)$ o $\theta(\psi)$, al combinar (2.2) o (2.3) con (2.14), se obtiene la misma ecuación diferencial de primer orden no lineal en la variable θ

$$\left\{ \frac{(\theta')^2}{\theta + 1} \right\}' = \{8j_x \theta^{1/2}\}', \quad (2.15)$$

que al integrar y despejar produce

$$(\theta')^2 = 8j_x\theta^{3/2} + 8j_x\theta^{1/2} + \kappa\theta + \kappa. \quad (2.16)$$

Nótese la similitud de (2.16) con (1.15). Al comparar las constantes k_1 y k_2 con κ se deduce que $2k_1 = k_2$; ahora, por las condiciones (1.84) establecidas en la Sección 2.4, es claro que $k_1 < 0$ y $k_2 > 0$, lo cual produce una inconsistencia numérica evidente. Bajo este argumento podemos entonces concluir que la constante α no puede ser nula y en consecuencia, empleando este método, la posibilidad de que α sea igual a cero queda descartada.

2.1.2. Caso Particular $\theta = \theta^\dagger$

En el Capítulo 2 construimos un procedimiento numérico para determinar el potencial efectivo aproximado θ como una función tangencial explícita de x . Sin embargo, aún no disponemos de un método que nos permita establecer el valor de los potenciales eléctrico φ y magnético a . Vamos entonces a suponer desde (2.2) y (2.3) que existe una cantidad $k_0 \neq 0$ la cual llamaremos *factor de separación* tal que satisfaga las igualdades

$$\frac{\psi''}{\psi} = k_0^2 = \frac{a''}{a}. \quad (2.17)$$

Esta constante es equivalente a

$$k_0^2 = j_x(\theta^\dagger)^{-1/2}, \quad (2.18)$$

de donde inferimos que $\theta^\dagger > 0$ y $j_x \neq 0$. Por la definición del potencial efectivo (1.4) junto con el cambio de variable (2.1), se tiene que

$$\psi^2 - a^2 = 1 + \theta^\dagger = \text{constante} > 1. \quad (2.19)$$

En adelante llamaremos a la constante θ^\dagger como *potencial efectivo transitorio*. Nuestra tarea en particular consiste en encontrar las funciones explícitas para $\psi(x)$ y $a(x)$ siempre que k_0 sea real.

Una EDO, lineal, de segundo orden y homogénea como (2.17) puede generalizarse como

$$y'' - k_0^2 y = 0,$$

y tiene por solución estándar una expresión de la forma

$$y(x) = r_1 e^{k_0 x} + r_2 e^{-k_0 x}. \quad (2.20)$$

Para el potencial magnético a determinamos las constantes r_i , $i = 1, 2$ desde (2.7) usando las condiciones $a(0) = 0$, $a(1) = a_L$ y resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= r_1 + r_2, \\ a_L &= r_1 e^{k_0} + r_2 e^{-k_0}, \end{aligned} \quad \text{de donde} \quad \begin{aligned} r_1 &= \frac{a_L}{2 \sinh k_0}, \\ r_2 &= \frac{-a_L}{2 \sinh k_0}, \end{aligned}$$

mientras que para el potencial eléctrico ψ utilizamos $\psi(0) = 1$, $\psi(1) = \psi_L$ y resolvemos las constantes r_i , $i = 3, 4$ desde

$$\begin{aligned} 1 &= r_3 + r_4, \\ \psi_L &= r_3 e^{k_0} + r_4 e^{-k_0}, \end{aligned} \quad \text{de donde} \quad \begin{aligned} r_3 &= \frac{\sinh k_0 - \cosh k_0 + \psi_L}{2 \sinh k_0}, \\ r_4 &= \frac{\sinh k_0 + \cosh k_0 - \psi_L}{2 \sinh k_0}. \end{aligned}$$

De esta manera las soluciones quedan respectivamente

$$\begin{aligned} a(x^\dagger) &= \frac{a_L}{\sinh k_0} \sinh(k_0 x^\dagger), \\ \psi(x^\dagger) &= \frac{\psi_L - \cosh k_0}{\sinh k_0} \sinh(k_0 x^\dagger) + \cosh(k_0 x^\dagger). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ahora solo determinamos las restricciones que gobiernan la constante de separación k_0 , empleando desde (2.7) las condiciones $a'(0) = \alpha$, $\psi'(0) = \beta$ y resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{k_0} &= \frac{a_L}{\sinh k_0}, \\ \frac{\beta}{k_0} &= \frac{\psi_L - \cosh k_0}{\sinh k_0}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

de donde

$$\cosh k_0 = \psi_L - \frac{\beta}{\alpha} a_L. \quad (2.23)$$

De aquí es claro que

$$\psi_L - \frac{\beta}{\alpha} a_L \geq 1.$$

Esta condición puede generalizarse usando $\psi_L = 1 + \varphi_L$ como

$$\frac{\varphi(1)}{a(1)} \geq \frac{\varphi'(0)}{a'(0)}.$$

Utilizando las igualdades para α y β desde (2.22), podemos simplificar los potenciales (2.21) y en adelante los vamos a denominar *potenciales transitorios*

$$\begin{aligned} a^\dagger &= a(x^\dagger) = \frac{\alpha}{k_0} \sinh(k_0 x^\dagger), \\ \psi^\dagger &= \psi(x^\dagger) = \frac{\beta}{k_0} \sinh(k_0 x^\dagger) + \cosh(k_0 x^\dagger), \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde x^\dagger será nuestro *parámetro de control* espacial.

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
\bar{x}^\dagger	0.0589251761	0.3494624007	0.6399996253	0.9305368499
$\theta(\bar{x}^\dagger)$	-0.076576788	-0.076576788	-0.076576788	-0.076576788
θ^\dagger	0.076576788	0.076576788	0.076576788	0.076576788
k_0	2.328205668	2.328205668	2.328205668	2.328205668
ψ^\dagger	1.06218939	1.69717353	3.138778429	6.072159974
φ^\dagger	0.06218939	0.69717353	2.138778429	5.072159974
a^\dagger	0.2273092862	1.34306411	2.962322271	5.982854666
α^\dagger	3.845517814	3.449813962	3.274910635	3.23450935
a_L^\dagger	8.392370077	7.528795045	7.147090027	7.058919186
ψ_L^\dagger	7.126569008	7.126569008	7.126569008	7.126569008
φ_L^\dagger	6.126569008	6.126569008	6.126569008	6.126569008
$a_L^\dagger/\alpha^\dagger$	2.182377116	2.182377116	2.182377116	2.182377116

Cuadro 2.1: Resultados numéricos para los potenciales transitorios y sus parámetros asociados a $j_x = 1.5$, $\theta_L = 1/9$, $\beta = 0.8926393786$, $K_1 = -18$, $K_2 = K_{2(\text{der})} = 2.124813494$ (véase Cuadro 1.9). Nótese que ψ_L^\dagger y en consecuencia φ_L^\dagger son constantes; esto sugiere que la razón $a_L^\dagger/\alpha^\dagger$ es fija.

2.1.3. Resultados Numéricos

Comencemos volviendo nuestra atención al Cuadro 1.12. En este cuadro se ilustran seis grupos de resultados obtenidos al combinar la corriente j_x y el parámetro K_2 asociados a los valores $K_1 = -18$ y $\theta_L = 1/9$. Vamos a centrarnos en el último grupo correspondiente a $j_x = 1.5$ y $K_{2(\text{der})} = 2.1248134946$, el cual, como vimos desde los resultados tabulados en el Cuadro 1.9, es el arreglo que proporciona el nivel de error numérico más bajo. El procedimiento es como sigue.

Notamos que este arreglo provee cuatro intervalos magneto–aislantes donde tres ellos tienen el mismo tamaño y el primero es más pequeño. Es claro que en estos intervalos el potencial efectivo dado por (1.27) es negativo (véase Figura 1.22). Vamos a tomar cuatro puntos arbitrarios (uno en cada intervalo) tales que sean equidistantes entre sí. Los podemos calcular como

$$\bar{x}_i^\dagger = x_a + \frac{2}{3}(x_c - x_a) = \frac{x_a + 2x_c}{3}. \quad (2.25)$$

Ahora, vamos a evaluar (1.27) en esos puntos. Definimos el potencial efectivo transitorio como²

$$\theta_i^\dagger = |\theta(\bar{x}_i^\dagger)| = |A \tan(B\bar{x}_i^\dagger + C) + D|. \quad (2.26)$$

En el Cuadro 2.1 podemos apreciar estos resultados. Como era de esperarse, el potencial efectivo es el mismo para todos ya que la función tangente es $\frac{\pi}{|B|}$ -periódica. Para este arreglo el periodo es de 0.2905372246. En seguida despejamos el factor de separación k_0 desde (2.18)

$$k_0 = \sqrt{j_x(\theta_i^\dagger)^{-1/2}}. \quad (2.27)$$

²Se toma el valor absoluto para evitar inconsistencias de signo que afecten (2.18).

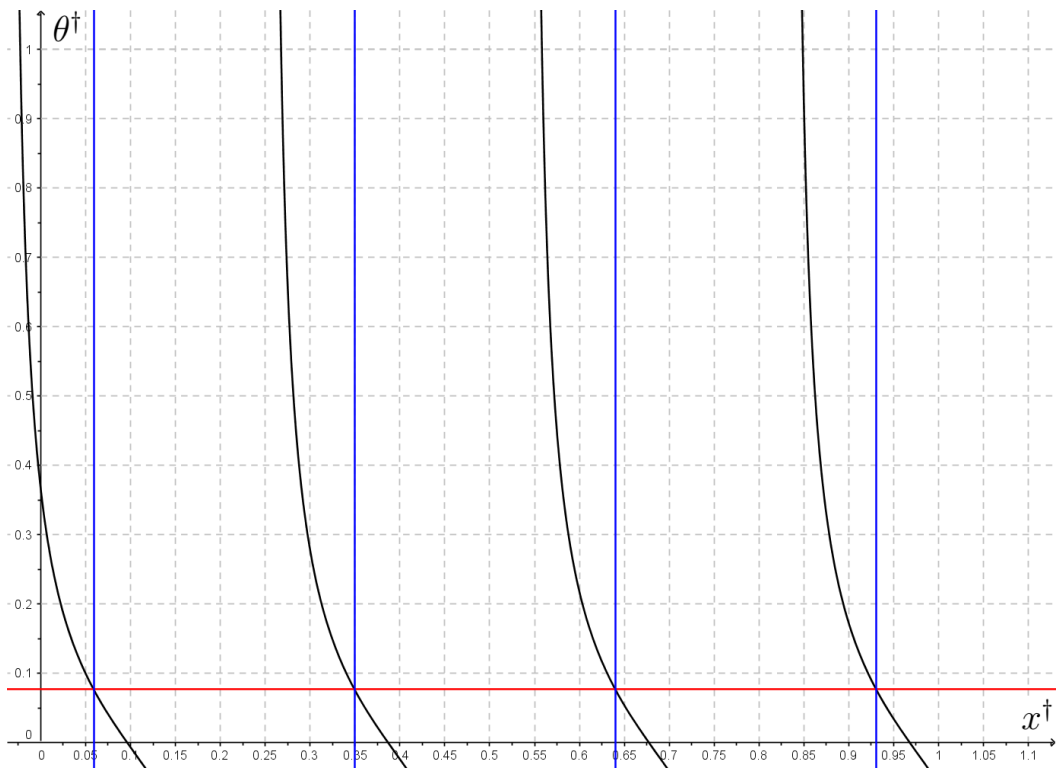


Figura 2.1: Gráfica de θ^\dagger vs x^\dagger con el potencial efectivo dado por (2.26) y las constantes tabuladas en el Cuadro 1.8 para $j_x = 1.5$. Nótese las cuatro ramificaciones idénticas las cuales, de acuerdo con el Cuadro 1.12, corresponden a los valores pertenecientes a los intervalos espaciales magneto–aislantes asociados a este arreglo en particular. Esto sugiere que el potencial efectivo transitorio tiene asociados cuatro valores x^\dagger diferentes y equidistantes entre sí en $[1, 0]$.

No es necesario considerar la ambigüedad de signo \pm cuando se calcula la raíz ya que ninguno de los potenciales transitorios ψ^\dagger o a^\dagger dados por (2.24) se ven afectados por esta distinción. Además, al ser θ_i^\dagger el mismo para cada \bar{x}_i^\dagger se obtiene un único factor de separación.

Desde el Cuadro 1.9 utilizamos el valor en la frontera $\beta = 0.8926393786$ para calcular los potenciales eléctricos transitorios, el primero desde (2.24)

$$\psi_i^\dagger = \frac{\beta}{k_0} \sinh(k_0 \bar{x}_i^\dagger) + \cosh(k_0 \bar{x}_i^\dagger), \quad (2.28)$$

y el segundo desde (2.1)

$$\varphi_i^\dagger = \psi_i^\dagger - 1. \quad (2.29)$$

Conocidos los potenciales eléctricos calculamos el potencial magnético transitorio despejándolo de (2.19) como

$$a_i^\dagger = a(\bar{x}_i^\dagger) = \sqrt{(\psi_i^\dagger)^2 - 1 - \theta_i^\dagger}. \quad (2.30)$$

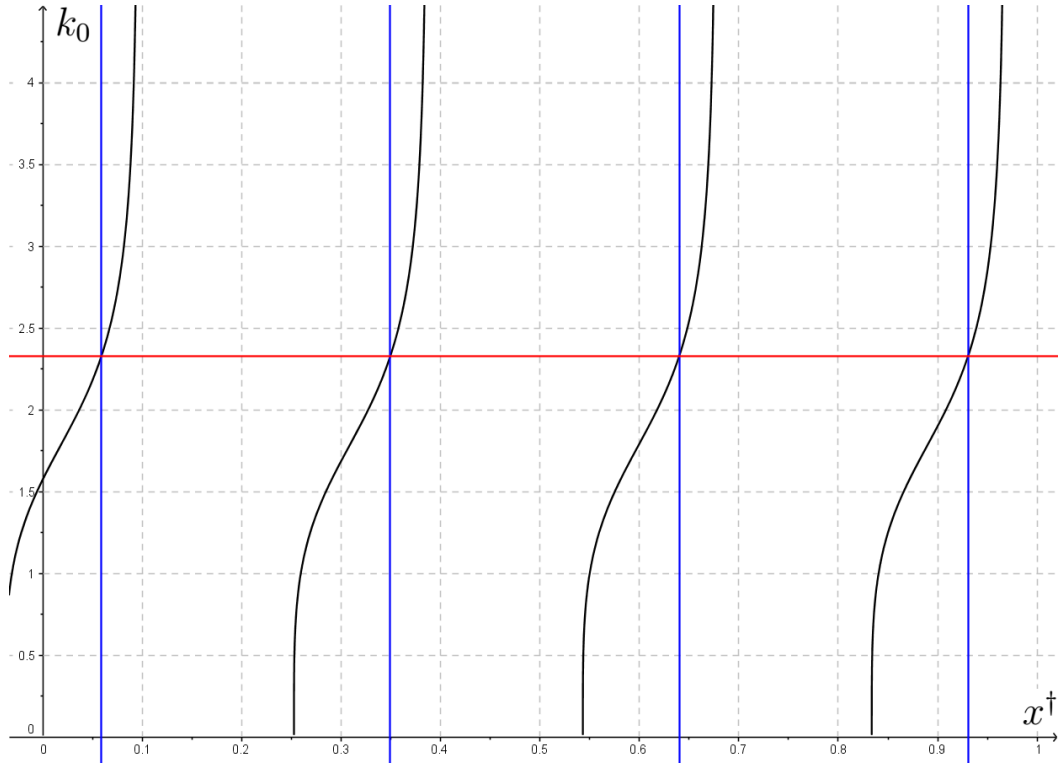


Figura 2.2: Gráfica de k_0 vs x^\dagger dada por (2.27) para el arreglo descrito en la Figura 2.1. Nótese que tanto $\theta^\dagger(x^\dagger)$ como $k_0(x^\dagger)$ producen gráficos periódicos. Esto supone que para cada imagen habrán cuatro parámetros de control x^\dagger asociados (véase Cuadro 2.1). En este sentido, se puede observar que θ^\dagger y k_0 son constantes en $[0, 1]$.

Finalmente, teniendo ya todos los potenciales transitorios sólo nos queda determinar los parámetros de frontera en el siguiente orden. Desde la primera ecuación en (2.24) determinamos

$$\alpha_i^\dagger = \frac{k_0 a_i^\dagger}{\sinh(k_0 \bar{x}_i^\dagger)}, \quad (2.31)$$

desde la primera fórmula en (2.22)

$$a_{L,i}^\dagger = \frac{\alpha_i^\dagger}{k_0} \sinh k_0, \quad (2.32)$$

desde (2.23)

$$\psi_{L,i}^\dagger = \frac{\beta}{\alpha_i^\dagger} a_{L,i}^\dagger + \cosh k_0, \quad (2.33)$$

y por último

$$\varphi_{L,i}^\dagger = \psi_{L,i}^\dagger - 1. \quad (2.34)$$

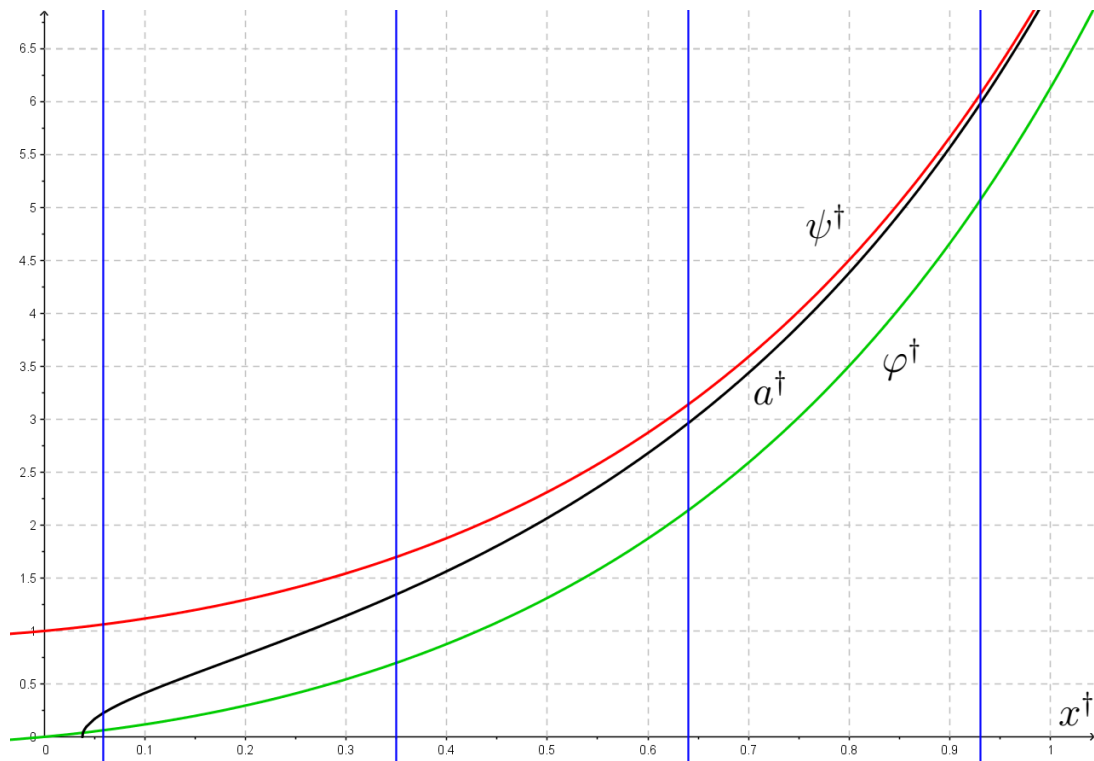


Figura 2.3: Gráficas de los potenciales ψ^\dagger rojo, φ^\dagger verde y a^\dagger negro vs x^\dagger dadas respectivamente por (2.28), (2.29) y (2.30). Como se esperaba, todos los potenciales transitorios son positivos y crecientes en $[0, 1]$.

Con un procedimiento semejante es posible determinar el valor de todos los potenciales transitorios y todas las constantes involucradas para algún parámetro de control x^\dagger . Las Figuras 2.1–2.4 reproducen este procedimiento para los valores tabulados en el Cuadro 2.1.

2.2. Funciones de Green

La función de Green es un kernel o núcleo integral que se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales generalmente no-homogéneas y con condiciones de frontera incorporadas [20]. Vamos a aprovechar las ventajas que ofrece esta teoría para abordar un par de situaciones que de otro modo no sería posible analizar. A continuación examinaremos los casos en los cuales la función de Green modela el potencial magnético y tiene lugar para las condiciones de frontera separadas $x = 0$ y $x = 1$.

2.2.1. Potencial Magnético como Función de Green

Con el método empleado en la Sección 2.1.1 se concluyó que el valor en la frontera α no podía ser nulo. El método de las funciones de Green emerge como alternativa para solventar, no sólo esta situación, sino también el caso cuando $a_L = 0$.

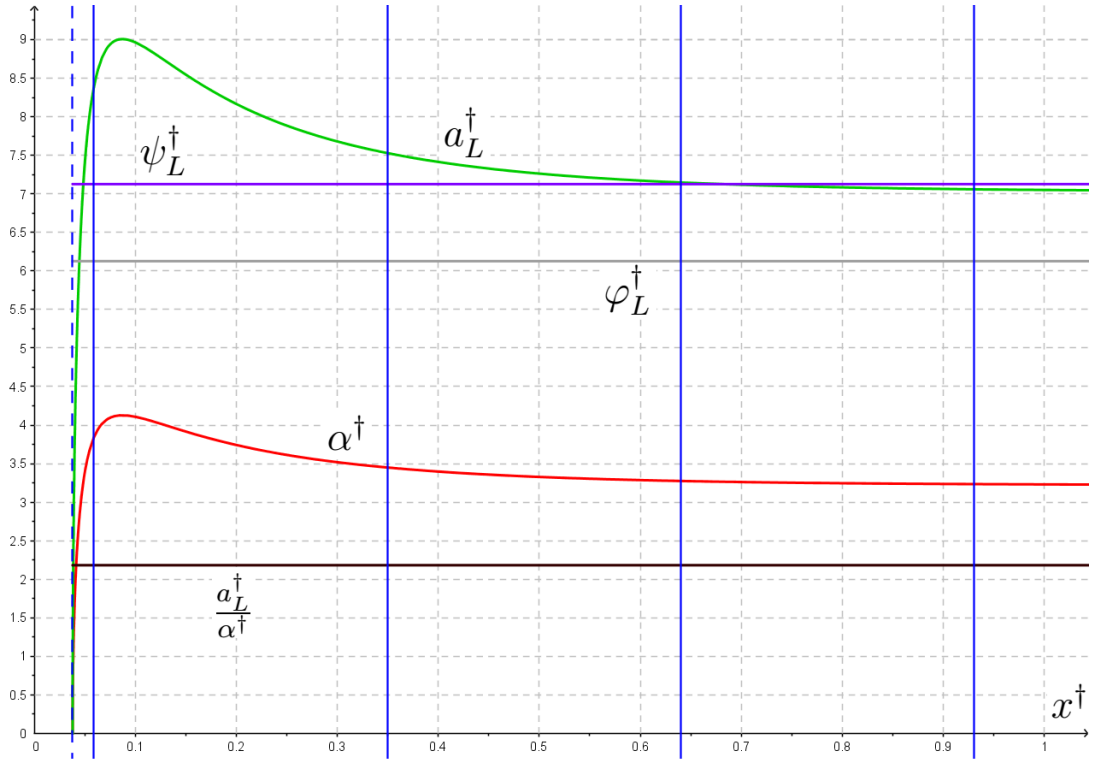


Figura 2.4: Gráficas de α^\dagger rojo, a_L^\dagger verde, $\frac{a_L^\dagger}{\alpha^\dagger} = \frac{\sinh k_0}{k_0}$ negro, ψ_L^\dagger violeta y φ_L^\dagger gris vs x^\dagger dadas respectivamente por (2.31), (2.32), (2.33) y (2.34). Al igual que los potenciales transitorios de la Figura 2.3, para cada x^\dagger se producirá una imagen distinta de α^\dagger y a_L^\dagger ; sin embargo, su razón es constante en $[0, 1]$, así como los valores de ψ_L^\dagger y φ_L^\dagger (véase Cuadro 2.1). Todos los trazos comienzan en $x = 0.037728977$, que es el valor para el cual el potencial a^\dagger se anula para este arreglo (véase Figura 2.3).

Comencemos considerando desde (2.17) la ecuación

$$a'' - k_0^2 a = 0, \quad k_0 \neq 0, \quad (2.35)$$

con condiciones

$$a(0) = 0, \quad a'(0) = \alpha, \quad a(1) = a_L. \quad (2.36)$$

Es claro que (2.35) tiene como solución una expresión de la forma (2.20) la cual vamos a escribir ahora como

$$a(x) = c_1 \cosh(k_0 x) + c_2 \sinh(k_0 x), \quad (2.37)$$

con primera derivada

$$a'(x) = c_1 k_0 \sinh(k_0 x) + c_2 k_0 \cosh(k_0 x). \quad (2.38)$$

Al aplicar directamente las condiciones de frontera (2.7) se obtiene una función con la forma (2.21)

$$a(x) = \frac{a_L}{\sinh k_0} \sinh(k_0 x).$$

Sin embargo, existen dos casos particulares que generan una situación de conflicto y nos obligan a estudiarlos con más detenimiento.

La primera situación de conflicto se presenta cuando consideramos la primera y tercera condiciones en (2.36) con $a_L = 0$, i.e.

$$a(0) = 0, \quad a(1) = 0. \quad (2.39)$$

Dado que no es posible encontrar de manera directa una solución para la ecuación (2.35) sujeta a las condiciones de frontera (2.39) usaremos la teoría de las funciones de Green para construir una función por partes $G(x, \xi; k_0)$ que satisfaga esta ligadura en los intervalos $0 \leq x \leq \xi$ y $\xi \leq x \leq 1$.

Comenzamos proponiendo una solución $a_1(x) \neq 0$ que satisfaga la primera condición en (2.39), esto es, $a_1(0) = 0$. Al considerar ésta condición en (2.37), vemos inmediatamente que $c_1 = 0$ y que se pueden presentar a su vez dos situaciones: o que $a_1'(0) = 0$ o bien $a_1'(0) = \alpha \neq 0$, con α una constante real. Considerando (2.38) en la primera situación obtendríamos $c_2 = 0$ lo cual nos conduciría hasta la solución trivial $a_1(x) = 0$ que por supuesto descartamos de inmediato. En consecuencia, es preciso tomar en cuenta la segunda situación para la cual $c_2 = \alpha/k_0$ y nos produce una solución en la forma (2.24), a saber

$$a_1(x) = \frac{\alpha}{k_0} \sinh(k_0 x). \quad (2.40)$$

Acto seguido, planteamos otra solución $a_2(x) \neq 0$ que satisfaga la segunda condición en (2.39), esto es, $a_2(1) = 0$. Nuevamente consideramos ésta condición en (2.37) obteniendo $c_2 = -c_1 \coth k_0$ y una vez más se presentan dos situaciones: o que $a_2'(1) = 0$ o bien $a_2'(1) = \alpha^* \neq 0$, con α^* otra constante real. Considerando (2.38) en la primera situación obtendríamos $c_1 = c_2 = 0$, o sea, la solución trivial $a_2(x) = 0$ que nuevamente descartamos; en consecuencia, es preciso tomar en cuenta la segunda situación para la cual $c_1 = -(\alpha^*/k_0) \sinh k_0$ y $c_2 = (\alpha^*/k_0) \cosh k_0$ que nos conduce hasta la solución

$$a_2(x) = \frac{\alpha^*}{k_0} \sinh k_0(x - 1). \quad (2.41)$$

El cálculo del Wronskiano para las funciones (2.40) y (2.41) da como resultado la constante no nula

$$W(a_1, a_2)(x) = \frac{\alpha\alpha^*}{k_0} \sinh k_0 \neq 0. \quad (2.42)$$

Para construir la función de Green $G(x, \xi; k_0)$, es necesario reescribir (2.35) en la forma Sturm-Liouville con función de densidad (o función de peso) nula

$$L[a(x)] = \{p(x)a(x)'\}' + q(x)a(x) = 0, \quad (2.43)$$

donde p y q son funciones reales diferenciables. Por comparación con (2.35) notamos que $p(x) = 1$ y $q(x) = -k_0^2$ (ambas constantes). Luego, la construcción de la función de Green queda como

$$G_1(x, \xi) = \frac{a_1(x)a_2(\xi)}{p(\xi)W(a_1, a_2)(\xi)} = \frac{\sinh k_0(\xi - 1) \sinh(k_0x)}{k_0 \sinh k_0}, \quad (2.44)$$

para $0 \leq x \leq \xi$ y

$$G_2(x, \xi) = \frac{a_1(\xi)a_2(x)}{p(\xi)W(a_1, a_2)(\xi)} = \frac{\sinh(k_0\xi) \sinh k_0(x - 1)}{k_0 \sinh k_0}, \quad (2.45)$$

para $\xi \leq x \leq 1$. En conclusión, la función de Green asociada a la EDO (2.35) con condiciones iniciales (2.36) es

$$G(x, \xi; k_0) = \begin{cases} \frac{\sinh(k_0x) \sinh k_0(\xi - 1)}{k_0 \sinh k_0}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\sinh k_0(x - 1) \sinh(k_0\xi)}{k_0 \sinh k_0}, & \xi \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \xi \in [0, 1]. \quad (2.46)$$

Note que la función por partes (2.46) es independiente de los parámetros α y α^* .

La segunda situación de conflicto mencionada es la que encontramos cuando se considera la ecuación (2.35) con la segunda y tercera condiciones en (2.36) tales que α y a_L son simultáneamente nulas, i.e.

$$a'(0) = 0, \quad a(1) = 0. \quad (2.47)$$

Es claro que si se utiliza una solución en la forma (2.37), al aplicar las condiciones (2.47) se obtendrá que $c_1 = c_2 = 0$ y producirá la solución trivial $a(x) = 0$. En consecuencia, nuevamente usamos el método de las funciones de Green para construir una función por partes $G(x, \xi; k_0)$ que satisfaga la ecuación (2.35) con condiciones (2.47) en los intervalos $0 \leq x \leq \xi$ y $\xi \leq x \leq 1$.

Empleando un procedimiento semejante al de la situación anterior encontramos la solución $a_1(x) \neq 0$ que satisface la primera condición en (2.47) y viene dada como

$$a_1(x) = a_L^* \cosh(k_0x), \quad (2.48)$$

con $a_L^* \neq 0$ una constante real. La otra solución $a_2(x) \neq 0$ es la que satisface la segunda condición en (2.47) y tiene la forma (2.41), a saber

$$a_2(x) = \frac{\alpha^*}{k_0} \sinh k_0(x - 1), \quad (2.49)$$

con $\alpha^* \neq 0$ otra constante real. El cálculo del Wronskiano para las funciones (2.48) y (2.49) produce la constante no nula

$$W(a_1, a_2)(x) = a_L^* \alpha^* \cosh k_0 \neq 0, \quad (2.50)$$

y finalmente, la construcción de la función de Green análoga a (2.46) queda

$$G(x, \xi; k_0) = \begin{cases} \frac{\cosh(k_0 x) \sinh k_0 (\xi - 1)}{k_0 \cosh k_0}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\sinh k_0 (x - 1) \cosh(k_0 \xi)}{k_0 \cosh k_0}, & \xi \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \xi \in [0, 1]. \quad (2.51)$$

Como era de esperarse, la función por partes (2.51) tampoco depende de a_L^* y α^* .

Las funciones (2.46) y (2.51) proporcionan dos expresiones apropiadas para describir el comportamiento del potencial magnético en el caso particular cuando todas las condiciones de frontera en (2.36) son nulas: la primera para el caso $a(0) = a(1) = 0$ y la segunda para el caso $a'(0) = a'(1) = 0$. Ahora, dado que el arreglo $(x, \xi; k_0)$ considera valores no negativos, una rápida inspección gráfica de las funciones (2.46) y (2.51) muestra que los trazos son negativos con puntos filosos en $x = \xi$ que es donde las dos partes de la función se unen; justo allí se tiene que $G(\xi, \xi; k_0)$ es el punto más bajo de la gráfica. Entonces, para no entrar en contradicción física con la hipótesis inicial del problema la cual propone un estudio considerando potenciales positivos, conviene tomar las funciones (2.46) y (2.51) con valor absoluto. Sólo queda agregar que si $\xi \rightarrow 0$ entonces $|G|$ es grande y si $\xi \rightarrow 1$ entonces $|G|$ es pequeño.

Por su parte, el potencial eléctrico no tiene este tipo de inconvenientes ya que siempre es posible encontrar desde (2.24) una expresión que satisfaga todos los requerimientos planteados inicialmente, incluso cuando todas las condiciones de frontera asociadas son nulas. Por tanto no es necesario aplicar el método de Green.

2.3. Aplicaciones

Algunas de las aplicaciones más conocidas del fenómeno de aislamiento magnético que se llevan a cabo actualmente en física e ingeniería son, por un lado, la propagación de pulsos electromagnéticos de alta potencia en líneas de transmisión al vacío y, por otro lado, la producción de energía eléctrica en plantas termonucleares [2]. A continuación hacemos una breve descripción de cada una.

1. Producción de energía mediante fusión o fisión nuclear por confinamiento magnético

i) Aplicación indirecta en fusión nuclear. En los reactores nucleares de confinamiento inercial, el fenómeno de aislamiento magnético ocurre cuando se producen pulsos de alta potencia utilizados para el control de haces de partículas (iones o fotones) que impactan en una microcápsula con el objeto de provocar la ignición de la reacción de fusión.

ii) Aplicación directa en fusión nuclear. Ocurre cuando se confina el plasma y se impiden las colisiones con las paredes del contenedor³.

³Véase el caso de los Tokamaks y los Stellarators [2].

iii) Ignición termonuclear y plasma de alta energía. Ocurre cuando se comprime y calienta una microcápsula por un haz de partículas y plasma de alta energía en laboratorios. Los flujos requieren una potencia de 100 – 1000 Terawatts y duran alrededor de 2×10^{-8} segundos al impactar un blanco de 1 cm de área. Los dispositivos que soportan semejante potencia durante tiempos tan cortos son diseñados empleando la física de aislantes magnéticos.

2. Líneas de transmisión aisladas magnéticamente MITL⁴

Consiste en la formación y propagación de pulsos de alta potencia del orden de miles de Terawatts. Los reactores nucleares usualmente emplean líneas de transmisión MITL ya que ofrecen la posibilidad de controlar ondas electromagnéticas al vacío de muy alta potencia. Las líneas alimentan los diodos de iones o electrones para bombardearlos al interior de una cámara de fisión.

2.4. Resumen del Capítulo

En este capítulo hemos llevado a cabo un procedimiento semi-analítico para determinar los valores de los potenciales eléctrico φ y magnético a , teniendo un conocimiento previo de la posición x y en consecuencia, del potencial efectivo θ . Bajo esta suposición, encontramos que el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el diodo plano al vacío en el caso límite abandona la forma original (1.1)–(1.2) y adopta parcialmente la forma (2.2)–(2.3) donde el factor $j_x \theta^{-1/2} \equiv k_0^2 \neq 0$ es constante. Los valores obtenidos los hemos denominado *potenciales transitorios*.

La ventaja que ofrece el tener un factor de separación k_0 constante es evidente, pues permite resolver el sistema (2.2)–(2.3) como si fueran EDOs lineales de segundo orden, que al combinarse con las condiciones de frontera del problema proporcionan las soluciones hiperbólicas (2.24).

Acto seguido utilizamos algunos de los resultados numéricos obtenidos en el capítulo anterior, para calcular no solo los potenciales transitorios, sino también obtener todos los otros parámetros del sistema, entre ellos los valores en la frontera α , a_L y φ_L . En el Cuadro 2.1 se registran estos resultados y junto a las Figuras 2.1–2.4, se muestra cómo es el comportamiento de cada una de éstas cantidades en función del parámetro de control x^\dagger .

Posteriormente hemos considerado la última posible situación con la que nos podemos encontrar y es aquella en la cual las condiciones de frontera (1.3) son todas nulas. Para el caso del potencial electrostático φ no se identificó ninguna restricción que obligara a un estudio empleando algún otro método numérico o analítico diferente a los desarrollados previamente en esta investigación. No obstante, el potencial magnético a si presenta algunos inconvenientes.

Para superar esta dificultad hemos considerado la teoría de las funciones de Green examinando dos casos en los cuales se modela el potencial magnético con condiciones de frontera separadas. Allí encontramos una función por partes que depende de las variables x y ξ , con $\xi \in [0, 1]$. Recordemos que la función de Green no suele ser una función matemática ordinaria sino que puede ser una distribución o una función generalizada.

⁴Magnetic Insulation Transmission Lines.

Finalmente, hemos hecho una breve mención acerca de las aplicaciones más conocidas del aislamiento magnético en la actualidad, a saber, la propagación de pulsos electromagnéticos de alta potencia en líneas de transmisión al vacío y la producción de energía eléctrica en plantas termonucleares.

Conclusiones

Hemos llegado a la parte final de esta investigación con la cual nos dimos a la tarea de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (1.1)–(1.2) ligado a las condiciones de frontera (1.3). Este sistema describe el caso límite del diodo plano al vacío bajo la acción de aislamiento magnético.

Comenzamos esta discusión haciendo una breve reseña del objeto de estudio analizado en este trabajo, con algunos apartados históricos y estado del arte. En seguida se hizo un planteamiento matemático, más descriptivo que formal, en el cual se mencionaba a grandes rasgos cómo se dedujo el sistema de ecuaciones diferenciales denominado el caso límite. Luego se ilustró un plan de trabajo con el cual iríamos considerando y descartando hipótesis hasta obtener las condiciones apropiadas para nuestros intereses.

En primera instancia procedimos a reducir este sistema introduciendo el cambio de variable (1.4) denominado potencial efectivo, para combinar las ecuaciones (1.1)–(1.2) y obtener la ecuación diferencial (1.18) ligada a las condiciones (1.5).

En seguida, para resolver este problema de valor en la frontera se usó una aproximación por serie de Taylor hasta segundo orden para obtener en forma explícita la solución semi-analítica tangencial (1.27), la cual fue examinada para establecer los requerimientos numéricos a los cuales debía ceñirse y luego se le aplicaron las condiciones de frontera del problema. Con estos resultados se obtuvo un conjunto de restricciones sobre los diferentes parámetros involucrados en el sistema.

De este examen se dedujo que el Cuarto Requerimiento (1.35) (subsección 1.2.1.4) y la Tercera Condición (1.50) (subsección 1.2.2.3) asomaban como las relaciones más importantes del capítulo. Acto seguido procedimos a investigar la forma correcta en que se relacionaban estas ecuaciones junto con la condición para aislamiento magnético (1.52).

Para ello decidimos hacer un estudio por casos en los cuales las constantes θ_L y $K_{1,2}$ tomaban valores particulares con el propósito de satisfacer (1.35) y (1.50) simultáneamente. Para ello consideramos algunos valores según las posibilidades que ofrecía cada caso. De aquí se pudo inferir que por contradicción tres de esos casos debían ser descartados. El último caso requirió de un examen más detallado para los coeficientes q_i definidos en (1.50)–(1.51).

Este análisis, junto con la construcción del Cuadro 1.7 y las Figuras 1.17 y 1.19, nos condujeron apropiadamente a la conclusión que por (1.69) el parámetro θ_L estaba obligado a tomar valores en el intervalo $(0, 1/3)$, por (1.70) la constante K_1 debía ser estrictamente menor que -8.88 y

por (1.50) la constante K_2 tendría tres raíces $K_{2(\text{izq,med,der})}$ de las cuales se descartaba $K_{2(\text{izq})}$ por ser negativa.

Teniendo plena certeza de los rangos de valores para cada parámetro involucrado en la función (1.27), consideramos algunos datos adecuadamente elegidos para construir numéricamente los arreglos paramétricos $(\theta_L; K_1, K_{2(\text{med,der})})$ con su correspondiente visualización gráfica. El análisis de resultados llevado a cabo entregó valores tales que satisfacen todas las condiciones necesarias para describir un diodo plano al vacío magneto–aislante bajo aproximación numérica tipo Taylor de segundo orden, indicando plenamente los puntos de retorno x^* y los intervalos espaciales donde ocurre el aislamiento magnético.

A esta altura ya disponíamos de un método semi–analítico con el cual podíamos describir de lleno el potencial efectivo y algunos parámetros del problema. Sin embargo, los potenciales eléctrico y magnético y los parámetros en la frontera (entre otros) aún eran inciertos. Por lo tanto, la segunda parte de la investigación fue encaminada a construir otro procedimiento semi–analítico de aproximación que permitiera determinar los valores a , a_L , α , φ , y φ_L .

La idea consistió en tomar un punto en el espacio x^\dagger y emplearlo como parámetro de control, con el cual se pudiera calcular un potencial efectivo transitorio θ^\dagger desde (1.27). En seguida definimos un factor de separación constante k_0 tal que el sistema de ecuaciones diferenciales original (1.1)–(1.2) ahora quedara en la forma (2.2)–(2.3), el cual es un sistema de EDOs lineales de segundo orden, que al combinarse con las condiciones de frontera del problema proporcionaron soluciones hiperbólicas para los potenciales transitorios (2.24).

Luego consideramos algunos de los resultados numéricos obtenidos en la primera parte del trabajo para calcular los potenciales transitorios y los parámetros restantes. El Cuadro 2.1 registra estos resultados y las Figuras 2.1–2.4 revelan el comportamiento de cada una de estas cantidades.

El último aspecto teórico considerado en esta investigación es una hipotética situación en la cual los potenciales eléctrico y magnético están ligados a condiciones de frontera nulas. Mientras que el potencial electrostático φ no presenta inconvenientes, el potencial magnético a si tiene algunas dificultades, por lo que se propuso considerar la teoría de las funciones de Green. Con este método examinamos dos casos en los cuales el potencial magnético tiene condiciones de frontera separadas nulas. Para cada caso se construyó una función por partes que resuelve la situación planteada.

Concluimos esta investigación haciendo una muy breve descripción de las aplicaciones más conocidas del aislamiento magnético en la actualidad, a saber, la propagación de pulsos electromagnéticos de alta potencia en líneas de transmisión al vacío y la producción de energía eléctrica en plantas termonucleares.

Los procedimientos aplicados en esta investigación son el típico ejemplo de aplicación del método científico. Constan de una colección de ideas con las cuales se planteó un conjunto de hipótesis, se hizo un estudio detallado mediante ensayo y error para cada variable emergente, se analizaron los resultados y se sacaron conclusiones al respecto.

Cada nuevo parámetro estaba circunscrito a condiciones que debíamos precisar, y en consecuencia, requerían de un examen minucioso (algunos más que otros). En este punto, el análisis gráfico y los

cuadros se convirtieron en elementos ilustrativos de capital importancia para nuestra empresa, conduciéndonos hasta la obtención de una serie de resultados razonables.

Esperamos que esta investigación sirva como alternativa y referencia de acercamiento al fenómeno del aislamiento magnético, cuando los métodos numéricos o analíticos presentan grandes dificultades y no son suficientes para alcanzar resultados concretos⁵.

Recomendaciones

A continuación hacemos algunas sugerencias a los lectores que estén interesados en continuar la investigación de los temarios abordados en este trabajo.

- En lugar de hacer un análisis por casos para determinar numéricamente los intervalos asociados a los parámetros del problema, podría considerarse alguno de los métodos para resolver numéricamente sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales como los que se exponen en el capítulo 8 del libro de Kincaid y Cheney [12]
- Se puede hacer un enfoque más formal del problema estudiando la existencia de soluciones semi-triviales y soluciones completas del sistema de ecuaciones original empleando herramientas del análisis funcional, tal y como se propone en el artículo de Ben Abdallah et. al. [4]
- El estudio de los casos particulares considerado en la parte final de esta investigación, puede generalizarse considerando el sistema de ecuaciones original escrito en términos de la función tangente que identifica al potencial efectivo. En este trabajo se fijó este potencial para poder determinar todos los parámetros restantes. La sugerencia es estudiar el sistema sin fijar el potencial efectivo usando, por ejemplo, elementos de la teoría de la bifurcación

⁵Todos los cálculos llevados a cabo aquí fueron realizados con una calculadora CASIO $fx - 3600G$ y todas las gráficas fueron diseñadas con el software libre GeoGebra 5.0.

Bibliografía

- [1] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*, Tenth edition, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55, Washington, 1972.
- [2] Z. Arévalo, A.V. Sinitsyn, O.A. Castañeda, M.H. Camelo, *A review of magnetic insulation*, Rev. Ingeniería e Investigación, Vol. 27, No. 3, 2007, pp. 159-171.
- [3] N. Baxvalov, N. Zhidkov, G. Kobelkov, *Numerical methods*, Fizimalit, Saint–Peterburg, 2001, p. -632.
- [4] N. Ben Abdallah, P. Degond, F. Méhats, *Mathematical models of magnetic insulation*, Physics of Plasmas, Vol. 5, 1998, pp. 1522-1534.
- [5] P. Degond, S. Jaffard, F. Poupaud, P.A. Raviart, *The Child–Langmuir asymptotics of the Vlasov–Poisson equation for cylindrically or spherically symmetric diodes, Parts 1 and 2*, Math. Methods Appl. Sci., Vol. 19, issue 4, 1996, pp. 287-312 and pp. 313-340.
- [6] P. Degond, P.A. Raviart, *An asymptotic analysis for the one–dimensional Vlasov–Poisson system*, Asymptotic Analysis, Vol. 4, No. 3, 1991, pp. 187-214.
- [7] P. Degond, P.A. Raviart, *On a penalization of the Child–Langmuir emission condition for the one–dimensional Vlasov–Poisson equation*, Asymptotic Analysis, Vol. 6, No. 1, 1992, pp. 1-27.
- [8] E.V. Dulov, A.V. Sinitsyn, *A numerical modelling of the limit problem for the magnetically noninsulated diode*, Appl. Mathematics and Computation, Vol. 162, 2005, pp. 115-154.
- [9] C.W. Gear, *Numerical initial value problems in ordinary differential equations*, Prentice–Hall, 1971.
- [10] C. Greengard, P.A. Raviart, *A boundary value–problem for the stationary Vlasov–Poisson equations: the plane diode*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 43, issue 4, 1990, pp. 473-507.
- [11] E. Hairer, G. Wanner, *Solving ordinary differential equations II: stiff and differential–algebraic problems*, Springer, 1996.
- [12] D. Kincaid, W. Cheney, *Análisis numérico: las matemáticas del cálculo científico*, Addison–Wesley Iberoamericana, 1994.

- [13] I. Langmuir, K.T. Compton, *Electrical discharges in gases: part II, fundamental phenomena in electrical discharges*, Rev. Mod. Phys., Vol. 3, issue 2, 1931, pp. 191-257.
- [14] V. Ledoux, *Study of special algorithms for solving Sturm–Liouville and Schrödinger equations*, Universiteit Gent, 2006-2007.
- [15] R.V. Lovelace, E. Ott, *Theory of magnetic insulation*, Phys. Fluids, Vol. 17, No. 6, 1974, pp. 1263-1268.
- [16] A. Ron, A.A. Mondelli, N. Rostoker, *Equilibria for magnetic insulation*, Maxwell Laboratories, Inc. 9244, Balboa Avenue, 1973, pp. 85-93.
- [17] A.V. Sinitzyn, *Positive solutions of nonlinear singular boundary–value problem of magnetic insulation*, Reportes Internos, Universidad Nacional de Colombia, No. 84, 2002, p. -16.
- [18] P.P.J.M. Schram, *Kinetic theory of gases and plasmas*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1991.
- [19] A.V. Sinitzyn, E.V. Dulov, *On a theoretical study for the solution properties of the limit problem for the magnetically noninsulated diode*, ISSN 1027-3190, Ukrain. Mat. Zh., Vol. 57, No. 6, 2005, pp. 840-851.
- [20] I. Stakgold, M. Holst, *Green's functions and boundary value problems*, Third edition, Wiley Interscience, New Jersey, 2011.
- [21] V. Verzhbizkii, *Numerical methods: mathematical analysis and ODEs*, Moscow: Vyshaya Shkola, 2001, p. -382.