



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Un Modelo Computacional para Estudiar Modos P en Regiones Activas del Sol

Carlos Andrés Galarza Arévalo

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Observatorio Astronómico Nacional
Bogotá, Colombia
2015

Un Modelo Computacional para Estudiar Modos P en Regiones Activas del Sol

Carlos Andrés Galarza Arévalo

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Maestría en Ciencias - Astronomía

Director:

Prof. Benjamín Calvo-Mozo

Asesor Internacional:

Juan Carlos Martínez Oliveros

Línea de Investigación:

Astrofísica Solar

Grupo de Investigación:

Astronomía y Cosmología

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Observatorio Astronómico Nacional
Bogotá, Colombia
2015

El cosmos es todo lo que es, todo lo que fue y todo lo que será. Nuestras más ligeras contemplaciones del cosmos nos hacen estremecer: sentimos como un cosquilleo nos llena los nervios, una voz muda, una ligera sensación como de un recuerdo lejano o como si cayéramos desde gran altura. Sabemos que nos aproximamos al más grande de los misterios.

Carl Sagan

Resumen

Palabras clave: Modos P, Regiones Activas, Oscilaciones solares, manchas solares.

La identificación de modos acústicos de oscilación, mejor conocidos como modos p; cuya frecuencia típica de oscilación está asociada a un período de 5-minutos, han permitido estudiar con más detalle el interior solar. El rótulo de modos p se debe a que la fuerza restauradora que genera estas oscilaciones es la presión. Para estudiar en detalle estas oscilaciones se requiere resolver las ecuaciones de la hidrodinámica. Esto exige una serie de procedimientos matemáticos tales como: aplicar un método de perturbaciones para generar una ecuación, la cual se linealiza y posteriormente implementar un proceso de separación de variables que permite distinguir entre la influencia de la onda tanto radialmente como angularmente al momento de propagarse. Adicionalmente, cuando se quieren tener en cuenta efectos magnéticos tal y como se observa sobre la superficie y la atmósfera solar se deben resolver las ecuaciones de la magnetohidrodinámica que es la teoría que mejor explica estos fenómenos en la actualidad. Sin embargo, en este trabajo se presenta un camino que, aunque más sencillo e ideal, es muy útil para estudiar las posibles trayectorias que siguen las ondas acústicas o modos p en el Sol. Esto consiste en considerar una teoría de rayos como alternativa a resolver la ecuación de onda, tanto si se tienen en cuenta efectos magnéticos como en caso contrario. Con la anterior consideración se logra comprobar que las trayectorias simuladas para modos p no sólo dependen de una frecuencia temporal sino también de una frecuencia espacial (grado l). Parece demostrarse adicionalmente, que el campo magnético tiene una fuerte influencia en la propagación de ondas acústicas causando un mayor amortiguamiento, y por ende, una trayectoria más cercana a la superficie.

Abstract

Keywords: P modes, Active Regions, Solar Oscillations, Sunspots

Acoustic oscillation modes have allowed to study in more detail the solar interior. These oscillations, whose typical oscillation frequencies are associated with a 5-minute period, are better known as p modes. The name of p-modes comes from the restoring force being generated by a change of pressure inside the Sun. In order to study these oscillations in detail, solving the equations of hydrodynamics is required. This demand a series of mathematical procedures such as, a perturbation method to generate an equation which should be linearized and then apply a separation of variables method in order to distinguish between the wave influence both radially and angularly when they propagate. Additionally, when you want to take into account magnetic effects as observed on the surface and the solar atmosphere,

you must solve the equations of magnetohydrodynamics which is the theory that nowadays best explains these phenomena. However, this work presents a way despite of being simple and ideal, very useful to study the possible paths followed by acoustic waves or p-modes in the sun. So a ray theory is considered as an alternative to solve the equation wave whether magnetic effects are taking into account as otherwise. Furthermore it is found that simulated trajectories for p modes depends not only on a temporary frequency but also a special frequency (degree l). It seems to be demonstrated that the magnetic field has a strong influence on the propagation of acoustic waves causing greater damping and therefore a path closer to the surface.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi familia, por haberme apoyado durante todos estos años desde el momento que decidí embarcarme en la aventura de estudiar física y ahora dando otro paso más en esta travesía tan emocionante pero que demanda mucha disciplina y paciencia. Quiero agradecer también a mi novia Adriana Vela por su apoyo incondicional y por ayudarme a mantenerme motivado en los momentos que más los necesitaba, aún habiéndonos tenido que separar por un tiempo.

Por supuesto agradezco especialmente al profesor Benjamín Calvo y a Juan Carlos Martínez por su invaluable asesoría y guía, y por haber creído en mi todo el tiempo; incluso en los momentos en que más flaqueaba. Sin ellos, este trabajo sencillamente no hubiera sido posible.

Agradezco también a Santiago Vargas y en general al grupo de Astrofísica Solar (GoSA) del Observatorio Astronómico Nacional por su apoyo y por haberme hecho sentir parte de ese gran proceso de construcción del conocimiento y divulgación en astronomía que se está llevando a cabo en Bogotá y que ojalá se pueda extender a todo el país.

Por último quiero hacer una mención especial al profesor Robel Arenas por haberme brindado todo su apoyo durante el tiempo que me desempeñé como asistente docente del Observatorio Astronómico Nacional. A Juan Camilo Buitrago por haberme ayudado con el ajuste de la plantilla utilizada para escribir este documento y por supuesto a Jhoham Mauricio Garzón por haberme ayudado con la recopilación de todas las referencias bibliográficas.

A todos los que pude haber dejado por fuera de esta mención quiero decirles que cuentan con mi más sincero agradecimiento y aprecio.

Contenido

| | |
|---|-----------|
| Resumen | IV |
| Agradecimientos | VI |
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Preliminares | 3 |
| 2.1. Principios básicos en el estudio de estrellas | 3 |
| Principios Básicos en el estudio de estrellas | 3 |
| 2.1.1. Luminosidades, masas y radios estelares | 3 |
| Luminosidades, masas y radios estelares | 3 |
| Escalas de tiempo características | 4 |
| 2.1.2. Clasificación Espectral y Diagrama Hertzsprung-Russell | 5 |
| Clasificación Espectral y Diagrama H-R | 5 |
| 2.2. Estructura Estelar | 8 |
| Estructura Estelar | 8 |
| 2.2.1. Ecuaciones Básicas | 9 |
| Ecuaciones Básicas | 9 |
| Condiciones de Equilibrio Interno | 11 |
| 2.3. El Sol | 12 |
| El Sol | 12 |
| 2.3.1. Estructura Interna | 13 |
| Estructura Interna | 13 |
| Mecánica de Fluidos | 16 |
| Fluidos Ideales | 16 |
| Ondas Acústicas | 16 |
| 2.4. Física de Plasmas | 17 |
| Física de Plasmas | 17 |
| 2.4.1. Ecuaciones Básicas de MHD | 17 |
| Ecuaciones Básicas de MHD | 17 |
| Resumen | 18 |
| 3. Heliosismología | 20 |
| 3.1. Breve Historia de la Heliosismología | 20 |

| | |
|---|-----------|
| Breve Historia de La Heliosismología | 20 |
| 3.2. Fundamentos de Heliosismología Global | 22 |
| Fundamentos de Heliosismología Global | 22 |
| 3.2.1. Determinación de la Estructura Interna del Sol a partir de Ondas | 22 |
| Determinación de la Estructura Interna del Sol a partir de Ondas | 22 |
| Ecuaciones Básicas de la Hidrodinámica | 23 |
| La Aproximación Adiabática | 25 |
| Estado de Equilibrio y Análisis Perturbativo | 26 |
| Ondas Acústicas | 28 |
| 28 | |
| Ecuaciones Lineales para las Oscilaciones Estelares | 28 |
| Relaciones de Dispersión | 31 |
| Ley de Duvall | 32 |
| Problemas de Inversión | 33 |
| Heliosismología Local | 34 |
| Diagramas de Anillos | 34 |
| Diagramas de Tiempo-Distancia | 35 |
| Holografía | 35 |
| 3.2.3. Sismos Solares | 37 |
| Sunquakes | 37 |
| Resumen | 38 |
| 4. Construcción del Modelo Solar | 39 |
| Ondas Planas | 39 |
| Ley de Snell | 40 |
| Generalización para un modelo estratificado | 41 |
| Método analítico para obtener la curva Tiempo-Distancia | 42 |
| Algunos Ejemplos | 44 |
| Construcción de Rayos Acústicos utilizando Relaciones de Dispersión | 46 |
| Resultados | 48 |
| 5. Conclusiones | 58 |
| Bibliografía | 60 |

1 Introducción

El estudio del interior solar y en general de cualquier estrella viene desarrollándose como uno de los campos más importantes y significativos dentro de la astrofísica. Esto se ha logrado en un principio con los modelos que han sido desarrollados resolviendo las ecuaciones de la estructura estelar tal y como lo ha hecho Bahcall et al. [2001], y posteriormente, con el surgimiento de la heliosismología, la cual propone investigar el interior solar a partir de la identificación de oscilaciones que se originan en la zona convectiva y se propagan por todo el interior solar. Estas oscilaciones en principio, provienen de variaciones en la presión de procesos convectivos para transferencia de energía desde el interior hacia el exterior que ocurren en el Sol. De ahí que la mayoría de modos acústicos queden atrapados en la zona convectiva de esta estrella. [Aerts et al., 2011].

En esta tesis se pretende desarrollar dos objetivos fundamentales. El primero de ellos consiste en estudiar la propagación de ondas acústicas en un gas ideal con parámetros físicos asociados a un modelo solar estándar. Mientras que el segundo objetivo consiste en estudiar nuevamente la propagación de ondas acústicas pero incluyendo la acción de un campo magnético constante.

Este documento consta de tres partes. En el capítulo 1 se hace una breve descripción de las variables físicas que han servido para estudiar y darle una clasificación general al Sol (diagrama H-R), y cómo este se diferencia de otras estrellas. Posteriormente, se hace una mención breve de la imagen que tenemos del Sol en la actualidad; dividiéndolo en ciertas capas o regiones que dependen básicamente del proceso de transporte de energía que sea más efectivo. Finalmente, se describen los fundamentos teóricos esenciales que han servido para construir modelos del interior solar, tanto si se considera como un gas ideal (hidrodinámica), como si se tienen en cuenta efectos magnéticos (magnetohidrodinámica).

En el capítulo 2 se hace una introducción a detalles más finos y a teorías más avanzadas que se han creado para estudiar el Sol, como es el caso de la *heliosismología*. Esta teoría propone que se puede estudiar el interior solar y en general de cualquier estrella (astrosismología, también llamada sismología estelar) a partir de la detección de ondas acústicas que se propagan a través de toda su estructura. Para esto, primero se hace un recuento del desarrollo histórico de esta teoría, enunciando cuando fue la primera vez que se detectaron oscilaciones en la superficie del Sol (con un período de 5-minutos) y cómo se han creado

nuevos instrumentos (puestos en órbita a través de satélites) y técnicas que han permitido mejorar y continuar reafirmando la existencia de tales oscilaciones. Por otro lado, desde el punto de vista de la teoría se muestra cómo mejorando los modelos planteados en el anterior capítulo se obtienen nuevos sistemas de ecuaciones, que junto con la creación de nuevas técnicas de análisis como los diagramas de anillos [Hill, 1988], los diagramas de Tiempo-Distancia [D'Silva, 1996], y la holografía [Lindsey and Braun, 1997] han permitido estudiar el interior solar con más detalle y mejorar la resolución de los modelos ya existentes. Finalmente, el capítulo termina con una breve discusión sobre cómo al querer estudiar el interior solar por zonas más localizadas (*heliosismología local*) hay que tener en cuenta fenómenos magnéticos que pueden ser observados en manchas solares y en fulguraciones, los cuales a su vez son fuentes potenciales de un tipo especial de perturbación acústica tales como sismos solares. [Kosovichev and Zharkova, 1998].

Posteriormente, el capítulo 3 que es la esencia de este trabajo, plantea los ingredientes esenciales que se tuvieron en cuenta para tener que evitar tratar con la solución completa de las ecuaciones de onda, pero aún así lograr simular la propagación de ondas acústicas hacia el interior solar en dos situaciones: sin campo magnético y bajo la influencia de un campo magnético constante. Esto se logra considerando una solución ideal en ondas planas que permite desarrollar una teoría de rayos aplicada a ondas sonoras, con la cual se caracteriza la trayectoria de la señal con un parámetro conocido como punto de retorno, que a su vez depende de la componente horizontal del vector de onda k_h y de la frecuencia temporal ω , siendo más influenciada por el primer parámetro. Finalmente, se presentan los resultados obtenidos y se hace un contraste con las simulaciones realizadas por Ganse [2013], creadas en principio para estudiar sismos en la Tierra, pero que siguen los mismos principios físicos.

El trabajo termina con unas conclusiones sobre las limitaciones y los aspectos interesantes que sobresalen de este trabajo al compararlo con otros trabajos y códigos más avanzados como por ejemplo, los realizados por Cameron et al. [2007], Hanasoge [2008].

2 Preliminares

Este capítulo establece unos lineamientos generales que permitan entender el objeto de estudio de este trabajo. No es la intención el abarcar un gran contenido teórico ya que el autor considera que existen suficientes referencias y artículos detallados para cada uno de los temas que aquí se expongan y por lo tanto se correría el riesgo de desviarse del objetivo central de estudio de este trabajo en el cuál se hará especial énfasis a lo largo de todo el escrito.

2.1. Principios básicos en el estudio de estrellas

2.1.1. Luminosidades, masas y radios estelares

El estudio y la caracterización de las diferentes estrellas se ha realizado principalmente a partir de parámetros físicos que definen propiedades tales como luminosidad, masa y radio, los cuales han servido como base para crear los primeros modelos para el estudio de su estructura interna.

Es normal que se tenga una mayor familiaridad con los conceptos de masa (notado como M) y radio (notado como R) que ciertamente nos invita a imaginarnos la forma de la estrella y su influencia en el espacio. Sin embargo, vale la pena aclarar el concepto de luminosidad L , normalmente entendido como la tasa total de pérdida de energía por radiación desde la superficie estelar [Cox and Giuli, 1968].

Estos parámetros han sido medidos o determinados en múltiples ocasiones de forma empírica (o semiempírica), llevándonos casi siempre a definir o calcular otras variables físicas de interés como temperatura efectiva T_e y densidad media ρ_m (como fórmulas compuestas de L , M y R).

Cuando se asume que L y R no varían mucho durante un cierto intervalo de tiempo (el cuál será discutido en la siguiente sección), la temperatura efectiva vendría dada por la ley de Stefan-Boltzmann mientras que la densidad media se calcula considerando una simetría esférica.

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 \quad (2-1)$$

$$\bar{\rho} = M / [(4/3)\pi R^3] \quad (2-2)$$

En la Tabla 2.1.1 se puede apreciar las variables físicas más fundamentales con las cuales se describe el Sol:

Tabla 2-1: Principales propiedades físicas del Sol. Esta tabla fue adaptada de Karttunen et al. [2007] (Cap. 12. p. 263.).

| Parámetro | Notación | Valor |
|----------------------|--------------|-----------------------------------|
| Masa | M_{\odot} | $1,989 \times 10^{30} kg$ |
| Radio | R_{\odot} | $6,960 \times 10^8 m$ |
| Densidad media | $\bar{\rho}$ | $1409 kg \cdot m^{-3}$ |
| Densidad central | ρ_c | $1,6 \times 10^5 kg \cdot m^{-3}$ |
| Temperatura efectiva | T_{eff} | $5785 K$ |
| Temperatura central | T_c | $1,5 \times 10^7 K$ |
| Luminosidad | L | $3,9 \times 10^{26} W$ |
| Clase espectral | G2 | |
| Composición química | X | 0.71 |
| | Y | 0.22 |
| | Z | 0.02 |
| Período rotacional | | 25 d |
| | | 29 d |

Escalas de tiempo características

Esta sección se basa en su totalidad en Cox and Giuli [1968] Cap. 0, Sec. 2.

Básicamente cuando se habla de procesos de evolución en estrellas, se tiene una especial consideración al cambio gradual de la composición química al interior estelar (debido principalmente a reacciones nucleares). En esta sección se hace una introducción a tres escalas de tiempo características que se deben tener en cuenta al momento de hablar de diferentes

comportamientos tales como condición de equilibrio térmico, equilibrio hidrostático y estrellas pulsantes.

En primer lugar se introduce la medida de tiempo nuclear t_{nuc} , definido como el tiempo requerido para que se aprecie un cambio significativo en las propiedades físicas de una estrella como consecuencia de reacciones nucleares. Por ejemplo, en una estrella como el Sol que deriva toda su energía por combustión de Hidrógeno se tiene el siguiente estimado [Cox and Giuli, 1968].

$$t_{nuc} = \left(\frac{1}{10}\right) \frac{0,007Mc^2}{L} \sim 10^{10} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right) \left(\frac{L_{\odot}}{L}\right) \text{ años} \quad (2-3)$$

Otra escala de tiempo interesante es el tiempo Kelvin, que es el intervalo que debe transcurrir para que se aprecien cambios considerables en el radio de la estrella debido a efectos gravitacionales. Aplicando el teorema del virial se puede estimar el siguiente cálculo

$$t_K \sim 6E_{th}/L \quad \text{donde,} \quad (2-4)$$

$$E_{th} = -(1/2)\Omega = (1/2)qGM^2/R \quad (2-5)$$

$$\text{por tanto, } t_K \sim \frac{3}{4} \frac{GM^2}{LR} \approx 2 \times 10^7 \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{L_{\odot}}{L}\right) \left(\frac{R_{\odot}}{R}\right) \text{ años} \quad (2-6)$$

Para el caso de estrellas que no están en equilibrio hidrostático como ocurre con las estrellas pulsantes, la escala de tiempo relevante es el tiempo de “caída-libre” t_{ff} . Para los objetivos de este trabajo, este tiempo característico va a ser el más importante ya que es del orden típico del período de pulsación de la estrella en cuestión. Este tiempo puede ser estimado fácilmente a partir de la siguiente fórmula

$$t_{ff} \sim 2\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = \frac{2}{4\pi G/3}^{1/2} \approx 0^d,04(\bar{\rho}_{\odot}/\bar{\rho})^{1/2} \quad (2-7)$$

Para el Sol, t_{ff} es del orden de 1 hora.

2.1.2. Clasificación Espectral y Diagrama Hertzsprung-Russell

Estudiar las estrellas desde un punto de vista espectral resulta muy útil ya que la mayoría de las propiedades físicas se pueden inferir a partir de un análisis sobre las líneas de absorción o emisión que presente el espectro. Por supuesto, el Sol está incluido en esta discusión (ver Fig. 2-1).

Se dice que la primera observación del espectro solar fue hecha por Isaac Newton en 1666. Sin embargo, el verdadero inicio de las observaciones espectrales surge con la identificación de líneas oscuras en el espectro vistas por Joseph Fraunhofer en 1814 que dio paso a una primera clasificación espectral. En su momento, Fraunhofer asignó arbitrariamente como

nombre, letras mayúsculas a líneas oscuras de las cuales en principio no tenía idea de cuáles elementos químicos eran responsables de dicha absorción. Más adelante, en 1860, Gustav Robert Kirchhoff y Robert Bunsen se dieron cuenta que realmente estas líneas eran un patrón característico producido por varios elementos químicos en un gas incandescente.

Actualmente existen varias clasificaciones, de las cuales vamos a considerar y a enunciar brevemente dos de ellas [Karttunen et al., 2007].

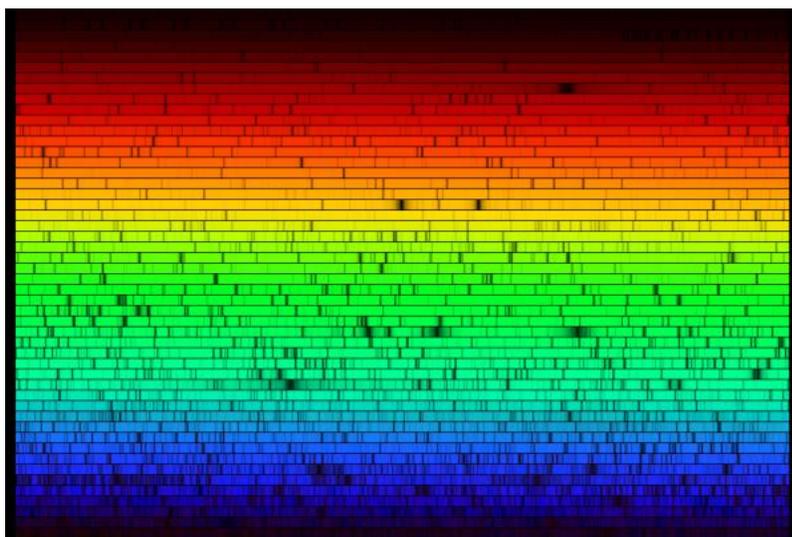


Figura 2-1: Espectro solar en alta resolución. Créditos : N. A. Sharp, NOAO/NSO/Kitt Peak FTS/AURA/NSF

Clasificación Espectral de Harvard

Esta clasificación espectral fue desarrollada en el Observatorio de Harvard en Estados Unidos a principios del siglo XX.

Dado que este trabajo no tiene como objetivo hacer una discusión extensa en este tema en particular, sólo se hará énfasis en que también se utiliza una notación de letras mayúsculas tal y como lo hizo Fraunhofer en su momento, obteniendo la siguiente secuencia conocida

C
O-B-A-F-G-K-M-L-T
S

El orden de esta secuencia se caracteriza por un descenso en la temperatura de O hasta T. Adicionalmente, las clases C y S corresponden a ramas paralelas para los tipos G-M, pero que difieren en su composición química superficial (ver Fig. 2-2).

La clase G agrupa estrellas “amarillas” como nuestro Sol. La temperatura superficial es del orden de 5500K. Las líneas HI son tenues, mientras que las líneas H y K son fuertes. Las

líneas metálicas también son fuertes. La banda G es perfectamente visible y se aprecian líneas CN para gigantes rojas [Karttunen et al., 2007].

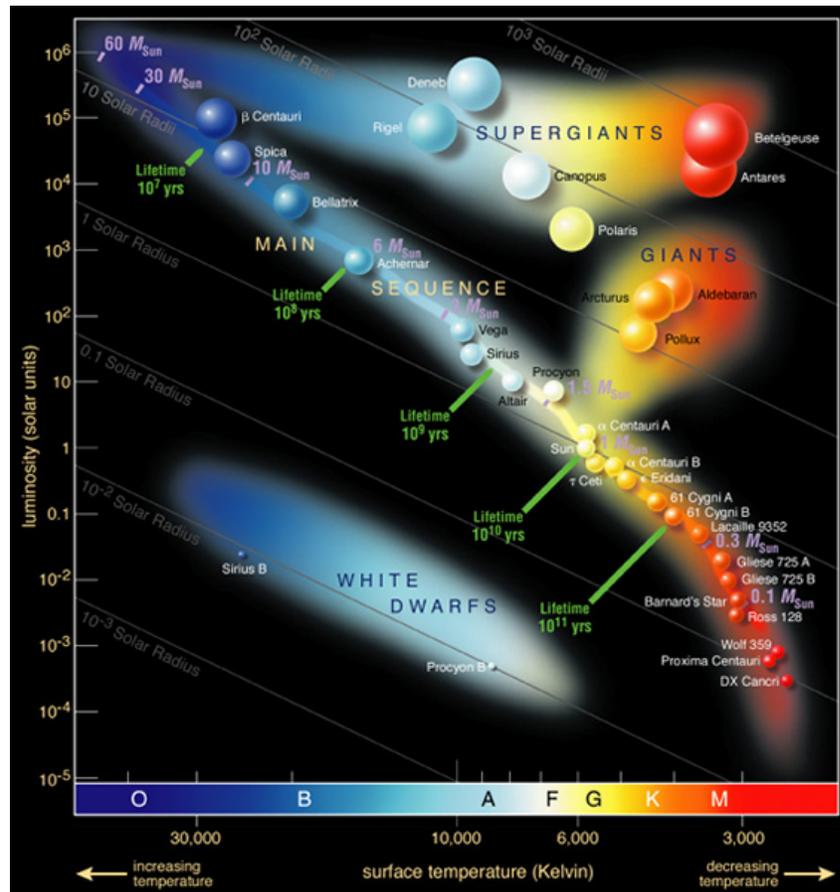


Figura 2-2: Diagrama HR mostrando una diversidad de estrellas en la Vía Láctea. Se puede apreciar que el Sol hace parte de la secuencia principal. Créditos: European Southern Observatory (ESO).

Clasificación Espectral de Yerkes

Dado que la clasificación espectral de Harvard sólo tiene en cuenta el efecto de la temperatura sobre el espectro, existe una clasificación mucho más precisa y detallada postulada por *William W. Morgan, Philip C. Kennan y Edith Kellman* del Observatorio Yerkes en Estados Unidos. Esta clasificación usualmente notada con las siglas MKK está basada en un conjunto estándar de estrellas con un criterio de luminosidad detallado. Se pueden distinguir seis clases diferentes de luminosidad [Karttunen et al., 2007]:

- Ia, las estrellas supergigantes más luminosas.
- Ib, supergigantes menos luminosas.

- II, gigantes luminosas.
- III, gigantes normales.
- IV, subgigantes.
- V, estrellas de la secuencia principal (enanas).

2.2. Estructura Estelar

Los argumentos y ecuaciones que se presentan en esta sección fueron tomados de Hansen and Kawaler [2012].

Cuando pensamos en estrellas, generalmente se nos viene a la mente la imagen de un montón de puntos “brillantes” en el cielo. Pero a medida que ha avanzado la tecnología permitiendo el desarrollo de nuevos instrumentos de medición, tales como satélites y telescopios, la humanidad ha sido capaz de indagar más y más sobre varios misterios del Universo. Sin embargo, cuando se trata de estudiar el interior de las estrellas no nos queda más opción que recurrir a modelos teóricos y a mediciones indirectas, utilizando todo nuestro conocimiento acumulado en física y astrofísica.

Sorprendentemente, en varias ocasiones, cuando queremos aproximarnos al estudio de sistemas complejos; usualmente podemos partir de consideraciones muy ideales, y aún así lograr identificar cosas muy interesantes de nuestro objeto real de estudio. En el caso del Sol, podemos empezar pensando en una esfera de gas simétrica, no rotante, sin ninguna influencia de algún campo magnético, y sin fuerzas ni aceleraciones netas actuando sobre ella.

En primer lugar, miremos cómo es el balance de fuerzas para una estrella arbitraria en equilibrio. De los principios de la mecánica newtoniana, podemos calcular la gravedad local al interior

$$g(r) = \frac{GM_r}{r^2} \quad (2-8)$$

Donde $G = 6,6726 \times 10^{-8} g^{-1} cm^3 s^{-2}$ es la constante gravitacional.

M_r es la masa contenida dentro de una esfera de radio r .

Teniendo en cuenta la simetría esférica de la estrella, M_r también se puede calcular de la siguiente manera

$$M_r = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr \quad (2-9)$$

En forma diferencial,

$$gM_r = 4\pi r^2 \rho dr \quad (2-10)$$

A las ecuaciones 2-9 y 2-10 se les conoce como ecuaciones de conservación de la masa. Ahora, si consideramos un elemento de área infinitesimal, el balance de fuerzas estará determinado por un término gravitacional y una diferencia de presiones

$$\rho \ddot{r} = -\frac{dP}{dr} - \frac{GM_r}{r^2} \quad (2-11)$$

A 2-11 se le conoce como ecuación de movimiento.

Si hacemos $\ddot{r} = 0$ en la Ec. 2-11 obtenemos la *Ecuación hidrostática de equilibrio*:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} = -g\rho \quad (2-12)$$

Recordemos también que la energía total potencial gravitacional Ω de una esfera auto-gravitante¹ se define como el total de energía requerida para dispersar todos los elementos de la esfera hasta el infinito (por convención se adopta con signo negativo). En otras palabras, Ω es la energía requerida para ensamblar la estrella a su configuración actual, reuniendo el material desde el “extremo” del universo. [Hansen and Kawaler, 2012].

$$\Omega = -\int_0^M \frac{GM_r}{r} dM_r \quad (2-13)$$

Que usualmente se expresa de la forma,

$$\Omega = -q \frac{GM^2}{R} \quad (2-14)$$

Tal y como se puede apreciar en el conjunto de ecuaciones 2-4.

2.2.1. Ecuaciones Básicas

Hasta el momento ya hemos obtenido dos de las expresiones que hacen parte de este conjunto de ecuaciones. Estas son las ecuaciones 2-9 ó 2-10 y 2-12 respectivamente.

Ahora bien, desde el punto de vista del balance energético, se tiene que, a partir de la condición de equilibrio térmico local junto con el principio de conservación de la energía; toda cantidad producida al interior debe ser transportada a la superficie y radiada hacia el exterior. [Karttunen et al., 2007].

Introduciendo el coeficiente de producción de energía ϵ , también conocido como tasa local de generación de energía termonuclear; se tiene la siguiente ecuación básica de la estructura estelar.

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon \quad (2-15)$$

¹El concepto de auto-gravitación es el que permite explicar que la estructura se mantenga unida como un solo cuerpo debido a la atracción gravitacional entre las diferentes partes de su estructura.

Sin embargo, no hemos hecho ningún énfasis en los mecanismos de transporte de energía hasta el momento. El interior solar básicamente está gobernado por tres modos de transferencia: transferencia por fotones, radiación, conducción y convección térmica. Por ahora, se presenta una breve discusión acerca de la transferencia de fotones y la conducción térmica al interior estelar [Hansen and Kawaler, 2012]. El caso de la convección térmica se pospondrá hasta el segundo capítulo, cuando se explique la relación entre oscilaciones apreciadas y detectadas en el Sol con procesos de convección al interior de éste.

Aunque en términos generales, se asume la condición de equilibrio térmico local (ETL) como un principio válido, hay que aclarar que aunque suene opuesto al principio ETL, se necesita un cierto grado de anisotropía para que se puedan transportar fotones desde las regiones más internas. El efecto de introducir una “pequeña anisotropía” puede estudiarse a partir de procesos de difusión.

Lo primero entonces, sería partir de la ecuación de transferencia radiativa

$$\mu \frac{dI_\nu(\tau, \mu)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\tau, \mu) - S_\nu(\tau, \mu) \quad (2-16)$$

I_ν se define como la intensidad de radiación perpendicular a la superficie.

τ_ν es el grosor óptico a una frecuencia arbitraria ν .

S_ν se denomina función de fuente y tiene que ver con la razón entre el coeficiente de emisión j_ν y el coeficiente de opacidad o absorción α_ν .

$\mu = \cos \theta$ está relacionado con la inclinación del haz de radiación sobre la superficie.

De donde se puede obtener una expresión para el flujo de energía radiado hacia el exterior

$$F_\nu = \frac{4\pi}{3} \frac{\partial B_\nu}{\partial \tau_\nu} \quad (2-17)$$

De 2-16 y 2-17 se encuentra un expresión para la luminosidad que varía con un gradiente de temperatura

$$L_r = \frac{16\pi a c r^2}{3\kappa\rho} T^3 \frac{dT}{dr} \quad (2-18)$$

Ordenando los términos de otra manera se tiene,

$$\frac{dT}{dr} = \left(-\frac{3}{4ac} \right) \left(\frac{\kappa\rho}{T^3} \right) \left(\frac{L_r}{4\pi r^2} \right) \quad (2-19)$$

Donde,

$a = 4\sigma/c = 7,564 \times 10^{-16} \text{ Jm}^{-3} \text{ K}^{-4}$ es la constante de radiación

κ es el coeficiente de absorción de masa mejor conocido como opacidad.

Alternativamente, se puede definir el término ∇ para caracterizar la transferencia térmica

$$\nabla \equiv \frac{d \ln T}{d \ln P} = -\frac{r^2}{GM_r \rho T} \frac{1}{dr} \frac{dT}{dr} \quad (2-20)$$

En el caso más sencillo, se supone que este proceso de transferencia ocurre en un régimen adiabático y por lo tanto

$$\nabla_{rad} = \frac{3}{16\pi ac} \frac{P \kappa}{T^4} \frac{L_r}{GM_r} \quad (2-21)$$

En resumen, el conjunto de ecuaciones que explicaría la estructura interna de una estrella está compuesto por 2-10, 2-12, 2-15 y 2-21.

Finalmente, para completar nuestro sistema de ecuaciones hace falta definir una ecuación de estado, que en primera aproximación podría considerarse un gas perfecto [Karttunen et al., 2007]. Luego, nuestra ecuación faltante sería

$$P = \frac{k}{\mu m_H} \rho T \quad (2-22)$$

Donde,

k es la constante de Boltzmann

m_H es la masa del átomo de hidrógeno

μ es la masa molecular media en unidades de m_H

En un caso completamente general, el estado del sistema estaría determinado por el siguiente conjunto de ecuaciones y sus derivadas

$$P = P(\rho, T, X) \quad (2-23)$$

$$E = E(\rho, T, X) \quad (2-24)$$

$$\kappa = \kappa(\rho, T, X) \quad (2-25)$$

$$\epsilon = \epsilon(\rho, T, X) \quad (2-26)$$

La teoría de estructura estelar nos ha permitido contruir los modelos que actualmente tenemos del Sol; basándose en unos principios físicos con los que se busca explicar como deberían ser las condiciones de equilibrio interno, el estado del gas y los procesos de producción y transporte de energía de cualquier estrella (en especial, **el Sol**). Para efectos de evitar una discusión extensa, se recurrirá a la notación y a la discusión planteada en Karttunen et al. [2007].

Condiciones de Equilibrio Interno

Estas condiciones se resumen en un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales que dan cuenta de la distribución de presiones, distribución de masa, producción y transporte de

energía, respectivamente.

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \quad (2-27)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (2-28)$$

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon \quad (2-29)$$

$$(2-30)$$

Para el caso del transporte de energía, debemos tener en cuenta el mecanismo que este dominando el proceso (conducción, convección, o radiación). Para una región donde predomine un proceso de radiativo, se tiene la siguiente expresión

$$\frac{dT}{dr} = \left(-\frac{3}{4ac}\right) \left(\frac{\kappa\rho}{T^3}\right) \left(\frac{L_r}{4\pi r^2}\right) \quad (2-31)$$

Por otro lado, el gradiente de temperatura se escribe de la siguiente forma para el caso convectivo

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \quad (2-32)$$

Adicionalmente, se necesita hacer consideraciones sobre las fuentes de producción de energía, las cuales se puede explicar en términos de la fusión nuclear de Hidrógeno en Helio junto con la tasa de cambio de la abundancia de hidrógeno proveniente de la estrella dada por



$$\frac{\partial X}{\partial t} = R_H + \frac{1}{r^2\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2\rho \left(D_H \frac{\partial X}{\partial r} + V_H X \right) \right] \quad (2-34)$$

Donde R_H es la tasa de cambio en la abundancia de Hidrógeno a causa de reacciones nucleares, D_H es el coeficiente de difusión y V_H es la velocidad de deposición.

Todas las ecuaciones mencionadas anteriormente, constituyen el conjunto necesario para contruir modelos estelares (en nuestro caso será modelos solares), que en terminos sencillos, significa expresar los cambios de variables físicas básicas tales como ρ, p, T, L, X_i en términos del radio de la estrella r Christensen-Dalsgaard [2002].

2.3. El Sol

El Sol además de ser el objeto central de nuestro sistema central, es la estrella más cercana que tenemos como referencia. De hecho, es nuestra mayor fuente de energía.

¹https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Afiche_del_sol.svg#/media/File:Afiche_del_sol.svg

Tal y como se mencionó en una sección anterior, el Sol es una estrella en la secuencia principal de tipo G2V, descrita comúnmente como una “enana amarilla” y formada aproximadamente hace unos 4,6 billones de años.

La imagen que tenemos actualmente del Sol está basada tanto en observaciones como en cálculos teóricos. Dado que algunas observaciones del Sol están en desacuerdo con modelos solares, estos tendrán que ser ajustados para poder dar una explicación más precisa. Sin embargo, los detalles generales permanecen intactos (ver Fig. 2-3) [Karttunen et al., 2007].

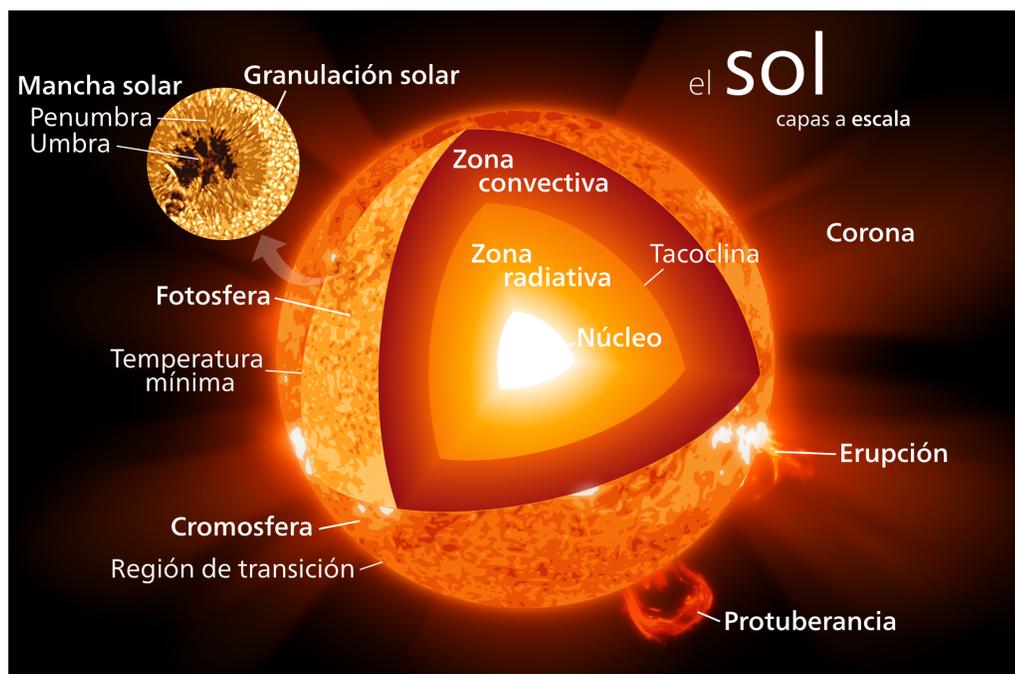


Figura 2-3: Estructura interna del Sol. Créditos: “Afiche del sol” by Kelvinsong - Own work. Licensed under CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons

2.3.1. Estructura Interna

En la sección anterior se mostró, como a partir de las ecuaciones básicas de estructura estelar, se pueden construir modelos que describan los cambios de las variables físicas fundamentales tales como densidad, presión, temperatura, composición química hacia el interior de la estrella. En esta sección, se plantea brevemente lo más relevante que se conoce de la estructura interna del Sol desde un punto de vista más cualitativo.

En la actualidad el Sol está compuesto de 6 regiones o capas diferentes: Núcleo, zona radiativa, tacoclina, zona convectiva, fotosfera y atmósfera (cromosfera y corona). Cada una presenta unos fenómenos físicos característicos que la distinguen de las demás regiones. A continuación, se describirá cada zona en detalle.

El Núcleo

El núcleo del Sol se extiende desde el centro, hasta un 20 o 25 % del radio solar. Tiene una densidad de $150g/cm^3$ y su temperatura es cercana a los 15,7 millones de Kelvin [Basu et al., 2009]². Es en esta zona donde se produce energía por fusión nuclear, en su mayoría proveniente de un proceso conocido como cadenas protón-protón ($p - p$) [Broggini, 2003]; que convierte el Hidrógeno en Helio. Mientras que apenas el 0.8 % proviene de otro proceso conocido como ciclo CNO [Goupil et al., 2011].

Zona Radiativa

Se extiende desde el núcleo, a 0,7 radios solares aproximadamente. El proceso físico que predomina en esta región es el transporte de energía por radiación térmica. La temperatura cae de más o menos 7 millones, hasta 2 millones de grados Kelvin. La densidad cae en dos ordenes de magnitud (de $20g/cm^3$ a $0,2g/cm^3$) a lo largo de esta zona³.

Tacoclina

La zona radiativa está separada por una capa delgada de transición conocida como tacoclina. Esta es la región que distingue la rotación uniforme (tipo cuerpo rígido), de la rotación diferencial que ocurre a partir de la zona convectiva. Se presume que un dinamo magnético dentro de esta región podría ser el responsable de la generación del campo magnético solar¹ [Soward et al., 2005].

Zona Convectiva

Es la última capa interna del Sol, y va desde la superficie, hasta unos 200,000km por encima (o de 0,7 radios solares, hasta 1 radio solar). Dado que la temperatura en esta zona es más baja que en la zona radiativa, los átomos más pesados no están completamente ionizados. Consecuentemente, el transporte radiativo resulta menos efectivo, y por una baja densidad del plasma, se hace posible la creación de corrientes convectivas. La convección térmica se manifiesta en forma de celdas que transportan calor hacia la fotosfera¹.

Fotosfera

Es la capa visible del Sol. Su densidad de partículas es de $\sim 10^{23} m^{-3}$. Por encima de esta capa, el Sol se vuelve transparente a la luz visible. Este cambio de opacidad se debe principalmente al decrecimiento de la cantidad de iones H^- . La fotosfera posee del orden de unos cientos de kilómetros de grosor, siendo ligeramente menos opaca que el aire en la Tierra. Dado que la zona más alta de la fotosfera es más fría que la zona más baja, cuando

²<http://solarscience.msfc.nasa.gov/interior.shtml>

³https://web.archive.org/web/20130510142009/http://mynasa.nasa.gov/worldbook/sun_worldbook.html

se aprecia una imagen del Sol; éste parece ser más brillante en el centro que en los bordes del Sol. Este fenómeno se conoce como oscurecimiento del limbo. [Abhyankar, 1977].

Atmósfera

Se puede apreciar a simple vista durante un eclipse total de Sol. Se compone de tres partes distintas: la cromosfera, la región de transición y la corona. Juntas forman lo que se conoce como la heliosfera. [Abhyankar, 1977].

La capa más fría del Sol se encuentra a unos 500 km por encima de la fotosfera, con una temperatura de $4,100\text{ K}$. [Abhyankar, 1977].

Sin embargo, la cromosfera, región de transición y la corona son mucho más calientes que la fotosfera, lo cual entra en contradicción con la teoría básica. Este hecho aún constituye problema abierto, objeto de investigaciones actuales. Hasta el momento ciertas evidencias sugieren que las ondas de Alfvén podrían ser las responsables de este calentamiento inusual. [De Pontieu et al., 2007].

Por encima de la capa más fría del Sol se encuentra una capa de unos 2000 km de grosor, conocida como la cromosfera. Su temperatura varía de tal forma que alcanza los $20,000\text{ K}$ en su zona más externa. [Abhyankar, 1977].

Por encima de la cromosfera existe una región delgada (de unos 200 km de grosor) conocida como la región de transición. Esta podría ser la región más misteriosa y menos comprendida ya que presenta un cambio abrupto de temperatura completamente inexplicable hasta el momento (¡de $20,000\text{ K}$ hasta $1,000,000\text{ K}$!) [Erdélyi and Ballai, 2007].

La corona es la siguiente capa atmosférica. Se denomina corona baja a la zona que se encuentra más cercana a la superficie del Sol, y su densidad de partículas oscila entre los 10^{15} m^{-3} y los 10^{16} m^{-3} . La temperatura promedio de la corona y el viento solar es de aproximadamente $1,000,000 - 2,000,000\text{ K}$; sin embargo, en las regiones más calientes alcanza valores de $8,000,000 - 20,000,000\text{ K}$. Aunque hasta el momento no existe una teoría completa que permita explicar el efecto de porqué la atmósfera solar resulta ser más caliente que su misma estructura interna; se supone que al menos una parte del calor transferido a la corona podría provenir de lo que se conoce como reconexión magnética [Erdélyi and Ballai, 2007].

Finalmente, la heliosfera es el remanente de plasma y viento solar que se extiende por todo el sistema solar y más allá. A unos 20 radios solares (0.1 UA), el flujo del viento solar se vuelve superalfvénico, es decir, el plasma viaja a una velocidad superior a la velocidad de Alfvén [Dwivedi, 2003].

Mecánica de Fluidos

Esta sección está basada en Landau and Lifshits [1959].

Fluidos Ideales

La dinámica de fluidos es la teoría que estudia el movimiento de líquidos y gases considerados como un medio continuo. Lo anterior implica que cualquier pequeño elemento de volumen siempre es lo suficientemente grande para seguir conteniendo un gran número de moléculas.

La descripción matemática del estado de un fluido se caracteriza por una distribución de velocidades $v = v(x, y, z, t)$ y dos cantidades termodinámicas cualquiera, como por ejemplo la presión $p(x, y, z, t)$ y la densidad $\rho(x, y, z, t)$.

Las ecuaciones fundamentales con las que se explica la dinámica de fluidos son las siguientes:

Ecuación de Continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (2-35)$$

Ecuación de Euler: La fuerza total que actúa sobre un elemento de volumen en el fluido

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2-36)$$

Ondas Acústicas

Variaciones en la presión y en la densidad en un fluido generan ondas acústicas. Estas variaciones se pueden escribir como pequeñas perturbaciones en torno a un valor de equilibrio:

$$p = p_0 + p' \quad (2-37)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad (2-38)$$

Empleando las ecuaciones 2-35 y 2-36 se obtiene la siguiente expresión:

$$p' = (\partial p / \partial \rho_0)_s \rho' \quad (2-39)$$

Introduciendo el término de potencial de velocidades $v = \nabla \phi$ se puede reescribir la ecuación de Euler (Ec. 2-36) como:

$$p' = -\rho \partial \phi / \partial t \quad (2-40)$$

Ahora, derivando la ecuación 2-39 con respecto al tiempo y utilizando la ecuación de continuidad (Ec. 2-35) para sustituir ρ' se obtiene la siguiente expresión útil:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 (\partial p / \partial \rho_0)_s \nabla \cdot v = 0 \quad (2-41)$$

Introduciendo el potencial de velocidades en la ecuación anterior se obtiene una ecuación de onda:

$$\partial^2 \phi / \partial t - c^2 \nabla^2 \phi = 0 \quad (2-42)$$

Donde,

$$c = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_s} \quad (2-43)$$

Es la velocidad del sonido en el medio.

2.4. Física de Plasmas

Esta sección tiene como objetivo enunciar algunas ideas básicas sobre la física de plasmas y su aplicación al contexto de la astrofísica.

De manera elemental, un plasma puede ser caracterizado por tres parámetros fundamentales:

- La densidad de partículas n .
- La temperatura T de cada una de las especies químicas que conforman el plasma (usualmente medido en eV, donde $1 \text{ eV} = 11650K$)
- Un campo magnético cuasi-estático B (medido en Teslas).

Para el caso de plasmas en el espacio, la densidad de partículas varía de $10^{16} m^{-3}$ en el medio interstelar, a $10^{20} m^{-3}$ en la atmosfera solar [Bellan, 2008].

Corrientes eléctricas y campos magnéticos pueden ser fácilmente generados en un plasma astrofísico debido a su baja resistividad. La energía de campos magnéticos es acumulada en el plasma, y posteriormente puede ser liberada súbitamente en forma de explosiones (bajo ciertas condiciones físicas). Todo esto puede ser acompañado de eyecciones de plasma dirigidas (chorros), flujos de calor y radiación intensos y aceleración impulsiva de partículas a altas energías.

Este fenómeno puede ser observado en fulguraciones en el Sol y otras estrellas; en la magnetósfera de la Tierra como tormentas magnéticas, en la corona de discos de acreción de fuentes de rayos X, y en núcleos activos de galaxias [Somov, 2006]

2.4.1. Ecuaciones Básicas de MHD

La magnetohidrodinámica es la teoría de fluidos correspondiente al plasma. Así como la hidrodinámica en el caso de fluidos, la magnetohidrodinámica usa parámetros físicos tales como la densidad, presión, temperatura y velocidad para explicar el movimiento de un plasma.

Básicamente, un plasma puede entenderse como un fluido sometido a campos electromagnéticos, cuyo su comportamiento estaría descrito por las ecuaciones de Maxwell. [Aschwanden, 2006]

Dado que ni el objetivo de este capítulo, ni de esta tesis es hacer una discusión extensa en todos los detalles de esta teoría, sólo se hará énfasis en las ecuaciones ideales con las cuales se puede llegar a explicar con un cierto grado de precisión los movimientos y la propagación de ondas acústicas dentro de un plasma. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones ideales se postula de la siguiente manera.

Ecuación de Continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (2-44)$$

Ecuación de Fuerzas o Movimiento:

$$\rho \partial v / \partial t = -\nabla p - \rho g + (j \times B) \quad (2-45)$$

Ecuación de Estado Adiabática:

$$\frac{\partial}{\partial t}(p\rho^\gamma) = 0 \quad (2-46)$$

Ecuaciones de Maxwell y fuerza de Lorentz:

$$\nabla \times B = 4\pi j \quad (2-47)$$

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{dB}{dt} \quad (2-48)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2-49)$$

$$E = \frac{1}{c}(v \times B) \quad (2-50)$$

Resumen

A partir de tres parámetros físicos fundamentales como lo son la masa M , el radio R y la luminosidad L se pueden construir clasificaciones estelares (Diagrama H-R) y modelos básicos que expliquen la estructura interna de las estrellas. Por otro lado, existen tres escalas de tiempo (nuclear, Kelvin y caída libre), las cuales resultan útiles para saber si podemos asumir un regimen de equilibrio termodinámico o no.

Refiriéndonos al caso específico de nuestra estrella de interés, es decir, nuestro Sol, de acuerdo a nuestra visión actual, se divide en 6 grandes zonas denominadas núcleo, zona radiativa, zona convectiva, fotosfera y atmosfera (cromosfera + corona). Estas diferentes zonas dependen del mecanismo de transferencia de energía propio de dicha zona; que puede ser por conducción (sólo es dominante en las regiones más internas), convección o radiación.

Posteriormente, se hizo una breve discusión sobre la teoría básica de mecánica de fluidos, ya que una estrella como el Sol en su idea más primitiva puede considerarse como una esfera gigante de gas ideal. Esta teoría permite entender el hecho de que pequeñas perturbaciones en la presión y la densidad en la superficie del Sol (las cuales han sido observadas), pueden llegar a generar ondas acústicas, que en principio, podrían propagarse por toda su estructura. Estas ondas son el objeto central de estudio en este trabajo.

Finalmente, se establecieron unos principios generales de la física de plasmas, concretamente, las ecuaciones básicas de la magnetohidrodinámica, que permiten tener en cuenta efectos magnéticos, que de hecho, son importantes a nivel atmosférico y superficial.

En el siguiente capítulo, se hace una breve introducción al desarrollo y fundamentos básicos de la heliosismología. Esta es la teoría más avanzada que existe para estudiar el interior solar.

3 Heliosismología

En este capítulo se presenta una breve descripción de los aspectos más fundamentales de la *heliosismología global* y local. Respecto a la visión global, se retoman las ecuaciones básicas de la hidrodinámica para mostrar cómo a partir de una serie de aproximaciones y suposiciones teóricas se puede analizar y comprender el mecanismo de propagación de las oscilaciones solares, las cuales ya han podido ser identificadas observacionalmente. Posteriormente, una vez obtenidos el nuevo conjunto de ecuaciones se hace una deducción breve para obtener unas relaciones de dispersión que constituyen una pieza clave en las simulaciones desarrolladas para obtener los resultados que son presentados en capítulos siguientes.

Ahora, en lo que concierne a la *heliosismología local*, que no significa otra cosa más que estudiar la estructura solar a un nivel más definido restringiendo el análisis a regiones más limitadas. Se hará un especial énfasis a cómo el campo magnético puede tener una influencia relevante en la forma como se propaguen dichas oscilaciones. También se hace una mención breve al fenómeno de los *Sunquakes* ó sismos solares observado por primera vez por Kosovichev en 1996. Finalmente, se hace una descripción muy concisa de técnicas muy usadas y aceptadas en la actualidad como es el caso de los *diagramas de anillos*, las técnicas empleadas mediante los *diagramas de tiempo-distancia* y las técnicas más modernas de *holografía*. Cabe aclarar que en este trabajo no se emplea ninguna de estas técnicas, sino que se aborda el estudio de ondas desde una perspectiva diferente. Sin embargo, vale la pena mencionar estas técnicas para poder tener una idea muy clara sobre el estado actual de esta teoría

Para empezar, resulta muy útil presentar un contexto histórico que nos permita comprender el sentido de los desarrollos teóricos que dieron origen a la heliosismología.

3.1. Breve Historia de la Heliosismología

Aunque siempre puede existir una opinión diferente, digamos que la primera detección de oscilaciones solares aceptada mayoritariamente corresponde a la realizada por Leighton et al. [1962] quienes encontraron fluctuaciones en una serie de imágenes Doppler con períodos de alrededor de 300 s (5 min), que permitieron postular una nueva herramienta para estudiar las propiedades físicas de la atmósfera solar. Estas detecciones fueron confirmadas más adelante por otros investigadores como Evans and Michard [1962].

En esa época se pensaba que dichas oscilaciones correspondían a movimientos superficiales

producidos por movimientos convectivos de estructuras conocidas como *granulos solares*. Sin embargo, no era claro el verdadero origen de estas oscilaciones. Esto llevo a personas como Frazier [1968] a proponer la aplicación de transformadas de Fourier para descomponer las oscilaciones en *modos normales* y lograr establecer un espectro de potencias que explicara una posible relación entre el período y los nodos observados (*longitudes de onda horizontales*) concluyendo que las ondas acústicas se correspondían muy bien con ondas estacionarias en la atmósfera solar. Más adelante, Ulrich [1970] formuló las condiciones para modos acústicos discretos que se pueden resumir en los siguientes hechos: las observaciones deberían tener una duración de varias horas, abarcar una región de al menos 60,000 *km* de tamaño, y finalmente, los Dopplergramas deberían tener una resolución de 3,000 *km* con una separación temporal de 1 minuto.

Posteriormente, Brown et al. [1978] reportaron la detección de oscilaciones en el diámetro solar aparente. Dichas observaciones se ajustaron a períodos entre 10 y 40 minutos y se consideran como las primeras observaciones reales de oscilaciones globales en el Sol dejando abierta la posibilidad de una nueva herramienta para estudiar las propiedades del interior solar. Junto con este gran anuncio, siguieron las observaciones reportadas por Severnyi et al. [1976] quienes afirmaron haber encontrado oscilaciones solares con un período de 160 minutos. Tiempo después, por medio de la misión espacial **SOHO** se comprobó que estas observaciones no provenían de un origen solar. Aún así, este tipo de observaciones contribuyeron mucho al desarrollo de la base teórica de la heliosismología, tanto así que actualmente continua la búsqueda de oscilaciones estables de largo período como las reportadas por Severnyi et al. [1976] y conocidas como **modos g**.

El siguiente hecho observacional relevante que vale la pena rescatar corresponde a la decomposición por modos de oscilación para señales de 5 minutos realizada por Claverie et al. [1979], convirtiéndose en la primera confirmación de la existencia de modos o patrones bien definidos de oscilación en el Sol. Estos patrones están asociados teóricamente a modos acústicos de alto orden radial. Sin embargo, esto condujo a una posible inconsistencia ya que Deubner [1975] había reportado oscilaciones de 5 minutos con un alto número de onda. Este vacío se pudo llenar gracias a los aportes hechos por Duvall and Harvey [1983], quienes realizaron mediciones en un rango intermedio. Con esto se pudo obtener en definitiva un rango completo de modos permitiendo la inferencia de propiedades importantes tales como la rotación solar interna Duvall et al. [1984] y la velocidad del sonido Christensen-Dalsgaard et al. [1985].

En las últimas décadas, con la aparición y realización de ambiciosos proyectos tales como las redes de telescopios **GONG** y **BiSON** junto con la misión espacial **SOHO**, se logró avanzar enormemente en el perfeccionamiento de análisis de datos y técnicas de inversión. Actualmente, estos datos han sido complementados con la misión espacial **SDO (Solar Dynamics Observatory)** lanzada el 11 de Febrero de 2010, cuyo instrumento **HMI** está diseñado para mostrar imágenes de oscilaciones en todo el disco solar con una resolución de 4096×4096 pixeles, la cual ayudará a mejorar nuestro conocimiento del interior solar.

Finalmente, es necesario destacar que gran parte de los esfuerzos que realizan los físicos

solares hoy en día se basan en ajustar y refinar *simulaciones numéricas* con el propósito de ajustar las observaciones detectadas recientemente y mejorar la precisión de las técnicas de inversión empleadas hasta el momento.

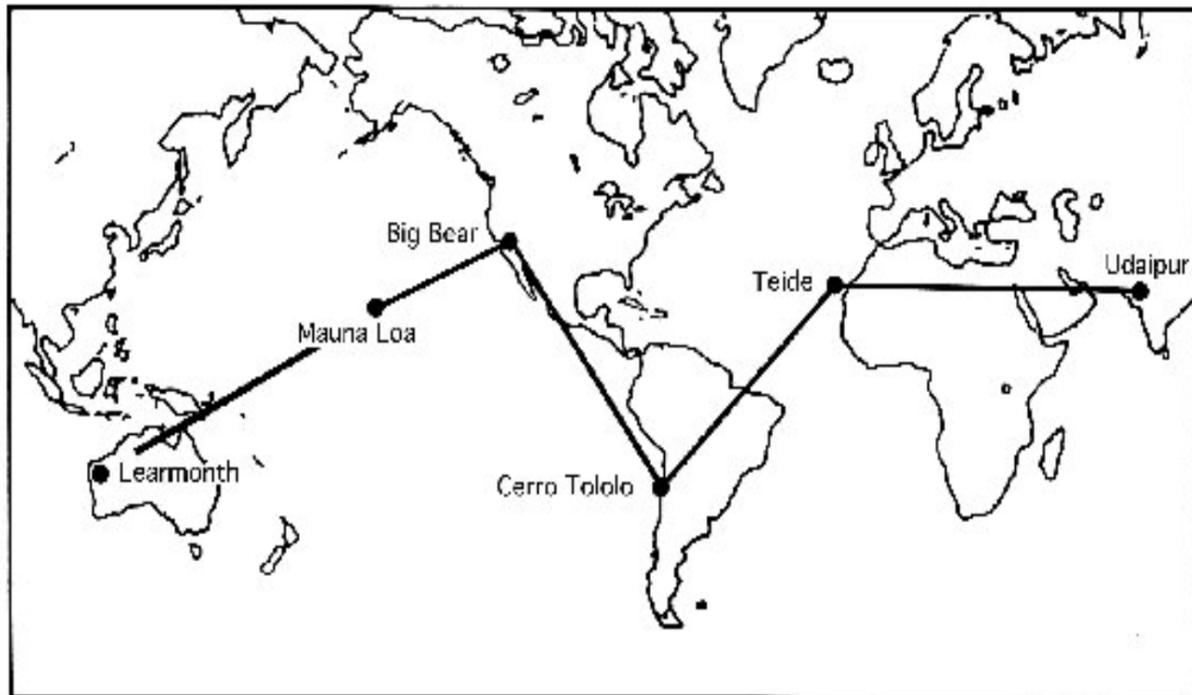


Figura 3-1: Red de telescopios GONG.

3.2. Fundamentos de Heliosismología Global

Esta teoría consiste en estudiar la estructura interna del Sol modelando dicha estrella como una caja de resonancia y poder descomponer las oscilaciones observadas en sus modos fundamentales. Para esto vamos a recurrir a lo planteado en el capítulo anterior cuando se hizo referencia a las ecuaciones básicas de la estructura estelar y de la mecánica de fluidos para desarrollarlas con más en detalle.

3.2.1. Determinación de la Estructura Interna del Sol a partir de Ondas

En la sección 2.2.1 se presentó un conjunto de ecuaciones que en principio pueden servir para reproducir los cambios de las variables físicas hacia el interior del Sol y contruir modelos



Figura 3-2: Red de telescopios BiSON.

solares. En esta sección se cambia un poco de perspectiva y se muestra como a partir de las ecuaciones básicas de la hidrodinámica y conservación de la energía se pueden reproducir las ecuaciones de la estructura estelar. Adicionalmente, se puede estudiar la propagación de ondas acústicas en el Sol medidas por primera vez por Leighton et al. [1962].

Ecuaciones Básicas de la Hidrodinámica

Las consideraciones físicas y ecuaciones presentadas en la siguiente sección fueron tomadas de Christensen-Dalsgaard [1997].

Al principio de este capítulo se definió el Sol como una esfera de gas incandescente. Este gas puede ser tratado como un continuo, es decir, podemos expresar sus propiedades matemáticamente como funciones de la posición \mathbf{r} y el tiempo t . Ejemplos de estas propiedades pueden ser la densidad local $\rho(\mathbf{r}, t)$ y la presión local $p(\mathbf{r}, t)$. Cabe aclarar que el vector posición r corresponde a lo que sería visto por un observador estacionario. Usualmente a esto se le denomina *descripción Euleriana*. En contraste, una *descripción Lagrangiana* corresponderá a un observador moviéndose con el fluido. De esta manera, la tasa de cambio de una cantidad escalar arbitraria ϕ que mediría un observador que se mueve con el fluido es

$$\frac{d\phi}{dt} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}} + \nabla \phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi \quad (3-1)$$

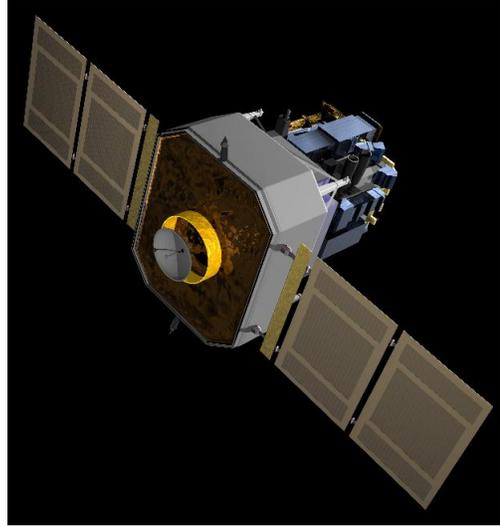


Figura 3-3: Misión espacial SOHO.

La primera ecuación básica de la hidrodinámica consiste en expresar la conservación de la masa en la región de interés, mejor conocida como la **ecuación de continuidad**.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3-2)$$

En condiciones solares o estelares generalmente se pueden ignorar efectos de fricción interna (o viscosidad) en el gas. Con lo cual, las **ecuaciones de movimiento** pueden ser escritas de la siguiente forma

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} \quad (3-3)$$

Donde los términos a la derecha de la igualdad corresponden a los tipos de fuerza que actúan sobre el volumen del fluido (en nuestro caso una esfera de gas). Estas fuerzas consisten en

1. Fuerzas superficiales, por ejemplo, la **presión**.
2. Fuerzas de cuerpo, por ejemplo, la **gravedad**.

Si se tiene en cuenta la acción de la gravedad, entonces, la fuerza de cuerpo por unidad de masa \mathbf{f} corresponde a la aceleración gravitacional \mathbf{g} que proviene de la solución de una **ecuación de Poisson**

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (3-4)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t) dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3-5)$$

También es necesario realizar una descripción energética del sistema. Para esto se va a recurrir a la primera ley de la termodinámica

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dE}{dt} + p \frac{dV}{dt} \quad (3-6)$$

La cual puede ser escrita de diferentes maneras empleando la notación de exponentes adiabáticos

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho(\Gamma_3 - 1)} \left(\frac{dp}{dt} - \frac{\Gamma_1 p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) \quad (3-7)$$

$$= c_p \left(\frac{dT}{dt} - \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} \right) \quad (3-8)$$

$$= c_V \left[\frac{dT}{dt} - (\Gamma_3 - \Gamma_1) \frac{T}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right] \quad (3-9)$$

Donde c_p y c_V corresponden a calor específico por unidad de masa (a presión y volumen constante respectivamente) y los exponentes adiabáticos se definen como

$$\Gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_{ad}, \quad \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right)_{ad}, \quad \Gamma_3 - 1 = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_{ad} \quad (3-10)$$

De una manera mucho más general podemos escribir la ecuación de ganancia de calor teniendo en cuenta el flujo de energía \mathbf{F}

$$\rho \frac{dq}{dt} = \rho \epsilon - \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (3-11)$$

Donde ϵ es la tasa de producción de energía por unidad de masa debido a reacciones nucleares (tal y como se planteó en la sección de estructura estelar). Por otro lado, para el interior del Sol el flujo radiativo \mathbf{F} estaría dado por una aproximación de difusión

$$\mathbf{F} = -\frac{4\pi}{3\kappa\rho} \nabla B = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \nabla T \quad (3-12)$$

Donde $B = (ac/4\pi)T^4$ es la función de Planck integrada, κ la opacidad, c la velocidad de la luz y a es la constante de radiación.

La Aproximación Adiabática

En esta sección se demostrará cómo para propósitos de calcular las frecuencias de oscilación de una estrella (en particular del Sol) podemos despreciar el término de calentamiento dq/dt en las **ecuaciones de energía** estudiando el camino libre medio y el tiempo que tarda un fotón para viajar desde el núcleo hasta la superficie.

Partiendo de las ecuaciones 3-9, 3-11 y 3-12 podemos escribir la siguiente expresión

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c_p} \left[\epsilon + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \nabla T \right) \right]$$

Donde el segundo término del lado derecho se puede aproximar de la siguiente manera

$$\frac{1}{\rho c_p} \nabla \cdot \left(\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \nabla T \right) \approx \frac{4acT^4}{3\kappa\rho^2 c_p \mathcal{L}^2} = \frac{T}{\tau_F}$$

Aquí \mathcal{L} representa una longitud característica de escala, y τ_F es un tiempo característico de la radiación

$$\tau_F = \frac{3\kappa\rho^2 c_p \mathcal{L}^2}{4acT^3} \simeq 10^{12} \frac{\kappa\rho^2 \mathcal{L}^2}{T^3}$$

La constante 10^{12} proviene de trabajar con unidades *cgs*. Para el caso del Sol se tienen los siguientes valores $\kappa = 1$, $\rho = 1$, $T = 10^6$, $\mathcal{L} = 10^{10}$, de donde se obtiene que $\tau_F \approx 10^7$ años. Ahora, si nos enfocamos específicamente en la zona de convección, encontramos los siguientes valores: $\kappa = 100$, ρ^{-5} , $T = 10^4$, $\mathcal{L} = 10^9$, lo cual nos llevaría a $\tau_F = 10^3$ años. La derivada temporal de T puede estimarse como $T/(\text{Período de Oscilación})$. Actualmente, de las observaciones realizadas, se ha mostrado que los períodos típicos de las oscilaciones solares varían en un rango del orden de minutos a horas.

Si se cumplen las condiciones planteadas anteriormente, se dice que el movimiento ocurre *adiabáticamente*. Luego, es posible plantear la siguiente relación entre p y ρ .

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\Gamma_1 p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (3-13)$$

Esta ecuación, junto con la ecuación de continuidad, las ecuaciones de movimiento y la ecuación de Poisson constituyen el sistema completo de ecuaciones para resolver el movimiento adiabático.

Estado de Equilibrio y Análisis Perturbativo

Se hace necesario considerar una alternativa al conjunto de ecuaciones planteadas hasta el momento, debido a la enorme dificultad que existe en resolverlas (¡incluso numéricamente!). Lo mejor a lo que se ha llegado utilizando al máximo la capacidad de los mejores computadores es a simular pequeñas regiones cerca de la superficie solar durante un intervalo de unas cuantas horas.

La razón de introducir un análisis perturbativo se basa en el hecho que las diferentes observaciones solares detectadas hasta el momento muestran amplitudes “pequeñas” comparadas con las escalas de longitudes o el tamaño característico del Sol, de tal manera que podemos pensar en alteraciones en torno a un estado de equilibrio. Este desarrollo justamente es lo que se mostrará a continuación.

Por definición, se asume un estado de equilibrio como estático, de tal forma que no se presentan flujos de material en el sistema. Por lo tanto, nuestro sistema de ecuaciones quedaría reducido así,

$$\begin{aligned} \nabla p_0 &= \rho_0 \mathbf{g}_0 = -\rho_0 \nabla \Phi_0 \\ \nabla^2 \Phi_0 &= 4\pi G \rho_0 \\ 0 &= \frac{dq}{dt} = \epsilon_0 - \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{F}_0 \end{aligned}$$

Ahora si consideramos $\mathbf{g}_0 = -g_0\mathbf{a}_r$ (donde \mathbf{a}_r es un vector radial unitario dirigido hacia afuera), la ecuación de movimiento queda reducida a

$$\frac{dp_0}{dr} = -g_0\rho_0$$

Mientras que la ecuación de Poisson integrada se convierte en

$$g_0 = \frac{G}{r^2} \int_0^r 4\pi\rho_0 r' dr' = \frac{Gm_0(r)}{r^2}$$

El flujo dirigido radialmente hacia afuera sería $\mathbf{F} = F_{r,0}\mathbf{a}_r$ tal que

$$\rho_0\epsilon_0 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 F_{r,0}) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dL_0}{dr}$$

donde $L_0 = 4\pi r^2 F_{r,0}$ es el flujo total de energía a través de una esfera de radio r ,

$$\frac{dL_0}{dr} = 4\pi r^2 \rho_0\epsilon_0$$

Finalmente, de la ecuación de difusión 3-12 se obtendría la expresión que completaría la familia de ecuaciones de estructura estelar como el estado de equilibrio para un análisis perturbativo.

Ahora, para ver como se deben perturbar las ecuaciones de la hidrodinámica, se van a proponer las siguientes expresiones:

$$p(\mathbf{r}, t) = p_0(\mathbf{r}) + p'(\mathbf{r}, t) \quad (3-14)$$

$$\delta p(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}) - p_0(\mathbf{r}_0) = p(\mathbf{r}_0) + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla p_0 - p_0(\mathbf{r}_0) \quad (3-15)$$

$$= p'(\mathbf{r}_0) + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla p_0 \quad (3-16)$$

Esto corresponde a estudiar la variación respecto a un punto (no material) del fluido. Este método se conoce como *perturbación Euleriana* en contraste con la *perturbación Lagrangiana* que consiste en estudiar el cambio de una variable física cuando un elemento del gas se desplaza una distancia $\delta\mathbf{r}$. Para el caso de la presión, la perturbación calculada sería

$$\delta p(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}) - p_0(\mathbf{r}_0) = p(\mathbf{r}_0) + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla p_0 - p_0(\mathbf{r}_0) \quad (3-17)$$

$$= p'(\mathbf{r}_0) + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla p_0 \quad (3-18)$$

Con estas expresiones en consideración, se escribirán nuevamente las ecuaciones básicas de la hidrodinámica introduciendo los términos perturbativos en ρ y p

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = 0 \quad (3-19)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2(\delta r)}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p' + \rho_0 \mathbf{g}' + \rho' \mathbf{g}_0 \quad (3-20)$$

$$\frac{\partial \delta q}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0(\Gamma_{3,0} - 1)} \left(\frac{\partial \delta p}{\partial t} - \frac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} \right) \quad (3-21)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \delta p}{\partial t} = \delta(\rho \epsilon - \nabla \cdot \mathbf{F}) = (\rho \epsilon - \nabla \cdot \mathbf{F})' \quad (3-22)$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} - \frac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = 0 \quad (3-23)$$

Ondas Acústicas

Para terminar este capítulo se muestra cómo a partir de unas simplificaciones ideales, pero razonables, se puede describir la propagación de ondas hacia el interior estelar. En particular, se puede despreciar la perturbación al potencial gravitacional así como también todas las derivadas (temporales y espaciales) de las cantidades en equilibrio (las que tienen subíndice "0"). Entonces las ecuaciones de movimiento se reducen a:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \delta \mathbf{r}}{\partial t^2} = -\nabla p' \quad (3-24)$$

Por otro lado, si integramos la ecuación de continuidad perturbada 3-20 se obtiene una relación importante en nuestra deducción

$$\rho' + \nabla \cdot (\rho_0 \delta \mathbf{r}) = 0 \quad (3-25)$$

Aplicando la divergencia a la ecuación 3-24 y usando la expresión anterior junto con la aproximación adiabática llegamos a una ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0} \nabla^2 \rho' = c_0^2 \nabla^2 \rho' \quad (3-26)$$

Donde

$$c_0^2 \equiv \frac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0} \quad (3-27)$$

3.2.2. Ecuaciones Lineales para las Oscilaciones Estelares

1

¹Esta sección está basada en Aerts et al. [2011] Sec. 3.3.

Asumiendo un modelo de equilibrio no-rotante, e ignorando por el momento cualquier efecto de tipo magnético podemos escribir un sistema de ecuaciones empleando el sistema coordenado (r, θ, ϕ) junto con el método de separación de variables. Esto nos va a permitir descomponer la propagación de las ondas en dos direcciones: radial y horizontal (θ, ϕ) . Para empezar, vamos a descomponer el desplazamiento diferencial δr en las direcciones que se acaban de mencionar

$$\delta \mathbf{r} = \xi \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\xi}_h \quad (3-28)$$

La componente horizontal de la ecuación de movimiento 3-20 queda escrita así

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}_h}{\partial t^2} = -\nabla_h p' - \rho_0 \nabla_h \Phi' \quad (3-29)$$

Aplicando nuevamente ∇_h como un operador de divergencia y teniendo en cuenta que el gradiente de cualquier cantidad en equilibrio (subíndice 0) es nulo, se tiene la siguiente expresión

$$\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla_h \cdot \boldsymbol{\xi}_h = -\nabla_h^2 p' - \rho_0 \nabla_h^2 \Phi' \quad (3-30)$$

Por otro lado, la ecuación de continuidad 3-19 queda escrita de la siguiente manera

$$\rho' = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_0 r^2 \xi_r) - \rho_0 \nabla_h \cdot \boldsymbol{\xi}_h \quad (3-31)$$

Lo cual nos sirve para eliminar $\nabla_h \cdot \boldsymbol{\xi}_h$ de la ec. 3-30.

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\rho' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_0 r^2 \xi_r) \right] = -\nabla_h^2 p' - \rho_0 \nabla_h^2 \Phi' \quad (3-32)$$

La componente radial de la ecuación de movimiento 3-20 es

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = -\frac{\partial p'}{\partial r} - \rho' g_0 - \rho_0 \frac{\Phi'}{\partial r} \quad (3-33)$$

Finalmente la ecuación de Poisson puede escribirse de la siguiente manera

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial r} \right) + \nabla_h^2 \Phi' = 4\pi G \rho' \quad (3-34)$$

Ahora, si nos concentramos exclusivamente en las variables angulares podemos aplicar nuevamente el método de separación de variables para los términos que contengan θ y ϕ . Consideremos una función arbitraria $f(\theta, \phi)$ que satisfaga una ecuación de valores propios para el operador Laplaciano.

$$\nabla_h^2 f = -\frac{1}{r^2} \Lambda f \quad (3-35)$$

Donde Λ es una constante.

Escribiendo el Laplaciano explícitamente en las coordenadas angulares

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = -\Lambda f \quad (3-36)$$

De donde podemos aplicar el método de separación de variables

$$f(\theta, \phi) = f_1(\theta)f_2(\phi) \quad (3-37)$$

Obteniendo para f_2 la ecuación

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial \phi^2} = \alpha f_2 \quad (3-38)$$

Donde α es una constante y la solución para f es $\exp(\pm\alpha^{1/2}\phi)$. Dado que la solución tiene que ser periódica, $f_2(0) = f_2(2\pi)$; y por lo tanto, $\alpha^{1/2} = im$ con m un número entero.

Por otro lado, la ecuación diferencial para f_1 es

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{df_1}{dx} \right] + \left(\Lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) f_1 = 0 \quad (3-39)$$

Donde $x = \cos \theta$ y las soluciones son regulares sólo si

$$\Lambda = l(l+1) \quad (3-40)$$

Donde l es un número entero positivo y

$$|m| \leq l \quad (3-41)$$

Luego la solución regular es

$$f_1(\theta) = P_l^m(\cos \theta) \quad (3-42)$$

Con P_l^m correspondiente a los bien conocidos polinomios de Legendre. Introduciendo además un factor de escala adecuado, la función angular finalmente queda escrita así

$$f(\theta, \phi) = (-1)^m c_{lm} P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi) \equiv Y_l^m(\theta, \phi) \quad (3-43)$$

Donde Y_l^m corresponde a un armónico esférico y c_{lm} es una constante de normalización. Adicionalmente, de 3-35 y 3-40 se obtiene:

$$\nabla_h^2 f = -\frac{l(l+1)}{r^2} f \quad (3-44)$$

Por lo que si consideramos una solución en ondas planas

$$\rho' = a \exp[i((k \cdot r) - \omega t)], \quad (3-45)$$

se puede hacer la siguiente identificación para (k)

$$\frac{l(l+1)}{r^2} = k_h^2 \quad (3-46)$$

Esta última expresión será muy útil más adelante cuando se este construyendo el modelo solar para simular la propagación de ondas acústicas.

Análisis JWKB

Los argumentos planteados en esta sección, así como también todas las ecuaciones planteadas están basadas en Kosovichev [2011].

El método propuesto por Jeffreys, Wentzel, Kramers y Brillouin, mejor conocido como **análisis JWKB**, consiste en implementar una aproximación asintótica además de las consideraciones adiabáticas tenidas en cuenta previamente. Esto se puede justificar gracias a que la mayoría de oscilaciones corresponden con un alto orden.

Esto nos lleva a definir las siguientes transformaciones para los parámetros de perturbación

$$\xi_r(r) = A\rho^{1/2}e^{ik_r r} \quad (3-47)$$

$$p' = B\rho^{1/2}e^{ik_r r} \quad (3-48)$$

Para reescribir nuevamente las ecuaciones básicas de la hidrodinámica

$$\frac{d\xi}{dr} = -A\rho^{1/2} \left(-ik_r + \frac{1}{H} \right) e^{ik_r r} \quad (3-49)$$

$$\frac{dP'}{dr} = -B\rho^{1/2} \left(-ik_r - \frac{1}{H} \right) e^{ik_r r} \quad (3-50)$$

Donde $H = \left(\frac{d \log \rho}{dr} \right)^{-1}$ es un factor característico de longitud (*density scale height*).

Estas ecuaciones nos conducen a unas relaciones de dispersión fundamentales las cuales nos sirven para clasificar los diferentes modos fundamentales.

$$k_r^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} - \frac{S_l^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) \right] \quad (3-51)$$

Por lo tanto, la propagación de los modos globalmente se caracteriza principalmente por tres factores:

- La frecuencia de corte $\rightarrow \omega_c^2 = \frac{c^2}{4H^2} \left(1 - 2\frac{dH}{dr} \right)$
- La frecuencia de flotabilidad *Brunt-Väisälä* $\rightarrow N^2 = \frac{g}{H} - \frac{g^2}{c^2}$
- La frecuencia de *Lamb* $\rightarrow S_l^2 = \frac{l(l+1)c^2}{r^2}$

Relaciones de Dispersión

Esta sección también está basada en Kosovichev [2011].

A continuación se profundizará un poco más en las implicaciones de la ecuación 3-51. Se deducirán las relaciones de dispersión para los modos **p** y **g** junto las implicaciones que esto tiene en el análisis teórico.

Modos p

Los modos p se caracterizan por presentar oscilaciones de alta frecuencia. Para este caso, $\omega^2 \gg N^2$ y por lo tanto la relación de dispersión se reduce a

$$\omega = \omega_c^2 + (k_r^2 + k_h^2)c^2 \equiv \omega_c^2 + k^2c^2 \quad (3-52)$$

Donde $k_h^2 = \frac{S_l^2}{c^2}$.

Dado que su propagación ocurre principalmente a nivel superficial, el punto de retorno de la señal cumple con la siguiente condición

$$\frac{c(r_t)}{r_t} = \frac{\omega}{\sqrt{l(l+1)}} \quad (3-53)$$

Modos g

Se caracterizan por oscilaciones de baja frecuencia que viajan horizontalmente, es decir, $\omega^2 \ll S_l^2$ y $\omega^2 \ll N^2$, la relación de dispersión se reduce a

$$k_r^2 = k_h^2(N^2 - \omega^2) \quad (3-54)$$

Así mismo, la condición para los puntos de retorno se expresa como $N(r_t) = \omega$

Ley de Duvall

Para esta sección se utilizarán los argumentos descritos por Christensen-Dalsgaard [1997].

Para frecuencias altas en los modos p, se tiene la siguiente expresión

$$k_r^2 \simeq \frac{1}{c^2}(\omega^2 - S_l^2) \quad (3-55)$$

Esta ley surge de estudiar las condiciones de resonancia para los modos p resumidas en la siguiente expresión integral

$$\omega \int_{r_1}^{r_2} \left[1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} - \frac{S_l^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) \right]^{1/2} \frac{dr}{c} \simeq \pi(n - 1/2) \quad (3-56)$$

Donde r_1 y r_2 corresponden a los valores críticos de la expresión (0 – 40). Siguiendo los argumentos utilizados por Christensen-Dalsgaard and Pérez Hernández [1992] se obtiene lo que se conoce como la *Ley de Duvall*

$$F \left(\frac{\omega}{\sqrt{l(l+1)}} \right) \simeq \frac{\pi(n - 1/2)}{\omega} + \frac{1}{\omega} (I_1 + I_2 + I_3) \quad (3-57)$$

Donde

$$F(\omega) = \int_{r_t}^R \left(1 - \frac{c^2}{\omega^2 r^2} \right)^{1/2} \frac{dr}{c} \quad (3-58)$$

Y las integrales $I_1 - I_3$ están definidas así

$$I_1 = \omega \int_{r_2}^R \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \frac{dr}{c} \quad (3-59)$$

$$I_2 = \omega \int_{r_1}^{r_2} \left[\left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \right] \frac{dr}{c} \quad (3-60)$$

$$I_3 = \omega \int_{r_t}^{r_1} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \frac{dr}{c} \quad (3-61)$$

Aternativamente se puede enunciar la *Ley de Duvall* de una forma más compacta:

$$F\left(\frac{\omega}{L}\right) = \frac{(n - \alpha)\pi}{\omega} \quad (3-62)$$

Donde $L^2 = l(l + 1)$ y α es una constante de fase.

Problemas de Inversión

Los argumentos y ecuaciones presentadas en esta sección se basan en Christensen-Dalsgaard [1997] Sec. 9.2.

Conociendo los valores de las frecuencias observadas, un objetivo importante consiste en inferir las propiedades físicas sobre el interior solar. Christensen-Dalsgaard [2002].

Una oscilación observada estaría relacionada matemáticamente con los parámetros físicos del Sol mediante la siguiente expresión.

$$\omega_{nl} = \mathcal{F}_{nl}[\rho(r), c^2(r), \dots] \quad (3-63)$$

Esta ecuación usualmente se aproxima a la ecuación correspondiente a frecuencias adiabáticas

$$\omega_{nl}^{ad} = \mathcal{F}_{nl}^{ad}[\rho(r), c^2(r), \dots] \quad (3-64)$$

Donde \mathcal{F}_{nl}^{ad} está determinada por la solución de las ecuaciones para oscilaciones adiabáticas. Si $(\rho_0(r), c_0(r))$ corresponde al modelo de referencia con frecuencias características ω_{nl} . El objetivo entonces es determinar correcciones $\delta_r \rho(r) = \rho(r) - \rho_0(r)$ y $\delta_r c^2(r) = c^2(r) - c_0^2(r)$ para ajustar las diferencias $\omega_{nl}^{(obs)} - \omega_{nl}^0$ entre las frecuencias observadas y las correspondientes al modelo de referencia utilizado.

$$\frac{\delta \omega_{nl}}{\omega_{nl}} = \int_0^R \left[K_{c^2, \rho}^{nl}(r) \frac{\delta_r c^2}{c^2}(r) + K_{\rho, c^2}^{nl}(r) \frac{\delta_r \rho}{\rho}(r) \right] dr + \mathcal{Q}_{nl}^{-1} \mathcal{G}(\omega_{nl}) + \epsilon_{nl} \quad (3-65)$$

Donde $K_{c^2, \rho}^{nl}$ y K_{ρ, c^2}^{nl} son kernels determinados por las autofunciones en el modelo de referencia. Por otro lado, \mathcal{G} representa posibles incertidumbres en la región cercana a la superficie; que en principio, puede contener las posibles diferencias entre \mathcal{F}_{nl} y \mathcal{F}_{nl}^{ad} . Adicionalmente, se incluyen errores observacionales en el término ϵ_{nl} .

Para facilitar el problema matemático un poco, se puede imponer la condición de que la masa del Sol y la del modelo de referencia deben ser la misma.

$$4\pi \int_0^R \frac{\delta_r \rho(r)}{\rho(r)} \rho(r) r^2 dr = 0 \quad (3-66)$$

Esto implica pasar de estudiar un problema no lineal a estudiar un problema lineal, lo cual resulta más sencillo de analizar.

En principio, las incógnitas en la Ec. 3-65 serían $\delta_r \rho$, $\delta_r c^2$ y $\mathcal{G}(\omega)$.

Heliosismología Local

A diferencia de la *Heliosismología Global*, que consiste en un análisis 2D para inferir las propiedades físicas al interior como funciones del radio y la latitud. La *Heliosismología Local* permite sondear el interior solar con modelos 3D. Esto resulta de vital importancia para el estudio de la actividad solar, la cual es vista desde la superficie como parches con fuerte influencia magnética tales como, regiones activas, manchas solares, puntos brillantes, etc. Gizon et al. [2010].

Entre las técnicas empleadas en *heliosismología local* se encuentran los diagramas de anillos, el análisis de tiempo-distancia y la holografía.

Uno de los mayores retos actuales consiste en estudiar el campo de ondas acústicas en regiones cercanas a manchas solares. Gracias al aprovechamiento de las observaciones de alta resolución, algunas técnicas se han perfeccionado para mejorar nuestro conocimiento sobre la estructura interna del Sol en regiones muy localizadas. A continuación se describirá brevemente algunas de estas técnicas.

Diagramas de Anillos

Esta técnica proviene de la hipótesis sugerida por Gough and Toomre [1983], en la cual se le atribuye cambios a las frecuencias de oscilación debido a la presencia de perturbaciones en la velocidad del sonido a nivel local. Posteriormente esta idea fue realizada por Hill [1988] calculando un espectro de potencias, suponiendo algún perfil de ajuste (por ejemplo un perfil Lorentziano)

$$P(\omega, \mathbf{k}) = \frac{A}{(\omega - \omega_0 + k_x U_x + k_y U_y)^2 + \Gamma^2} + \frac{b_0}{k^3} \quad (3-67)$$

Donde A , ω_0 , Γ y b_0 corresponden a la amplitud, frecuencia central, ancho de línea y parámetro de ruido del fondo de la imagen. Una vez se tiene construido el espectro de potencias, se hacen cortes horizontales a diferentes valores de frecuencia lo cual se traduce en un patrón de anillos en el plano definido por las componentes del vector de onda k_x y k_y tal y como se puede apreciar en la figura 3-4.

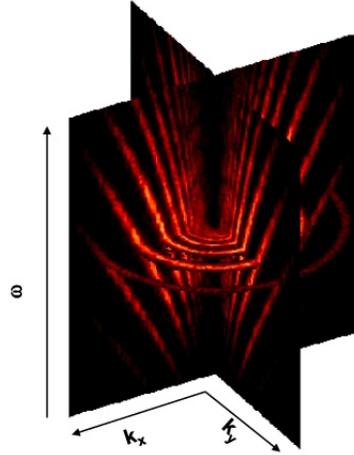


Figura 3-4: Esquema del diagrama de anillos. Créditos: Figura tomada de http://www2.mps.mpg.de/projects/seismo/NA4/SW/ring_analysis.html

Diagramas de Tiempo-Distancia

Esta técnica ha sido inspirada por métodos usados por la sismología para estudiar la estructura interna de la Tierra a partir del análisis del tiempo y la distancia que le toma a una señal para viajar desde una fuente (sismos o perturbaciones inducidas) hasta un detector ubicado arbitrariamente. Sin embargo, para el caso del Sol existe el efecto adicional de una señal excitada constantemente debido a los procesos de convección para transportar energía (cosa que no sucede al menos en la parte rocosa de nuestro planeta). De todas maneras, esto no ha sido un impedimento para proponer algún tipo de correlación entre el campo de ondas vistos desde la superficie y el tiempo de retraso entre dos puntos de interés (Christensen-Dalsgaard [2002]). Siguiendo los argumentos de D'Silva [1996] se puede calcular el tiempo de recorrido a partir de la siguiente fórmula

$$\tau_i(t) = \int_{\Gamma_i} \frac{ds}{c_W(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}} \quad (3-68)$$

Donde s es la distancia a lo largo de la señal, \mathbf{r} es el vector de posición, c_W es la velocidad de propagación de la onda, \mathbf{v} es la velocidad local del material y \mathbf{n} es un vector unitario a lo largo de la señal.

Estos diagramas (ver Fig. 3-5.) han sido usados para investigar perturbaciones en la velocidad de propagación de las ondas asociadas a emergencias de flujo en regiones activas.

Holografía

Esta técnica ha sido desarrollada por Lindsey and Braun [1997] e independientemente por Chang et al. [1997] bajo la idea de tratar de reconstruir imágenes de regiones internas cerca-

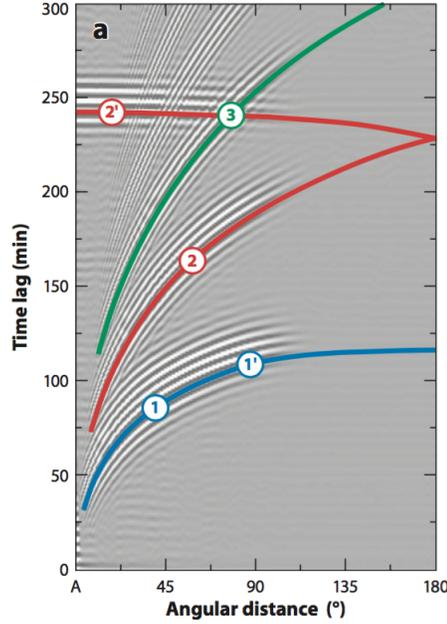


Figura 3-5: Diagrama Tiempo-Distancia. Créditos: Figura tomada de Gizon et al. [2010].

nas a la superficie utilizando únicamente la información proveniente de un campo ondulatorio local. A continuación se presentará un contexto matemático bastante concreto siguiendo lo planteado por Schunker [2006] en su tesis de doctorado.

El fundamento de esta técnica se centra en la ecuación de onda y su solución en términos de las integrales de Kirchoff

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + k^2\psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (3-69)$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_S ds [\{\partial_n G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\}\psi(\mathbf{r}') - G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\partial_n\psi(\mathbf{r}')] \quad (3-70)$$

De donde se puede calcular adicionalmente, unos coeficientes de ingresión y egresión del material, dados por las siguientes expresiones

$$H_{\pm}(\mathbf{r}, \tau\omega) = \int_P d^2\mathbf{r}' G_{\pm}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau, \omega)\psi(\mathbf{r}', 0, \omega) \quad (3-71)$$

Por último, se hace una estimación de qué tan bueno resultan los ajustes entre las mediciones del campo acústico local y la cantidad que ingresa o emerge hacia o desde el interior. Esto se calcula gracias a un parámetro de correlación determinado por.

$$C_{-}(\mathbf{r}, \omega) = \langle \psi(\mathbf{r}, \omega)H_{-}^*(\mathbf{r}, 0, \omega) \rangle_{\Delta\omega} \quad (3-72)$$

Se dice que uno de los exitos más grandes de esta teoría se manifiesta en la capacidad de poder detectar regiones activas en la cara opuesta del Sol, tal y como se puede apreciar

en la figura 3-6. En dicha figura se puede notar cómo se podría rastrear la localización de una fuente sísmica que en principio se encuentre en la cara opuesta del Sol. Este rastreo dependerá del modelo artificial óptico que se imponga (1, 2 o 3 pupilas).

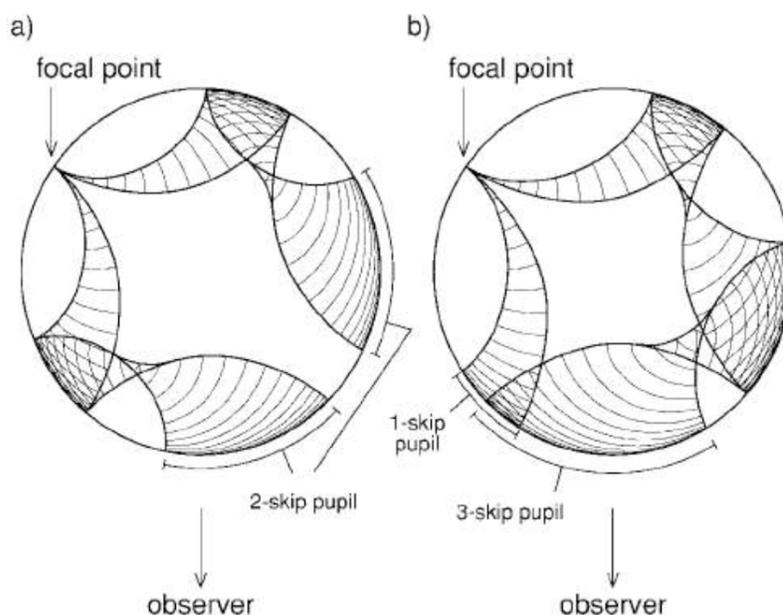


Figura 3-6: Esquema de la técnica de holografía. Créditos: Figura tomada de Lindsey et al. [2000].

3.2.3. Sismos Solares

Para finalizar este capítulo, se presenta uno de los fenómenos más estudiados en la actualidad dentro del campo de la heliosismología. Este efecto consiste en la respuesta hidrodinámica que se manifiesta como una serie de fuertes impactos a la fotosfera durante la fase impulsiva de un flare.

Esta serie de impactos puede generar ondas acústicas que viajen hacia el interior solar. Sin embargo, este fenómeno tiene un carácter completamente local, por lo que, a diferencia de lo que sucede con ondas acústicas generadas por procesos convectivos, estas oscilaciones se atenúan mucho más rápido.

Curiosamente, este efecto es muy similar al que ocurre en la Tierra cuando una ruptura se desplaza a lo largo de una falla geológica. Los sismos solares pueden servir como un mecanismo muy útil para estudiar la interacción entre oscilaciones acústicas con regiones activas como por ejemplo las manchas solares, y poder analizar cómo sería la estructura interna debajo de estas regiones tan especiales lo cual aún permanece como un problema

abierto dentro de la física solar. Kosovichev [2011].

Los Sunquakes ó también conocidos como ondas sísmicas pueden ser detectados mediante el análisis de Dopplergramas donde se puede apreciar una cresta característica (ver Fig. 3-7) Kosovichev [2006], Kosovichev and Zharkova [1998].

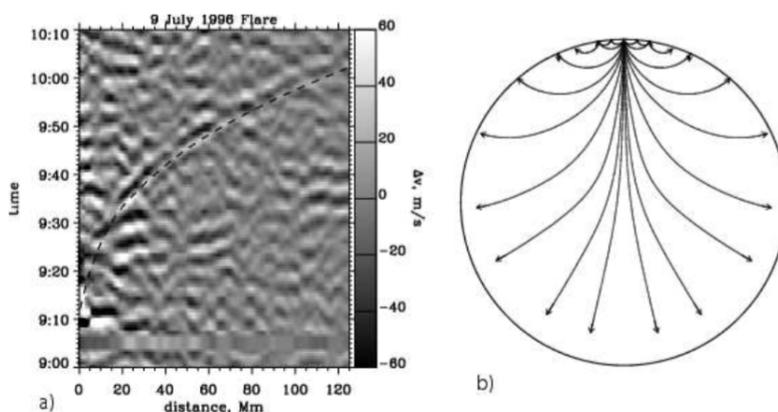


Figura 3-7: Diagrama Tiempo-Distancia para Sunquakes. Créditos: Figura tomada de Kosovichev [2011].

Resumen

Hasta el momento es aceptado el hecho que ondas acústicas fueron observadas desde 1962 por Leighton como fluctuaciones en una serie de imágenes Doppler. Desde esa época hasta la actualidad el período característico de oscilación más observado y detectado corresponde a un tiempo de 5 minutos. Teóricamente, también se puede evidenciar cómo todos los fundamentos de la heliosismología global provienen de considerar el Sol como un fluido en equilibrio y aplicar teoría de perturbaciones a las ecuaciones de la hidrodinámica. Esto nos lleva a un conjunto de ecuaciones para las variables perturbadas de donde se puede deducir una ecuación de onda para la presión o la densidad alternativamente. Para poder solucionar la ecuación de onda en el caso solar se requiere de una serie de suposiciones que permitan obtener un conjunto de ecuaciones lineales y aplicar el método de separación de variables.

La heliosismología global permite estudiar el interior solar con modelos 2D, es decir, las variables físicas sólo dependen del radio y de la latitud. Por otro lado, la heliosismología local permite estudiar el interior solar con modelos 3D en regiones más localizadas empleando técnicas ampliamente desarrolladas en la actualidad como es el caso de los diagramas de anillos, los diagramas Tiempo-Distancia y la holografía.

Se podría decir que el objetivo primordial de la heliosimología local consiste en estudiar la interacción de ondas acústicas con regiones magnéticamente activas, y la influencia que estas podrían tener hacia el interior y hacia la atmósfera solar.

4 Construcción del Modelo Solar

En este capítulo se presentan todos los ingredientes necesarios para construir un modelo que nos permita estudiar la propagación de ondas acústicas hacia el interior solar. Este análisis está dividido en dos partes: Primero se considera el Sol como un gas ideal y posteriormente se introduce un campo magnético constante para entender cómo éste puede afectar las trayectorias de las señales acústicas.

También se presentan unos argumentos muy sencillos que permiten evidenciar cómo la **ley de Snell** también puede ser aplicada a ondas acústicas y construir “rayos acústicos” para estudiar sus trayectorias de propagación.

Posteriormente, se explica cómo introduciendo un efecto magnético se modifica el medio (básicamente porque se afecta la presión) causando una variación en las trayectorias seguidas por estos rayos acústicos.

Finalmente, se presentan los resultados obtenidos con el código realizado en este trabajo y se hace una discusión sobre el rango de validez y aplicabilidad que tienen estos.

Ondas Planas

Nuestra primera consideración para tratar de simular rayos acústicos es considerar una solución especial para la Ec. 2-42 mostrada en el **Capítulo 1**, en la sección de **Mecánica de Fluidos**.

Si se asume la siguiente solución como potencial de velocidades:

$$\phi = \text{Re}[\phi_0(x, y, z)e^{-i\omega t}] \quad (4-1)$$

Al sustituir 4-1 en 2-42 se llega a la siguiente expresión

$$\nabla^2 \phi_0 + (\omega^2/c^2)\phi_0 = 0 \quad (4-2)$$

Ahora, si consideramos más específicamente una onda plana monocromática viajando en una dirección arbitraria, el potencial de velocidades puede escribirse de la siguiente manera:

$$\phi = \text{Re}\{A \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]\} \quad (4-3)$$

Donde,

A es la amplitud de la onda.

$\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{n}$ es el vector de onda.

\mathbf{n} es un vector unitario en la dirección de propagación de la onda.

Las ondas monocromáticas resultan de vital importancia, ya que cualquier onda arbitraria puede ser representada como superposición de ondas planas monocromáticas con diferentes frecuencias y vectores de onda Landau and Lifshits [1959].

Cuando una onda de sonido atraviesa una frontera que conecta dos medios, ocurre un proceso de refracción en el cual el rayo cambia de dirección dependiendo de la velocidad de propagación del segundo medio tal y como ocurre en el caso de óptica.

Para estudiar los cambios de dirección se aplicará la ley de Snell mientras que para hacer una extensión a múltiples medios se procederá a hacer una extensión a un modelo generalizado justo como se explica a continuación.

Ley de Snell

Los argumentos, ecuaciones y figuras presentadas en las siguientes secciones están basados en Shearer [2009].

Como primera aproximación vamos a postular la muy conocida teoría de rayos de la óptica geométrica aplicada a una región 2D con simetría plana (es decir, usando coordenadas cartesianas).

Consideremos una onda plana que se propaga en una región caracterizada por un medio uniforme con una velocidad v . Puesto que el movimiento ocurre a velocidad constante, podemos decir que el frente de onda recorrió una distancia Δs en un tiempo Δt . Para efectos de simplicidad matemática, asumiremos también que la onda viaja en dirección a la superficie (interfaz horizontal) de la región, tal como se aprecia en la Fig.4-1.

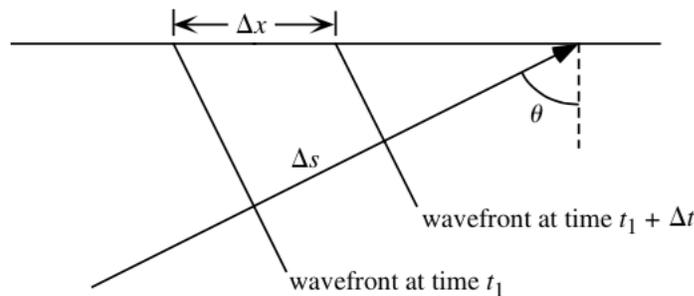


Figura 4-1: Onda plana incidiendo sobre una superficie horizontal con un ángulo θ respecto a la vertical.

Así mismo, de esta figura podemos deducir una relación matemática fundamental para poder

reconstruir posteriormente las trayectorias de interés.

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\sin \theta}{v} = u \sin \theta \equiv p. \quad (4-4)$$

donde u es la *lentitud* ($u = 1/v$ donde v es la velocidad) y p se denomina el *parametro de rayo*.

Si ahora extendemos la misma idea a dos regiones homogéneas, cada una con una velocidad de propagación v_1 y v_2 con $v_1 < v_2$, o lo que es lo mismo $u_1 > u_2$ respectivamente.

$$p = u_1 \sin \theta_1 = u_2 \sin \theta_2. \quad (4-5)$$

Generalización para un modelo estratificado

Para el caso del Sol, encontramos que según los modelos estándares actualmente vigentes, la velocidad de propagación en el medio se ve únicamente afectada (en principio) por la profundidad. Esta propiedad resulta bastante útil ya que nos permite modelar las trayectorias de las señales al interior del Sol como rayos que están atravesando una serie de capas cada una con una velocidad mayor que la anterior, dado que se sabe que la velocidad del sonido aumenta con la densidad. En este caso, el parámetro p permanece constante, dado que sólo tiene que ver con la componente horizontal del desplazamiento y por lo tanto

$$p = u_1 \sin \theta_1 = u_2 \sin \theta_2 = \dots = u_n \sin \theta_n. \quad (4-6)$$

Para un gradiente de velocidad continuo, el parámetro de rayo p se calcula con el valor de la velocidad en la superficie (o su equivalente u_0) y con el ángulo de ingreso θ_0 medido respecto a la vertical

$$u_0 \sin \theta_0 = p = u \sin \theta. \quad (4-7)$$

Cuando $\theta = 90^\circ$ se dice que el rayo ha alcanzado su *punto de retorno* y por lo tanto la señal continuará viajando regresando nuevamente a la superficie, pero a una cierta distancia de donde se emitió la señal. La profundidad máxima que puede alcanzar una señal dependerá del ángulo inicial a la cual sea emitida, tal como lo muestra la Fig.4-2.

Es conveniente mencionar que p puede variar a lo largo de la trayectoria si se presentan cambios o gradientes laterales en la velocidad (es decir, aparece una componente de la velocidad que varía en la dirección horizontal).

Una vez que se han determinado las trayectorias para diferentes ángulos, se puede contruir una gráfica conocida como *curva Tiempo-Distancia*.

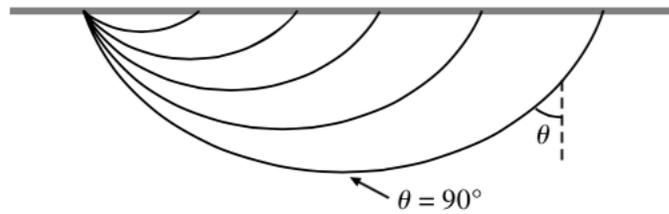


Figura 4-2: Variación de la profundidad de penetración respecto al ángulo de incidencia.

Método analítico para obtener la curva Tiempo-Distancia

Vamos a mostrar cómo calcular las variables de tiempo y distancia conociendo únicamente los parámetros $u(z)$ y p para construir la curva que simule la trayectoria de un rayo acústico.

Sea \mathbf{s} el vector de ralentización en un punto arbitrario a lo largo del rayo. La longitud de \mathbf{s} va estar dada por la magnitud u . Por otra parte, la componente horizontal s_x corresponderá al valor de p ; mientras que la componente s_y estará dada por

$$s_y = \eta = u \cos \theta = (u^2 - p^2)^{1/2} \quad (4-8)$$

En el *punto de retorno*, $p = u$ y $\eta = 0$.

A partir de un planteamiento muy sencillo es posible deducir unas expresiones integrales para calcular las variables de tiempo y distancia de un rayo en particular. Observando la Fig.4-3.

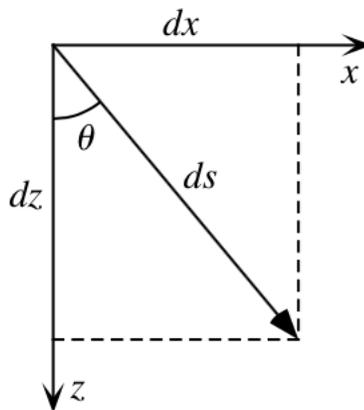


Figura 4-3: Coordenadas polares y cartesianas de un vector arbitrario.

Geoméricamente se encuentran las siguientes relaciones:

$$\frac{dx}{ds} = \sin \theta, \frac{dz}{ds} = \cos \theta = (1 - \sin^2 \theta)^{1/2} \quad (4-9)$$

Aplicando regla de la cadena y recordando que $p = u \sin \theta$,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{p}{u}, \frac{dz}{ds} = \left(1 - \frac{p^2}{u^2}\right)^{1/2} = u^{-1} (u^2 - p^2)^{1/2} \quad (4-10)$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dz} = \frac{dx/ds}{dz/ds} \quad (4-11)$$

$$= \frac{p}{u} \frac{u}{(u^2 - p^2)^{1/2}} = \frac{p}{(u^2 - p^2)^{1/2}} \quad (4-12)$$

Por lo tanto, integrando con respecto a z se obtiene:

$$x(z_1, z_2, p) = p \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(u^2(z) - p^2)^{1/2}} \quad (4-13)$$

En particular, si escogemos z_1 como la fotosfera y z_2 como el punto de retorno z_p

$$x(p) = p \int_0^{z_p} \frac{dz}{(u^2(z) - p^2)^{1/2}} \quad (4-14)$$

Debido a que la trayectoria es simétrica respecto al punto de retorno, la distancia total entre la fuente y el receptor sobre la superficie es

$$X(p) = 2p \int_0^{z_p} \frac{dz}{(u^2(z) - p^2)^{1/2}} \quad (4-15)$$

De un modo similar podemos calcular el tiempo que tarda la señal en viajar

$$\frac{dt}{dz} = \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dz} = \frac{dt/ds}{dz/ds} \quad (4-16)$$

$$= \frac{u^2}{(u^2(z) - p^2)^{1/2}} \quad (4-17)$$

Luego, el tiempo total que gasta la señal en emerger nuevamente a la superficie es

$$T(p) = 2 \int_0^{z_p} \frac{u^2(z) dz}{(u^2(z) - p^2)^{1/2}} \quad (4-18)$$

El modelo más simple para el perfil de velocidades consiste en asumir un conjunto de capas sucesivas. De esta manera, $X(p)$ y $T(p)$ quedan determinadas en términos de sumatorias

$$X(p) = 2p \sum_i \frac{\Delta z_i}{(u_i^2 - p^2)^{1/2}}, \quad u_i > p \quad (4-19)$$

$$T(p) = 2 \sum_i \frac{u_i^2 \Delta z_i}{(u_i^2 - p^2)^{1/2}}, \quad u_i > p \quad (4-20)$$

Para los objetivos de este trabajo se asumirá un modelo estratificado muy sencillo en el cual se consideran un conjunto de capas homogéneas sucesivas, cada una con una velocidad de propagación del sonido diferente. Se puede apreciar un esquema simple de esta idea en la Fig. 4-4.

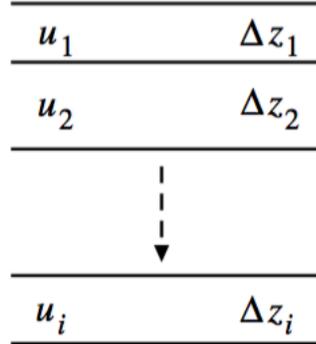


Figura 4-4: Conjunto de capas sucesivas con diferente velocidad de propagación para simular un modelo estratificado.

Algunos Ejemplos

A continuación se presentarán unos ejemplos. Las figuras presentadas a continuación fueron tomadas de los trabajos realizados por *Andrew A. Ganse*¹, un geofísico computacional adscrito al *Applied Physics Laboratory (APL-UW)* de la Universidad de Washington.

Aunque su tema de investigación principal se centra en la geosísmica (el estudio de propagación de ondas acústicas) Ganse [2013], su interés alterno por la heliosismología lo motivó a desarrollar una aplicación en el lenguaje *java* en donde ilustra los principios de propagación de rayos acústicos utilizando los principios explicados en las secciones anteriormente.

En la Fig. 4-5 se ilustra la propagación de rayos en una región 2D siguiendo una geometría cartesiana. El modelo utilizado es un perfil de velocidad que aumenta de forma constante con la velocidad. Los ángulos de incidencia de los rayos varían en un rango de 89° a 0° con un decremento de 1° entre rayo y rayo.

¹http://staff.washington.edu/aganse/helioseis/helioseis_rtapplet.html

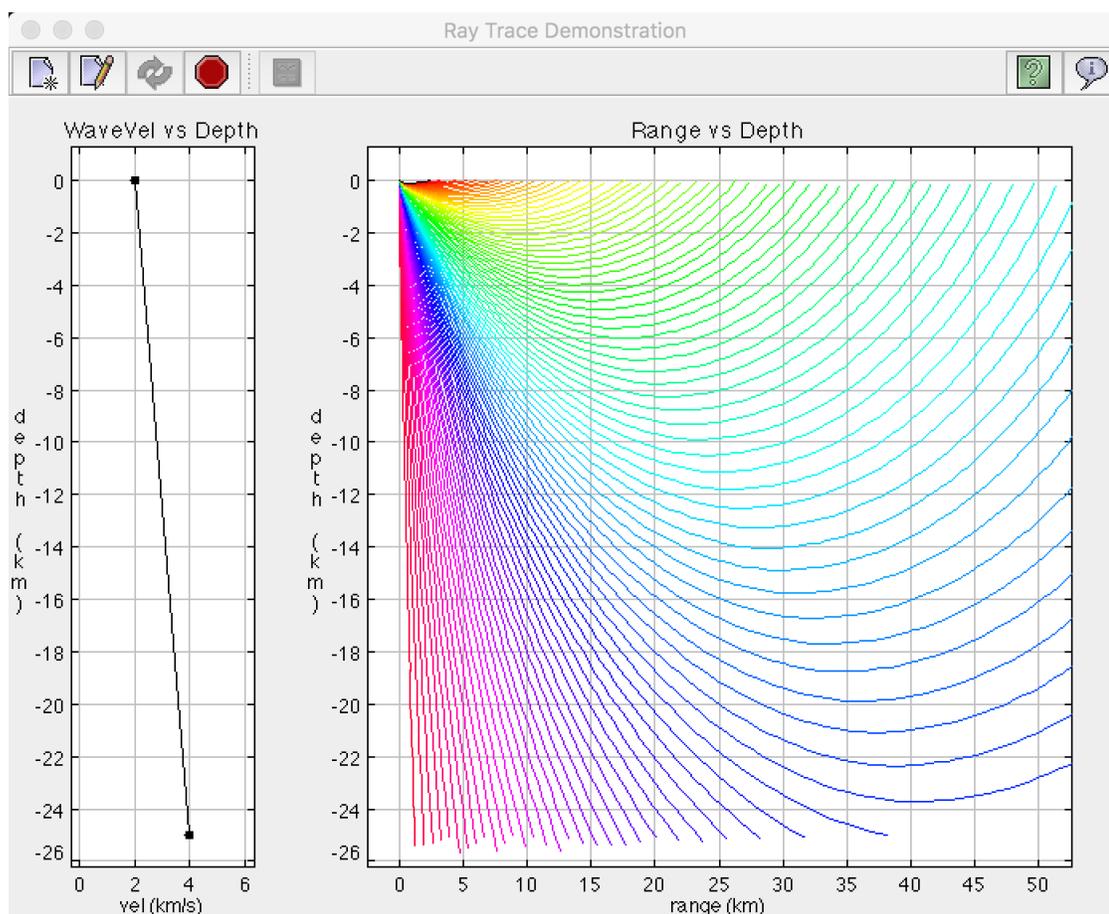


Figura 4-5: Propagación de rayos acústicos en un plano. Créditos: Figura tomada del applet *raydemo.jar* creado por Andrew A. Ganse.

En la Fig. 4-6 se ilustran nuevamente rayos acústicos en un plano empleando el mismo perfil de velocidad, pero esta vez, teniendo en cuenta un menor rango de estos. Los ángulos de incidencia de los rayos varían en un rango de 60° a 10° con un decremento de 5° entre rayo y rayo.

En el caso de la Fig. 4-7 se presenta la propagación de rayos acústicos en una región de 2D con simetría esférica que en principio simularía un corte transversal del Sol. El modelo implementado es el B-P 2000 propuesto por Bahcall et al. [2001]. Los ángulos de incidencia de los rayos varían en un rango de 90° a 10° con un salto de 10° entre rayo y rayo. Los colores representan los diferentes ángulos de incidencia que se tomaron como punto de partida para construir las trayectorias de los diferentes rayos acústicos. Los ángulos de incidencia están medidos respecto a la vertical. Luego entre más cercano sea su valor a 0, su profundidad de penetración será más grande.

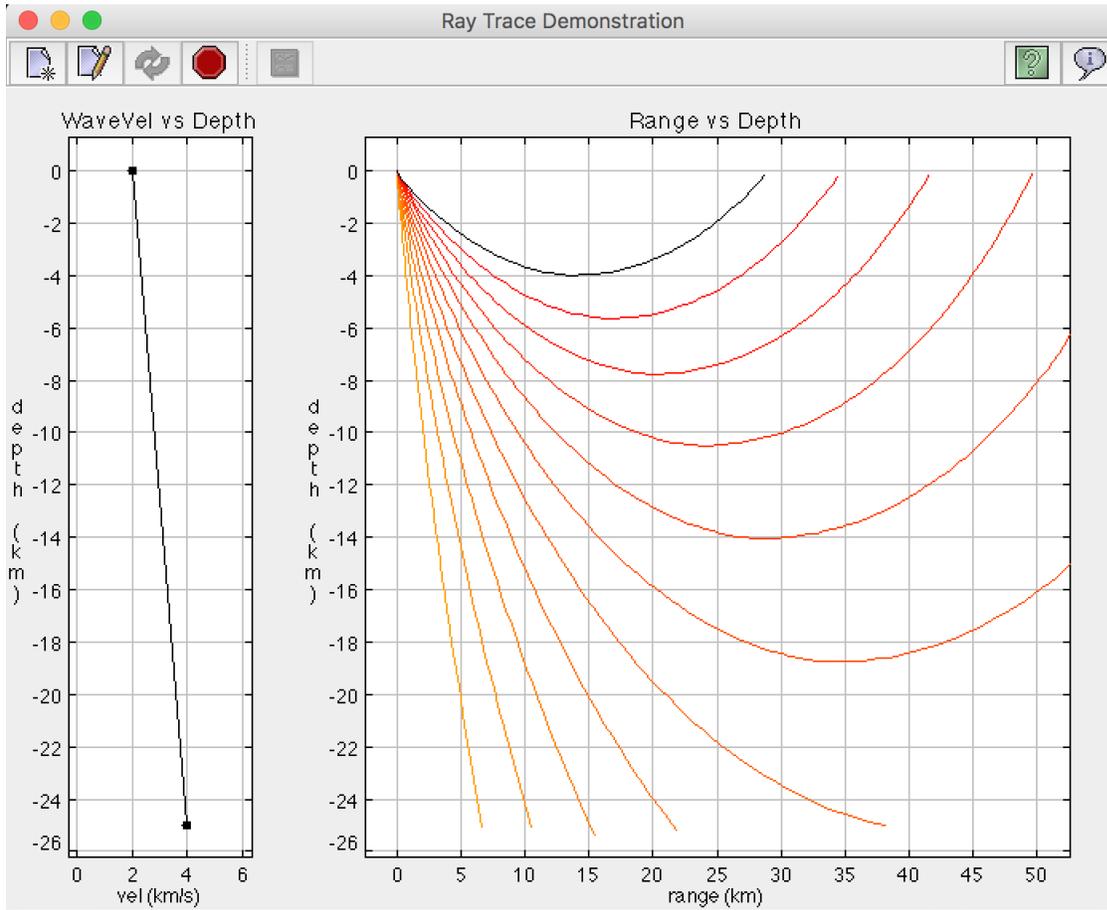


Figura 4-6: Propagación de rayos acústicos en un plano tomando un rango más reducido de ángulos de incidencia. Créditos: Figura tomada del applet *raydemo.jar* creado por Andrew A. Ganse.

Construcción de Rayos Acústicos utilizando Relaciones de Dispersión

En vez de usar la ley de Snell, también se pueden reconstruir las trayectorias de los rayos acústicos a partir de las relaciones de dispersión, tal y como es explicado por Christensen-Dalsgaard [1997] Cap. 5.2.3.

Los **modos p** están atrapados entre la superficie y un punto de retorno $r = r_t$. Este punto de retorno está determinado por la siguiente condición:

$$\frac{c^2(r_t)}{r_t^2} = \frac{\omega^2}{l(l+1)} \quad (4-21)$$

Esta condición determina r_t como función de l y ω .

En esta aproximación, la dinámica de los modos p está determinada únicamente por la

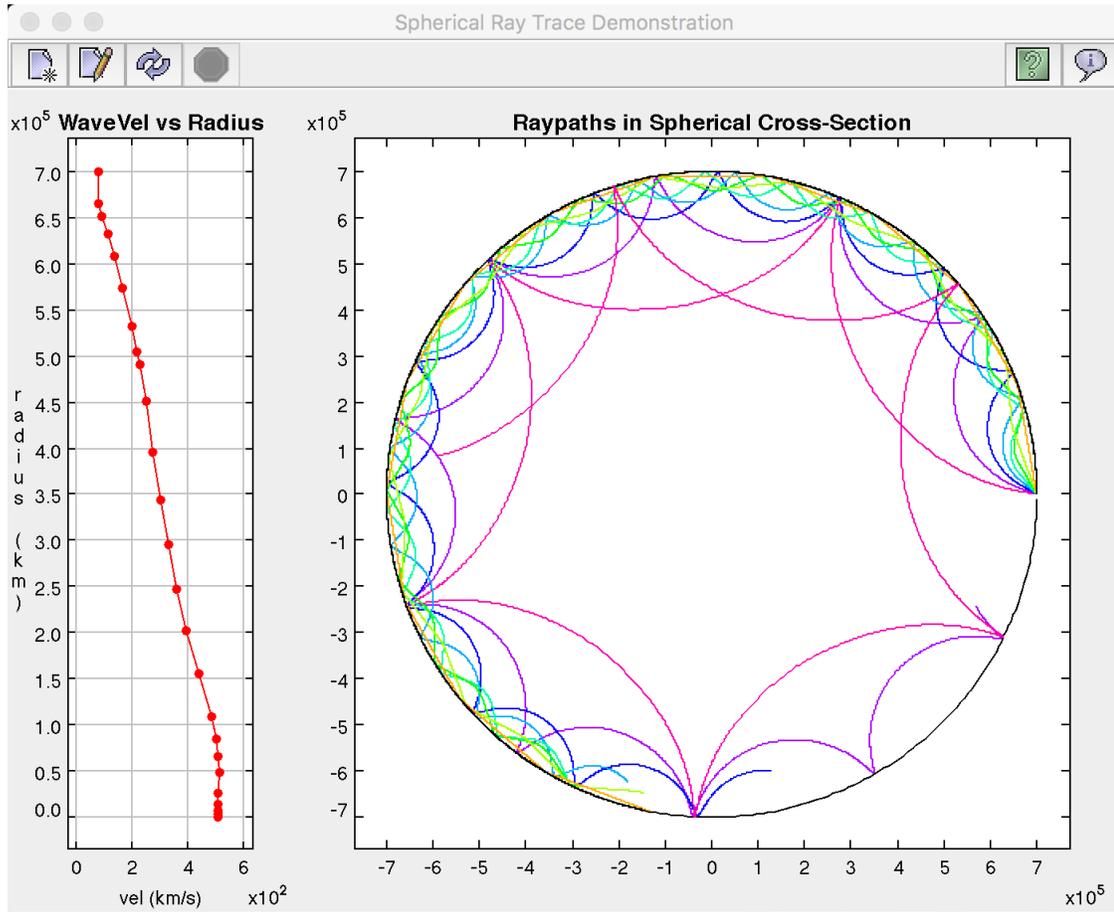


Figura 4-7: Propagación de rayos acústicos en una circunferencia. Créditos: Figura tomada del applet *spheraydemo.jar* creado por Andrew A. Ganse.

variación de la velocidad del sonido respecto a r . Estos modos son ondas acústicas, con la presión actuando como fuerza restauradora, y justamente esto es lo que motiva el nombre de modos p . Al escribir la magnitud al cuadrado del vector de onda separado en componentes radial y horizontal se tiene la siguiente expresión:

$$|\mathbf{k}| = k_r^2 + k_h^2 \quad (4-22)$$

Donde k_h está determinado por l tal y como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \quad (4-23)$$

La dependencia de la posición del punto de retorno r_t con el grado del modo p y la frecuencia angular resulta de suma importancia para la interpretación de las observaciones de las oscilaciones de 5-minutos. Christensen-Dalsgaard [1997] también resalta que para valores de l pequeños, r_t se localizará muy cerca del centro del Sol, mientras que para grados más altos

el punto de retorno estará ubicado cerca de la superficie. Como dato adicional, se menciona el hecho que para $l \geq 40$ los modos están atrapados esencialmente en la zona de convección, la cual tiene una profundidad alrededor de $0,28R$.

Resultados

En esta sección se presentan los resultados obtenidos teniendo en cuenta todos los fundamentos teóricos y suposiciones planteadas anteriormente. Vale la pena enfatizar que los objetivos de este trabajo se concentraban en estudiar la propagación de ondas acústicas en un gas ideal, y posteriormente calcular nuevamente trayectorias de rayos acústicos teniendo en cuenta la influencia de un campo magnético constante. Esta última hipótesis tiene como propósito acercarse al estudio de ondas acústicas en un plasma que sería el modelo más elaborado que se tiene hasta el momento para estudiar el interior solar.

Para elaborar el código computacional se decidió implementar el lenguaje de programación **Python** por la facilidad que ofrece para leer y manejar listas de datos numéricos, que pueden ser almacenados en arreglos con los que posteriormente se pueden realizar los cálculos y las iteraciones pertinentes.

Para simular la propagación de ondas acústicas se necesita adoptar un modelo de referencia que en principio de cuenta de los cambios de variables físicas tales como la densidad, la presión, la temperatura hacia el interior solar. Para este trabajo en particular se decidió implementar el **Modelo S** propuesto por Christensen-Dalsgaard et al. [1996]. Los resultados de este modelo para las variables físicas de estado fundamentales pueden ser apreciados en las Figs. 4-8, 4-9, 4-10 y 4-11. Estas gráficas presentan el comportamiento de las variables físicas densidad, presión, temperatura y coeficiente adiabático Γ_1 como funciones del radio solar. Esto es absolutamente central para el código desarrollado en este trabajo, ya que es lo que permite construir la región 2D estratificada en donde se van a propagar las oscilaciones acústicas.

Para el caso de la velocidad del sonido presentada en la Fig. 4-12 se puede recurrir a la Ec. 3-27 conociendo los valores de ρ , p y Γ_1 dados por el modelo S. Precisamente el hecho de que la velocidad del sonido aumente hacia el interior es lo que hace que exista un punto de retorno y la señal acústica regrese nuevamente a la superficie, tal y como se aprecia en las Figs. 4-14, 4-15 y 4-16.

La Fig. 4-13 corresponde a un cambio de escala para poder expresar la profundidad de penetración en el Sol en unidades de megámetros Mm y la velocidad del sonido en unidades de (km/s) . La convención adoptada arbitrariamente es $z < 0$ hacia el interior solar y $z > 0$ hacia el exterior. Este cambio de escala se hace con el fin de poder analizar mejor la distancia

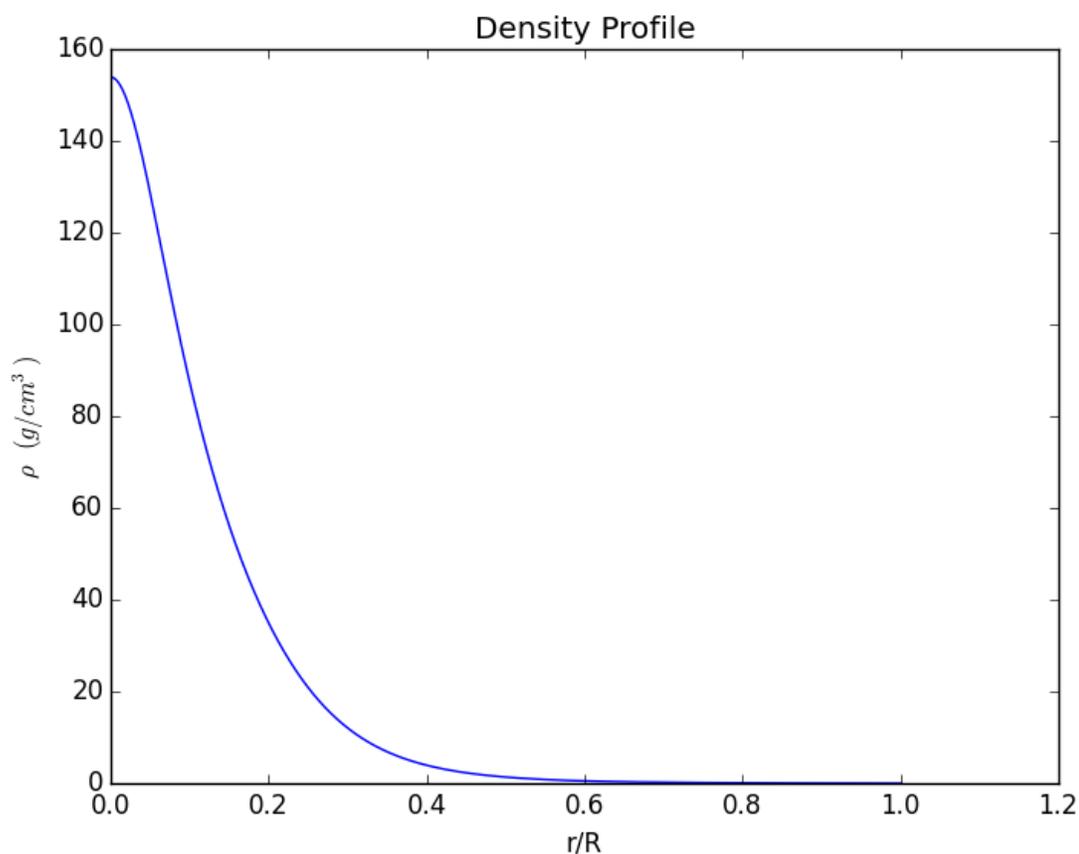


Figura 4-8: Densidad del Sol en función del radio de acuerdo al Modelo S.

recorrida por los rayos acústicos, ya que todas las simulaciones se concentraron en un rango de profundidad máximo alcanzado de unos $100Mm$ tal y como se observa en la Fig. 4-14.

La Fig. 4-14 corresponde al resultado obtenido para un rayo acústico implementando las relaciones de dispersión tal y como se explicó en el capítulo anterior. Se puede apreciar que para $l = 100$, donde l está relacionado con la frecuencia espacial de la señal acústica propagada, dicha propagación queda atrapada a una profundidad de $100Mm$ por debajo de la superficie.

En la Fig. 4-15 se muestra como a medida que l crece, el punto de retorno se hace más pequeño y la señal queda atrapada en una zona muy cercana a la superficie. Todos los modos corresponden a una misma frecuencia, es decir, oscilaciones de 5-minutos. En principio, el código realizado permite propagar rayos acústicos a cualquier valor de l y ω , pero siguiendo los argumentos planteados por Christensen-Dalsgaard [1997] quién encontró que para $l \geq 40$ los modos acústicos quedan atrapados entre la superficie y la zona de convección se decidió

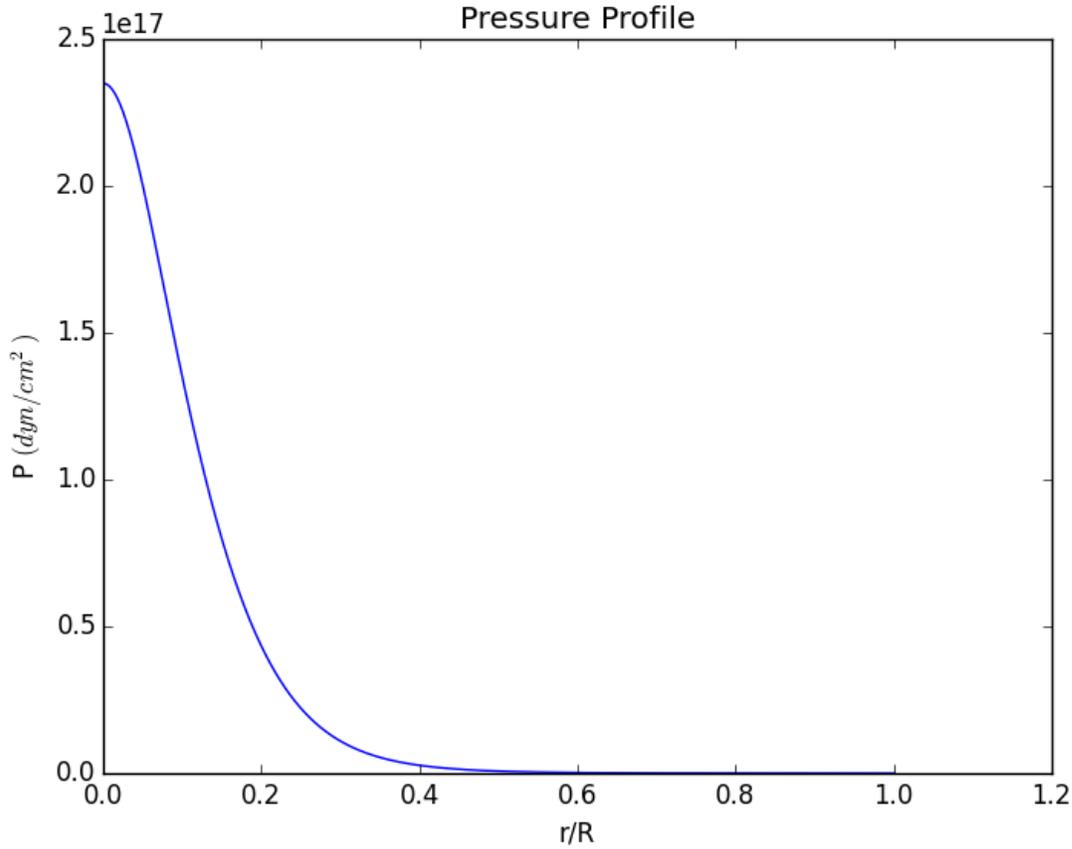


Figura 4-9: Presión del Sol en función del radio de acuerdo al Modelo S.

hacer simulaciones sólo para $l > 100$. Por otro lado, aunque las oscilaciones de 5-minutos no son las únicas observadas en el Sol, si son las más frecuentes, por lo que todas las simulaciones también se hicieron siguiendo este patrón.

Otro aspecto relevante que se puede notar es que el punto de retorno es mucho más sensible a cambios en los valores de l , que a cambios en valores de ω . El programa define el punto de retorno teniendo en cuenta el valor de z para el cual la condición $\mathbf{k} > k_h$ deje de ser válida.

Por último en la Fig. 4-16 se puede notar cómo el campo magnético al modificar el perfil de presiones del modelo estratificado, también va a alterar la trayectoria de las señales, haciendo que el punto de retorno se acorte y por tanto, la distancia recorrida sobre la superficie. Todas estas señales corresponden a oscilaciones de 5-minutos con $l = 650$. Se escogió arbitrariamente este valor para poder apreciar mejor los efectos del campo magnético sobre rayos que viajan cerca a la superficie. Esto es debido a que la influencia del campo magnético se atenúa rápidamente hacia el interior de la estrella, de tal manera que al cabo

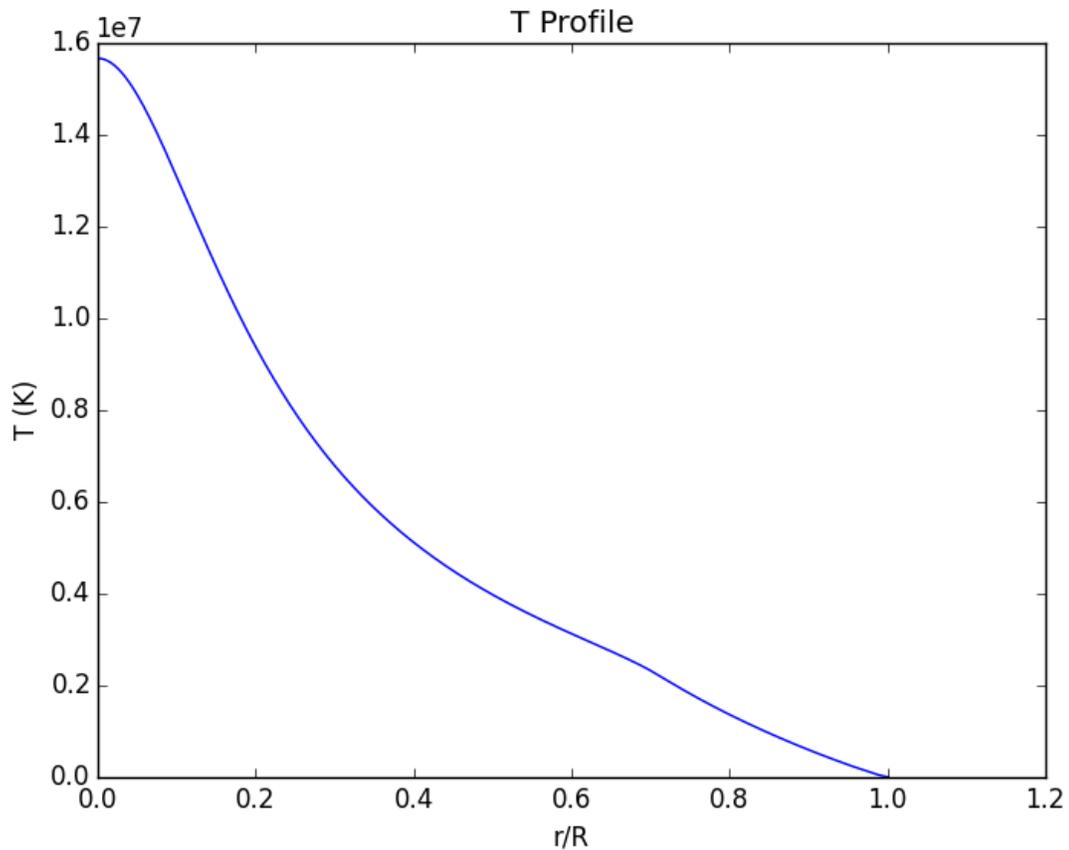


Figura 4-10: Temperatura del Sol en función del radio de acuerdo al Modelo S.

de unos cientos de megámetros el régimen de propagación de las señales es completamente acústico, comportándose nuevamente como un gas ideal. También vale la pena aclarar que el rango de intensidades escogido para el campo magnético (Entre $0G$ y $3000G$) corresponde con lo que ha sido medido con algunos instrumentos instrumentos a bordo de algunas misiones espaciales².

²<http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/sunfact.html>

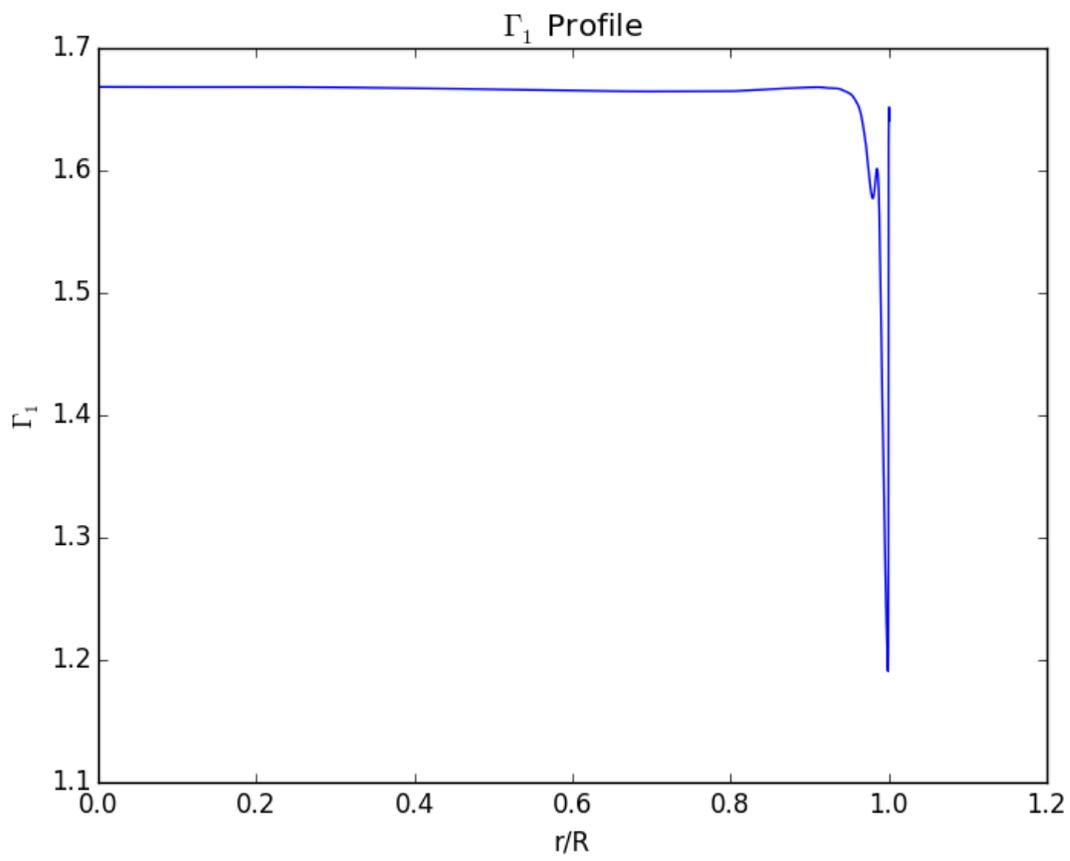


Figura 4-11: Factor Γ_1 para el Modelo S.

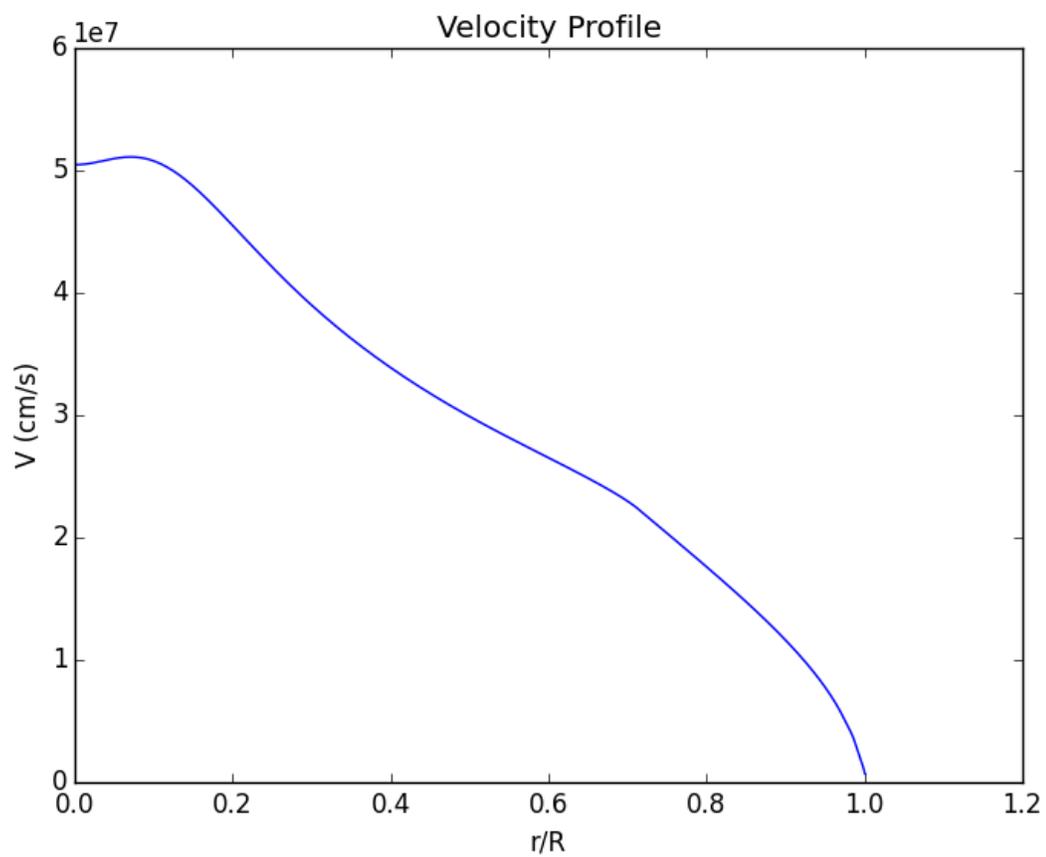


Figura 4-12: Velocidad del sonido para el Modelo S.

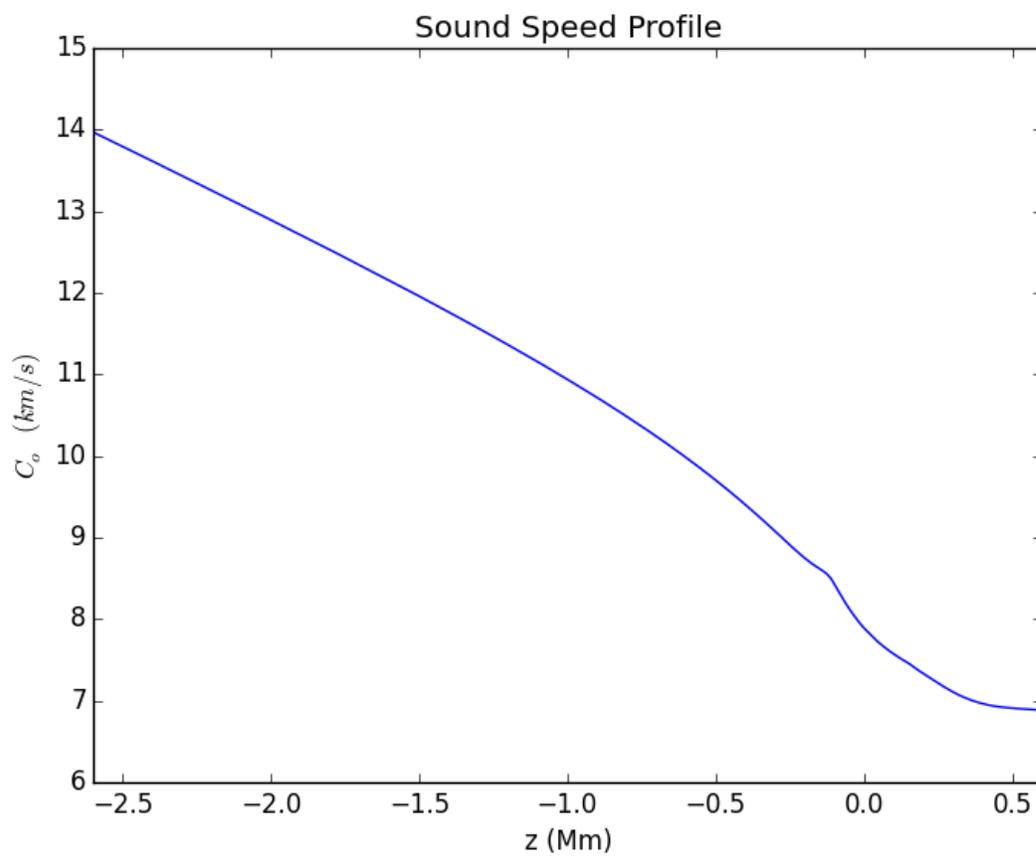


Figura 4-13: Velocidad del sonido para el Modelo S en función de la profundidad.

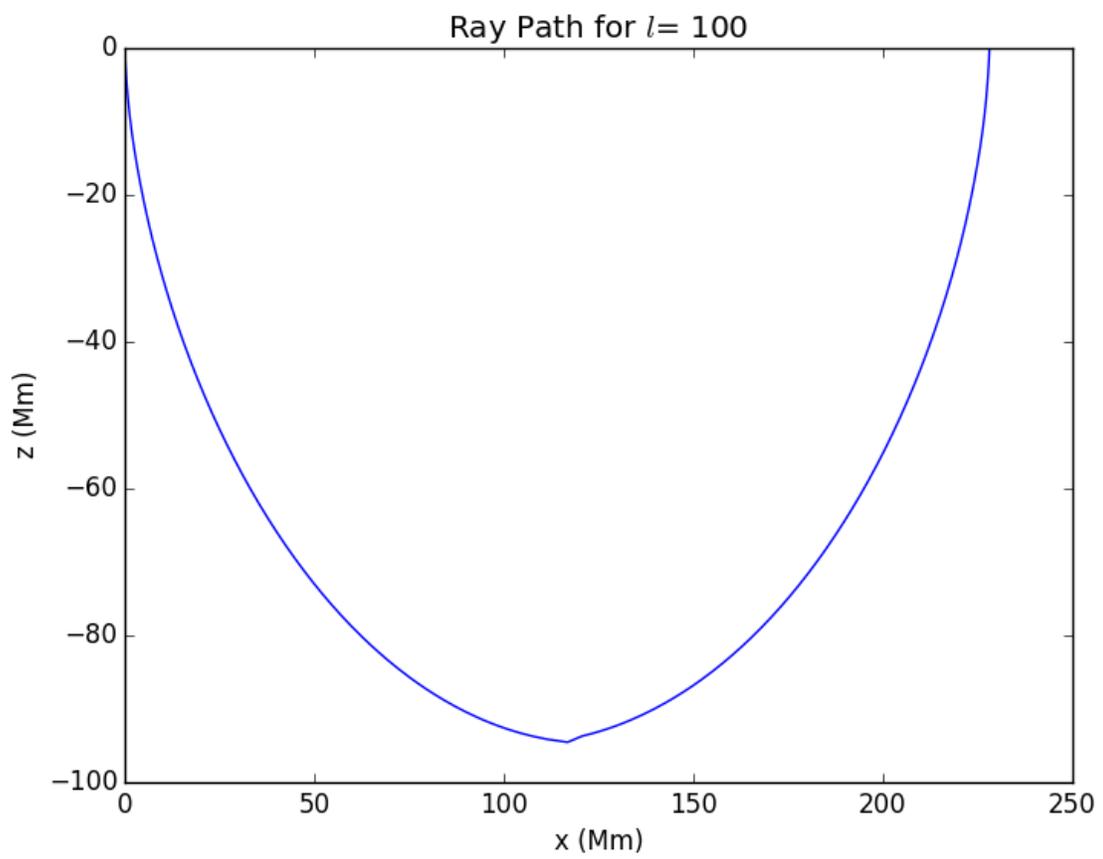


Figura 4-14: Rayo acústico de 5mHz con $l = 100$.

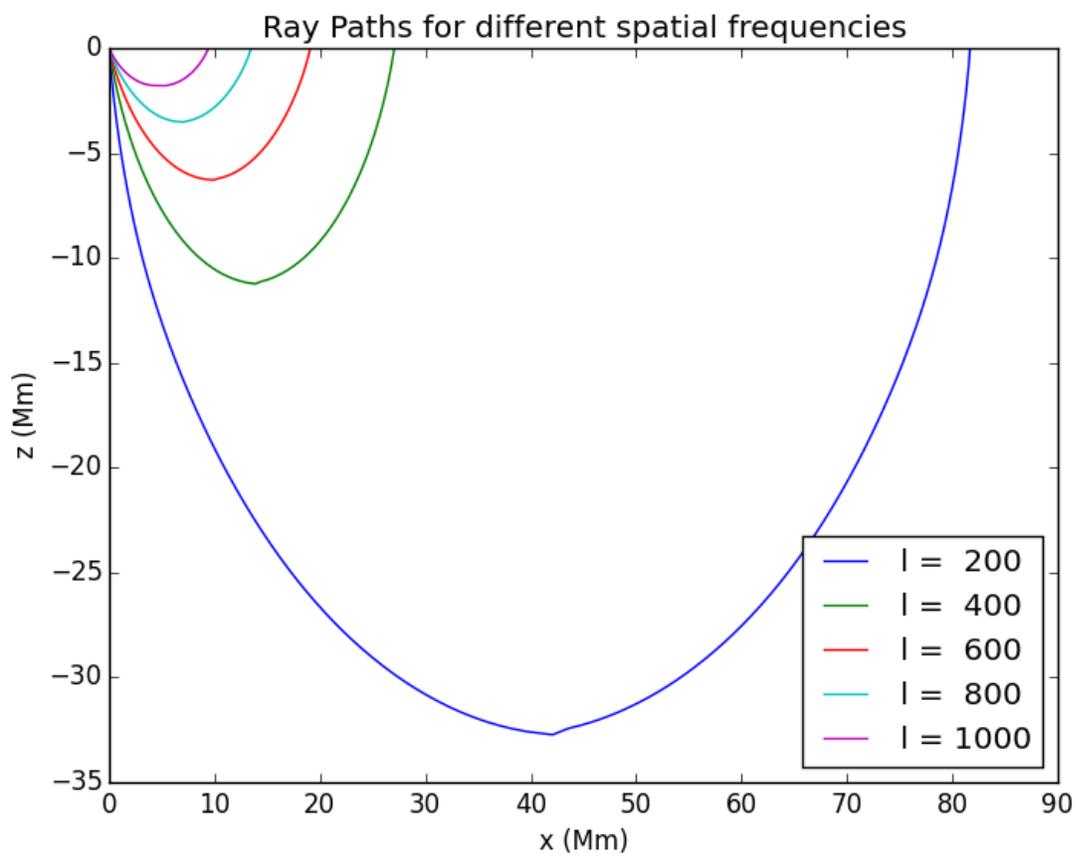


Figura 4-15: Rayos acústicos de 5 mHz con grado l variable entre 200 y 400.

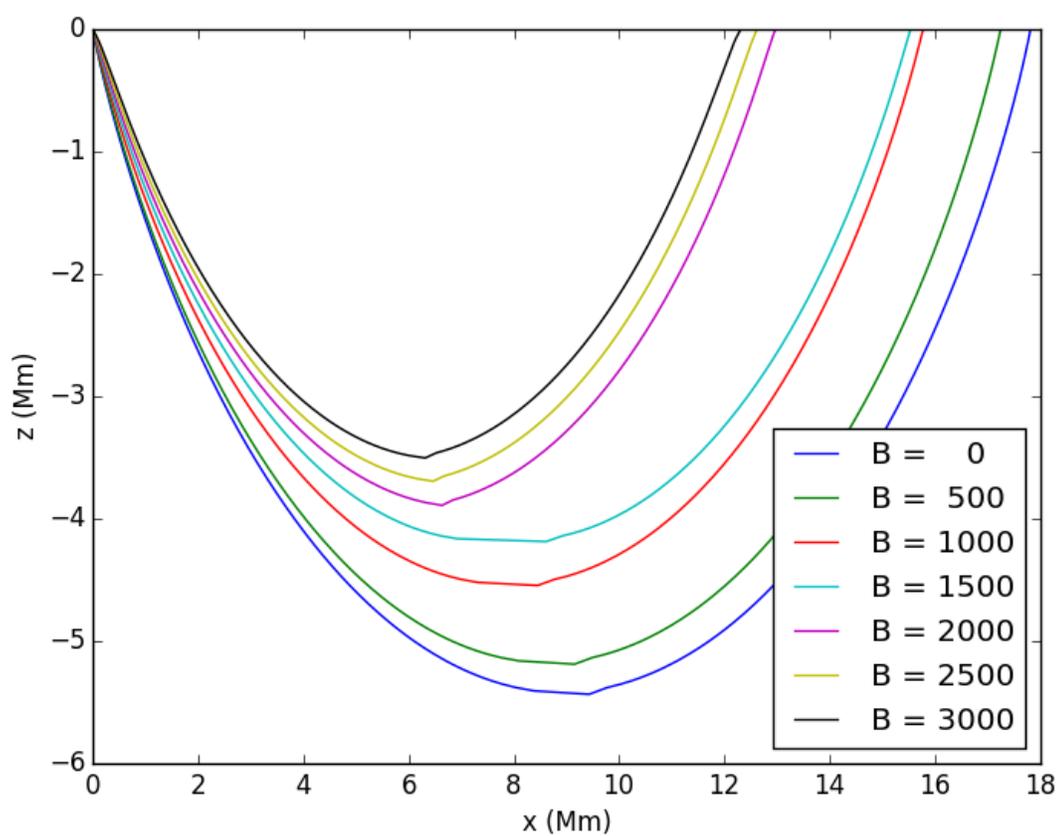


Figura 4-16: Rayos acústicos de 5 mHz bajo la influencia de un campo magnético con intensidades que varían entre 0 y 3000G.

5 Conclusiones

Aunque los resultados obtenidos en este trabajo provienen de consideraciones muy simples e ideales. Se puede apreciar el hecho de que en principio el interior solar estaría repleto de ondas acústicas que se propagan en múltiples direcciones abarcando todas las regiones posibles, tal y como es expuesto por Schunker and Cally [2006].

Técnicamente, las consideraciones y aproximaciones expuestas en este trabajo, que permitieron obtener los resultados presentados en el anterior capítulo, no pertenecen a ninguna de las técnicas específicas implementadas en la actualidad tanto en el campo de la heliosismología global como la local. Sin embargo, vale la pena destacar que los resultados obtenidos corresponden a la forma que se espera deben seguir estos rayos tal y como es expuesto en detalle por Christensen-Dalsgaard [1997].

Dentro de los objetivos planteados en el desarrollo de este trabajo, se encontraba el interés por desarrollar códigos propios para lograr las simulaciones deseadas. En efecto, este propósito se cumplió de manera satisfactoria, aunque eso no implica el hecho de obtener modelos tan precisos tal y como lo han hecho Cally and Bogdan [1997], Steffens and Schmitz [2000], Cally [2000], Schunker and Cally [2006] y Schunker et al. [2009] entre otros.

La teoría de rayos acústicos implementada en este trabajo, aunque no da cuenta de toda la influencia que tienen las oscilaciones sobre todas las variables físicas que constituyen un modelo del interior solar, si permite poner de manifiesto el hecho de como diferentes frecuencias espaciales (determinadas por las magnitudes asociadas al vector de onda \mathbf{k}) y temporales permiten estudiar el Sol a diferentes profundidades, para lo cual deberían tenerse en cuenta técnicas de inversión específicas. Christensen-Dalsgaard [2002].

El código desarrollado en este trabajo, en principio se puede aplicar a cualquier rayo dentro de un rango de frecuencias y valores de l arbitrarios. Esto concuerda con las simulaciones realizadas por Andrew Ganse con sus aplicaciones desarrolladas en java (ver Figs. 4-5, 4-6 y 4-7) y con lo expuesto por Zharkov [2013].

Al tener en cuenta efectos magnéticos, el código desarrollado no permite hacer estudios sobre el cambio en la energía transmitida con la oscilación ya que sólo se tiene en cuenta su influencia para modificar la presión total del sistema. Sin embargo, si permite mostrar una

atenuación reflejada en la reducción en el punto de retorno, haciendo que la onda quede atrapada en una zona más estrecha y cercana a la superficie. Inicialmente, se pensaba hacer un análisis de la influencia de campos magnéticos inclinados arbitrariamente con el fin de recrear un ambiente más parecido a lo que se puede esperar en las vecindades de una mancha solar tal y como ha sido realizado por Cally and Bogdan [1997], Cally [2000], Schunker and Cally [2006] y Schunker et al. [2009] entre otros. Pero finalmente, se decidió modificar este análisis por un modelo que sólo tuviera en cuenta cambios en la intensidad del campo magnético, en parte por la exigencia computacional que lo anterior demandaba (luego de comunicaciones realizadas mediante correo electrónico con Paul Cally).

Entre las simulaciones más robustas hechas hasta el momento vale la pena destacar los trabajos hechos por Hanasoge [2008] desarrollando el código *sparc* y Cameron et al. [2007] desarrollando el código *SLiM*.

Las perspectivas a futuro son continuar con la investigación en este campo tan apasionante y tan exigente tanto teórica como computacionalmente como lo es el de la heliosismología, para eventualmente poder acercarse a modelos mucho más cercanos a la realidad como los mencionados anteriormente.

Bibliografía

- Abhyankar, K. D. (1977). A survey of the solar atmospheric models. *Bulletin of the Astronomical Society of India*, 5:40.
- Aerts, C., Christensen-Dalsgaard, J., and Kurtz, D. (2011). *Asteroseismology*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer Netherlands.
- Aschwanden, M. (2006). *Physics of the Solar Corona: An Introduction with Problems and Solutions*. Springer Praxis Books. Springer Berlin Heidelberg.
- Bahcall, J. N., Pinsonneault, M. H., and Basu, S. (2001). Solar models: Current epoch and time dependences, neutrinos, and helioseismological properties. *The Astrophysical Journal*, 555(2):990.
- Basu, S., Chaplin, W. J., Elsworth, Y., New, R., and Serenelli, A. M. (2009). Fresh insights on the structure of the solar core. *The Astrophysical Journal*, 699(2):1403.
- Bellan, P. (2008). *Fundamentals of Plasma Physics*. Cambridge University Press.
- Broggini, C. (2003). Nuclear Processes at Solar Energy. In Riemann, S. and Lohmann, W., editors, *Physics in Collision*, page 21.
- Brown, T. M., Stebbins, R. T., and Hill, H. A. (1978). Long-period oscillations of the apparent solar diameter - Observations. *ApJ*, 223:324–338.
- Cally, P. (2000). Modelling p-mode interaction with a spreading sunspot field. *Solar Physics*, 192(1-2):395–401.
- Cally, P. S. and Bogdan, T. J. (1997). Simulation of f- and p-Mode Interactions with a Stratified Magnetic Field Concentration. *ApJ*, 486:L67–L70.
- Cameron, R., Gizon, L., and Daifallah, K. (2007). Slim: a code for the simulation of wave propagation through an inhomogeneous, magnetised solar atmosphere. *Astronomische Nachrichten*, 328(3-4):313–318.
- Chang, H.-K., Chou, D.-Y., LaBonte, B., Team, T., et al. (1997). Ambient acoustic imaging in helioseismology. *Nature*, 389(6653):825–827.
- Christensen-Dalsgaard, J. (1997). Lecture notes on stellar oscillations.

- Christensen-Dalsgaard, J. (2002). Helioseismology. *Rev. Mod. Phys.*, 74:1073–1129.
- Christensen-Dalsgaard, J., Däppen, W., Ajukov, S. V., Anderson, E. R., Antia, H. M., Basu, S., Baturin, V. A., Berthomieu, G., Chaboyer, B., Chitre, S. M., Cox, A. N., Demarque, P., Donatowicz, J., Dziembowski, W. A., Gabriel, M., Gough, D. O., Guenther, D. B., Guzik, J. A., Harvey, J. W., Hill, F., Houdek, G., Iglesias, C. A., Kosovichev, A. G., Leibacher, J. W., Morel, P., Proffitt, C. R., Provost, J., Reiter, J., Rhodes, E. J., Rogers, F. J., Roxburgh, I. W., Thompson, M. J., and Ulrich, R. K. (1996). The current state of solar modeling. *Science*, 272(5266):1286–1292.
- Christensen-Dalsgaard, J., Duvall, Jr., T. L., Gough, D. O., Harvey, J. W., and Rhodes, Jr., E. J. (1985). Speed of sound in the solar interior. *Nature*, 315:378–382.
- Christensen-Dalsgaard, J. and Pérez Hernández, F. (1992). The phase function for stellar acoustic oscillations - i. theory. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 257(1):62–88.
- Claverie, A., Isaak, G. R., McLeod, C. P., van der Raay, H. B., and Cortes, T. R. (1979). Solar structure from global studies of the 5-minute oscillation. *Nature*, 282:591–594.
- Cox, J. and Giuli, R. (1968). *Principles of Stellar Structure: Physical principles*. Number v. 1 in Principles of Stellar Structure. Gordon and Breach.
- De Pontieu, B., McIntosh, S. W., Carlsson, M., Hansteen, V. H., Tarbell, T. D., Schrijver, C. J., Title, A. M., Shine, R. A., Tsuneta, S., Katsukawa, Y., Ichimoto, K., Suematsu, Y., Shimizu, T., and Nagata, S. (2007). Chromospheric alfvénic waves strong enough to power the solar wind. *Science*, 318:1574–.
- Deubner, F.-L. (1975). Observations of low wavenumber nonradial eigenmodes of the sun. *A&A*, 44:371–375.
- D’Silva, S. (1996). Theoretical Foundations of Time-Distance Helioseismology. *ApJ*, 469:964.
- Duvall, T., Dziembowski, W., Goode, P., Gough, D., Harvey, J., and Leibacher, J. (1984). Internal rotation of the sun.
- Duvall, Jr., T. L. and Harvey, J. W. (1983). Observations of solar oscillations of low and intermediate degree. *Nature*, 302:24–27.
- Dwivedi, B. (2003). *Dynamic Sun*. Cambridge University Press.
- Erdélyi, R. and Ballai, I. (2007). Heating of the solar and stellar coronae: a review. *Astronomische Nachrichten*, 328:726–733.

- Evans, J. W. and Michard, R. (1962). Observational Study of Macroscopic Inhomogeneities in the Solar Atmosphere. III. Vertical Oscillatory Motions in the Solar Photosphere. *ApJ*, 136:493.
- Frazier, E. N. (1968). A Spatio-Temporal Analysis of Velocity Fields in the Solar Photosphere. *ZAp*, 68:345.
- Ganse, A. (2013). *Uncertainty and Resolution in Full-waveform, Continuous, Geoacoustic Inversion*.
- Gizon, L., Birch, A. C., and Spruit, H. C. (2010). Local Helioseismology: Three-Dimensional Imaging of the Solar Interior. *ARA&A*, 48:289–338.
- Gough, D. and Toomre, J. (1983). On the detection of subphotospheric convective velocities and temperature fluctuations. *Solar Physics*, 82(1-2):401–410.
- Goupil, M. J., Lebreton, Y., Marques, J. P., Samadi, R., and Baudin, F. (2011). Open issues in probing interiors of solar-like oscillating main sequence stars 1. from the sun to nearly suns. *Journal of Physics Conference Series*, 271(1):012031.
- Hanasoge, S. M. (2008). *Theoretical studies of wave interactions in the sun*. PhD thesis, Stanford University.
- Hansen, C. and Kawaler, S. (2012). *Stellar Interiors: Physical Principles, Structure, and Evolution*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer New York.
- Hill, F. (1988). Rings and trumpets - Three-dimensional power spectra of solar oscillations. *ApJ*, 333:996–1013.
- Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., and Donner, K. (2007). *Fundamental Astronomy*. Springer Berlin Heidelberg.
- Kosovichev, A. (2006). Properties of flares-generated seismic waves on the sun. *Solar Physics*, 238(1):1–11.
- Kosovichev, A. and Zharkova, V. (1998). X-ray flare sparks quake inside sun. *Nature*, 393(6683):317–318.
- Kosovichev, A. G. (2011). Advances in Global and Local Helioseismology: An Introductory Review. In Rozelot, J.-P. and Neiner, C., editors, *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, volume 832 of *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, pages 3–642.
- Landau, L. and Lifshits, E. (1959). *Fluid Mechanics, by L.D. Landau and E.M. Lifshitz*. Teoreticheskii, aĭ; fizika. Pergamon Press.

- Leighton, R. B., Noyes, R. W., and Simon, G. W. (1962). Velocity Fields in the Solar Atmosphere. I. Preliminary Report. *ApJ*, 135:474.
- Lindsey, C., Braun, and C., D. (2000). Seismic images of the far side of the sun. *Science*, 287(5459):1799–1801.
- Lindsey, C. and Braun, D. C. (1997). Helioseismic Holography. *ApJ*, 485:895–903.
- Schunker, H. and Cally, P. S. (2006). Magnetic field inclination and atmospheric oscillations above solar active regions. *MNRAS*, 372:551–564.
- Schunker, H., Cameron, R., and Gizon, L. (2009). Numerical Simulations of Quiet Sun Oscillations. In Dikpati, M., Arentoft, T., González Hernández, I., Lindsey, C., and Hill, F., editors, *Solar-Stellar Dynamos as Revealed by Helio- and Asteroseismology: GONG 2008/SOHO 21*, volume 416 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 49.
- Schunker, H. and of Mathematical Sciences, M. U. S. (2006). *Local Helioseismology Within Surface Magnetic Fields*. Monash University.
- Severnyi, A. B., Kotov, V. A., and Tsap, T. T. (1976). Observations of solar pulsations. *Nature*, 259:87–89.
- Shearer, P. (2009). *Introduction to Seismology*. Cambridge University Press.
- Somov, B. (2006). *Plasma Astrophysics, Part I: Fundamentals and Practice*. Astrophysics and Space Science Library. Springer New York.
- Soward, A., Jones, C., Hughes, D., and Weiss, N. (2005). *Fluid Dynamics and Dynamos in Astrophysics and Geophysics*. The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics. CRC Press.
- Steffens, S. and Schmitz, F. (2000). The influence of the solar atmospheric stratification on the form of p-mode ridges. *A&A*, 354:280–286.
- Ulrich, R. K. (1970). The Five-Minute Oscillations on the Solar Surface. *ApJ*, 162:993.
- Zharkov, S. (2013). Geometric properties of acoustic waves generated by a point source in the solar-like interior: effects of acoustic cut-off frequency. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 431(4):3414–3428.