Nota de aceptación

Firma Asesor del Trabajo de Grado

Firma Segundo Lector

Firma Coordinador de la Maestría

Manizales, Abril de 2016

Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Aplicación de las Leyes de Kepler como Alternativa Pedagógica para la Enseñanza de las Secciones Cónicas

Estudio de Caso: I. E. Ismael Perdomo Borrero

HUMBERTO BARRIOS PEÑA

Manizales (Caldas) Abril de 2016

Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales

Aplicación de las Leyes de Kepler Como Alternativa Pedagógica para La Enseñanza de las Secciones Cónicas

Estudio de Caso: I. E. Ismael Perdomo Borrero

HUMBERTO BARRIOS PEÑA

Trabajo de Grado presentado como requisito para optar al título de

Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director

ING. MG. JOHN JAIRO SALAZAR BUITRAGO

Manizales (Caldas) Abril de 2016

"Así como los objetos más fáciles de ver no son los demasiado grandes ni los demasiado pequeños, también las ideas más fáciles en matemáticas no son las demasiado complejas ni las demasiado simples. "

Bertrand Arthur William Russell

Dedicatoria...

A mi Dios, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente en todo este camino recorrido.

A mi hijo Ian Barrios Gómez por ser la razón de mí existir y la persona que me anima a seguir luchando cada día por mis sueños.

A mi esposa María Yulieth Gómez Amezquita y mis padres María Yineth Peña Rivera y Humberto Barrios; por acompañarme en aquellos momentos difíciles que viví y que siempre me dieron ese impulso para no desfallecer.

Agradecimientos...

Este trabajo de Grado si bien ha requerido de esfuerzo y mucha dedicación por parte de su autor y su director, no hubiera sido posible finalizarlo sin la cooperación desinteresada de todas y cada una de las personas que a continuación citaré y muchas de las cuales han sido un soporte fuerte en momentos de angustia y desesperación.

Primero y antes que nada, dar gracias a Dios, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante toda mi Maestría.

A mi familia, que sin su apoyo, mis estudios no hubiesen sido posible. A mi hijo, mi esposa y mis padres; por el ánimo, apoyo y alegría que me brindaron al igual que la fortaleza necesaria para seguir adelante.

De igual manera, quiero manifestar mis más sinceros agradecimientos a mis maestros, de manera especial al profesor John Jairo Salazar Buitrago quien con su experiencia me apoyó y me brindó todo sus conocimientos.

A todas aquellas personas que de alguna manera me acompañaron en aquellos momentos difíciles que viví y que siempre me dieron ese impulso necesario para no desfallecer.

Por lo que soy y por todo el tiempo que pensaron en mí.

Muchas Gracias...

Resúmen

Título:

"Aplicación de las Leyes de Kepler como Alternativa Pedagógica para la Enseñanza de las Secciones Cónicas"

El siguiente trabajo de Grado presenta inicialmente un acercamiento histórico a la mecánica celeste y a las diferentes conjeturas e intentos que se realizaron para explicar el movimiento de los astros. Se muestran algunos conceptos y deducciones sobre las secciones cónicas a través de la Matemática y la Física.

Con esto se elabora una secuencia didáctica, compuesta por seis guías que incluyen algunos aspectos teóricos de las cónicas, sus características, propiedades, deducciones y se proponen actividades cuya finalidad es introducir las secciones cónicas en el grado noveno con el objetivo de contribuir y facilitar al aprendizaje del tema en cuestión, para que una vez que lleguen los estudiantes al grado décimo complementen la temática y no les genere dificultades en ese año académico.

Así mismo, se presenta el análisis correspondiente de la aplicación de esta secuencia didáctica y sus diferentes conclusiones.

PALABRAS CLAVES: *Mecánica celeste, trayectorias, astros, cometas, secciones cónicas, circunferencia, elipse, parábola, hipérbola.*

Abstract

Title:

"Application of the Laws of Kepler like Pedagogic Alternative for the Teaching of the Conical Sections"

The following work of Grade presents a historical approach initially to the celestial mechanics and the different conjectures and intents that were carried out to explain the movement of the stars. Some concepts and deductions are shown on the conical sections through the Mathematics and the Physics.

With this didactic sequence, composed of six guides that include some theoretical aspects of conic, characteristics, properties and activities proposed deductions are made aimed at introducing conic sections in the ninth grade in order to help and facilitate the learning of the subject matter, so that once they reach tenth grade students to complement the theme and not create difficulties for them in this academic year.

Likewise, it is presented the analysis corresponding of the application of this didactic sequence and their different conclusions.

KEY WORDS: *Celestial mechanics, trajectories, stars, comets, conical sections, circumference, ellipse, parable, hyperbola.*

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Es un hecho que la preocupación de la Educación en nuestro país se ha hecho más notoria en la última década debido a su interés por el nivel de competencia en las diferentes disciplinas de los estudiantes, ejemplos concretos de ello, son las reformas en el sistema educativo o la puesta en marcha de programas internacionales como lo son PISA (Programa de Evaluación Internacional de los Alumnos), estas pruebas buscan valorar hasta qué punto los estudiantes son capaces de usar los conocimientos y destrezas que han aprendido cuando se ven ante una situación en los que esos conocimientos pueden ser relevantes.

Es precisamente por los resultados de estos programas que se muestra una clara apuesta por el conocimiento útil para la vida, evaluándose el grado de competencia en la aplicación del conocimiento adquirido al mundo real y una de las disciplinas esenciales para que el ciudadano ponga en marcha este conocimiento y que sirve como referencia para medir el grado de desarrollo de una sociedad es la Matemática, además de ser un instrumento para describir y entender el mundo que nos rodea.

Es por esto que debemos apostar por nuevas herramientas de aprendizaje que busquen despertar el interés y la motivación de nuestros estudiantes por las Matemáticas, en este caso por la geometría analítica y que muestren ese vínculo con el mundo real, sin dejar de lado el aprendizaje de conceptos matemáticos. Para ello, propongo una secuencia didáctica para el aprendizaje de las secciones cónicas, enfocándonos en el proceso histórico de la mecánica celeste, sus conjeturas e intentos que se realizaron para explicar el movimiento de los planetas, cometas, satélites y demás astros.

De igual forma, en todo el mundo cada vez son más altos los niveles educativos requeridos a hombres y mujeres para hacerlos participes de la sociedad y resolver problemas de carácter práctico. En este contexto es necesaria entonces una educación básica que contribuya al desarrollo de competencias amplias para mejorar la manera de vivir y convivir en una sociedad cada vez más compleja, esto exige considerar el papel de aprender permanentemente para hacer frente a la creciente producción de conocimiento y aprovecharlo al máximo en la vida cotidiana.

En nuestro caso, las leyes de Kepler consideradas en principio empíricas, forman parte de las contribuciones que cambiaron la forma de interpretar nuestro mundo.

Es por esto que el presente trabajo de grado busca que el estudiante se apropie de las secciones cónicas a través del Enfoque Histórico Cultural de la Enseñanza, basadas en la mecánica celeste, las diferentes trayectorias que emplean los astros, esto incluye deducir las ecuaciones de las trayectorias, los periodos de los planetas y probar que el movimiento se realiza en un plano, entre otros.

A fin de lograr esto partiremos de elementos básicos de la geometría analítica, como las secciones cónicas, sistemas de coordenadas, estudio de figuras en un plano, ecuación canónica y general de una curva; de la misma manera tendremos en cuenta algunos conceptos básicos de la física como velocidad, aceleración y momento angular, entre otros.

CAPÍTULO 2

PRELIMINARES

2.1. Justificación

En Colombia desde 1998, con la publicación de los Lineamientos Curriculares, se les da a las matemáticas escolares un sentido más amplio que posibilita al estudiante la utilización de sus conocimientos fuera del ámbito escolar; donde pueda formular hipótesis y tomar sus propias decisiones adaptándose así a nuevas situaciones.

En ese sentido, el MEN (1998, p. 35) establece que *"es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista"*. De acuerdo con esta perspectiva, se afirma entonces, que uno de los propósitos de la matemática escolar, es el desarrollo del pensamiento matemático y, por tanto, son la modelización y la resolución de problemas, dos de los procesos fundamentales para alcanzar este propósito.

Es por esto, que he querido enfocar este trabajo de grado hacia la aplicación de uno de los tópicos más relevantes en la historia de la humanidad (la mecánica celeste), un tema que para cualquier estudiante sería motivador a la hora de iniciar un estudio y que por muchos años más será de discusión para muchas personas, ya que: uno de los enigmas que aquejan a los observadores del sistema solar desde los albores de la humanidad ha sido la manera en la que se trasladan los cuerpos celestes a través del espacio (cometas, satélites naturales, planetas vecinos, entre otros); que observados desde la tierra, aparentemente retroceden en su órbita (retrogradación).

Por esta razón resulta interesante indagar sobre las trayectorias que siguen en su silencioso movimiento (circular, elíptico, parabólico e hiperbólico). Debido a esto surge la inquietud de crear un ambiente de interacción del tema que permita estudiarlo y relacionarlo de manera directa con la matemática, más precisamente con la geometría analítica.

Además de esto, se quiere continuar con un trabajo personal realizado en la Licenciatura en Matemáticas, cuya tesis de grado fue deducir matemáticamente las Leyes de Kepler y al final comprobar sus enunciados a través de problemas aplicados a la mecánica celeste.

Entonces, es hora de llevar este estudio al aula de clase pero de una manera más aplicativa y dinámica, donde los estudiantes analicen y deduzcan los movimientos que realizan los planetas, cometas, satélites y demás astros; a través de la Geometría Analítica, ya que en la mayoría de los casos los estudiantes presentan algunas dificultades en el manejo de las secciones cónicas, ya sea por falta de motivación o en ocasiones porque algunos docentes no prestan mucha atención a este tema tan importante y propuesto en los lineamientos curriculares por el Ministerio de Educación Nacional; lo que llega a ser un indicativo para detenernos y pensar qué está pasando y poder así plantear investigaciones con respecto al tema.

Como apuntan Figueiras y Colab (2000, p. 46): *"La enseñanza de la geometría ha sido objeto de numerosos estudios, ha generado varias experiencias, pero sigue siendo una asignatura pendiente. Cabría preguntarse dónde está el punto débil de la cuestión..."*.

Ahora bien, el tratamiento que dan los libros acerca del tema son más de tipo analítico, y no presentan una aplicabilidad detallada a cada sección cónica, de manera que el estudiante no puede hacerse una imagen de estas curvas fácilmente y mucho menos sin una aplicabilidad. Entonces, con las condiciones actuales que tenemos, donde cada vez nos alejamos más del formalismo, es muy importante que motivemos a los estudiantes abordando diversos tópicos desde perspectivas distintas, de tal manera que ayuden a la construcción de situaciones que interesen a ellos.

Con este tema se pretende mejorar el aprendizaje de las cónicas a través de la aplicación de la Mecánica celeste en el aula de clase, empleando paralelamente el pensamiento intuitivo.

2.2. Planteamiento del Problema

> MOVIMIENTO DE SATÉLITES: Culturalmente, la Luna es el cuerpo celeste que más ha influido en el desarrollo de los pueblos y es el único satélite natural de la Tierra. Gira alrededor de nuestro planeta en un periodo de 27,3 días. También da en el mismo tiempo una vuelta alrededor de su propio eje y por ello siempre mantiene la misma cara dirigida hacia la tierra. Este fenómeno llamado "rotación capitulada" es debido a la fuerte atracción gravitacional que la Tierra ejerce sobre la Luna.
>
> Al aplicar la ley gravitacional universal entre la Tierra y la Luna podemos calcular el radio de la órbita lunar. Consideramos la órbita circular y despreciamos la fuerza de atracción que ejerce el Sol sobre la Luna, lo mismo que la de los otros cuerpos celestes. De esta forma la única fuerza que actúa sobre la Luna es la fuerza de atracción gravitacional terrestre, que sería una fuerza centrípeta, ya que el movimiento lo hemos supuesto circular. Pero en conclusión, ¿Cómo son las órbitas de la Tierra y de la Luna?, ¿Cómo se mueven los cometas, satélites y demás astros?. (Villegas y Ramírez, 1989, p.130)

Hoy en día la educación colombiana, relacionada con la enseñanza de la matemática, no articula los temas vistos en clase con las otras áreas del conocimiento e incluso con la propia matemática. Así mismo, la mayoría de los temas están desconectados del mundo real y de las ciencias, lo que tiene como consecuencia que los estudiantes no conciben la utilidad que tienen las matemáticas en su formación y además, es un hecho comprobable durante el trabajo diario en las aulas, que los métodos tradicionales no son efectivos, los estudiantes se convierten en una única entidad pasiva y global, receptores de una única transmisión de conocimientos sin opción a deducirlos por ellos mismos, en donde prima la ejecución de una serie de contenidos puramente matemáticos sin ninguna vinculación con el contexto.

Por este motivo hay que apostar por nuevas herramientas pedagógicas que busquen despertar el interés y la motivación de nuestros estudiantes por las matemáticas; donde se genere un aprendizaje continuo, dinámico e interactivo. Que el estudiante construya su propio conocimiento y muestren ese vínculo de unión con el mundo real, sin dejar de lado el aprendizaje de conceptos matemáticos y la capacidad de interiorizar las ideas que se esconden tras ellos.

Teniendo en cuenta estos argumentos, podemos apostar a temas de interés en los estudiantes, como lo es la mecánica celeste (entre otras, las Leyes de Kepler) como una aplicación para la enseñanza de las secciones cónicas en el grado noveno (9^o). Estos problemas del mundo real, se modelan utilizando herramientas matemáticas, por lo cual algunos de los elementos teóricos necesarios para poder llegar a esta aplicación son: conceptos básicos de geometría, sistemas de coordenadas y algunos conceptos de física; todo esto con el fin de que el estudiante interiorice y se apropie más del tema.

En este sentido se pretende que el estudiante conozca las secciones cónicas desde el grado noveno, se apropie del concepto de circunferencia, elipse, parábola e hipérbola y no les genere inconvenientes en el momento que lleguen al grado décimo e inicien con la temática en cuestión. Se aplica primero que todo un test (Pre-test) de saberes previos a la temática con el fin de obtener un panorama del estudiante, para luego desarrollar seis guías que incluyen tanto aspectos históricos como teóricos de las diferentes cónicas, sus gráficas, características, propiedades, deducciones y diferentes actividades de aplicación a la mecánica celeste, para que finalmente, se desarrolle un Pos-test y así ratificar los aprendizajes obtenidos durante este proceso.

Es de allí que en el presente trabajo de Grado se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo contribuir al aprendizaje de las secciones cónicas mediante la aplicación de las Leyes de Kepler en el grado noveno (9°) de la Institución Educativa Ismael Perdomo Borrero?

2.3. Objetivo General

- Comprobar que con aplicaciones de la Mecánica Celeste (teorías de Nicolás Copérnico, Tycho Brahe, Galileo Galilei y Johannes Kepler), los estudiantes del grado noveno (9°) de la Institución Educativa Ismael Perdomo Borrero, logran comprender las secciones cónicas a través del Enfoque Histórico Cultural, mejorando así el pensamiento espacial para cursos posteriores.

2.4. Objetivos Específicos

- Describir y analizar la importancia de las aplicaciones de la mecánica celeste en la enseñanza - aprendizaje de las cónicas, para hacerla un elemento mediador en la relación sujeto - objeto - sujeto.

- Establecer como actividad primordial la función del profesor como orientador y guía, formando estructuras de pensamiento en el estudiante como resultado de construcción social en el marco de un contexto histórico y cultural.

- Estructurar actividades que planteen condiciones iniciales en el educando hacia sus metas, generando una orientación en él para que desempeñe la acción y resuelva las tareas predefinidas.

- Lograr la construcción consciente de los conceptos, donde se comparta una reflexión de la acción, se interiorice pasando a un plano mental, de tal manera que se convierta en parte de la vida.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

El cielo ha sido objeto de investigación desde que apareció el hombre sobre la tierra, y por ello se plantearon desde tiempos remotos muchas conjeturas y se realizaron muchos intentos para explicar el movimiento de los astros. Las diferentes posiciones que ocupan en el cielo y su movimiento fueron quizá, un gran motivo de estudio para los antiguos. Es por esto, que para la aplicación de este trabajo de grado es necesario realizar una aproximación epistemológica, histórica y de enseñanza, tanto de los orígenes del movimiento de la tierra, como de la mecánica celeste y de las secciones cónicas en el sistema educativo.

3.1. Referente Epistemológico

3.1.1. Epistemología de las Ciencias - Astronomía

Las primeras etapas del desarrollo de las ciencias se han caracterizado por una competencia entre una serie de concepciones distintas de la Naturaleza, que se derivan de la observación y del método científico. Tal es el caso, que según Kuhn (1971) afirma: "La observación y la experiencia pueden y deben limitar la gama de las creencias científicas admisibles, o de lo contrario, no habría ciencia" (p.25).

Es por esto, que me parece conveniente iniciar este apartado refiriéndonos a los orígenes del movimiento de la tierra y del cómo se empieza a entender el conocimiento particular a través de la historia.

La ciencia moderna había nacido en un contacto estrecho con la astronomía, teniendo su origen en la necesidad de afrontar las objeciones físicas opuestas por numerosos sabios de la época de la astronomía copernicana, consolidándose de esta manera, idénticas a las realizadas por Aristóteles y Tolomeo contra la posibilidad del movimiento de la Tierra. De allí se vuelve atractivo entonces, ver estas objeciones discutidas por Copérnico, Bruno, Tycho Brahe, Johannes Kepler y Galileo Galilei.

Los argumentos de Aristóteles y de Tolomeo, son reducidos a que si la Tierra se moviera, este movimiento habría afectado a los fenómenos que se manifiestan en la superficie de dos modos perfectamente determinados: primero, la velocidad formidable de este movimiento (rotativo) desarrollaría una fuerza centrífuga de tal amplitud que los cuerpos no unidos a la Tierra serían lanzados lejos; y segundo, este mismo movimiento obligaría a todos los cuerpos no ligados a la tierra, o temporalmente separados de ella, como las nubes, pájaros, cuerpos lanzados al espacio, etc., a quedarse atrás. Por esto, al caer una piedra desde lo alto de una torre, no caería nunca a su lado, y, *afortiriori*, una piedra lanzada perpendicularmente al aire, no volvería a caer nunca en el lugar de donde había partido, puesto que durante el tiempo de su caída o de su vuelo, este lugar habría sido rápidamente retirado de debajo y se encontraría en otro sitio.

Desde el punto de vista de la física aristotélica, este argumento es completamente justo. Tan justo, incluso, que sobre la base de esta física se volvió irrefutable.

Es decir, que el movimiento para los aristotélicos es un proceso que afecta al móvil, que tiene lugar en el cuerpo en movimiento. Un cuerpo al caer se mueve de un cierto lugar situado encima de la Tierra hacia ésta, o, más exactamente, hacia su centro. Sigue la línea recta que une estos dos puntos. Si durante este movimiento la Tierra gira alrededor de su eje, describe con relación a esta línea un movimiento en el que no toman parte ni esa línea ni el cuerpo que está separado de ella. El hecho de que la Tierra se mueva por debajo de él no puede afectar a su trayectoria. El cuerpo no puede correr tras la Tierra, prosigue su camino como si nada pasara, pues, en efecto, a él nada le ocurriría.

La respuesta de Copérnico a los argumentos de los aristotélicos fue bastante débil, intenta demostrar que consecuencias desgraciadas deducidas por estos últimos podrían ser justas en el caso de un movimiento violento. Pero no en el del movimiento de la Tierra y con relación a las cosas que pertenecen a la Tierra, pues, para ellas, es un movimiento natural.

Estos argumentos de Copérnico llevaban en sí los fundamentos de una nueva concepción que sería desarrollada por pensadores que sobrevendrían. Los razonamientos de Copérnico aplican las leyes de la mecánica celeste a los fenómenos terrestres, un paso que implícitamente anuncia el abandono de la vieja división cualitativa del cosmos en dos mundos diferentes. Además, Copérnico explica el trayecto aparentemente rectilíneo (aunque realmente describa una curva) del cuerpo en caída libre por su participación en el movimiento de la Tierra.

Los argumentos de Copérnico están basados en una concepción mítica de la naturaleza común de la Tierra y de las cosas terrestres. La ciencia posterior deberá sustituirla por el concepto de un sistema físico, de un sistema de cuerpos que comportan el mismo movimiento; deberá apoyarse en la relatividad física y no óptica del movimiento. Todo esto es imposible sobre la base de la filosofía aristotélica del movimiento, y exige la adopción de otra filosofía.

La concepción del sistema físico, o más exactamente mecánico, que estaba implícitamente presente en los argumentos de Copérnico, fue elaborada por Giordano Bruno. Bruno descubrió, por una intuición genial, que la nueva astronomía debía abandonar inmediatamente la concepción de un mundo cerrado y finito para sustituirla por la de un universo abierto e infinito. Esto implica el abandono de la noción de lugares naturales y, por tanto, de la de movimientos naturales opuestos a los no naturales o violentos.

Así mismo, en el universo infinito de Bruno, Copérnico hace una distinción entre el movimiento natural de la Tierra y el movimiento violento de las cosas que están sobre la Tierra, Bruno los asimila. Todo lo que pasa en la Tierra, suponiendo que se mueva, nos explica, es una contrapartida exacta de lo que ocurre en un navío que se desliza por la superficie del mar; y el movimiento de la Tierra no tiene más influencia en el movimiento sobre la tierra que el movimiento del navío sobre las cosas que están sobre o en ese navío.

Las consecuencias deducidas por Aristóteles podrían producirse sólo si el origen, es decir, el lugar de partida del cuerpo que se mueve, fuera exterior a la Tierra y no ligado a ésta.

Bruno llega a sustituir la dinámica aristotélica por la dinámica del *ímpetus* de los nominalistas parisienses. Le parece que esta dinámica proporciona una base suficiente para elaborar una física adaptada a la astronomía de Copérnico, lo que, como nos ha demostrado la historia, era erróneo.

Es verdad que la concepción del ímpetus, virtud o potencia que anima los cuerpos en movimiento, que produce este movimiento y se desgasta por eso mismo, permitió a Bruno refutar los argumentos de Aristóteles, por lo menos algunos de ellos. Sin embargo, no podía descartarlos todos y, todavía menos, proporcionar los fundamentos capaces de sustentar el edificio de la ciencia moderna. Los argumentos de Giordano Bruno parecieron muy razonables, sin embargo, en su época, no produjeron ninguna impresión, ni en Tycho Brahe, ni en Johannes Kepler, que, aunque influido por Bruno, se cree obligado a volver a los argumentos de Copérnico, sustituyendo la concepción mítica por la de la fuerza de atracción.

Tycho Brahe por su parte no admite que la bala que cae desde lo alto del mástil de un navío en movimiento acabe al pie de ese mástil. Afirma que, muy al contrario, caerá atrás, y cuanto mayor sea la velocidad del navío, más lejos caerá. Igualmente, las balas de un cañón lanzadas verticalmente al aire no pueden volver al cañón.

Además, añade que si la Tierra se moviera como pretende Copérnico, no sería posible enviar una bala de cañón a la misma distancia, al este y al oeste: el movimiento extremadamente rápido de la Tierra, compartido por la bala, vendría a impedir el movimiento de ésta, e incluso lo haría imposible si la bala en cuestión debiera moverse en una dirección opuesta a la del movimiento de la Tierra.

Además, desde el punto de vista de la dinámica aristotélica, tanto como desde el punto de vista de la dinámica del ímpetus, dos movimientos diferentes se entorpecen siempre mutuamente; y Tycho Brahe no admite la independencia mutua de estos movimientos.

La posición tomada por Kepler es particularmente interesante e importante, nos muestra mejor que cualquier otra las raíces profundamente filosóficas de la revolución galileana. Desde el punto de vista puramente científico, Kepler fue sin duda uno de los más grandes, si no el más grande, genio de su tiempo; filosóficamente estuvo mucho más cerca de Aristóteles y de la Edad Media que de Galileo y Descartes. Razonó aún en términos de cosmos; para él el movimiento y el reposo se oponían todavía como la luz y las tinieblas, como el ser y la privación del ser. El término inercia significaba para él, por consiguiente, la resistencia que los cuerpos oponen al movimiento, y no, como para Newton, al paso del estado de movimiento al de reposo, y del de reposo al de movimiento; por eso, lo mismo que Aristóteles y los físicos de la Edad Media, necesitaban una causa o fuerza para explicar el movimiento, y no la necesitaban para explicar el reposo; creía que los cuerpos en movimiento, separados del móvil o privados de la influencia de la propiedad o potencia motriz, no continuarían su movimiento, sino que, al contrario, se detendrían. (Koyré, 2012)

Por ello, para explicar el hecho de que, sobre la Tierra que se mueve, los cuerpos, aunque no estén unidos a ella por lazos materiales, no se quedan atrás, por lo menos de un modo perceptible, y de que las piedras, lanzadas al aire, vuelven a caer al lugar de donde han sido tiradas, de que las balas vuelan tan lejos al oeste como al este, debe admitirse una fuerza real que una estos cuerpos a la Tierra y los obligue a seguirla.

Kepler descubre esta fuerza en la atracción mutua de todos los cuerpos materiales, o por lo menos terrestres, lo que quiere decir, desde el punto de vista práctico, en la atracción de todas las cosas terrestres por la Tierra. Kepler pensó que todas estas cosas están ligadas a la Tierra por innumerables cadenas elásticas y es la atracción de estas cadenas lo que explica que nubes y vapores, piedras y balas, no permanezcan inmóviles en el aire, sino que sigan a la Tierra en su movimiento; el hecho de que estas cadenas se encuentren por todas partes permitía, según Kepler, arrojar una piedra o disparar una bala en dirección opuesta a la del movimiento de la Tierra: las cadenas de atracción arrojan la bala hacia el este tanto como hacia el oeste, y de este modo su influencia se equilibra, o casi.

De este modo, las objeciones aristotélicas y tychonianas contra el movimiento de la Tierra son desechadas y Kepler subraya que era un error asimilar la Tierra a un navío en movimiento, ya que, realmente la Tierra atrae magnéticamente los cuerpos que transporta, el barco no lo hace en absoluto. Vemos con esto como el gran Kepler comienza a atribuirse como el fundador de la astronomía moderna, el mismo hombre que proclamó la unidad de la materia en el universo y afirmó que ubi materia, ibi geometria, fracasó en el establecimiento de la base de la ciencia física moderna por una sola y única razón: creía que el movimiento era ontológicamente de un nivel de ser más elevado que el reposo.

Es por esto, que no podemos pensar entonces, en movimiento en el sentido de esfuerzo e ímpetus; podemos sólo imaginarlo. No debemos, pues, elegir entre pensar e imaginar, pensar con Galileo o imaginar con el sentido común.

3.1.2. De las Revoluciones Científicas

Los inicios nos muestran como desde la absoluta inmutabilidad de la naturaleza aparecen concepciones de la mecánica celeste, del movimiento de los planetas y demás astros, que fueron estudio para muchos en ciencias y que de ahí se consolidaron durante todo el tiempo hasta el día de hoy. Es por esto, que quiero hacer alusión al desarrollo de la mecánica celeste como una de las Revoluciones Científicas que contribuyeron al progreso de la ciencia y a la transformación del mundo científico, enriqueciendo así futuros hechos y teorías del mundo.

Los episodios extraordinarios de desarrollo no acumulativos en que tienen lugar cambios de compromisos profesionales son denominados ***revoluciones científicas*** (complementos que rompen la tradición a la que está ligada la actividad de la ciencia normal).

Los ejemplos más evidentes de revoluciones científicas son episodios famosos del desarrollo científico, entre ellos, los relacionados con los hechos de Copérnico, Newton, Lavoisier y Einstein. Cada uno de estos necesitó del rechazo por parte de la comunidad y de una teoría científica antes reconocida, para adoptar otra incompatible con ella. Con esto, cada uno de ellos produjo un cambio consiguiente en los problemas disponibles para el análisis científico.

Además, cada uno de ellos transformó la imaginación científica en modos que, eventualmente, se debió describir como una transformación del mundo en que se llevaba a cabo el trabajo científico. Esos cambios, junto con las controversias que los acompañan casi siempre, son las características que definen las revoluciones científicas.

Así mismo, las Revoluciones Científicas surgen a partir de episodios de desarrollo no acumulativo en que un antiguo ***paradigma*** es reemplazado, completamente o en parte, por otro nuevo e incompatible. Es por ello, que los primeros paradigmas que datan de la prehistoria son quizás en matemáticas y astronomía, además, de la bioquímica, que surgieron por la división o la combinación de especialidades ya maduras.

Ahora bien, un paradigma obliga a los científicos a investigar alguna parte de la naturaleza de una manera tan detallada y profunda que sería inimaginable en otras condiciones. El éxito de un paradigma, ya sea el análisis del movimiento de Aristóteles, los cálculos hechos por Tolomeo de la posición planetaria, la aplicación hecha por Lavoisier de la balanza o la matematización del campo electromagnético por Maxwell, es al principio, en gran parte, una promesa de éxito discernible en ejemplos seleccionados y todavía incompletos.

Volviendo al concepto de Revolución Científica, pueden existir, entonces, tanto grandes como pequeñas, que algunas revoluciones afectan sólo a los miembros de una subespecialidad profesional y que, para esos grupos, incluso el descubrimiento de un fenómeno nuevo e inesperado puede ser revolucionario.

Refiriéndonos a nuestro caso, la ***Astronomía de Copérnico*** fue una de las revoluciones científicas más destacadas en la antigüedad: Cuando su predecesor, el sistema de Tolomeo, fue desarrollado durante los dos siglos anteriores a Cristo y los dos primeros de nuestra era, tuvo un éxito admirable en la predicción de los cambios de posición tanto de los planetas como de las estrellas.

Con respecto a las estrellas, la astronomía de Tolomeo es utilizada todavía en la actualidad, con bastante amplitud, como manual de aproximación de ingeniería; con respecto a los planetas, las predicciones de Tolomeo eran tan buenas como las de Copérnico. Pero para una teoría científica, el tener un éxito admirable no es lo mismo que tener un éxito completo.

Con respecto tanto a la posición planetaria como a la precisión de los equinoccios, las predicciones hechas con el sistema de Tolomeo nunca se conformaron por completo a las mejores observaciones disponibles. La posterior reducción de esas pequeñas discrepancias constituyó, para un gran número de los sucesores de Tolomeo, muchos de los principales problemas de la investigación astronómica normal, del mismo modo como un intento similar para hacer coincidir la observación del cielo con la teoría de Newton, proporcionó en el siglo XVIII problemas de investigación normal a los sucesores de Newton. Durante cierto tiempo, los astrónomos tenían todas las razones para suponer que esos intentos tendrían tanto éxito como los que habían conducido al sistema de Tolomeo.

Cuando se presentaba una discrepancia, los astrónomos siempre buscaban de alguna manera eliminarla mediante algún ajuste particular al sistema de Ptolomeo sobre los círculos compuestos. Pero conforme pasó el tiempo, un hombre que examinara el resultado neto del esfuerzo de investigación normal de muchos astrónomos podía observar que la complejidad de la astronomía estaba aumentando de manera mucho más rápida que su exactitud y que las discrepancias corregidas en un punto tenían probabilidades de presentarse en otro.

Debido a que la tradición astronómica fue interrumpida repetidamente desde el exterior y a que, en ausencia de la imprenta, la comunicación entre los astrónomos era limitada, esas dificultades sólo lentamente llegaron a ser reconocidas. Ya en el siglo XVI, Doménico da Novara, colaborador de Copérnico, sostuvo que ningún sistema tan complicado e inexacto como había llegado a ser el de Tolomeo, podía existir realmente en la naturaleza. Y el mismo Copérnico escribió en el Prefacio al *De Revolutionibus*, que la tradición astronómica que había heredado sólo había sido capaz de crear un monstruo.

A principios del siglo XVI, un número cada vez mayor de los mejores astrónomos europeos reconocían que el paradigma astronómico fallaba en sus aplicaciones a sus propios problemas tradicionales. Este reconocimiento fue el requisito previo para que

Copérnico rechazara el paradigma de Tolomeo y se diera a la búsqueda de otro nuevo.

Ahora bien,

La transición consiguiente a un nuevo paradigma es la revolución científica

Los chinos, cuyas creencias cosmológicas no excluían el cambio celeste, habían registrado en fecha muy anterior la aparición de muchas estrellas nuevas en el firmamento. Asimismo, incluso sin ayuda de telescopios, los chinos habían registrado sistemáticamente la aparición de manchas solares, siglos antes de que fueran observadas por Galileo y sus contemporáneos.

Tampoco fueron las manchas solares y una nueva estrella los únicos ejemplos de cambios celestes que surgieron en el firmamento de los astrónomos occidentales, inmediatamente después de Copérnico. Utilizando instrumentos tradicionales, algunos tan simples como un pedazo de hilo, los astrónomos de fines del siglo XVI descubrieron repetidamente que los cometas se desplazan libremente por el espacio reservado previamente a los planetas y a las estrellas fijas.

La facilidad y la rapidez misma con que los astrónomos vieron cosas nuevas al observar objetos antiguos con instrumentos arcaicos pueden hacernos pensar que, después de Copérnico, los astrónomos vivieron en un mundo totalmente diferente, pero que sin embargo, sus investigaciones dieron resultados efectivos.

3.1.3. De las Leyes de Kepler

Mientras Kepler escribía unos floridos pasajes, como de costumbre, trabajaba esforzadamente en el siguiente problema: *La Ley Exacta del Movimiento Planetario*. El sistema copernicano, suponía que las órbitas planetarias eran círculos, de acuerdo con la vieja tradición de la filosofía griega que consideraba el círculo como una curva perfecta y la esfera como un cuerpo perfecto.

Pero esta hipótesis no se adaptaba a las medidas minuciosas de los movimientos planetarios realizadas por un astrónomo danés, Tycho Brahe, en su observatorio particular, en una pequeña isla no lejos de Copenhague. Como discípulo y ayudante de Tycho y en posesión de considerables conocimientos matemáticos adquiridos por la lectura de Euclides y otras obras clásicas griegas, Kepler se impuso la tarea de encontrar cuál es la forma exacta de las órbitas planetarias y cuáles son las leyes que gobiernan sus movimientos.

Después de algunos años de trabajo llegó a su primer descubrimiento importante: encontró que en su movimiento alrededor del Sol los planetas no siguen exactamente órbitas circulares sino que describen otra clase de curvas tan famosas como el círculo en la geometría euclidiana. Estas curvas son conocidas con el nombre de secciones cónicas y pueden ser definidas como la intersección de un cono con planos orientados diversamente.

Si el plano es perpendicular al eje tendremos, naturalmente, un círculo en la sección transversal. Pero si el plano es inclinado respecto al eje del cono tendremos curvas alargadas conocidas como elipses. Cuando el plano es paralelo a un lado del cono, un extremo de la elipse desaparece en el infinito y tenemos una curva abierta conocida por el nombre de parábola. Con una inclinación aún mayor la curva resulta más "abierta" y se convierte en lo que se llama una hipérbola. Debemos decir que en el caso de la hipérbola tenemos de hecho dos ramas desconectadas, la segunda rama producida por la intersección del plano con la segunda parte invertida del cono. Una elipse puede ser definida también como una serie de puntos elegidos de tal modo que la suma de las distancias de cada uno de ellos a los dos puntos fijos llamados focos es siempre la misma.

Analizando los datos de Tycho Brahe relativos a las posiciones de los planetas entre las estrellas, Kepler llegó a la conclusión de que todas las cosas se ajustarían mejor si se supusiera que todos los planetas recorren órbitas elípticas teniendo al Sol situado en uno de sus focos. Descubrió también que en su movimiento alrededor del Sol los planetas se mueven más rápidamente cuando están cerca del Sol (en el afelio) y más lentamente cuando están más lejos (perihelio). La correlación entre las velocidades de un planeta y sus distancias al Sol en las diferentes partes de su órbita es tal que la línea imaginaria que une el Sol y el planeta recorre iguales superficies de la órbita planetaria en intervalos iguales de tiempo. Estas dos leyes fundamentales del movimiento planetario fueron anunciadas por Kepler en 1609 y ahora se conocen como la primera y segunda Ley de Kepler.

Después de hallar las leyes del movimiento de cada planeta, Kepler comenzó a buscar la correlación entre los diferentes planetas y en esta labor empleó nueve años. Ensayó de muchas formas, por ejemplo, con la correlación entre las órbitas planetarias y los poliedros regulares de la geometría del espacio, pero nada le pareció adecuado.

Finalmente, vino un brillante descubrimiento que hoy se conoce como la tercera ley de Kepler, que dice: *Los cuadrados de los períodos de revolución de los diferentes planetas en torno al Sol están en la misma razón que los cubos de sus distancias medias* *al Sol.*

Así pues, en el siglo XVII, los científicos supieron cómo los planetas se movían alrededor del Sol, pero pasó medio siglo antes de que pudieran responder a la cuestión de por qué lo hacían así.

3.1.4. Galileo Galilei - El Astrónomo

Además de ser uno de los primeros físicos experimentales y teóricos, Galileo Galilei también contribuyó poderosamente al progreso de la astronomía abriendo a la humanidad ilimitadas perspectivas del universo circundante. Su atención fue atraída primero por el cielo en el año 1604, cuando una brillante estrella nueva apareció de repente una noche entre las constelaciones inmutables conocidas desde hace milenios por los observadores de las estrellas.

Galileo, que entonces contaba con cuarenta años, demostró que la nueva estrella era realmente una estrella y no alguna clase de meteoro de la atmósfera terrestre y predijo que se desvanecería gradualmente. La aparición de una estrella nueva en el cielo, que se suponía absolutamente inmutable de acuerdo con la filosofía de Aristóteles y las enseñanzas de la Iglesia, le costaron a Galileo muchos enemigos entre sus colegas científicos y el alto clero. Solamente pocos años después de este primer paso en el estudio del cielo, Galileo revolucionó la astronomía con el primer anteojo astronómico, apuntando con este hacia el cielo, desplegándose así las maravillas del universo ante sus ojos.

Con este hecho Galileo afirma que:

> Los planetas presentan sus discos perfectamente redondos, lo mismo que si hubieran sido trazados por un compás y aparecen como otras tantas pequeñas lunas completamente iluminadas y de forma globular; pero las estrellas fijas no parecen a los ojos desnudos (esta es la primera vez que se usa esta expresión) como si estuvieran encerradas en una conferencia circular, sino más bien como llamaradas de luz que arrojan rayos hacia todos los lados y muy centelleantes, y con el telescopio parecen de la misma forma que cuando son contempladas a simple vista. (Gamow, 2007, p. 51)

Estos descubrimientos realizados mediante el uso del telescopio suministraron una prueba indiscutible de la exactitud del sistema copernicano del mundo, pero esto era más de lo que podía permitir la Santa Inquisición; Galileo fue detenido y sometido a un largo período de confinamiento solitario e interrogatorios, que no cambiaron su espíritu de lucha.

El 22 de junio de 1633, a la edad de 69 años, Galileo fue llevado ante los jueces del Santo Oficio de la Iglesia y una vez convicto de herejía, Galileo fue preso en su villa de Arcetri, cerca de Florencia, bajo lo que ahora llamamos detención domiciliaria y el 8 de enero de 1642, completamente ciego y cansado de la vida, Galileo murió.

3.2. Referente Histórico

3.2.1. Breve Recorrido por las Teorías Clásicas del Sistema Planetario

Los egipcios y los babilonios trataron de darle explicación al movimiento planetario, sin embargo sus especulaciones sólo trascendieron al nivel de mitos y leyendas.

Los griegos que consideraban al hombre como el centro del Universo, suponían que la tierra era el centro geométrico del Universo y que los cuerpos celestes se movían alrededor de la tierra. Los cuerpos celestes conocidos en aquel tiempo fueron ordenados de acuerdo con la distancia promedio a la Tierra.

Los filósofos de esa época suponían que los planetas, el Sol, la Luna y las estrellas, estaban incrustadas en esferas que giraban en torno a la Tierra. Pero la necesidad de ajustarlo del modo conveniente a los hechos, obligó a los griegos a usar a veces un gran número de esferas para explicar el movimiento de un único planeta, con lo cual el "Universo Griego" resultó muy complicado.

En el siglo II de la Era Cristiana, el astrónomo Claudio Ptolomeo de Alejandría, estructuró un modelo planetario que tendría gran aceptación y que prevalecería durante la Edad Media. Él suponía que todos los planetas se movían en círculos, cuyos centros giraban en torno a la tierra.

Esta teoría llegó a parecer lógica, puesto que con esto se explicaba el movimiento retrógrado de algunos planetas (o sea que vistos desde la tierra aparentemente retroceden en su órbita).

Con el fin de mejorar esta teoría se le introdujeron ciertas modificaciones, hasta que terminó por ser una teoría muy confusa. Sin embargo, las ideas de Ptolomeo guardaban gran concordancia con la Iglesia Católica, ya que como el hombre habitaba en la Tierra, pues, la Tierra tendría que ser el centro del Universo.

Esta descripción llegó a ser aceptada como correcta hasta que en el siglo XVI el astrónomo polaco Nicolás Copérnico, propuso describir el movimiento de todos los planetas en órbitas circulares; incluyendo la tierra con respecto al sol, el cual estaría en el centro, esta idea no era nueva, había sido propuesta por primera vez por el astrónomo

Aristarco alrededor del siglo III a.C. Sin embargo, un sistema en que el Sol se consideraba inmóvil y la Tierra pasaba a ser un planeta en movimiento, como cualquiera de los otros era totalmente contrario a la Filosofía de la Iglesia. Por esto Copérnico fue tachado de loco y hereje; sus ideas fueron consideradas falsas y opuestas a las Sagradas Escrituras.

A esta teoría heliocéntrica no se le llegó a prestar mucha atención hasta que Galileo, gran admirador secreto, vio su oportunidad de probar la teoría copernicana sobre el movimiento de la tierra cuando dirigió un pequeño telescopio hacia el cielo logrando descubrir las fases de Venus, lo que indicaba que este planeta giraba alrededor del Sol. Luego su teoría heliocéntrica motivó a que los astrónomos buscaran un modelo matemático para explicar los movimientos del Sol y de los planetas que podían observar desde la Tierra.

Pero Tycho Brahe con el fin de demostrar que la Teoría de Copérnico era falsa, realizó mediciones de las posiciones de los cuerpos celestes durante 20 años. Lo realizó con tanta precisión, que esas medidas fueron aprovechadas por su alumno, el alemán Johannes Kepler. Brahe estaba convencido que la Tierra permanecía estática en relación al Universo porque, si así no fuera, debería poder apreciarse los movimientos aparentes de las estrellas. Sin embargo, aunque tal efecto existe realmente y se denomina paralaje, la razón por la cual no lo comprobó es que no puede ser detectado con observaciones visuales directas. Las estrellas están mucho más lejos de lo que se pensaba razonable en la época de Tycho Brahe.

Kepler descubre finalmente que los planetas se mueven alrededor del Sol, en órbitas elípticas, teniendo al Sol no como centro, sino como uno de los puntos focales de la órbita. Hasta entonces se conocían tan sólo seis planetas y con ello Kepler intenta demostrar que los radios de estas esferas estaban relacionados con los cinco poliedros regulares de la Geometría.

Luego de interpretar los datos observados Kepler logra comprender que las órbitas correspondían más a trayectorias elípticas que a las trayectorias circulares, formulando así tres leyes empíricas que explicaban todos los fenómenos astronómicos conocidos hasta entonces.

El hecho de que Kepler estableciera en su primera ley: Los planetas describen órbitas elípticas en uno de cuyos focos está el Sol, hacía que las teorías establecidas anteriormente tomaran otro rumbo, es por ello que en la sección siguiente haremos una breve descripción de las secciones cónicas, su enseñanza y aplicación a través de la historia.

3.3. Referente Conceptual

3.3.1. Secciones Cónicas

A continuación se describe el desarrollo de una aproximación histórica, como parte fundamental en la construcción del marco teórico en concordancia con la concepción de la secuencia didáctica que se pretendió llevar a cabo. Para ello, la atención se va a enfocar en las **secciones cónicas** como lugar geométrico, así como para comprender su naturaleza, significados, y sentido que han tenido estas curvas a través de la historia.

En principio, los orígenes de las secciones cónicas no pronosticaron trascendencia alguna, ya que fueron estudiadas como una diversión pero con innumerables aplicaciones cotidianas.

Fue Apollonius de Perga, en el siglo III A.C. el primero que las introdujo públicamente, escribiendo el más importante tratado antiguo sobre las secciones cónicas, aunque ya en el siglo anterior Menaechmus había escrito el primer tratado sobre cónicas. Lo que no es tan conocido es que el motivo que originó esta creación no fue precisamente el de explicar las órbitas de los planetas ni construir aparatos de radar, sino el de buscar soluciones sólo con regla y compás de los tres famosos problemas griegos que hoy sabemos irresolubles, como son el de la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo.

Durante muchos siglos, las cónicas fueron descartadas en los trabajos de los matemáticos hasta que volvieron súbitamente a la vida, al comprobarse que el mundo que nos rodea está lleno de secciones cónicas. En la elipse encontró Kepler la respuesta al enigma del movimiento planetario, descubriendo que el planeta Marte (ahora sabemos que al igual que el resto de los planetas) tiene órbitas elípticas y el sol está situado en uno de sus focos (de ahí el nombre dado a estos puntos).

En base a este descubrimiento Newton enunció la famosa ley de la gravitación universal; así el descubrimiento de Kepler se deduce como consecuencia matemática de dicha ley. También los satélites y los cometas tienen órbitas elípticas, de mayor o menor excentricidad, lo cual es en cierto modo providencial, pues si se tratara de hipérbolas o parábolas, no volverían a repetir su ciclo. Así mismo, Galileo demostró que las trayectorias de los proyectiles son parabólicas.

Para cumplir con lo mencionado anteriormente, haremos referencia, entonces, a una breve evolución histórica del estudio de las *secciones cónicas* mediante los tres más famosos problemas de matemáticas de la historia en la Grecia helénica, cuya finalidad era: Cuadrar un círculo, Trisecar un ángulo y Duplicar un Cubo; pero tan sólo con regla y compás. Uno de los problemas afirmaba que las autoridades de Grecia para el año 433 a. C. consultaron al oráculo acerca de cómo contrarrestar una epidemia ocasionada por una peste hacia esa época. La respuesta se basaba en que se debía duplicar el altar cúbico dedicado a Apolo, a fin de obtener más ofrenda. Pese a los esfuerzos de los atenienses por llevar a cabo dicho pedido, la peste no cesó. La orden dada para cumplir con lo que el oráculo pidió fue duplicar la arista del cubo. Con asombro los trabajadores observaban que, lejos de duplicar el volumen del cubo, éste se hacía ocho veces más grande. Era, ni más ni menos, que un problema de duplicación del cubo.

Hipócrates (470 - 410 a. C.) realizó el primer progreso real en el problema de la duplicación del cubo cuando desarrolló la reducción que lleva su nombre. Ésta se basaba en la construcción de medias proporcionales entre dos segmentos de líneas dadas de longitud:

$$a \quad y \quad 2a$$

Más adelante, a Menecmo miembro de la Academia platónica, discípulo de Eudoxo y maestro de Aristóteles, se le atribuye la introducción de las secciones cónicas, esas curvas planas que posteriormente se les conoció como parábola, elipse e hipérbola. Gracias a ese aporte fueron conocidas como la *Tríada de Menecmo*. Él fue uno de los que se ocupó del problema clásico de la duplicación del cubo sobre el que ya había avanzado Hipócrates. Sus logros en la solución del problema lo llevaron hasta reducirlo a una expresión que en nuestros días podría escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{1}$$

Es decir, $x^2 = 2y$
$y^2 = x$, o lo que es lo mismo: $x^3 = 2y^3$. En otras palabras, el cubo de un lado x es de volumen doble que el de lado y.

En general, es el problema de las dos medias proporcionales entre a y $2a$ y que consiste en hallar x e y, tales que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$, tiene por solución la intersección de la curva $x^2 = ay$ con $xy = 2a^2$, de donde surge lo que ahora llamamos parábola o hipérbola equilátera.

Menecmo menciona a estas curvas como secciones de un cono circular recto, agudo u oblicuo, que son obtenidas por la intersección de un plano perpendicular a una generatriz del cono. Así mismo, Hipócrates da solución mediante la intersección de dos parábolas. Con la notación actual y el uso de la Geometría Analítica, la solución de Hipócrates sería la siguiente:

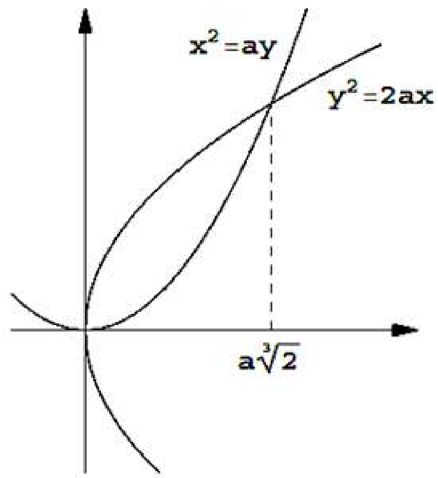


Figura 3.1: Intersección de las parábolas $x^2 = ay$ e $y^2 = 2ax$

Sean las parábolas de ecuaciones $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$. Luego, se comprueba que la abscisa del punto de intersección de ambas es $x = a\sqrt[3]{2}$, igual a la arista del cubo doble.

3.3.2. Definición Clásica

Distintos puntos de vista pueden considerarse para proporcionar una definición de las cónicas, desde el clásico donde una cónica es la sección obtenida al cortar un cono por un plano, hasta la analítica donde una cónica es el lugar geométrico de los puntos que verifican una determinada relación de distancias. Ya estas definiciones permiten adelantar algunas propiedades que serán de utilidad en las aplicaciones.

Históricamente, las cónicas deben su nombre a su obtención mediante diferentes secciones de un cono circular recto. En este caso tenemos dos opciones:

Secciones Perpendiculares a una generatriz, para diferentes conos

Si denotamos por α al ángulo formado por dos generatrices diametralmente opuestas, tenemos los siguientes casos:

- Si α es agudo, entonces, tendremos una ELIPSE.
- Si α es recto, entonces, tendremos una PARÁBOLA.
- Si α es obtuso, entonces, tendremos una HIPÉRBOLA.

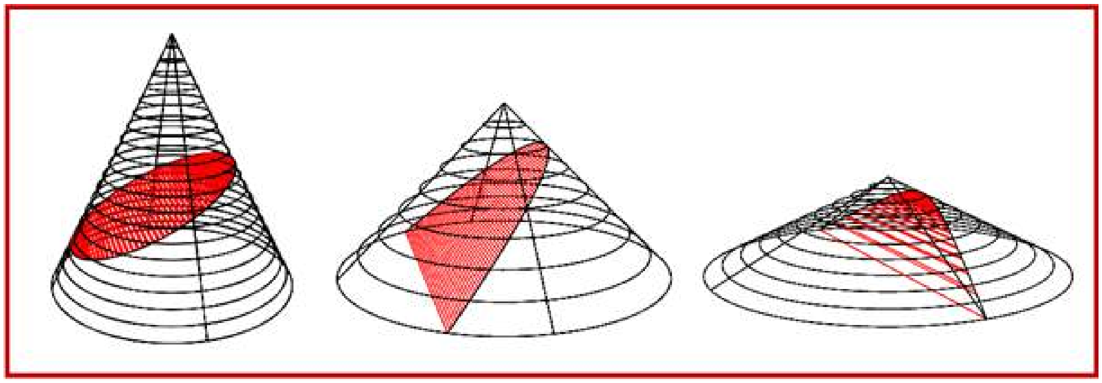


Figura 3.2: Elipse, Parábola e Hipérbola

DISTINTAS SECCIONES DE UN MISMO CONO

Si un plano atraviesa un cono paralelamente a su base, la sección es un círculo. Inclinando ligeramente el plano con respecto a la base, la sección resulta ser una elipse. Cuanto más inclinado esté el plano, más alargada resulta la elipse (tiene mayor excentricidad). Se podría esperar que al aumentar la inclinación del plano, al ser más ancho el cono, la sección tendría forma de pera; sin embargo, siempre es una elipse perfecta hasta que el plano es paralelo a una generatriz del cono. Desde este momento, la curva ya no será cerrada, y en este caso se trata de una parábola. Al inclinar más el plano, se obtiene una de las ramas de una hipérbola (la otra sale al colocar otro cono opuesto por el vértice al anterior). Finalmente, si el plano pasa por el vértice del cono, la sección degenera en una o dos rectas.

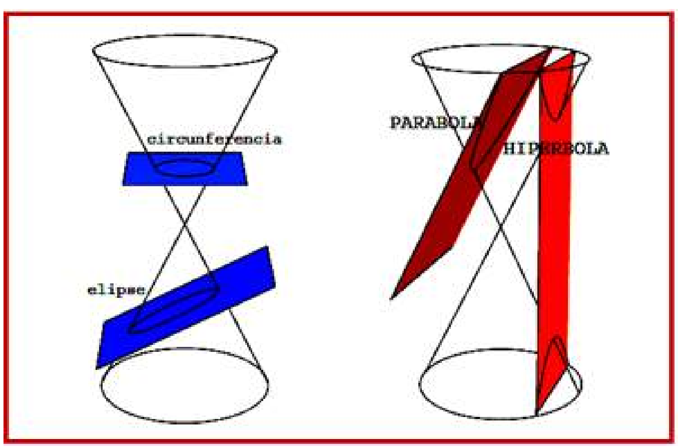


Figura 3.3: Secciones en un Cono

3.3.3. Definición Analítica

Para esto distinguiremos dos definiciones analíticas, una de ellas común para las tres cónicas y la otra dependiendo a la sección que se trate.

1. **Según la excentricidad:** Lugar geométrico de los puntos P cuya distancia OP a un punto fijo, llamado foco, es e veces su distancia PK a una recta fija, llamada directriz, donde e es una constante positiva, llamada excentricidad (definición dada por Pappus de Alejandría o Euclides).

$$\acute{C}ONICA = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P,O) = e \cdot d(P,K)\}, \qquad e \geq 0$$

Entonces,

- Si $e < 1$, será una Elipse.
- Si $e = 0$, será una Circunferencia.
- Si $e = 1$, será una Parábola.
- Si $e > 1$, será una Hipérbola.

<u>ECUACIONES</u>

- COORDENADAS CARTESIANAS:

$$x^2 + y^2 = (OL - e \cdot x)^2$$

Cuando $e = 0$, F_1 se acerca F_2 y la cónica será una Circunferencia, es decir:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad con \quad r = a$$

- COORDENADAS POLARES:

$$r = OP = e \cdot PK = e \cdot (LH - r \cdot \cos v) = OL - e \cdot r \cdot \cos v$$

$$r = \frac{ed}{e \cdot \cos v + 1}$$

Como la ecuación no se altera al sustituir v por $-v$, la cónica es simétrica respecto a OX.

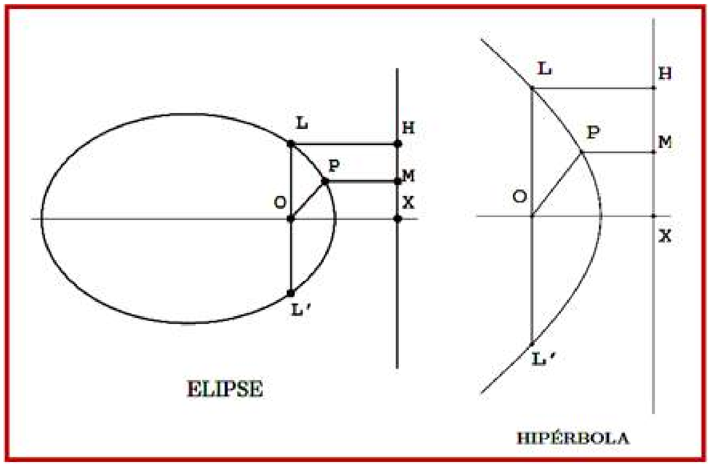


Figura 3.4: Cónicas según su Excentricidad

En efecto, veamos para el caso $r = \frac{ed}{e \cdot \cos\theta + 1}$ con $d > 0$

En la siguiente figura, consideremos una directriz vertical que se encuentra d unidades a la derecha del foco $F = (0, 0)$.

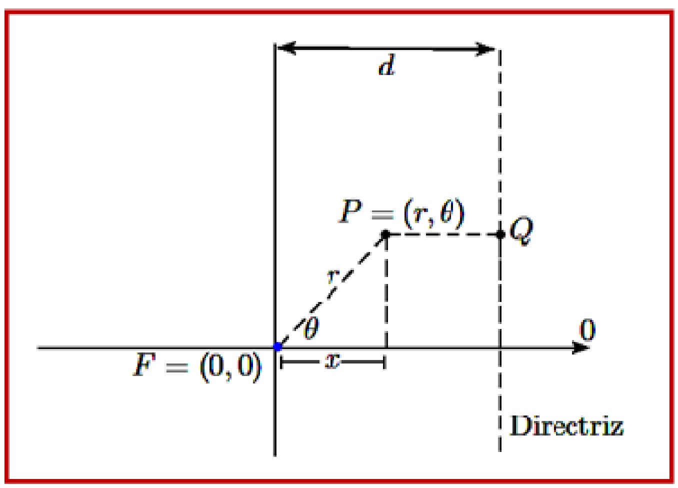


Figura 3.5: Cónica con Directriz vertical a d unidades del Foco

Si $P = (r, \theta)$ es un punto de la gráfica de $r = \frac{ed}{e \cdot \cos\theta + 1}$, la distancia entre P y la directriz es:

$$\overline{PQ} = |d - x| = |d - r\cos\theta| = \left| \frac{r(1 + e\cos\theta)}{e} - r\cos\theta \right| = \left| \frac{r}{e} \right|$$

Como la distancia entre P y el origen es $\overline{PF} = |r|$, el cociente de $\overline{PF}$ entre $\overline{PQ}$ es:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PQ}} = \frac{|r|}{|r/e|} = |e|$$

Por lo tanto, la gráfica de la ecuación es una cónica. De ahí que, si $0 < e < 1$, la cónica es una elipse.

2. **Según los Focos:**

   - *Una* ***elipse*** *es el conjunto de puntos cuya suma de distancias a otros dos puntos fijos, llamados focos es constante:*

     $$ELIPSE = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P,F) + d(P,F') = 2a\}$$

     Con ecuación Implícita de la siguiente forma:

     $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

     Y Ecuaciones Paramétricas:

     $$x = a \cdot \cos\theta \quad ; \quad y = b \cdot \operatorname{sen}\theta \quad ; con:\ 0 \leq \theta < 2\pi$$

   - *Una* ***hipérbola*** *es el conjunto de puntos cuya diferencia de distancias a otros dos puntos fijos es constante:*

     $$HIPÉRBOLA = \{P \in \mathbb{R}^2 : |d(P,F) - d(P,F')| = 2a\}$$

     Con ecuación Implícita de la siguiente forma:

     $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

     Y Ecuaciones Paramétricas:

     $$x = a \cdot ch\,\theta \quad ; \quad y = b \cdot sh\,\theta \quad ; con:\ -\infty < \theta < \infty$$

   - *Una* ***parábola*** *es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y una recta fija llamada directriz:*

     $$PARÁBOLA = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P,F) = d(P, directriz)\}$$

     Con ecuación Implícita de la siguiente forma: $y^2 = 2px$

     Y Ecuaciones Paramétricas:

     $$x = 2p\theta \quad ; \quad y = 2p\theta \quad ; \quad con: -\infty < \theta < \infty$$

CAPÍTULO 4

METODOLOGÍA

El presente trabajo se desarrolló inicialmente en la Institución Educativa Ismael Perdomo Borrero del Municipio de Gigante y posteriormente fue aplicada en la I. E. María Auxiliadora (zona Rural del Municipio de Elías) con 14 estudiantes de grado Noveno (9°), cuyas edades están comprendidas entre los 14 y 16 años; y con un nivel socioeconómico de estratos 1 y 2.

Esta propuesta se implementó con una metodología cuantitativa centrada en los aspectos observables dispuestos a ser cuantificados utilizándose la estadística para el análisis de los datos y bajo el Enfoque Histórico Cultural de la Enseñanza.

4.1. Enfoque Histórico Cultural de la Enseñanza

Desde el siglo XX, el Enfoque Histórico Cultural se fundamentó en el Marxismo Leninismo, en la Dialéctica Marxista y en la Teoría del Conocimiento. Es un método de pensamiento científico, que permite analizar fenómenos de la naturaleza y la sociedad, fundamentados en la Gnoseología Marxista.

En algún momento Kursanov definió este Enfoque como la doctrina que trata las regularidades fundamentales del proceso cognoscitivo, de los métodos, medios y procedimientos generales de que se vale el hombre para conocer el mundo que nos rodea.

En este enfoque Histórico Cultural el proceso de apropiación de la cultura humana transcurre a través, de la relación entre el hombre con la realidad objetiva y la interacción con otras personas. Una de sus principales características radica en cambiar la tradicional concepción de enseñanza, la autoridad y distancia existente entre profesor y estudiante. Señala como función del profesor la orientación y guía del estudiante, con el fin de potenciar habilidades.

Es un enfoque que destaca el desarrollo de la personalidad, en el que el sujeto se concibe como un ser social y su desarrollo está mediado con otros.

El sujeto (ser social) se constituye a partir de experiencias sociales en las que negocia significados con la cultura que lo rodea. Para Vygotsky (1968), principal ponente de este enfoque, los procesos psicológicos deben estudiarse durante el desarrollo del sujeto, para él, el aprendizaje sociocultural a partir de signos y símbolos, como el lenguaje, es el mediador que explica la relación dialéctica entre los procesos individuales y sociales. Además, destaca que los procesos mentales no se dan en forma automática, pues no son estéticos ni universales; cambian con el modo de producción y la estructura dentro de la cual se socializan las personas.

Este enfoque sitúa al sujeto activo en su interacción con otros sujetos, con sus creencias y con el objeto, elementos que permiten notificaciones psíquicas y físicas en el sujeto. Para Vygotsky (1991) aquello que el sujeto logra hacer con ayuda de otros puede ser un indicativo más sobre su desarrollo mental que lo que logra individualmente.

Vygotsky (1985) plantea además, que el desarrollo de la cultura humana transcurre, a través de la actividad, como proceso que mediatiza la relación entre el hombre y su realidad objetiva y por medio de ella, el hombre modifica la realidad, se forma y se transforma a sí mismo.

Ahora bien, en la concepción de una enseñanza desarrolladora a partir del enfoque Histórico Cultural se puede comprender el papel de cada sujeto que participa en un aula de clase. En esta enseñanza desarrolladora es imprescindible considerar: las capacidades reales del estudiante y las de desarrollarse con la ayuda de los demás, la diferencia entre estos dos niveles fue lo que Vygotsky denominó “Zona de Desarrollo Próximo (ZDP)”.

4.2. Zona de Desarrollo Próximo (ZDP)

En la actualidad, los profesores nos enfrentamos a las exigencias orientadas socialmente por nuestra profesión y a la posibilidad de dar respuesta a las exigencias a partir de nuestras condiciones individuales y sociales donde se desarrolla nuestra práctica, es por esto, que el concepto de Zona de Desarrollo Próximo lo considero supremamente importante en el marco de los aportes al análisis de prácticas educativas y al diseño de estrategias de enseñanza.

En el concepto de Zona de Desarrollo Próximo se pueden considerar dos niveles en la capacidad del estudiante, por un lado, el límite de lo que él solo puede hacer, denominado ***nivel de desarrollo real***, por otro lado, el límite de lo que puede hacer con ayuda, considerado el ***nivel de desarrollo potencial***.

Según Vygotsky (1987, pág. 86), definió Zona de Desarrollo Próximo como la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver un problema por sí solo y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través, de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otros pares más capacitados.

En cada estudiante y para cada contenido en clase existe una zona que está próxima a desarrollarse y otra que en ese momento está fuera de su alcance. Allí el profesor parte de los conocimientos del estudiante y basándose en esto presta la ayuda necesaria para realizar la actividad. Cuando se crea la ZDP con la ayuda del profesor o de un compañero se construye conocimiento, se establecen nuevos niveles de desarrollo real y potencial, que delimitan una nueva Zona de Desarrollo Próximo.

Con la ayuda del profesor, en la ZDP el estudiante logra aprendizajes que antes eran potenciales, consiguiendo así un nuevo nivel de desarrollo potencial que posibilita una nueva ZDP.

En resumen, según Guerrero (2013) la Zona de Desarrollo Próximo cumple con:

- La ZDP da cuenta de la diferencia o distancia entre el nivel real de desarrollo y uno potencial viable.
- El salto cualitativo esta entendido como diferencia de niveles, desde una acción terminal y personal (real) a otra posible y participativa (potencial).
- Esta distancia entre lo real y lo potencial está concebida en compañía de otros que puede ser un guía.

Es decir, que la ZDP implica una actividad social necesaria y una distancia que recorre entre un nivel real y otro potencial.

En la ZDP los estudiantes no son entes pasivos, sino interlocutores que ayudan, esclarecen, planifican y estimulan, es decir, buscan entenderse entre sí.

Es por ello, que crear una ZDP como actividad cooperativa es establecer puentes de comprensión y coordinación mutua entre estudiantes. Así mismo, la ZDP es primordial en los primeros años del individuo, pero no se agota con la infancia; siempre hay opciones de crear condiciones para ayudar a nuestros estudiantes en su aprendizaje y desarrollo, de allí se nos permite reflexionar entonces sobre el papel del profesorado y de los estudiantes en el aula de clase.

Ahora bien, como se enuncia desde el principio, el presente trabajo busca diseñar una propuesta (Secuencia Didáctica) para la Enseñanza de las Secciones Cónicas a través de resultados relevantes de la Mecánica Celeste (Aplicaciones), de manera que motive a los estudiantes al aprendizaje de la geometría analítica, planteando nuevos elementos significativos en el aula.

Es por ello, que la Secuencia Didáctica diseñada tiene sus cimientos en la formación por Etapas de las Acciones Mentales instrumentada pedagógicamente por el Ph.D. P. YA. Galperín.

4.3. Etapas Mentales de Galperín

Según Garzón (2007), la enseñanza representa una concepción dialéctica, que genera un proceso de desarrollo en el marco de su diseño, es decir, en el sistema de procesos desarrollados consecutivamente, que dirigen el cumplimiento de las acciones y operaciones exigidas en el contexto de la práctica, ya que, la actividad del estudiante, dirigida a la formación de conceptos y la aplicabilidad de estos, requiere de una estructuración de su actividad mental.

Además, Piotr Yákovlevich Galperín (1987), delimitó un conjunto de características que funcionan como esenciales para orientar la acción. La actividad mental es una forma concreta de actividad humana orientada al objeto; la estructura y el contenido de la actividad mental deben ser estudiadas en el proceso de internacionalización. Al final el producto será la actividad mental orientadora (real objeto de estudio de Psicología).

Galperín (1987) organiza la actividad cognoscitiva del estudiante mediante una estructuración de las actividades que realiza así:

1. Se plantean actividades iniciales hacia las metas del proceso y hacia una situación concreta de enseñanza aprendizaje.
2. Se genera la orientación del sujeto mediante un sistema de dibujos, diagramas y signos externos guiados, con el fin de que se desempeñe la acción.
3. El aprendiz, orientado por las representaciones materializadas, comienza a resolver tareas.

4. El aprendiz comparte verbalmente una reflexión sobre su acción, con el fin de tomar conciencia de sus acciones en la solución de problemas.

5. Se forma reflexión verbal interna sobre la acción, con el fin de interiorizarla.

6. Se interioriza la acción pasando al plano mental y se "automatiza", de tal manera que se convierte en parte de la vida del sujeto.

Realmente esta formación planeada por etapas es un método de investigación psicológica que permite además estudiar la atención, el pensamiento puro y el desarrollo cognitivo de nuestros estudiantes. Otros investigadores lo han definido como una técnica pedagógica.

A manera de conclusión, en la actividad del proceso de enseñanza - aprendizaje, las acciones mentales transitan por etapas para formar los conceptos, dichas etapas según Galperín (1959) son:

1. **Etapa Motivacional:** Allí se obtienen aptitudes, se propicia el interés ocupacional y disposición para lo que se va a conocer. Además, se prepara al estudiante para asimilar los conocimientos y las tareas crearán disposición favorable hacia el objeto.

2. **Etapa de la Base Orientadora de la Acción (BOA):** Es el conocimiento de la acción, allí se da al estudiante el sistema necesario de conocimientos sobre el objeto de estudio, las condiciones, los modelos y el orden en que deben ser ejecutadas. Se muestra al estudiante el material que tiene que asimilar y los métodos a emplear serán explicativos, problémico y de elaboración conjunta.

3. **Etapa Material o Materializada:** Se inicia la ejecución de la acción en el plano material, donde el estudiante realiza la acción y el profesor tiene la posibilidad de controlar la ejecución así como de incidir en su formación. El estudiante resuelve problemas apoyándose en esquemas externos y a su vez opera con objetos reales.

4. **Etapa Verbal:** Allí el estudiante domina el esquema de la acción y ha adquirido los conocimientos necesarios. Los métodos serán grupales, por pareja, de discusión y la solución creativa de problemas. El estudiante expresa todo de manera verbal.

5. **Etapa Mental:** Allí las tareas son sin niveles de ayuda, sin formas de materialización y con carácter creador. El método es a través del trabajo independiente con resultados, en clases y extraclases. Allí el estudiante ya ha interiorizado los contenidos, los ha asimilado, y es capaz de transmitirlos correctamente con sus posibles aplicaciones.

CAPÍTULO 5

SECUENCIA DIDÁCTICA

Se determina llevar a cabo el presente Trabajo de Grado bajo la aplicación de una Secuencia Didáctica entendida como la integración entre la teoría y la práctica en el proceso de intervención didáctica, como en su momento la definió Rincón G. (2004): una Secuencia Didáctica es una estructura de acciones e interacciones intencionales y relacionadas entre sí, organizadas para alcanzar algún tipo de aprendizaje.

Buscando además, la construcción, deconstrucción y reconstrucción del proceso de enseñanza - aprendizaje, de acuerdo con la realidad que se vive en el aula escolar. Es así, como se elaborada esta Secuencia Didáctica a partir del desarrollo de la Teoría de formación por Etapas de las Acciones Mentales de Galperín y se asiste además, por un aprendizaje bajo la guía del profesor posicionando al estudiante como generador de su conocimiento.

Esta Secuencia Didáctica es un ejercicio y un posible modelo que se propone al docente interesado en explorar nuevas formas de enseñar. Tiene el propósito de ayudar al docente en la planeación y ejecución de varias sesiones de clase y están fundamentadas desde la perspectiva del aprendizaje basado en la resolución de problemas y la indagación.

Los ejercicios - problemas allí propuestos brindan a los estudiantes la oportunidad de explorar el uso de procedimientos y la necesidad de perfeccionarlos para mejorar la comprensión de conceptos matemáticos.

Como elemento transversal, en esta secuencia didáctica se utilizan las competencias comunicativas necesarias para la construcción de competencias matemáticas, buscando fomentar el diálogo en el aula, la estimulación y la validación de conocimientos.

Así mismo, se da la oportunidad al estudiante de expresarse por sí mismo, de escribir sus propias conclusiones de manera libre aumentándoles su autonomía como aprendices.

Cada una de las guías de las cuales está compuesta la Secuencia Didáctica, contextualiza a los estudiantes y les permite explorar e incorporar las herramientas que considera necesarias semana a semana, convirtiéndose en una herramienta pedagógica que acerca el saber disciplinar al aula de clase en contextos reales, viables y pertinentes.

Esta Secuencia Didáctica se realizó a través de una serie de guías encadenadas que permitieron abordar las secciones cónicas aplicadas a la Mecánica Celeste, llevando siempre un hilo conductor del tema con el fin de que el estudiante de grado noveno desarrollara su aprendizaje de forma articulada y coherente con la realidad.

El objetivo primordial fue guiar el proceso de enseñanza - aprendizaje de las secciones cónicas de manera progresiva y acorde a los conocimientos de los estudiantes. Para ello, la Secuencia Didáctica constó de:

1. **ACTIVIDAD DE APERTURA:** Pre - Test, donde se identificaron conocimientos, preconceptos y saberes previos.
2. **ACTIVIDAD DE DESARROLLO:** Compuesta por seis guías de la siguiente manera:
   - GUÍA NÚMERO 1: Videos de Motivación
   - GUÍA NÚMERO 2: Conceptos Básicos
   - GUÍA NÚMERO 3: Trayectorias Circulares en la Mecánica Celeste
   - GUÍA NÚMERO 4: Trayectorias Elípticas en la Mecánica Celeste
   - GUÍA NÚMERO 5: Trayectorias Parabólicas en la Mecánica Celeste
   - GUÍA NÚMERO 6: La Mecánica Celeste en la Actualidad
3. **ACTIVIDAD DE CIERRE:** Pos - Test, donde se evidencian conceptos aprendidos y conocimientos aplicados.

Como lo mencioné anteriormente, cada una de estas Guías se llevaron a cabo bajo un instrumento pedagógico enfocado a partir de la Teoría de Formación por Etapas de las Acciones Mentales de Galperín, establecidas de la siguiente manera:

Para Galperín (1959) en la actividad del proceso de enseñanza - aprendizaje, las acciones mentales transitan por etapas para formar los conceptos.

Dichas etapas se estructuraron en cada una de las guías diseñadas, así:

1. **ETAPA MOTIVACIONAL:** Aquí el estudiante no entra en ningún tipo de acción, se prepara más bien para que asimile los conocimientos a través de un breve recorrido histórico de la Mecánica Celeste.

2. **ETAPA MATERIALIZADA:** El estudiante realiza la acción a través de pequeñas construcciones geométricas con diferentes materiales y allí el profesor tiene la posibilidad de controlar su ejecución.

3. **ETAPA DE LA BASE ORIENTADORA DE LA ACCIÓN (BOA):** Allí se da al estudiante todo el sistema necesario de conocimientos sobre las Secciones Cónicas a través de exposiciones, mini conferencias y orientaciones básicas.

4. **ETAPA VERBAL:** Es donde los elementos de la acción deben estar representados en forma verbal para el estudiante, allí se plantean las diferentes aplicaciones de las Secciones Cónicas a la Mecánica Celeste de manera verbal.

5. **ETAPA MENTAL:** El método de trabajo es de forma independiente, aplicando una serie de ejercicios del tema en cuestión y sus diferentes aplicaciones, buscando convertir su lenguaje en un proceso verbal nuevo.

El Trabajo se elaboró durante el Primer Semestre del año, etapa en la que se indagó y además se estructuró, para luego, hacia inicios del Segundo Semestre lograr su implementación.

Las Variables a tratar fueron basadas principalmente en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) para el grado décimo (10°), de las cuales se aplican para el presente trabajo las siguientes:

- Características de las Figuras Cónicas.
- Propiedades Geométricas de Figuras Cónicas.
- Representación gráfica y algebraica de Figuras Cónicas.
- Modelación de Fenómenos Periódicos del Mundo Real.

Así mismo, a medida que se desarrolló el proyecto y se aplicaban las guías de trabajo se describían cada una de las experiencias de los estudiantes y cómo fueron los avances que lograron en el tiempo que se ejecutó el mismo.

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los resultados del presente trabajo se obtuvieron de la aplicación de un Pre - Test y un Pos - Test, pruebas que contenían 20 preguntas cada una y en las cuales se pretendió evaluar el grado de comprensión de las secciones cónicas partiendo de las siguientes variables:

- Modelación de fenómenos periódicos del Mundo real.
- Representación gráfica y algebraica de figuras cónicas.
- Características de las figuras cónicas.

A continuación se presentan los resultados de modo general teniendo en cuenta porcentajes según la cantidad de estudiantes evaluados.

6.1. Resultados del Pre - Test

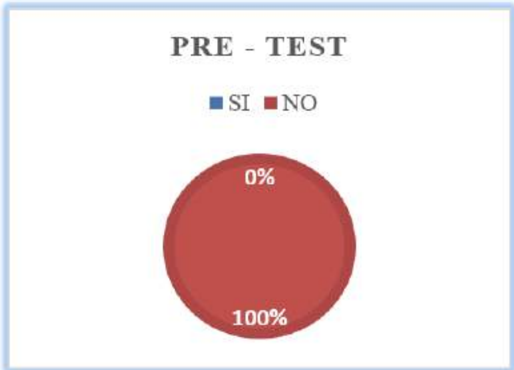
PREGUNTAS	RESPUESTAS	
1. ¿Conoces sobre el tema de la Mecánica Celeste?	**SI**	**NO**
	0	14
2. ¿Crees que el movimiento de los planetas tiene alguna relación con la Matemática?	**SI**	**NO**
	13	1
3. ¿Has escuchado hablar de las Secciones Cónicas?	**SI**	**NO**
	1	13

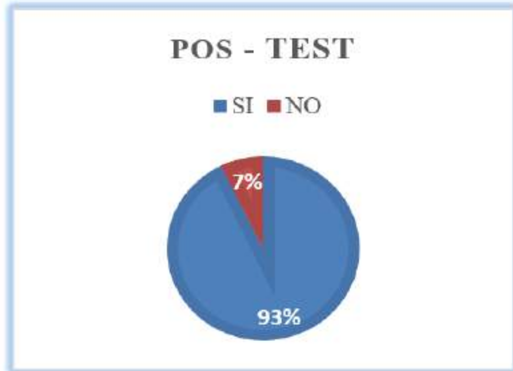
<table>
<tr><td rowspan="2">4. ¿Conoces algunas Cónicas?</td><td colspan="2">SI</td><td>NO</td></tr>
<tr><td colspan="2">0</td><td>14</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5. ¿Has oído hablar de la Elipse?</td><td colspan="2">SI</td><td>NO</td></tr>
<tr><td colspan="2">7</td><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="2">6. ¿Has oído hablar de la Hipérbola?</td><td colspan="2">SI</td><td>NO</td></tr>
<tr><td colspan="2">7</td><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="2">7. ¿Qué relación crees que tienen estos conceptos con los Astros?</td><td colspan="3">No Sabe</td></tr>
<tr><td colspan="3">14</td></tr>
<tr><td rowspan="2">8. ¿Cómo crees que se mueven los Planetas en el Sistema Solar?</td><td>Circular</td><td>Ovalado</td><td>No Sabe</td></tr>
<tr><td>12</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">9. ¿Puedes encontrar la ecuación de la trayectoria de algún cuerpo celeste?</td><td colspan="2">SI</td><td>NO</td></tr>
<tr><td colspan="2">0</td><td>14</td></tr>
<tr><td rowspan="2">10. ¿Puedes graficar la trayectoria que siguen los cuerpos celestes conociendo algunos datos de ellos?</td><td colspan="2">SI</td><td>NO</td></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td>13</td></tr>
<tr><td rowspan="2">11. ¿Podrías contestar qué pasa con el Sol en diferentes ciudades del Mundo?</td><td colspan="2">En Algunos lugares sale más temprano</td><td>No Sabe</td></tr>
<tr><td colspan="2">13</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">12. ¿Sabes qué es la Rotación de la Tierra?</td><td colspan="2">SI</td><td>NO</td></tr>
<tr><td colspan="2">7</td><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="2">13. ¿Sabes quién gira alrededor de quién en nuestro sistema solar?</td><td colspan="2">Los Planetas alrededor del Sol</td><td>El Sol alrededor de los Planetas</td></tr>
<tr><td colspan="2">9</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">14. ¿Sabes cuánto tiempo tarda en dar una vuelta completa la Tierra?</td><td colspan="2">SI</td><td>NO</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td>12</td></tr>
<tr><td rowspan="2">15. ¿Sabes cuánto tiempo tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol?</td><td colspan="2">SI</td><td>NO</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td>12</td></tr>
<tr><td rowspan="2">16. ¿Cuáles crees que son las órbitas que siguen los planetas, cometas, asteroides, satélites y estrellas en el Sistema Solar y en toda la galaxia?</td><td colspan="2">Circular</td><td>No Sabe</td></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td>13</td></tr>
<tr><td rowspan="2">17. ¿Qué has escuchado hablar de los Cometas en el Sistema Solar?</td><td>Cuerpos Celestes</td><td>Asteroide</td><td>No Sabe</td></tr>
<tr><td>1</td><td>12</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">18. ¿Has escuchado hablar sobre los satélites y asteroides?</td><td colspan="2">SI</td><td>NO</td></tr>
<tr><td colspan="2">13</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">19. ¿Sabes qué contribuciones han realizado a la humanidad científicos como Nicolás Copérnico, Johannes Kepler, Galileo Galilei, entre otros?</td><td colspan="2">SI</td><td>NO</td></tr>
<tr><td colspan="2">4</td><td>10</td></tr>
<tr><td rowspan="2">20. ¿De qué planetas, satélites, cometas, asteroides y estrellas has escuchado hablar?</td><td colspan="3">Respuestas: Sólo Planetas</td></tr>
<tr><td colspan="3">14</td></tr>
</table>

Figura 6.1: Tabla de Resultados del Pre - Test

6.2. Análisis Comparativo entre el Pre - Test y el Pos - Test

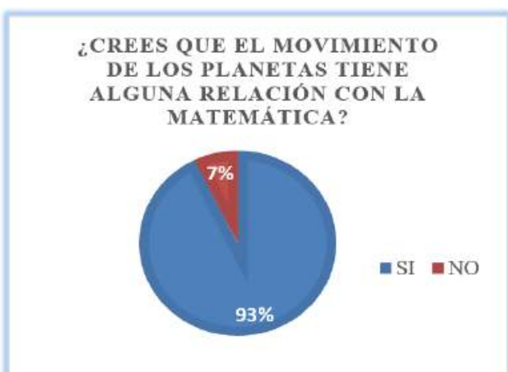
<u>Pregunta 1</u>: *¿CONOCES SOBRE EL TEMA DE LA MECÁNICA CELESTE?*





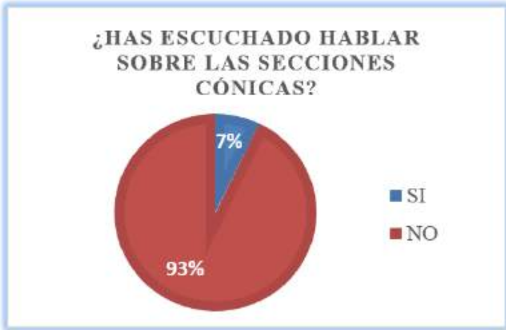
Para iniciar, podemos apreciar que cuando se aplicó el Pre - Test los estudiantes no tenían ningún conocimiento acerca del tema de la Mecánica Celeste, el 100 % de ellos dieron como respuesta NO a esta pregunta, mientras que al final de la aplicación del presente trabajo se pudo constatar que ya el 93 % (es decir, 13 estudiantes) conocen sobre lo que es la Mecánica Celeste y además se incentivan a estudiar el tema por su relación con el espacio.

<u>Pregunta 2</u>: *¿QUÉ RELACIÓN CREES QUE TIENE EL MOVIMIENTO DE LOS ASTROS CON LA MATEMÁTICA?*

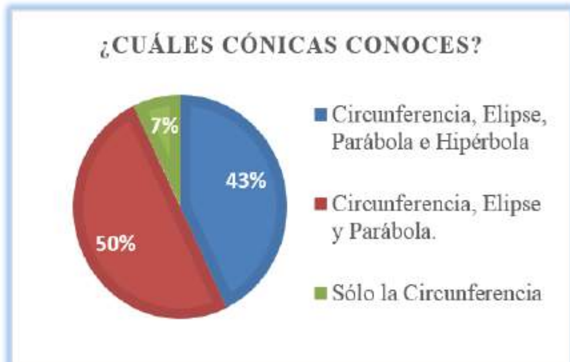


De acuerdo con las gráficas, podemos afirmar que inicialmente el 93 % de los estudiantes si creían que el movimiento de los Planetas tenían alguna relación con la matemática, pero es hasta el final de la aplicación del presente trabajo que justifican su respuesta, aseverando un 86 % que sus órbitas se representan mediante ecuaciones matemáticas y un 14 % que sus órbitas se relacionan con temas geométricos de la matemática.

<u>PREGUNTA 3</u>: *¿QUÉ HAS ESCUCHADO DE LAS SECCIONES CÓNICAS?*



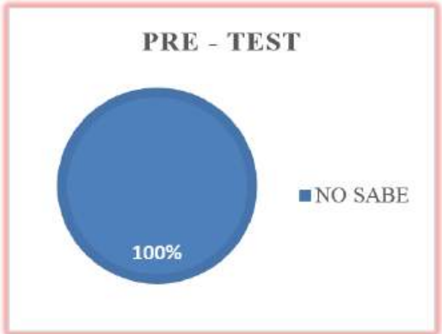
<u>PREGUNTA 4</u>: *¿CONOCES ALGUNAS CÓNICAS?*

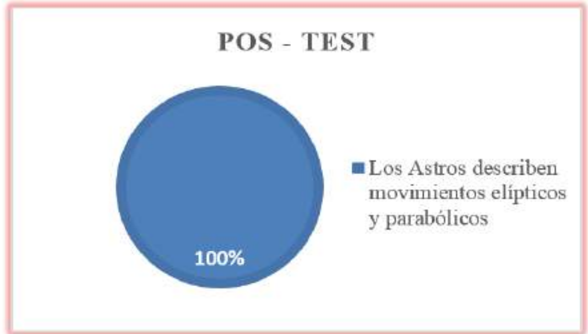


Comparando los resultados de éstas preguntas en los dos momentos, podemos notar un marcado aumento en el conocimiento acerca de las secciones cónicas, ya que, inicialmente el 7 % de los estudiantes, es decir, tan sólo 1 estudiante, había escuchado hablar sobre las secciones cónicas, afirmando que tenían relación con la Parábola, la Elipse y la Circunferencia. Ya al finalizar la aplicación del trabajo, el 100 % de los estudiantes saben qué son las cónicas y además, las clasifican en Circunferencia, Elipse, Parábola e Hipérbola.

Así mismo, de los 14 estudiantes con los cuales se realizó la aplicación de la Secuencia Didáctica, el 43 % de ellos reconocen sin dificultad las cuatro secciones cónicas (Circunferencia, Elipse, Parábola e Hipérbola), el 50 % tres de las secciones cónicas (Circunferencia, Elipse y Parábola) y tan sólo el 7 % se afianzan sólo con la Circunferencia.

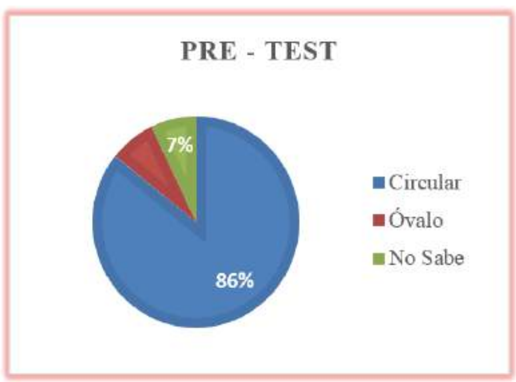
<u>PREGUNTA 7</u>: *¿QUÉ RELACIÓN CREES QUE TIENEN LA ELIPSE Y LA PARÁBOLA CON LOS ASTROS?*

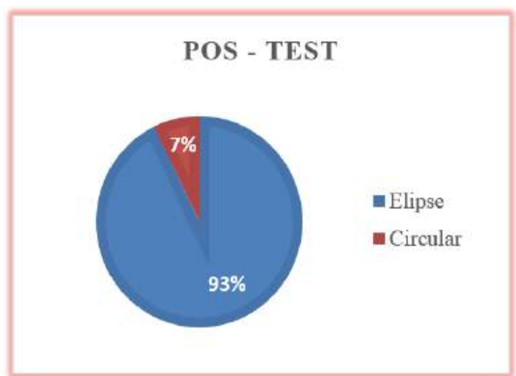




Con respecto a la pregunta sobre la relación que existe entre la Elipse y la Parábola con los astros, se nota un significativo progreso en las respuestas dadas por los estudiantes, ya que, comparando resultados del Pre - Test y del Pos - Test, después de que ninguno de los estudiantes supiera la relación existente entre la Elipse y la Parábola con los astros, el 100 % comprende que en el espacio no solo se describen órbitas circulares, como se conocían en la antigüedad, sino también elípticas y parabólicas.

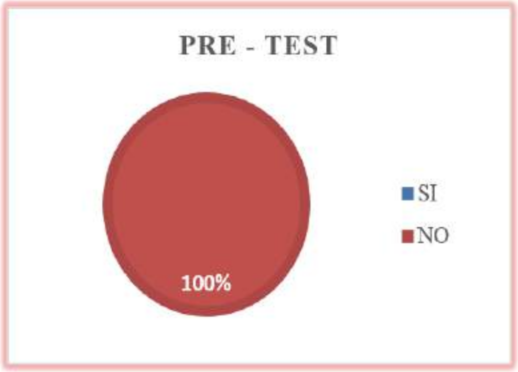
<u>PREGUNTA 8</u>: *¿CÓMO CREES QUE SE MUEVEN LOS PLANETAS EN NUESTRO SISTEMA SOLAR?*

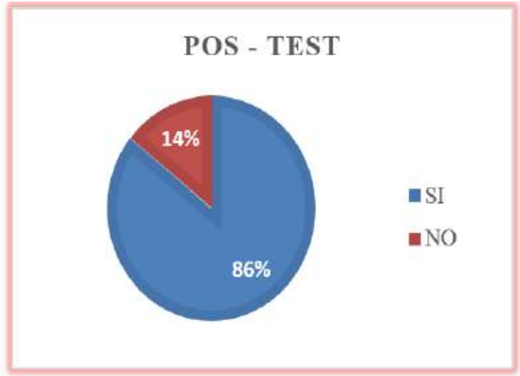




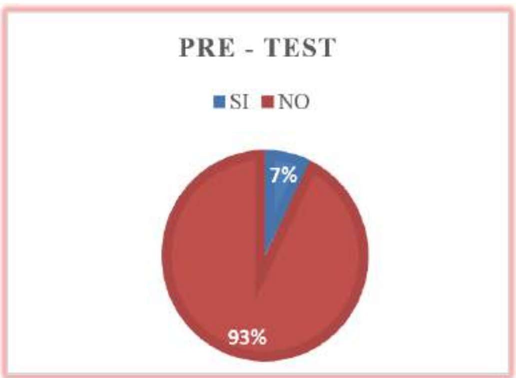
Los datos registrados en esta pregunta muestran un significativo cambio en la concepción que tienen los estudiantes acerca del movimiento que siguen los planetas en el espacio, pues inicialmente el 86 % creía que se mueven en forma circular, el 7 % que lo hacen en forma ovalada y el resto 7 % no saben que responder. Posteriormente, con la aplicación del tema, el 93 % de los estudiantes relacionan que los planetas describen órbitas elípticas, es decir, ya 13 estudiantes de los 14 superan la concepción antigua del movimiento de los astros, mostrando así resultados óptimos con la aplicación de la Secuencia Didáctica.

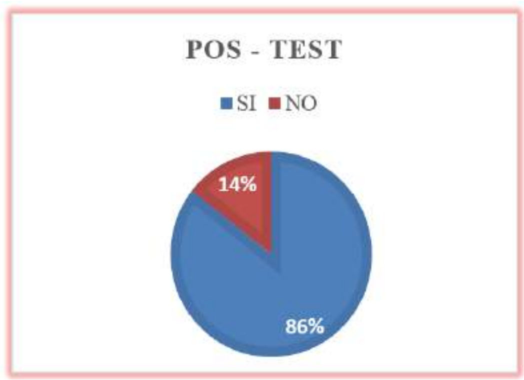
<u>Pregunta 9</u>: *¿PUEDES ENCONTRAR LA ECUACIÓN DE LA TRAYECTORIA DE ALGÚN CUERPO CELESTE?*





<u>Pregunta 10</u>: *¿PUEDES GRAFICAR LA TRAYECTORIA QUE SIGUEN LOS CUERPOS CELESTES CONOCIENDO ALGUNOS DATOS DE ELLOS?*

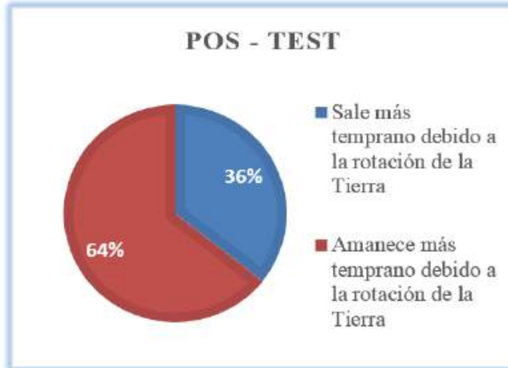




El encontrar la ecuación de las trayectorias que siguen los cuerpos celestes fue una de las grandes dificultades al iniciar la aplicación del presente trabajo, pues el 100 % de los estudiantes no tenían ninguna idea de cómo encontrarlas, incluso, un 93 % de ellos no sabía graficar este tipo de trayectorias. En esto, cabe aclarar, que el otro 7 % justifica su respuesta con una pequeña descripción de las trayectorias.

Estos resultados nos muestran que se logra un mejor desempeño luego de llevar a cabo las actividades propuestas en las guías, ya que, se evidencia que un 86 % identifica las trayectorias, las grafica y además, encuentra sus ecuaciones conociendo algunos datos de ellos.

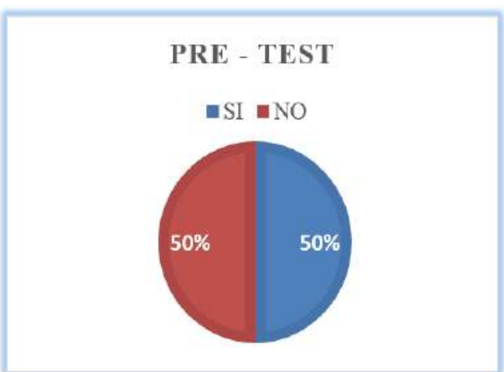
<u>Pregunta 11</u>: *¿PODRÍAS CONTESTAR QUÉ PASA CON EL SOL EN DIFERENTES CIUDADES DEL MUNDO?*

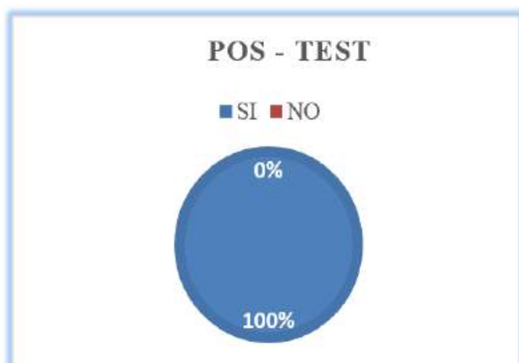


Ahora bien, con respecto a la posición del Sol en el espacio, en un principio el 93 % de los estudiantes opinan que el Sol *sale* más temprano en algunas partes del Mundo, expresando como principal característica que el Sol sale y posteriormente se esconde.

Luego de culminada la aplicación de guías, se nota un cambio significativo en las respuestas dadas, ya que el 36 % sigue pensando que el Sol sale más temprano pero lo justifican con la rotación de la Tierra, el resto 64 %, responde que en algunos lugares amanece más temprano debido a la rotación de la Tierra.

<u>Pregunta 12</u>: *¿SABES QUÉ ES LA ROTACIÓN DE LA TIERRA?*



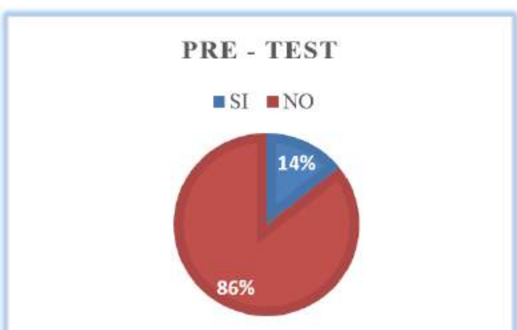


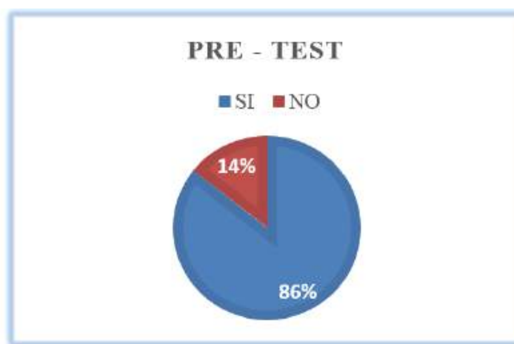
Para la pregunta 12, el aumento porcentual en el conocimiento sobre la rotación de la Tierra es notorio, pues 7 de los 14 estudiantes, es decir, un 50 % sabía inicialmente qué era la rotación de la Tierra (afirmando que era el giro que realiza la Tierra sobre su propio eje) y posteriormente, este porcentaje aumenta al 100 % con el trabajo aplicado en clase, aclarando así algunas ideas acerca de la rotación de nuestro Planeta.

<u>Pregunta 13</u>: *¿SABES QUIÉN GIRA ALREDEDOR DE QUIÉN EN NUESTRO SISTEMA SOLAR?*

En esta pregunta cabe desatacar el óptimo desempeño de los estudiantes en los conceptos básicos de la Mecánica Celeste, el cambiar en ellos la concepción de algunas ideas equivocadas sobre el espacio, hacen de esta aplicación un interesante tema de estudio. En un comienzo el 36 % de los estudiantes pensaban que el Sol giraba alrededor de los Planetas y al final de la aplicación del Pos - Test nos damos cuenta que esta idea ya no aparece en ninguno de ellos, pues el 100 % considera que son los Planetas quienes giran alrededor del Sol.

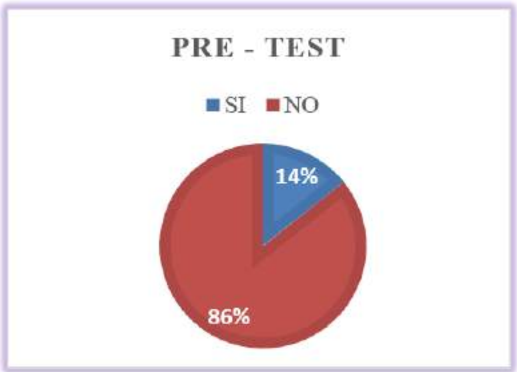
<u>Pregunta 14</u>: *¿SABES CUÁNTO TIEMPO TARDA EN DAR UNA VUELTA COMPLETA LA TIERRA?*

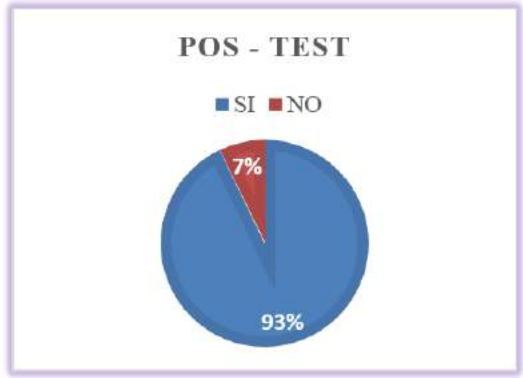




La aplicación de esta Secuencia Didáctica logra de cierta manera que los estudiantes se apropien de temas básicos de la Mecánica Celeste, entre ellos, se consigue que un 86 % (12 estudiantes) aclaren cuál es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta completa sobre su eje, además, de saber en qué sentido lo hacen y cómo lo hacen.

<u>Pregunta 15</u>: *¿SABES CUÁNTO TIEMPO TARDA LA TIERRA EN DAR UNA VUELTA ALREDEDOR DEL SOL?*

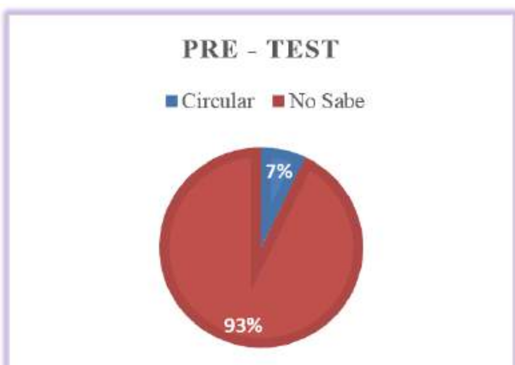


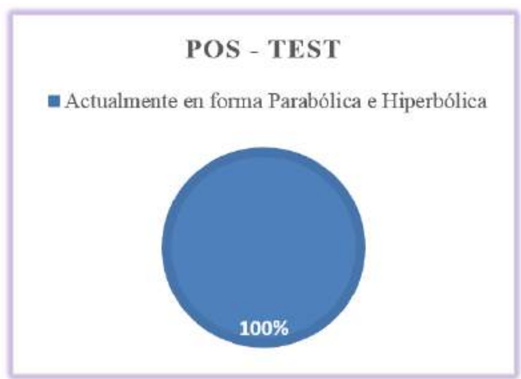


Así mismo, un 93 % de los estudiantes comprenden cuánto tiempo tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol y el 7 %, es decir, tan sólo 1 de los estudiantes se le dificulta responder a esta pregunta.

Cabe aclarar que inicialmente el 14 % de los estudiantes saben cuánto tiempo tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol, pues lo justifican diciendo que es de 365 días ó un año (Ver Anexos).

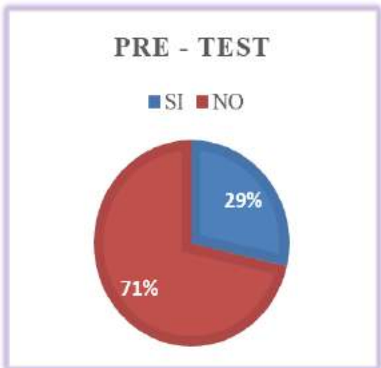
<u>Pregunta 16</u>: *¿CUÁLES CREES QUE SON LAS ÓRBITAS QUE SIGUEN LOS PLANETAS, COMETAS, ASTEROIDES, SATÉLITES Y ESTRELLAS EN EL SISTEMA SOLAR Y EN TODA LA GALAXIA?*

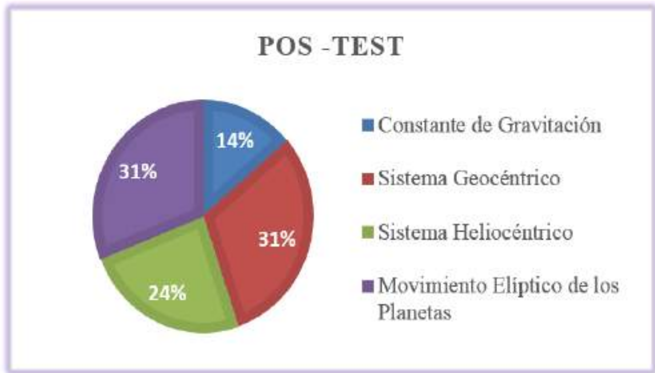




Por otra parte, tan sólo el 7 % de los estudiantes en un comienzo opinaban que las órbitas que siguen los cometas, asteroides, satélites y estrellas son circulares y posteriormente, los resultados del Pos - Test nos muestra que los 14 estudiantes, es decir, el 100 % ya identifican que actualmente los astros no sólo describen órbitas circulares, sino también, parabólicas e hiperbólicas.

<u>Pregunta 19</u>: *¿SABES QUÉ CONTRIBUCIONES HAN REALIZADO A LA HUMANIDAD CIENTÍFICOS COMO NICOLÁS COPÉRNICO, JOHANNES KEPLER, GALILEO GALILEI, ENTRE OTROS?*





Para terminar este análisis, he querido resaltar algo de historia en la Mecánica Celeste, para ello, cabe notar que de los 14 estudiantes a los que se les aplicó la Secuencia Didáctica, el 71 % de ellos no tenían idea de los aportes que estos grandes científicos hicieron a la humanidad, mientras el resto 29 % afirman que hicieron aportes al sistema espacial, a la física y a la Ciencia. Ya con la aplicación de las guías, donde se incluía además algo de historia celeste, los porcentajes varían con diferentes opiniones:

De allí, un 14 % responde como aporte principal la Constante de Gravitación Universal, el 31 % que es el Sistema Geocéntrico, el 24 % el Sistema Heliocéntrico y el otro 31 % el Movimiento Elíptico de los Planetas.

Finalmente, y de manera general podemos afirmar que la Aplicación de la Secuencia Didáctica a través del Enfoque Histórico Cultural muestra un progreso significativo en el aprendizaje de las Secciones Cónicas en los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

7.1. Conclusiones

- Con el presente Trabajo se evidencia que una buena manera de contribuir al aprendizaje de las secciones cónicas en grado noveno (9°) es a través, de la aplicación de temas relevantes de la Mecánica Celeste orientados bajo el Enfoque Histórico Cultural de Enseñanza.

- Refiriéndonos a las variables que incidieron sobre el rendimiento académico del grupo de trabajo, se pudo establecer que se presentaron afinidades significativas en la motivación hacia el estudio, expectativas del logro, además, de alcanzarse un nivel significativo de comprensión del tema de estudio.

- Se pudo establecer que el grupo de trabajo con el que se llevó a cabo la aplicación de la Secuencia generó mucha más interacción con el docente y con sus compañeros que en una clase tradicional, evidenciándose la tendencia de llevar a cabo las actividades en grupos.

- En general, las aplicaciones de la Mecánica Celeste como introductorio para la enseñanza de las secciones cónicas a través del Enfoque Histórico Cultural se reveló como un buen instrumento para evaluar el rendimiento del tema en grado 9°, mostrándose los cambios ocurridos en las variables aplicadas.

- Comparando a paridad el Pre - Test y el Pos - Test, se nota un marcado y significativo progreso de una medición a otra, confirmando el efecto positivo de la Secuencia Didáctica y el dominio por completo de los conocimientos evaluados.
- Cabe aclarar que las respuestas dadas como *Si* o *No* tanto en el Pre - Test como en el Pos - Test fueron confrontadas con la justificación que daba el estudiante, ya que, en algunos casos contestaron *Si* a la pregunta pero realmente el estudiante no sabía del tema demostrándolo en su justificación. (Ver Anexos)
- Teniendo en cuenta tanto las variables utilizadas como las competencias matemáticas (la formulación, tratamiento y resolución de problemas; y la modelación), podemos afirmar que los estudiantes del grado noveno de la I. E. lograron asimilar las secciones cónicas como un tema aplicable a su entorno, dejando de manifiesto que la Matemática no es sólo números, sino además, es el lenguaje para expresar y mostrar lo que nos rodea.
- Se logra como gran objetivo la comprensión de las Secciones Cónicas a través de aplicaciones de la Mecánica Celeste con el Enfoque Histórico Cultural y mejorando en gran parte el pensamiento espacial en nuestros estudiantes.
- Aplicar el Enfoque Histórico Cultural abre caminos estratégicos y metodológicos para la enseñanza de las secciones cónicas en grado noveno (9°).
- Partiendo de la función del profesor como orientador y guía, se puede concluir que el grupo consiguió formar y estructurar más su pensamiento, permitiendo desarrollar así la capacidad de tomar decisiones propias, sobre todo las que tienen mayor trascendencia en sus vidas y que comprometen su entorno.
- El grupo mostró un avance significativo en la construcción consciente de conceptos aplicando las diferentes etapas mentales de Galperín, teniendo como eje central el desarrollo de la base orientadora de la acción (BOA), asimilando y aplicando diferentes métodos explicativos, problémico y de elaboración conjunta.
- Con la aplicación del Trabajo se pudo observar una motivación total hacia temas relevantes de nuestra galaxia y del movimiento de nuestro Planeta; partiendo de allí para introducir y aplicar nuevos enfoques educativos encaminados a mejorar el rendimiento de nuestros estudiantes en el aula de clase.
- La Secuencia Didáctica aplicada a través del Enfoque Histórico Cultural de la Enseñanza implica básicamente orden, formación y compromiso por parte del estudiante y del docente guía en el aula de clase, contribuyendo al desarrollo de nuestra educación.

7.2. Recomendaciones

Para estudios posteriores se recomienda:

- Orientar este tema dividido en más sesiones (o guías), siempre y cuando no se pierda la aplicabilidad de cada una de las secciones cónicas, sus correspondientes características y propiedades. Así mismo, buscar la manera de iniciar siempre cada guía con una etapa de Base Orientadora de la Acción (BOA), refiriéndonos al Enfoque Histórico Cultural como el modelo de la Secuencia Didáctica.
- Cuando se trabaja en Instituciones Educativas en las que se cuenta con estudiantes de bajos recursos, es importante tener claridad con que materiales se cuenta, en especial cuando sabemos que nuestros estudiantes no tienen la comodidad de conseguirlos.
- Es de suma importancia incorporar herramientas de comunicación que faciliten la interacción con nuestros estudiantes en las diferentes actividades de enseñanza - aprendizaje.
- Apoyar aplicaciones de este tipo con el manejo de fichas didácticas que ayuden a interiorizar ciertas fórmulas y algoritmos empleados en el tema.
- Replicar tanto este tipo de estudios como el Enfoque utilizado, en otros temas, grados, e incluso, instituciones del País y contrastar así resultados con el fin de ampliar investigaciones realizadas.
- Articular estudios similares con otras áreas del conocimiento, de tal manera, que nos permita reafirmar el Enfoque Histórico Cultural en la educación colombiana.

CAPÍTULO 8

ANEXOS

8.1. Las Secciones Cónicas y su Enseñanza

Inicio este apartado refiriéndome a los criterios establecidos en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional de Colombia:

- *Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.*

- *Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.*

- *Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.*

- *Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.*

- *Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.*

- *Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos.*

Con esto podemos deducir que en las Instituciones Educativas de nuestro país se deben desarrollar ciertos lineamientos en las diferentes áreas, entre ellas, las Matemáticas. El Pensamiento espacial y Sistemas Numéricos, establece en el grado décimo (10^o) la enseñanza - aprendizaje de las Secciones Cónicas, su identificación, sus representaciones, propiedades y su descripción en fenómenos del mundo real.

A partir de esto, defino las variables a tratar en esta secuencia didáctica, teniendo en cuenta a su vez todo lo que conlleva el proceso de enseñanza - aprendizaje del tema en cuestión.

El estudio de las Secciones Cónicas ha sido definido, pero a su vez muy relegado, en los currículos de diferentes carreras de en nuestro país, así mismo, su tratamiento se ha vuelto excesivamente analítico, en tanto que se ha desligado de lo sintético, es por esto, que se ve la necesidad de conectar didácticamente estos dos enfoques.

Bartolini (2005) señala. "No es posible construir el significado de las cónicas a través de un único enfoque, como por ejemplo, el más difundido, el algebraico. Esto debido a que no es suficiente con estudiar los aspectos analíticos dado que una gran cantidad de significados se pierde con solo este enfoque" (p. 39).

Así mismo, Velásquez (2007) establece que "La forma clásica de presentar la geometría analítica ha afectado negativamente su aprendizaje, ya que se entiende que en la presentación clásica de este tipo de geometría, predominan los contenidos temáticos desde un punto de vista algebraico y formalista sin tener en cuenta la formación de procesos, estrategias y actitudes en los estudiantes".

A través de la historia y de una experiencia pedagógica, se han detectado algunas dificultades en el aprendizaje de las secciones cónicas, entre ellas:

- Los estudiantes no pueden realizar la representación coordinada de un contenido.
- En un estudio de Arcos (como se cita en Velásquez et al., 2007) particularmente se dan dificultades en los estudiantes para mirar las figuras geométricas como objetos algebraicos y viceversa.
- Hay limitaciones en la formación de los conceptos principales de la geometría analítica, en su lugar, se tiene una memorización de las definiciones carentes de sentidos y significados.
- No contribuye a desarrollar las habilidades matemáticas como comprender, visualizar y comunicar las actividades matemáticas universales que Bishop (1999) enuncia como son: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar.

- Presenta limitaciones en el abordaje de problemas en contextos auténticos que aseguren el interés de los alumnos por resolverlos y, por ende no se contribuye en la formación de recursos intelectuales para trabajar este campo (Velásquez et al. 2007, p. 264).

Las investigaciones en Didáctica de la geometría analítica, suelen señalar la importancia de no subestimar ni dejar de lado todo el sistema lógico deductivo de axiomas, postulados, definiciones, teoremas, demostraciones que emergieron en una época anterior a Descartes y también recomiendan tener en cuenta, las construcciones geométricas de las curvas cónicas como otra competencia básica, y como un proceso importante en la actividad matemática asociada al razonamiento y comunicación de saberes matemáticos.

Por lo tanto, se recomiendan *procedimientos de tipo geométrico.* Estos son descritos por Rico (1995) como:

> Los procedimientos de tipo geométrico son las rutinas para construir un modelo de un concepto geométrico, ya sea para manipularlo o para hacer una representación del mismo en el plano. También describe unos procedimientos relacionados con gráficas y representación que se desarrollan en los distintos campos de las matemáticas. Cuando se hace una representación lineal de los números, cuando se emplea una gráfica para expresar una relación entre dos variables, o cuando se simboliza una fracción sobre una figura se están aplicando procedimientos de tipo gráfico que suponen el empleo de determinados convenios para dar una imagen visual de un concepto o una relación. (p. 20)

En este sentido, Contreras et al. (2002) sostienen que para lograr una ruptura con algunas de las ideas previas de los alumnos, respecto a la comprensión de las curvas, se debe facilitar el paso fluido entre los métodos sintéticos y analíticos, donde la vía para efectuar este recorrido es por las distintas construcciones de éstas. Finalmente, señalan, refiriéndose a aspectos de la enseñanza, que es necesario hacer convivir las técnicas sintéticas y analíticas.

Así mismo, Hansen en 1998, opina que la enseñanza de las secciones cónicas vistas como lugares geométricos, deberían enfatizar como el estudio secciones planas en superficies cónicas. También reitera que al principio esta aproximación puede parecer muy difícil pero hay muchas ventajas valiosas. En particular, esto ayuda a desarrollar el entendimiento espacial (p. 13). En esta misma perspectiva, Hansen (1998) subraya que los métodos de la geometría analítica son, por supuesto, de importancia fundamental y en la mayoría de los países pertenecen al currículo del nivel medio. (p. 13).

En conclusión, podemos afirmar que partiendo de la formación que tenemos en el área de matemáticas, nos vemos en la obligación de cambiar algunas maneras de orientar las clases de geometría analítica, dejar de lado que los estudiantes se vuelvan simples receptores de definiciones y fórmulas, y que por esto mismo, no logran relacionar los temas con fenómenos de su realidad.

8.2. Guías Didácticas

8.2.1. PRE - TEST

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

PRE - TEST

OBJETIVO: *Medir y confrontar los conocimientos que tienen los estudiantes acerca de la Mecánica Celeste en relación con las Secciones Cónicas y sus diferentes concepciones acerca del movimiento de los astros.*

ESTUDIANTE: ______________________________ **EDAD:** ________

1. ¿Conoces sobre el tema de la Mecánica Celeste? **SI** ___ **NO** ___
2. ¿Crees que el Movimiento de los Planteas tiene alguna relación con la Matemática? **SI** ___ **NO**___
3. ¿Has escuchado hablar sobre las Secciones Cónicas? **SI** ___ **NO** ___ Qué has escuchado: ______________________________
4. ¿Conoces algunas Cónicas? **SI** ___ **NO** ___ Cuáles: ______________________________ ______________________________
5. ¿Has oído hablar de la Elipse? **SI** ___ **NO**___
6. ¿Has oído hablar de la Hipérbola? **SI** ___ **NO** ___
7. ¿Qué relación crees que tienen estos conceptos con los Astros? ______________________________ ______________________________
8. ¿Cómo crees que se mueven los Planetas en nuestro Sistema Solar? ______________________________ ______________________________
9. ¿Puedes encontrar la ecuación de la trayectoria de algún cuerpo celeste? **SI** ___ **NO** ___
10. ¿Puedes graficar la trayectoria que siguen los cuerpos celestes conociendo algunos datos de ellos? **SI** ___ **NO** ___
11. ¿Podrías contestar qué pasa con el Sol en diferentes ciudades del Mundo? ______________________________ ______________________________

	UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES	
	INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ	
	ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015 GEOMETRÍA ANALÍTICA **TEMA:** SECCIONES CÓNICAS	

12. ¿Sabes qué es la Rotación de la Tierra? **SI** ___ **NO** ___. ______________________

13. ¿Sabes quién gira alrededor de quién en nuestro sistema solar? ______________________

____

14. ¿Sabes cuánto tiempo tarda en dar una vuelta completa la Tierra? **SI** ___ **NO** ___. ____________

15. ¿Sabes cuánto tiempo tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol?

SI ___ **NO** ___. ______________________________________

16. ¿Cuáles crees que son las órbitas que siguen los planetas, cometas, asteroides, satélites y estrellas en el Sistema Solar y en toda la galaxia? ______________________________

____

____

17. ¿Qué has escuchado hablar de los Cometas en el Sistema Solar?

____

18. ¿Has escuchado hablar sobre los satélites y asteroides? **SI** ___ **NO** ___

19. ¿Sabes que contribuciones han realizado a la humanidad científicos como Nicolás Copérnico, Johannes Kepler, Galileo Galilei, entre otros? **SI** ___ **NO** ___

20. ¿De qué planetas, satélites, cometas, asteroides y estrellas has escuchado hablar?

____

____

MUCHAS GRACIAS...

8.2.2. GUÍA N° 1

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015
GEOMETRÍA ANALÍTICA
TEMA: SECCIONES CÓNICAS

GUIA N° 1

OBJETIVO: *Despertar el interés en los estudiantes sobre la Mecánica Celeste a través de la observación de los siguientes videos y la aclaración de algunas ideas tales como espacio, ciclos de movimiento, regularidad en el espacio y rotación de la Tierra, así como de la influencia que ejercen en nuestro diario vivir.*

ETAPA MOTIVACIONAL:

VIDEO N° 1: ***"Movimientos Astronómicos de la Tierra"***
Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=LWf2bTj--Yw

ETAPA VERBAL:

1. ¿Qué pasa con el Sol en diferentes ciudades del Mundo?
2. ¿Debido a que cambian las estaciones del año?
3. ¿Qué es la Rotación de la Tierra?
4. ¿En cuánto tiempo da una vuelta completa la Tierra?
5. ¿Cuántos grados gira la Tierra en tan sólo una hora?
6. ¿Cuál es el Movimiento denominado Revolución de la Tierra?
7. ¿Cuánto tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol?
8. ¿Cuál es el tercer movimiento de la Tierra a tener en cuenta?
9. ¿En qué consiste el cuarto movimiento de la Tierra denominado "Movimiento Galáctico"?
10. ¿Cuánto tiempo tarda el sistema solar en dar una revolución en la Galaxia?

	UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES	
	INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ	
	ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015 GEOMETRÍA ANALÍTICA **TEMA:** SECCIONES CÓNICAS	

ETAPA MOTIVACIONAL:

VIDEO N° 2: ***"Orbitas Elípticas y Elementos Orbitales"***

Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=ldFjh1Rqmr4

"Los cuerpos que se desplazan por el espacio como estrellas, planetas, cometas o asteroides, lo hacen con trayectorias definidas llamadas ÓRBITAS"

ETAPA VERBAL:

1. ¿Cómo se mueven los planetas en el Sistema Solar?
2. ¿Qué otro tipo de órbitas existen también?
3. ¿Cuáles son las órbitas más comunes en nuestro Sistema Solar y en todo el Universo?
4. ¿En las órbitas elípticas los cuerpos repiten su recorrido varias veces?
5. ¿Qué ocurre con el recorrido de los cuerpos con órbitas parabólicas o hiperbólicas?
6. ¿A qué velocidad debe ir un cuerpo para que permanezca en órbita alrededor de la Tierra?

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

ETAPA MOTIVACIONAL:

VIDEO N° 3: ***"Cometas en el Sistema Solar"***

Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=y4gPsn15W2U

ETAPA VERBAL:

1. Inicialmente, ¿cómo se creía que se desplazaban los cometas por nuestra galaxia según Kepler?
2. Según Isaac Newton, en 1680, ¿qué tipo de órbita describe un cometa?
3. ¿Qué característica presentaba el cometa Halley en los años 1531, 1607 y 1682?
4. ¿En qué año volvió a aparecer este cometa Halley?

EN CONCLUSIÓN:

- ¿Quién gira alrededor de quién en nuestro Sistema Solar?
- ¿Qué tipo de órbitas recorren los cometas, satélites, asteroides, planetas y estrellas?

8.2.3. GUÍA N° 2

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ
ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015
GEOMETRÍA ANALÍTICA
TEMA: SECCIONES CÓNICAS

GUIA N° 2

OBJETIVO: *Conocer algunos Conceptos básicos de la Geometría Analítica con el fin de identificar en futuras actividades las características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y en particular de las curvas y figuras cónicas.*

CONCEPTOS BÁSICOS

ETAPA 1. MOTIVACIONAL:

Como muchos sabemos nuestro Sistema Solar contiene una estrella (llamada el Sol), ocho planetas, cinco planetas enanos, centenares de satélites naturales (o lunas) orbitando a estos planetas, y una gran cantidad de astros. Además, para nadie es un secreto que estos planetas son cuerpos gigantescos, algunos de ellos rocosos, otros de composición gaseosa y con distancias enormes que separan a estos planetas en el espacio.
Si lo pensamos en términos matemáticos, ¿qué tan grandes serán estos cuerpos en el Sistema Solar y qué distancias los separan?

Para entender de una manera más didáctica los tamaños y distancias en el Sistema Solar, los representaremos de la siguiente manera:

El Sol: Reduzcámoslo al tamaño de un balón de fútbol y a partir de aquí veamos dónde está cada planeta y qué tamaño tiene. Además, coloquémoslo en el centro de la portería del campo de fútbol.

Mercurio: Planeta más cercano al Sol: Mercurio. Lo ubicamos algo más cerca que el punto de penalti, a unos 9 m del Sol. Su tamaño será como la cabeza de un alfiler, con un diámetro de menos de 1 mm.

Venus: Lo situamos a una distancia de 17 m, justo a la misma distancia del punto de penalti que Mercurio, pero a la otra parte. Su tamaño será como un grano de arena de 2 mm de diámetro, con un color ocre o amarillento.

Tierra: Nuestro gran planeta. Situado en el borde exterior del área, a unos 25 m de la portería, del tamaño de otro grano de arena, esta vez de color azulado, de unos 2 mm de diámetro.

Marte: Otro planeta que se podría adecuar para la vida. Estaría situado cerca del centro del campo, a unos 35 metros del Sol, y tendría un tamaño de la mitad de un grano de arena 1 mm.

Júpiter: Lo podremos encontrar en las gradas opuestas a la portería solar a unos 120 m de éste, y con un tamaño de unos 2.5 cm.

Saturno: Al planeta de los anillos lo encontraríamos en los aparcamientos, a unos 220 m del Sol, y con un tamaño de una aceituna un poco más pequeña: de unos 2 cm.

Urano: A unos 450 m encontraríamos el hueso de la aceituna, de unos 8 mm de diámetro, de color azul claro.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

Neptuno: Y alejándonos un poco más, a unos 710 m encontramos otro hueso azulado, éste ligeramente inferior al anterior, llamado Neptuno.

Plutón: Se encontraría a 1 km del Sol, con el tamaño de unos 0.5 mm, una punta (gorda) de alfiler.

Así que: ¿Cómo será una punta de alfiler colocada a 1 km de un Sol que es un balón de fútbol?

ETAPA 2. ETAPA MATERIALIZADA:

En grupo, con tus compañeros de salón, realiza la siguiente actividad: En un Octavo de cartón paja dibujar nuestro Sistema Solar a escala, teniendo en cuenta las dimensiones intuitivas dadas en la lectura anterior.

ETAPA 3. ETAPA DE LA BASE ORIENTADORA DE LA ACCIÓN (BOA):

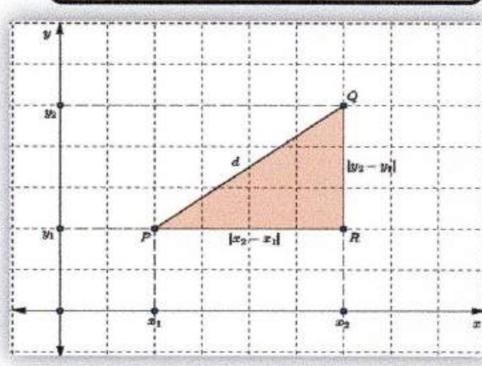
→ **LUGAR GEOMÉTRICO:** Es un conjunto de puntos que pertenecen al plano cartesiano y que cumplen determinada característica geométrica común. En relación con la característica común de los puntos que pertenecen al lugar geométrico del plano es posible realizar su representación analítica por medio de una ecuación, la cual se denomina *ecuación de un lugar geométrico*. También es posible realizar la representación geométrica por medio de una gráfica en el plano cartesiano.

Para determinar la ecuación de un lugar geométrico, se expresan algebraicamente las propiedades de los puntos $P(x,y)$ de ese lugar, mediante igualdades que relacionan las variables x e y.

→ **DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS:** La distancia d entre dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ se simboliza $d(P,Q)$ y se determina por la fórmula:

$$\boxed{d(P,Q) = \sqrt[2]{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Ésta fórmula se deduce a partir del Teorema de Pitágoras, así:



$$(PQ)^2 = (PR)^2 + (QR)^2$$
$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$
$$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Por lo tanto, la distancia entre P y Q es:

$$d(P,Q) = \sqrt[2]{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

EJEMPLO: La distancia entre los puntos $A(3\,,4)$ y $B(1\,,1)$ es:

$$d(A,B) = \sqrt[2]{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

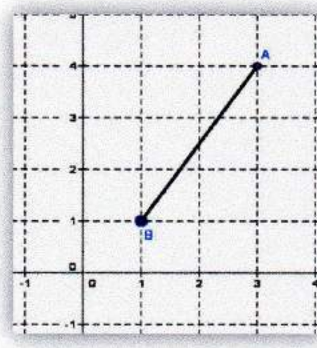
$$d(A,B) = \sqrt[2]{(3-1)^2 + (4-1)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt[2]{(2)^2 + (3)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt[2]{4+9}$$

$$d(A,B) = \sqrt[2]{13}$$

$$d(A,B) = 3{,}61\ unidades$$



Por lo tanto, la distancia entre los puntos $A(3\,,4)$ y $B(1\,,1)$ es $d(A,B) = 3{,}61\ \boldsymbol{unidades}$.

→ **<u>PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO:</u>** Las coordenadas del punto medio del segmento que une dos puntos $P(x_1\,,y_1)$ y $Q(x_2\,,\,y_2)$ son:

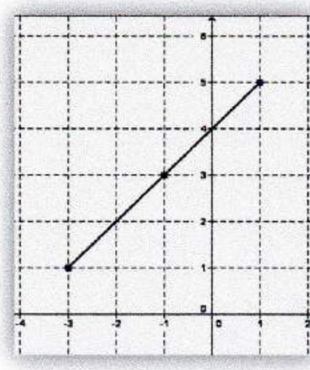
$$\boxed{P_M(P\,,Q) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\,,\frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$$

EJEMPLO: Determinar las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos $R(-3\,,1)$ y $S(1\,,5)$:

$$P_M(R\,,S) = \left(\frac{(-3)+1}{2}\,,\frac{1+5}{2}\right)$$

$$P_M(R\,,S) = \left(\frac{(-2)}{2}\,,\frac{6}{2}\right)$$

$$P_M(R\,,S) = (-1\,,3)$$



Por lo tanto, las coordenadas del punto medio entre $R(-3\,,1)$ y $S(1\,,5)$ es $(-1\,,3)$ como podemos ver en la figura.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

ETAPA 4. ETAPA VERBAL:

Encuentra la distancia entre cada punto y el punto M:

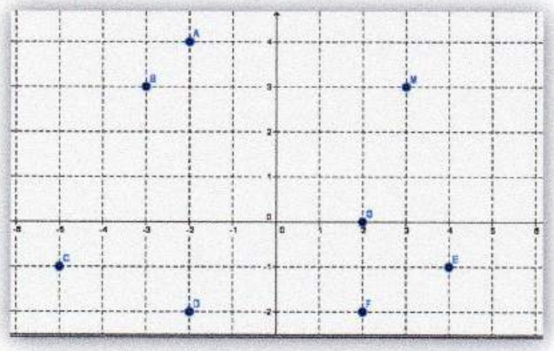
a) $d(M\,,\,A) =$

b) $d(M\,,\,B) =$

c) $d(M\,,\,C) =$

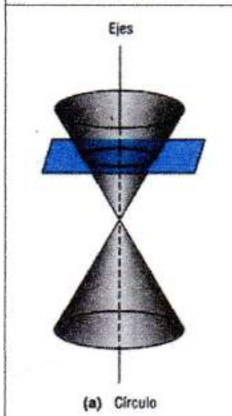
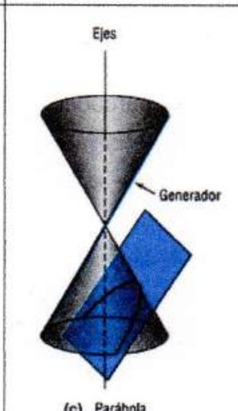
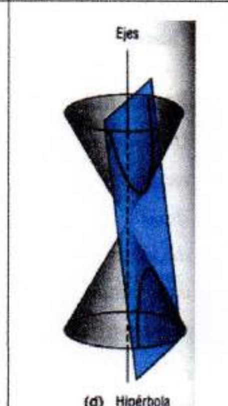
d) $d(M\,,\,D) =$

e) $d(M\,,\,E) =$



→ *SECCIONES CÓNICAS*

Una sección cónica es una curva que resulta de la intersección de un plano con una superficie cónica de revolución. Las secciones que se pueden obtener dependiendo del ángulo de inclinación del plano que corta la superficie cónica de revolución son: ***La Circunferencia***, ***La Parábola***, ***La Elipse*** y ***La Hipérbola***.

CIRCUNFERENCIA	ELIPSE	PARÁBOLA	HIPÉRBOLA
			
El plano es perpendicular al eje de la superficie cónica.	*El plano corta transversalmente a la superficie cónica.*	*El plano es paralelo a la generatriz de la superficie cónica.*	*El plano que corta a la superficie cónica es paralelo al eje de la superficie cónica.*

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

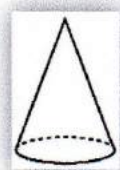
ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015
GEOMETRÍA ANALÍTICA
TEMA: SECCIONES CÓNICAS

ETAPA 5. MENTAL - EVALUACIÓN GUÍA N° 2:

1. *(SECCIONES CÓNICAS)* **En grupo con tus compañeros realizar el siguiente experimento:**

   Materiales:

   - Plastilina de diferentes colores.
   - Cuatro palillos de pincho (que harán las veces de eje).
   - Un trozo de metal o bisturí (que hará las veces de plano).
   - Una hoja de block.



PASOS:

→ Con la plastilina construirán dos conos circulares rectos.
→ Una vez armados los conos los unirán por las puntas.
→ Luego que tengan la superficie cónica completa, introducen el palillo de pincho por el centro para que haga las veces de eje.

→ Por último, con el trozo de metal o bisturí (que hacen las veces de plano) realizaran los siguientes cortes:

A. Horizontal, paralelo a la base del cono.
B. Transversal a la superficie cónica.
C. Diagonal, paralelo a una de las generatrices del cono.
D. Vertical, paralelo al eje vertical del cono.

Observa las figuras obtenidas, en la superficie plana. Trace el contorno o perímetro de cada una de las figuras obtenidas en una hoja de block.

2. **Determina las coordenadas del punto medio del segmento que une cada par de puntos:**

   a) $R(1\,,\,3)$, $S(-3\,,\,4)$
   b) $P(-5\,,-2)$, $Q(3\,,\,4)$
   c) $P(0\,,-2)$, $Q(8\,,-1)$
   d) $M(-3\,,\,7)$, $N(2\,,-8)$
   e) $A(5\,,-3)$, $B(0\,,\,0)$
   f) $D(5\,,\,0)$, $E(0\,,\,2)$

8.2.4. GUÍA N° 3

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015
GEOMETRÍA ANALÍTICA
TEMA: SECCIONES CÓNICAS

GUIA N° 3

OBJETIVO: *Presentar la circunferencia en forma gráfica y algebraica, detectando algunas de sus características y resolviendo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de esta figura cónica aplicada a la mecánica celeste.*

ETAPA 1. MOTIVACIONAL:

TRAYECTORIAS CIRCULARES EN LA MECÁNICA CELESTE

Los objetos que se movían en el cielo llamaron la atención de muchos pobladores desde la antigüedad, fueron ellos quienes dieron las primeras ideas desde el periodo Neolítico *(9000 – 3000 a. C.)* del movimiento de estos astros. La necesidad de vivir orientados por estos fenómenos celestes los obligó al estudio de la astronomía, sus actividades dependían en gran parte de la presencia y ausencia del Sol, la Luna, las estrellas y demás astros, siendo el cielo objeto de investigación desde principios de la humanidad.

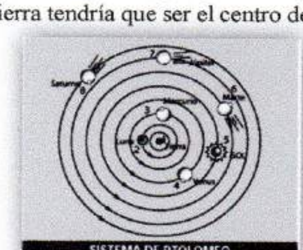
¿Por qué las estrellas no caen hacia la Tierra? ¿De dónde están suspendidas?

Con la Luna llena es más difícil la pesca.

En ciertas épocas, las noches son más largas que los días ¿Por qué?

De igual manera, los egipcios y los babilonios trataron de darle explicación al movimiento planetario, sin embargo sus especulaciones solo trascendieron al nivel de mitos y leyendas. Los griegos consideraban al hombre como el centro del Universo y suponían que la Tierra era el centro geométrico del Universo.

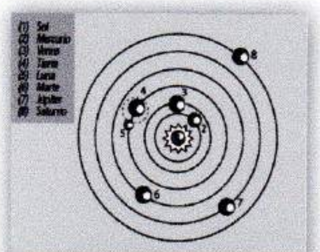
Ya en el siglo II de la Era Cristiana, el astrónomo Claudio Ptolomeo de Alejandría, estructuró un modelo planetario que tendría gran aceptación y que prevalecería durante la Edad Media. Él suponía que todos los planetas se movían en ***CÍRCULOS***, cuyos centros giraban en torno a la tierra. Esta teoría llegó a parecer lógica, puesto que con esto se explicaba el movimiento de algunos planetas. Sin embargo, las ideas de Ptolomeo guardaban gran concordancia con la Iglesia Católica, ya que la "Suprema Creación" tenía que ser el hombre y como habitaba en la Tierra, pues, la Tierra tendría que ser el centro del Universo.



SISTEMA DE PTOLOMEO

	UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES	
	INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ	
	ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015 GEOMETRÍA ANALÍTICA **TEMA:** SECCIONES CÓNICAS	

La teoría llegó a ser aceptada como correcta hasta que en el siglo XVI el monje y astrónomo polaco Nicolás Copérnico, quien en busca de una solución más simple propuso describir el movimiento de todos los planetas en ***ÓRBITAS CIRCULARES***; incluyendo la tierra con respecto al sol, el cual estaría en el centro.



SISTEMA DE COPERNICO

Sin embargo, un sistema en que el Sol se consideraba inmóvil y la Tierra pasaba a ser un planeta en movimiento, como cualquiera de los otros era totalmente contrario a la Filosofía de la Iglesia. Copérnico fue tachado de loco y hereje; sus ideas fueron consideradas falsas y opuestas a las Sagradas Escrituras.

ETAPA 2. ETAPA MATERIALIZADA:

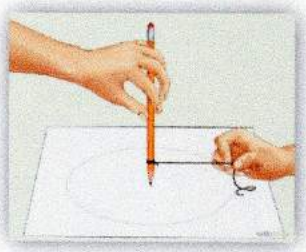
En grupo, con tus compañeros de salón, realiza la siguiente actividad:

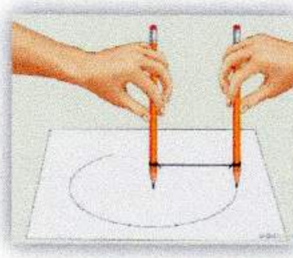
Materiales:

- Un octavo de cartón paja.
- Una Tachuela
- Una cuerda
- Dos lápices

Procedimiento: Utiliza estos materiales para construir dos circunferencias que cumplan las siguientes condiciones:

- Trazar una circunferencia de radio 5 centímetros utilizando un lápiz y la cuerda.
- Trazar una circunferencia de radio 8 centímetros utilizando dos lápices y la cuerda





UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

ETAPA 3. *ETAPA DE LA BASE ORIENTADORA DE LA ACCIÓN (BOA):*

LA CIRCUNFERENCIA

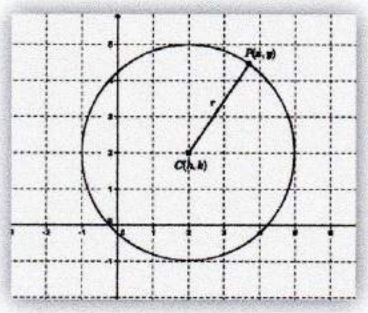
Una Circunferencia es el conjunto de puntos que está a una distancia constante de un punto fijo denominado centro. La distancia de cada punto de la circunferencia al centro se llama radio.

En la figura se muestra una circunferencia con centro en el punto $\boldsymbol{C(h,k)}$ y radio $\boldsymbol{r}$. Como el punto $\boldsymbol{P(x,y)}$ pertenece a la circunferencia se cumple que:

$$d(P,C) = \sqrt[2]{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

$$\sqrt[2]{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$



Por lo tanto, la ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ es la ecuación de una circunferencia con $C(h,k)$ y radio r.

La ecuación canónica de la circunferencia con radio r y centro en el punto $C(h,k)$ *es:*

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

En particular, si $C(h,k) = (0\,,0)$, *se tiene que la ecuación canónica de la circunferencia es:*

$$x^2 + y^2 = r^2$$

EJEMPLO: Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro $C(2\,,-1)$ y radio $r = 3$.

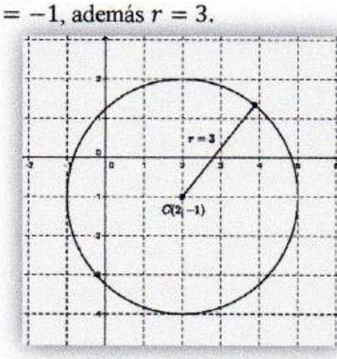
Como el centro es el punto $(2\,,-1)$, entonces, $h = 2$ y $k = -1$, además $r = 3$.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-2)^2 + (y-(-1))^2 = 3^2$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia con centro en $C(2,-1)$ y radio 3 es: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

La ecuación $\boldsymbol{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$, *se conoce como* ***Ecuación General de la Circunferencia.***

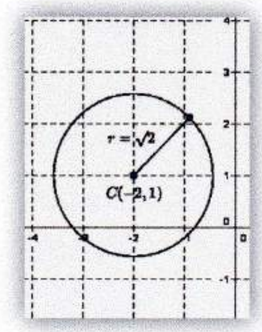
La ecuación general de una circunferencia se puede determinar a partir de su ecuación canónica. En la ecuación canónica de la circunferencia de centro $C(h,k)$ y radio r, se tiene:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 - 2xh - 2yk + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Ahora, si $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$, entonces, $\boldsymbol{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$

EJEMPLO 1: **Determinar la ecuación general de la circunferencia cuya ecuación canónica es:**

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 2$$



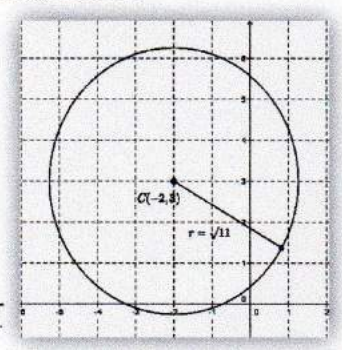
Entonces, partiendo de:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 2$$
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 2$$
$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 + 4 - 2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación general de la circunferencia es: $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$

EJEMPLO 2: **Determinar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación general es:**

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 2 = 0$$



Para esto debemos realizar lo siguiente:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 4x - 6y = -2$$
$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = -2 + 4 + 9$$
$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 11$$

Por lo tanto, el centro de la circunferencia es $(-2\,,3)$ y el radio es $r = \sqrt[2]{11}$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

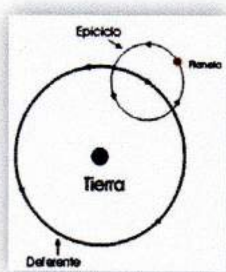
ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015
GEOMETRÍA ANALÍTICA
TEMA: SECCIONES CÓNICAS

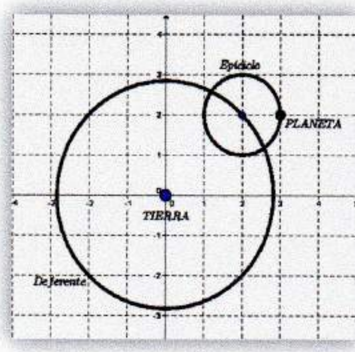
ETAPA 4. ETAPA VERBAL: ***EJERCICIO DE APLICACIÓN:***

En el siglo III Apolonio, propuso explicar el movimiento de retrogradación de los planetas basándose en los *"epiciclos"* y los *"deferentes"*. Según esta explicación, el planeta no tiene su centro de rotación en la Tierra, sino sobre una circunferencia (a la que llamó epiciclo) cuyo centro se sitúa sobre una nueva circunferencia que gira alrededor de la Tierra (a la que llamó deferente), desplazándose así con ella. La combinación de estos dos movimientos circulares y uniformes permitía explicar el movimiento de retrogradación sin tener que prescindir de situar a la Tierra en el centro del universo.

Hiparco además, introdujo otro mecanismo adicional, el *"deferente"*, donde el movimiento de los planetas es la resultante de dos movimientos circulares y uniformes: el del epiciclo, sobre el que gira el planeta y cuyo centro de rotación gira, a su vez, sobre otra circunferencia cuyo centro se encuentra en la Tierra, el deferente. Con esta combinación de movimientos se explicaba el movimiento de los planetas con respecto a la esfera de las estrellas fijas, al tiempo que se explicaba la retrogradación.

Dada esta situación propuesta en la antigüedad y representándola en un plano, ¿cuáles serán la ecuación canónica y general de la órbita circular del Planeta?





SOLUCION:

Para ello debemos notar como centro de la órbita circular del planeta el punto de coordenadas $C(2\,,2)$ y radio $r = 1$. Entonces,

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1^2$$
$$\mathbf{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1}$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$$
$$x^2 - 2x + 4 + y^2 - 2y + 4 = 1$$
$$x^2 - 2x + y^2 - 2y + 4 + 4 - 1 = 0$$
$$\mathbf{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 7 = 0}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

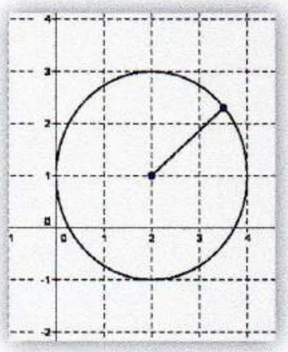
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

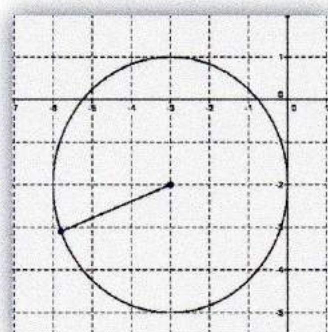
ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015
GEOMETRÍA ANALÍTICA
TEMA: SECCIONES CÓNICAS

ETAPA 5. MENTAL - EVALUACIÓN GUÍA N° 3:

1. Encuentra la ecuación canónica de la circunferencia con centro en $C(1,4)$ y radio $r = 4$.
2. Encuentra la ecuación general de la circunferencia con centro $C(3,5)$ y $r = 9$.
3. Escribe en forma general la ecuación de la circunferencia $(x-2)^2 + (y+6)^2 = 16$
4. Escribe en forma general la ecuación de la circunferencia $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 4$
5. Determina el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$. Luego traza la gráfica.
6. Determina el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$. Luego traza la gráfica.

7. Escribe la ecuación general que corresponde a cada circunferencia representada:





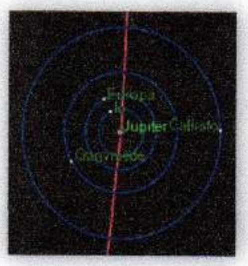
8. **EJERCICIO DE APLICACIÓN:** Las observaciones realizadas por sondas que se han acercado a Júpiter han permitido localizar pequeños satélites, entre ellos, tres muy reconocidos:

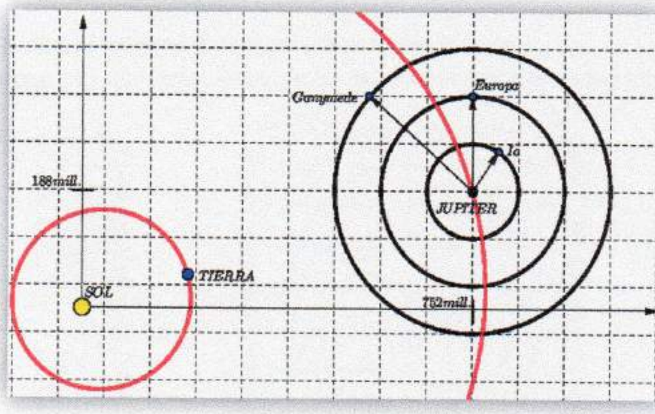
Io: Tiene 3.630 Km. de diámetro y gira a 421.000 Km. de Júpiter en poco más de un día y medio. Su órbita se ve afectada por el campo magnético de Júpiter y por la proximidad de Europa y Ganímedes.

Europa: Tiene 3.138 Km. de diámetro. Su órbita se sitúa entre Io y Ganímedes, a 671.000 Km. de Júpiter. Da una vuelta cada tres días y medio.

Ganímedes: Es el satélite más grande de Júpiter y también del Sistema Solar, con 5.262 Km. de diámetro, mayor que Plutón y que Mercurio. Gira a unos 1.070.000 Km. del planeta en poco más de siete días.
Todo esto como lo muestra la figura:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES	
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES	
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ	
ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015 GEOMETRÍA ANALÍTICA **TEMA:** SECCIONES CÓNICAS	





Encontrar la Ecuación Canónica de cada uno de los satélites pertenecientes a Júpiter.

8.2.5. GUÍA N° 4

	UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES	
	INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ	
	ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015 GEOMETRÍA ANALÍTICA **TEMA:** SECCIONES CÓNICAS	

GUIA N° 4

OBJETIVO: *Presentar la elipse en forma gráfica y algebraica, detectando algunas de sus características y resolviendo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de esta figura cónica aplicada a la mecánica celeste.*

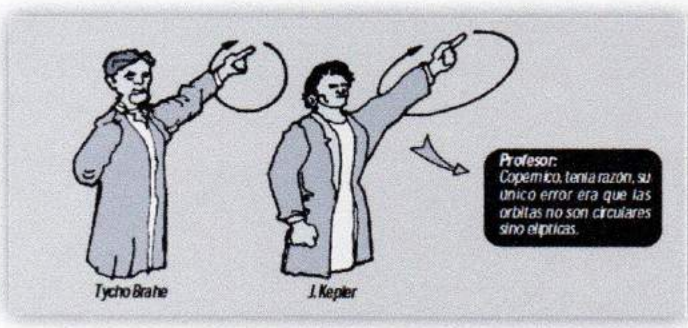
ETAPA 1. MOTIVACIONAL:

TRAYECTORIAS ELÍPTICAS EN LA MECÁNICA CELESTE

Luego de que algunas de las afirmaciones de Copérnico no fueran válidas, la controversia desatada por su teoría heliocéntrica motivó a que los astrónomos buscaran un modelo matemático para explicar los movimientos del Sol y de los planetas que podían observar.

Tycho Brahe con el fin de demostrar que la Teoría de Copérnico era falsa, realizó mediciones de las posiciones de los cuerpos celestes durante 20 años. Lo realizó con tanta precisión, que esas medidas fueron aprovechadas por su alumno, el alemán Johannes Kepler. Brahe estaba convencido que la Tierra permanecía estática en relación al Universo porque, si así no fuera, debería poder apreciarse los movimientos aparentes de las estrellas.

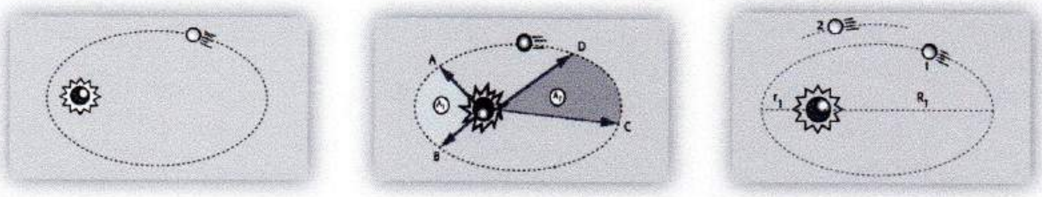
Kepler descubre finalmente que los planetas se mueven alrededor del Sol, en ***ÓRBITAS ELÍPTICAS***, teniendo al Sol no como centro, sino como uno de los puntos focales de la órbita. Hasta entonces se conocían tan sólo seis planetas y con ello Kepler intenta demostrar que los radios de estas esferas estaban relacionados con los cinco poliedros regulares de la Geometría.



Luego de interpretar los datos observados Kepler logra comprender que las órbitas correspondían más a trayectorias elípticas que a las trayectorias circulares y tras esfuerzos incesantes llega a formular tres leyes empíricas que explicaban todos los fenómenos astronómicos conocidos hasta entonces.

	UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES	
	INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ	
	ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015 GEOMETRÍA ANALÍTICA **TEMA:** SECCIONES CÓNICAS	

El hecho de que Kepler estableciera en su primera ley: Los planetas describen órbitas elípticas en uno de cuyos focos está el Sol, hacía que las teorías establecidas anteriormente tomaran otro rumbo.



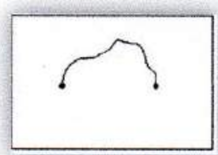
ETAPA 2. ETAPA MATERIALIZADA:

CONSTRUCCIÓN DE LA ELIPSE: Para realizar el siguiente procedimiento necesitaremos los siguientes materiales:

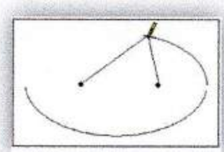
- Un octavo de cartón paja.
- Dos Tachuelas
- Una cuerda
- Un lápiz

Procedimiento:

- Clava las dos tachuelas en el octavo de cartón paja a una cierta distancia.
- Asegura los extremos de la cuerda en las dos tachuelas.



- Con el lápiz tensa la cuerda. Comienza a moverlo, deslizando sobre la cuerda, manteniéndola tensa, a la vez que marcas con el lápiz sobre el cartón.



- Desde un extremo a otro habrás obtenido media elipse. Si pasas el lápiz al otro lado de la cuerda y repites la misma operación obtendrás la otra mitad de la elipse.

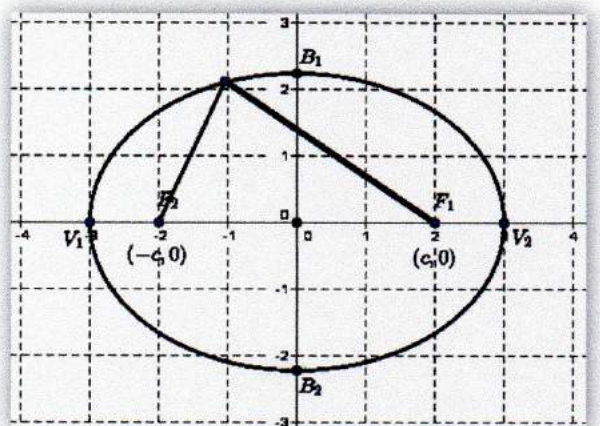
Una vez tengas dibujada la elipse completamente, ubica sus correspondientes elementos.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ
ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015 GEOMETRÍA ANALÍTICA **TEMA:** SECCIONES CÓNICAS

ETAPA 3. ETAPA DE LA BASE ORIENTADORA DE LA ACCIÓN (BOA):

LA ELIPSE

La elipse es un lugar geométrico de los puntos del plano, tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 denominados focos es constante. Así, el punto $P(x,y)$ pertenece a la elipse si $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$ Donde a es un número real positivo.



La Elipse contiene:

- ***Focos:*** Son los puntos fijos F_1 y F_2 del plano.
- ***Centro:*** Es el punto medio del segmento que une los focos.
- ***Eje focal:*** Es la recta que pasa por los dos focos.
- ***Eje normal:*** Es la recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro de la elipse.
- ***Vértices:*** Son los puntos V_1 y V_2 donde la elipse corta al eje focal.
- ***Eje mayor:*** Es el segmento que une los vértices sobre el eje focal V_1 y V_2.
- ***Eje menor:*** Es el segmento que une los puntos de intersección de la elipse con el eje normal.
- ***Lado recto:*** Es el segmento perpendicular al eje focal que pasa por uno de los focos y que une a dos puntos de la elipse.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

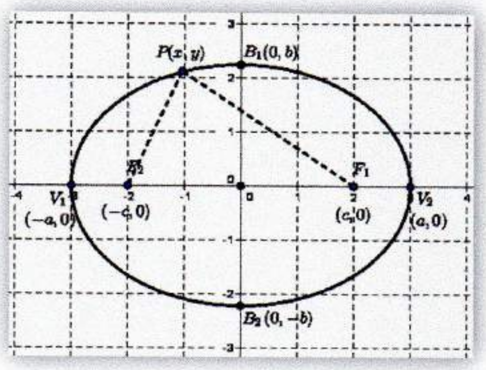
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

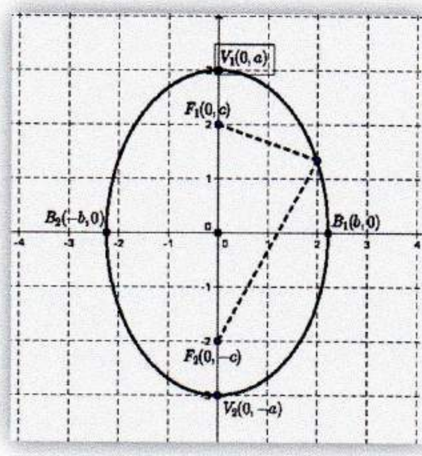
ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

Cuando la elipse está ubicada en el plano cartesiano, con centro en el origen su ecuación se determina analizando dos casos: la elipse con eje focal igual al eje x y la elipse con eje focal igual al eje y.





La ecuación canónica de una elipse con centro $(0,0)$, focos $F_1(c,0)$ y $F_2(-c,0)$, vertices $V_1(-a,0)$ y $V_2(a,0)$ y los cortes con el eje y en $B_1(0,b)$ y $B_2(0,-b)$ es: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\mathbf{1}$ y donde $a>b>0$ y $a^2=b^2+c^2$.

La ecuación canónica de una elipse con centro $(0,0)$, focos $F_1(0,c)$ y $F_2(0,-c)$, vertices $V_1(0,a)$ y $V_2(0,-a)$ y los cortes con el eje y en $B_1(b,0)$ y $B_2(-b,0)$ es: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=\mathbf{1}$ y donde $a>b>0$ y $a^2=b^2+c^2$.

PARA TENER EN CUENTA: Las elipses con centro $(0,0)$ se cumple que:

- La longitud del eje mayor es $2a$.
- La longitud del eje menor es $2b$.
- Las distancias a, b y c se relacionan mediante la fórmula $a^2=b^2+c^2$.
- La longitud de cada lado recto es $LR=\frac{2b^2}{a}$.
- La excentricidad se define como $e=\frac{c}{a}<1$, con $a>c$.

Como $a>c>0$, la excentricidad de una elipse siempre es mayor que 0 y menor que 1.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

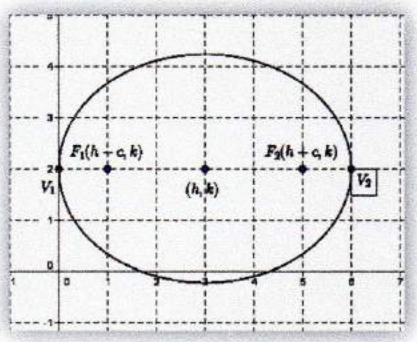
GEOMETRÍA ANALÍTICA

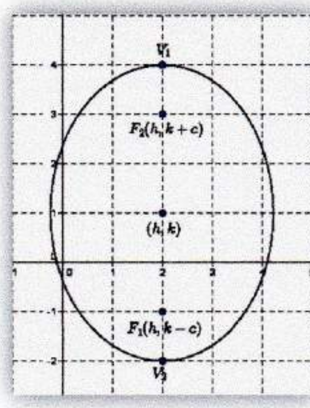
TEMA: SECCIONES CÓNICAS

"Cuando el valor de c se aproxima a 0, la distancia entre los focos se aproxima a 0, es decir, se aproxima cada vez más. Si c llega a ser igual a 0, los focos coinciden con el centro de la elipse y la representación gráfica es una circunferencia".

Ahora bien,

Cuando la elipse está ubicada en el plano cartesiano, con el vértice en (h, k), sus ecuaciones serán:





$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad\qquad \frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

La ecuación general de la elipse, con eje focal paralelo a uno de los ejes coordenados es:
$\boldsymbol{Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0}$ *Con A diferente de C, diferentes del cero y con el mismo signo.*

EJEMPLO 1: **Determinar los elementos de la elipse cuya ecuación es: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.**

Solución:

Como $25 > 16$, entonces, la elipse tiene eje focal en el eje x, y centro en $(0,0)$.

Por lo tanto, al comparar la ecuación $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ con $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, tenemos que:

$$a^2 = 25 \qquad\qquad b^2 = 9$$
$$a = 5 \qquad\qquad b = 3$$

Además,

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$$
$$c = 4$$

De esto obtenemos una gráfica como la siguiente:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

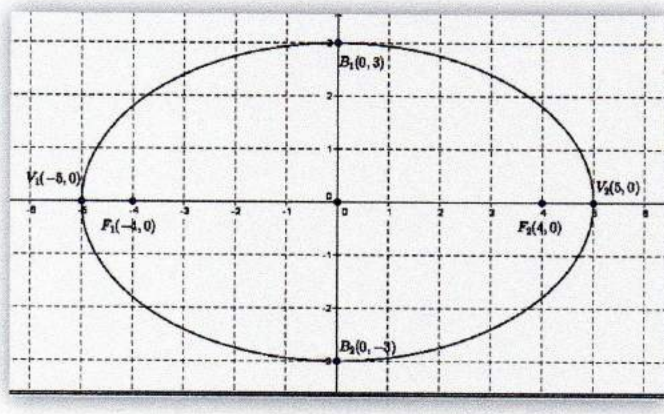
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

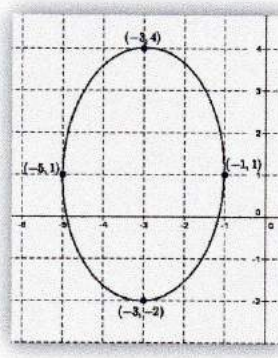


EJEMPLO 2: **Hallar la ecuación de la elipse y sus elementos a partir de la representación gráfica:**

Como podemos observar en la figura los vértices sobre el eje focal son $(-3,4)$ y $(-3,2)$, entonces:

Su centro será: $(-3,1)$, con:

$$2a = 6; \; a = 3$$
$$2b = 4; \; b = 2$$



De esto tenemos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 9 + 4$$
$$c = \sqrt[2]{13}$$
$$c = 3{,}6$$

Entonces, la ecuación será:

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

EJEMPLO 3: **Hallar la ecuación canónica y los elementos de la elipse cuya ecuación general es:**

$$4x^2 + 25y^2 - 8x + 200y + 304 = 0$$

Procedemos de la siguiente manera.

$$(4x^2 - 8x) + (25y^2 + 200y) + 304 = 0$$
$$4(x^2 - 2x) + 25(y^2 + 8y) = -304$$
$$4(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 + 8y + 16) = -304 + 4 + 400$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015
GEOMETRÍA ANALÍTICA
TEMA: SECCIONES CÓNICAS

$$4(x-1)^2 + 25(y^2+4)^2 = 100$$

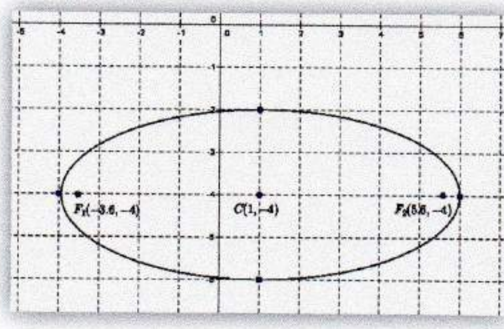
$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y^2+4)^2}{4} = 1$$

Por lo tanto, el centro es $(1,-4)$, $a = 5$ y $b = 2$

$c = \sqrt[2]{25-4} = \sqrt[2]{21} = 4{,}6$

$F_1(h-c,k) = (1-4.6,-4) = (-3.6,-4)$

$F_2(h+c,k) = (1+4.6,-4) = (5.6,-4)$



ETAPA 4. ETAPA VERBAL:

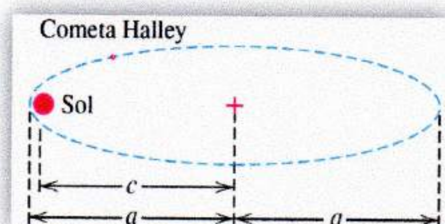
EJERCICIO DE APLICACIÓN: El cometa Halley tiene una órbita elíptica con excentricidad $e = 0.967$. Lo más cerca que el cometa Halley llega al Sol es $0.587\ UA$. Calcule la distancia máxima del cometa al Sol, a la $0.1\ UA$ más cercana.

SOLUCION: Tenemos que la distancia mínima del Sol al cometa de $a-c$:

$$a - c = 0.587 \quad \text{Y de allí tenemos que } a = c + 0.587$$

Sabemos que $e = \frac{c}{a} = 0.967$. De allí obtenemos:

$$c = 0.967 * a$$
$$c = 0.967 * (c + 0.587)$$
$$c = 0.967c + 0.568$$
$$c - 0.967c = 0.568$$
$$c(1-0.967) = 0.568$$
$$c = \frac{0.568}{0.033} = 17.2$$



Una vez obtenida c, podemos encontrar la distancia máxima y mínima entre el cometa y el Sol:

$$a = c + 0.587 = 17.2 + 0.587 = 17.8\ UA$$

Distancia Máxima: $a + c = 17.8 + 17.2 = 35.0\ UA$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

ETAPA 5. MENTAL - EVALUACIÓN GUÍA N° 4:

ACTIVIDAD GUÍA Nº 4

1. Determina las coordenadas del centro, las coordenadas del foco y las coordenadas de los vértices de cada elipse y luego graficala:

A. $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

B. $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

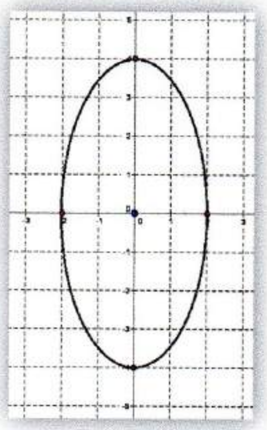
C. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$

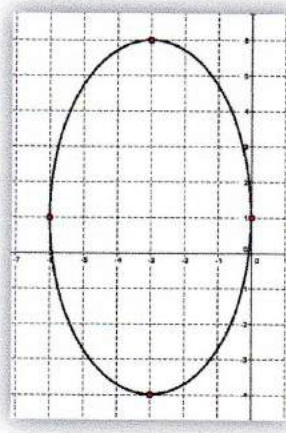
D. $12(x+4)^2+3(y-1)^2=48$

E. $x^2+4y^2-4x-8y-92=0$

F. $x^2+4y^2+6x+16y-11=0$

2. Determina las coordenadas del centro, las coordenadas de los vértices y la ecuación canónica de cada elipse según la gráfica:





3. ***EJERCICIO DE APLICACIÓN:*** Supón que la órbita de un planeta tiene la forma de una elipse con un eje mayor cuya longitud es 500 millones de Km. Si la distancia entre los focos es 400 millones de Km, obtén un bosquejo de su gráfica y la ecuación de la órbita.

4. ***EJERCICIO DE APLICACIÓN:*** El planeta Tierra describe una órbita elíptica alrededor del Sol donde el Sol se ubica en uno de los focos. La excentricidad de la órbita terrestre es $e=0{,}017$ y la longitud del eje mayor de la elipse es 149 millones de Km aproximadamente. Encontrar la diferencia entre el eje mayor y el eje menor de la órbita de la Tierra. (Grafica la Elipse).

8.2.6. GUÍA N° 5

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015
GEOMETRÍA ANALÍTICA
TEMA: SECCIONES CÓNICAS

GUIA Nº 5

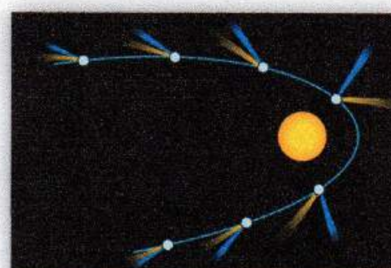
OBJETIVO: *Presentar la parábola en forma gráfica y algebraica, detectando algunas de sus características y resolviendo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de esta figura cónica aplicada a la mecánica celeste.*

ETAPA 1. MOTIVACIONAL:

TRAYECTORIAS PARABÓLICAS EN LA MECÁNICA CELESTE

Ya hacia el *1604* aparece *Galileo Galilei* con una idea nueva sobre la relatividad del movimiento, enunciando a su vez las leyes de la mecánica; en *1655 Huygens* con la primera lente y su descubrimiento del Titán; en *1687, Newton* con la famosa ***"LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL"***, dando origen a una nueva ciencia: la Mecánica Celeste, es allí donde demuestran las tres leyes de Kepler y establece además, la Teoría del Equilibrio.

Con todos estos avances de la actualidad, grandes científicos han descubierto otros tipos de órbitas generadas en diferentes astros, orbitas parabólicas que pueden darse dentro del sistema solar por ciertos tipos de encuentros gravitacionales. Así mismo, los satélites, cometas y asteroides siguen este tipo de órbitas que se fundamentan en un análisis de la Energía mecánica que permite de manera eficaz el estudio de estas órbitas.



Las leyes de Kepler y la famosa Teoría de la Gravitación Universal de Newton, nos permite en la actualidad deducir cómo cuerpos celestes constituidos por hielo y rocas que orbitan el Sol siguen diferentes trayectorias elípticas, parabólicas o hiperbólicas. Además, refiriéndonos a conceptos físicos, la trayectoria u órbita que describa un astro depende única y exclusivamente de la velocidad que lleve.

Si el planeta (cometa, asteroide u otro astro) va muy rápido, entonces la fuerza de gravedad obligaría a ese objeto a formar una ***ÓRBITA PARABÓLICA***; o en muy poquitos casos, una ***ÓRBITA HIPERBÓLICA***. El cuerpo en estos casos viene en línea recta, se desvía por acción de la gravedad, y se va para no volver más.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

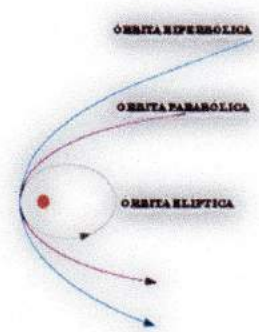
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

Los cometas cuyas órbitas son hiperbólicas o parabólicas no son periódicos, puesto que, sus curvas no son cerradas. Luego, aparecen una sola vez surgiendo de las profundidades del espacio, se acercan al Sol y se alejan del mismo desapareciendo para siempre.



ETAPA 2. ETAPA MATERIALIZADA:

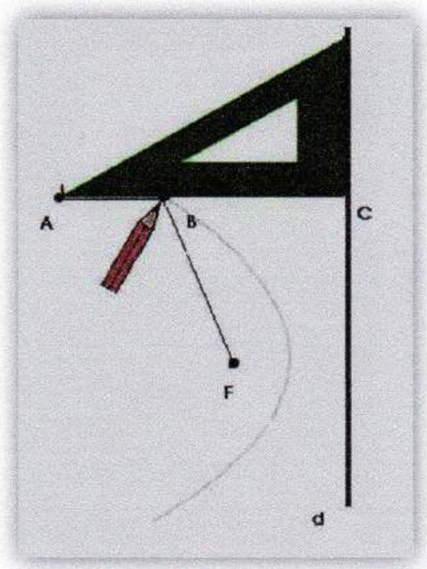
CONSTRUCCIÓN DE LA PARÁBOLA: Para realizar el siguiente procedimiento necesitaremos los siguientes materiales:

- Un octavo de cartón paja.
- Dos Tachuelas
- Una escuadra

- Una cuerda
- Un lápiz

Procedimiento:

- Nos vamos a ayudar de una escuadra y una recta (también sirve otra regla) sobre la que va a deslizar.
- Necesitamos que la cuerda tenga la misma longitud que el lado mayor de la escuadra. Vamos a fijar la cuerda mediante tachuelas al extremo (A) de la escuadra y al foco (F).
- Con el lápiz tensa la cuerda, manteniéndolo siempre junto al lado de la escuadra. Comienza a moverlo, deslizando sobre la cuerda, manteniéndola tensa, a la vez que marcas con el lápiz sobre el papel. A la vez debe deslizar la escuadra sobre la recta (d).
- Desde un extremo al foco habrás obtenido media parábola. Si pasas ahora al otro lado del foco y repites la misma operación obtendrás la otra mitad de la parábola.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

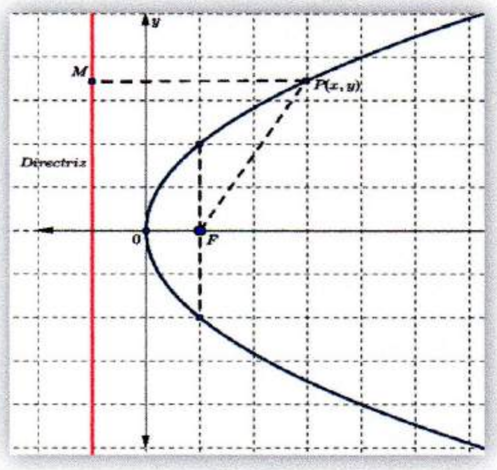
ETAPA 3. *ETAPA DE LA BASE ORIENTADORA DE LA ACCIÓN (BOA):*

LA PARÁBOLA

La Parábola es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ del plano, que equidistan de una recta fija denominada *directriz* y de un punto fijo F, llamado *foco*. Así,

$$d(P, M) = d(P, F)$$

Donde M es el punto sobre el que se proyecta P, en la directriz.



Elementos de la Parábola:

- ***Eje de Simetría o Eje Focal:*** Es la línea recta donde una rama de la parábola se refleja en otra.
- ***Vértice:*** Es el punto V de intersección de la parábola con el eje de simetría.
- ***Foco:*** Es el punto fijo F del plano que equidista de cualquier punto sobre la parábola y se encuentra sobre el eje de simetría.
- ***Directriz:*** Es la línea recta d cuya distancia a cualquier punto sobre la parábola es la misma, es perpendicular al eje de simetría.
- ***Lado Recto:*** Es la cuerda LR perpendicular al eje de simetría de la parábola, que pasa por el foco.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

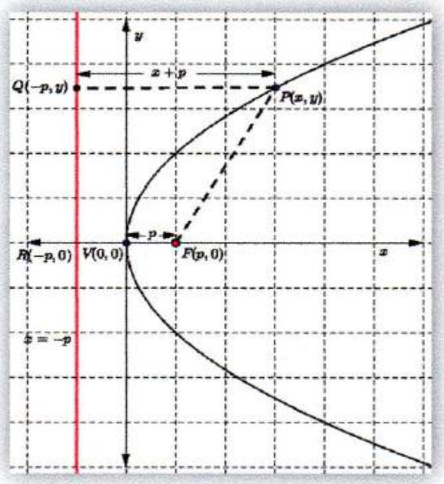
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

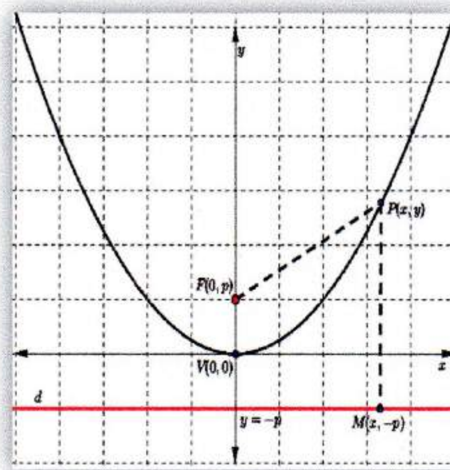
ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

Cuando la parábola está ubicada en el plano cartesiano, con vértice en el origen, su ecuación se determina analizando dos casos: la parábola con vértice $(0,0)$ y eje de simetría el eje "x" y la parábola con vértice $(0,0)$ y eje de simetría el eje "y".





Características:

- La distancia del foco al vértice siempre será p.
- La distancia del Vértice a la directriz es la misma que del Vértice al foco (p).
- La longitud del lado recto es siempre 4 veces la distancia focal.

La ecuación canónica de la parábola con vértice en $(0,0)$, foco en $(p,0)$ y eje de simetría el eje "x", es:

$$y^2 = 4px$$

- Si $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha del vértice.
- Si $p < 0$, la parábola abre hacia la izquierda del vértice.

La ecuación canónica de la parábola con vértice en $(0,0)$, foco en $(0,p)$ y eje de simetría el eje "y", es:

$$x^2 = 4py$$

- Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba del vértice.
- Si $p < 0$, la parábola abre hacia abajo del vértice.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

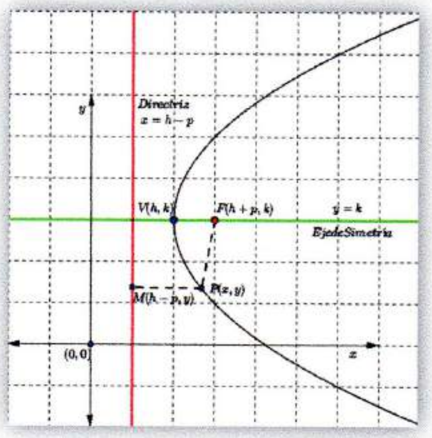
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

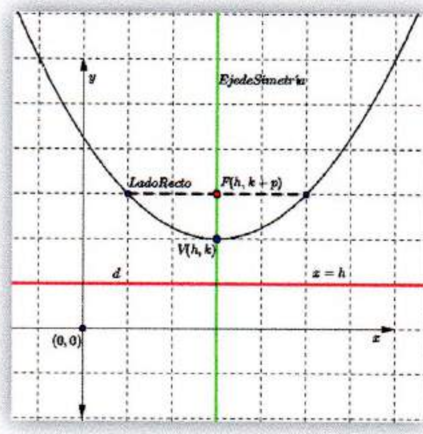
ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

Cuando la parábola está ubicada en el plano cartesiano, con el vértice en (h, k), su ecuación se determina analizando dos casos: la parábola con eje de simetría paralelo al eje "x" y la parábola con eje de simetría paralelo al eje "y".





La ecuación canónica de la parábola con vértice en (h, k) y eje de simetría paralelo al eje "x" es:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

La ecuación canónica de la parábola con vértice en (h, k) y eje de simetría paralelo al eje "y" es:

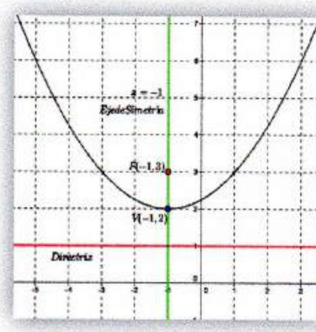
$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Donde, p es la distancia del vértice al foco y además, el Lado Recto es igual $|4p|$.

EJEMPLO 1: Representa gráficamente la parábola cuya ecuación es $(x + 1)^2 = 4(y - 2)$:

Al comparar la ecuación $(x + 1)^2 = 4(y - 2)$ con $(x - h)^2 = 4(y - k)$, tenemos:

- Que el vértice es $(h, k) = (-1,2)$
- Que $4p = 4$, por lo tanto, $p = 1$
- Es una parábola que abre hacia arriba, porque $p = 1 > 0$
- El eje de simetría es paralelo al eje "y". Donde $x = h = -1$.
- El foco es $F(h, p + k) = (-1\,, 1 + 2) = (-1\,, 3)$
- Por lo tanto, su gráfica será:



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

EJEMPLO 2: Encontrar la ecuación de una parábola con vértice $V(2,-1)$ y $p=-2$ con eje de simetría paralelo al eje "y".

Solución: Como la parábola tiene eje de simetría paralelo al eje "y", entonces, su ecuación tendrá la forma:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

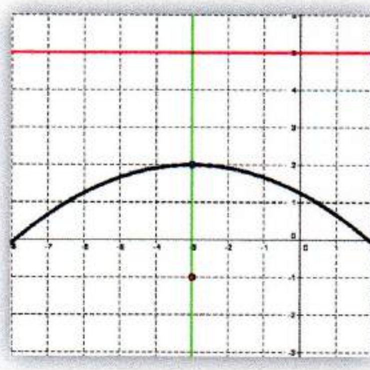
Reemplazando los valores del vértice y además, como $p=-2$, tenemos que: $4p = 4(-2) = -8$. De allí tenemos:

$$(x-2)^2 = 4(-2)(y-(-1))$$

$$(x-2)^2 = -8(y+1)$$

Por lo tanto, la ecuación de la parábola es: $(x-2)^2 = -8(y+1)$

EJEMPLO 3: Determina los elementos y la ecuación de la parábola cuya gráfica se muestra en la figura:



Solución:

- Como podemos ver en la gráfica el vértice es $V(-3\,,2)$
- El foco es $F(-3\,,-1)$
- El eje de simetría es paralelo al eje "y", cuya ecuación es $x=-3$
- La distancia entre el foco y el vértice es 3 y de igual manera la distancia del vértice a la directriz es 3. De allí podemos afirmar que $p=-3$
- La ecuación de la directriz es $y=5$
- La longitud del Lado Recto es $LR = |4p| = 4(3) = 12$
- Y la ecuación de la Parábola será:

$$(x+3)^2 = -12(y-2)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

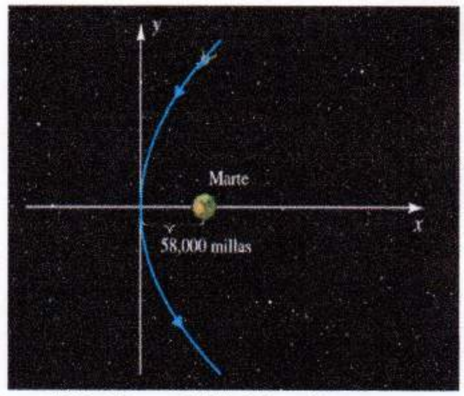
ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

ETAPA 4. ETAPA VERBAL:

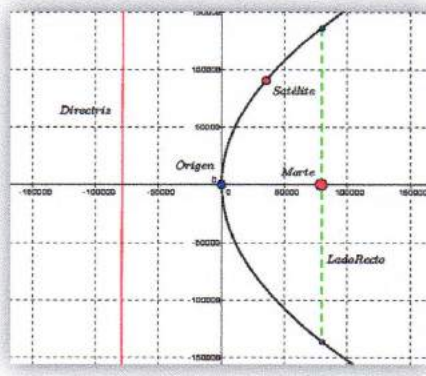
EJERCICIO DE APLICACIÓN: Un satélite se desplazará en una trayectoria parabólica cercana a un planeta, su velocidad v en metros por segundo satisface la ecuación $v = \sqrt{2k/r}$, donde r es la distancia en metros entre el satélite y el centro del planeta y k es una constante positiva. El planeta estará situado en el foco de la parábola y el satélite pasará una vez por el planeta. Suponga que un satélite está diseñado para seguir una trayectoria parabólica y pasará a no más de 58.000 millas de Marte, como se ve en la figura.



Determine una ecuación que describa la trayectoria de vuelo del satélite.

Solución: Para ello, determinamos las coordenadas del vértice y del foco: $V(0\,,0)$ y $F(58.000\,,\,0)$

Debemos tener en cuenta que la parábola abre hacia la derecha con eje de simetría en el eje "x", por lo tanto, la ecuación se asemeja a la ecuación: $y^2 = 4px$



Además, la distancia del vértice ($Origen$) al foco ($Marte$) es de 58.000, es decir, que $p = 58.000$

De allí podemos concluir entonces, que la ecuación será:

$$y^2 = 4px$$
$$y^2 = 4(58.000)x$$
$$y^2 = 232.000x$$

ETAPA 5. MENTAL - EVALUACIÓN GUÍA N° 5:

ACTIVIDAD GUÍA N° 5

1. Grafica y determina la ecuación canónica de cada una de las siguientes parábolas cuyo vértice es V y cuyo foco es F:

A. $V(0\,,-1)$, $F(-2\,,-1)$
B. $V(-2\,,3)$, $F(-2\,,4)$
C. $V(0\,,0)$, $F(0\,,-4)$
D. $V(0\,,0)$, $F(0\,,2)$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

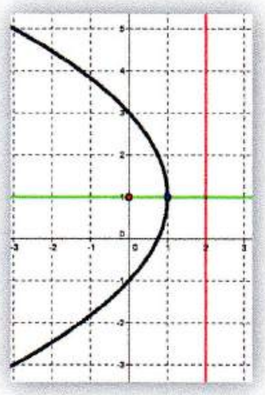
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

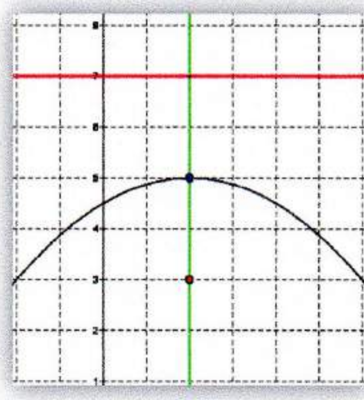
ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

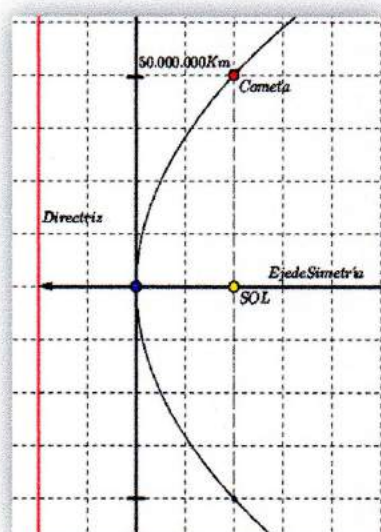
TEMA: SECCIONES CÓNICAS

2. Determina los elementos y la ecuación de las parábolas cuyas gráficas se muestran a continuación:





3. ***EJERCICIO DE APLICACIÓN:*** La órbita de un cometa es una parábola con el Sol en el foco. Cuando el cometa está a 50.000.000 km del Sol, la línea del cometa al Sol es perpendicular al eje de la parábola como lo muestra la figura. Escribir una ecuación que represente la trayectoria del cometa.
(Recuerda que $LR = |4P|$ y que un cometa con órbita parabólica no regresa al sistema solar).



8.2.7. GUÍA N° 6

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015
GEOMETRÍA ANALÍTICA
TEMA: SECCIONES CÓNICAS

GUIA Nº 6

OBJETIVO: *Presentar la hipérbola en forma gráfica y algebraica, detectando algunas de sus características y resolviendo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de esta figura cónica aplicada a la mecánica celeste.*

ETAPA 1. MOTIVACIONAL:

LA MECÁNICA CELESTE EN LA ACTUALIDAD

Los modelos actuales del Universo ya no son geocéntricos ni heliocéntricos, la Tierra y los astros giran en torno al Sol, pero éste tan sólo es una estrella más entre los cientos de miles que hay en nuestra galaxia, la Vía Láctea, y ésta tan sólo es una entre muchos millones de otras galaxias en el Universo. Así mismo, actualmente no hay ningún punto que sea el centro, cualquier punto puede ser considerado el centro en el Universo.

Puede que el Universo continúe expandiéndose eternamente o puede que llegue un momento en que la fuerza de gravedad frene la expansión y el Universo comience a contraerse hasta concentrarse en un solo punto o gran agujero negro. La ciencia sigue investigando esta cuestión, y también sigue buscando la gran teoría unificada que consiga explicar todas las fuerzas y fenómenos del Universo.

ETAPA 2. ETAPA MATERIALIZADA:

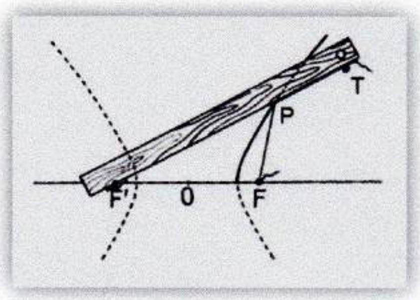
CONSTRUCCIÓN DE LA HIPÉRBOLA: Para realizar el siguiente procedimiento necesitaremos los siguientes materiales:

- Un octavo de cartón paja.
- Tres Tachuelas
- Una regla

- Una cuerda
- Un lápiz

Procedimiento:

- Sobre un octavo de cartulina se marcan dos puntos (los focos F y F')
- Se fija un extremo de la cuerda a un extremo T de la regla y el otro extremo se fija sobre el foco F (dejando fijo un extremo de la regla en el foco F').
- Con la punta del lápiz, en contacto con la regla, se mantiene tensa la cuerda y se gira la regla alrededor de F' describiendo un trozo continuo.
- El proceso se completa al colocar el extremo de la regla al que no se ha fijado la cuerda.
- Se repite el proceso para obtener la otra rama de la hipérbola.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

➢ ***ETAPA 3.** ETAPA DE LA BASE ORIENTADORA DE LA ACCIÓN (BOA):*

LA HIPÉRBOLA

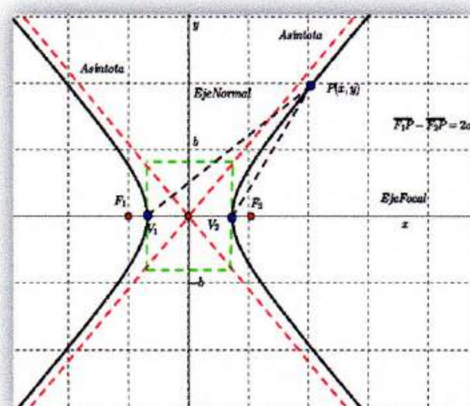
La Hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos denominados focos es constante. Así, el punto $P(x, y)$ pertenece a la hipérbola si:

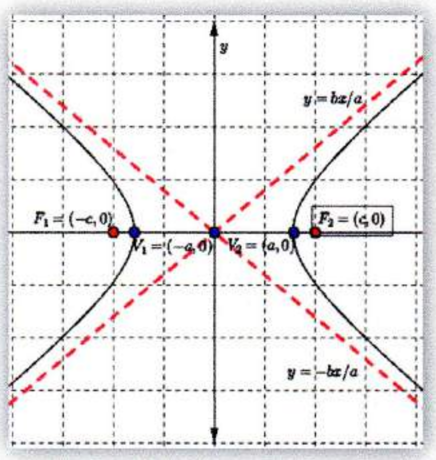
$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$$

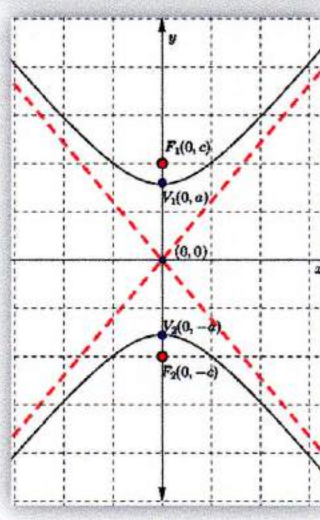
Donde, a es un número real positivo.

En una hipérbola se determinan los siguientes elementos:

- ***Focos:*** Puntos fijos del plano F_1 y F_2.
- ***Eje Focal:*** Recta que pasa por los dos focos.
- ***Vértices:*** Puntos de la hipérbola que están sobre el eje focal.
- ***Eje Transverso:*** Segmento cuyos extremos son los vértices.
- ***Centro:*** Punto medio del eje transverso.
- ***Eje Normal:*** Recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro.
- ***Asíntotas:*** Dos rectas que pasan por el centro, las cuales se aproximan a las ramas de la hipérbola sin tocarlas y se extienden indefinidamente.







UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

La ecuación canónica de la hipérbola con centro en $(0\,,0)$, con eje focal sobre el eje "x", focos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$, vértices $V_1(-a,0)$ y $V_2(a,0)$ es:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Donde, $a,b,c>0,\ c>a$ y $c^2=a^2+b^2$

La ecuación canónica de la hipérbola con centro en $(0\,,0)$, con eje focal sobre el eje "y", focos $F_1(0,c)$ y $F_2(0,-c)$, vértices $V_1(0,a)$ y $V_2(0,-a)$ es:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Donde, $a,b,c>0,\ c>a$ y $c^2=a^2+b^2$

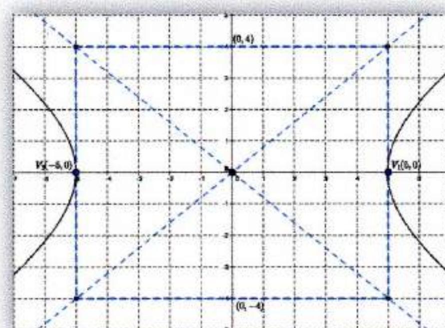
EJEMPLO 1:

Ecuación $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$. De allí tenemos que: $a^2=25$ y $b^2=16$

Entonces, $a=\sqrt{25}=5$ y $b=\sqrt{16}=4$

$$c^2=a^2+b^2$$
$$c^2=25+16$$
$$c^2=41$$
$$c=\sqrt{41}$$

Entonces, $F_1(-\sqrt{41}\,,0)$ y $F_2(\sqrt{41}\,,0)$



EJEMPLO 2:

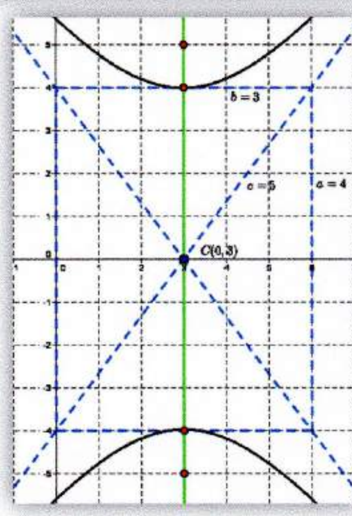
Grafica la parábola cuya ecuación canónica es: $\frac{y^2}{16}-\frac{(x-3)^2}{9}=1$

Solución: De allí tenemos que el eje focal es paralelo al eje "y", ya que el valor de a se encuentra sobre la variable "y".

Además, $a^2=16$ y $b^2=9$. Entonces, $a=4$ y $b=3$.

$$c^2=a^2+b^2$$
$$c=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

Entonces, los focos estarán en: $F_1(3,-5)$ y $F_2(3\,,5)$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

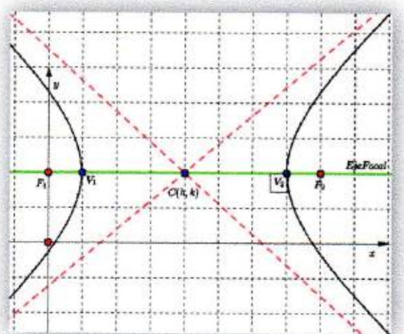
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

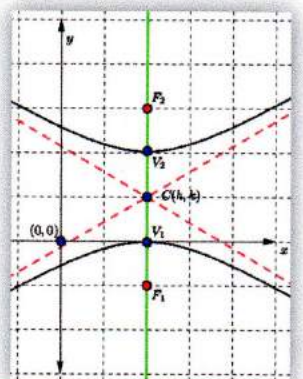
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS





La ecuación canónica de la hipérbola con centro en $(h\,,k)$, con eje focal paralelo al eje "x", focos $F_1(h-c,k)$ y $F_2(h+c,k)$, vértices $V_1(h-a,k)$ y $V_2(h+a,k)$ es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Donde, $a,b,c>0$, $c>a$ y $c^2=a^2+b^2$

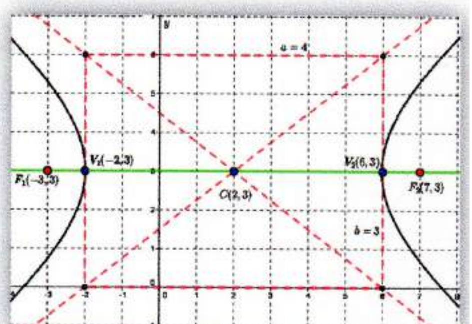
La ecuación canónica de la hipérbola con centro en $(h\,,k)$, con eje focal paralelo al eje "y", focos $F_1(h,k-c)$ y $F_2(h,k+c)$, vértices $V_1(h,k-a)$ y $V_2(h,k+a)$ es:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Donde, $a,b,c>0$, $c>a$ y $c^2=a^2+b^2$

EJEMPLO: Hallar los elementos y la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es:

$$\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{9}=1$$



Solución: La ecuación dada es de una hipérbola con centro en $(2\,,3)$ y el eje focal paralelo al eje "x".

De allí tenemos que $a^2=16$ y $b^2=9$

Entonces, $a=4$ y $b=3$

$$c^2=a^2+b^2$$

$$c=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

Focos: $F_1(-3\,,3)$ y $F_2(7\,,3)$

Vértices: $V_1(-2\,,3)$ y $V_2(6\,,3)$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

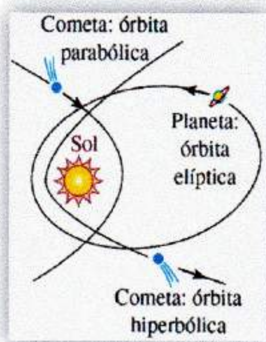
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

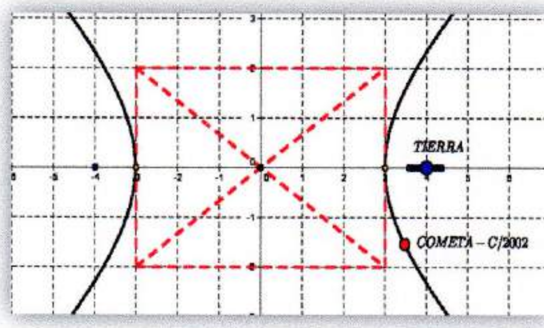
ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015
GEOMETRÍA ANALÍTICA
TEMA: SECCIONES CÓNICAS

ETAPA 4. ETAPA VERBAL:

EJERCICIO DE APLICACIÓN: En el universo, las órbitas de objetos pueden ser parabólicas, elípticas o hiperbólicas. Cuando un objeto pasa cerca del Sol (o de un planeta) no necesariamente es capturado por el campo gravitacional del objeto mayor. En ciertas condiciones, toma una cantidad fraccionaria de energía orbital de ese cuerpo mucho mayor, y el "efecto de onda" que resulta hace que la órbita sea hiperbólica, al pasar el Sol como lo muestra la figura.

La gráfica muestra la evolución del cometa *C/2002 E2 Snyder-Murakami* a lo largo de su órbita hiperbólica (con excentricidad 1,000468) en un lapso temporal que abarca desde el año 1998 hasta 2006. Allí se muestra además, la órbita de la Tierra, lo que da una idea de la amplitud del recorrido del cometa.





Determina la ecuación canónica y los elementos del Cometa **C/2002 E2 Snyder-Murakami**:

Solución: Como podemos observar es una hipérbola con eje focal sobre el eje "x", por lo tanto, la ecuación del cometa se asemeja a:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

De allí que debemos sabaer que: $a=3$ y $b=2$. Entonces, la ecuación es: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Además, los vértices tendrán coordenadas: $V(3\,,0)$ y $V(-3\,,0)$

Con Focos en: $F(4\,,0)$ y $F(-4\,,0)$

Y asíntotas: $y=\frac{2}{3}x$, $y=-\frac{2}{3}x$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

ETAPA 5. MENTAL - EVALUACIÓN GUÍA N° 6:

ACTIVIDAD GUÍA N° 6

1. Grafica y encuentra la ecuación canónica de la hipérbola cuyo centro es el origen y que tiene los elementos que se indican en cada caso:

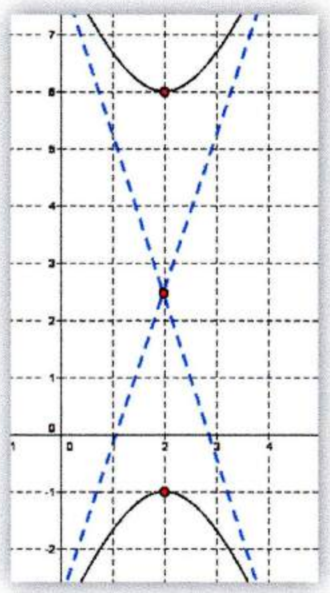
A. $V(0,3)$ y $F(0,4)$

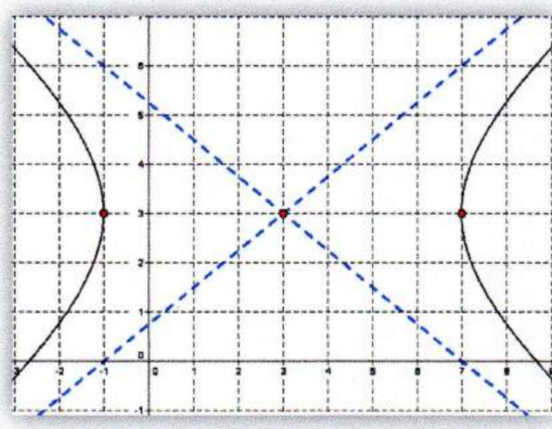
B. $V(-4,0)$ y $F(-5,0)$

C. $V(0,1)$ y $F(0,3)$

D. $V(3,0)$ y $F(-5,0)$

2. Escribe la ecuación canónica para cada hipérbola representada:





3. Grafica las siguientes hipérbolas:

A. $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{25} = 1$

B. $\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

8.2.8. POS - TEST

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

POS - TEST

OBJETIVO: *Comprobar los conocimientos adquiridos por los estudiantes durante la aplicación de las guías sobre secciones cónicas, demostrando a su vez una mejora en el aprendizaje del tema, a través, de la resolución de problemas en los que se usan las propiedades geométricas de estas figuras aplicadas a la Mecánica Celeste.*

ESTUDIANTE: ______________________________ **EDAD:** ________

1. ¿Conoces sobre el tema de la Mecánica Celeste? **SI** ___ **NO** ___

2. ¿Qué relación crees que tiene el Movimiento de los Planteas con la Matemática? ____________________

____

3. ¿Qué has escuchado hablar sobre las Secciones Cónicas? ____________________

____

4. ¿Cuáles Cónicas conoces? ____________________

5. ¿Qué relación crees que tienen la Elipse y la Parábola con los Astros? ____________________

____

6. ¿Cómo crees que se mueven los Planetas en nuestro Sistema Solar? ____________________

____

7. ¿Podrías contestar qué pasa con el Sol en diferentes ciudades del Mundo? ____________________

____

8. ¿Sabes qué es la Rotación de la Tierra? **SI** ___ **NO** ___. ____________________

9. ¿Sabes quién gira alrededor de quién en nuestro sistema solar? ____________________

____

10. ¿Sabes cuánto tiempo tarda en dar una vuelta completa la Tierra? **SI** ___ **NO** ___. ____________________

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

11. ¿Sabes cuánto tiempo tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol? **SI** ___ **NO** ___.

____

12. ¿Cuáles crees que son las órbitas que siguen los planetas, cometas, asteroides, satélites y estrellas en el Sistema Solar y en toda la galaxia? ____

13. ¿Qué contribuciones realizaron a la humanidad científicos como Nicolás Copérnico, Johannes Kepler, Galileo Galilei, entre otros? ____

____

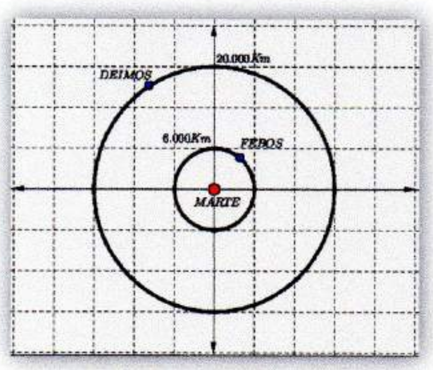
14. ¿Puedes encontrar la ecuación de la trayectoria de algún cuerpo celeste? **SI** ___ **NO** ___

15. ¿Puedes graficar la trayectoria que siguen los cuerpos celestes conociendo algunos datos de ellos? **SI** ___ **NO** ___

16. ***Resuelve:*** **EJERCICIO DE APLICACIÓN (CIRCUNFERENCIA):**

Marte tiene dos satélites –Febos y Deimos-, que giran respectivamente a solo 6.000 y 20.000 kilómetros de distancia de su planeta y cuyos diámetros no rebasan los 16 y los 18 km respectivamente. Febos se levanta por el oeste marciano, recorre el cielo en solo cuatro horas y media, parece que su vida se termina: se calcula que está cayendo sobre Marte, y que tardará muy poco en ser destrozado por la atracción del planeta. Por su parte Deimos, permanece en trayecto durante dos días y medio, lo que le da tiempo de cumplir dos ciclos completos de fases.

Al representar este ejercicio por medio de un plano cartesiano, *¿Cuáles serán las ecuaciones generales de sus dos órbitas?*



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

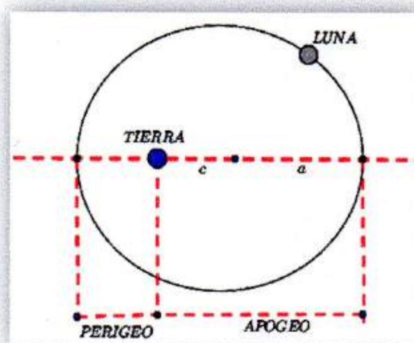
ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

17. *Resuelve:* EJERCICIO DE APLICACIÓN (ELIPSE)

La Luna gira alrededor de la Tierra siguiendo una trayectoria elíptica en la que el centro de la Tierra está en uno de los dos focos, como se ilustra en la figura. Las longitudes de los ejes mayor y menor de la órbita son 768 800 kilómetros y 767 640 kilómetros, respectivamente. Encontrar las distancias mayor y menor (apogeo y perigeo respectivamente) entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna.



18. *Resuelve:* EJERCICIO DE APLICACIÓN (ELIPSE):

Un transbordador espacial llevó un satélite de comunicaciones al espacio. Éste recorre una órbita elíptica alrededor de la Tierra. La distancia máxima entre el satélite y la Tierra es de 23.000 millas y la distancia mínima es de 22.800 millas. La Tierra está en un foco de la elipse. Determina la distancia entre la Tierra y el otro foco. (Grafica la Elipse).

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

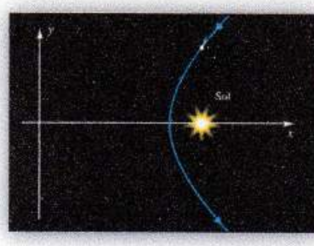
GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

19. *Resuelve:* EJERCICIO DE APLICACIÓN (PARÁBOLA):

Los cometas pueden desplazarse en trayectorias elípticas, parabólicas o hiperbólicas alrededor del Sol. Si un cometa se mueve en una trayectoria parabólica o hiperbólica, pasará cerca del Sol una vez y nunca regresa. Suponga que las coordenadas de un cometa, en millas, se pueden describir con la ecuación:

$$y^2 = 4.000.000(x - 800.000)$$



Donde el Sol está ubicado en el foco, como se observa en la figura. *Calcule las coordenadas del Sol.*

20. *Resuelve:* EJERCICIO DE APLICACIÓN (HIPÉRBOLA):

La ecuación canónica de cierto cometa que recorre una órbita hiperbólica con el Sol en uno de sus focos durante todo su trayecto antes de desaparecer es:

$$\frac{x^2}{9\,millas} - \frac{y^2}{4\,millas} = 1$$

A. Grafica la situación en un plano.

B. Determina las coordenadas del Sol.

8.3. Imágenes Actividades - Pre - Test y Pos - Test

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ
ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015
GEOMETRÍA ANALÍTICA
TEMA: SECCIONES CÓNICAS

PRE - TEST

OBJETIVO: *Medir y confrontar los conocimientos que tienen los estudiantes acerca de la Mecánica Celeste en relación con las Secciones Cónicas y sus diferentes concepciones acerca del movimiento de los astros.*

ESTUDIANTE: MIRIAN YULIET IBARRA PATIÑO **EDAD:** 16

1. ¿Conoces sobre el tema de la Mecánica Celeste? **SI** ___ **NO** X
2. ¿Crees que el Movimiento de los Planteas tiene alguna relación con la Matemática? **SI** X **NO** ___
3. ¿Has escuchado hablar sobre las Secciones Cónicas? **SI** ___ **NO** X Qué has escuchado: ___
4. ¿Conoces algunas Cónicas? **SI** ___ **NO** X Cuáles: ___
5. ¿Has oído hablar de la Elipse? **SI** ___ **NO** X
6. ¿Has oído hablar de la Hipérbola? **SI** X **NO** ___
7. ¿Qué relación crees que tienen estos conceptos con los Astros? No sé
8. ¿Cómo crees que se mueven los Planetas en nuestro Sistema Solar? En formo circulor
9. ¿Puedes encontrar la ecuación de la trayectoria de algún cuerpo celeste? **SI** ___ **NO** X
10. ¿Puedes graficar la trayectoria que siguen los cuerpos celestes conociendo algunos datos de ellos? **SI** ___ **NO** X
11. ¿Podrías contestar qué pasa con el Sol en diferentes ciudades del Mundo? En algunos ciudades el sol sale más tarde que en otros

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ
ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015 GEOMETRÍA ANALÍTICA **TEMA:** SECCIONES CÓNICAS

12. ¿Sabes qué es la Rotación de la Tierra? **SI** X **NO** __. el movimiento que xeoliza en un eje

13. ¿Sabes quién gira alrededor de quién en nuestro sistema solar? el sol gixal olxededor de la tiexxa

14. ¿Sabes cuánto tiempo tarda en dar una vuelta completa la Tierra? **SI** X **NO** __. 365 dios ?

15. ¿Sabes cuánto tiempo tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol?

SI __ **NO** X.

16. ¿Cuáles crees que son las órbitas que siguen los planetas, cometas, asteroides, satélites y estrellas en el Sistema Solar y en toda la galaxia? No sé

17. ¿Qué has escuchado hablar de los Cometas en el Sistema Solar?

No sé

18. ¿Has escuchado hablar sobre los satélites y asteroides? **SI** X **NO** __

19. ¿Sabes que contribuciones han realizado a la humanidad científicos como Nicolás Copérnico, Johannes Kepler, Galileo Galilei, entre otros? **SI** __ **NO** X

20. ¿De qué planetas, satélites, cometas, asteroides y estrellas has escuchado hablar?

Maxte, Jupitex saturno neptuno tiexxa venus plutón etc

MUCHAS GRACIAS...

	UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES	
	INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ	
	ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015 GEOMETRÍA ANALÍTICA **TEMA:** SECCIONES CÓNICAS	

POS - TEST

OBJETIVO: *Comprobar los conocimientos adquiridos por los estudiantes durante la aplicación de las guías sobre secciones cónicas, demostrando a su vez una mejora en el aprendizaje del tema, a través, de la resolución de problemas en los que se usan las propiedades geométricas de estas figuras aplicadas a la Mecánica Celeste.*

ESTUDIANTE: MIRIAN YULIET IBARRA PATIÑO **EDAD:** 16

1. ¿Conoces sobre el tema de la Mecánica Celeste? SI ✓ NO __
2. ¿Qué relación crees que tiene el Movimiento de los Planteas con la Matemática? se relaciona por que las órbitas se representan mediante ecuaciones matemáticas
3. ¿Qué has escuchado hablar sobre las Secciones Cónicas? son 4: circunferencia, elipse, parábola, hipérbola.
4. ¿Cuáles Cónicas conoces? circunferencia, elipse, parábola, hipérbola.
5. ¿Qué relación crees que tienen la Elipse y la Parábola con los Astros? la relación es que algunos se mueven en forma circular y otros en elíptica.
6. ¿Cómo crees que se mueven los Planetas en nuestro Sistema Solar? se mueven al principio en forma circular y actualmente en forma elíptica.
7. ¿Podrías contestar qué pasa con el Sol en diferentes ciudades del Mundo? en algunos lugares sale más temprano y en otros más tarde debido a la rotación de la tierra
8. ¿Sabes qué es la Rotación de la Tierra? SI ✓ NO __. es cuando gira sobre su eje.
9. ¿Sabes quién gira alrededor de quién en nuestro sistema solar? Todos giran alrededor del sol.
10. ¿Sabes cuánto tiempo tarda en dar una vuelta completa la Tierra? SI ✓ NO __. 24 horas

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ
ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015 GEOMETRÍA ANALÍTICA **TEMA:** SECCIONES CÓNICAS

11. ¿Sabes cuánto tiempo tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol? **SI** ✓ **NO** __.

365 dias en dar la vuelta alrededor del sol

12. ¿Cuáles crees que son las órbitas que siguen los planetas, cometas, asteroides, satélites y estrellas en el Sistema Solar y en toda la galaxia? parabólica, hiperbólica y circular

13. ¿Qué contribuciones realizaron a la humanidad científicos como Nicolás Copérnico, Johannes Kepler, Galileo Galilei, entre otros? el sistema geocéntrico y heocentrico y los planetas giran en forma elíptica

14. ¿Puedes encontrar la ecuación de la trayectoria de algún cuerpo celeste? **SI** ✓ **NO** __

15. ¿Puedes graficar la trayectoria que siguen los cuerpos celestes conociendo algunos datos de ellos? **SI** ✓

NO __

16. ***Resuelve:*** **EJERCICIO DE APLICACIÓN (CIRCUNFERENCIA):**

Marte tiene dos satélites –Febos y Deimos-, que giran respectivamente a solo 6.000 y 20.000 kilómetros de distancia de su planeta y cuyos diámetros no rebasan los 16 y los 18 km respectivamente. Febos se levanta por el oeste marciano, recorre el cielo en solo cuatro horas y media, parece que su vida se termina: se calcula que está cayendo sobre Marte, y que tardará muy poco en ser destrozado por la atracción del planeta. Por su parte Deimos, permanece en trayecto durante dos días y medio, lo que le da tiempo de cumplir dos ciclos completos de fases.

Al representar este ejercicio por medio de un plano cartesiano, *¿Cuáles serán las ecuaciones generales de sus dos órbitas?*

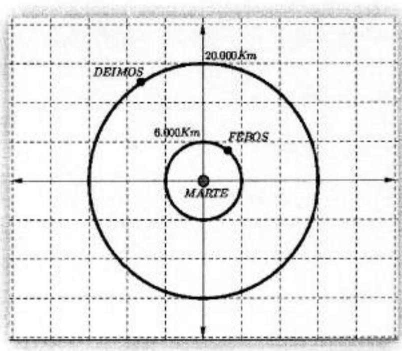
Deimos

$(x-0)^2+(y-0)^2=20.000^2$

$x^2+y^2=400.000.000$

$C=(0,0)$

$r=20.000$



Febos

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$C=(0,0)$

$r=6.000$

$(x-0)^2+(y-0)^2=6.000^2$

$x^2+y^2=36.000.000$

	UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ **ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015** GEOMETRÍA ANALÍTICA **TEMA:** SECCIONES CÓNICAS	

17. *Resuelve:* EJERCICIO DE APLICACIÓN (ELIPSE)

La Luna gira alrededor de la Tierra siguiendo una trayectoria elíptica en la que el centro de la Tierra está en uno de los dos focos, como se ilustra en la figura. Las longitudes de los ejes mayor y menor de la órbita son 768 800 kilómetros y 767 640 kilómetros, respectivamente. Encontrar las distancias mayor y menor (apogeo y perigeo respectivamente) entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna.

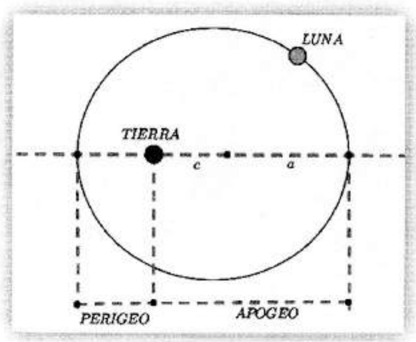
$a = \frac{768.800}{2} = 384.400$

$b = \frac{767.640}{2} = 383.820$

$c^2 = a^2 - b^2$

$c = \sqrt{(384.400)^2 - (383.820)^2}$

$c = \sqrt{580}$ $\quad c = 24{,}08$

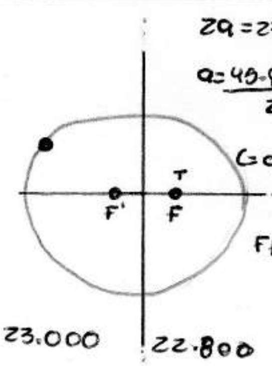


Apogeo $= a + c = 384.400 + 24{,}08$
$= 384.424$ km

Perigeo $= a - c = 384.400 - 24{,}08$
$= 384.376$ km

18. *Resuelve:* EJERCICIO DE APLICACIÓN (ELIPSE):

Un transbordador espacial llevó un satélite de comunicaciones al espacio. Éste recorre una órbita elíptica alrededor de la Tierra. La distancia máxima entre el satélite y la Tierra es de 23.000 millas y la distancia mínima es de 22.800 millas. La Tierra está en un foco de la elipse. Determina la distancia entre la Tierra y el otro foco. (Grafica la Elipse).



$2a = 23.000 + 22.800 = 45.800$ millas

$a = \frac{45.800}{2} = 22.900$ millas

$c = a - 22.800 = 22.900 - 22.800 = 100$ millas

$FF' = 200$ millas

	UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ **ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015** GEOMETRÍA ANALÍTICA **TEMA:** SECCIONES CÓNICAS	

19. *Resuelve:* EJERCICIO DE APLICACIÓN (PARÁBOLA):

Los cometas pueden desplazarse en trayectorias elípticas, parabólicas o hiperbólicas alrededor del Sol. Si un cometa se mueve en una trayectoria parabólica o hiperbólica, pasará cerca del Sol una vez y nunca regresa. Suponga que las coordenadas de un cometa, en millas, se pueden describir con la ecuación:

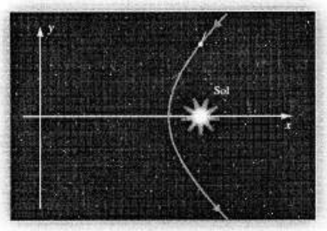
$$y^2 = 4.000.000(x - 800.000)$$

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

$V = (800.000 \; ; 0)$
$\;\;\;\;\;\; h \qquad\qquad k$

$(y-0)^2 = 4p(x-800.000)$

$y^2 = 4p(x-800.000)$



$4p = 4.000.000$

$p = 1000.000$

Donde el Sol está ubicado en el foco, como se observa en la figura. *Calcule las coordenadas del Sol.*

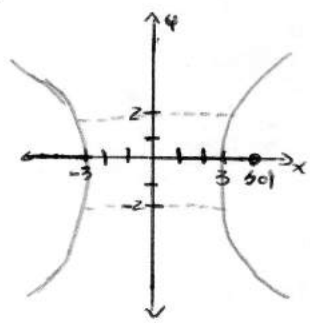
20. *Resuelve:* EJERCICIO DE APLICACIÓN (HIPÉRBOLA):

La ecuación canónica de cierto cometa que recorre una órbita hiperbólica con el Sol en uno de sus focos durante todo su trayecto antes de desaparecer es:

$$\frac{x^2}{9\,millas} - \frac{y^2}{4\,millas} = 1$$

A. Grafica la situación en un plano.

B. Determina las coordenadas del Sol.



$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

$\sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt{4} = 2$

$Sol = (3,6 \; ; 0)$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c = \sqrt{9+4}$

$c = \sqrt{13}$

$c = 3,6$ millas

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ
ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015 GEOMETRÍA ANALÍTICA **TEMA:** SECCIONES CÓNICAS

PRE - TEST

OBJETIVO: *Medir y confrontar los conocimientos que tienen los estudiantes acerca de la Mecánica Celeste en relación con las Secciones Cónicas y sus diferentes concepciones acerca del movimiento de los astros.*

ESTUDIANTE: Johan Leandro Peña Ordoñez **EDAD:** 15

1. ¿Conoces sobre el tema de la Mecánica Celeste? **SI** ___ **NO** X
2. ¿Crees que el Movimiento de los Planteas tiene alguna relación con la Matemática? **SI** X **NO** ___
3. ¿Has escuchado hablar sobre las Secciones Cónicas? **SI** ___ **NO** X Qué has escuchado: ___
4. ¿Conoces algunas Cónicas? **SI** ___ **NO** X Cuáles: ___
5. ¿Has oído hablar de la Elipse? **SI** ___ **NO** X
6. ¿Has oído hablar de la Hipérbola? **SI** ___ **NO** X
7. ¿Qué relación crees que tienen estos conceptos con los Astros? Nose
8. ¿Cómo crees que se mueven los Planetas en nuestro Sistema Solar? Alrededor del Sol giran los planetas Forma circular
9. ¿Puedes encontrar la ecuación de la trayectoria de algún cuerpo celeste? **SI** ___ **NO** X
10. ¿Puedes graficar la trayectoria que siguen los cuerpos celestes conociendo algunos datos de ellos? **SI** ___ **NO** X
11. ¿Podrías contestar qué pasa con el Sol en diferentes ciudades del Mundo? Pues debido a la rotacion el sol no logra llegar a todas las ciudades

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

12. ¿Sabes qué es la Rotación de la Tierra? **SI** x **NO** __. el movimiento que ella realiza ?

13. ¿Sabes quién gira alrededor de quién en nuestro sistema solar? los planetas giran alrededor del sol

14. ¿Sabes cuánto tiempo tarda en dar una vuelta completa la Tierra? **SI** X **NO** __. 1 Días

15. ¿Sabes cuánto tiempo tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol?

SI x **NO** __. 365 Días

16. ¿Cuáles crees que son las órbitas que siguen los planetas, cometas, asteroides, satélites y estrellas en el Sistema Solar y en toda la galaxia? Círcular.

17. ¿Qué has escuchado hablar de los Cometas en el Sistema Solar?

Que son cuerpos celestes que van por el sistema Solar

18. ¿Has escuchado hablar sobre los satélites y asteroides? **SI** X **NO** __

19. ¿Sabes que contribuciones han realizado a la humanidad científicos como Nicolás Copérnico, Johannes Kepler, Galileo Galilei, entre otros? **SI** __ **NO** X

20. ¿De qué planetas, satélites, cometas, asteroides y estrellas has escuchado hablar?

Martes jupiter, saturno, urano, neptuno, venus., pluton, tierra, Luna, Sol.

MUCHAS GRACIAS...

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ **ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015** GEOMETRÍA ANALÍTICA **TEMA:** SECCIONES CÓNICAS

POS - TEST

OBJETIVO: *Comprobar los conocimientos adquiridos por los estudiantes durante la aplicación de las guías sobre secciones cónicas, demostrando a su vez una mejora en el aprendizaje del tema, a través, de la resolución de problemas en los que se usan las propiedades geométricas de estas figuras aplicadas a la Mecánica Celeste.*

ESTUDIANTE: Johan Leandro Peña O. **EDAD:** 15.

1. ¿Conoces sobre el tema de la Mecánica Celeste? **SI** X **NO** ___

2. ¿Qué relación crees que tiene el Movimiento de los Planteas con la Matemática? Las órbitas que ellos recorren se representan con ecuaciones.

3. ¿Qué has escuchado hablar sobre las Secciones Cónicas? Son cuatro: Circunferencia, elipse, parábola, Hipérbole.

4. ¿Cuáles Cónicas conoces? Circunferencia, elipse, parábola, Hipérbole.

5. ¿Qué relación crees que tienen la Elipse y la Parábola con los Astros? Que unos se mueven en forma de elipse. y otros en parabólica.

6. ¿Cómo crees que se mueven los Planetas en nuestro Sistema Solar? Se creía que era en circular y es en elíptica.

7. ¿Podrías contestar qué pasa con el Sol en diferentes ciudades del Mundo? en algunos lugares amanece mas temprano debido a la rotación de la tierra

8. ¿Sabes qué es la Rotación de la Tierra? **SI** X **NO** ___. es cuando la tierra gira sobre su eje.

9. ¿Sabes quién gira alrededor de quién en nuestro sistema solar? Planetas, satélites. alrededor del Sol

10. ¿Sabes cuánto tiempo tarda en dar una vuelta completa la Tierra? **SI** X **NO** ___. 24 Horas

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

11. ¿Sabes cuánto tiempo tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol? **SI** X **NO** ___.

1 año; 365 Días.

12. ¿Cuáles crees que son las órbitas que siguen los planetas, cometas, asteroides, satélites y estrellas en el Sistema Solar y en toda la galaxia? en forma circular y eliptica en ahora Rabolica, Hiper

13. ¿Qué contribuciones realizaron a la humanidad científicos como Nicolás Copérnico, Johannes Kepler, Galileo Galilei, entre otros? Sistema geocéntrico, ediocéntrico.

14. ¿Puedes encontrar la ecuación de la trayectoria de algún cuerpo celeste? **SI** X **NO** ___

15. ¿Puedes graficar la trayectoria que siguen los cuerpos celestes conociendo algunos datos de ellos? **SI** X **NO** ___

16. ***Resuelve:*** **EJERCICIO DE APLICACIÓN (CIRCUNFERENCIA):**

Marte tiene dos satélites –Febos y Deimos-, que giran respectivamente a solo 6.000 y 20.000 kilómetros de distancia de su planeta y cuyos diámetros no rebasan los 16 y los 18 km respectivamente. Febos se levanta por el oeste marciano, recorre el cielo en solo cuatro horas y media, parece que su vida se termina: se calcula que está cayendo sobre Marte, y que tardará muy poco en ser destrozado por la atracción del planeta. Por su parte Deimos, permanece en trayecto durante dos días y medio, lo que le da tiempo de cumplir dos ciclos completos de fases.

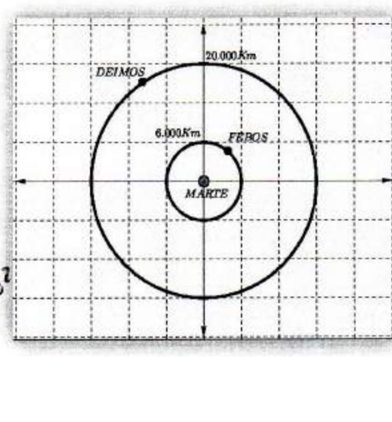
Al representar este ejercicio por medio de un plano cartesiano, *¿Cuáles serán las ecuaciones generales de sus dos órbitas?*

Febos

$(x-0)^2+(y-0)^2=6.000^2$

Deimos

$(x-0)^2+(y-0)^2=20000^2$



Febos.

$x^2+y^2=36.000.000$

Deimos

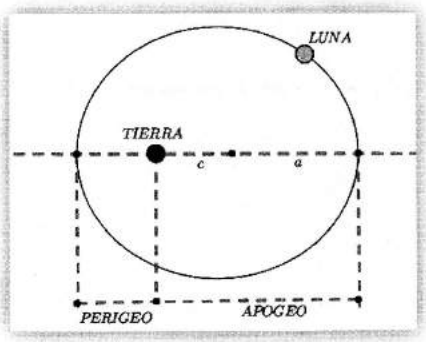
$x^2+y^2=400.000.000.$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES	
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ	
ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015 GEOMETRÍA ANALÍTICA **TEMA:** SECCIONES CÓNICAS	

17. *Resuelve:* EJERCICIO DE APLICACIÓN (ELIPSE)

La Luna gira alrededor de la Tierra siguiendo una trayectoria elíptica en la que el centro de la Tierra está en uno de los dos focos, como se ilustra en la figura. Las longitudes de los ejes mayor y menor de la órbita son 768 800 kilómetros y 767 640 kilómetros, respectivamente. Encontrar las distancias mayor y menor (apogeo y perigeo respectivamente) entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna.

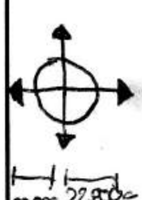
Apogeo:
384.400 + 24,08
= 384.424 Km.
Perigeo:
384.480 - 24,08
384.374 Kn.



18. *Resuelve:* EJERCICIO DE APLICACIÓN (ELIPSE):

Un transbordador espacial llevó un satélite de comunicaciones al espacio. Éste recorre una órbita elíptica alrededor de la Tierra. La distancia máxima entre el satélite y la Tierra es de 23.000 millas y la distancia mínima es de 22.800 millas. La Tierra está en un foco de la elipse. Determina la distancia entre la Tierra y el otro foco. (Grafica la Elipse).

2a: 23,000 + 22,800 = 45.800
a $\frac{45800}{2}$ 22.900.
c = - 22,800 = 22900 - 22800
= 100 millas.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA AUXILIADORA - SEDE ORITOGUAZ

ÁREA MATEMÁTICAS - AÑO 2015

GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA: SECCIONES CÓNICAS

19. *Resuelve:* EJERCICIO DE APLICACIÓN (PARÁBOLA):

Los cometas pueden desplazarse en trayectorias elípticas, parabólicas o hiperbólicas alrededor del Sol. Si un cometa se mueve en una trayectoria parabólica o hiperbólica, pasará cerca del Sol una vez y nunca regresa. Suponga que las coordenadas de un cometa, en millas, se pueden describir con la ecuación:

$$y^2 = 4.000.000(x - 800.000)$$

$(y-k)^2 = 4P(x-h)$

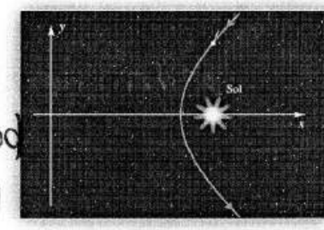
$4P = 400.000$

$\boxed{P = 1000.000}$

$V = (800.000 \,;\, 0)$ — h, k

$(y-0)^2 = 4P(x-800.000)$

$y^2 = 4P(x-800.000)$



Donde el Sol está ubicado en el foco, como se observa en la figura. *Calcule las coordenadas del Sol.*

20. *Resuelve:* EJERCICIO DE APLICACIÓN (HIPÉRBOLA):

La ecuación canónica de cierto cometa que recorre una órbita hiperbólica con el Sol en uno de sus focos durante todo su trayecto antes de desaparecer es:

$$\frac{x^2}{9\,millas} - \frac{y^2}{4\,millas} = 1$$

A. Grafica la situación en un plano.

B. Determina las coordenadas del Sol.

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c = \sqrt{9+4}$

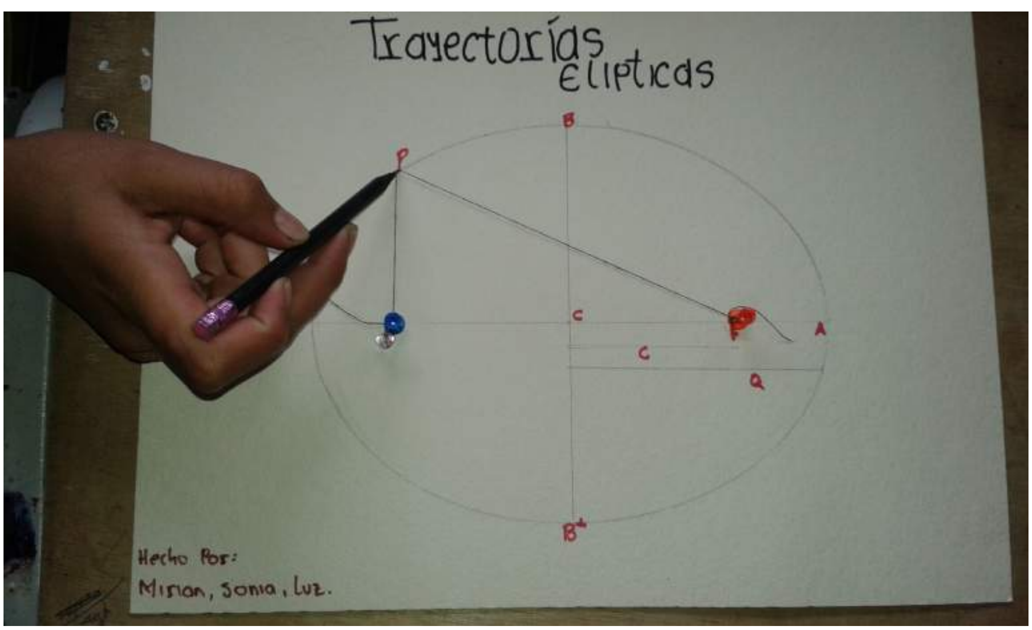
$c = \sqrt{13}$

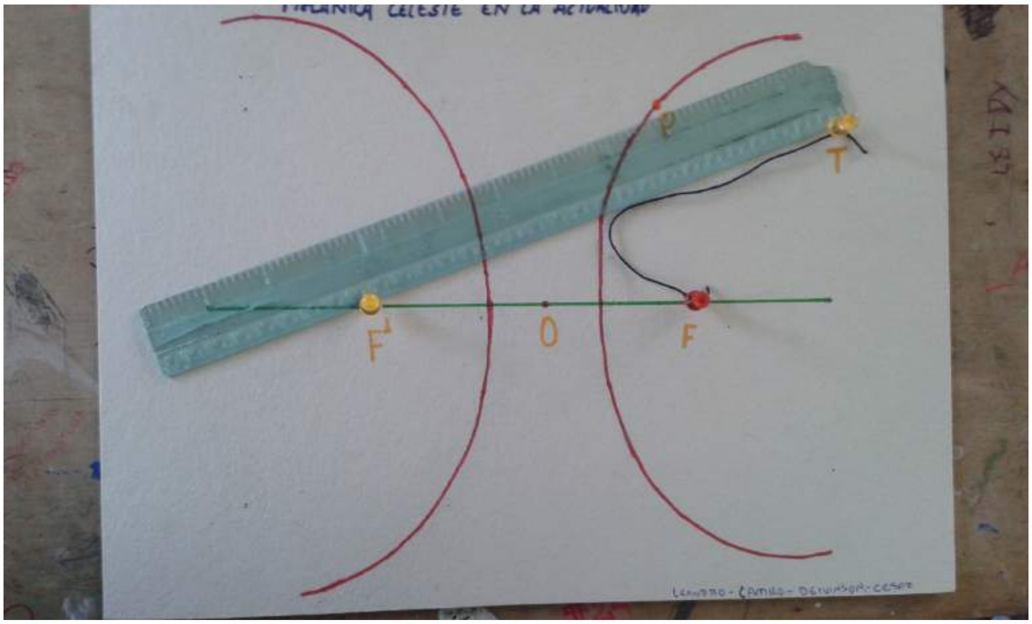
$\boxed{c = 3{,}6 \text{ millas}}$

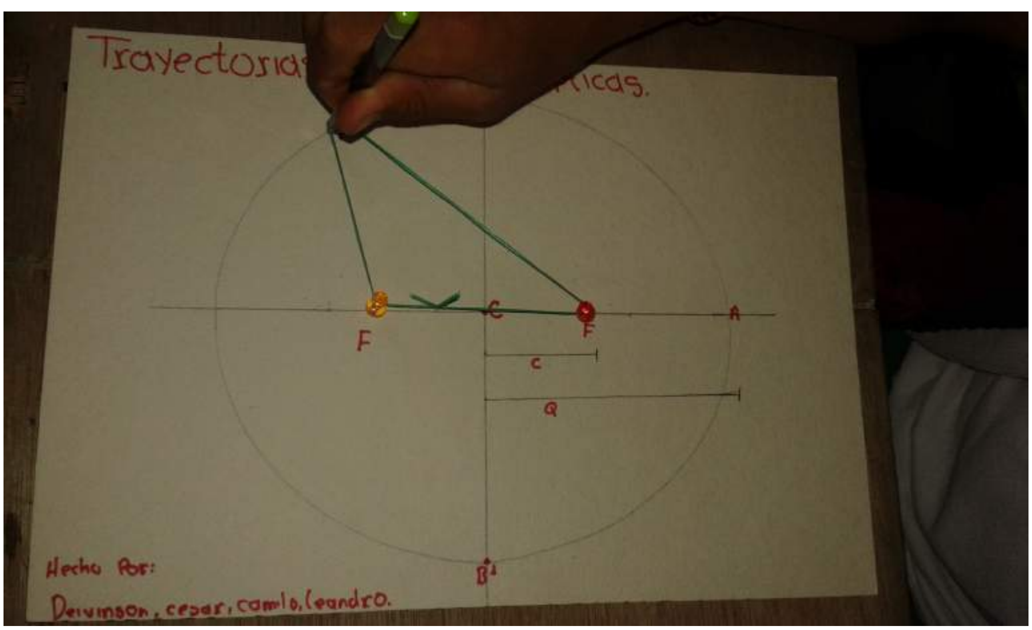
Sol $= (3{,}6 \,;\, 0)$


Sistema solar


Secciones Cónicas
Secciones Cónicas
Elipse
Parábola
Hipérbola
Secciones Cónicas
Circunferencia
Elipse
Parábola
Hipérbola


Trayectorías elípticas
B
P
C
C
A
Q
B'
Hecho Por:
Mirian, Sonia, Luz.


P
T
F
O
F


Trayectorias
F
C
F
A
c
a
Hecho Por:
Deivinson, cesar, camilo, leandro.

CAPÍTULO 9

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acosta, M. E. (2005). Tendencias Pedagógicas Contemporáneas. La Pedagogía Tradicional y el Enfoque Histórico - Cultural, Análisis Comparativo. *Revista Cubana de Estomatología*. Volumen 42, Número 1. Enero - Abril 2005.
- Alegría, P. *"Las Cónicas y sus Aplicaciones"*. (pedro.alegria@ehu.es).
- Barrios, H., y Paredes A. (2010). Aplicaciones del Análisis Vectorial al Movimiento de los Planetas. Tesis de Pregrado Licenciatura en Matemáticas. Universidad Surcolombiana. 2010.
- Colectivo de autores CEPES. Tendencias Pedagógicas en la Realidad Educativa Actual. Universidad de la Habana. Editorial Universitaria 2000.
- Fernández E. (2011). *"Las Cónicas y sus Aplicaciones"Situaciones para la Enseñanza de las Cónicas como lugar geométrico desde lo Puntual y lo Global integrado Cabri Gemétre II Plus"*. Trabajo de Investigación de Maestría. Universidad del Valle.
- Figueiras y Colab (2000). Una propuesta metodológica ara la enseñanza de la geometría a través de los fractales. Suma 35, 45 - 54.
- Galperín, P. Ya. (1959). Desarrollo de la investigación de las acciones mentales. En la colección: Ciencias Psicológicas de la URSS. TIM. Academia de Ciencias Pedagógicas de la RSFSR.
- Galperín P. Y. (1987). Los Tipos Fundamentales de Aprendizaje. En: Selección de lecturas de psicología evolutiva y pedagógica en la URSS. Antología. Moscú, Editorial Progreso.

- Gamow, G. (2001). *La Biografía de la Física*. Editorial Alianza. 448 pág.
- Garzón, L. P. (2007). Aportes del Enfoque Histórico Cultural para la Enseñanza. *Educación y Educadores*, Volumen 10, Número 1, pp. 53 - 60.
- Goodman, A., y Hirsch, L. (1996). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México D. F. Prentice - Hall Hispanoamericana, 1 ed.
- Guerrero, C. S. (22 de Enero de 2013). *Educación y Virtualidad*. Obtenido de http://educacion-virtualidad.blogspot.com/2013/01/zona-de-desarrollo-proximo-en-red-que.html
- Holliday - Darr, K. (2000). *Geometría Analítica.* México D. F. International Thomson Editores, 2 ed.
- Koyré, A. (2012). *Epistemología de las Ciencias de la Educación: Galileo y la Revolución Científica del Siglo XVII.* Recuperado de: http://episteducunlz.blogspot.com/2012/08/alexander-koyre-galileo-y-la-revolucion.html
- Kunt T. S., (1971). *"La Estructura de las Revoluciones Científicas"*. Fondo de Cultura Económica, primera edición en español (México).
- López Morejón, V., & de Prado Santa María, A. (s.f.). Biblioteca Virtual de las Ciencias en Cuba: *"Aspectos Fundamentales de la Teoría de Formación por Etapas de las Acciones Mentales y los conceptos de P. YA. Galperín"*. Obtenido de http://www.bibliociencias.cu/gsdl/collect/libros/index/assoc/HASH2f88.dir/doc.pdf
- Mejía, J. A. (Junio de 2014). Acercamiento al Enfoque Histórico Cultural en el Contexto de la Psicología en Colombia. Facultad Ciencias de la Educación. Maestría en Historia. Universidad Tecnológica de Pereira. 2014.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Serie Lineamientos Curriculares (Matemáticas)*. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles339975_recurso_6.pdf
- Oicata Ojeda, L. A., Díaz Barragán, N. A., & Talero López, P. (2013). Secuencias Didácticas en Ciencias Naturales y Matemáticas. Bogotá D. C.
- P. Ya. Galperín. (1982). Antología de la Sociología Pedagógica y de las Edades.
- Palacios, L. M. (2007). Modelos Pedagógicos (Módulo N° 1). Programa Ciencias Sociales. Facultad de Educación. Universidad Tecnológica del Chocó, 2007.

- Patiño, L. (2007). Aportes del Enfoque Histórico Cultural para la Enseñanza/ Contribution of the history and culture focus in teaching. *Educación y Educadores.* Volumen 10, Número 1, pp. 53 - 60.

- Perez, M. Y Rincon, G. (2009). Actividad, Secuencia Didáctica y Pedagogía por Proyectos. Tres alternativas para la organización del trabajo didáctico en el campo del lenguaje. Bogotá: CERLALC.

- Sandoval, S. E. (s.f.). *El Enfoque Histórico Cultural y Métodos Participativos del Aula.* Obtenido de https://sites.google.com/site/cursosdeforum/el-enfoque-historico-cultural-y-metodos-participativos-del-aula

- Stewart, J. (1999). *Cálculo Multivariable.* México D. F. International Thomson Editores. 1999.

- Suárez, C. (22 de Enero de 2013). Educación y Virtualidad (La Educación no encierra un tesoro, lo abre). Recuperado de: http://educación-virtualidad.blogspot.com/ 2013/01/zona-de-desarrollo-proximo-en-red-que.html

- Vygotsky, L. (1968). *Pensamiento y Lenguaje.* La Habana, Editorial Revolucionaria.

- Vygotsky, L. (1987). *Mind in Society. Cambridge.* Mass., Harvard University Press.

- Vygotsky, L. (1991). *Historia de las Funciones Psíquicas Superiores.* La Habana, Editorial Científico técnico.

- Villegas, M., y Ramírez, R. (1989). *Investiguemos 10.* Bogotá, Colombia: Tercera Ed. Editorial Voluntad.