CAPITULO 4

El Momento Vectorial — Reducción de Vectores

4. 1 *Vector deslizante.* Hasta ahora hemos considerado vectores libres o sea, aquellos vectores que se pueden suponer localizados indiferentemente, en todo punto del espacio de tres dimensiones.

Hay otros vectores llamados *vectores deslizantes* cuya línea de acción o *soporte* ocupa una posición fija; tales vectores pueden ser desplazados a lo largo de su soporte pero no pueden ser separados del mismo. El prototipo de estos vectores es la *fuerza.*

4. 2 *Vector de punto.* Un punto, referido a una terna cartesiana, queda determinado por las tres coordenadas, pero también es posible fijar el punto por medio del vector que une el origen de coordenadas con el punto dado. A tal vector se da el nombre de *coordenada vectorial, vector de punto, vector de posición.* Se tiene, (Figura 4-1).

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$$

donde se designa por $\mathbf{r}$ la coordenada vectorial del punto cuyas coordenadas cartesianas son (x, y, z).

4. 3 *Momento de un vector deslizante.* Lo definiremos primero con respecto al origen de coordenadas.

En Mecánica analítica es fundamental el concepto de *Momento* de una fuerza (que, como ya hemos dicho, es vector deslizante), con relación a puntos y a ejes. En general, definiremos el Momento de un vector deslizante, $\mathbf{V}$, con relación al origen de coordenadas como el siguiente producto vectorial,

(1) $$\mathbf{M} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{V}$$

a saber: *el producto del vector posición del origen de* **V** *por el vector* **V**, (Figura 4-1).

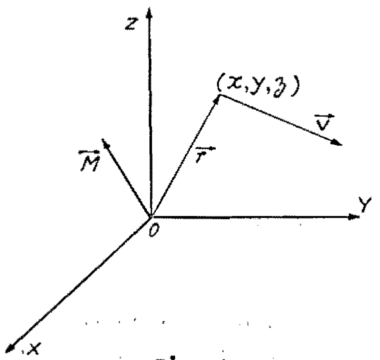

Fig 4-1

Este vector **M** es característico de los vectores deslizantes; en otras palabras, el desplazamiento del vector **V** a lo largo de su soporte, no produce modificación en el vector **M**.

Es fácil explicar la razón. En primer lugar, **M** es un vector normal al plano determinado por el origen de coordenadas, y por el soporte de **V**, no por la posición de **V**; y, por último, el deslizamiento de **V** no afecta ni el sentido de **M** ni el módulo, el cual está dado por el doble del área del triángulo que tiene **V** como base y O como vértice, área que no varía al deslizar el vector.

La siguiente demostración analítica lleva al mismo resultado. Si el vector se desplaza sobre el soporte, las nuevas coordenadas del origen podrán ser expresadas como sigue,

(3) $$x + \mathrm{m}X; \quad y + \mathrm{m}Y; \quad z + \mathrm{m}Z$$

donde m es un número positivo o negativo, convenientemente elegido.

Reemplazando las nuevas coordenadas en el determinante (5) pág. 43, se tiene como una nueva expresión para el Momento vectorial,

(4) $$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x + \mathrm{m}X & y + \mathrm{m}Y & z + \mathrm{m}Z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

Este determinante se descompone en dos. El primero es el mismo (5); el segundo es nulo por tener dos líneas proporcionales.

4. 4 *Momento de un vector deslizante, con respecto a un punto O_1 diferente del origen.*

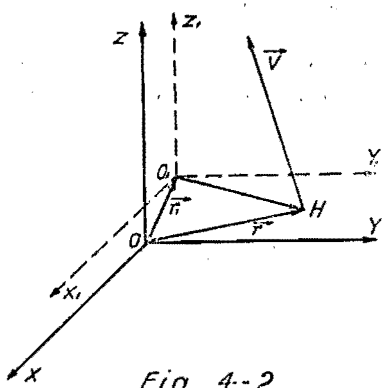

Fig 4-2

Se construye (Figura 4-2), otra terna de ejes coordenados paralelos, con origen en O_1, y se tiene en cuenta que la nueva coordenada vectorial para H, vale,

(1) $$\mathbf{O_1H} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$$

Con esto se tiene,

(2)
$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{01} &= \mathbf{O_1H} \wedge \mathbf{V} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \wedge \mathbf{V} \\ &= \mathbf{r} \wedge \mathbf{V} - \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{V} \\ &= \mathbf{M}_0 + \mathbf{r}_1 \wedge (-\mathbf{V}) \end{aligned}$$

Es decir, que se obtiene el Momento de **V** con respecto a O_1, sumando al Momento respecto de O, el Momento de un vector opuesto, —V, aplicado en O_1, con respecto al origen O del primer sistema.

4. 5 *Momento de dos vectores concurrentes — Teorema de Varignon.*

Sean dos vectores deslizantes cuyas líneas de acción concurren a un mismo punto A del espacio. Se llama *Momento resultante* de estos dos vectores, con respecto al origen, O, a la suma vectorial de los dos Momentos correspondientes a uno y otro de los vectores.

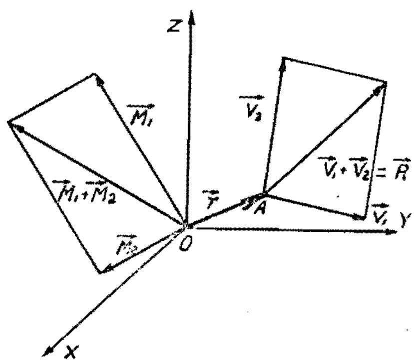

Fig 4-3

En este caso se verifica el teorema de Varignon que dice: el *Momento de la Resultante* **R** *de los dos vectores, es igual al Momento resultante,* teorema cuya demostración se da en seguida:

(1) $$\mathbf{M}_1 = \mathbf{r} \wedge \mathbf{V}_1 \ ; \qquad \mathbf{M}_2 = \mathbf{r} \wedge \mathbf{V}_2$$

Adicionando, se tiene,

$$\begin{aligned}(2) \qquad \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 &= \mathbf{r} \wedge \mathbf{V}_1 + \mathbf{r} \wedge \mathbf{V}_2 \\ &= \mathbf{r} \wedge (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \mathbf{r} \wedge \mathbf{R}\end{aligned}$$

Este teorema se generaliza a un número cualesquiera de vectores deslizantes, cuyos soportes pasen por un mismo punto, lo que equivale a decir, *vectores concurrentes.*

Para tal caso se tiene,

$$(3) \qquad \mathbf{M}_1 = \mathbf{r} \wedge \mathbf{V}_1 \ ; \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{r} \wedge \mathbf{V}_2 \ ; \ldots ; \quad \mathbf{M}_n = \mathbf{r} \wedge \mathbf{V}_n$$

Por adición de éstas:

$$\sum_{h=1}^{n} \mathbf{M}_h = \mathbf{r} \wedge \sum_{h=1}^{n} \mathbf{V}_h = \mathbf{r} \wedge \mathbf{R}$$

donde **R** indica la suma o *Resultante* de los vectores.

El teorema de Varignon ha quedado demostrado para el origen de la terna, pero como tal origen puede ser elegido en todo punto del espacio, el teorema tiene validez general.

De manera general puede enunciarse el teorema de Varignon así:

Dado un sistema de vectores $\mathbf{V}_h$ concurrentes, cuya Resultante es **R**, el Momento resultante de los $\mathbf{V}_h$, para cualesquiera punto u del espacio, es igual al Momento de la Resultante **R** respecto del mismo punto u.

4. 6 *Vectores no concurrentes* Para vectores deslizantes no concurrentes no es válido el teorema de Varignon. Para estudiar los sistemas de vectores en el caso general, es necesario definir dos elementos vectoriales, a saber: a) la Resultante general del sistema de vectores; b) el Momento resultante.

La *Resultante general* o simplemente, la *Resultante,* se define como la suma -vectorial- de los vectores considerados, supuestos libres. La Resultante se puede considerar, en consecuencia, aplicada a cualesquiera punto del espacio.

El *Momento resultante* es la suma vectorial de los Momentos de cada uno de los vectores del sistema, calculados con respecto a un mismo punto. El Momento resultante varía, en consecuencia de un punto a otro del espacio, salvo casos de excepción.

Dados, pues, los vectores,

$$\begin{array}{llll} \mathbf{V}_1 & \text{aplicado en} & & \mathbf{r}_1, \\ \mathbf{V}_2 & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & & \mathbf{r}_2 \\ \dots & & & \\ \mathbf{V}_h & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & & \mathbf{r}_h \\ \dots & & & \end{array}$$

por Resultante general se entiende el vector,

$$\mathbf{R} = \sum_{h=1}^{n} \mathbf{V}_h \tag{1}$$

y por Momento resultante,

$$\mathbf{M} = \sum_{h=1}^{n} (\mathbf{r}_h \wedge \mathbf{V}_h) \tag{2}$$

Como es obvio, en esta última los Momentos se suponen calculados respecto al origen de la terna.

La Resultante general tiene el mismo valor para todos los puntos del espacio. No ocurre lo mismo con el Momento resultante.

En efecto, para un punto O_1 de coordenada vectorial $\mathbf{r}_0$, el Momento resultante vale,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= \sum_{h=1}^{n} (\mathbf{r}_h - \mathbf{r}_0) \wedge \mathbf{V}_h \\ &= \sum_{h=1}^{n} \mathbf{r}_h \wedge \mathbf{V}_h - \sum_{h=1}^{n} \mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{V}_h \\ &= \mathbf{M} - \mathbf{r}_0 \wedge \sum_{h=1}^{n} \mathbf{V}_h \end{aligned} \tag{3}$$

de donde,

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M} - \mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{R} \tag{4}$$

Esta relación se descompone en los tres ejes cartesianos, como sigue:

$$M_{1x} = M_x - (y_0 R_z - z_0 R_y) \tag{5}$$

$$M_{1y} = M_y - (z_0 R_x - x_0 R_z) \tag{6}$$

$$M_{1z} = M_z - (x_0 R_y - y_0 R_x) \tag{7}$$

4. 7 *Eje central de un sistema de vectores.* Cabe preguntar para qué puntos del espacio coinciden *en dirección* la Resultante general y el Momento resultante.

Si se considera que tales puntos tienen por coordenada vectorial $\mathbf{r}_0$, se debe tener,

$$(8) \qquad \mathbf{M}_1 = l\mathbf{R} = \mathbf{M} - \mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{R}$$

donde l es un factor numérico.

La ecuación (8) es la ecuación vectorial de una recta que recibe el nombre de *eje central* del sistema de vectores.

Las ecuaciones cartesianas del eje central se obtienen a partir de las (5, 6, 7), teniendo en cuenta que, por ser $\mathbf{M}_1 = l\mathbf{R}$, se deduce,

$$(9) \qquad M_{1x} = lR_x \; ; \qquad M_{1y} = lR_y \; ; \qquad M_{1z} = lR_z$$

valores que substituídos en las (5, 6, 7), dan,

$$(10) \qquad lR_x = M_x - (y_0R_z - z_0R_y)$$

$$(11) \qquad lR_y = M_y - (z_0R_x - x_0R_z)$$

$$(12) \qquad lR_z = M_z - (x_0R_y - y_0R_x)$$

que son las ecuaciones cartesianas del eje central.

4. 8 *Sistema de vectores cuya Resultante es nula.* Si, dado un sistema de vectores, se tiene, $\mathbf{R} = 0$, se verifica el siguiente,

Teorema.— *Si un sistema de vectores tiene Resultante nula, el Momento resultante es el mismo para todos los puntos del espacio.*

La demostración se lleva a cabo considerando la fórmula (4) de la página 51, en la cual al substituír $\mathbf{R} = 0$, queda,

$$(1) \qquad \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}$$

o sea que, el Momento resultante contruído en O_1 (punto elegido arbitrariamente), es igual al Momento resultante construído en O.

4. 9 *El Par.* Definición.— Una aplicación importante del teorema demostrado en el número precedente, la suministra el sistema de dos vectores opuestos, no-coaxiales, de módulo igual, sistema que constituye el llamado *par* (fr. *couple*).

Veamos directamente cómo, en el caso de los vectores **V**, —**V**, (fig 4-4), el Momento resultante no varía de un punto a otro del espacio. Este Momento resultante se toma como expresión o equivalente vectorial del par.

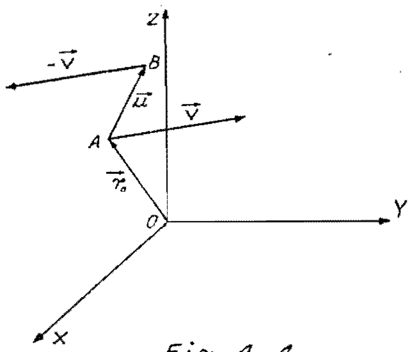

Fig 4-4

En la fig. 4-4, el vector **V** está aplicado al punto A de coordenada $\mathbf{r}_0$, y el vector opuesto, —**V**, está aplicado al punto $\mathbf{r}_0 + \mathbf{u}$.

El momento resultante, calculado para el origen, tiene por valor,

(1) $$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{V} + (\mathbf{r}_0 + \mathbf{u}) \wedge (-\mathbf{V}) \\ &= \mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{V} - \mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{V} - \mathbf{u} \wedge \mathbf{V} \end{aligned}$$

de donde,

(2) $$\mathbf{M} = \mathbf{u} \wedge (-\mathbf{V})$$

resultado que no depende de $\mathbf{r}_0$ y hace ver además cómo el valor del *par*, se reduce al Momento de uno de los vectores que le forman, calculado con respecto a un punto de la línea de acción del otro vector.

Ocurre muchas veces en las ciencias matemáticas que una misma palabra debe tener numerosas acepciones. La palabra *par* en cálculo vectorial también puede significar las otras tres disposiciones que ocurren con frecuencia, como se hace constar en la Figura 4-5.

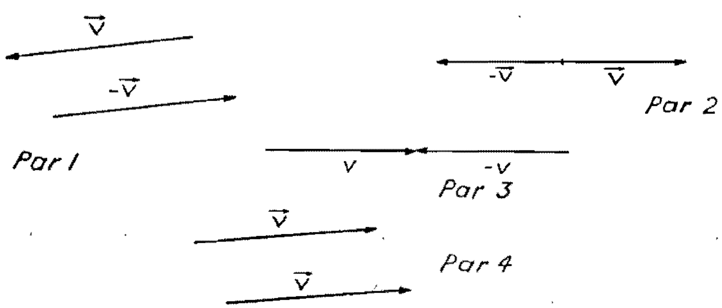

Fig 4-5

Las designaciones correspondientes a los cuatro pares son: 1) Par de rotación; 2) Par de tensión, (vectores coaxiales); 3) Par de compresión (vectores co-axiales); 4) par de vectores iguales, separados.

4. 10 *Aplicación — Area de un polígono.* Una aplicación importante del teorema relativo a un sistema de vectores con Resultante nula, lo constituye el caso de una línea poligonal plana cerrada como es la que representa la Figura 4-6.

La poligonal quedará descrita en sentido positivo cuando el área está constantemente a izquierda del observador que la recorre.

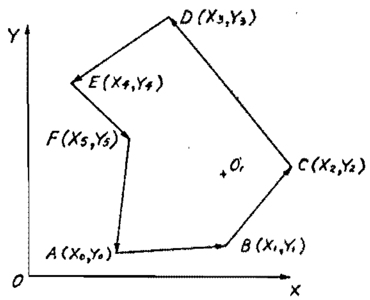

Fig 4-6

Los lados del polígono pueden entonces ser considerados como vectores deslizantes, cuya suma o Resultante es igual a cero. Por otra parte, el Momento resultante de tal sistema de vectores, que seguirá la dirección del eje z, es distinto de cero, y su medida algebraica expresa el doble del área del polígono. Para convencerse de ello basta localizar el centro de Momentos -O_1- en el interior del polígono y ver cómo, por ejemplo, el momento de $\mathbf{AB} = \mathbf{V}_1$ respecto de O_1, tiene por medida algebraica el doble del área del triángulo O_1AB, constituyéndose con las áreas de los triángulos, el área total del polígono.

La doble área del polígono tiene, pues, por expresión,

$$(1) \qquad 2A = \pm \text{mod}\ \Sigma \mathbf{r}_s \wedge \mathbf{V}_s = \Sigma\,(x_s Y_{s+1} - y_s X_{s+1})$$

donde el signo se debe elegir de acuerdo con lo dicho sobre el sentido de recorrido.

La fórmula (1) se transforma fácilmente en otra, que permite calcular el área en función de las coordenadas de los vértices.

Al efecto, se tiene,

$$(2) \qquad Y_{s+1} = y_{s+1} - y_s\,; \qquad X_{s+1} = x_{s+1} - x_s$$

valores que, al ser reemplazados en (1), dan,

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad 2A &= \Sigma\,[x_s(y_{s+1} - y_s) - y_s\,(x_{s+1} - x_s)\\
&= \Sigma\,(x_s y_{s+1} - y_s x_{s+1})
\end{aligned}
$$

expresión en la cual se debe tener en cuenta que es $x_0 = x_n$; $y_0 = y_n$ (dos designaciones para el punto de salida y de llegada)

Esta fórmula (3) es usada en Topografía para el cálculo de áreas. Su obtención directa no ofrece dificultad si se escribe el valor del área de un triángulo en función de las coordenadas de los vértices.

EJERCICIO NUMERICO SOBRE LA DETERMINACION DEL EJE CENTRAL.

Se da el siguiente sistema de cuatro vectores:

	X	Y	Z	x	y	z
V_1 :	—2	1	4	1	3	—1
V_2 :	5	—3	2	2	—1	2
V_3 :	—4	2	3	—3	2	5
V_4 :	7	—5	4	4	—1	—2
	6	—5	13			
	$= R_x$	$= R_y$	$= R_z$			

Componentes del Momento:

$yZ - zY$	$zX - xZ$	$xY - yX$
13	—2	7
4	6	—1
—4	—11	2
—14	—30	—13
—1	—37	—5
$= M_x$	$= M_y$	$= M_z$

Las ecuaciones del eje central vienen a ser,

$$6l = -1 - 13y - 5z$$

$$5l = 37 + 6z - 13x$$

$$13l = -5 + 5x + 6y$$

La eliminación del parámetro l conduce a las ecuaciones ordinarias,

$$78x - 65y - 61z - 227 = 0,$$

$$30x + 205y + 65z - 17 = 0$$

4. 11 *Teorema sobre proyecciones.* Es importante demostrar el siguiente:

Teorema.— *La proyección del Momento resultante sobre la Resultante general, es constante.*

En efecto, partiendo de la fórmula (4) de la página 51, se tiene al multiplicar escalarmente por **R**,

$$\mathbf{R}.\mathbf{M}_1 = \mathbf{R}.\mathbf{M} - \mathbf{R}.(\mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{R}) \tag{1}$$

El último de los productos escritos en (1) es nulo por tratarse de dos vectores perpendiculares, luego,

$$\mathbf{R}.\mathbf{M}_1 = \mathbf{R}.\mathbf{M} \tag{2}$$

Basta dividir en (2) por el módulo de R para que el teorema quede demostrado.

En el eje central el Momento resultante coincide en dirección con la Resultante general, lo que significa que el eje central es el lugar geométrico de los puntos para los cuales es *mínimum* el Momento resultante.

Este resultado se obtiene fácilmente por cálculo.

En efecto, se trata de determinar el *mínimum* de **M**, o, lo que es equivalente, el *mínimum* de la función de tres variables.

$$M^2 = M^2_x + M^2_y + M^2_z \tag{3}$$

que expresa el cuadrado del módulo del vector Momento. M_x, M_y, M_z están dados por las relaciones (5), (6), (7) de la página 51.

Las condiciones del *minimum* son,

$$(4) \qquad M\frac{\partial M}{\partial x} = M_x\frac{\partial M_x}{\partial x} + M_y\frac{\partial M_y}{\partial x} + M_z\frac{\partial M_z}{\partial x} = 0$$

con otras dos ecuaciones análogas provenientes de la derivación según y, z respectivamente.

Se forma en consecuencia un sistema que puede escribirse como sigue,

$$(5) \qquad [M_x, M_y, M_z] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial M_x}{\partial x} & \dfrac{\partial M_y}{\partial x} & \dfrac{\partial M_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial M_x}{\partial y} & \dfrac{\partial M_y}{\partial y} & \dfrac{\partial M_z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial M_x}{\partial z} & \dfrac{\partial M_y}{\partial z} & \dfrac{\partial M_z}{\partial z} \end{bmatrix} = 0$$

La matriz que figura como factor a la derecha, recibe el nombre de *tensor*. Calculando las derivadas con ayuda de las relaciones (5), (6), (7) de la página 51 se obtiene al substituír en (5),

$$(6) \qquad [M_x, M_y, M_z] \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix} = 0$$

y, al efectuar la multiplicación,

$$(7) \qquad M_yR_z - M_zR_y = 0$$

$$(8) \qquad M_zR_x - M_xR_z = 0$$

$$(9) \qquad M_xR_y - M_yR_x = 0$$

de este sistema se deduce la proporción,

$$(10) \qquad \frac{M_x}{R_x} = \frac{M_y}{R_y} = \frac{M_z}{R_z} = l$$

que son, si se tiene en cuenta substituír los valores M_x, M_y, M_z, las mismas ecuaciones del eje central que aparecen en la página 52.

4. 12 *Reducción de un sistema de vectores.* Reducir un sistema de vectores es obtener la Resultante (definida como vector libre) y el Momento resultante para un punto dado del espacio.

Se da el calificativo de *equivalentes,* a aquellos sistemas de vectores que tienen la misma Resultante y el mismo Momento resultante.

La determinación del eje central tiene la ventaja de que para los puntos del mismo, la Resultante general y el Momento resultante llevan la misma dirección del eje. Tal reducción es la más conveniente, y constituye la expresión más simple de sistema equivalente al sistema dado.

El complejo constituído entonces por **M** y por **R** recibe el nombre de *torsor.*

Cuando los vectores son fuerzas aplicadas a un sólido, **R** es causa de traslación del sólido según la dirección c-c'; **M** es causa de la rotación alrededor de c-c', eje central.

4. 13 *Momento de un vector con respecto a un eje.* Se da el nombre de Momento de un vector **V** con respecto a un eje a-a', a la proyección sobre a-a' del vector Momento, construído en un punto cualesquiera del eje a-a'.

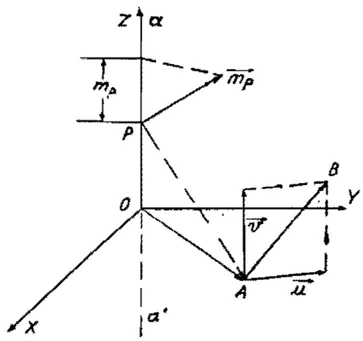

Fig 4-7

Esta definición será valida al demostrar que la proyección M_p del vector $\mathbf{M}_p$ construído en el punto p, (Figura 4-7), es independiente de la posición de dicho punto en el eje a-a'.

Teorema.— La proyección sobre un eje, del Momento de un vector con relación a puntos de dicho eje, es constante.

Con el fin de demostrar el teorema, elegimos el eje z-z' en coincidencia con a-a'; por otra parte, el origen del vector quedará dispuesto sobre el plano de las xy.

Con atención a la Figura 4-7, podemos escribir,

$$
(1) \qquad \begin{aligned} \mathbf{M}_p &= \mathbf{pA} \wedge \mathbf{AB} \\ &= (\mathbf{pO} + \mathbf{OA}) \wedge (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{pO} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{pO} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{OA} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{OA} \wedge \mathbf{v} \end{aligned}
$$

Acerca de los vectores escritos en el segundo miembro de esta relación, se advierte que el primero y el cuarto son perpendiculares al eje a-a'; el segundo es nulo por estar los factores dispuestos en soportes paralelos.

En consecuencia, al establecer la relación de proyecciones, queda,

$$
(2) \qquad (\mathbf{M}_p)_{a\text{-}a'} = \mathbf{M}_{a\text{-}a'} = (\mathbf{OA} \wedge \mathbf{u})_{a\text{-}a'}
$$

resultado que no depende de la posición del punto p.

La relación (2) justifica una definición diferente para el momento de un vector con relación a un eje a-a', a saber,

Momento de un vector **V** *aplicado en* A, *con relación a un eje* a-a', *es la medida algebraica del Momento que la componente del vector* **V**, *situada en un plano normal al eje* a-a', *posee con respecto al punto de intersección del eje con el plano.*

Es obvio que le momento de un vector con relación a un eje, es una magnitud definida para vectores deslizantes.

Otra demostración muy sencilla del teorema que nos ocupa, se basa en la relación para cambio de origen, (Fórmula (2) del número 4-4).

Al efecto, si se considera el punto p como nuevo origen, se puede escribir,

$$
(3) \qquad \mathbf{M}_p = \mathbf{M}_0 - \mathbf{Op} \wedge \mathbf{V}
$$

Al multiplicar escalarmente los dos lados por el versor **k**, se tiene,

$$
(4) \qquad \mathbf{k}.\mathbf{M}_p = \mathbf{k}.\mathbf{M}_0 - \mathbf{k}(\mathbf{Op} \wedge \mathbf{V})
$$

Ahora bien, el último sumando es nulo por tratarse del producto interior de dos vectores normales entre sí. Queda en consecuencia,

$$(5) \qquad \mathbf{k}.\mathbf{M}_p = \mathbf{k}.\mathbf{M}_0$$

o bien,

$$(6) \qquad M_p = M_0$$

lo que demuestra el teorema.

Observación.— El concepto de *momento de un vector con relación a un eje,* no es esencial a la teoría. Si tenemos en vista la conveniencia de simplificar los principios, dicho concepto debe relegarse a la historia.

EJERCICIOS

1) Obtener, con respecto al origen de coordenadas, el momento del vector: $[6; 2; -5]$, aplicado en el punto $(2; 3; 1)$. Calcular además el momento en el punto $(2; -1; 4)$

Resps. $$\mathbf{M}_0 = [-17;\ 16;\ 14],$$
$$\mathbf{M}_1 = [-14; -18; -24].$$

2) Se dan 3 vectores deslizantes y un punto en sus correspondientes líneas de acción, como sigue:

$$\mathbf{V}_1 = [-3; 5; 7], \qquad \mathbf{P}_1 = (\ 1; -1; 1),$$
$$\mathbf{V}_2 = [\ 2; 0; 5], \qquad \mathbf{P}_2 = (-3;\ 2; 5),$$
$$\mathbf{V}_3 = [-5; 2; 4], \qquad \mathbf{P}_3 = (\ 2;\ 3; 4).$$

Calcular la resultante general, y el momento resultante en el origen de la terna; luego en el punto $(1; 1; 1)$.

Resps. $$\mathbf{R} = [-6;\ 7;\ 16],$$
$$\mathbf{M}_0 = [2;\ -13;\ 17],$$
$$\mathbf{M}_1 = [-7;\ 9;\ 4].$$

3) Obtener las ecuaciones del eje central del sistema constituído por los vectores del ejercicio 2 y el siguiente:

$$\mathbf{V}_4 = [5;\ -2;\ 6], \qquad \mathbf{P}_4 = (-7;\ 5;\ 1)$$

Resp. $$11x - 55y + 13z + 102 = 0,$$
$$5x + 485y - 110z - 754 = 0.$$

4) Calcular el área del exágono cuyos vértices, en coordenadas rectangulares, están definidos así:

A (5; 1), B (8; 3), C (10; 5), D (8, 7), E(6; 10), F (0; 5)

Resp. Area = 57,5

5) Sistemas equivalentes. Demostrar que un sistema de n vectores, (n mayor que 2), es equivalente a dos vectores, uno de los cuales se considera aplicado a un punto dado, no así el restante.

Aplicaciones a la Geometría Analítica.

6) Ecuación vectorial del plano. Dada una terna cartesiana y un plano fijo referido a aquélla, llamaremos **n** al versor normal a dicho plano.

$$\mathbf{n} = [\alpha, \beta, \gamma]$$

Si P(X, Y, Z) es un punto cualesquiera del plano, se tiene, (Figura 4-8):

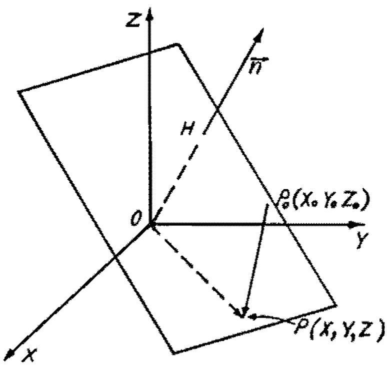

Fig 4-8

$$\mathbf{OP.n} = \mathrm{OH} = \mathrm{p}$$

que es la ecuación vectorial del plano. La forma analítica correspondiente es,

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z - p = 0$$

Si $P_0(X_0, Y_0, Z_0)$ es un punto fijo en el plano, se tiene, por otra parte

$$\mathbf{P_0P.n} = 0$$

Para ésta se tiene la correspondiente ecuación analítica:

$$(X - X_0)\alpha + (Y - Y_0)\beta + (Z - Z_0)\gamma = 0$$

7) Ecuación vectorial de la renta:

Construíao uno de los versores paralelos a la recta, se tiene, si

Q_0 es punto fijo en la misma:

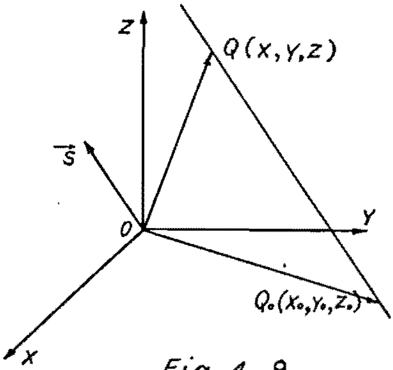

Fig 4-9

$$\mathbf{OQ} = \mathbf{OQ}_0 + \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$$

o bien,

(1) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + q\mathbf{s}$

donde q tiene por valor el segmento Q_0Q.

También se puede expresar la ecuación vectorial de la recta como sigue:

(2) $\mathbf{q} \wedge \mathbf{s} = 0$

De la (1) o la (2) se obtienen fácilmente las ecuaciones paramétricas:

$$x = x_0 + \alpha q$$
$$y = y_0 + \beta q$$
$$z = z_0 + \gamma q$$