



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

**Sobre el comportamiento dinámico de la corriente en
el condensador de un convertidor Boost controlado con
ZAD**

**On the dynamic behavior of the current in the
condenser of a boost converter controlled with ZAD
strategy**

Victoria Patricia Paz Rivera

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
Manizales, Colombia
2016

**Sobre el comportamiento dinámico de la corriente en
el condensador de un convertidor Boost controlado con
ZAD**

**On the dynamic behavior of the current in the
condenser of a boost converter controlled with ZAD
strategy**

Victoria Patricia Paz Rivera

Tesis de grado presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias - Matemática Aplicada

Director:
Simeón Casanova Trujillo, Ph.D

Co-directores:
Darío del Cristo Vergara Pérez, Ms.C
Francisco Abel Roldán Hoyos, Ms.C

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
Manizales, Colombia

2016

(Dedicatoria)

A **Dios** el ser que hace posible que los deseos de mi corazón se cumplan.

A mi esposo *Brander Adolfo Berrio Blanco* y a mi hijo *Pedro Benoith Berrio Paz* los dos motores de mi vida quienes me motivaron a superar las diferentes dificultades para llegar a esta meta.

A mis padres *Ledys Del Socorro Rivera Paz* y *Carmelo De Jesús Paz Aparicio* por su apoyo incondicional en el aspecto emocional y económico.

Agradecimientos

Esta tesis ha sido posible gracias a la colaboración desinteresada de algunas personas que me acompañaron en este proceso.

En primer lugar agradezco a mi director de tesis el Doctor **Simeon Casanova Trujillo** por darme la oportunidad de trabajar bajo su orientación y guía.

Agradezco de manera especial a mi co-director y amigo Ms.C **Darío Del Cristo Vergara Pérez** por motivarme a seguir adelante en cada momento difícil que se me presentó en el desarrollo de esta tesis, además por compartir sus conocimientos conmigo.

Resumen

En la presente tesis se realiza un estudio analítico y numérico sobre la dinámica de la corriente en el condensador de un convertidor Boost controlado con ZAD, usando un PWM de pulso al centro simétrico, se hizo un análisis de estabilidad de órbitas $1T$ -periódicas mediante el cálculo analítico de los valores propios de la matriz jacobiana del sistema dinámico, donde se determinó la presencia de bifurcaciones tipo Flip y Neimar-Sacker, se muestra la presencia de caos a partir del análisis de los exponentes de Lyapunov, el cual es controlado mediante las técnicas ZAD Y FPIC.

Palabras clave: Control no-lineal deslizante ZAD, PWMC, convertidor Boost, caos, bifurcación Flip, bifurcación Neimar-Sacker.

Abstract

In the present thesis was realized an analytical study on the dynamic of the current in the condenser of a Boost converter controlled with ZAD, using a PWM of pulse to the symmetrical Center . We did an analysis of stability of orbits $1T$ -periodic by means of the analytical calculation of the own values of the matrix Jacobiana of the dynamic system, where it was determined the presence of bifurcations tipe Flip and Neimar-Sacker, the presence of chaos appears from the analysis of the exponents of Lyapunov, wich is controlled by means of the techniques ZAD and FPIC.

Keywords: Non-linear sliding control ZAD, PWMC, Boost converter, chaos, Flip bifurcation, Neimar-Sacker bifurcation

Contenido

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
Lista de símbolos	xii
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
2. Marco Teórico	4
2.1. El convertidor boost	4
2.2. El convertidor boost teniendo en cuenta la corriente en el condensador C	5
2.3. Modulación de anchura de pulso	10
2.4. Técnica de control ZAD	11
2.4.1. Dinámica ideal de deslizamiento	12
2.5. Órbitas periódicas	13
2.6. Bifurcaciones	14
2.7. Exponentes de Lyapunov	14
2.8. Caos	14
3. Análisis de la dinámica del sistema en el caso $u = \{1, 0, 1\}$	16
3.1. Aproximación por rectas a tramos de la superficie de conmutación	16
3.1.1. Aproximación de $s(x(t))$ por rectas a tramos	16
3.2. Cálculo del ciclo de trabajo	18
3.3. Discretización del sistema	19
3.3.1. Ciclo de trabajo en estado estacionario	21
3.4. Desempeño de la estrategia ZAD con aproximación por rectas a tramos de la superficie de conmutación	21
4. Existencia y Estabilidad de órbitas Periódicas	35
4.1. Órbitas 1-TPeriódicas	35
4.2. Órbitas 2T-periódicas	38
4.2.1. Órbitas 2T-periódicas no saturadas	38
4.2.2. Órbitas 2T-periódicas semi-saturadas	39
4.2.3. Órbitas 2T-periódicas saturadas	41

4.3. Estabilidad de las órbitas periódicas	42
4.3.1. Jacobiano de la aplicación de Poincaré	42
5. Bifurcaciones	47
5.1. Bifurcaciones tipo flip	47
5.2. Bifurcaciones tipo Neimar-Sacker	58
5.3. Simulación del sistema con retardo de tiempo	62
6. Existencia y Control de Caos	71
6.1. Presencia de caos	71
6.2. Control de caos con FPIC	72
6.3. Técnica de control TDAS	81
7. Conclusiones, trabajos futuros y difusión de resultados	90
7.1. Conclusiones	90
7.2. Trabajos Futuros	90
7.3. Difusión de resultados	91
Bibliografía	92

Lista de símbolos

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
C	Capacitancia 2-2	μF	
d_T	Ciclo de trabajo 3-6		
d^*	Ciclo de trabajo en estado estacionario 3-16		
v_{in}	Tensión de alimentación 2-2	V	
i	Corriente en el inductor 2-2	A	
L	Inductancia 2-2	mH	
N	Parámetro de control con FPIC 6.2.1		
R	Resistencia de Carga 2-2	Ω	
T	Periodo de muestreo 3-1	s	
v_C	Salida de tensión en el condensador 2-2	V	
L_i	Exponentes de Lyapunov 2-33		

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
γ	Constante de adaptación	1	$\sqrt{\frac{L}{R^2C}}$
N	Parámetro de control con FPIC 6-1		
η	Parámetro de control con TDAS 6-2		

Superíndices

Superíndice	Término
-------------	---------

n	Coficiente T 3-1
---	----------------------------------

Abreviaturas

Abreviatura	Término
-------------	---------

FPIC	Fixed Point Induced Control 6.2.1
MCC	Modo de Conducción Continuo 2.1
MCD	Modo de Conducción Discontinuo 2.1
MOSFET	Metal-Oxide-Semiconductor Field-Effect Transistor 2-2
PWM	Modulación de ancho de pulso 2-3
PWMC	Modulación de ancho de pulso centrado 2-3
TDAS	Time- Delay Autosynchronization 6-2
ZAD	Zero Averaged Dynamics 2.4

1 Introducción

Resumen:

Este capítulo presenta el estado del arte acerca de las investigaciones que han abarcado estudios realizados sobre la dinámica de algunos convertidores de potencia, manejados con PWM y ZAD, la motivación y la organización general del documento.

1.1. Motivación

El estudio de los sistemas dinámicos ha avanzado en los últimos tiempos y el análisis de sus teorías abarca gran variedad de técnicas y aplicaciones dentro de los distintos campos como la física, la ingeniería, ciencias de la computación, electrónica, entre otras. Dentro del campo de la electrónica una de las aplicaciones de la teoría de los sistemas dinámicos ha sido en los dispositivos electrónicos en particular los convertidores DC-DC.

Los convertidores DC-DC son configuraciones en electrónica que permiten, a partir de una fuente de tensión determinada, controlar la tensión a la salida del convertidor, es decir, actúan como puentes de transferencia de energía entre fuentes y cargas, ambas de corriente directa. Esto nos induce al interrogante de como transferir energía desde una fuente con amplitud v_{in} a la carga que necesita una tensión v_{ref} y que haya la mínima pérdida de potencia.

La función del convertidor DC-DC que conecta una fuente de energía, es la de acondicionar la tensión al valor de trabajo del sistema, elevando esta tensión si es necesario, asegurando la máxima transferencia de potencia según las condiciones de operación de la fuente [11].

Dentro de las múltiples aplicaciones que tienen estos convertidores están las fuentes de potencias de computadoras, sistemas distribuidos de potencia, sistemas de potencia en vehículos eléctricos, aeronaves, etc. Por tanto, su estudio ha sido fuente de investigación en el campo de las teorías de los sistemas dinámicos [14].

Por otro lado se ha establecido que alrededor de un 90 % de la energía eléctrica se procesa a través de convertidores de potencia antes de su uso final. Existen diferentes tipos de convertidores DC-DC cada uno con un propósito propio. En algunos la tensión de salida es mayor que la de la entrada mientras que en otros es menor. Actualmente contamos entre otros con

los convertidores Boost, Buck, Buck-Boost [23].

De especial interés tenemos el convertidor Boost, el cual es un circuito elevador de tensión de amplio uso a nivel industrial el cual exhibe un comportamiento no lineal en virtud de su sistema de conmutación ; el convertidor Boost usa las características del inductor y el capacitor como elementos almacenadores de energía, para elevar la corriente proveniente de la fuente de alimentación y usarla para inyectarla al condensador, produciendo así niveles de voltaje mayores en la carga que los de la fuente [26].

El principio básico de este convertidor consiste en dos estados distintos dependiendo del estado del interruptor; cuando el interruptor esta cerrado, la bobina almacena la energía de la fuente, a la vez la carga es alimentada por el condensador, cuando el interruptor esta abierto, el único camino para la corriente es a través del diodo y circula por el condensador (hasta que se carga completamente) y la carga.

El condensador de un convertidor Boost es un dispositivo pasivo capaz de almacenar energía sustentando un campo eléctrico. Está formado por un par de superficies conductoras, generalmente en forma de láminas o placas, en situaciones de influencia total (esto es, que todas las líneas de campo eléctrico que parten de una van a parar a la otra) separadas por un material dieléctrico o por el vacío. Las placas sometidas a una diferencia de potencial, adquieren una determinada carga eléctrica, positivas, en una de ellas y negativa en la otra, siendo nula la variación de carga total. Al conectar un condensador en un circuito la corriente empieza a circular por el mismo, a la vez el condensador va acumulando carga entre sus placas; cuando el condensador se encuentra totalmente cargado deja de circular corriente por el circuito, si se quita la fuente y se coloca el condensador y la resistencia en paralelo la carga empieza a fluir de una de las placas del condensador a la otra a través de la resistencia, hasta que la carga es nula a las dos placas. En este caso, la corriente circulará en sentido contrario al que circulaba mientras el condensador se estaba cargando [20].

Los convertidores de potencia, debido a su configuración se pueden ver como sistemas de estructuras variable. En la década de los 80 se empiezan a diseñar controladores en modos deslizantes para este tipo de sistemas. Carpita diseña un controlador basado en modos deslizantes y lo define como una superficie dada por una combinación lineal del error y la derivada del error. Sin embargo, este tipo de diseños presenta el inconveniente de generar chattering en el sistema, lo cual aumenta el rizado y la distorción a la salida [6].

En el 2001 se reportó por primera vez la técnica de control ZAD (Zero average Dynamic), la cual consiste en definir una superficie de conmutación y obligar a que el sistema dinámico que gobierna el convertidor evolucione en promedio sobre dicha superficie [10, 22]. Esta técnica garantiza frecuencia fija de conmutación. Se trata de un diseño en el que se fija una salida

auxiliar y con base en ella se define que acción de control digital que garantiza promedio de la salida auxiliar en cada iteración. La técnica ZAD se ha implementado en el convertidor Buck y se ha evidenciado buenos resultados en cuanto a robustez y bajo error de salida.

Sin embargo, cuando se aplicó la técnica ZAD al convertidor tipo Buck manejado con PWML (Modulador de anchura de Pulso al lado), no se obtuvieron buenos resultados en cuanto a capacidad de regulación del sistema cuando opera un régimen caótico [3].

En [6] se hizo un análisis de la dinámica de un convertidor Boost controlado con ZAD usando la superficie de conmutación $s(x(t)) = k_1(x_1(t) - x_{1ref}) + k_2(x_2(t) - x_{2ref})$ y se demostró analíticamente que la aproximación de la superficie de conmutación por rectas a tramos, es tan buena como se desee. Dicho de otra manera, el error en la aproximación se puede hacer tan pequeño como queramos, además, los máximos y los mínimos del error en la aproximación ocurren justamente en los extremos de los sub-intervalos, hecho que corroboraron mediante simulación en MATLAB; otro aporte que se obtuvo de este estudio es que la técnica ZAD implementada en el convertidor Boost presenta buena regulación debido a la presencia de zonas en el espacio biparamétrico $k_1 \times k_2$ en las que el sistema regula desde el 1 % hasta el 7 %, siendo mayores las zonas donde se presenta regulación del 5 % y el 1 %.

A partir de estos resultados, en esta tesis se analiza la dinámica de la corriente en el condensador de un convertidor Boost controlado con la técnica ZAD utilizando una superficie de conmutación definida como una combinación lineal del error en la tensión, error en la corriente y el error en la corriente del condensador, dada por (1-1).

$$s(x(t)) = k_1(x_1(t) - x_{1ref}) + k_2(x_2(t) - x_{2ref}) + k_3(x_3(t) - x_{3ref}) \quad (1-1)$$

2 Marco Teórico

Resumen:

En este capítulo se presentan las herramientas básicas para el estudio del convertidor boost cuando es controlado con la técnica ZAD. Se describe el sistema de ecuaciones del boost cuando se tiene en cuenta la corriente en el condensador C y PWM como la estrategia de control a utilizar para el cálculo del ciclo de trabajo.

Se hace un estudio de la dinámica del boost teniendo en cuenta la corriente en el condensador C , cuando permitimos que el sistema evolucione sobre una superficie de conmutación $s(x(t))$, además, se muestran conceptos de órbitas periódicas, exponentes de Lyapunov, bifurcación y caos.

2.1. El convertidor boost

El convertidor tipo boost es un circuito elevador de tensión, que usa las características del inductor y el capacitor como elementos almacenadores de energía para elevar la corriente proveniente de la fuente de alimentación y usarla para inyectarla al condensador, produciendo así niveles de voltaje mayores en la carga que los de la fuente [26].

El esquema básico de un convertidor boost es el que se muestra en la Figura 2-1, donde v_{in} es la tensión de entrada, i es la corriente en la inductancia del inductor L , S es el interruptor, D el diodo, C la capacidad del condensador y v la tensión en la carga.

El convertidor boost presenta dos modos de conducción a saber [15]:

- Modo de conducción continua (MCC): si el MOSFET y el diodo están en condiciones complementaria ($S=ON, D=OFF$ o $S=OFF, D=ON$)
- Modo de conducción discontinua (MCD): si la corriente que atraviesa el diodo se hace igual a cero cuando el convertidor está operando con $u = 0$, el diodo dejará de conducir ($S=OFF, D=OFF$)

El sistema de ecuaciones que describe este convertidor es el siguiente:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-1}{RC}v + \frac{1}{C}i(1 - u) \quad (2-1)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{-1}{L}v(1 - u) + \frac{v_{in}}{L} \quad (2-2)$$

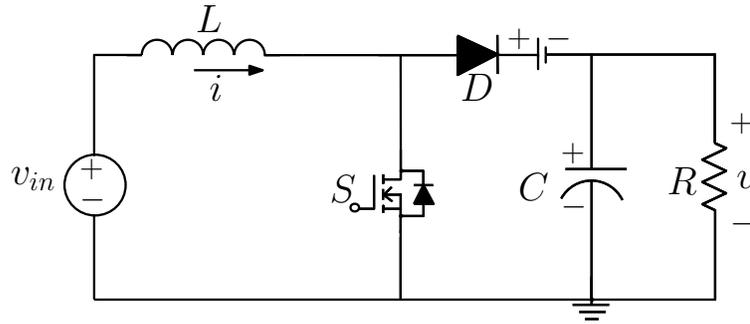


Figura 2-1: Esquema de un Convertidor boost

El convertidor boost está representado por el sistema de ecuaciones diferenciales [6]

$$\dot{x} = A_1x + B + (A_2 - A_1)xu \quad (2-3)$$

donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\gamma & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y γ es un parámetro que se especificará más adelante.

La solución de cada topología viene dada por:

$$x_i(t) = \phi_i(t - t_0)x_{i-1}(t_0) + \psi_i(t - t_0) \quad (2-4)$$

donde

$$\phi_i(t - t_0) = e^{A_i(t-t_0)}$$

$$\psi_1(t - t_0) = B(t - t_0)$$

$$\psi_2(t - t_0) = A_2^{-1}(e^{A_2(t-t_0)} - I_2)B$$

2.2. El convertidor boost teniendo en cuenta la corriente en el condensador C

La Figura 2-2 muestra el esquema de un convertidor boost teniendo en cuenta la corriente i_C en el condensador C .

En esta tesis se trabaja con Modo de Conducción Continua (MCC)

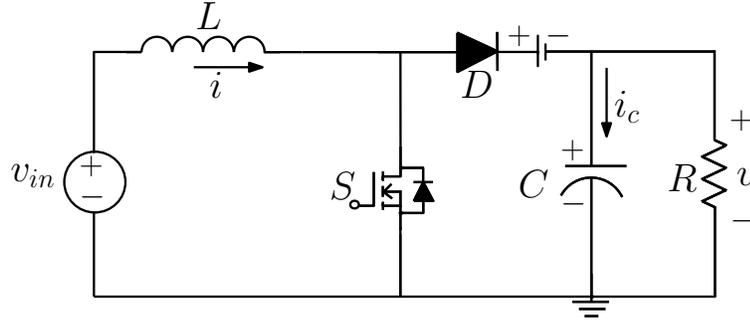


Figura 2-2: Esquema de un Convertidor boost teniendo en cuenta la corriente en el condensador C .

Sean q , C , V_C la carga, capacitancia y tensión (o voltaje) en el capacitor C , respectivamente. Es sabido que $q = CV_C$ (C es constante, mientras que q y V_C dependen del tiempo) [9].

De esta última igualdad obtenemos:

$$\frac{dq}{dt} = C \frac{dv_C}{dt}$$

como

$$\frac{dq}{dt} = i_C = i_C(t)$$

entonces

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \tag{2-5}$$

De otro lado, como C y R están en paralelo, se tiene que $V_C = v$. Así, reemplazando en (2-5) obtenemos:

$$i_C = C \frac{dv}{dt}$$

de donde

$$\frac{1}{C} i_C = \frac{dv}{dt} \tag{2-6}$$

como $C \neq 0$ porque estamos trabajando en modo de conducción continuo (es decir, estamos suponiendo que el capacitor no se descarga).

Usando (2-5) y (2-6)

$$\frac{1}{C} i_C = \frac{-1}{RC} v + \frac{1}{C} i(1 - u)$$

de donde

$$i_C = \frac{-1}{R}v + i(1 - u) \quad (2-7)$$

derivando (2-7) con respecto a t se tiene

$$\frac{di_C}{dt} = \frac{-1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{di}{dt}(1 - u) \quad (2-8)$$

Ahora bién usando (2-1) y (2-2) en (2-7) se llega:

$$\frac{di_C}{dt} = \frac{1}{R^2C}v - \frac{1}{RC}i(1 - u) + \left[\frac{v_{in}}{L} - \frac{1}{L}v(1 - u) \right] (1 - u) \quad (2-9)$$

El sistema a estudiar es:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-1}{RC}v + \frac{1}{C}i(1 - u) \quad (2-10)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{-1}{L}v(1 - u) + \frac{v_{in}}{L} \quad (2-11)$$

$$\frac{di_C}{dt} = \frac{1}{R^2C}v - \frac{1}{RC}i(1 - u) + \left[\frac{v_{in}}{L} - \frac{1}{L}v(1 - u) \right] (1 - u) \quad (2-12)$$

Simplificando la ecuación (2-9), como u toma como valor 0 o 1, entonces $(1 - u) = (1 - u)^2$ así:

$$\frac{di_C}{dt} = \frac{1}{R^2C}v - \frac{1}{RC}i(1 - u) + \frac{v_{in}}{L} \left[1 - \frac{v}{v_{in}} \right] (1 - u) \quad (2-13)$$

Realizando el cambio de variables:

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad x_1 = \frac{v}{v_{in}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{i}{v_{in}} \quad \text{y} \quad x_3 = \frac{R}{v_{in}} i_C$$

donde τ es la nueva variable respecto de la cual se van a tomar las derivadas, tenemos:

- $\sqrt{LC}\tau = t \Rightarrow \sqrt{LC}d\tau = dt$
- $x_1 = \frac{v}{v_{in}} \Rightarrow \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{dv}{v_{in}d\tau} \Rightarrow \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{\sqrt{LC}}{v_{in}} \frac{dv}{dt}$, así $\frac{dv}{dt} = \frac{v_{in}}{\sqrt{LC}} \frac{dx_1}{d\tau}$
- $x_2 = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{i}{v_{in}} \Rightarrow i = \frac{x_2 v_{in}}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{v_{in}}{L} \frac{dx_2}{d\tau}$

$$\blacksquare x_3 = \frac{R}{v_{in}} i_C \Rightarrow i_C = \frac{v_{in}}{R} \Rightarrow \frac{di_C}{dt} = \frac{v_{in}}{R} \frac{dx_3}{\sqrt{LC} d\tau}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2-10)

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{-1}{RC} v + \frac{1}{c} i(1-u) \\ \frac{v_{in}}{\sqrt{LC}} \frac{dx_1}{d\tau} &= \frac{-1}{RC} v_{in} x_1 + \frac{1}{C} v_{in} x_2 \sqrt{\frac{C}{L}} (1-u) \\ \frac{dx_1}{d\tau} &= -\sqrt{\frac{L}{R^2 C}} x_1 + x_2 (1-u) \end{aligned} \tag{2-14}$$

Haciendo $\gamma = \sqrt{\frac{L}{R^2 C}}$ se tiene

$$\dot{x}_1 = -\gamma x_1 + x_2 (1-u) \tag{2-15}$$

Para la ecuación (2-11) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{-1}{L} v(1-u) + \frac{v_{in}}{L} \\ \frac{v_{in}}{L} \frac{dx_2}{d\tau} &= \frac{-1}{L} v_{in} x_1 (1-u) + \frac{v_{in}}{L} \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -x_1 (1-u) + 1 \end{aligned} \tag{2-16}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 (1-u) + 1 \tag{2-17}$$

Para la ecuación (2-13) tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{di_C}{dt} &= \frac{1}{R^2C}v - \frac{1}{RC}i(1-u) + \frac{v_{in}}{L} \left[1 - \frac{v}{v_{in}}\right] (1-u) \\ \frac{di_C}{dt} &= -\frac{C}{RC} \left[\frac{-1}{RC}v + \frac{1}{C}i(1-u) \right] + \frac{v_{in}}{L} [1-x_1] (1-u) \\ \frac{di_C}{dt} &= -\frac{1}{RC} \left[C \frac{dv}{dt} \right] + \frac{v_{in}}{L} [1-x_1] (1-u) \\ \frac{di_C}{dt} &= -\frac{1}{RC}i_C + \frac{v_{in}}{L} [1-x_1] (1-u) \\ \frac{v_{in}}{R} \frac{dx_3}{\sqrt{LC}d\tau} &= -\frac{1}{RC} \frac{v_{in}}{R} x_3 + \frac{v_{in}}{L} [1-x_1] (1-u) \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= -\sqrt{\frac{L}{R^2C}} x_3 + \sqrt{\frac{R^2C}{L}} [1-x_1] (1-u) \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= -\gamma x_3 + \gamma^{-1} (1-x_1) (1-u)\end{aligned}\tag{2-18}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_3 &= -\gamma x_3 + \gamma^{-1} (1-x_1) (1-u) \\ \dot{x}_3 &= \gamma^{-1} (1-u) x_1 - \gamma x_3 + \gamma^{-1} (1-u)\end{aligned}\tag{2-19}$$

Por lo tanto, el sistema queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\gamma x_1 + x_2 (1-u) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 (1-u) + 1 \\ \dot{x}_3 &= \gamma^{-1} (1-u) x_1 - \gamma x_3 + \gamma^{-1} (1-u)\end{aligned}$$

que se puede expresar matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & (1-u) & 0 \\ (u-1) & 0 & 0 \\ \gamma^{-1}(1-u) & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \gamma^{-1}(1-u) \end{pmatrix}\tag{2-20}$$

De forma compacta se expresa como $\dot{x} = A_i x + B_i$, donde i toma los valores 1 y 2
Para $i = 1$ tomamos $u = 1$ y así

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $i = 2$ tomamos $u = 0$ y así

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\gamma & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \gamma^{-1} & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \gamma^{-1} \end{pmatrix}$$

Nuestro marco de estudio se basa en los sistemas de ecuaciones diferenciales descrito por dos configuraciones en el espacio de estados $x = f(x, u, t) = \begin{cases} A_1x + B_1 & \text{si } u = 1 \\ A_2x + B_2 & \text{si } u = 0 \end{cases}$.

Este sistema de ecuaciones puede escribirse de forma compacta como:

$$\dot{x} = A_2x + B_2 + (A_1 - A_2)xu + (B_1 - B_2)u \quad (2-21)$$

La solución de cada topología dada es [8, 4]

$$x_i(t) = \phi_i(t - t_0)x_{i-1}(t_0) + \psi_i(t - t_0) \quad (2-22)$$

donde

$\phi_i(t - t_0) = e^{A_i(t-t_0)}$ y $\psi_i(t - t_0) = \int_{t_0}^t e^{A_i(t-\tau)} B_i d\tau$. Teniendo en cuenta cada topología y calculando las exponenciales matriciales, se tiene que

$$\psi_1(t - t_0) = B_1(t - t_0) \quad \psi_2(t - t_0) = A_2^{-1}(e^{A_2(t-t_0)} - I_3)B_2 \quad (2-23)$$

donde I_3 es la matriz identidad de tamaño 3×3 .

2.3. Modulación de anchura de pulso

La modulación por ancho de pulso PWM (Pulse-Width Modulation) es una técnica que permite variar el ciclo de trabajo de una señal (definido como el tiempo en que el conmutador

se encuentra en la posición **ON**, dividido por el periodo T) con el fin de controlar la tensión de la carga, manteniendo fija el periodo, o de forma equivalente, la frecuencia fija.

Para un modulador PWM, en un periodo de tiempo T se realizan 2 conmutaciones, de tal manera que un intervalo de tiempo $[nT, (n+1)T]$ queda dividido en tres subintervalos, donde el primero y el último tienen la misma longitud (Figura 2-3)

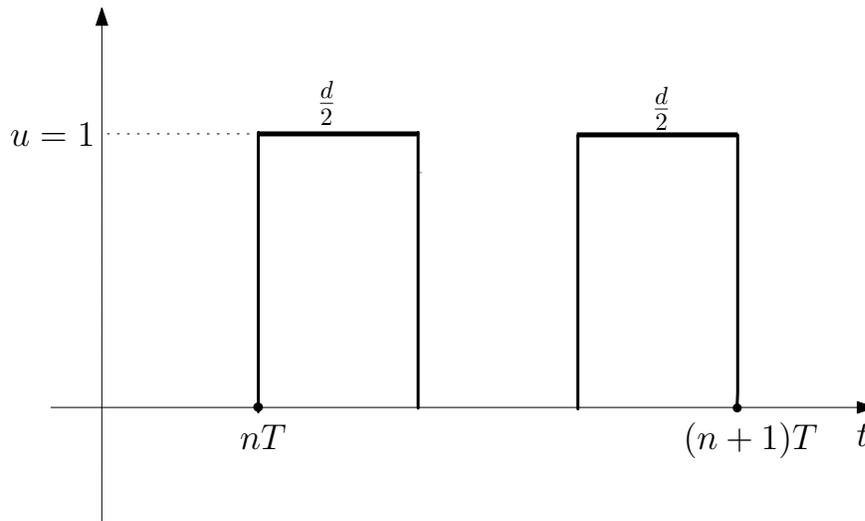


Figura 2-3: Pulso al centro simétrico

Las conmutaciones se realizan de acuerdo al esquema $\{1, 0, 1\}$. En general, el ciclo de trabajo varía periodo a periodo debido a la continua conmutación ON - OFF. Lo anterior implica que el sistema es T -periódicamente forzado.

2.4. Técnica de control ZAD

La técnica de control **ZAD** (dinámica de promediado cero) nos permite calcular el ciclo de trabajo, es decir, el tiempo en el cual el interruptor está abierto o cerrado. Esta técnica consiste en lo siguiente:

1. Definir una superficie de conmutación $s(x(t)) = 0$ en la cual el sistema evolucionará en promedio. En esta tesis se propone usar la superficie dada por la ecuación (2-25), donde $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ son las variables de estado, x_{1ref} , x_{2ref} , y x_{3ref} representan la señal de referencia y k_1 , k_2 y k_3 , son constantes asociadas al error entre la señal de salida y la señal de referencia en la superficie de conmutación.

donde $x_1(t) - x_{1ref}$, $x_2(t) - x_{2ref}$ y $x_3(t) - x_{3ref}$ representan el error en la tensión, corriente y corriente en el condensador C , respectivamente.

2. Fijar un periodo T

3. Imponer que s tenga media cero en cada ciclo:

$$\int_{nT}^{(n+1)T} s(x(t))dt = 0 \quad (2-24)$$

$$s(x(t)) = k_1(x_1(t) - x_{1ref}) + k_2(x_2(t) - x_{2ref}) + k_3(x_3(t) - x_{3ref}) \quad (2-25)$$

La última condición nos garantiza que sólo habrá un número finito de conmutaciones por periodo, puesto que hemos definido el control con esa intención.

2.4.1. Dinámica ideal de deslizamiento

Se estudiará la dinámica del boost sin efectuar control alguno, esto nos permite establecer las condiciones iniciales mediante las cuales se van a realizar las simulaciones. Igualando a cero el sistema (2-20) y tomando u constante, se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} -\gamma & (1-u) & 0 \\ (u-1) & 0 & 0 \\ \gamma^{-1}(1-u) & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \gamma^{-1}(u-1) \end{pmatrix} \quad (2-26)$$

Al solucionar este sistema obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1/(u-1) \\ x_2 &= \gamma/(u-1)^2 \\ x_3 &= (u-2)/\gamma^2 \end{aligned} \quad (2-27)$$

Parametrizando con respecto a u y expresando las variables x_2 y x_3 en términos de x_1 se tiene

$$u = \frac{-1}{x_1} + 1 \quad (2-28)$$

Para encontrar las ecuaciones de la dinámica ideal de deslizamiento, se debe sustituir el control equivalente en las ecuaciones del sistema original, en nuestro caso (2-28) y asignar las condiciones iniciales sobre la región de deslizamiento.

Reemplazando la ecuación (2-28) en el sistema (2-20) tenemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & \frac{1}{x_1} & 0 \\ -\frac{1}{x_1} & 0 & 0 \\ \frac{\gamma^{-1}}{x_1} & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\gamma^{-1}}{x_1} \end{pmatrix} \quad (2-29)$$

Igualando la ecuación (2-29) a cero obtenemos los puntos de equilibrio $(x_1, x_2, x_3)^T$ que satisfacen la siguiente relación:

$$\begin{aligned} x_2 &= \gamma^2 x_1^2 \\ x_3 &= \frac{x_1 + 1}{\gamma^2 x_1} \end{aligned} \tag{2-30}$$

Dados que estos puntos deben estar sobre la superficie de conmutación $s(x(t)) = k_1(x_1 - x_{1ref}) = 0$, se debe tener entonces que $x_1 = x_{1ref}$. Reemplazando así en la ecuación (2-30), obtenemos dos puntos de equilibrio dados por:

$$P_{eq} = \begin{pmatrix} x_{1ref} \\ \gamma^2 x_{1ref}^2 \\ \frac{x_{1ref} + 1}{\gamma^2 x_{1ref}} \end{pmatrix}$$

2.5. Órbitas periódicas

Los sistemas lineales describen de manera realista algunos fenómenos físicos, tales como el comportamiento de algunos circuitos mecánicos y electrónicos.

Por medio de sistemas lineales a trozos, algunas bifurcaciones básicas son fáciles de entender. Además, los sistemas lineales a trozos presentan un comportamiento muy complejo, similar al de los sistemas no lineales, tales como ciclos límites, cuasiperiodicidad etc [5].

Una órbita periódica es una solución para un sistema dinámico, la cual se repite en el tiempo. Una manera de estudiar la estabilidad de las órbitas periódicas es haciendo uso de los multiplicadores característicos, técnica en la que se evalúa el Jacobiano de la aplicación de Poincaré en el punto de equilibrio y se calculan los valores propios m_i . Los multiplicadores característicos tienen un enfoque de tiempo discreto, es decir, la condición de estabilidad es $|m_i| < 1$ [14].

Para un sistema de ecuaciones diferenciales, una solución del sistema $x(t)$ para el caso continuo viene dada por:

$$x(t) = x(t + T) \quad \text{para todo } t \tag{2-31}$$

donde $t > 0$.

para el caso discreto llamemos a la solución $x(k)$, cuya ecuación es:

$$x(k) = x(k + P) \quad \text{para todo } k \tag{2-32}$$

2.6. Bifurcaciones

Una bifurcación es un cambio cualitativo de un sistema dinámico, ocurrido al variar uno de los parámetros del sistema [18, 17]. Un sistema dinámico puede tener varias soluciones de equilibrio. Para un conjunto dado de parámetros y una condición inicial, el sistema converge a una solución de equilibrio (atractor), si se varían los parámetros, es posible que la solución de equilibrio pueda ser inestable.

Un diagrama de bifurcaciones es un gráfico donde se muestra el comportamiento de las soluciones de un sistema a largo plazo, cuando se varía uno o varios parámetros del mismo. [21].

2.7. Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov son una herramienta matemática por medio de la cual se puede determinar la velocidad de convergencia o divergencia de dos órbitas de una ecuación diferencial, cuyas condiciones iniciales difieren infinitesimalmente una de la otra [2].

Unos exponentes de Lyapunov cero o negativos indican una relación fuerte con el estado inicial, y una dependencia directa de éste. Sin embargo, un exponente positivo, indica la existencia de actividad caótica [1].

Definición 2

Sea $DF(\mathbf{x})$ la matriz Jacobiana de la aplicación de Poincaré y $\lambda_i(DF(\mathbf{x}))$ el i -ésimo valor propio de $DF(\mathbf{x})$. El exponente de Lyapunov L_i para cada valor propio viene dado por [27].

$$L_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \log |\lambda_i(DF(\mathbf{x}))| \right) \quad (2-33)$$

2.8. Caos

El término caos primero se introdujo formalmente en matemáticas por Li y Yorke, pero aún no hay una definición universalmente aceptada o unificada dentro del rigor de la literatura científica [7].

El Caos es una palabra que originalmente denotaba la completa falta de forma o de organización sistemática, pero que ahora suele utilizarse para indicar la ausencia de un cierto orden que debería estar presente [12].

Una definición más aceptada es la de un comportamiento aperiódico a largo plazo en un sistema determinístico, comportamiento que exhibe dependencia sensible a las condiciones

iniciales.

Es decir, se trata de un comportamiento irregular, en el que cualquier variación en alguna condición inicial, puede ocasionar un cambio drástico en la evolución del sistema [25].

Para el estudio del caos utilizamos la siguiente definición [6].

Definición 1

Un sistema es caótico si satisface las siguientes condiciones:

1. Posee exponentes de Lyapunov positivos
2. Tiene dependencia sensible sobre condiciones iniciales en su dominio
3. Es acotado

3 Análisis de la dinámica del sistema en el caso $u = \{1, 0, 1\}$

Resumen:

En este capítulo se calcula el ciclo de trabajo, se hace discretización del sistema y se muestra la estrategia de desempeño ZAD.

3.1. Aproximación por rectas a tramos de la superficie de conmutación

En esta sección se calculará el ciclo de trabajo, cuando se aplica PWM (modulación por ancho de pulso al centro, que en inglés se escribe Pulse Width Modulation [16]).

u será la variable de control que se usará en el sistema se define de la siguiente forma:

$$u = \begin{cases} 1 & \text{si } nT \leq t \leq nT + \frac{d}{2} \\ 0 & \text{si } nT + \frac{d}{2} < t < (n+1)T - \frac{d}{2} \\ 1 & \text{si } (n+1)T - \frac{d}{2} \leq t \leq (n+1)T \end{cases} \quad (3-1)$$

3.1.1. Aproximación de $s(x(t))$ por rectas a tramos

La aproximación de $s(x(t))$ se hace bajo las siguientes suposiciones:

1. La dinámica del error o superficie de conmutación se comporta como una recta a tramos.
2. Las pendientes de la dinámica del error en cada tramo están determinadas por las pendientes calculadas al momento de la conmutación. Esto incluye suponer que la pendiente al inicio del periodo notada como \dot{s}_1 es la misma al final, es decir, en los tramos comprendidos entre $[nT, nT + \frac{d}{2}]$ y $[(n+1)T - \frac{d}{2}, (n+1)T]$. La pendiente de $s(x(t))$, \dot{s}_1 , corresponde a la derivada de la superficie de conmutación con respecto al tiempo cuando $u = 1$, en el tramo $[nT + \frac{d}{2}, (n+1)T - \frac{d}{2}]$; la pendiente \dot{s}_2 corresponde a la derivada de la superficie de conmutación respecto al tiempo para el caso $u = 0$.

La Figura 3-1 muestra esta aproximación.

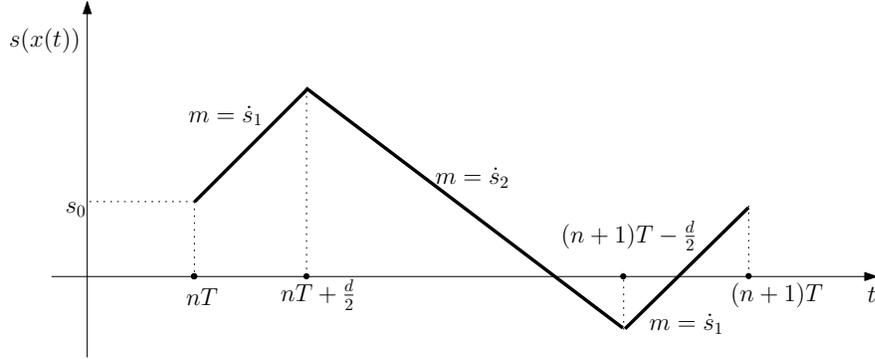


Figura 3-1: Aproximación por rectas a tramos de la superficie de conmutación

De lo anterior tenemos que:

$$s(x(nT)) = k_1(x_1(nT) - x_{1ref}) + k_2(x_2(nT) - x_{2ref}) + k_3(x_3(nT) - x_{3ref})$$

Como nuestra superficie de conmutación está dada por la ecuación (1-1), se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{s}(x(nT)) &= k_1 [-\gamma x_1(nT) + x_2(nT)(1 - u)] \\ &\quad + k_2 [-x_1(nT)(1 - u) + 1] \\ &\quad + k_3 [\gamma^{-1}(1 - u)x_1(nT) - \gamma x_3(nT) + \gamma^{-1}(1 - u)] \end{aligned} \quad (3-2)$$

Cuando $u = 1$ se tiene que:

$$\dot{s}_1(x(nT)) = k_1 [-\gamma x_1(nT)] + k_2 + k_3 [\gamma x_3(nT)] \quad (3-3)$$

Cuando $u = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{s}(x(nT)) &= k_1 [-\gamma x_1(nT) + x_2(nT)] \\ &\quad + k_2 [-x_1(nT) + 1] \\ &\quad + k_3 [\gamma^{-1}x_1(nT) - \gamma x_3(nT) + \gamma^{-1}] \end{aligned} \quad (3-4)$$

Como son conocidos los puntos al principio de cada tramo y calculando las pendientes a ese punto, se puede hacer la aproximación de la recta en cada tramo [25].

Partiendo con $t = nT$ tenemos para cada uno de los tramos lo siguiente:

- En el primer tramo $t \in (nT, nT + \frac{d}{2})$ se tiene:

$$s(x(t)) = \dot{s}_1(x(nT))(t - nT) + s(x(nT))$$

- En el segundo tramo $t \in (nT + \frac{d}{2}, (n+1)T - \frac{d}{2})$ se tiene:

$$s(x(t)) = \dot{s}_2(x(nT))(t - (nT + \frac{d}{2})) + \left(\frac{d}{2}\right) \dot{s}_1(x(nT)) + s(x(nT))$$

- En el tercer tramo $t \in ((n+1)T - \frac{d}{2}, (n+1)T)$ se tiene:

$$s(x(t)) = \dot{s}_1(x(nT))(t - (n+1)T + d) + \dot{s}_2(x(nT))(T - d) + s(x(nT))$$

Si hacemos $s_0 = s(x(nT))$, $\dot{s}_1 = \dot{s}_1(x(nT))$ y $\dot{s}_2 = \dot{s}_2(x(nT))$, la función f que aproxima a $s(x(t))$, queda definida de la siguiente manera

$$f(t) = \begin{cases} \dot{s}_1(t - nT) + s_0 & \text{si } nT \leq t \leq nT + \frac{d}{2} \\ \dot{s}_2(t - nT - \frac{d}{2}) + \dot{s}_1 \frac{d}{2} + s_0 & \text{si } nT + \frac{d}{2} < t < (n+1)T - \frac{d}{2} \\ \dot{s}_2(T - d) + \dot{s}_1 \frac{d}{2} + s_0 + \dot{s}_1(t + \frac{d}{2} - (n+1)T) & \text{si } (n+1)T - \frac{d}{2} \leq t \leq (n+1)T \end{cases}$$

3.2. Cálculo del ciclo de trabajo

El ciclo de trabajo se calcula mediante la técnica *ZAD*, aproximando la superficie de conmutación mediante rectas a tramos y utilizando directamente la igualdad

$$\int_{nT}^{(n+1)T} s(x(t))dt = 0$$

donde

$$s(x(nT)) = k_1(x_1(nT) - x_{1ref}) + k_2(x_2(nT) - x_{2ref}) + k_3(x_3(nT) - x_{3ref})$$

De esta manera:

$$\begin{aligned} \int_{nT}^{(n+1)T} s(x(t)) &\approx \int_{nT}^{nT + \frac{d}{2}} (\dot{s}_1(x(nT))(t - nT) + s(x(nT)))dt \\ &+ \int_{nT + \frac{d}{2}}^{(n+1)T - \frac{d}{2}} (\dot{s}_2(x(nT))(t - nT - \frac{d}{2}) + \dot{s}_1(x(nT))\frac{d}{2} + s(x(nT)))dt \\ &+ \int_{(n+1)T - \frac{d}{2}}^{(n+1)T} (\dot{s}_2(x(nT))(T - d) + \dot{s}_1(x(nT))\frac{d}{2} + s(x(nT))) \\ &+ \dot{s}_1(x(nT))(t + \frac{d}{2} - (n+1)T)dt \end{aligned} \quad (3-5)$$

Resolviendo la integral dada en (3-5), igualando a cero y resolviendo para d se obtiene que: [3]

$$d_T = \frac{2s(x(nT)) + T\dot{s}_2(x(nT))}{\dot{s}_2(x(nT)) - \dot{s}_1(x(nT))} \quad (3-6)$$

donde d es un número real entre 0 y T . Si se presenta el hecho que $d < 0$ o que $d > T$, se redefine la expresión (3-6), diciendo que el sistema *satura*, en cuyo caso hacemos la siguiente elección en cada periodo:

1. Si $d_T < 0$, obligamos al sistema a que evolucione según la topología 1.
2. Si $d_T > T$, obligamos al sistema a que evolucione según la topología 2.
3. El denominador de la ecuación (3-6) es igual a $k_1x_2(nT) - k_2x_1(nT)$. Si esta expresión es cero, le exigimos al sistema que evolucione según la topología 1 si el numerador $2s(x(nT)) + Ts_2(x(nT)) > 0$; y que evolucione según la topología 2 si $2s(x(nT)) + Ts_2(x(nT)) < 0$.

por tanto

$$d_T = \begin{cases} 0 & \text{si } d \leq 0 \\ T & \text{si } d \geq T \end{cases} \quad (3-7)$$

3.3. Discretización del sistema

Para construir la aplicación de Poincaré, tomaremos un muestreo del sistema cada periodo, concatenando las soluciones en cada uno de los intervalos $[nT, nT + \frac{d_0}{2}]$, $[nT + \frac{d_0}{2}, (n+1)T - \frac{d_0}{2}]$, $[(n+1)T - \frac{d_0}{2}, (n+1)T]$ y usando la relación (2-22).

Si $x(nT)$ es el estado del sistema en el tiempo nT , entonces al final del intervalo $[nT; nT + \frac{d_0}{2}]$ evaluamos la solución del sistema cuando $u = 1$ en el tiempo $t = nT + \frac{d_0}{2}$ y tenemos:

$$x_1\left(nT + \frac{d_0}{2}\right) = \phi_1\left(\frac{d_0}{2}\right)x_0(nT) + \psi_1\left(\frac{d_0}{2}\right) \quad (3-8)$$

Ahora, al final del segundo tramo $[nT + \frac{d_0}{2}, (n+1)T - \frac{d_0}{2}]$, evaluamos la solución del sistema cuando $u = 0$ en el tiempo $t = (n+1)T - \frac{d_0}{2}$ y tenemos:

$$x_2\left((n+1)T - \frac{d_0}{2}\right) = \phi_2(T - d_0)x_1\left(nT + \frac{d_0}{2}\right) + \psi_2(T - d_0) \quad (3-9)$$

Sustituyendo (3-8) en (3-3) se tiene:

$$x_2 \left((n+1)T - \frac{d_0}{2} \right) = \phi_2(T - d_0) \left[\phi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) x_0(nT) + \psi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) \right] + \psi_2(T - d_0)$$

$$\begin{aligned} x_2 \left((n+1)T - \frac{d_0}{2} \right) &= \phi_2(T - d_0) \phi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) x_0(nT) + \phi_2(T - d_0) \psi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) \\ &+ \psi_2(T - d_0) \end{aligned}$$

Para el tercer tramo $[(n+1)T - \frac{d_0}{2}, (n+1)T]$, evaluamos la solución del sistema cuando $u = 1$ en el tiempo $t = (n+1)T$ y tenemos:

$$x_3((n+1)T) = \phi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) x_2 \left((n+1)T - \frac{d_0}{2} \right) + \psi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) \quad (3-10)$$

Sustituyendo (3-4) en (3-10) se tiene:

$$\begin{aligned} x_3((n+1)T) &= \phi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) \\ &\left[\phi_2(T - d_0) \phi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) x_0(nT) + \phi_2(T - d_0) \psi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) + \psi_2(T - d_0) \right] \\ &+ \psi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) \end{aligned}$$

donde se tiene que:

$$\begin{aligned} x_3((n+1)T) &= \phi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) \phi_2(T - d_0) \phi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) x_0(nT) \\ &+ \phi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) \phi_2(T - d_0) \psi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) \\ &+ \phi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) \psi_2(T - d_0) + \psi_1 \left(\frac{d_0}{2} \right) \end{aligned} \quad (3-11)$$

Continuando con el proceso, se obtiene de esta forma una sucesión de puntos $x_{n+1} = P(x_n; d_n)$, donde d_n es el ciclo de trabajo definido en (3-11) y determinado con x_n . Así, la aplicación de Poincaré cuando $d_n \in (0, T)$, viene dada por:

$$\begin{aligned} P(x_n, d_n) &= \phi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \phi_2(T - d_n) \phi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) x_0(nT) + \phi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \phi_2(T - d_n) \psi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \\ &+ \phi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \psi_2(T - d_n) + \psi_1 \left(\frac{d_n}{2} \right) \end{aligned} \quad (3-12)$$

Cuando el ciclo de trabajo satura procedemos como sigue:

1. Si $d_n = 0$, el mapa de Poincaré corresponde a

$$P(x_0(nT)) = \phi_2(T)x_0(nT) + \psi_2(T) \quad (3-13)$$

2. Si $dn = T$, el mapa de Poincaré corresponde a

$$P(x_0(nT)) = \phi_1(T)x_0(nT) + \psi_1(T) \quad (3-14)$$

Por lo tanto, las expresiones (3-12), (3-13) y (3-14) definen la aplicación de Poincaré para el esquema $\{1, 0, 1\}$.

El mapa de Poincaré queda representado en la Figura 3-2

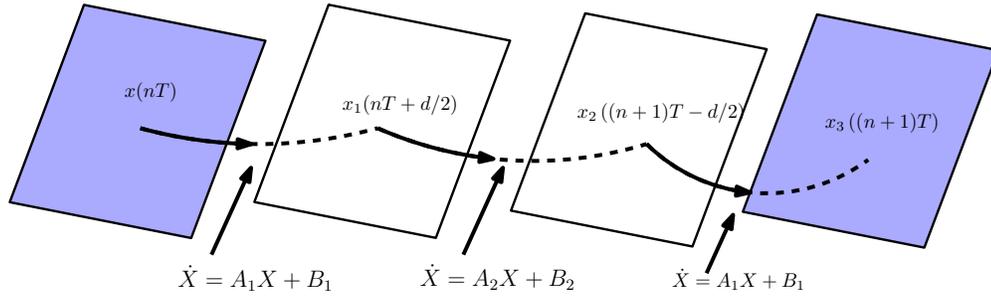


Figura 3-2: Construcción del mapa de Poincaré

3.3.1. Ciclo de trabajo en estado estacionario

En estado estacionario, la señal de entrada en el sistema sigue la señal de referencia. Para este trabajo la señal de referencia es constante e igual al vector

$$\begin{pmatrix} x_{1ref} \\ x_{2ref} \\ x_{2ref} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1ref} \\ \gamma x_{1ref}^2 \\ \frac{x_{1ref} + 1}{\gamma^2 x_{1ref}} \end{pmatrix} \quad (3-15)$$

Remplazando (3-15) en (3-6), obtenemos la expresión para el ciclo de trabajo d^* en estado estacionario

$$d^* = \frac{T(x_{1ref} - 1)}{x_{1ref}} \quad (3-16)$$

3.4. Desempeño de la estrategia ZAD con aproximación por rectas a tramos de la superficie de conmutación

A continuación se muestran resultados numéricos del comportamiento de las variables de estado del sistema y del ciclo de trabajo cuando se estudia la dinámica del convertidor boost

teniendo en cuenta la corriente en el condensador C al aplicar la técnica ZAD del pulso al centro simétrico.

El sistema se simula manteniendo fijos los parámetros $k_1, k_2, k_3, T = 0.18$ y $\gamma = 0.35$

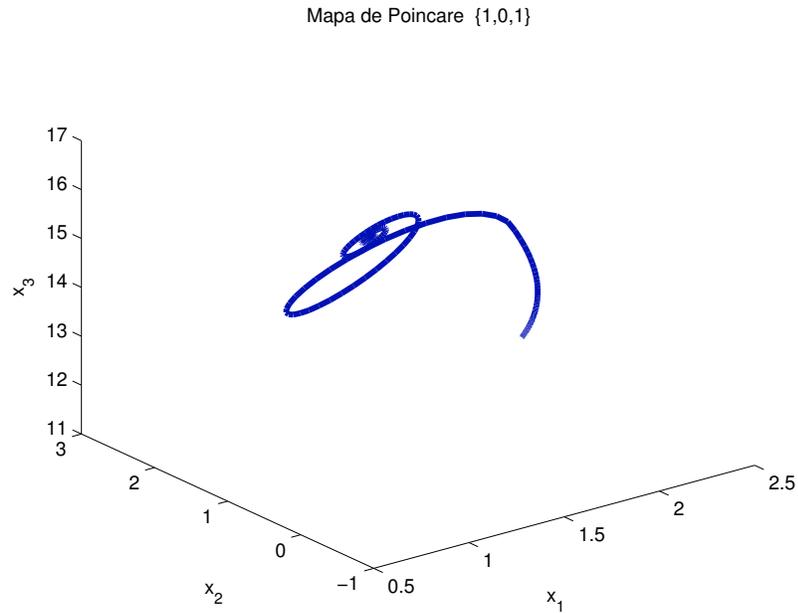


Figura 3-3: Evolución del sistema

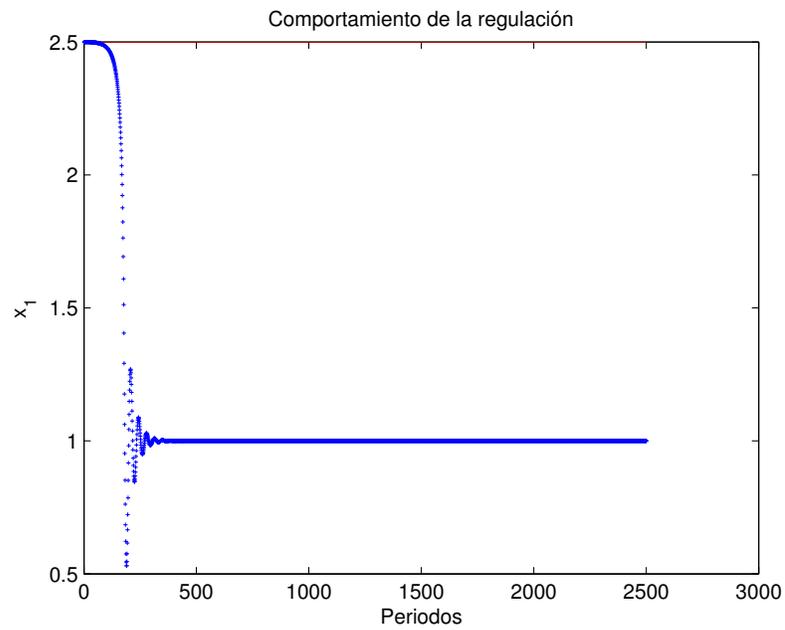


Figura 3-4: Comportamiento de la regulación

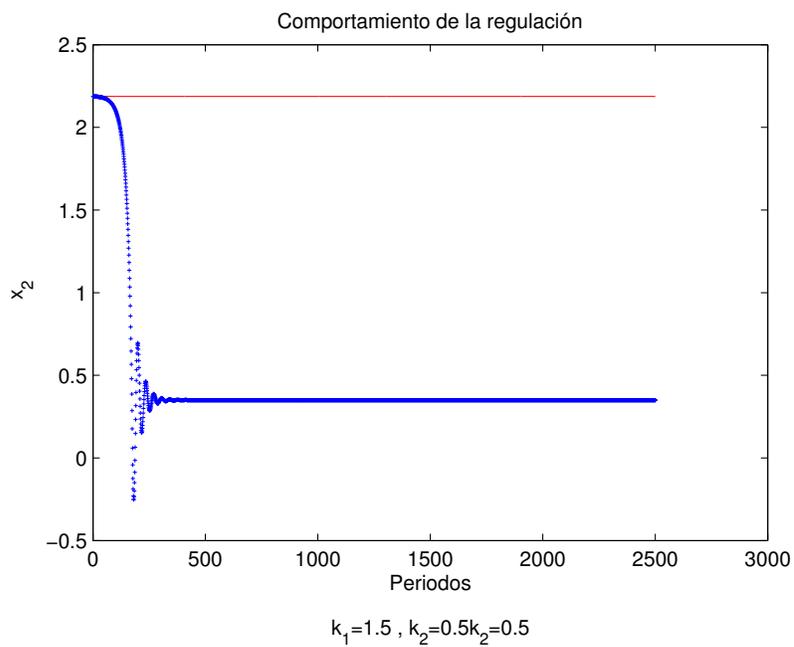


Figura 3-5: Comportamiento de la regulación

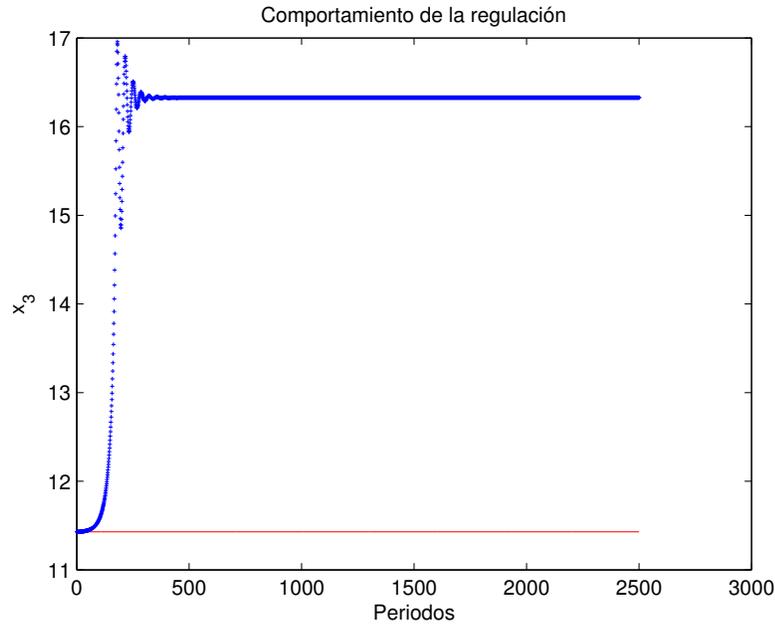


Figura 3-6: Comportamiento de la regulación

En las Figura (3-4,3-5,3-6) se tomaron los valores $k_1 = 1.5, k_2 = 0.5, k_3 = 0.5, T = 0.18$
Podemos ver que

$$|2.5000 - 1.0000| = 1.5000$$

$$|2.1875 - 0.3500| = 1.8375$$

$$|11.4286 - 16.3265| = 4.8979$$

cuyos errores relativos son 60% para la tensión y 84% para la corriente y 42.85% para la corriente en el condensador C , lo cual nos permite decir que el sistema del convertidor boost teniendo en cuenta la corriente en el condensador C , no tiene una buena capacidad de seguir la señal de referencia constante.

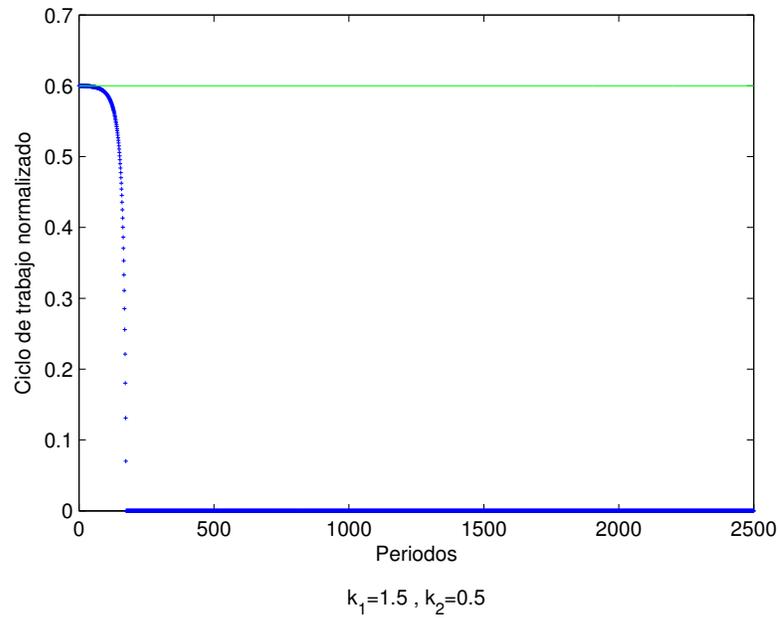


Figura 3-7: Evolución del ciclo de trabajo

En la Figura 3-8 corresponde a un atractor caótico, en esta gráfica se ha tomado $k_1 = 0.5, k_2 = 0.5, k_3 = 0.5$

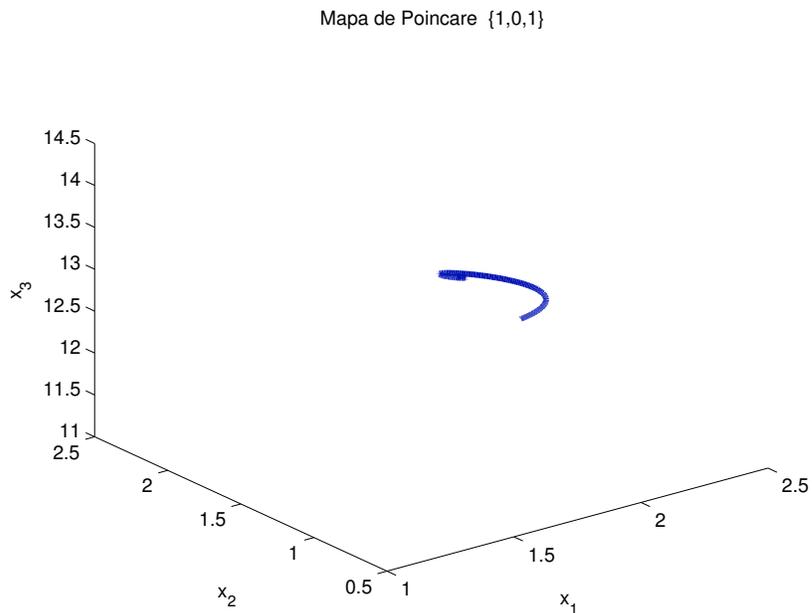
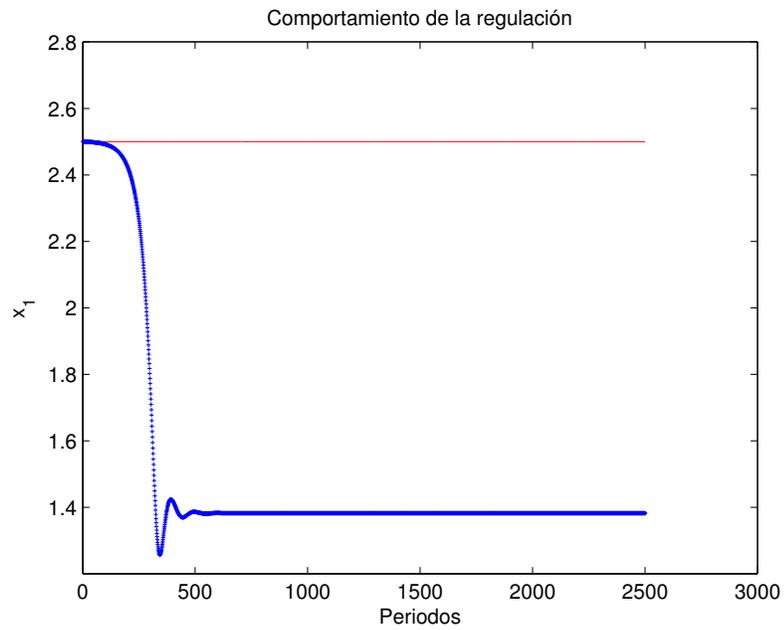
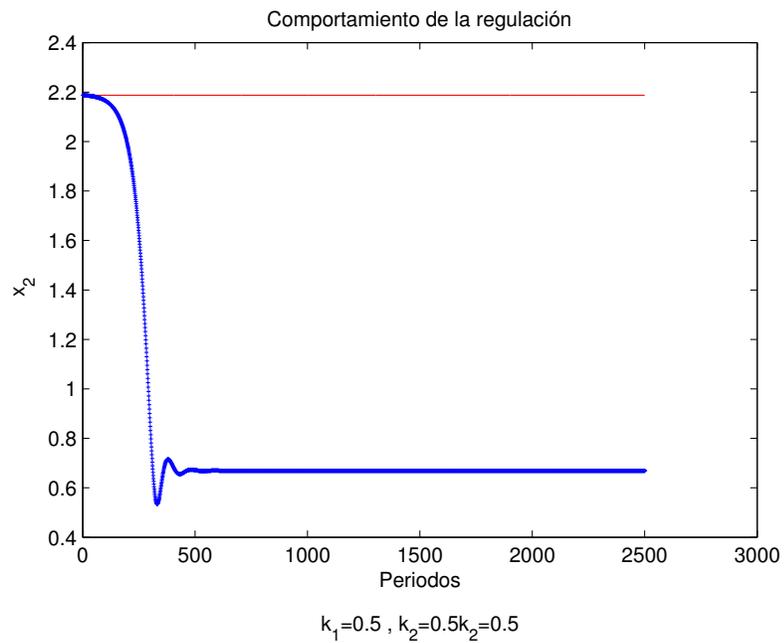


Figura 3-8: Evolución del sistema

**Figura 3-9:** Comportamiento de la regulación**Figura 3-10:** Comportamiento de la regulación

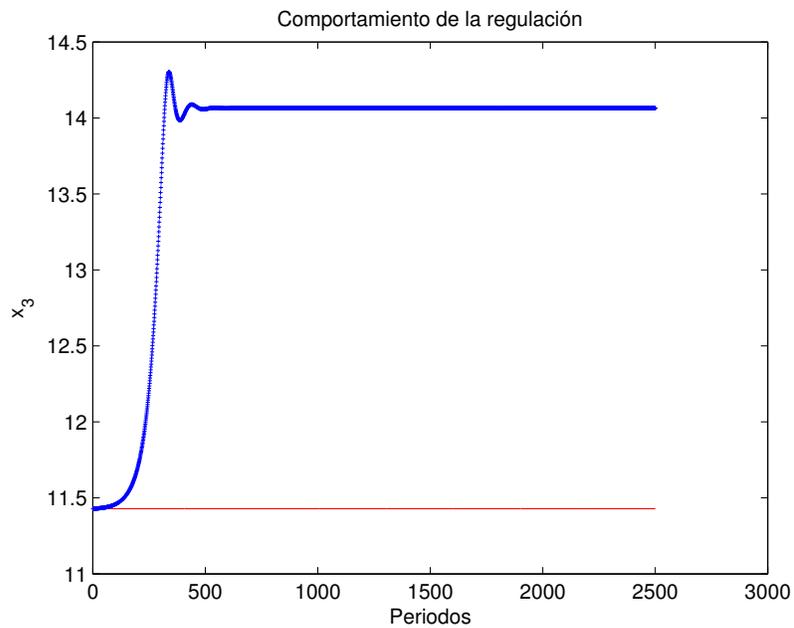


Figura 3-11: Comportamiento de la regulación

En las Figura (3-9,3-10,3-11) se tomaron los valores $k_1 = 0.5, k_2 = 0.5, k_3 = 0.5, T = 0.18$

$$|2.5000 - 1.3825| = 1.1175$$

$$|2.1875 - 0.6693| = 1.5182$$

$$|11.4286 - 14.0643| = 1.5182$$

cuyos errores relativos son 44.69% para la tensión y 69.40% para la corriente y 23.06% para la corriente en el condensador C , lo cual nos permite decir que el sistema del convertidor boost teniendo en cuenta la corriente en el condensador C , no tiene una buena capacidad de seguir la señal de referencia constante.

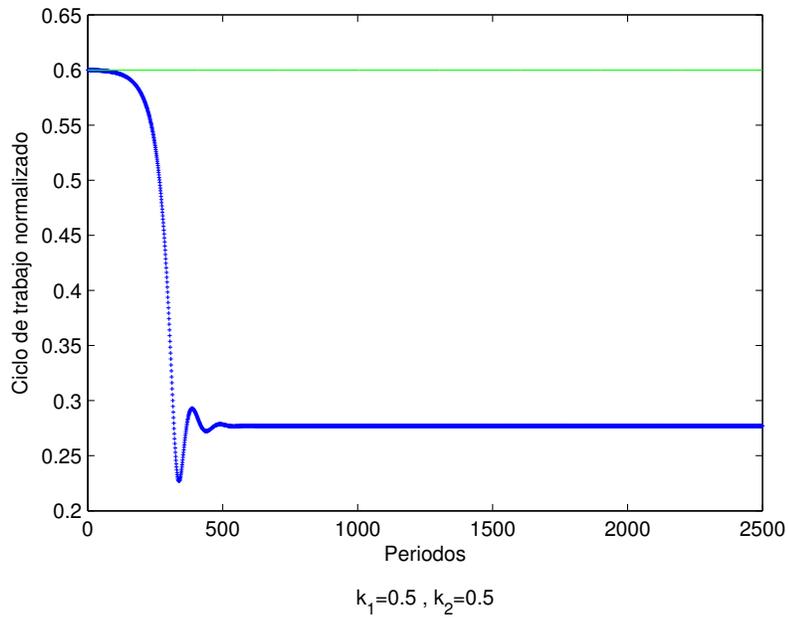


Figura 3-12: Evolución del ciclo de trabajo

En la Figura 3-13 corresponde a un atractor caótico, en esta gráfica se ha tomado $k_1 = 1.5, k_2 = 0.5, k_3 = -0.5$

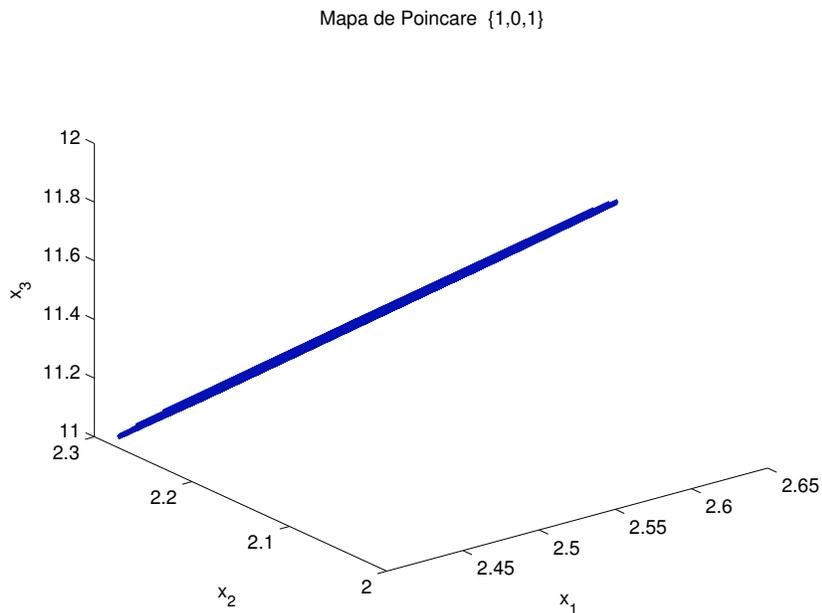


Figura 3-13: Evolución del sistema

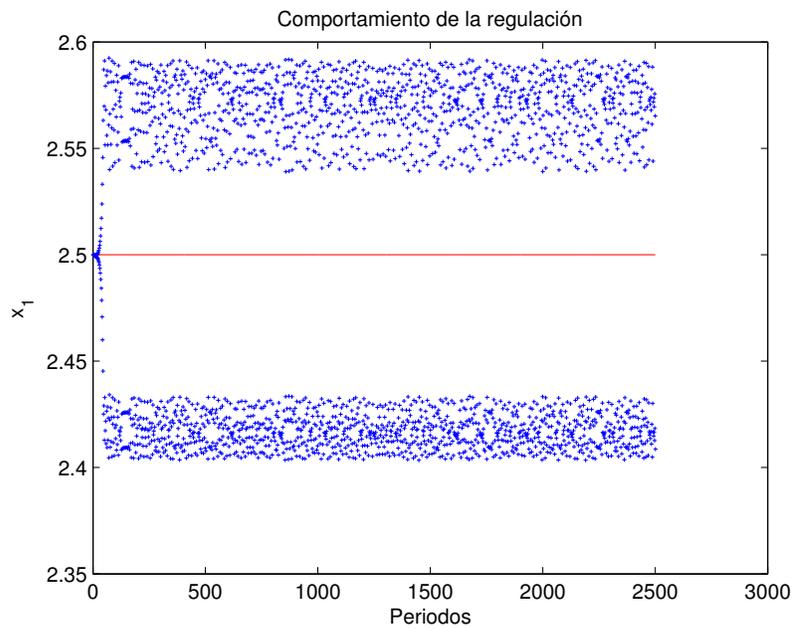


Figura 3-14: Comportamiento de la regulación

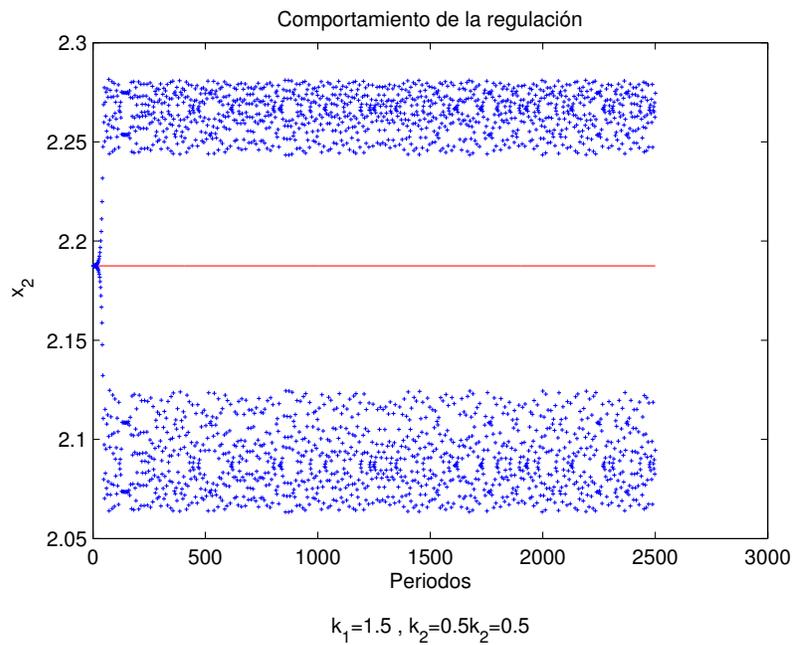


Figura 3-15: Comportamiento de la regulación

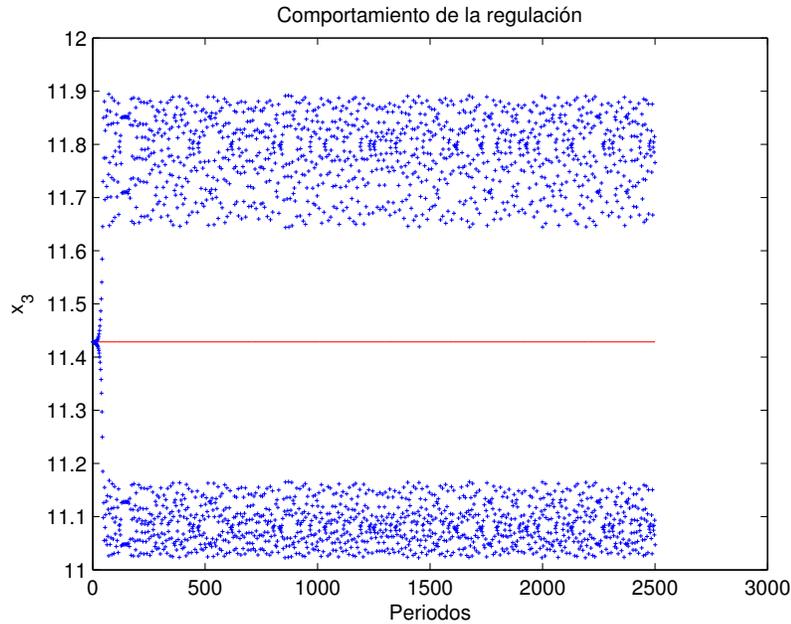


Figura 3-16: Comportamiento de la regulación

En las Figura (3-14,3-15,3-16) se tomaron los valores $k_1 = 1.5, k_2 = 0.5, k_3 = -0.5, T = 0.18$.

Tenemos que:

$$|2.5000 - 2.4086| = 0.0914$$

$$|2.1875 - 2.2745| = 0.0870$$

$$|11.4286 - 11.0473| = 0.0870$$

cuyos errores relativos son 3.65 % para la tensión y 3.97 % para la corriente y 3.33 % para la corriente en el condensador C , lo cual nos permite decir que el sistema del convertidor boost teniendo en cuenta la corriente en el condensador C , tiene una mejor regulación capacidad de seguir la señal de referencia constante.

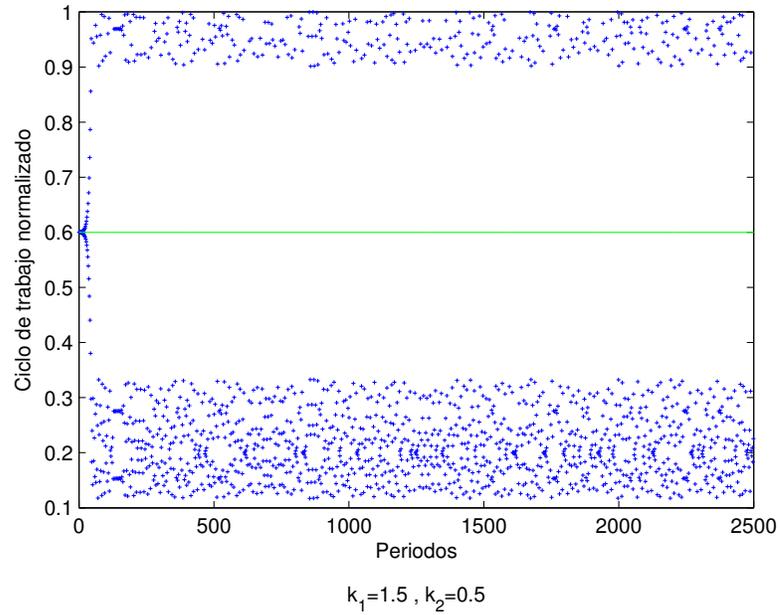


Figura 3-17: Evolución del ciclo de trabajo

En la Figura 3-18 corresponde a un atractor caótico, en esta gráfica se ha tomado $k_1 = -0.5, k_2 = 0.5, k_3 = -1.5$

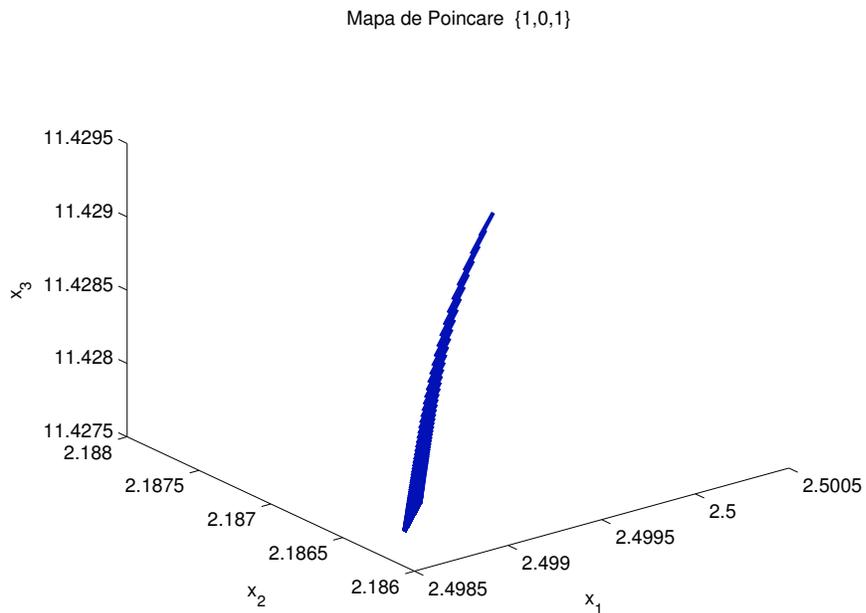
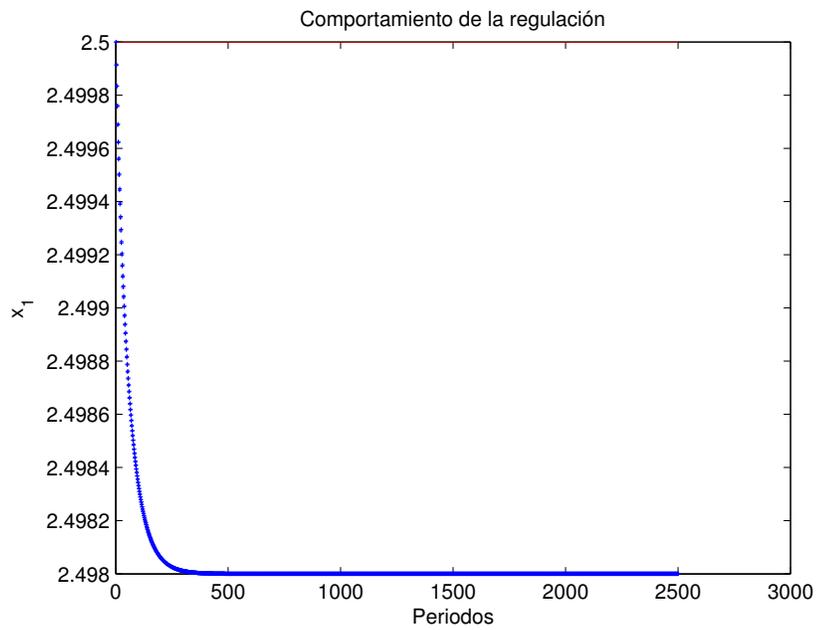
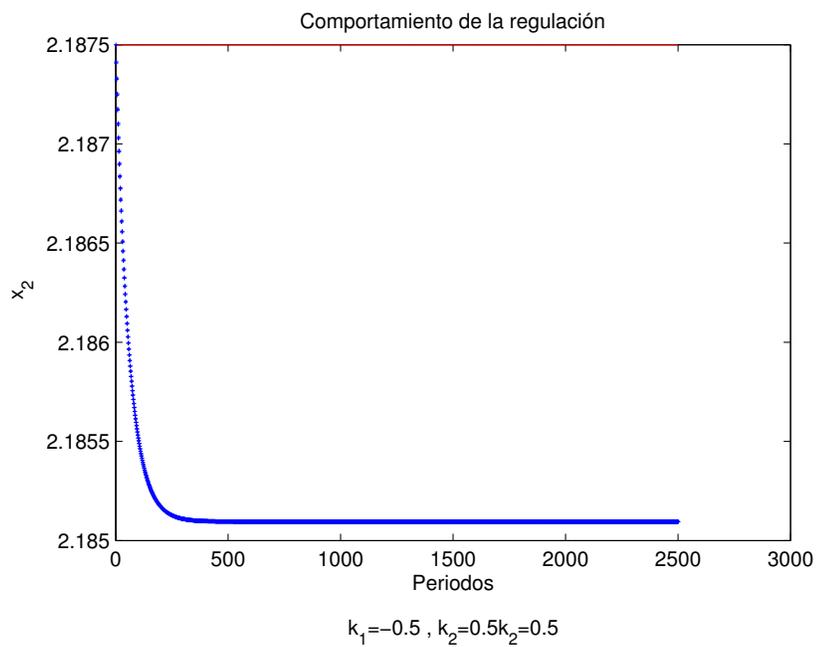


Figura 3-18: Evolución del sistema

**Figura 3-19:** Comportamiento de la regulación**Figura 3-20:** Comportamiento de la regulación

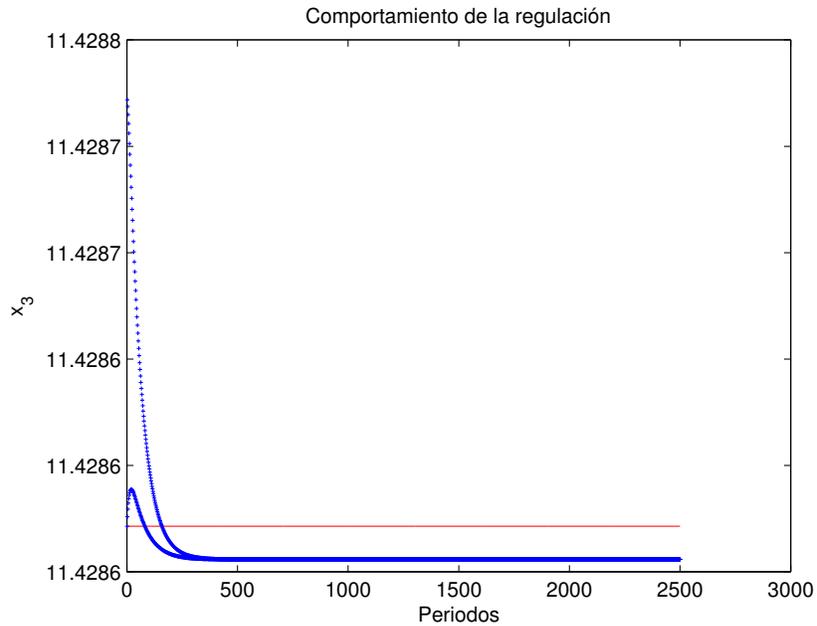


Figura 3-21: Comportamiento de la regulación

En las Figuras (3-14,3-15,3-16) se tomaron los valores $k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.5$, $k_3 = -1.5$, $T = 0.18$

$$|2.5000 - 2.4980| = 0.0020$$

$$|2.1875 - 2.1851| = 0.0024$$

$$|11.4286 - 11.4286| = 0.0024$$

cuyos errores relativos son 0.08 % para la tensión y 0.1 % para la corriente y 0.0001 % para la corriente en el condensador C , lo cual nos permite decir que el sistema del convertidor boost teniendo en cuenta la corriente en el condensador C , tiene una buena regulación capacidad de seguir la señal de referencia constante.

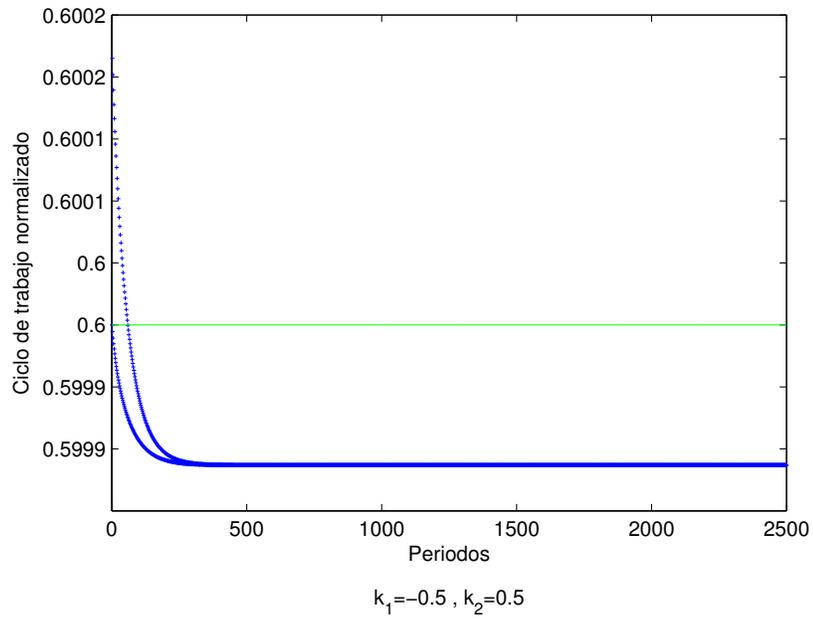


Figura 3-22: Evolución del ciclo de trabajo

4 Existencia y Estabilidad de Órbitas Periódicas

Resumen:

En este capítulo se obtiene analíticamente las condiciones para la existencia de las órbitas 1T-periódicas, 2T-periódicas no saturadas, 2T-periódicas semi-saturadas y 2T-periódicas saturadas, además de la estabilidad de otras órbitas a través de los valores propios de la matriz Jacobiana de la aplicación de Poincaré.

Las órbitas periódicas del sistema (2-20), se hallan haciendo uso de las expresiones del mapa de Poincaré (3-12), (3-13) y (3-14), las cuales corresponde a sus puntos fijos.

4.1. Órbitas 1-T Periódicas

Debemos encontrar los puntos $x_0(nT)$ tales que $P(x_n, d_n) = x_0(nT)$, donde $P(x_n, d_n)$ es la ecuación dada en (3-12), e igualando a $x_0(nT)$, con esto hallamos los puntos fijos de la aplicación de Poincaré para el caso en que no hay saturación del ciclo de trabajo, así:

$$\begin{aligned}
 x_0(nT) &= \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) x_0(nT) \\
 &+ \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) + \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \psi_2(T - d_n) \\
 &+ \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{4-1}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 x_0(nT) &= \left[I_3 - \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \right]^{-1} \\
 &+ \left[\phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) + \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \psi_2(T - d_n) + \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{4-2}$$

La existencias de órbitas 1T-periódicas se restringe a la invertibilidad de la matriz $\left[I_2 - \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \right]^{-1}$, y esta es invertible si el radio espectral de

$\phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)\phi_2(T-d_n)\phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)$ es menor que 1.

Para probar que el radio espectral $\phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)\phi_2(T-d_n)\phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) < 1$, fijamos $T = 0.18s$ y se varía el parámetro γ en el intervalo $(0.1, 0.5)$

En la Figura 4-1 se aprecia que el radio espectral de la matriz $\phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)\phi_2(T-d_n)\phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)$ es menor que 1, por tanto la matriz $[I_3 - \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)\phi_2(T-d_n)\phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)]^{-1}$ es no singular.

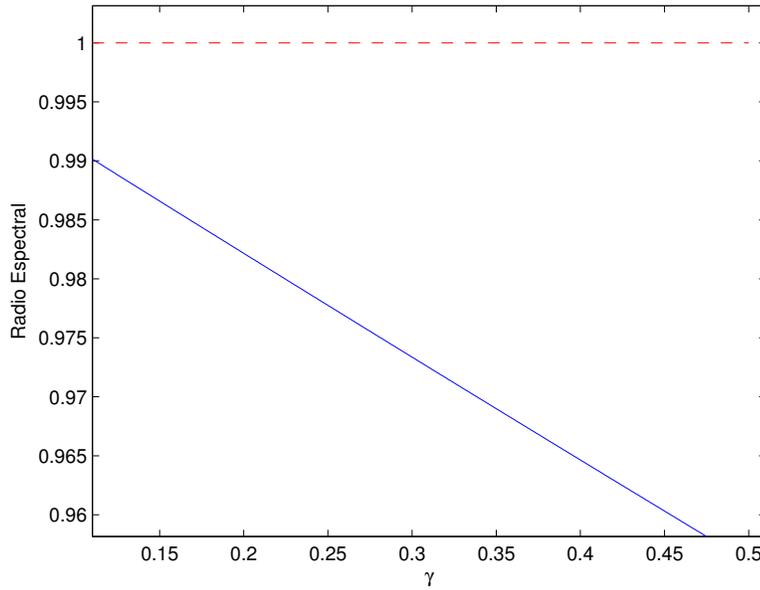


Figura 4-1: Evolución temporal de la tensión y de la corriente.

Cuando hay saturación del ciclo de trabajo, obtenemos las siguientes condiciones suficientes para la existencia de órbitas $1T$ -periódicas:

1. Si $d_n = 0$,

$$x_0(nT) = [I_3 - \phi_2(T)]^{-1} \psi_2(T) \quad (4-3)$$

2. Si $d_n = T$,

$$x_0(nT) = [I_3 - \phi_1(T)]^{-1} \psi_1(T) \quad (4-4)$$

El radio espectral de la matriz $\phi_1(T)$ es justamente 1, así que la fórmula dada en 2 no es aplicable. Nótese que en el caso 1, la existencia (condición suficiente) de órbitas $1T$ -periódicas depende únicamente del valor que tomen en T las funciones ψ_2, ϕ_2 .

Las Figuras 4-2 y 4-3 muestran la forma de una órbita $1T$ periódica y la evolución de las variables de estado x_1 y x_2 .

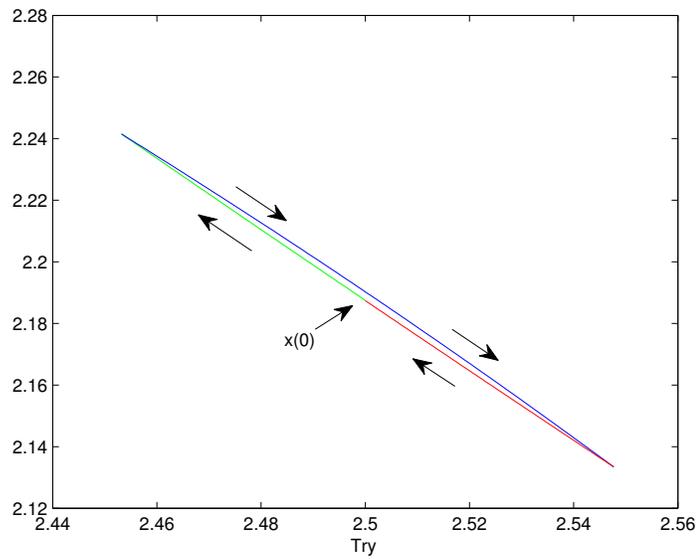


Figura 4-2: Órbita 1T-periódica en el esquema CPWM

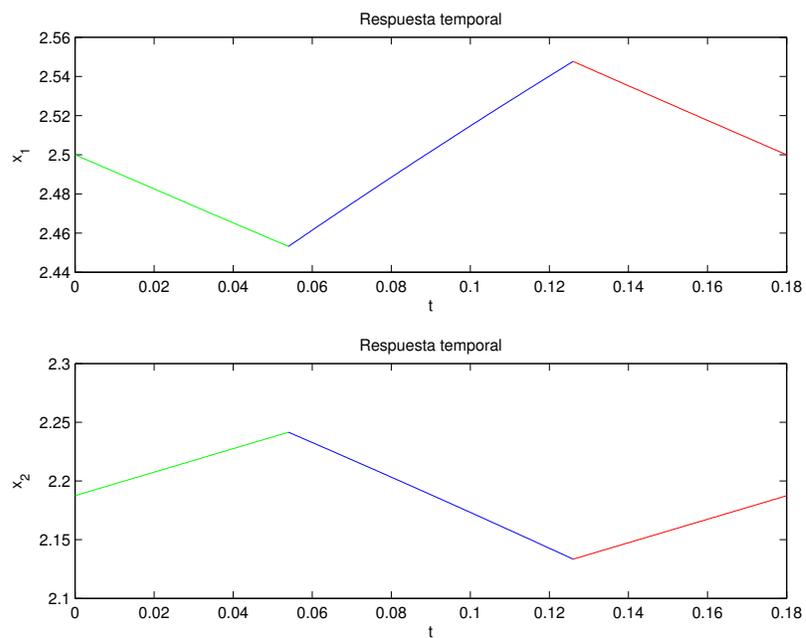


Figura 4-3: Evolución temporal de la tensión y de la corriente.

4.2. Órbitas 2T-periódicas

Estas órbitas corresponden a dos ciclos de la aplicación de Poincaré y se pueden presentar tres tipos de órbitas 2T-periódicas como son las no saturadas, semi saturadas y saturadas

4.2.1. Órbitas 2T-periódicas no saturadas

Para este caso los ciclos de trabajo d_n y \tilde{d}_n no son saturadas, es decir pertenecen al intervalo $(0, T)$, Supongamos que $\{x_0, x_1\}$ son puntos de la órbita 2T-periódica no saturada, entonces a partir de (3-12) se tiene que: $P(x_n, d_n) = x_2((n+1)T) = x_0(nT)$ así:

$$\begin{aligned}
 x_1((n+1)T) &= \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T-d_n) \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) x_0(nT) \\
 &+ \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T-d_n) \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) + \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \psi_2(T-d_n) \\
 &+ \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{4-5}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
 x_2((n+2)T) &= \phi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right) \phi_2(T-\tilde{d}_n) \phi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right) x_1((n+1)T) \\
 &+ \phi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right) \phi_2(T-\tilde{d}_n) \psi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right) + \phi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right) \psi_2(T-\tilde{d}_n) \\
 &+ \psi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{4-6}$$

Como no hay saturación de los ciclos de trabajo, entonces $d_n \in (0, T)$ y $\tilde{d}_n \in (0, T)$.

Al ser un 2 ciclo se debe tener que $x_0(nT) = x_2((n+2)T)$ por lo tanto

$$\begin{aligned}
 x_0((n)T) &= \phi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right) \phi_2(T-\tilde{d}_n) \phi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right) x_1((n+1)T) \\
 &+ \phi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right) \phi_2(T-\tilde{d}_n) \psi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right) + \phi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right) \psi_2(T-\tilde{d}_n) \\
 &+ \psi_1\left(\frac{\tilde{d}_n}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{4-7}$$

Sustituyendo (4-5) en (4-7) y despejando $x_0(nT)$ tenemos

$$x_0((n)T) = [I_2 - A]^{-1} \cdot (B(C + D) + J) \tag{4-8}$$

siendo

$$\begin{aligned}
 A &= B \cdot \phi_1 \left(\frac{\tilde{d}_n}{2} \right) \phi_2 (T - \tilde{d}_n) \phi_1 \left(\frac{\tilde{d}_n}{2} \right) \\
 B &= \phi_1 \left(\frac{\tilde{d}_n}{2} \right) \phi_2 (T - \tilde{d}_n) \phi_1 \left(\frac{\tilde{d}_n}{2} \right) \\
 C &= \phi_1 \left(\frac{\tilde{d}_n}{2} \right) \phi_2 (T - \tilde{d}_n) \psi_1 \left(\frac{\tilde{d}_n}{2} \right) \\
 D &= \phi_1 \left(\frac{\tilde{d}_n}{2} \right) \psi_2 (T - \tilde{d}_n) + \psi_1 \left(\frac{\tilde{d}_n}{2} \right) \\
 J &= \phi_1 \left(\frac{\tilde{d}_n}{2} \right) \phi_2 (T - \tilde{d}_n) \psi_1 \left(\frac{\tilde{d}_n}{2} \right) + \phi_1 \left(\frac{\tilde{d}_n}{2} \right) \psi_2 (T - \tilde{d}_n) \psi_1 \left(\frac{\tilde{d}_n}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{4-9}$$

Numéricamente se tiene que la matriz $I_3 - A$ es invertible, ya que el radio espectral de la matriz A es menor que 1. Esto nos muestra que existen órbitas 2T-periódicas no saturadas

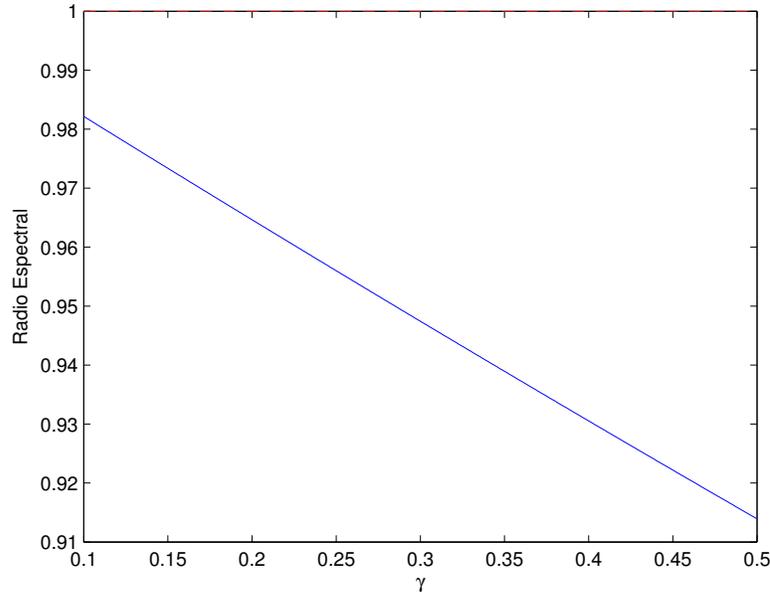


Figura 4-4: Evolución temporal de la tensión y de la corriente.

4.2.2. Órbitas 2T-periódicas semi-saturadas

Estas se presentan cuando en la aplicación de Poincaré le corresponde dos ciclos el cual uno pertenece al intervalo $(0, T)$ y el otro satura en T .

Supongamos que el 2-ciclo corresponde a $\{x_0, x_1\}$, si $d_n \in (0, T)$ entonces

$$\begin{aligned}
 x_1((n+1)T) &= \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T-d_n) \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) x_0(nT) \\
 &+ \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T-d_n) \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) + \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \psi_2(T-d_n) \\
 &+ \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{4-10}$$

Haciendo $\tilde{d}_n = T$, entonces de la relación (3-14) tenemos que

$$x_2((n+2)T) = \phi_1(T) x_1((n+1)T) + \psi_1(T) \tag{4-11}$$

Hacemos $x_0((n)T) = x_2((n+2)T)$ y obtenemos condiciones iniciales para la existencia de órbitas $2T$ -periódicas semi-saturadas, de (4-11) tenemos:

$$x_0((n)T) = \phi_1(T) x_1((n+1)T) + \psi_1(T) \tag{4-12}$$

Sustituyendo el valor de (4-10) en (4-12) se tiene

$$x_0((n)T) = [I_n - A]^{-1} \cdot (B + C) \tag{4-13}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \phi_1(T) \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T-d_n) \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \\
 B &= \phi_1(T) \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T-d_n) \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \\
 C &= \phi_1(T) \left(\phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \psi_2(T-d_n) + \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \right) + \psi_1(T)
 \end{aligned} \tag{4-14}$$

El radio espectral de A es menor que 1 por tanto $(I_3 - A)$ es invertible

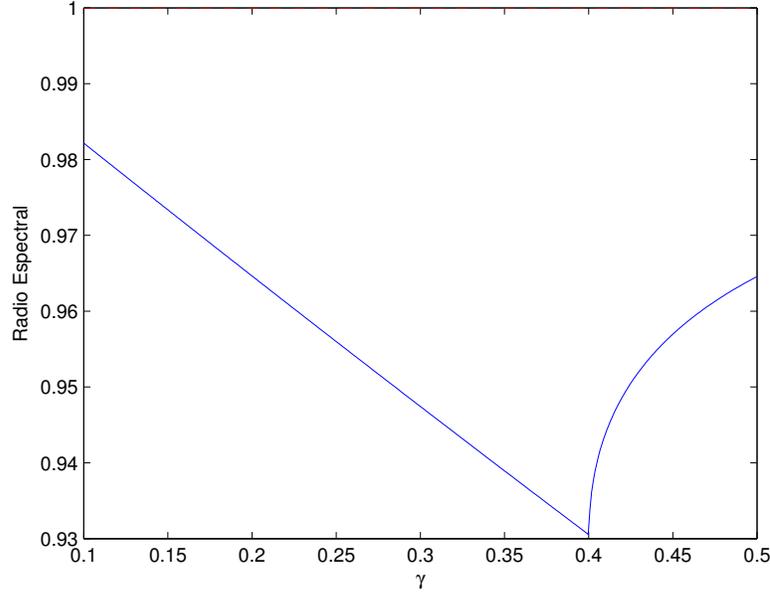


Figura 4-5: Evolución temporal de la tensión y de la corriente.

4.2.3. Órbitas 2T-periódicas saturadas

Estas órbitas corresponden a los ciclos de orden 2 de la aplicación de Poincaré cuyos ciclos de trabajo son saturados en 0 y en T . Supongamos nuevamente que los puntos a los cuales corresponde el 2-ciclo son $\{x_0, x_1\}$. De (3-13) y (3-14) se sigue que

$$x_1((n+1)T) = \phi_2(T)x_0(nT) + \psi_2(T) \quad (4-15)$$

y

$$x_2((n+2)T) = \phi_1(T)x_1((n+1)T) + \psi_1(T) \quad (4-16)$$

Haciendo $x_0(nT) = x_2((n+2)T)$ se tiene

$$x_0(nT) = \phi_1(T)x_1((n+1)T) + \psi_1(T)$$

$$x_0(nT) = \phi_1(T) [\phi_2(T)x_0(nT) + \psi_2(T)] + \psi_1(T)$$

$$x_0(nT) = \phi_1(T)\phi_2(T)x_0(nT) + \phi_1(T)\psi_2(T) + \psi_1(T)$$

$$x_0(nT) - \phi_1(T)\phi_2(T)x_0(nT) = \phi_1(T)\psi_2(T) + \psi_1(T)$$

$$[I_3 - \phi_1(T)\phi_2(T)]x_0(nT) = \phi_1(T)\psi_2(T) + \psi_1(T)$$

con lo que finalmente obtenemos

$$x_0(nT) = [I_3 - \phi_1(T)\phi_2(T)]^{-1} [\phi_1(T)\psi_2(T) + \psi_1(T)] \quad (4-17)$$

esta condición inicial depende únicamente del periodo T .

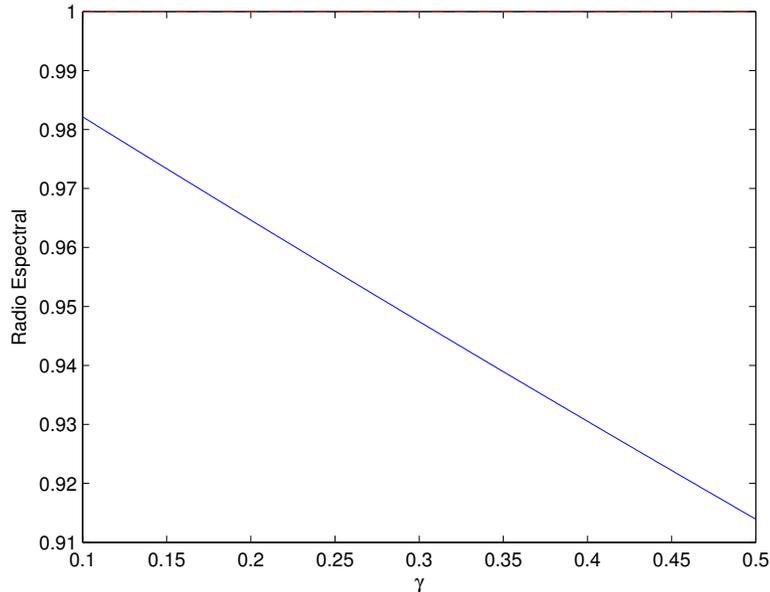


Figura 4-6: Evolución temporal de la tensión y de la corriente.

4.3. Estabilidad de las órbitas periódicas

En esta sección se analiza la estabilidad de las órbitas $1T$ -periódicas del sistema, utilizando los multiplicadores característicos. Este método consiste en hallar la matriz Jacobiana de la aplicación de Poincaré y evaluarla en los puntos fijos de dicha aplicación.

Si los valores propios de la Jacobiana evaluada en los puntos de equilibrio, están dentro del círculo unidad, entonces la órbita $1T$ -periódica es estable, y si existe un valor propio fuera del círculo unidad, entonces la órbita $1T$ -periódica es inestable.

4.3.1. Jacobiano de la aplicación de Poincaré

La matriz jacobiana de la aplicación de Poincaré se encuentra definida por tres casos, que son:

1. $d_n \in (0, T)$, es decir el ciclo de trabajo no satura
2. $d_n = 0$
3. $d_n = T$

A continuación veamos los tres casos

1. Supongamos que $d_n \in (0, T)$

2. $d_n = 0$

3. $d_n = T$

1. Vamos a suponer que $d_n \in (0, T)$, es decir el ciclo de trabajo no satura, para este caso la aplicación de Poincaré viene dada por la expresión (3-12). Aplicando la regla de la cadena tenemos:

$$JP = \frac{\partial P}{\partial x_n} + \frac{\partial P}{\partial d_n} \cdot \frac{\partial d_n}{\partial x_n} \quad (4-18)$$

De (3-12) se tiene que

$$\frac{\partial P}{\partial x_n} = \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \quad (4-19)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (2-22) y (2-23) tenemos:

$$\begin{aligned} \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) &= e^{A_1\left(\frac{d_n}{2}\right)} \\ \phi_2(T - d_n) &= e^{A_1(T-d_n)} \\ \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) &= B_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \end{aligned} \quad (4-20)$$

$$\psi_2(T - d_n) = A_2^{-1}(e^{A_2(T-d_n)} - I_3)B_2$$

Derivando con respecto a d_n , cada una de las ecuaciones dadas en 4-20 se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)}{\partial d_n} &= \frac{1}{2}A_1 e^{A_1\left(\frac{d_n}{2}\right)} = \frac{1}{2}A_1 \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \\ \frac{\partial \phi_2(T - d_n)}{\partial d_n} &= -A_2 e^{A_2(T-d_n)} = -A_2 \phi_2(T - d_n) \\ \frac{\partial \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right)}{\partial d_n} &= \frac{1}{2} \cdot B_1 \\ \frac{\partial \psi_2(T - d_n)}{\partial d_n} &= -e^{A_2(T-d_n)} \cdot B_2 = -\phi_2(T - d_n) \cdot B_2 \end{aligned} \quad (4-21)$$

Definimos

$$\begin{aligned} M &= \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \\ N &= \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \\ Q &= \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \psi_2(T - d_n) + \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \end{aligned} \quad (4-22)$$

Tomando las derivadas parciales respecto a d_n tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial d_n} &= \frac{\partial \phi_1(\frac{d_n}{2})}{\partial d_n} \phi_2(T - d_n) \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) + \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \frac{\partial \phi_2(T - d_n)}{\partial d_n} \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \\
&+ \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \frac{\partial \phi_1(\frac{d_n}{2})}{\partial d_n} \\
\frac{\partial N}{\partial d_n} &= \frac{\partial \phi_1(\frac{d_n}{2})}{\partial d_n} \phi_2(T - d_n) \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) + \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \frac{\partial \phi_2(T - d_n)}{\partial d_n} \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \\
&+ \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \frac{\partial \psi_1(\frac{d_n}{2})}{\partial d_n} \\
\frac{\partial Q}{\partial d_n} &= \frac{\partial \phi_1(\frac{d_n}{2})}{\partial d_n} \psi_2(T - d_n) + \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \frac{\partial \psi_2(T - d_n)}{\partial d_n} + \frac{\partial \psi_1(\frac{d_n}{2})}{\partial d_n}
\end{aligned} \tag{4-23}$$

Sustituyendo (4-21) en (4-23) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial d_n} &= \left[\frac{1}{2} A_1 \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \right] \phi_2(T - d_n) \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \\
&+ \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) [-A_2 \phi_2(T - d_n)] \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \\
&+ \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \left[\frac{1}{2} A_1 \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \right] \\
\frac{\partial N}{\partial d_n} &= \left[\frac{1}{2} A_1 \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \right] \phi_2(T - d_n) \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \\
&+ \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) [-A_2 \phi_2(T - d_n)] \psi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \\
&+ \frac{1}{2} \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \phi_2(T - d_n) \cdot B_1 \\
\frac{\partial Q}{\partial d_n} &= \left[\frac{1}{2} A_1 \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) \right] \psi_2(T - d_n) + \phi_1\left(\frac{d_n}{2}\right) [-\phi_2(T - d_n) \cdot B_2] + \frac{1}{2} \cdot B_1
\end{aligned}$$

Tenemos así que:

$$\frac{\partial P}{\partial d_n} = \frac{\partial M}{\partial d_n} \cdot x_n + \frac{\partial N}{\partial d_n} + \frac{\partial Q}{\partial d_n} \tag{4-24}$$

Sea ahora $x_n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n)^T$. se tiene:

$$\frac{\partial d_n}{\partial x_n} = \left[\frac{\partial d_n}{\partial x_1^n}, \frac{\partial d_n}{\partial x_2^n}, \frac{\partial d_n}{\partial x_3^n} \right] \tag{4-25}$$

De las expresiones (3-6) y (1-1) se tiene

$$\frac{\partial d_n}{\partial x_i^n} = \frac{(2\frac{\partial s}{\partial x_i^n} + T\frac{\partial \dot{s}_2}{\partial x_i^n})(\dot{s}_2 - \dot{s}_1) - (2s + T\dot{s}_2)(\frac{\partial \dot{s}_2}{\partial x_i^n} - \frac{\partial \dot{s}_1}{\partial x_i^n})}{(\dot{s}_2 - \dot{s}_1)^2} \quad (4-26)$$

De (1-1) Tenemos

$$s = k_1(x_1^n - x_{1ref}) + k_2(x_2^n - x_{2ref}) + k_3(x_3^n - x_{3ref})$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_i^n} = k_i \quad \frac{\partial s}{\partial x_1^n} = k_1 \quad \frac{\partial s}{\partial x_2^n} = k_2 \quad \frac{\partial s}{\partial x_3^n} = k_3 \quad (4-27)$$

De (3-3) y (3-4) Se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{s}_2 &= k_1(x_2^n - \gamma x_1^n) + k_2(1 - \gamma x_1^n) + k_3(\gamma^{-1}x_1^n - \gamma x_3^n + \gamma^{-1}) \\ \dot{s}_1 &= -k_1(\gamma x_1^n) + k_2 - k_3(\gamma x_3^n) \end{aligned} \quad (4-28)$$

Para simplificar hacemos $D = \dot{s}_2 - \dot{s}_1$ y $F = 2s + T\dot{s}_2$, así

$$D = \dot{s}_2 - \dot{s}_1 = k_1x_2^n - k_2x_1^n + k_3(\gamma^{-1}x_1^n + \gamma^{-1})$$

$$F = 2s + T\dot{s}_2$$

$$\begin{aligned} F &= k_3(2x_3^n - 2x_{3ref} + T(\gamma^{-1}x_1 - \gamma x_3 + \gamma^{-1})) - k_2(2x_{2ref} - 2x_2^n + T(x_1^n - 1)) \\ &\quad + k_1(2x_1^n - 2x_{1ref} + T(x_2^n - \gamma x_1^n)) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \dot{s}_2}{\partial x_1^n} = -\gamma k_1 - k_2 + \gamma^{-1}k_3 \quad \frac{\partial \dot{s}_2}{\partial x_2^n} = k_1 \quad \frac{\partial \dot{s}_2}{\partial x_3^n} = -\gamma k_3$$

$$\frac{\partial \dot{s}_1}{\partial x_1^n} = -\gamma k_1 \quad \frac{\partial \dot{s}_1}{\partial x_2^n} = 0 \quad \frac{\partial \dot{s}_1}{\partial x_3^n} = -\gamma k_3$$

Remplazando en (4-26) Obtenemos:

$$\frac{\partial d_n}{\partial x_1^n} = \frac{(F(k_2 - \gamma^{-1}k_3) + D(2k_1 - T(k_2 + \gamma k_1 - \gamma^{-1}k_3)))}{(D)^2} \quad (4-29)$$

$$\frac{\partial d_n}{\partial x_2^n} = \frac{(-Fk_1 + D(2k_2 + Tk_1))}{D^2} \quad (4-30)$$

$$\frac{\partial d_n}{\partial x_3^n} = \frac{(2k_3 - T\gamma k_3)D}{D^2} \quad (4-31)$$

Así se tiene

$$\frac{\partial d_n}{\partial x_n^n} = \frac{1}{D^2} \begin{bmatrix} (F(k_2 - \gamma^{-1}k_3) + D(2k_1 - T(k_2 + \gamma k_1 - \gamma^{-1}k_3))) \\ (-Fk_1 + D(2k_2 + Tk_1)) \\ (2k_3 - T\gamma k_3)D \end{bmatrix} \quad (4-32)$$

2. Si $d_n = 0$, la aplicación de Poincaré viene dada por la relación (3-13) y la matriz Jacobiana viene dada por

$$JP = \phi_2(T) \quad (4-33)$$

3. Si $d_n = T$, la aplicación de Poincaré está dada por la relación (3-14) y en este caso la matriz Jacobiana viene dada por

$$JP = \phi_1(T) \quad (4-34)$$

5 Bifurcaciones

Resumen:

En este capítulo se presenta el análisis del cambio cualitativo del convertidor boost, al variar los parámetros asociados a la superficie de conmutación. En el capítulo anterior se establecieron unos valores específicos para los parámetros a partir de los cuales el sistema experimenta un cambio en la estabilidad de sus órbitas periódicas, estos cambios son cualitativos, por lo tanto, se dice que el sistema experimenta una bifurcación justo en el valor de dicho parámetro.

Para caracterizar el tipo de bifurcación presente, haremos uso de los diagramas de bifurcación, el cual se obtiene de la aplicación de Poincaré dada por las relaciones (3-12), (3-13) y (3-14), y de los valores propios de la matriz Jacobiana evaluada en los puntos de equilibrio del sistema.

5.1. Bifurcaciones tipo flip

Estas órbitas se dan cuando el valor propio pasa de ser estable a inestable cruzando por -1 [13].

Este tipo de bifurcación está caracterizado por que la órbita $1T$ -periódica se hace inestable y nace una órbita $2T$ -periódica, es decir, ocurre un doblamiento de período [6]

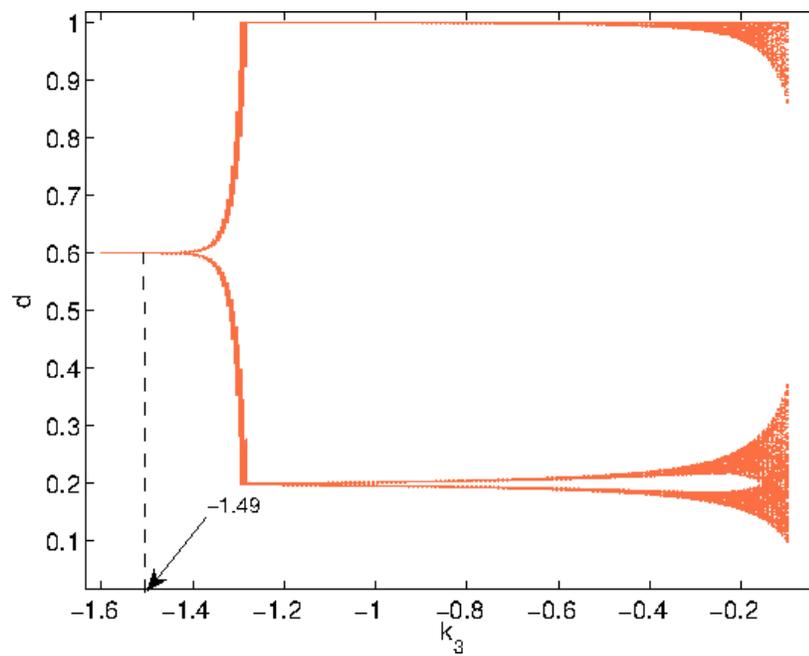


Figura 5-1: : Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_3 , $k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.5$

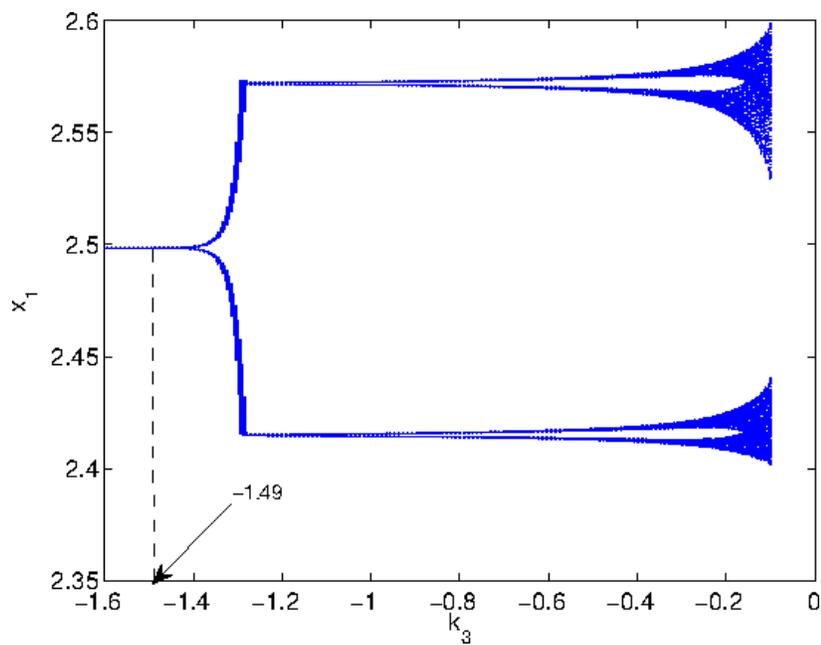


Figura 5-2: : Diagrama de bifurcación de la tensión en función de k_3 , $k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.5$

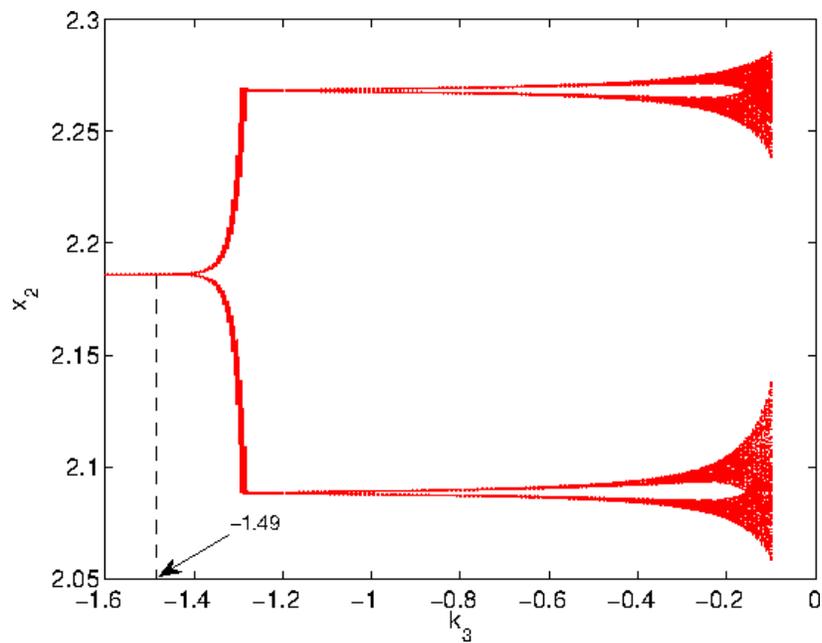


Figura 5-3: : Diagrama de bifurcación de la corriente en función de k_3 , $k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.5$

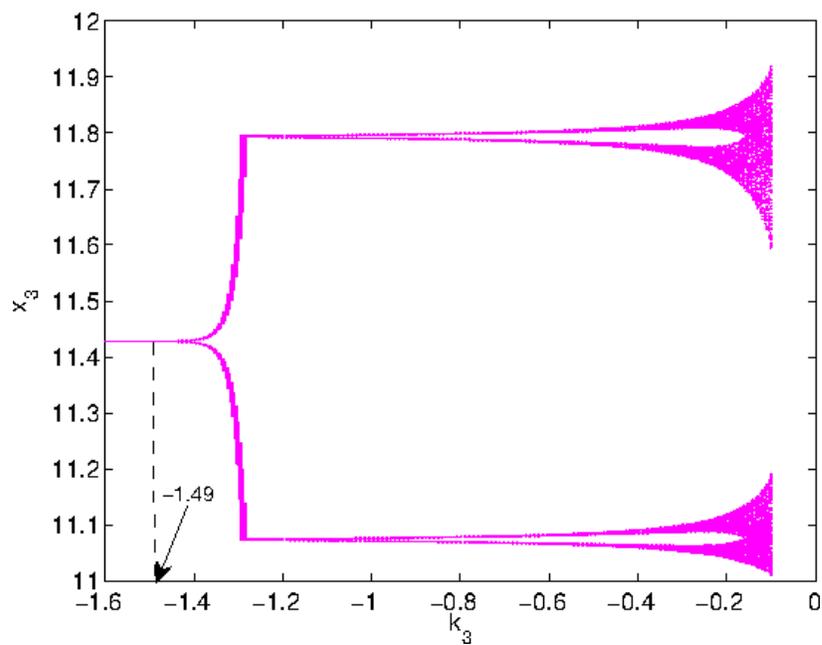


Figura 5-4: : Diagrama de bifurcación de la corriente en el condensador, en función de k_3 , $k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.5$

Las Figuras 5-1, 5-2, 5-3 y 5-4 muestran una configuración de parámetros, se ha escogido

$\gamma = 0.35$, $T = 0.18s$, como condición inicial se tomó $(2.5, 2.1875, 11.4286)^T$, $k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.5$ y el punto de interés se encuentra variando $k_3 \in [-1.6, 0]$. De estas Figuras se tiene que la órbita $1T$ -periódica pierde su estabilidad cuando $k_3 \approx -1.49$

k_3	λ_1	λ_2	λ_3	ρ
-1.6000	-0.9988	0.9067	0.9755	0.9988
-1.2800	-1.0025	0.9051	0.9736	1.0025
-0.9600	-1.0087	0.9023	0.9708	1.0087
-0.6400	-1.0210	0.8961	0.9658	1.0210
-0.3200	-1.0578	0.8743	0.9560	1.0578
0	0.9389	-3.3278	0.2891	3.3278

Tabla 5-1: Valores propios asociados a la variación de k_3 , $k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.5$

Al revisar los valores propios de la matriz jacobiana (Tabla 5-1) asociados a la aplicación de Poincaré, se observa que la bifurcación obtenida es de tipo Flip, ya que para un valor del parámetro $k_3 \approx -1.49$ pasa de ser estable a inestable.

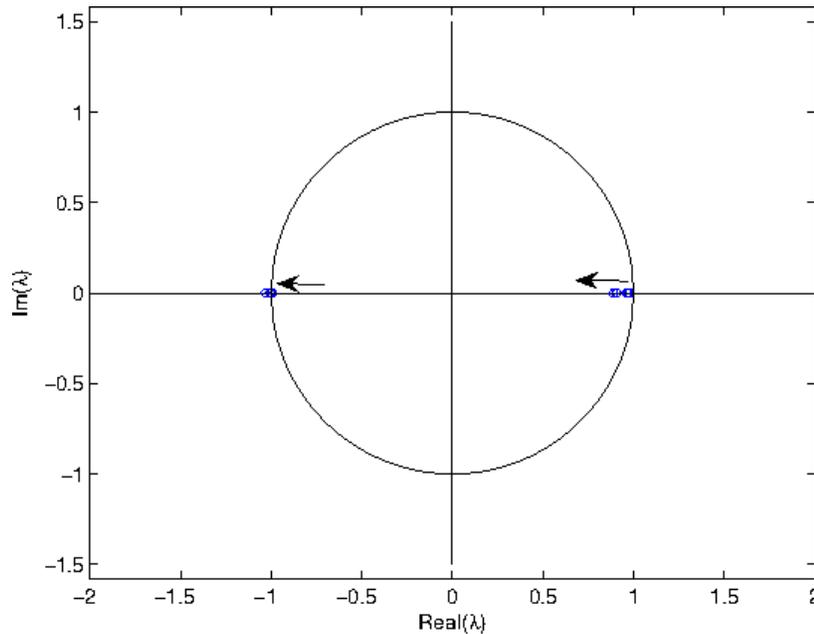


Figura 5-5: variación de los valores propios en función de k_3 , $k_1 = k_2 = 0.5$

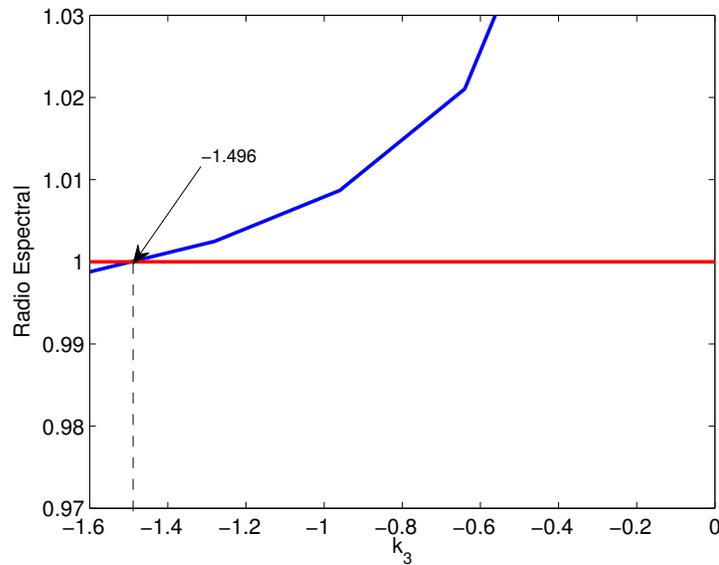


Figura 5-6: variación del radio espectral en función de k_3 , $k_1 = k_2 = 0.5$

En la Figura 5-5 vemos que inicialmente los valores propios están dentro del círculo unidad, lo que muestra la estabilidad de la órbita $1T$ -periódica. Al incrementarse el valor de k_3 los valores propios salen del círculo unidad por -1 y la Figura 5-6 muestra el punto de bifurcación reseñado en las gráficas anteriores.

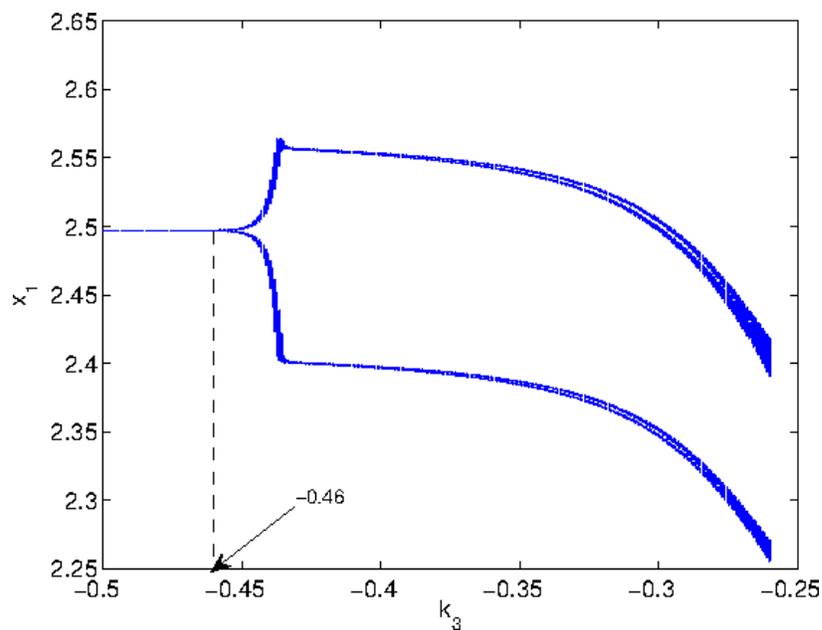


Figura 5-8: Diagrama de bifurcación de la tensión en función de k_3 , $k_1 = 0.5$, $k_2 = -0.5$

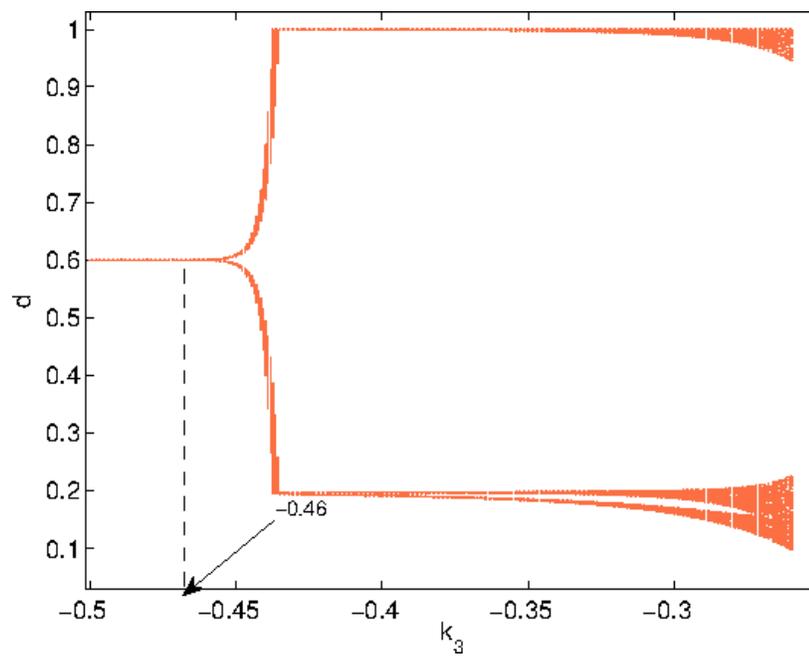


Figura 5-7: : Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_3 , $k_1 = 0.5$, $k_2 = -0.5$

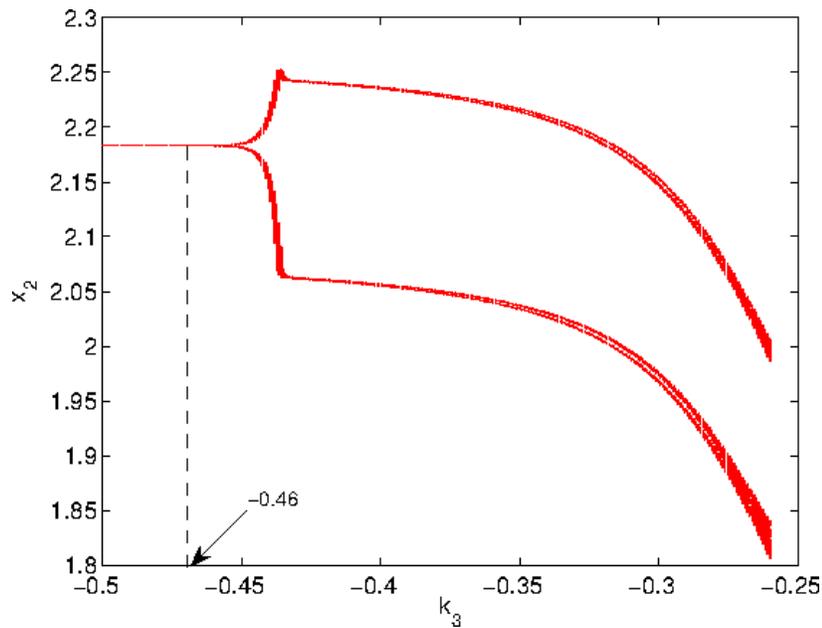


Figura 5-9: : Diagrama de bifurcación de la corriente en función de k_3 , $k_1 = 0.5$, $k_2 = -0.5$

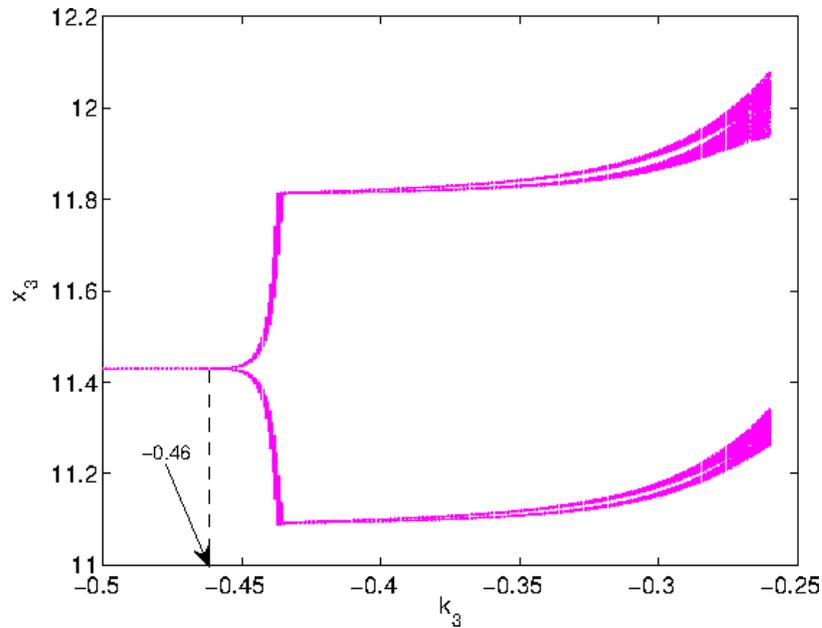


Figura 5-10: Diagrama de bifurcación de la corriente en el condensador, en función de k_3 , $k_1 = 0.5$, $k_2 = -0.5$

Las Figuras 5-7, 5-8, 5-9 y 5-10 muestran una configuración de parámetros, se ha escogido $\gamma = 0.35$, $T = 0.18s$, como condición inicial se tomó $(2.5, 2.1875, 11.4286)^T$, $k_1 = 0.5$, $k_2 = -0.5$ y el punto de interés se encuentra variando $k_3 \in [-0.5, -0.25]$. De estas Figuras se tiene que la órbita $1T$ -periódica pierde su estabilidad cuando $k_3 \approx -0.46$

Las Figuras 5-11 y 5-12

k_3	λ_1	λ_2	λ_3	ρ
-0.5000	-0.9980	0.8945	0.9894	0.9980
-0.4520	-1.0011	0.8909	0.9903	1.0011
-0.4040	-1.0060	0.8854	0.9916	1.0060
-0.3560	-1.0149	0.8760	0.9935	1.0149
-0.3080	-1.0353	0.8559	0.9968	1.0353
-0.2600	-1.1417	0.7689	1.0065	1.1417

Tabla 5-2: Valores propios asociados a la variación de k_3 , $k_1 = 0.5$, $k_2 = -0.5$

Al revisar los valores propios de la matriz jacobiana (Tabla 5-2) asociados a la aplicación de Poincaré, se observa que la bifurcación obtenida es de tipo Flip, ya que para un valor del parámetro $k_3 \approx -0.46$ pasa de ser estable a inestable.

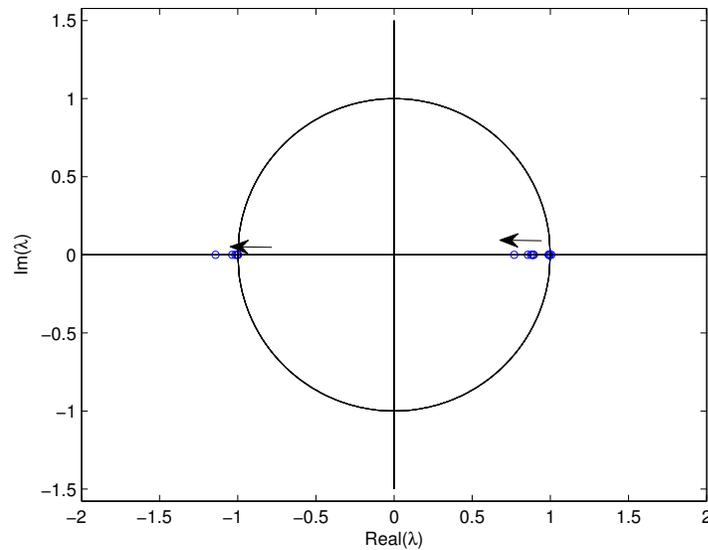


Figura 5-11: variación de los valores propios en función de k_3 , $k_1 = 0.5$; $k_2 = -0.5$

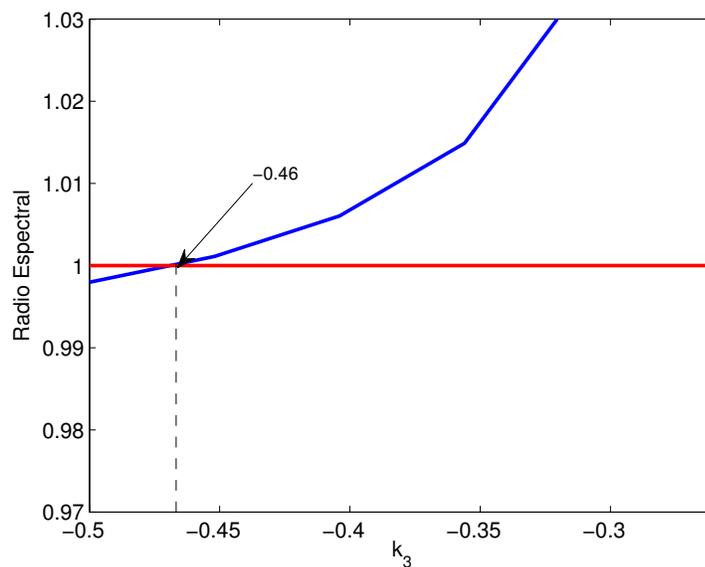


Figura 5-12: variación del radio espectral en función de k_3 , $k_1 = 0.5$; $k_2 = -0.5$

Figura 5-11. En ella vemos que inicialmente los valores propios están dentro del círculo unidad, lo que muestra la estabilidad de la órbita 1T -periódica. Al incrementarse el valor de k_3 los valores propios salen del círculo unidad por -1 y la Figura 5-12 muestra el punto

de bifurcación reseñado en las gráficas anteriores.

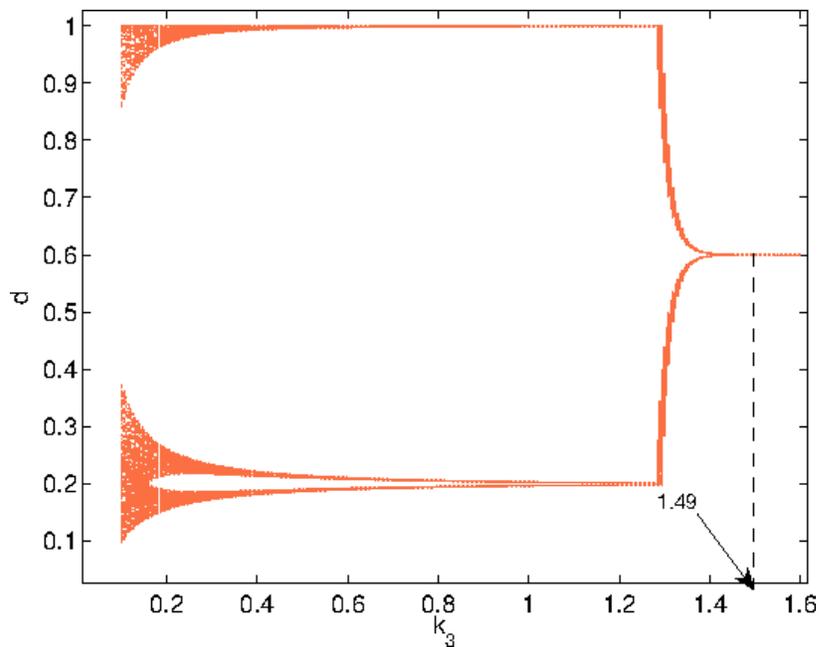


Figura 5-13: : Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_3 , $k_1 = -0.5$, $k_2 = -0.5$

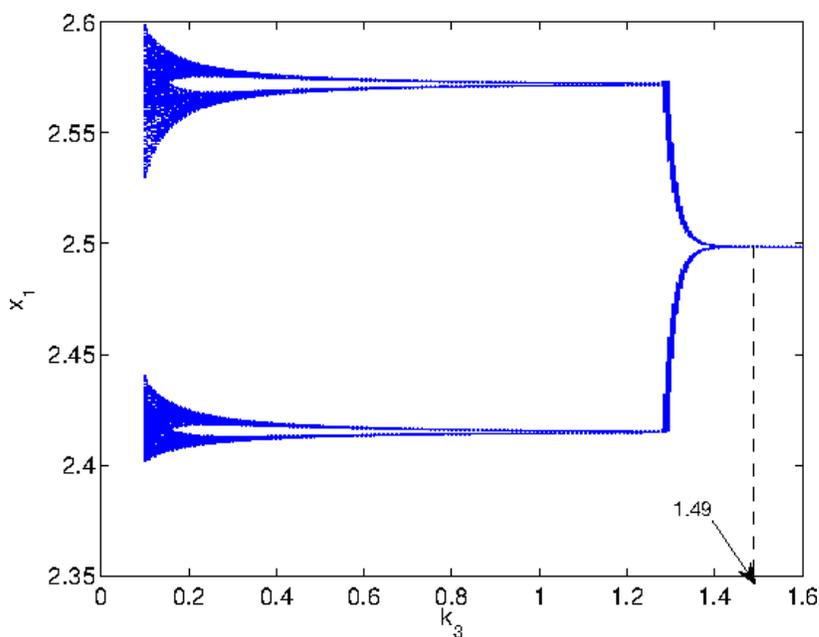


Figura 5-14: : Diagrama de bifurcación de la tensión en función de k_3 , $k_1 = -0.5$, $k_2 = -0.5$

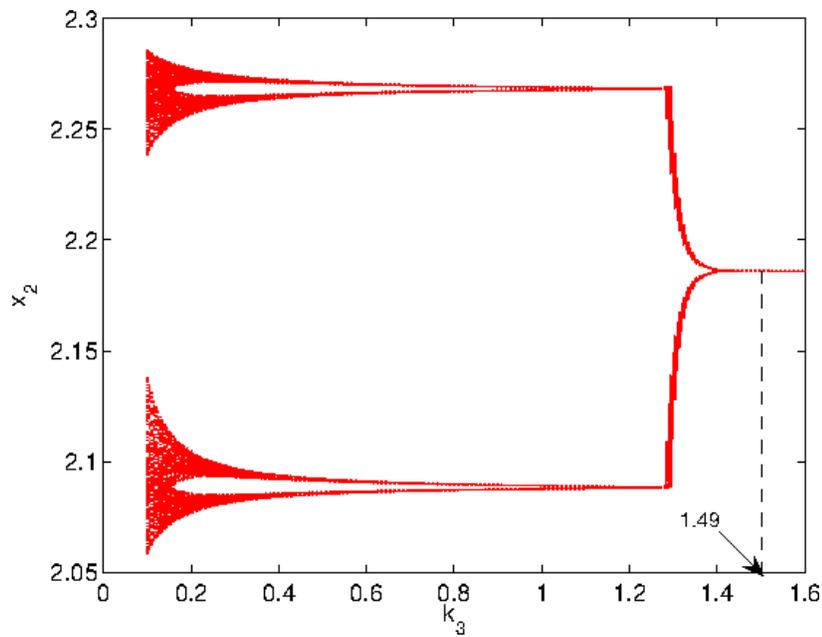


Figura 5-15: : Diagrama de bifurcación de la corriente en función de k_3 , $k_1 = -0.5$, $k_2 = -0.5$

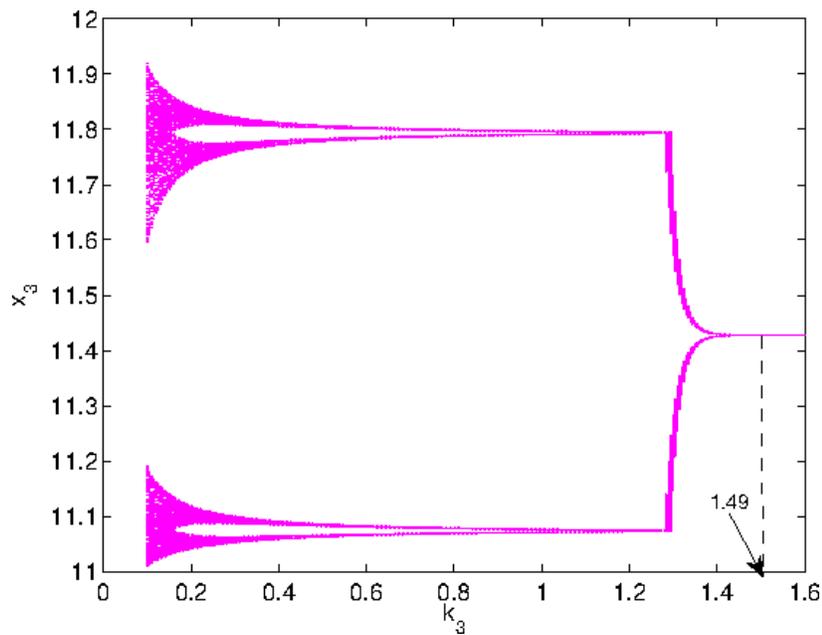


Figura 5-16: : Diagrama de bifurcación de la corriente en el condensador, en función de k_3 , $k_1 = -0.5$, $k_2 = -0.5$

Las Figuras 5-13, 5-14, 5-15 y 5-16 muestran una configuración de parámetros, se ha escogi-

do $\gamma = 0.35$, $T = 0.18s$, como condición inicial se tomó $(2.5, 2.1875, 11.4286)^T$, $k_1 = -0.5$, $k_2 = -0.5$ y el punto de interés se encuentra variando $k_3 \in [0, 1.49]$. De estas Figuras se tiene que la órbita $1T$ -periódica pierde su estabilidad cuando $k_3 \approx 1.49$

Las Figuras 5-17 y 5-18

k_3	λ_1	λ_2	λ_3	ρ
0.1000	-1.2121	0.7738	0.9446	1.2121
0.4000	-1.0431	0.8835	0.9592	1.0431
0.7000	-1.0179	0.8977	0.9670	1.0179
1.0000	-1.0077	0.9027	0.9712	1.0077
1.3000	-1.0022	0.9052	0.9738	1.0022
1.6000	-0.9988	0.9067	0.9755	0.9988

Tabla 5-3: Valores propios asociados a la variación de k_3 , $k_1 = -0.5$, $k_2 = -0.5$

Al revisar los valores propios de la matriz jacobiana (Tabla 5-3) asociados a la aplicación de Poincaré, se observa que la bifurcación obtenida es de tipo Flip, ya que para un valor del parámetro $k_3 \approx 1.49$ pasa de ser inestable a estable.

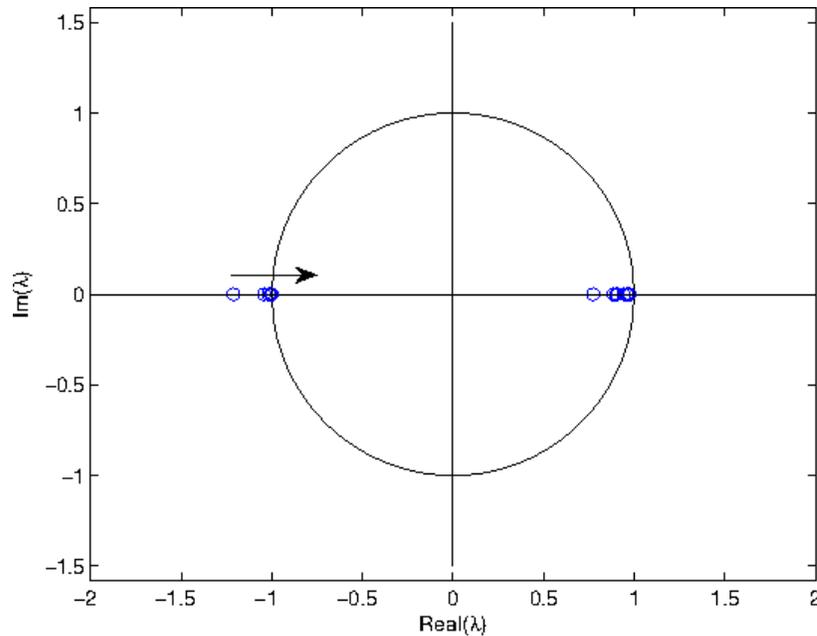


Figura 5-17: variación de los valores propios en función de k_3 , $k_1 = 0.5$; $k_2 = -0.5$

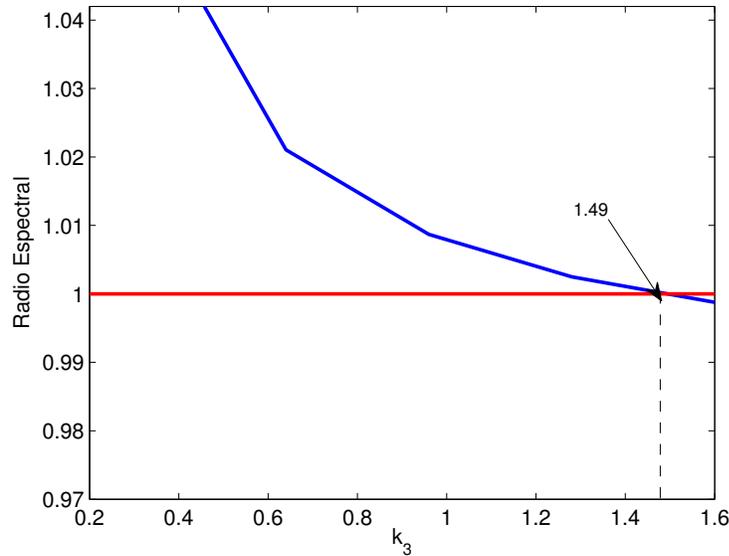


Figura 5-18: variación del radio espectral en función de k_3 , $k_1 = -0.5$; $k_2 = -0.5$

Figura 5-17. En ella vemos que inicialmente los valores propios están dentro del círculo unidad, lo que muestra la estabilidad de la órbita $1T$ -periódica. Al incrementarse el valor de k_3 los valores propios salen del círculo unidad por -1 y la Figura 5-18 muestra el punto de bifurcación reseñado en las gráficas anteriores.

5.2. Bifurcaciones tipo Neimar-Sacker

Este tipo de bifurcación se caracteriza, porque al examinar la evolución de los valores propios de la matriz jacobiana del mapa de Poincaré, éstos son complejos y conjugados, además, el módulo se aproxima a 1.

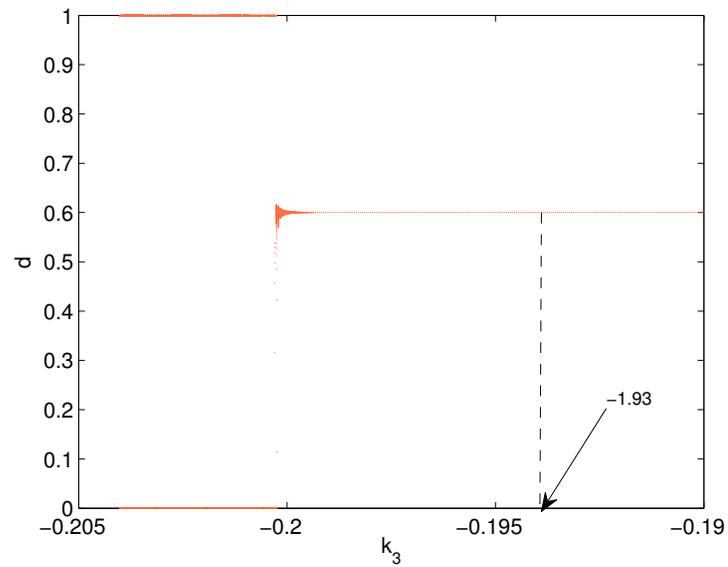


Figura 5-19: : Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_3 , $k_1 = 0.5$, $k_2 = -0.5$

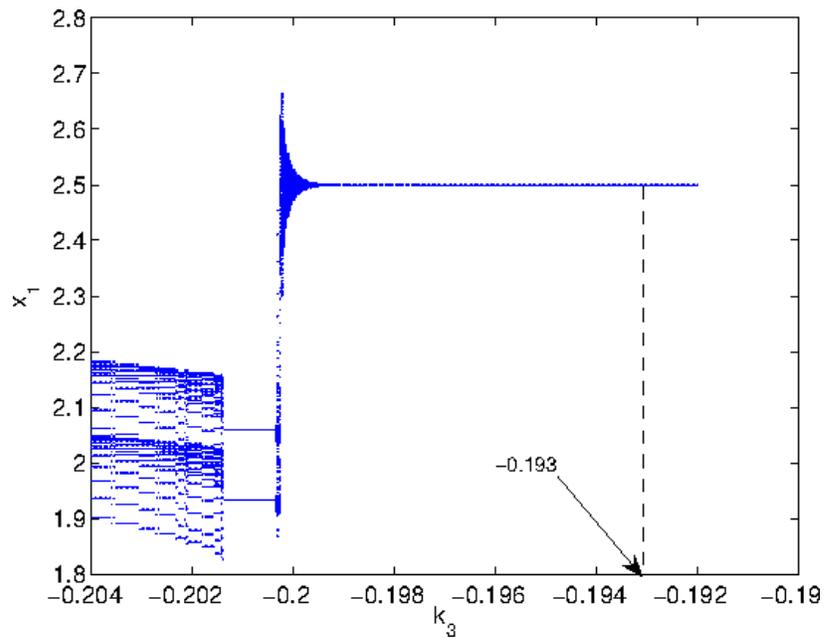


Figura 5-20: : Diagrama de bifurcación de la tensión en función de k_3 , $k_1 = 0.5$, $k_2 = -0.5$

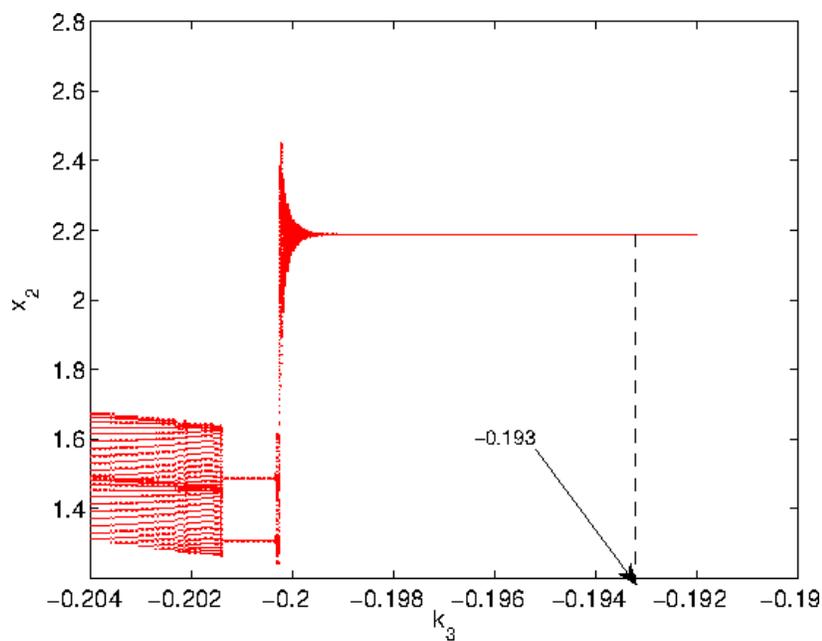


Figura 5-21: : Diagrama de bifurcación de la corriente en función de k_3 , $k_1 = 0.5$, $k_2 = -0.5$

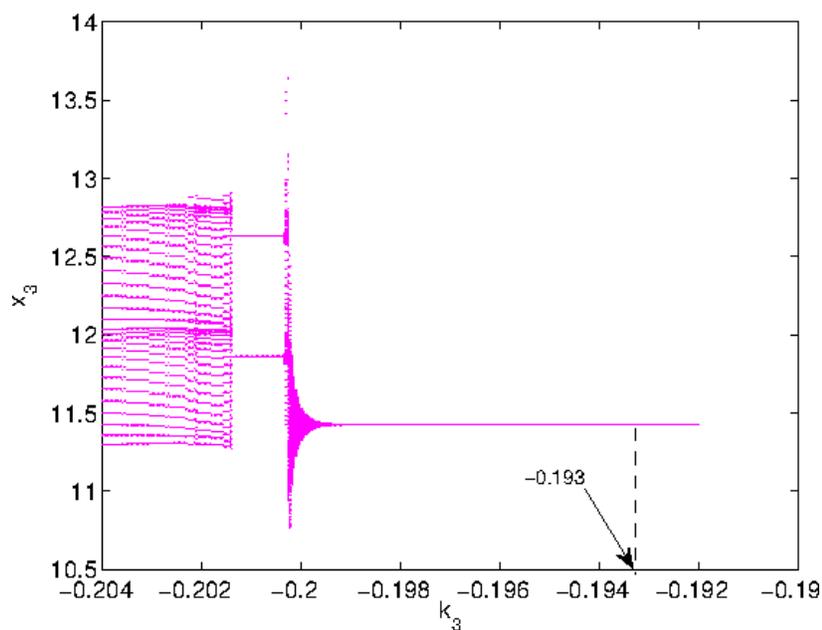


Figura 5-22: : Diagrama de bifurcación de la corriente en el condensador, en función de k_3 , $k_1 = 0.5$, $k_2 = -0.5$

Las Figuras 5-19, 5-20, 5-21 y 5-22 muestran una configuración de parámetros, se ha escogido $\gamma = 0.35$, $T = 0.18s$, como condición inicial se tomó $(2.5, 2.1875, 11.4286)^T$, $k_1 = 0.5$,

$k_2 = -0.5$ y el punto de interés se encuentra variando $k_3 \in [-0.204, -0.19]$. De estas Figuras se tiene que la órbita $1T$ -periódica pierde su estabilidad cuando $k_3 \approx -0.193$ Las Figuras 5-23 y 5-24

k_3	λ_1	λ_2	λ_3	ρ
-0.2200	$-0.7574 + 0.0000i$	$1.0789 + 0.0344i$	$1.0789 - 0.0344i$	1.0795
-0.1900	$-0.9031 + 0.0000i$	$0.9872 + 0.0551i$	$0.9872 - 0.0551i$	0.9888
-0.1600	$-0.9348 + 0.0000i$	$0.9711 + 0.0403i$	$0.9711 - 0.0403i$	0.9719
-0.1300	$-0.9487 + 0.0000i$	$0.9644 + 0.0296i$	$0.9644 - 0.0296i$	0.9648
-0.1000	$-0.9564 + 0.0000i$	$0.9607 + 0.0208i$	$0.9607 - 0.0208i$	0.9609

Tabla 5-4: Valores propios asociados a la variación de $k_3, k_1 = 0.5, k_2 = -0.5$

Al revisar los valores propios de la matriz jacobiana (Tabla 5-4) asociados a la aplicación de Poincaré, se observa que la bifurcación obtenida es de tipo Neimar-Sacker, ya que para un valor del parámetro $k_3 \approx -0.193$ posee autovalores complejos conjugados que entran al círculo unidad.

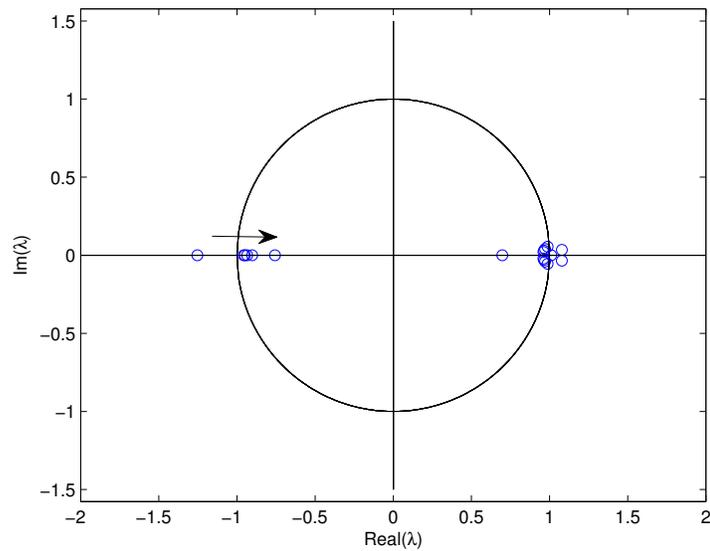


Figura 5-23: variación de los valores propios en función de $k_3, k_1 = 0.5; k_2 = -0.5$

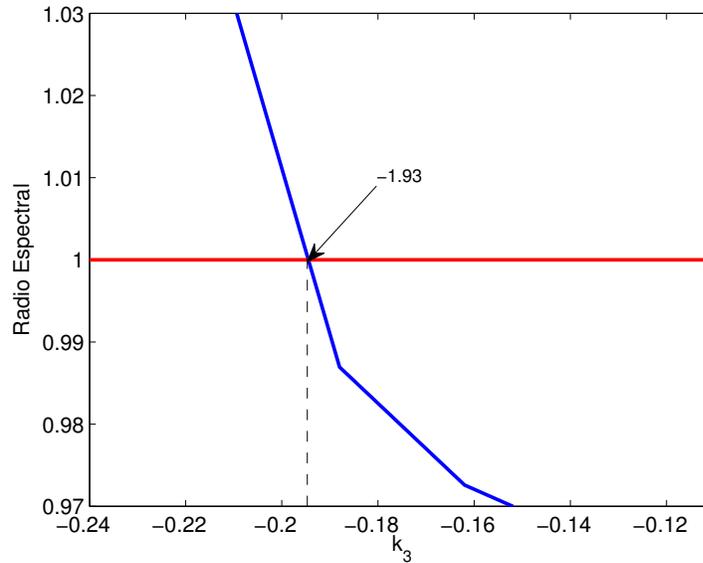


Figura 5-24: variación del radio espectral en función de k_3 , $k_1 = 0.5$; $k_2 = -0.5$

En la Figura 5-23 vemos que inicialmente los valores propios están dentro del círculo unidad, lo que muestra la estabilidad de la órbita $1T$ -periódica. Al incrementarse el valor de k_3 los valores propios salen del círculo unidad por -1 y la Figura 5-24 muestra el punto de bifurcación reseñado en las gráficas anteriores.

5.3. Simulación del sistema con retardo de tiempo

Los sistemas con retardo son más reales porque todo sistema siempre tiene un periodo de atraso cuando empieza a funcionar.

Para realizar un estudio de la implicación que tiene en el sistema un periodo de atraso, debemos cambiar t por $t - T$, siendo T el periodo de conmutación, así el ciclo de trabajo que debemos usar es:

$$d_R = \frac{2s(x((n-1)T)) + T\dot{s}_2(x((n-1)T))}{\dot{s}_2(x((n-1)T)) - \dot{s}_1(x((n-1)T))} \quad (5-1)$$

La simulación del sistema con retardo de tiempo se muestra en las Figuras 5-25, 5-26, 5-27 y 5-28

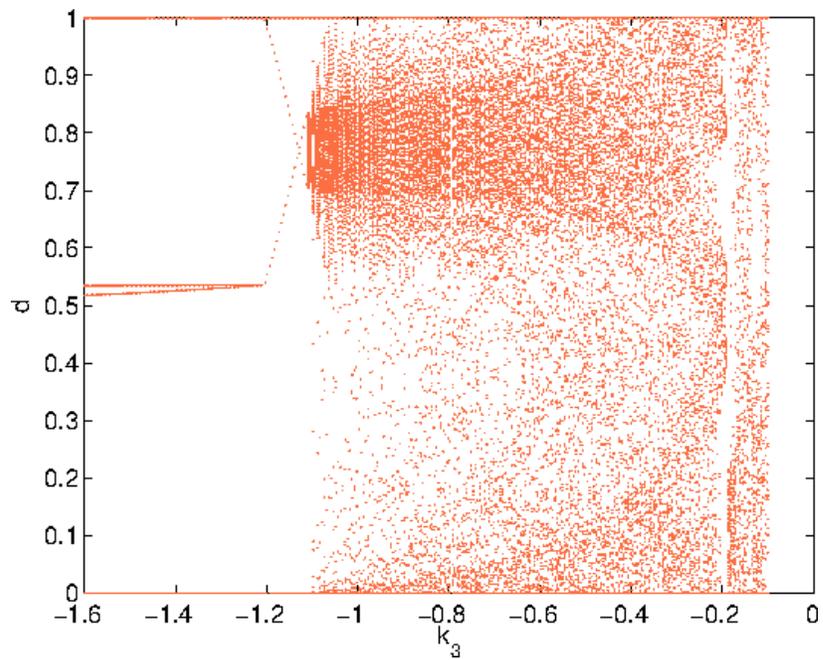


Figura 5-25: k_3 vs d con retardo, $k_1 = 0.5$ y $k_2 = 0.5$

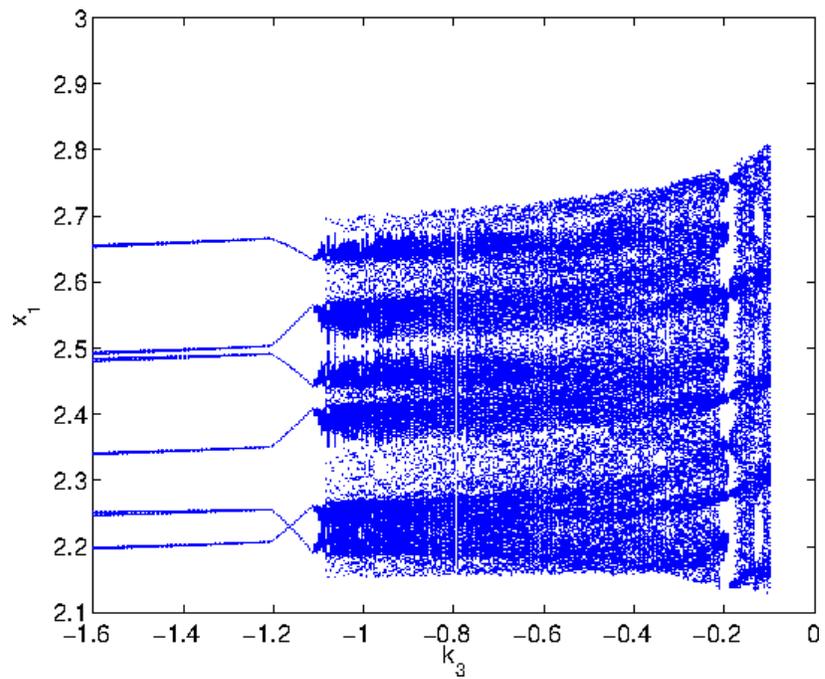


Figura 5-26: k_3 vs x_1 con retardo, $k_1 = 0.5$ y $k_2 = 0.5$

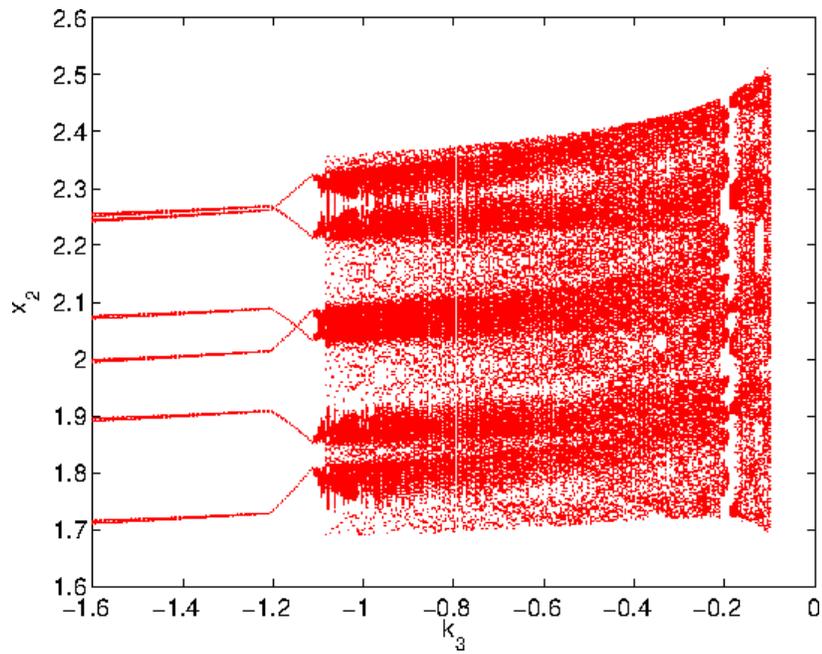


Figura 5-27: k_3 vs x_2 con retardo, $k_1 = 0.5$ y $k_2 = 0.5$

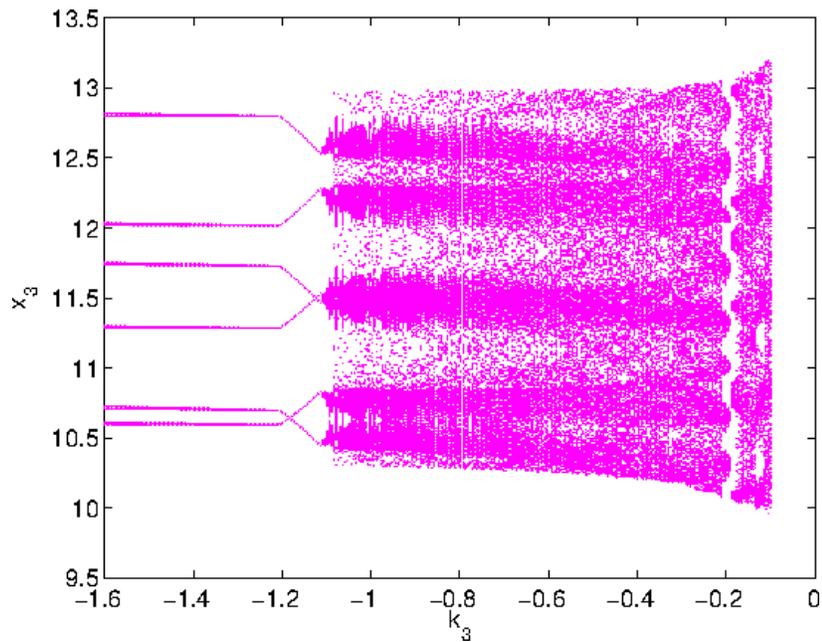


Figura 5-28: k_3 vs x_3 con retardo, $k_1 = 0.5$ y $k_2 = 0.5$

En las Figuras 5-25, 5-26, 5-27 y 5-28 se tienen los diagramas de bifurcación del ciclo de trabajo, tensión, corriente y corriente en el condensador C en función del parámetro k_3 , en

estos diagramas se tomaron las mismas condiciones que en los diagramas de las Figuras 5-1, 5-2, 5-3 y 5-4

Se ha usado el ciclo de trabajo dado por la ecuación (5-1)

k_3	λ_1	λ_2	λ_3	ρ
-1.6000	-0.9988	0.9066	0.9755	0.9988
-1.2840	-1.0025	0.9051	0.9737	1.0025
-0.9680	-1.0085	0.9023	0.9709	1.0085
-0.6520	-1.0204	0.8964	0.9661	1.0204
-0.3360	-1.0543	0.8765	0.9567	1.0543
-0.0200	-1.8569	0.5111	0.9400	1.8569

Tabla 5-5: Valores propios asociados a la variación de k_3 , $k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.5$

Al revisar los valores propios de la matriz jacobiana (Tabla 5-5) asociados a la aplicación de Poincaré, se observa que la bifurcación obtenida es de tipo Flip, ya que para un valor del parámetro $k_3 \approx -1.49$ pasa de ser estable a inestable.

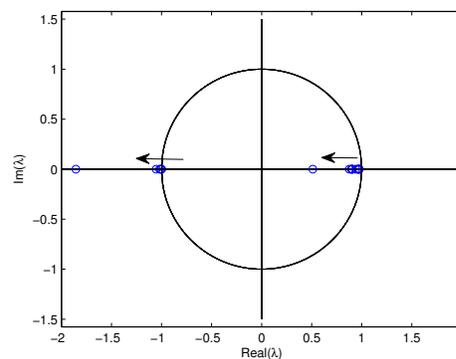


Figura 5-29: variación de los valores propios en función de k_3 , $k_1 = k_2 = 0.5$

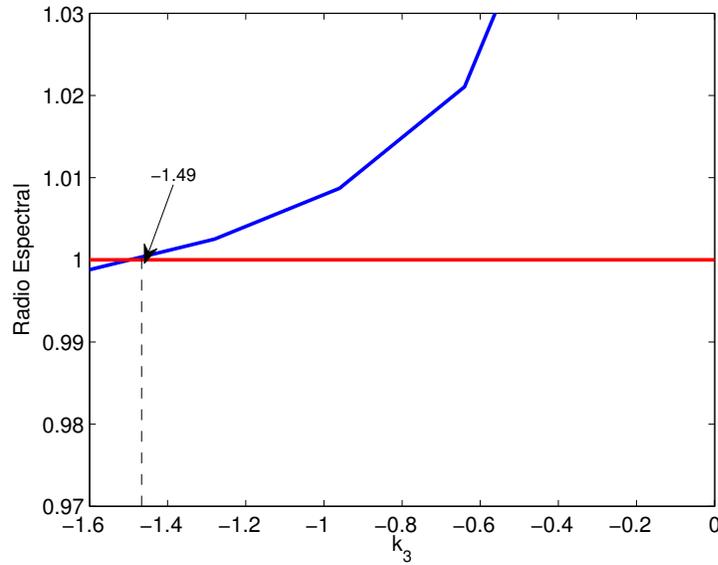


Figura 5-30: variación del radio espectral en función de k_3 , $k_1 = k_2 = 0.5$

Figura 5-29. En ella vemos que inicialmente los valores propios están dentro del círculo unidad, lo que muestra la estabilidad de la órbita 1T -periódica. Al incrementarse el valor de k_3 los valores propios salen del círculo unidad por -1 y la Figura 5-30 muestra el punto de bifurcación reseñado en las gráficas anteriores.

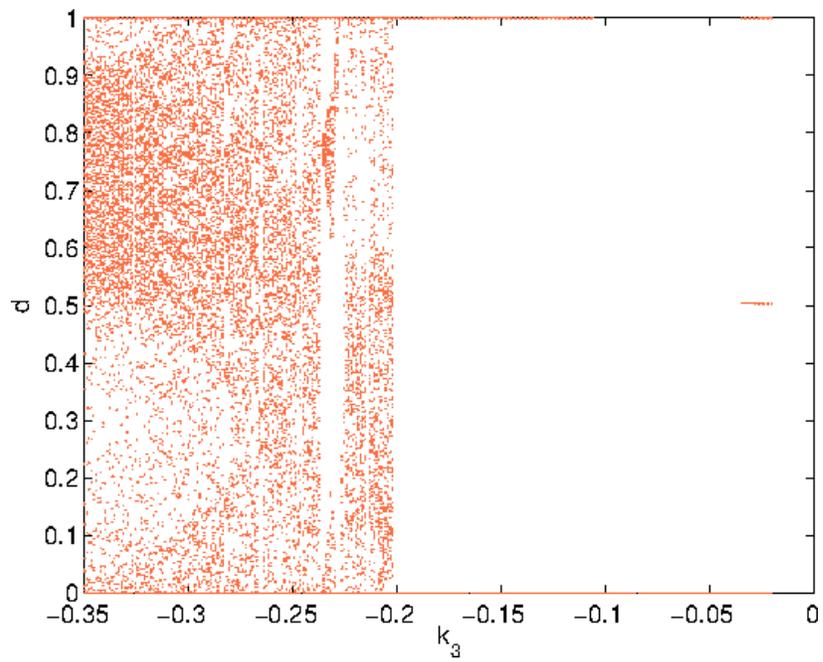


Figura 5-31: k_3 vs d con retardo, $k_1 = 0.5$ y $k_2 = -0.5$

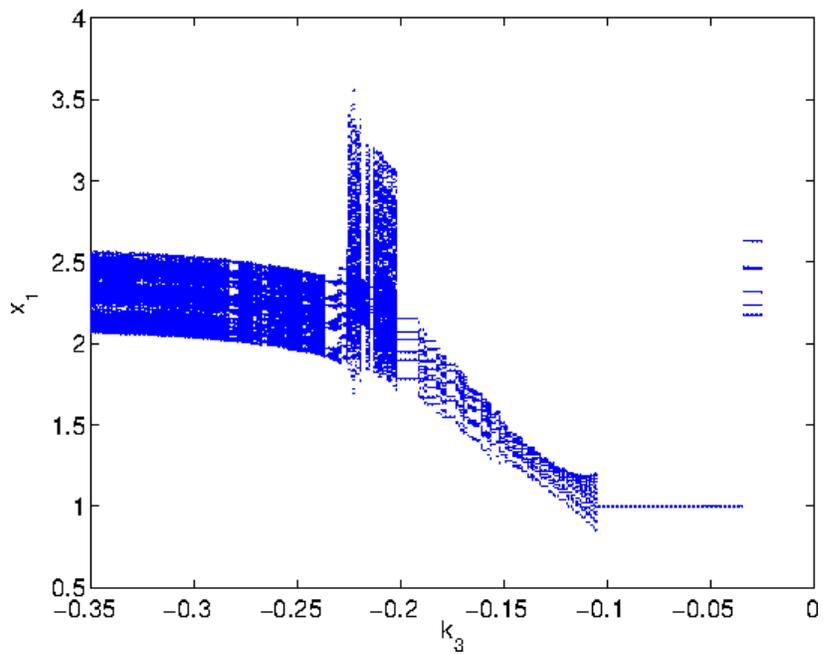


Figura 5-32: k_3 vs x_1 con retardo, $k_1 = 0.5$ y $k_2 = -0.5$

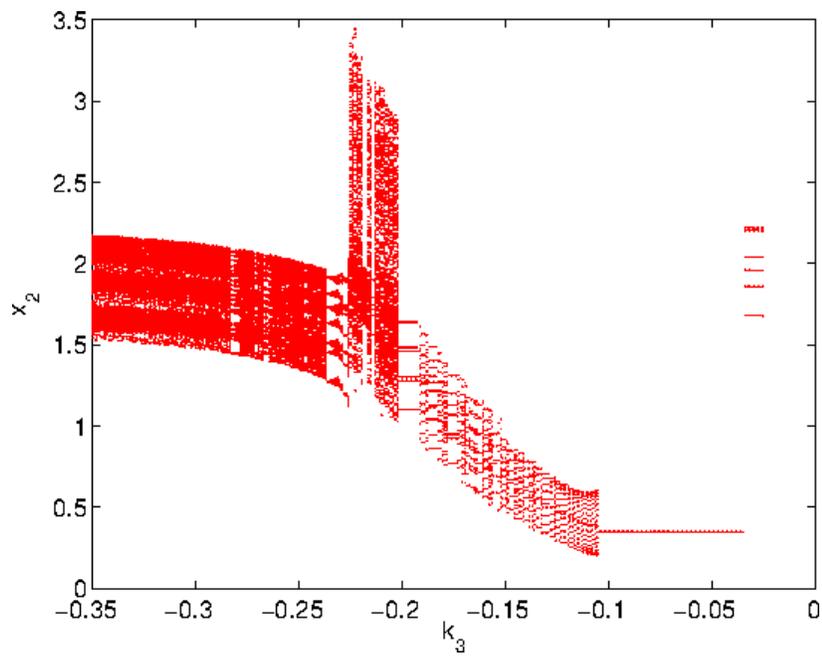


Figura 5-33: k_3 vs x_2 con retardo, $k_1 = 0.5$ y $k_2 = -0.5$

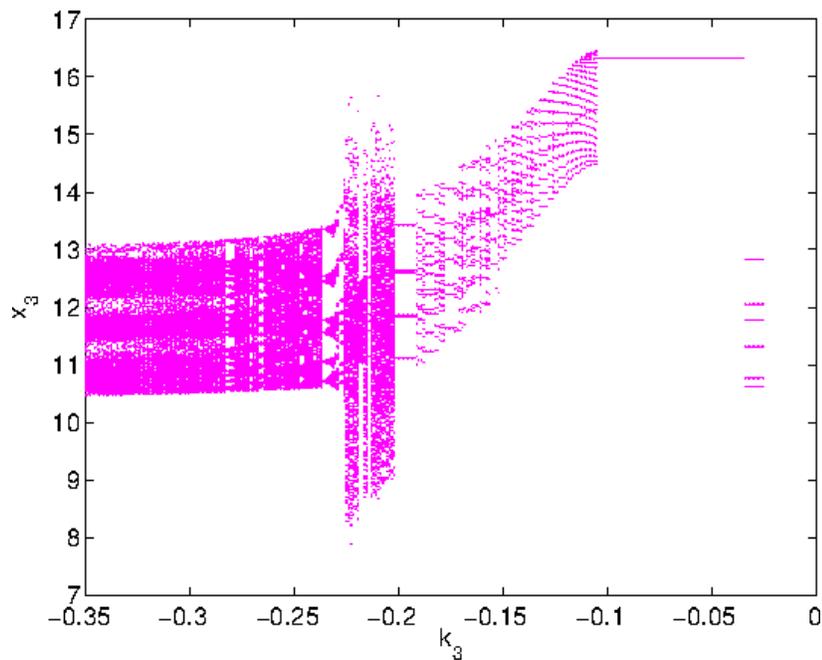


Figura 5-34: k_3 vs x_3 con retardo, $k_1 = 0.5$ y $k_2 = -0.5$

En las Figuras 5-31, 5-32, 5-33 y 5-34 se tienen los diagramas de bifurcación del ciclo de trabajo, tensión, corriente y corriente en el condensador C en función del parámetro k_3 , en

estos diagramas se tomaron las mismas condiciones que en los diagramas de las Figuras 5-19, 5-20, 5-21 y 5-22, se observa que la órbita $1T$ -periódica pierde su estabilidad en ciertos rangos en los que antes era estable, lo que nos muestra que al introducir un retardo de tiempo en el convertidor boost, la región de estabilidad del sistema es más pequeña.

k_3	λ_1	λ_2	λ_3	ρ
-0.3500	-1.0167	0.8740	0.9940	1.0167
-0.2850	-1.0603	0.8329	1.0003	1.0603
-0.2200	$-0.7559 + 0.0000i$	$1.0798 + 0.0320i$	$1.0798 - 0.0320i$	1.0803
-0.1550	$-0.9378 + 0.0000i$	$0.9696 + 0.0383i$	$0.9696 - 0.0383i$	0.9704
-0.0900	$-0.9583 + 0.0000i$	$0.9598 + 0.0180i$	$0.9598 - 0.0180i$	0.9600
-0.0250	-0.9661	0.9685	0.9439	0.9685

Tabla 5-6: Valores propios asociados a la variación de k_3 , $k_1 = 0.5$, $k_2 = -0.5$

Al revisar los valores propios de la matriz jacobiana (Tabla 5-6) asociados a la aplicación de Poincaré, se observa que la bifurcación obtenida es de tipo Neimar Sacker, ya que para un valor del parámetro $k_3 \approx -0.172$ pasa de ser inestable a estable.

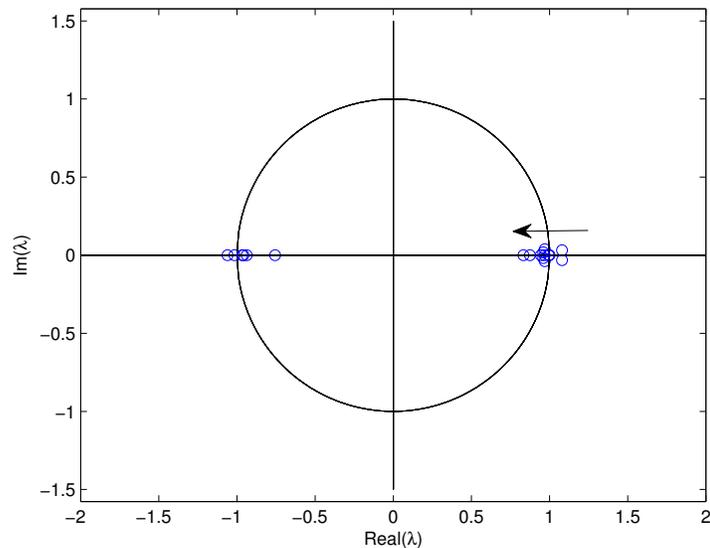


Figura 5-35: variación de los valores propios en función de k_3 , $k_1 = 0.5$; $k_2 = -0.5$

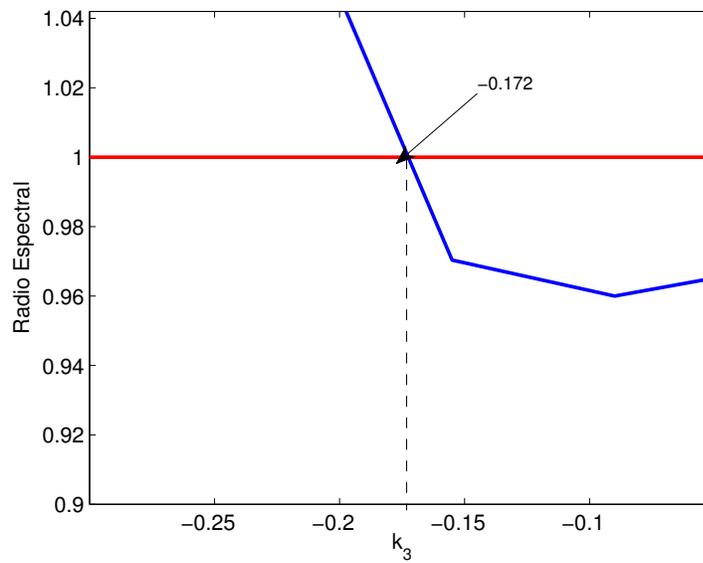


Figura 5-36: variación del radio espectral en función de k_3 , $k_1 = 0.5$; $k_2 = -0.5$

Figura 5-35. En ella vemos que inicialmente los valores propios están fuera del círculo unidad, lo que muestra la estabilidad de la órbita 1T -periódica. Al incrementarse el valor de k_3 los valores propios entran al círculo unidad por -1 y la Figura 5-36 muestra el punto de bifurcación reseñado en las gráficas anteriores.

6 Existencia y Control de Caos

Resumen:

En este capítulo se muestra la presencia de caos en la dinámica del convertidor boost cuando se tiene en cuenta la intensidad en el condensador C , utilizando los exponentes de Lyapunov. Para el control de caos se utilizan las técnicas de control FPIC y TDAS.

6.1. Presencia de caos

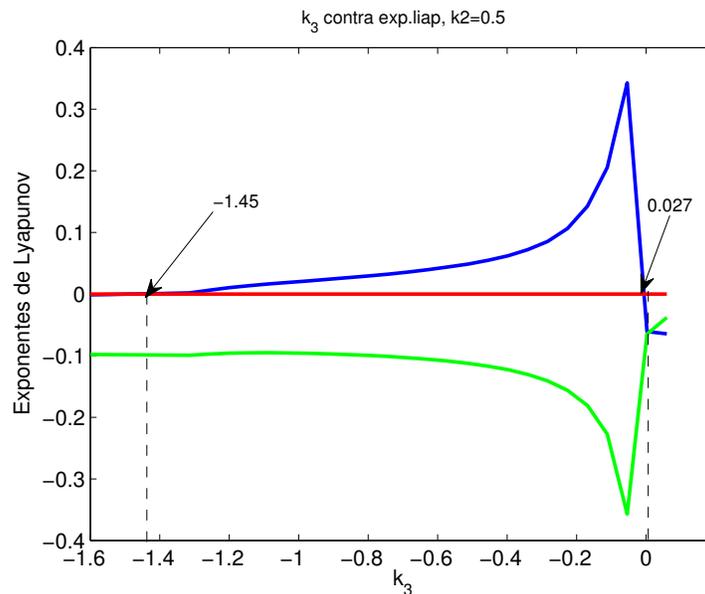


Figura 6-1: Variación de los exponentes de Lyapunov en función de k_3 , $k_1 = 0.5$ y $k_2 = 0.5$

En la Figura 6-1 se muestra la presencia de caos en el convertidor boost cuando se tiene en cuenta la corriente en el condensador C , en el rango $k_3 \in [-1.45, 0.027]$ debido a la presencia de exponentes de Lyapunov positivos. Se tomó como referencias las mismas condiciones iniciales con las que se obtuvieron los diagramas de bifurcaciones obtenidos en las Figuras 5-1, 5-2, 5-3 y 5-4

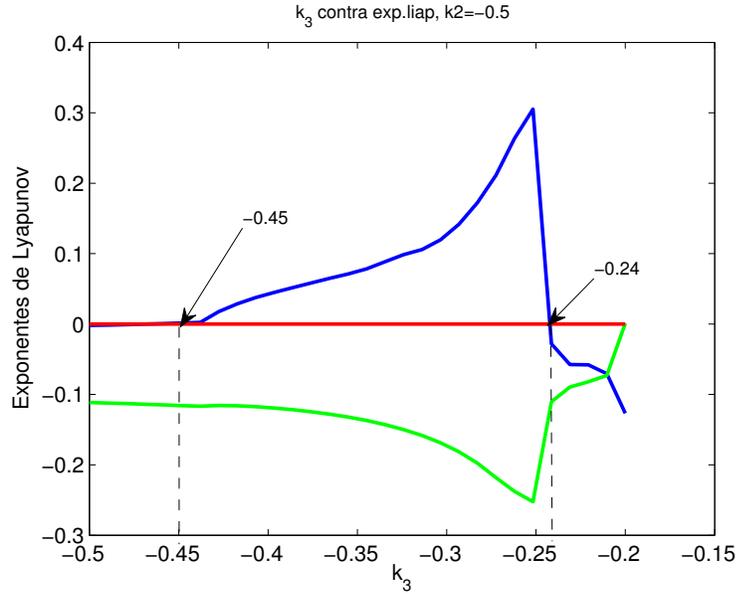


Figura 6-2: Variación de los exponentes de Lyapunov en función de k_3 , $k_1 = 0.5$ y $k_2 = -0.5$

En la Figura 6-2 se observa que hay presencia de caos para un rango del parámetro $k_3 \in [-0.45, -0.24]$, las condiciones iniciales que se tomaron, fueron las dadas para obtener los diagramas de bifurcación de las Figuras 5-7, 5-8, 5-9 y 5-10

Controlar el caos de un sistema dinámico consiste en estabilizar las órbitas inestables y para esto se han diseñado algunas estrategias. En este estudio se usan las técnicas FPIC y TDAS para controlar el caos que se presenta en el convertidor boost cuando se tiene en cuenta la corriente en el condensador C .

6.2. Control de caos con FPIC

Teorema 6.2.1 FPIC[3]. Consideremos un sistema dinámico discreto descrito por un conjunto de ecuaciones

$$x_{k+1} = f(x_k, u(x_k))$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, supongamos que el sistema posee un punto fijo

$$(x^*, u(x^*)) := (x^*, u^*)$$

Al calcular el jacobiano del sistema en este punto fijo obtenemos $J = J_x + J_u$ donde

$$J_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(x^*, u^*)} \quad y \quad J_u = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{(x^*, u^*)}$$

Supongamos que el radio espectral de J_x es menor que uno ($\rho(J_x) < 1$), entonces existe una señal de control

$$\hat{u}(k) = \frac{u(x(k)) + Nu^*}{N + 1}$$

que garantiza la estabilidad del punto fijo (x^*, u^*) para algún $N \in \mathbb{R}^+$.

Considerando el ciclo de trabajo del sistema como la variable a controlar, modificamos el ciclo de trabajo así:

$$d(k) = \frac{d_T + Nd^*}{N + 1} \quad (6-1)$$

donde $d(k)$ es el ciclo de trabajo que se va a aplicar, d_T es el ciclo de trabajo obtenido en (3-6), d^* es el ciclo de trabajo en estado estacionario (3-16) y N una constante arbitraria positiva.

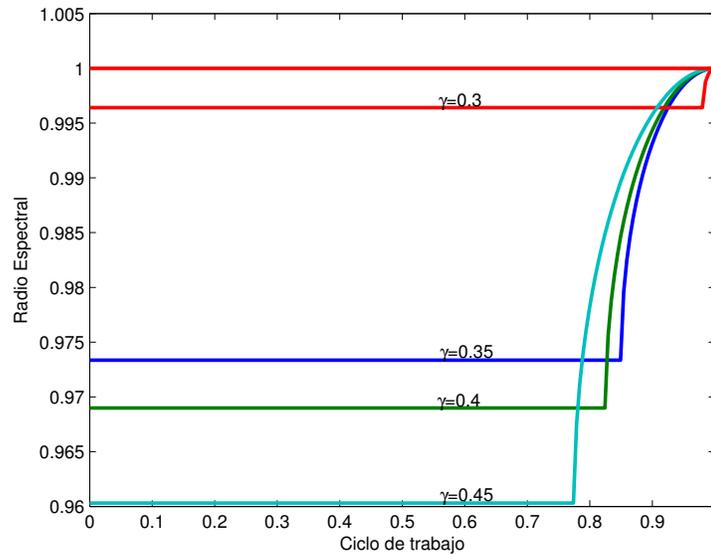


Figura 6-3: Radio espectral en función de γ

La Figura 6-3 muestra que la técnica FPIC es aplicable al sistema, ya que la variación del radio espectral en función de γ es menor que 1, para distintos valores de γ .

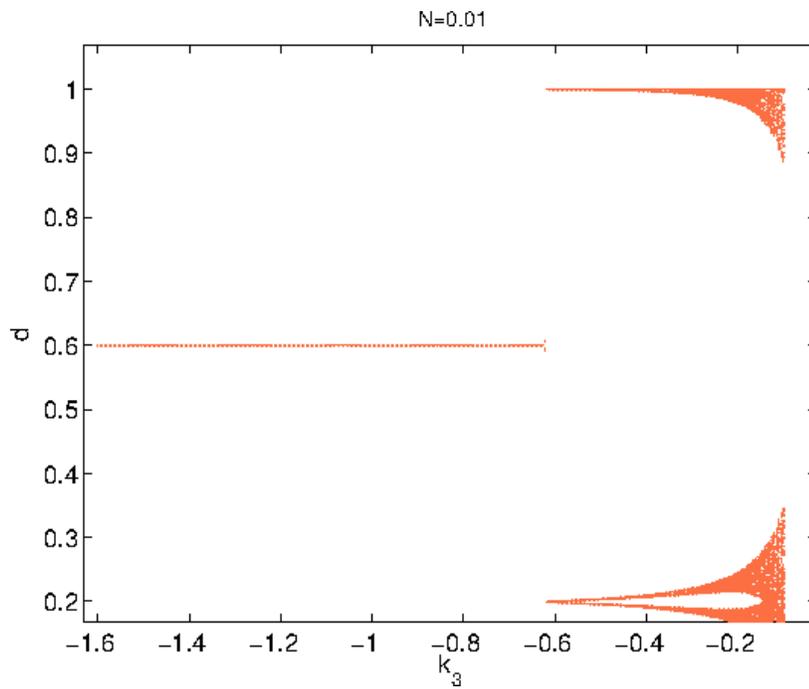


Figura 6-4: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_3 con $N = 0.01$

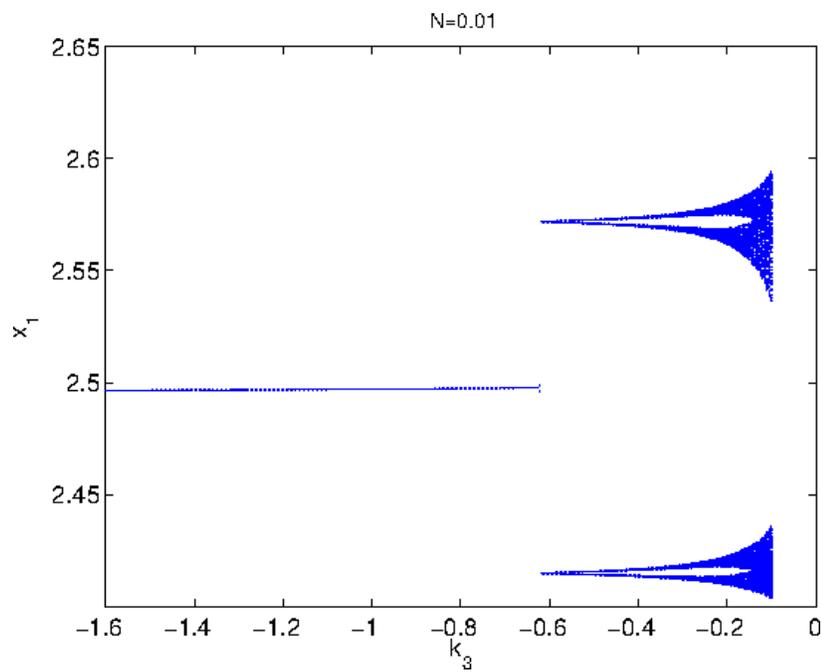


Figura 6-5: Diagrama de bifurcación de la corriente en función de k_3 con $N = 0.01$

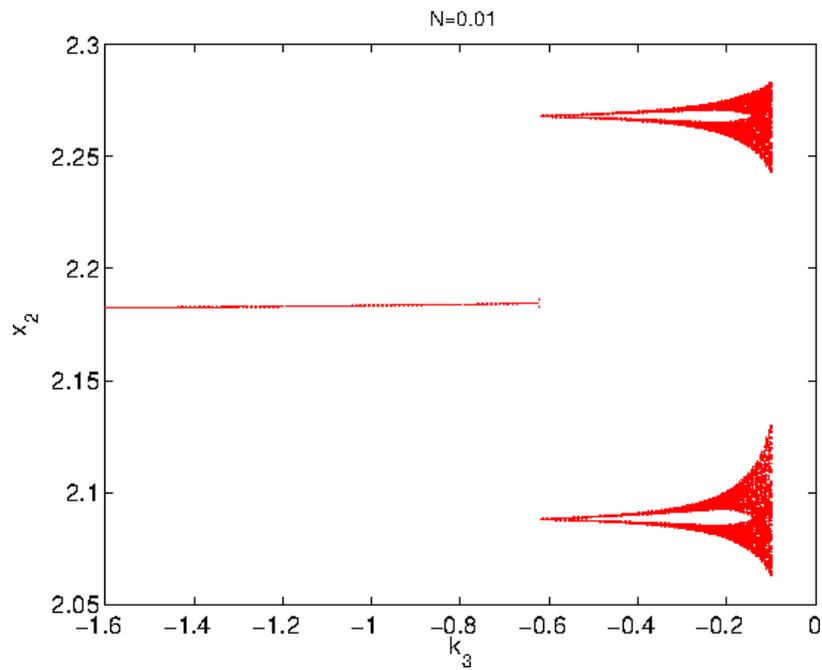


Figura 6-6: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_3 con $N = 0.01$

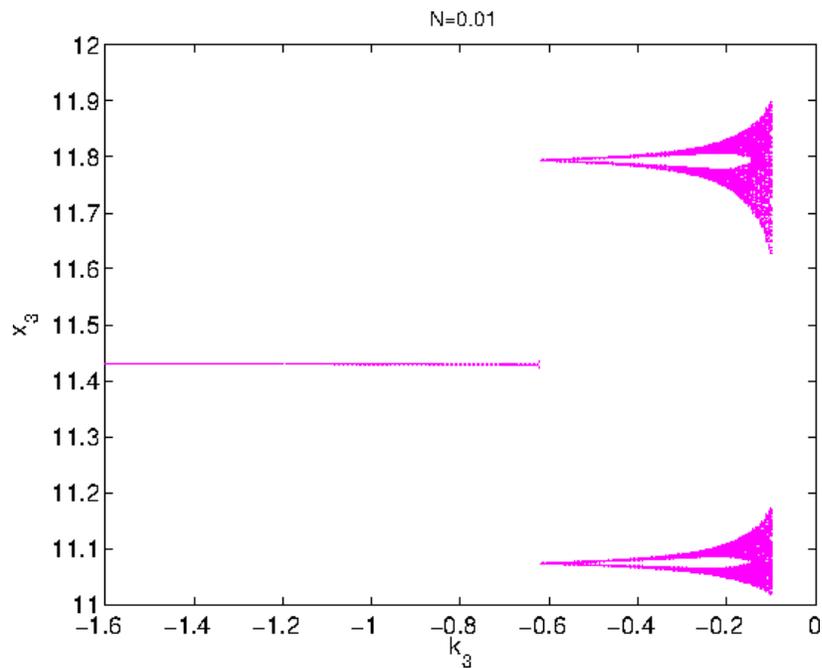


Figura 6-7: Diagrama de bifurcación de la tensión en función de k_3 con $N = 0.01$

Al aplicar FPIC al convertidor boost controlado con ZAD y teniendo en cuenta la corriente

en el condensador, en las Figuras 6-17 6-5, 6-6 y 6-7 se muestra que al escoger $N = 0.01$ se reduce la zona en la que el sistema presenta comportamiento caótico.

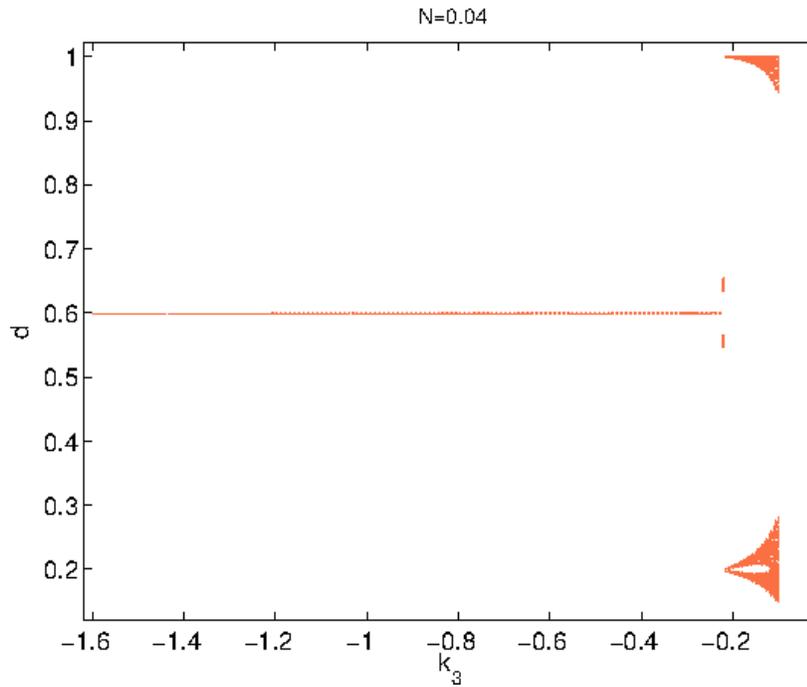


Figura 6-8: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_3 con $N = 0.04$

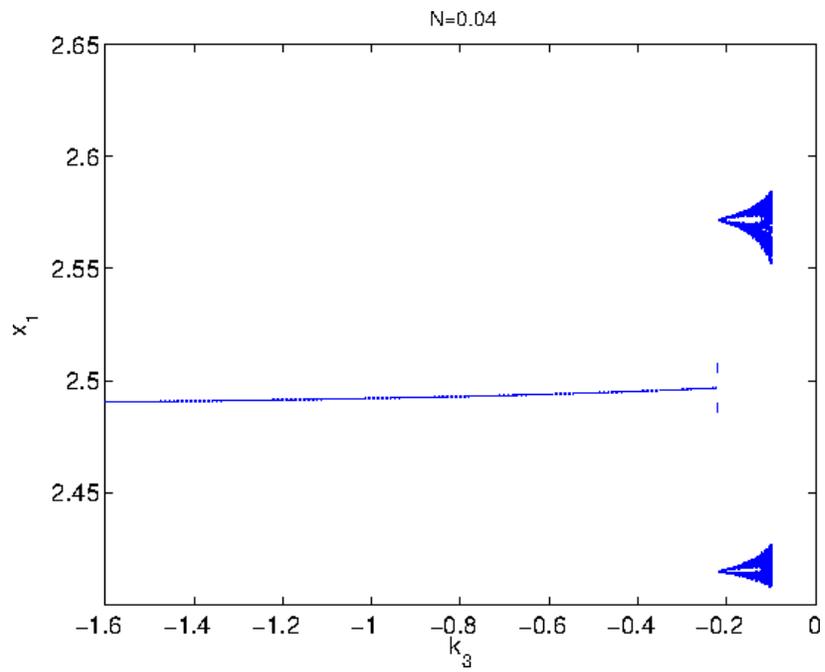


Figura 6-9: Diagrama de bifurcación de la corriente en función de k_3 con $N = 0.04$

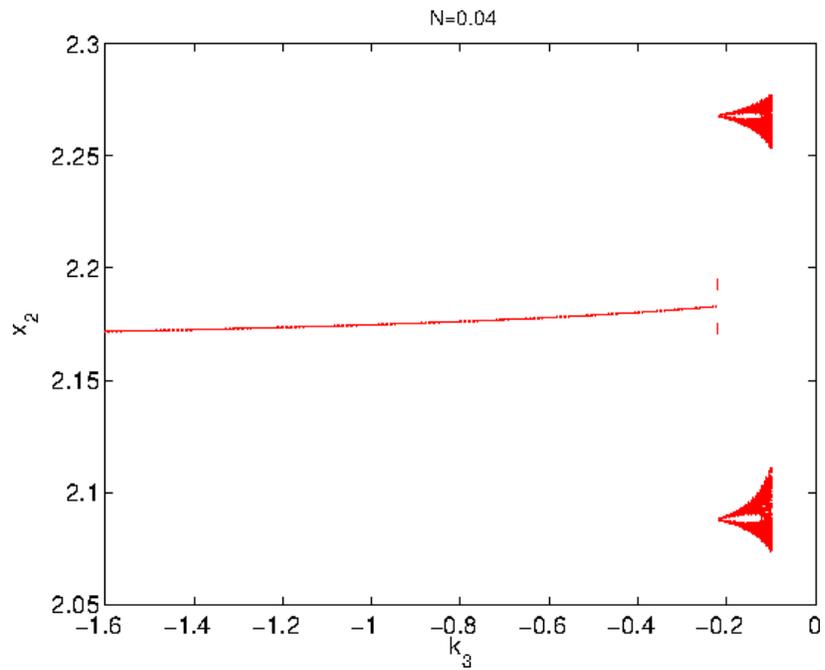


Figura 6-10: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_3 con $N = 0.04$

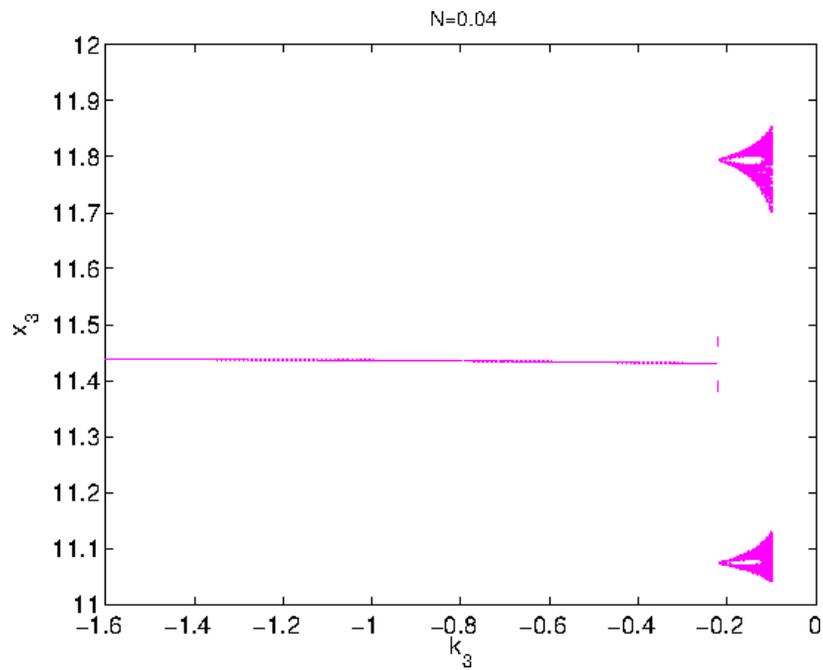


Figura 6-11: Diagrama de bifurcación de la tensión en función de k_3 con $N = 0.04$

Las Figuras [6-21](#) [6-9](#), [6-10](#) y [6-11](#) muestran que al escoger $N = 0.04$ se reduce aún más la zona caótica del sistema.

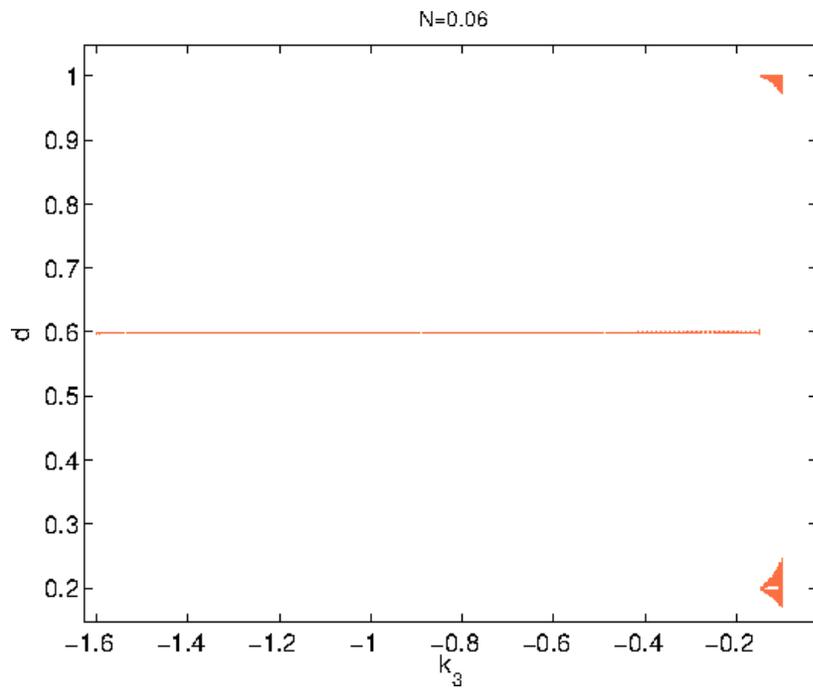


Figura 6-12: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_3 con $N = 0.06$

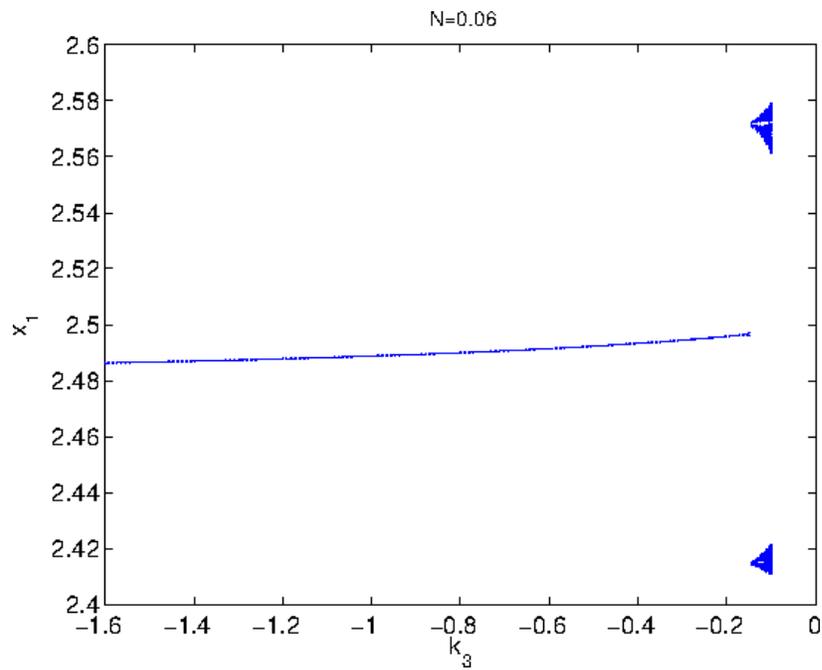


Figura 6-13: Diagrama de bifurcación de la corriente en función de k_3 con $N = 0.06$

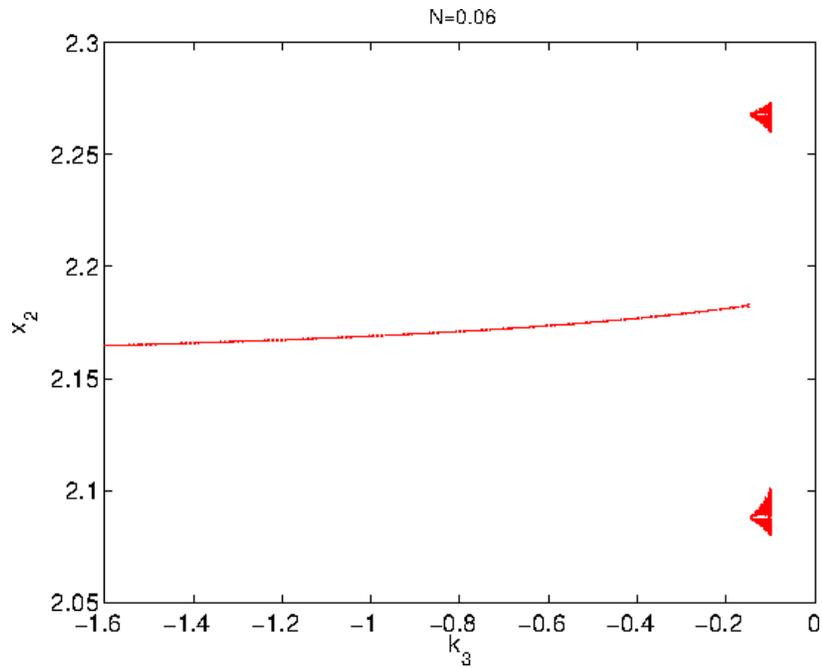


Figura 6-14: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_3 con $N = 0.06$

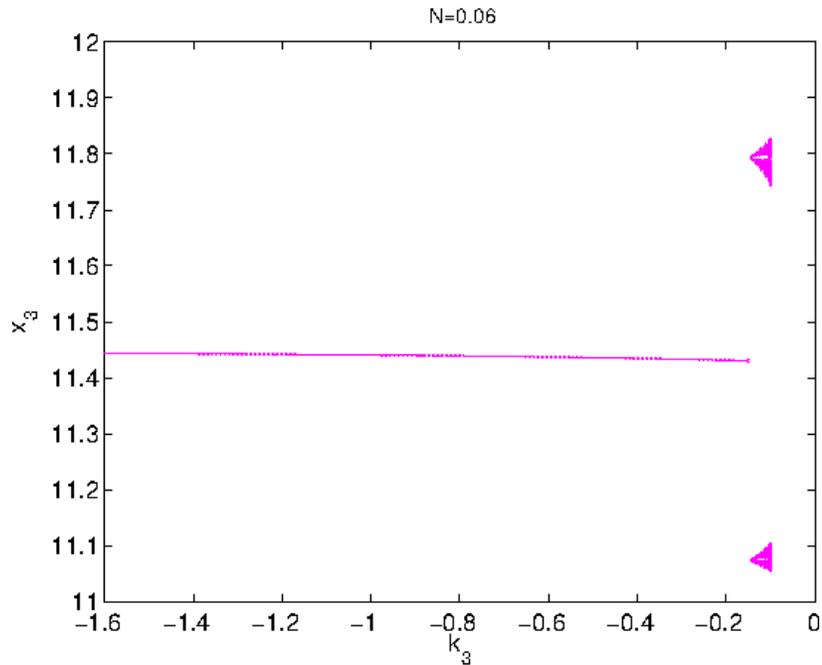


Figura 6-15: Diagrama de bifurcación de la tensión en función de k_3 con $N = 0.06$

Las Figuras 6-25 6-13, 6-14 y 6-15 muestran que al escoger $N = 0.06$ el caos queda casi

reducido en su totalidad, lo que nos permite concluir que a medida que aumentamos el valor de la constante N de control FPIC, la zona de caos del sistema va desapareciendo.

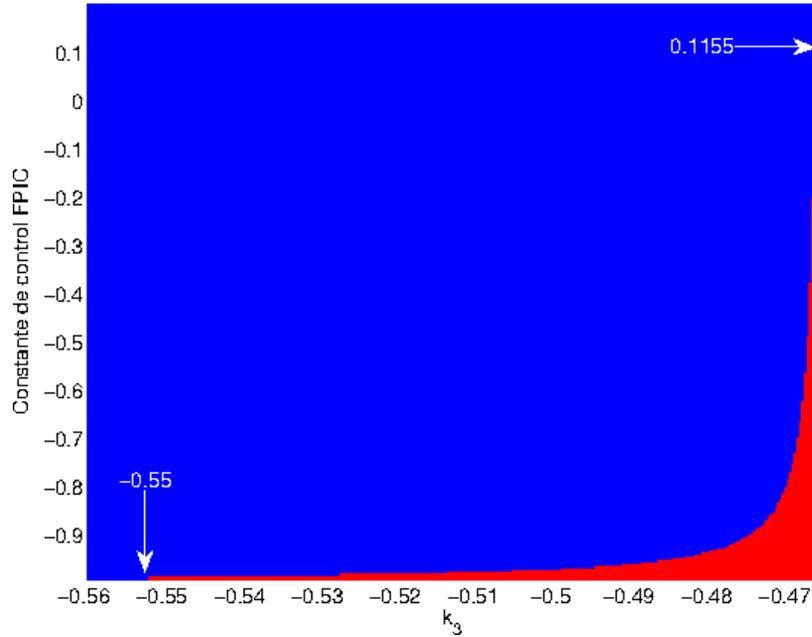


Figura 6-16: Cotas para la constante N de control FPIC.

La Figura 6-16 muestra las cotas en las que la técnica FPIC controla el caos del sistema. El color azul corresponde a zonas donde el caos se controla y el rojo a la presencia de caos. Se observa que para $N \approx 0,1155$, el caos ya ha sido eliminado completamente para el conjunto de valores considerados.

6.3. Técnica de control TDAS

La técnica se basa en aplicar realimentación de la variable retardada en el tiempo [19]. Al aplicar la técnica TDAS podemos escribir

$$d_n = d_T + \eta(d_n - d_{n-1}) \quad (6-2)$$

donde d_n es el ciclo de trabajo que vamos a trabajar, d_T es el ciclo de trabajo dada en la relación (3-6), d_{n-1} es el ciclo de trabajo en la anterior iteración y η es el factor de realimentación.

Definimos una nueva señal de control con un período de retardo

$$d_n = \frac{d_T - \eta d_{n-1}}{1 - \eta} \quad (6-3)$$

Los valores η que estabilizan la órbita 1-periódica se obtiene a partir del cálculo del jacobiano del nuevo sistema, teniendo en cuenta la aplicación de Poincaré dada por:

$$X(n+1) = P(X(n), d(X(n), X(n-1)))$$

Haciendo

$$Z_1 = X(n) \quad Z_2 = X(n-1)$$

obteniendo así una nueva señal de control dependiente de las variables Z_1 y Z_2 :

$$d(n+1) = \frac{Z_1(n) - \eta d(Z_2(n))}{1 - \eta} \quad (6-4)$$

obteniendo así el siguiente sistema:

$$Z_1(n+1) = P(Z_1(n), d(Z_1(n), Z_2(n))), \quad Z_2(n+1) = Z_1(n) \quad (6-5)$$

Por lo tanto, la matriz jacobiana del sistema (6-5), viene dada por:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial Z_1} + \frac{\partial P}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial Z_1} & \frac{\partial P}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial Z_2} \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (6-6)$$

donde I y O son las matrices identidad y nula de tamaño 3×3 , respectivamente.

Con la expresión 6-6 analizaremos numéricamente la estabilidad de la órbita 1-periódica asociada al sistema cuando es controlada con TDAS.

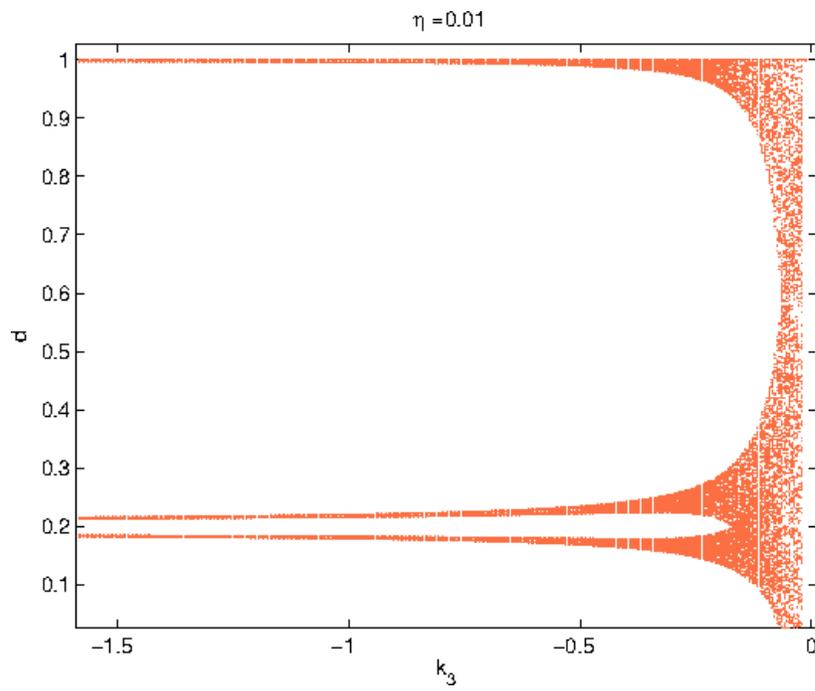


Figura 6-17: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_3 con $\eta = 0.01$

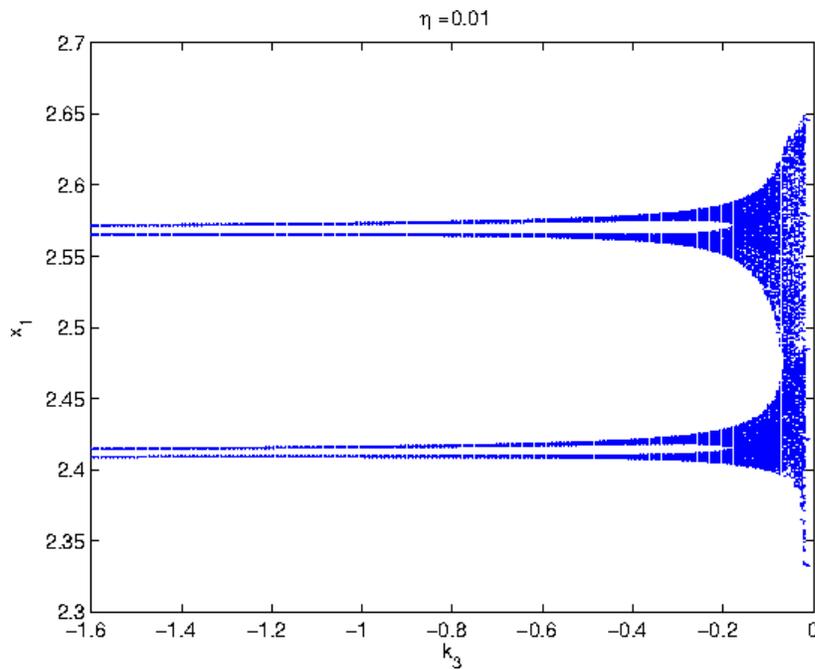


Figura 6-18: Diagrama de bifurcación de la corriente en función de k_3 con $\eta = 0.01$

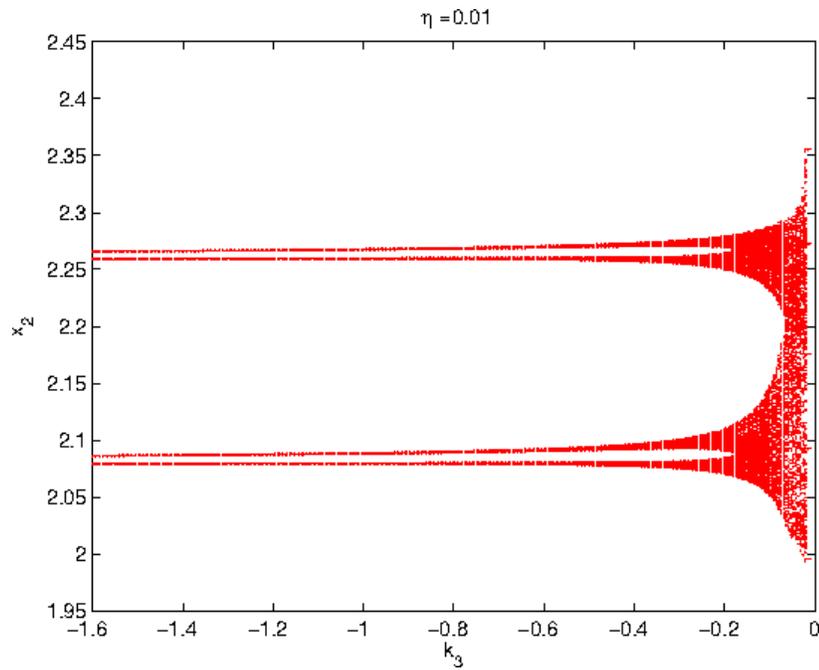


Figura 6-19: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_3 con $\eta = 0.01$

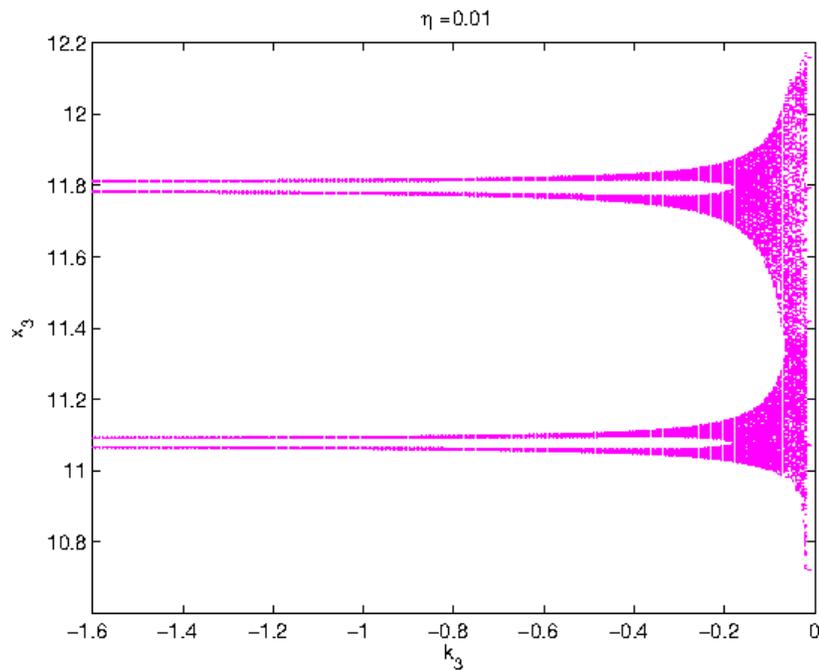


Figura 6-20: Diagrama de bifurcación de la tensión en función de k_3 con $\eta = 0.01$

En las Figuras [6-17](#), [6-18](#), [6-19](#) y [6-20](#) vemos que cuando $\eta = 0.01$ la zona donde se presenta

el caos ha aumentado.

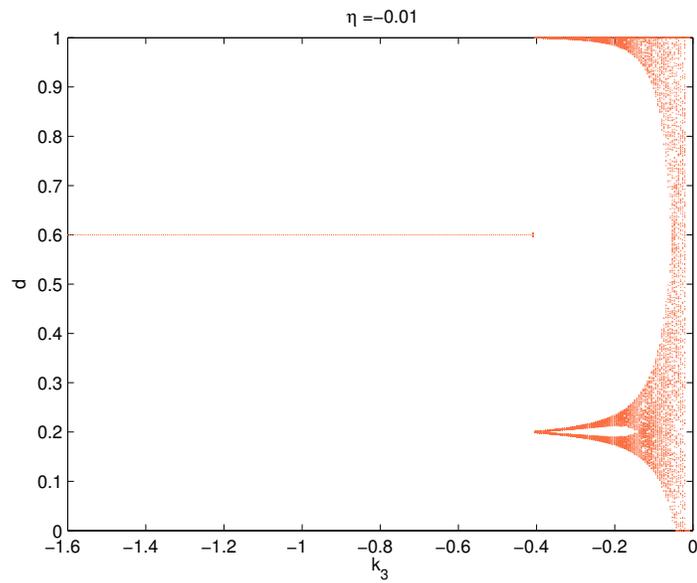


Figura 6-21: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_3 con $\eta = -0.01$

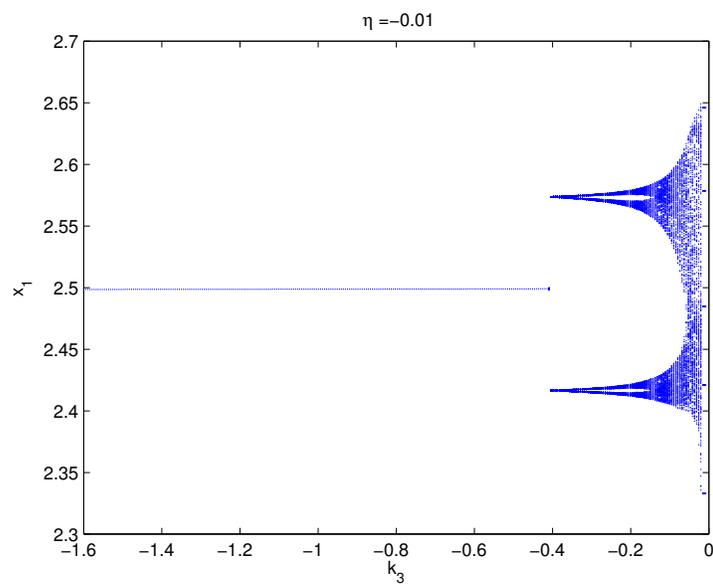


Figura 6-22: Diagrama de bifurcación de la corriente en función de k_3 con $\eta = -0.01$

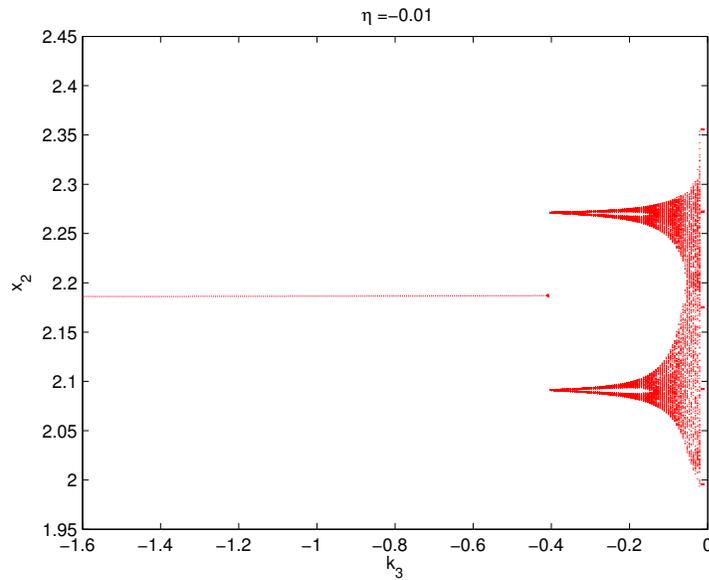


Figura 6-23: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_3 con $\eta = -0.01$

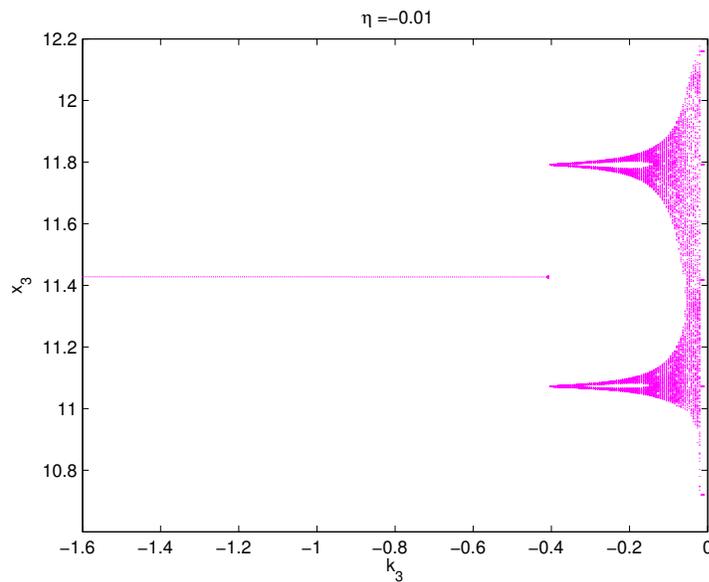


Figura 6-24: Diagrama de bifurcación de la tensión en función de k_3 con $\eta = -0.01$

En las Figuras 6-21, 6-22, 6-23y 6-24 para $\eta = -0.01$ la zona donde se presenta el caos disminuye.

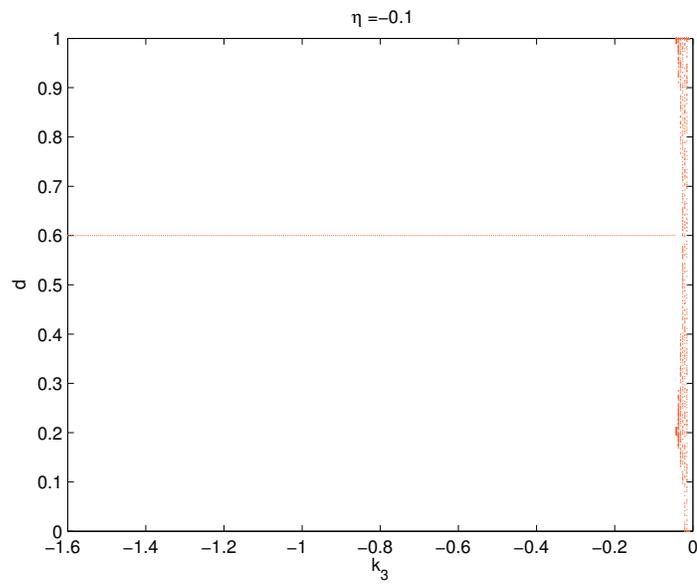


Figura 6-25: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_3 con $\eta = -0.1$

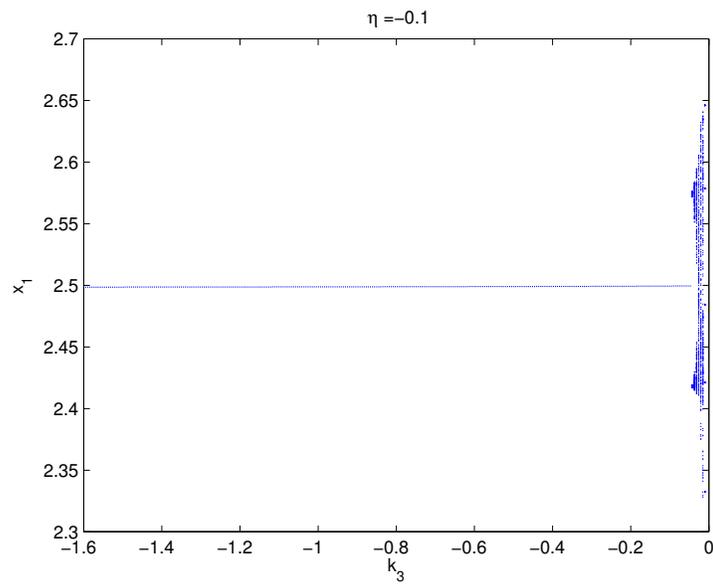


Figura 6-26: Diagrama de bifurcación de la corriente en función de k_3 con $\eta = -0.1$

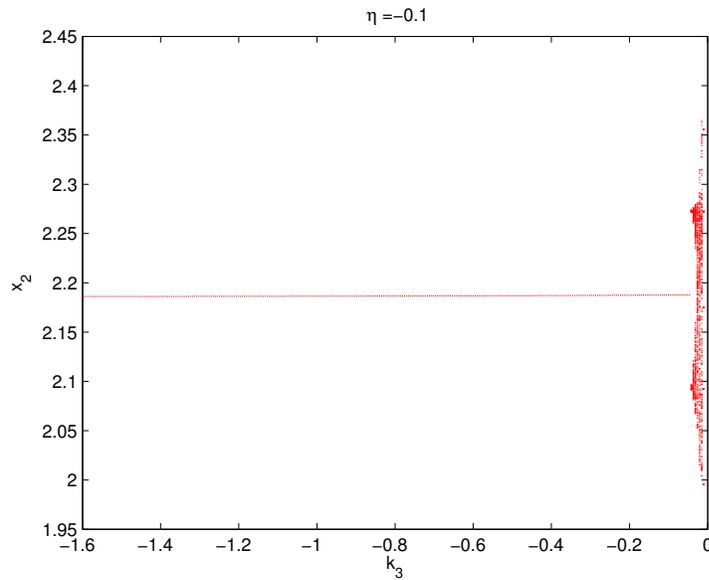


Figura 6-27: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo en función de k_3 con $\eta = -0.1$

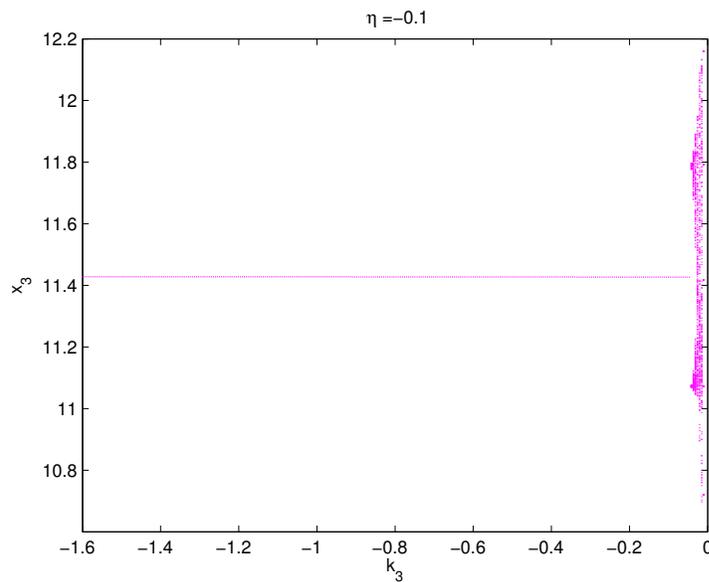


Figura 6-28: Diagrama de bifurcación de la tensión en función de k_3 con $\eta = -0.1$

En las Figuras 6-25, 6-26, 6-27y 6-28 para $\eta = -0.1$ la zona donde se presenta el caos disminuye considerablemente.

Tendiendo en cuenta estos resultados se puede decir que si η es positivo aumenta la zona donde el régimen caótico se presenta, mientras que η es negativo disminuye la zona donde se presenta caos; es decir, entre menor valor tenga η mayor es la reducción del caos.

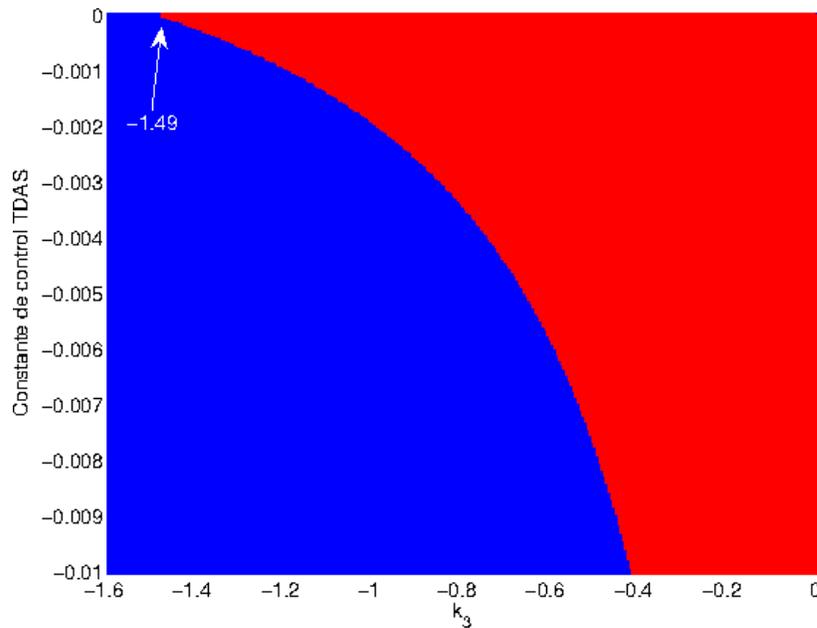


Figura 6-29: Cotas para la constante η de control TDAS

La Figura 6-29 nos da cotas para la constante η en la que se obtiene control de caos para un valor aproximado de $\eta = -0.1$

El control con FPIC puede estabilizar órbitas de periodo uno y superior en sistemas inestables y/o caóticos de una manera simple y sin medición de las variables de estado, como sí requiere la técnica TDAS, la técnica FPIC lo que hace es obligar al sistema a que evolucione al punto fijo. En este sentido se parte del conocimiento previo del punto fijo o el valor de estado estacionario de la señal de control, bien sea de manera analítica o numérica y con base en él se diseña la estrategia de control [24].

7 Conclusiones, trabajos futuros y difusión de resultados

Resumen:

En este capítulo se presentan los principales resultados obtenidos en este estudio de tesis de maestría y se plantean posibles estudios futuros utilizando la técnica ZAD y el convertidor boost teniendo en cuenta la corriente en el condensador con la superficie de conmutación $s(x(t)) = k_1(x_1(t) - x_{1ref}) + k_2(x_2(t) - x_{2ref}) + k_3(x_3(t) - x_{3ref})$

7.1. Conclusiones

- El sistema que gobierna el convertidor Boost teniendo en cuenta la corriente en el condensador no es altamente lineal y la acción de conmutación genera dinámicas complejas como bifurcaciones y caos.
- El sistema se puede estudiar como un sistema adimensionalizado lo que facilita el análisis de la dinámica de la corriente en el condensador.
- La corriente en el condensador presenta orbitas periódicas estables e inestables, bifurcaciones tipo Flip y Neimar-Sacker.
- Existen zonas del espacio de estado donde la corriente presenta comportamiento caótico.
- Las técnicas de control FPIC y TDAS fueron eficientes para controlar la presencia de caos en la corriente de un convertidor Boost

7.2. Trabajos Futuros

- Implementar experimentalmente la técnica ZAD en el convertidor boost cuando se tiene en cuenta la corriente en el condensador y comparar los resultados experimentales con los obtenidos mediante simulación.
- Realizar el estudio del convertidor boost cuando se tiene en cuenta la corriente en el condensador utilizando la superficie de conmutación.

$$S(x(t)) = k_1(x_1(t) - x_{1ref}) + k_2(x_2(t) - x_{2ref}) + (x_3(t) - x_{3ref}) + k_3 \int_{kT}^{(k+1)T} (x_3(t) - x_{3ref}) dt$$

para determinar si el sistema es robusto ante perturbaciones de entrada.

- Realizar un estudio al convertidor boost teniendo en cuenta la pérdida energéticas en el condensar C .
- Caracterizar otras bifurcaciones que son de interés como las bifurcaciones no suaves y las bifurcaciones por colisión de borde

7.3. Difusión de resultados

[1] V. Paz , S. Casanova, D. Vergara, **Sobre el comportamiento dinámico de la corriente en el condensador de un convertidor boost Controlado con ZAD**, (en preparación).

Bibliografía

- [1] A HOWELL, Garry: An Introduction to Chaotic dynamical systems. 2nd Edition, by Robert L. Devaney. En: *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis* 3 (1990), p. 81–83
- [2] AMADOR, Andrés: *Técnica ZAD Aplicada Al Convertidor Boost: Análisis De Estabilidad Y Comportamiento Caótico*, Universidad Nacional de Colombia, Tesis de Grado, 2008
- [3] ANGULO, F.: *Análisis de la dinámica de convertidores electrónicos de potencia usando PWM basado en promediado cero de la dinámica del error (ZAD)*. España, Universidad Politécnica de Cataluña, Tesis de Grado, Mayo 2004
- [4] AROUDI, A. E. ; DEBBAT, Mohamed ; SALAMERO, Luis M.: Poincaré maps modeling and local orbital stability analysis of discontinuous piecewise affine periodically driven systems Nonlinear Dyn. En: *IEEE Trans. on Power Elect.* (2007), p. 431–445
- [5] CARMONA, V. ; FERNÁNDEZ, S. ; FREIRE, E.: Periodic orbits for perturbations of piecewise linear systems. En: *Journal of Differential Equations* 250, Issue 4 (2011), p. 2244–2266
- [6] CASANOVA, S.: *Análisis de la Dinámica de un Convertidor Boost Controlado con ZAD*. Colombia, UN, Tesis de Grado, 2011
- [7] CHEN, Guanrong: Control and anticontrol of chaos. En: *Control of Oscillations and Chaos, 1997. Proceedings., 1997 1st International Conference* Vol. 2, 1997, p. 181–186 vol.2
- [8] DOERING, Claus I. ; LOPEZ, Artur O.: *Equações Diferenciais Ordinárias., Coleção Matemática Universitária..* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2005
- [9] EDMINISTER, Joseph A. ; NAHVI, Mahmood: *Schaum Circuitos Eléctricos*. España : McGraw-Hill, 1997
- [10] FOSSAS, E. ; NÓ, R. G. ; BIEL, D.: Quasi-Sliding Control based on Pulse Width Modulation. Zero Averaged Dynamics and the L_2 Norm. En: *Advances in Variable Structure Systems. Analysis. Integration and Applications (6th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS'2000))* (2000), p. 335–344

-
- [11] GUACANEME, J.: *Control de puentes activos duales (DABs) en sistemas bidireccionales de alimentación con alta densidad de potencia*. España, Universidad Politécnica de Valencia, Tesis de Grado, Diciembre 2015
- [12] HERNÁNDEZ, C.: *Control Inteligente de Sistemas Dinámicos Caóticos*. Madrid, Universidad Politécnica De Madrid, Tesis de Grado, 2004
- [13] KUZNETSOV, A. Y.: *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York, 2004
- [14] MORELO, Aquiles: *Simulación, Análisis Bifurcacional y de Estabilidad de un Convertidor SEPIC Controlado con ZAD*, Universidad Nacional de Colombia-Sede Manizales, Tesis de Grado, 2015
- [15] MUÑOZ, Juan: *Convertidor Boost en Modo de Corrección del Factor de Potencia Usando la Técnica ZAD*. Colombia, Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales, Tesis de Grado, 2012
- [16] NED, Mohan ; TORE, Undeland ; WILLIAM, Robbins: *Power Electronics: Converters, Applications, and Design*. John Wiley & Sons, 1995
- [17] PÉREZ, M. F. ; PÉREZ, M.: Chaotic and steady state behaviour of a nonlinear controlled gyro subjected to harmonic disturbances. En: *Chaos, Solitons & Fractals* 33 (2007), July, p. 623–641
- [18] PÉREZ, M. F. ; PÉREZ, M.: A generalized mathematical model to analyze the nonlinear behavior of a controlled gyroscope in gimbals. En: *Nonlinear Dynamics* 48 48 (2007), April, p. 129–152
- [19] PYRAGAS, K.: Continuous Control of Chaos by self-Controlling feedback. En: *Physics Letters A* (1992), Nr. 170, p. 421–428
- [20] ROLLÓN, J.: *Convertidor DC/DC Elevador (BOOST) con control de corriente y de tensión*. España, Universidad Pública de Navarra- Pamplona, Tesis de Grado, 2014
- [21] ROMERA, Miguel. (Ed.): *Técnica de los sistemas dinámicos discretos*. Madrid : Consejo superior de investigaciones científicas, 1997
- [22] SHANKAR, Deivasundari P.: Period-bubbling and mode-locking instabilities in a full-bridge DC-AC buck inverter. En: *IET Power Electronics* 6 (2013), November, p. 1956–1970(14). – ISSN 1755–4535
- [23] SOUMITRO, Banerjee ; VERGHESE, George C.: *Nonlinear Phenomena in Power Electronics: Bifurcations, Chaos, Control, and Applications*. Piscataway : Wiley - IEEE Press, 2001. – ISBN 978–0–7803–5383–1

-
- [24] TABORDA, John: *Análisis de Bifurcaciones en Sistemas de Segundo Orden Usando PWM y Promediado Cero de la Dinámica del Error*, Universidad Nacional de Colombia-Sede Manizales, Tesis de Grado, 2006
- [25] TORRES, Ludwing: *Análisis de Diversas Extensiones de la Técnica de Control ZAD Aplicada a Convertidores Electrónicos*, Universidad Nacional de Colombia, Tesis de Grado, 2011
- [26] VALDERRAMA, F. ; MORENO, H. ; VEGA, H.: Análisis, simulación y control de un convertidor de potencia dc-dc tipo boost. En: *INGENIUM Revista de la Facultad de Ingeniería* (2011)
- [27] VERGARA, Dario: *Efectos en la Dinámica de un Convertidor Boost Cuando se Incluyen Resistencias Parásitas*, Universidad Nacional de Colombia-Sede Manizales, Tesis de Grado, 2015