



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

**Análisis de Estabilidad y Bifurcaciones de un Modelo
Bioeconómico de Interacción entre Silvicultura,
Agricultura y Pesca en una Región Cerrada**

**Stability Analysis and Bifurcations of a Bioeconomic
Model of the Interaction among Forestry, Agriculture
and Fishing in a Closed Region.**

Jesús David Ossa Bedoya

Universidad Nacional de Colombia
Facultad Ciencias Exactas y Naturales,
Departamento de Matemáticas y Estadística
Manizales, Colombia
2016

Análisis de Estabilidad y Bifurcaciones de un Modelo Bioeconómico de Interacción entre Silvicultura, Agricultura y Pesca en una Región Cerrada

Jesús David Ossa Bedoya

Tesis de grado presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias - Matemática Aplicada

Director:
PhD. Gerard Olivar Tost

Línea de Investigación: Sistemas Dinámicos
Grupo de Investigación: Percepción y Control Inteligente (PCI)

Universidad Nacional de Colombia
Facultad Ciencias Exactas y Naturales,
Departamento de Matemáticas y Estadística
Manizales, Colombia

2016

(Dedicatoria)

«La fe y la razón (Fides et ratio) son como las dos alas con las cuales el espíritu humano se eleva hacia la contemplación de la verdad. Dios ha puesto en el corazón del hombre el deseo de conocer la verdad y, en definitiva, de conocerle a Él, para que, conociéndolo y amándolo, pueda alcanzar también la plena verdad sobre sí mismo.»

San Juan Pablo II, encíclica Fides et Ratio, 1998.

Agradecimientos

A Dios por su Amor infinito, su grandeza se manifiesta en la finalización de esta tesis.

A mi familia, en especial a mi madre Rosa Inelia Bedoya y mi padre Juan Carlos Ossa.

Al Doctor Gerard Olivar Tost, por su paciencia, y disposición constante en la dirección de esta tesis, al Doctor Simeón Casanova por ser la persona que me incentivó a trabajar con los sistemas dinámicos. A los Doctores Fabián Serrano y John Jairo Salazar, Decano y Vice-decano y en nombre de ellos a la facultad de Ciencias Exactas y Naturales, por su apoyo económico en la presentación del poster en el congreso colombiano de matemáticas. Al profesor Julián Hurtado por la sugerencia en la mejora del documento y principalmente por las gráficas de las figuras 4-4 y 4-5 del presente documento.

A mi Comunidad María Mediadora -CMM-, Disney López y su esposa Nataly, a mis amigos Sacerdotes: Néstor Iván Mejía, Cristian Echeverry y Héctor Adrián Gaviria por su compañía, apoyo y dirección espiritual constante.

Resumen

El presente documento muestra dos modelos bioeconómicos determinísticos, expresados mediante sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs). Estos modelos presentan la interacción, en una región cerrada, entre tres actividades del sector primario: la agricultura, la silvicultura y la pesca. La biomasa de población de bosque S , la biomasa de población de peces F y la biomasa de población humana L son las variables de estado en estos modelos. El estudio dinámico realizado en este trabajo presenta los puntos de equilibrio de cada sistema, caracterizando la estabilidad local de cada uno de ellos. Además, se analiza el comportamiento de los equilibrios desde un punto de vista económico y biológico. Por otro lado, el análisis de bifurcaciones fue realizado mediante el estudio numérico de curvas de equilibrios cuando es variado un parámetro. Este análisis numérico fue realizado usando un paquete de MATLAB llamado MATCONT. Los valores de los parámetros para los diagramas de fase y para las curvas de equilibrios fueron obtenidos de [3, 4, 5, 7, 24].

Palabras clave: Sistemas Dinámicos, Bifurcaciones, Dinámica no lineal, Modelo Bioeconómico, Efecto Alleé, Recursos Renovables, Crecimiento de Población, Múltiples Equilibrios.

Abstract

In this work we describe two deterministic bioeconomic models that are expressed by means of two systems of ordinary differential equations (ODEs). The models present the interaction, in a considered closed region, among three activities of the primary sector: agriculture, forestry and fishing. The forest biomass S , fish stocks F and the human population biomass L are the considered state variables in these models. The dynamic study in this work provides the equilibria of the system as well as the stability of them. Besides, the behavior of the equilibria are analyzed from an economic and a biological point of view. On the other hand, the bifurcation analysis of the system was carried out by studying numerically equilibrium curves when a parameter is varied. This numerical analysis was performed by using a MATLAB package called MATCONT. The parameter values, for both the phase diagrams and the equilibrium curves, were obtained from [3, 4, 5, 7, 24].

Keywords: Dynamical System, Bifurcation, Nonlinear Dynamics, Bioeconomic Model, Allee Effect, Renewable Resource, Population Growth, Multiple Equilibria

Contenido

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
Lista de símbolos	xii
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Herramientas Matemáticas	3
1.3. Poblaciones Relacionadas en Colombia	4
2. Modelado y Puntos de Equilibrio	6
2.1. Modelado	6
2.2. Puntos de Equilibrio	9
2.2.1. Puntos de Equilibrio sin Efecto Alleé	9
2.2.2. Puntos de Equilibrio con Efecto Alleé	12
3. Análisis de Estabilidad	16
3.1. Estabilidad del Modelo sin Efecto Alleé	16
3.2. Estabilidad del Modelo con Efecto Alleé	29
4. Bifurcaciones	42
4.1. Bifurcaciones sin Efecto Alleé	42
4.2. Bifurcaciones con Efecto Alleé	45
5. Conclusiones	49
5.1. Conclusiones	49
6. Publicaciones y Trabajos Futuros	52
6.1. Publicaciones	52
6.2. Trabajos Futuros	52

A. Anexo: Carta Aceptación Poster XX Congreso Colombiano de Matemáticas	53
--	-----------

Bibliografía	54
---------------------	-----------

Lista de símbolos

A continuación se presenta la lista de símbolos, letras y abreviaturas empleadas para realizar esta tesis.

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
F	Biomasa de población de peces	<i>ton</i>	10^3kg
J	Matriz Jacobiana		
K_1	Capacidad máxima de árboles que soporta el medio	<i>ha</i>	10^4m^2
K_2	Capacidad máxima de peces que admite la región	<i>ton</i>	10^3kg
K_3	Capacidad mínima de árboles requerida	<i>ha</i>	10^4m^2
L	Biomasa de población humana	<i>hab</i>	
m_1	Porcentaje de árboles disponible para cosechar	1	100 %
m_2	Porcentaje de peces disponibles para captura	1	100 %
q	Porcentaje de captura de peces	1	100 %
S	Biomasa de población de árboles o de bosque	<i>ha</i>	10^4m^2
t	Tiempo de cambio en las biomásas de las poblaciones	<i>mes</i>	$2,6x10^5s$
\dot{F}	Cambio biomasa de población de peces	$\frac{ton}{mes}$	$\frac{\partial F}{\partial t}$
\dot{L}	Cambio biomasa de población humana	$\frac{habs}{mes}$	$\frac{\partial L}{\partial t}$
\dot{S}	Cambio biomasa de población de árboles	$\frac{ha}{mes}$	$\frac{\partial S}{\partial t}$

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	SI	Def.
α	Parámetro tecnológico para la explotación forestal		
β_1	Porcentaje de personas dedicadas a la silvicultura	1	100 %
β_1	Porcentaje de personas dedicadas a la pesca	1	100 %
φ	Factor de calorías	1	100 %
δ	Factor de producción	1	100 %
λ	Parámetro de fertilidad de la tierra	1	
ρ_1	Tasa de crecimiento intrínseco de los árboles	1	100 %
ρ_2	Tasa de crecimiento intrínseco de los peces	1	100 %
γ	Nivel de alimentación por unidad de población humana	1	
ϕ_1	Parámetro conversión: producción de árboles a calorías	1	
ϕ_2	Parámetro conversión: producción de peces a calorías	1	

Abreviaturas

Abreviatura	Término
<i>Def</i>	Definición
<i>pto</i>	Punto
<i>equ.</i>	Equilibrio
<i>H</i>	Bifurcación de tipo Hopf
<i>BP</i>	Intersección de ramas de equilibrio
<i>LP</i>	Limit Point. Bifurcación de tipo Fold.
<i>To</i>	Tonelada
<i>ha</i>	Hectárea
<i>AUNAP</i>	Autoridad Nacional de Acuicultura y Pesca (Colombia)
<i>ICA</i>	Instituto Colombiano Agropecuario
<i>MAFF</i>	Ministry of Agriculture, Forestry and Fisheries (Japón, Cambodia)
<i>DAFF</i>	Department of Agriculture, Fisheries and Forestry (Sur África, Australia)
l_1	Primer coeficiente de Lyapunov.

Introducción

1.1. Motivación

El tema de la agricultura, silvicultura y pesca es muy actual en todo el mundo, tanto que muchas entidades se han preocupado por el manejo adecuado de estas actividades primarias, que son parte importante de la base de la economía de muchos países, por ejemplo, el Banco Mundial realizó en 2013 un análisis para proyectar lo que sucederá con la pesca y la acuicultura para el 2030 [2]. La división de estadística de Naciones Unidas presentó en 2014 un borrador para su respectiva discusión y análisis sobre el sistema de desarrollo ambiental y económico de la agricultura, silvicultura y pesca en el mundo para tener una base de conocimiento sobre el cuidado ambiental y la economía [37].

La Unión Europea presentó en 2016 un estudio estadístico sobre las tres actividades: agricultura, silvicultura y pesca [17]. Para algunas regiones costeras cercanas al mar índico, la agricultura y la pesca son las principales actividades económicas, esto se puede comprobar al observar los variados estudios que se han realizado en torno a estas actividades, principalmente sobre pesca, para dichas zonas y las entidades que se han preocupado por el manejo de estas actividades. Tales estudios han aportado diversas ideas para el fortalecimiento de las dos actividades en zonas de labor cercanas al mar índico y proyectado a otras zonas, estas ideas llegan incluso a sugerir que se incluyan zonas de reserva para peces y zonas de pesca libre[4, 5, 6, 24, 27, 29, 36].

En países como Sur África y Australia, estas tres actividades son de tanta importancia que han creado el departamento de agricultura, silvicultura y pesca (DAFF), y países como Islandia y Camboya, que se dedican en gran parte a estas actividades económicas, tiene para su administración un ministerio (MAFF). Por su parte, E.E.U.U en 2014 sumaba alrededor de 2,1 millones de trabajadores entre las tres actividades: agricultura, silvicultura y pesca [1, 6, 34, 41].

Colombia cuenta con la Autoridad Nacional Acuícola y Pesquera (AUNAP), y el Instituto Colombiano Agropecuario (ICA) para la administración de las actividades agrícolas, pesqueras y silvicultura, ambas entidades adscritas al ministerio de agricultura y desarrollo rural. Este ministerio ha venido implementando varios proyectos, entre ellos 'Plan Colombia Siembra'; en octubre del año 2015 el ministro de agricultura y desarrollo rural de Colombia, Mauricio Iragorri, hablando del 'Plan Colombia Siembra' dijo: "el plan Colombia siembra busca aumentar las áreas de producción agropecuarias, pasar de 7'131.500 hectáreas en todo el país a 8'131.500 hectáreas" [33], el mismo ministro anunció: "la meta es que Colombia aumente cinco veces su producción piscícola y acuícola, y pase de haber producido 98.000 toneladas (en 2014) a producir 454.000 toneladas en 2023", además anotó: "este plan está encaminado a aumentar el consumo per cápita de pescado en el país" [14].

Ahora, a causa de la sobrepoblación presentada en algunos asentamientos de grupos étnicos y otras poblaciones rurales de Colombia, se percibe que los recursos generados por la agricultura, silvicultura y pesca no sean suficientes para la subsistencia de las mismas poblaciones. Por tanto, se hace importante la discusión sobre la sostenibilidad de los recursos renovables, el manejo adecuado y mejor aprovechamiento de los recursos generados por estas tres actividades, lo cual se ha empezado a trabajar con modelos bioeconómicos [9, 10, 15].

Estudiar modelos bioeconómicos ha tomado fuerza en los últimos años, incluso ya se han presentado algunos avances en modelos relacionados con la pesca y la agricultura [3, 7, 29, 30, 36, 40]. En Colombia el estudio de estos modelos bioeconómicos está generando interés en los grupos de investigación y entidades gubernamentales, tanto que hay ciudades de Colombia que han sido incluidas dentro del plan mundial de ciudades sostenibles, entre estas ciudades se encuentra Manizales [23, 28].

En el campo de la matemática aplicada, el estudio de sistemas dinámicos con modelos bioeconómicos ha generado gran interés, ya que estos modelos presentan diversas modificaciones de la tan conocida ecuación logística, la cual presenta gran riqueza de tipo dinámico y bifurcacional. Debido a este interés, han surgido diversas entidades que se preocupan por estudiar modelos bioeconómicos, entre ellos el instituto Henri Poincare de Francia, que en 2013 presentó el programa "Mathematics of Bio-Economics", donde se comenzaron a realizar en coordinación y cooperación con el Instituto workshops, trabajos de tesis, entre otros trabajos, en los cuales se analiza la relación entre la matemática, la biología y la economía, con otras áreas, desde diferentes puntos de vista, entre los cuales se resalta el tema de la sostenibilidad [10].

Cabe destacar que el tema de la sostenibilidad ambiental es de actualidad y de interés para gobiernos y entidades gubernamentales y no gubernamentales, al punto que el papa Francisco, publicó en 2015 la encíclica 'Laudato Si', donde señala la necesidad y obligación

que tenemos todos los seres humanos de cuidar lo que él llama: “nuestra casa común”, es decir, la madre tierra (la naturaleza y sus recursos) [18]. Lo anterior nos permite indicar que el estudio con modelos bioeconómicos es muy actual y necesario para el contexto no solo local, sino también mundial. Se puede afirmar como René Passet: “La bioeconomía es el nuevo paradigma de la economía” [31].

1.2. Herramientas Matemáticas

Un sistema dinámico se define como todo sistema que evoluciona con el tiempo siguiendo ciertas leyes. Un modelo bioeconómico es aquel que presenta variables de tipo biológico y económico [25, 32]. De manera más formal:

Definición 1: Un sistema dinámico es una tripleta $\{T, X, \varphi^t\}$, donde T es el tiempo, que nos define si el sistema es del tipo discreto ($T = \mathbb{Z}$) o continuo $T = \mathbb{R}$. X es el espacio de estados, es decir el conjunto de las variables del sistema y φ^t representa una familia de operadores de evolución que satisfacen: $\varphi^t(0) = id$ y $\varphi^{t+s} = \varphi^t + \varphi^s$.

Definición 2: Sea $\dot{X} = F(X)$ un sistema dinámico continuo autónomo, sea $X^* \in X$, decimos que X^* es un punto de equilibrio para $F(X)$ si $F(X^*) = 0$.

Este documento presenta dos sistemas dinámicos a tiempo continuo autónomos con los cuales se realiza un estudio dinámico de tipo bioeconómico, analizando el comportamiento del sistema y sus puntos de equilibrio de manera local. Así también como la estabilidad de los puntos de equilibrio y la estabilidad del sistema cerca a estos puntos, empleando para ello el teorema de estabilidad de Lyapunov que se menciona a continuación.

Teorema de Estabilidad de Lyapunov

Sea $\dot{X} = F(X)$ un sistema dinámico continuo con equilibrio en X^* . Sea $A = J(F(X^*))$, la matriz jacobiana, es decir, la matriz de las derivadas parciales del sistema evaluada en el punto de equilibrio X^* .

1. Si todos los valores propios de A poseen parte real negativa, el punto de equilibrio X^* se denomina asintóticamente estable, y el sistema es estable cerca a este punto de equilibrio.
2. Si existe algún valor propio de A con parte real positiva, el punto de equilibrio X^* es inestable, al igual que el sistema cerca a este punto de equilibrio.
3. Si existe algún valor propio de A con parte real cero y parte imaginaria diferente de cero, el teorema no decide.

El modelo de estudio de la presente tesis, presenta una serie de parámetros a los cuales se les aplicó variación de tipo numérico para buscar posibles cambios en la estabilidad del sistema con la variación de estos parámetros.

Definición 3: Una bifurcación es un cambio en la topología del sistema cuando al variar uno (o más) de los parámetros asociados al sistema, este pasa por un valor crítico que suelen llamar punto de bifurcación [25].

Algunos Tipos de Bifurcaciones

- **Bifurcación Fold:** Asociada a la aparición de un valor propio igual a cero. Sea α^* el parámetro de bifurcación:
 - **Bifurcación:** $\lambda = F_X(X^*, \alpha^*) = 0$
 - **No degeneración:** $F_{XX}(X^*, \alpha^*) \neq 0$
 - **Transversalidad:** $F_{\alpha^*} \neq 0$

- **Bifurcación Hopf:** Asociada a la aparición de un par de valor propios imaginarios puros. Sea α^* el parámetro:
 - **Bifurcación:** $\lambda_{1,2} = F_X(X^*, \alpha^*) = \pm i\varpi_0$
 - **No degeneración:** $l_1(X^*) \neq 0$, l_1 es el primer coeficiente de Lyapunov
 - **Transversalidad:** $\mu'(\alpha^*) \neq 0$

1.3. Poblaciones Relacionadas en Colombia

En 2015, el DANE realizó en el país el tercer censo nacional agropecuario, cuyos resultados de relevancia para la investigación son los siguientes:

- Colombia posee 7,1 millones de hectáreas cultivadas.
- Las unidades de producción agropecuaria en toneladas en zonas de más de 1000 *ha*, según su uso son: 41,2% agropecuario, 33,6% bosque y 22,6% no agropecuario.
- El 74% de la población conserva los suelos y el 54% no protege las fuentes de agua, recurso renovable.
- Los grupos étnicos poseen 39,8 millones de hectáreas, de las cuales el 87,2% es para bosques naturales y tan sólo el 9,9% es de uso agropecuario. De estos últimos suelos el 66,1% son pastos y el 33,4% es agrícola. De los suelos agrícolas el 76,6% son cultivos, lo restante son descansos y barbechos [11].

- La mayor parte de lo producido por comunidades étnicas es empleado para el autoconsumo [8].

Algunas poblaciones en Colombia con las características planteadas en este documento son:

- **Pijao, Quindío**, incluido en la Red de municipios sin prisa alrededor del mundo. Este municipio presenta una población de 6200 *habs* y su economía se basa en mayor parte de la agricultura y en menor proporción de la pesca [26].
- **Guapi, Cauca**, con 30.000 *habs*, funda su economía en agricultura, silvicultura y pesca.
- **Magangué, Bolívar**, contaba con 198.000 *habs* en 2012, y luego ha presentado variaciones en su población debido a la pobreza que se viene presentando en los últimos años, llegando incluso a tener 123.000 *habs*. Este municipio basa el 80 % de su economía en la pesca y la agricultura.
- La cuenca del Magdalena contaba con 2'314.438 *ha* de suelo agropecuario en 2014, 1'149.917 *habs*, de los cuales 360,294 *habs* eran población rural, de estos suelos el 47,5 % son de uso agrícola, de los cuales el 10,1 % son cultivos, 52,8 % son pastos y lo restante bosques y plantaciones forestales. La producción pesquera de esta zona fue durante el mismo año de 1.226 *ton* [13, 16].

El objetivo general del documento es realizar un estudio del comportamiento dinámico de dos sistemas asociados a la interacción bioeconómica entre silvicultura, agricultura y pesca. Como objetivos específicos se han planteado: 1) analizar la existencia y la estabilidad de los puntos de equilibrio de ambos sistemas y su respectiva caracterización, 2) demostrar numéricamente los resultados analíticos de estabilidad, 3) analizar numérica y analíticamente las bifurcaciones que presentan los sistemas, 4) discutir la sostenibilidad relacionada con la extinción de uno de los recursos renovables estudiados. En trabajos futuros se resolverá: la optimización de la fuerza de trabajo dedicada a cada una de las tres actividades, así como el problema de control óptimo de la fuerza de trabajo.

El documento se encuentra distribuido de la siguiente manera: En el capítulo 2, se presenta la deducción de los dos modelos, el primero sin efecto Alleé y el segundo con efecto Alleé, basados en la literatura. En este mismo capítulo se presenta la forma analítica como se calcularon los puntos de equilibrio de cada modelo. El capítulo 3 presenta el análisis de estabilidad de los dos sistemas planteados en el capítulo 2, analizando la estabilidad de cada uno de los puntos de equilibrio de forma local, empleando linealización, según la teoría de Lyapunov. Las bifurcaciones presentes en ambos modelos se presentan en el capítulo 4, estas bifurcaciones fueron encontradas usando el paquete *matcont* de *matlab*. Finalmente se presentan las conclusiones obtenidas en esta tesis y las respectivas referencias.

Modelado y Puntos de Equilibrio

Este capítulo describe dos modelos determinísticos de interacción entre: silvicultura, agricultura pesca, en una región cerrada, asumiendo que la población humana está aislada [7]. Estos modelos se podrían utilizar para evaluar el problema de optimización de la fuerza de labor dedicada en cada uno de estos a las actividades antes mencionadas, e intentar solucionarlo.

2.1. Modelado

La modelación se realizó mediante ecuaciones diferenciales, basados en la literatura y siguiendo el documento de Simone D'Alessandro [7] y artículos del profesor Kunal Chakraborty [3, 4, 5, 24].

Primero, se representa la biomasa de población humana como L , y se dice que el bosque contiene S biomasa de árboles que pueden ser explotados y que existen F biomasa de peces. Se considera que alguna parte de la población, $\beta_1 L$, trabaja en Silvicultura, $\beta_2 L$ trabaja en pesca y la población restante, $(1 - \beta_1 - \beta_2)L$, trabaja en Agricultura en la tierra disponible. β_1 y β_2 representan la probabilidad que una persona ejerza actividades en silvicultura y pesca, por tanto: $(0 < \beta_1 < 1, 0 < \beta_2 < 1, 0 < \beta_1 + \beta_2 < 1)$.

Asumiendo también que el crecimiento natural de los árboles y los peces es logístico, con tasa de crecimiento intrínseca ρ_1 , y capacidad máxima de crecimiento K_1 para los árboles, y tasa de crecimiento intrínseca ρ_2 con capacidad máxima de crecimiento K_2 para los peces. Así, se tiene en ausencia de la explotación por parte de la población humana que:

$$\dot{S} = \rho_1 S \left(1 - \frac{S}{K_1}\right)$$

$$\dot{F} = \rho_2 F \left(1 - \frac{F}{K_2}\right)$$

Ya que no hay explotación forestal, se considera un modelo tipo Holling I para la explotación de este recurso renovable [39]. Así, si $m_1 S$ es el bosque disponible para ser cosechado ($0 <$

$m_1 < 1$) y $\alpha > 0$ es el parámetro tecnológico para la explotación forestal, entonces la evolución de la biomasa de árboles será:

$$\dot{S} = \rho_1 S \left(1 - \frac{S}{K_1}\right) - \alpha m_1 \beta_1 S L$$

También, es asumido un modelo tipo Holling I para la explotación de los peces. Considerándose un parámetro de captura $0 < q < 1$ y como biomasa de peces disponible $m_2 F$, con $0 < m_2 < 1$. Entonces la evolución de la biomasa de peces se convierte en:

$$\dot{F} = \rho_2 F \left(1 - \frac{F}{K_2}\right) - q m_2 \beta_2 F L$$

Para la evolución de la población humana se realiza según lo descrito por D'Alessandro [7], básicamente, se puede explicar de la siguiente manera: si la producción de calorías obtenida a través de la agricultura, la silvicultura y la pesca es lo suficientemente grande para el consumo de la población humana, entonces se supone la población humana crecerá; si, por el contrario, la producción de calorías no es suficiente entonces la población humana decrecerá. También según D'Alessandro [7], se modela la producción proveniente de la agricultura como:

$$P_{land} = \lambda((1 - \beta_1 - \beta_2)L)^\delta$$

donde λ es el parámetro de fertilidad de la tierra ($\lambda > 0$) y δ es un factor de producción ($0 < \delta < 1$).

La producción por la explotación del bosque puede ser modelado como:

$$P_{forest} = \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 S L$$

donde ϕ_1 es el parámetro de conversión de producción de tierra a calorías para el consumo de la población humana.

Finalmente, la producción la explotación de peces puede ser modelado también como:

$$P_{fish} = \phi_2 q m_2 \beta_2 F L$$

donde ϕ_2 es el respectivo parámetro de conversión de la producción de peces a calorías para el consumo de la población humana.

Así, la producción total P es:

$$P = P_{land} + P_{forest} + P_{fish}.$$

Tomando esto en cuenta, se puede modelar la evolución de la población humana de la siguiente manera:

$$\dot{L} = \varphi(P - \gamma L)$$

donde φ es un factor de calorías ($\varphi > 0$) y γ es el nivel de alimentación por unidad de biomasa humana ($\gamma > 0$).

Con estas consideraciones se tiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias el cual será considerado como el primer modelo de evolución de las tres poblaciones:

$$\dot{S} = \rho_1 S \left(1 - \frac{S}{K_1}\right) - \alpha m_1 \beta_1 S L$$

$$\dot{F} = \rho_2 F \left(1 - \frac{F}{K_2}\right) - q m_2 \beta_2 F L$$

$$\dot{L} = \varphi [\lambda L^\delta (1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta + \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 S L + \phi_2 q m_2 \beta_2 F L - \gamma L]$$

Tomando como referencia D'Alessandro y Chakraborty [3, 4, 5, 7, 24] se incluye en el modelo anterior el Efecto Alleé, únicamente para la población de árboles. En otras palabras, el bosque necesita una biomasa mínima de árboles K_3 para poder subsistir [12, 19, 20, 21, 22, 35, 38]:

$$\dot{S} = \rho_1 S \left(1 - \frac{S}{K_1}\right) \left(\frac{S}{K_3} - 1\right)$$

Obteniendo así el segundo modelo de evolución de las poblaciones:

$$\dot{S} = \rho_1 S \left(1 - \frac{S}{K_1}\right) \left(\frac{S}{K_3} - 1\right) - \alpha m_1 \beta_1 S L$$

$$\dot{F} = \rho_2 F \left(1 - \frac{F}{K_2}\right) - q m_2 \beta_2 F L$$

$$\dot{L} = \varphi [\lambda L^\delta (1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta + \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 S L + \phi_2 q m_2 \beta_2 F L - \gamma L]$$

No se incluye el efecto Alleé sobre la población de peces debido a que “algunos biólogos dedicados a estudios pesqueros no consideran el fenómeno de depensación como equivalente al efecto Alleé, por el contrario, lo refieren a relaciones más bajas que las esperadas del reclutamiento de hembras, siendo principalmente un fenómeno de nivel de población, usualmente cuantificado con modificaciones a las funciones de Beverton-Holt o de Ricker para el reclutamiento de hembras” [19].

2.2. Puntos de Equilibrio

2.2.1. Puntos de Equilibrio sin Efecto Alleé

El modelo sin efecto Alleé es:

$$\dot{S} = \rho_1 S \left(1 - \frac{S}{K_1}\right) - \alpha m_1 \beta_1 S L \quad (2-1)$$

$$\dot{F} = \rho_2 F \left(1 - \frac{F}{K_2}\right) - q m_2 \beta_2 F L \quad (2-2)$$

$$\dot{L} = \varphi [\lambda L^\delta (1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta + \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 S L + \phi_2 q m_2 \beta_2 F L - \gamma L] \quad (2-3)$$

Para encontrar los puntos de equilibrio se procede a igualar a cero el sistema de ecuaciones:

$$\rho_1 S \left(1 - \frac{S}{K_1}\right) - \alpha m_1 \beta_1 S L = 0$$

$$\rho_2 F \left(1 - \frac{F}{K_2}\right) - q m_2 \beta_2 F L = 0$$

$$\varphi [\lambda L^\delta (1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta + \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 S L + \phi_2 q m_2 \beta_2 F L - \gamma L] = 0$$

factorizando estas ecuaciones y reordenándolas se llega a:

$$S \left(\rho_1 - \frac{\rho_1}{K_1} S - \alpha m_1 \beta_1 L \right) = 0 \quad (2-4)$$

$$F \left(\rho_2 - \frac{\rho_2}{K_2} F - q m_2 \beta_2 L \right) = 0 \quad (2-5)$$

$$\varphi L^\delta [\lambda (1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta + \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 S L^{1-\delta} + \phi_2 q m_2 \beta_2 F L^{1-\delta} - \gamma L^{1-\delta}] = 0 \quad (2-6)$$

Aplicando la propiedad algebraica cuando un producto es igual a cero a las ecuaciones (2-4, 2-5, 2-6), y despejando una variable, se obtiene respectivamente:

$$S = 0 \quad (1) \qquad S = K_1 - \frac{\alpha m_1 \beta_1 K_1}{\rho_1} L \quad (2)$$

$$F = 0 \quad (3) \qquad F = K_2 - \frac{q m_2 \beta_2 K_2}{\rho_2} L \quad (4)$$

$$L = 0 \quad (5) \quad \lambda (1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta + \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 S L^{1-\delta} + \phi_2 q m_2 \beta_2 F L^{1-\delta} - \gamma L^{1-\delta} = 0 \quad (6)$$

Tomando (5) y las 4 combinaciones respectivas, se obtiene los primeros puntos de equilibrio para el sistema y se puede observar que estos puntos de equilibrio, consideran que la población humana es cero, estos primeros puntos son:

$$\begin{aligned}
(1), (3), (5) &\Rightarrow (0, 0, 0) \\
(2), (3), (5) &\Rightarrow (K_1, 0, 0) \\
(1), (4), (5) &\Rightarrow (0, K_2, 0) \\
(2), (4), (5) &\Rightarrow (K_1, K_2, 0)
\end{aligned}$$

Ahora, seleccionando (1) y (3), reemplazándolas en (6) y despejando L , se llega a:

$$\begin{aligned}
\lambda(1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta - \gamma L^{1-\delta} &= 0 \\
\gamma L^{1-\delta} &= \lambda(1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta \\
L^{1-\delta} &= \frac{\lambda(1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta}{\gamma} \\
L &= \left(\frac{\lambda(1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \\
L &= C_0
\end{aligned}$$

obteniendo el punto de equilibrio $(0, 0, C_0)$

Ahora, seleccionando (2) y (3), y reemplazándolas en (6) se llega a:

$$\begin{aligned}
\lambda(1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta + \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 \left(K_1 - \frac{\alpha m_1 \beta_1 K_1}{\rho_1} L \right) L^{1-\delta} - \gamma L^{1-\delta} &= 0 \\
\lambda(1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta + \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 K_1 L^{1-\delta} - \frac{\phi_1 \alpha^2 m_1^2 \beta_1^2 K_1}{\rho_1} L^{2-\delta} - \gamma L^{1-\delta} &= 0 \\
\frac{\phi_1 \alpha^2 m_1^2 \beta_1^2 K_1}{\rho_1} L^{2-\delta} + (\gamma - \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 K_1) L^{1-\delta} - \lambda(1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta &= 0 \quad (7)
\end{aligned}$$

Procediendo de manera similar, se toman las ecuaciones (1) y (4), y al reemplazarlas en (6), se obtiene:

$$\frac{\phi_2 q^2 m_2^2 \beta_2^2 K_2}{\rho_2} L^{2-\delta} + (\gamma - \phi_2 q m_2 \beta_2 K_2) L^{1-\delta} - \lambda(1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta = 0 \quad (8)$$

y finalmente tomando las ecuaciones (2) y (4), y las reemplazándolas en (6), se obtiene:

$$\left(\frac{\phi_1 \alpha^2 m_1^2 \beta_1^2 K_1}{\rho_1} + \frac{\phi_2 q^2 m_2^2 \beta_2^2 K_2}{\rho_2} \right) L^{2-\delta} + (\gamma - \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 K_1 - \phi_2 q m_2 \beta_2 K_2) L^{1-\delta} - \lambda(1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta = 0 \quad (9)$$

Observando bien estos últimos tres casos para los valores de S , F y L , se puede notar una dependencia inversa de la biomasa de bosque S y la biomasa de peces F , respecto a la población humana L y con estas características se obtendrán los otros puntos de equilibrio del sistema, que puede ser un solo punto de equilibrio o infinitos puntos de equilibrio, todo depende de los valores que tome la población en las ecuaciones (7), (8) o (9) para cada caso respectivamente. Cabe destacar que las soluciones a estas ecuaciones son de un nivel de complejidad bastante elevado, por su dependencia del parámetro δ , por tanto, no se escribirán de forma explícita; lo que si se tomará en cuenta son la forma como se escriben los puntos de equilibrio que surgen a partir las soluciones de estas ecuaciones en cada caso:

- $(0, b_1, C_1)$, donde $b_1 \neq 0$ y $C_1 \neq 0$
- $(A_2, 0, C_2)$, donde $A_2 \neq 0$ y $C_2 \neq 0$
- (A_3, b_3, C_3) , donde $A_3 \neq 0$, $b_3 \neq 0$ y $C_3 \neq 0$

Resumiendo se puede reescribir los puntos de equilibrio de este modelo sin efecto Alleé, como la tripleta ordenada (S^*, F^*, L^*) y estos son:

1. $(0, 0, 0)$
2. $(K_1, 0, 0)$
3. $(0, K_2, 0)$
4. $(K_1, K_2, 0)$
5. $(0, 0, C_0)$, donde $C_0 = \left(\frac{\lambda(1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta}{\gamma} \right) \frac{1}{1 - \delta}$
6. $(0, b_1, C_1)$, donde $b_1 \neq 0$ y $C_1 \neq 0$
7. $(A_2, 0, C_2)$, donde $A_2 \neq 0$ y $C_2 \neq 0$
8. (A_3, b_3, C_3) , donde $A_3 \neq 0$, $b_3 \neq 0$ y $C_3 \neq 0$

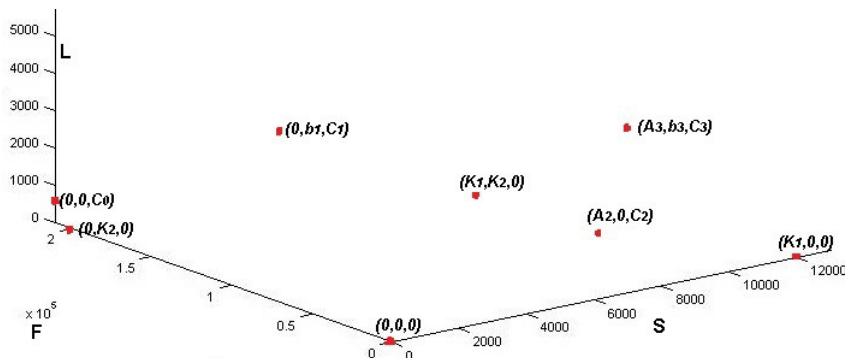


Figura 2-1.: Puntos de equilibrio sin efecto Alleé.

2.2.2. Puntos de Equilibrio con Efecto Alleé

El modelo con efecto Alleé es:

$$\dot{S} = \rho_1 S \left(1 - \frac{S}{K_1}\right) \left(\frac{S}{K_3} - 1\right) - \alpha m_1 \beta_1 S L \quad (2-7)$$

$$\dot{F} = \rho_2 F \left(1 - \frac{F}{K_2}\right) - q m_2 \beta_2 F L \quad (2-8)$$

$$\dot{L} = \varphi [\lambda L^\delta (1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta + \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 S L + \phi_2 q m_2 \beta_2 F L - \gamma L] \quad (2-9)$$

Para encontrar los puntos de equilibrio se procede a igualar a cero el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \rho_1 S \left(1 - \frac{S}{K_1}\right) \left(\frac{S}{K_3} - 1\right) - \alpha m_1 \beta_1 S L &= 0 \\ \rho_2 F \left(1 - \frac{F}{K_2}\right) - q m_2 \beta_2 F L &= 0 \end{aligned}$$

$$\varphi [\lambda L^\delta (1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta + \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 S L + \phi_2 q m_2 \beta_2 F L - \gamma L] = 0$$

Se factoriza de forma similar al modelo sin efecto Alleé, así:

$$S \left(\left(\rho_1 - \frac{\rho_1}{K_1} S \right) \left(\frac{S}{K_3} - 1 \right) - \alpha m_1 \beta_1 L \right) = 0 \quad (2-10)$$

$$F \left(\rho_2 - \frac{\rho_2}{K_2} F - q m_2 \beta_2 L \right) = 0 \quad (2-11)$$

$$\varphi L^\delta [\lambda (1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta + \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 S L^{1-\delta} + \phi_2 q m_2 \beta_2 F L^{1-\delta} - \gamma L^{1-\delta}] = 0 \quad (2-12)$$

Observando bien, las ecuaciones (2-11) y (2-12) son respectivamente iguales a las ecuaciones (2-5) y (2-6) del modelo sin efecto Alleé, por tanto, de estas ecuaciones se obtiene al factorizar y despejar F y L , respectivamente:

$$F = 0 \quad (3) \quad F = K_2 - \frac{q m_2 \beta_2}{\rho_2} L \quad (4)$$

$$L = 0 \quad (5) \quad \lambda (1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta + \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 S L^{1-\delta} + \phi_2 q m_2 \beta_2 F L^{1-\delta} - \gamma L^{1-\delta} = 0 \quad (6)$$

De la ecuación (2-10) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} S = 0 \quad (1) \quad & -\frac{\rho_1}{K_1 K_3} S^2 + \frac{\rho_1}{K_1} S + \frac{\rho_1}{K_3} S - \rho_1 - \alpha m_1 \beta_1 L = 0 \\ & -\frac{\rho_1}{K_1 K_3} S^2 + \frac{\rho_1 (K_1 + K_3)}{K_1 K_3} S - (\rho_1 + \alpha m_1 \beta_1 L) = 0 \\ & \frac{\rho_1}{K_1 K_3} S^2 - \frac{\rho_1 (K_1 + K_3)}{K_1 K_3} S + (\rho_1 + \alpha m_1 \beta_1 L) = 0 \end{aligned}$$

$$S = \frac{\frac{\rho_1(K_1 + K_3)}{K_1 K_3} \pm \sqrt{\frac{\rho_1^2(K_1 + K_3)^2}{K_1^2 K_3^2} - \frac{4\rho_1(\rho_1 + \alpha m_1 \beta_1 L)}{K_1 K_3}}}{\frac{2\rho_1}{K_1 K_3}}$$

$$S = \frac{\rho_1(K_1 + K_3) \pm \sqrt{\rho_1^2(K_1 + K_3)^2 - 4\rho_1 K_1 K_3 (\rho_1 + \alpha m_1 \beta_1 L)}}{2\rho_1}$$

$$S = \frac{\rho_1(K_1 + K_3) \pm \sqrt{\rho_1^2 K_1^2 + 2\rho_1^2 K_1 K_3 + \rho_1^2 K_3^2 - 4\rho_1^2 K_1 K_3 - 4\rho_1 K_1 K_3 \alpha m_1 \beta_1 L}}{2\rho_1}$$

$$S = \frac{\rho_1(K_1 + K_3) \pm \sqrt{\rho_1^2(K_1 - K_3)^2 - 4\rho_1 K_1 K_3 \alpha m_1 \beta_1 L}}{2\rho_1}$$

$$S = \frac{K_1 + K_3}{2} \pm \frac{\sqrt{\rho_1^2(K_1 - K_3)^2 - 4\rho_1 K_1 K_3 \alpha m_1 \beta_1 L}}{2\rho_1} \quad (12)$$

$$S = \frac{K_1 + K_3}{2} \pm \frac{\sqrt{U - 4WL}}{2\rho_1} \quad (12)$$

Resumiendo, se tiene las siguientes ecuaciones:

$$S = 0 \quad (1) \quad S = \frac{K_1 + K_3}{2} \pm \frac{\sqrt{\rho_1^2(K_1 - K_3)^2 - 4\rho_1 K_1 K_3 \alpha m_1 \beta_1 L}}{2\rho_1} \quad (12)$$

$$F = 0 \quad (3) \quad F = K_2 - \frac{qm_2 \beta_2 K_2}{\rho_2} L \quad (4)$$

$$L = 0 \quad (5) \quad \lambda(1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta + \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 S L^{1-\delta} + \phi_2 q m_2 \beta_2 F L^{1-\delta} - \gamma L^{1-\delta} = 0 \quad (6)$$

Tomando (5) y las 4 combinaciones respectivas, se obtienen los primeros puntos de equilibrio para el sistema con efecto Alleé y se puede observar que estos puntos de equilibrio consideran que la población humana es cero, estos primeros puntos son:

$$(1), (3), (5) \Rightarrow (0, 0, 0)$$

$$(12), (3), (5) \Rightarrow (K_1, 0, 0) \quad o \quad (K_3, 0, 0)$$

$$(1), (4), (5) \Rightarrow (0, K_2, 0)$$

$$(12), (4), (5) \Rightarrow (K_1, K_2, 0) \quad o \quad (K_3, K_2, 0)$$

Ahora, seleccionando (1) y (3), reemplazándolas en (6) y despejando L , obtenemos $L = C_0$, esto debido a que son las mismas ecuaciones que se obtuvieron en el modelo sin efecto Alleé, llegando con esto al punto de equilibrio $(0, 0, C_0)$, con:

$$C_0 = \left(\frac{\lambda(1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1 - \delta}}$$

En el caso de tomar (1) y (4), y reemplazarlas en (6) se obtiene la misma ecuación (8) del modelo sin efecto Alleé:

$$\frac{\phi_2 q^2 m_2^2 \beta_2^2 K_2}{\rho_2} L^{2-\delta} + (\gamma - \phi_2 q m_2 \beta_2 K_2) L^{1-\delta} - \lambda(1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta = 0 \quad (8)$$

Seleccionando las ecuaciones (12) y (3), y reemplazándolas en (6) se llega a:

$$\lambda(1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta + \left[\frac{\phi_1 \alpha m_1 \beta_1 (K_1 + K_3)}{2} \pm \frac{\phi_1 \alpha m_1 \beta_1 \sqrt{\rho_1^2 (K_1 - K_3)^2 - 4\rho_1 K_1 K_3 \alpha m_1 \beta_1 L}}{2\rho_1} - \gamma \right] L^{1-\delta} = 0 \quad (13)$$

$$\lambda(1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta + \left[\frac{\phi_1 \alpha m_1 \beta_1 (K_1 + K_3)}{2} \pm \frac{\phi_1 \alpha m_1 \beta_1 \sqrt{U - 4WL}}{2\rho_1} - \gamma \right] L^{1-\delta} = 0 \quad (13)$$

De esta ecuación (13), se pueden obtener varias soluciones, el problema sigue siendo la dependencia de la población de árboles S de la población humana L y que la ecuación (13) depende del parámetro δ .

El último caso es cuando son seleccionadas las ecuaciones (12) y (4), y son reemplazadas en (6), de este modo se obtienen los demás valores para los puntos de equilibrio, esto se puede escribir de forma resumida de la siguiente manera:

$$\lambda(1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta + \left[T \pm \frac{\phi_1 \alpha m_1 \beta_1 \sqrt{U - 4WL}}{2\rho_1} \right] L^{1-\delta} - \frac{\phi_2 K_2 (q m_2 \beta_2)^2}{\rho_2} L^{2-\delta} = 0 \quad (14)$$

La solución de las ecuaciones (8), (13), (14), no se realizará de forma analítica, pero sí de forma numérica, debido a la complejidad que se presenta en la dependencia de estas del parámetro δ .

Cabe decir, que la solución a estas ecuaciones puede ser una o varias, pero presentan una generalidad y es la forma vectorial de escribirlas, esta forma es:

- $(0, b_1, C_1)$, donde $b_1 \neq 0$ y $C_1 \neq 0$, para el caso (1),(4),(6)
- $(A_2, 0, C_2)$, donde $A_2 \neq 0$ y $C_2 \neq 0$, para el caso (12),(3),(6)
- (A_3, b_3, C_3) , donde $A_3 \neq 0$, $b_3 \neq 0$ y $C_3 \neq 0$, para el caso (12),(4),(6)

Estos puntos de equilibrio, matemáticamente pueden existir, pero no implica que tengan sentido biológico o económico, esto será analizado más adelante.

Resumiendo, se reescriben los puntos de equilibrio de este modelo con efecto Alleé, como la tripleta ordenada (S^*, F^*, L^*) , así:

1. $(0, 0, 0)$
2. $(K_1, 0, 0)$
3. $(K_3, 0, 0)$
4. $(0, K_2, 0)$
5. $(K_1, K_2, 0)$
6. $(K_3, K_2, 0)$
7. $(0, 0, C_0)$, donde $C_0 = \left(\frac{\lambda(1-\beta_1-\beta_2)^\delta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\delta}}$
8. $(0, b_1, C_1)$, donde $b_1 \neq 0$ y $C_1 \neq 0$
9. $(A_2, 0, C_2)$, donde $A_2 \neq 0$ y $C_2 \neq 0$
10. (A_3, b_3, C_3) , donde $A_3 \neq 0$, $b_3 \neq 0$ y $C_3 \neq 0$

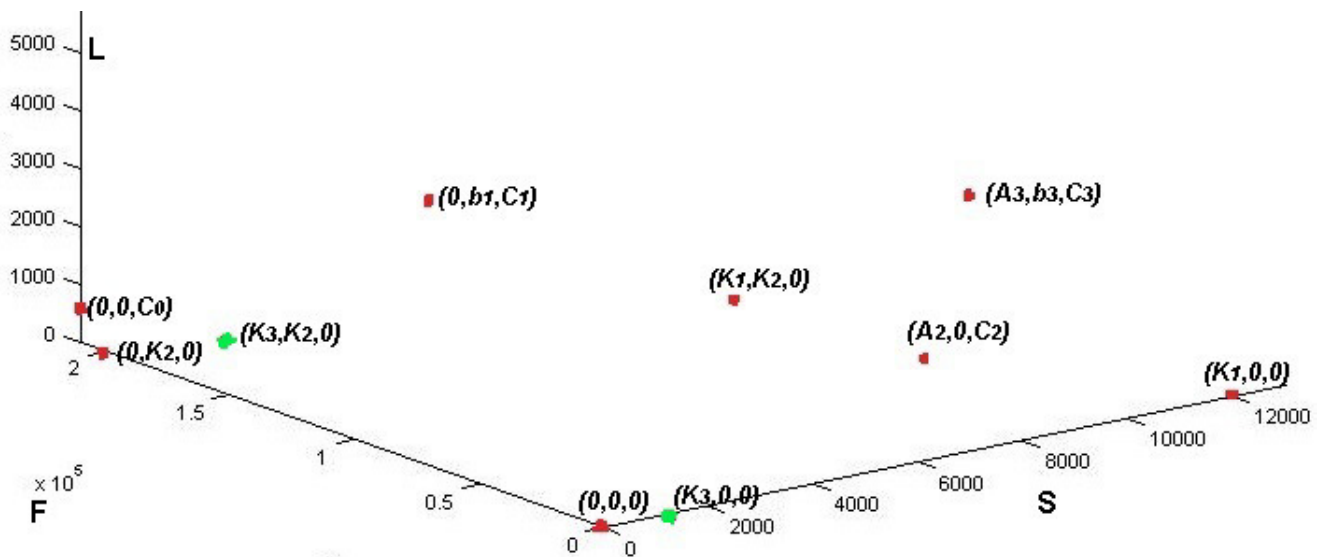


Figura 2-2.: Puntos de equilibrio sin efecto Alleé.

Cabe destacar que el efecto Alleé proporciona otros puntos de equilibrio, cuyas características de estabilidad se analizarán en el capítulo siguiente [12, 19, 22, 30, 35, 38].

Análisis de Estabilidad

3.1. Estabilidad del Modelo sin Efecto Alleé

Para caracterizar la dinámica de los puntos de equilibrio hallados en la sección anterior, se empleará linealización, basados en la teoría de Lyapunov.

Primero, se calcula la matriz jacobiana del sistema sin efecto Alleé y luego se evalúa en cada uno de los puntos de equilibrio encontrados de manera analítica, después a cada matriz se le hallan los valores propios correspondientes.

Recordando que la matriz Jacobiana es

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{S}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{S}}{\partial F} & \frac{\partial \dot{S}}{\partial L} \\ \frac{\partial \dot{F}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{F}}{\partial F} & \frac{\partial \dot{F}}{\partial L} \\ \frac{\partial \dot{L}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{L}}{\partial F} & \frac{\partial \dot{L}}{\partial L} \end{pmatrix}$$

Se toma \dot{S} , \dot{F} , \dot{L} y se hallan sus derivadas parciales con respecto a S , con respecto a F y con respecto a L , para ubicarlas en la matriz jacobiana.

Se tiene que:

$$\dot{S} = \frac{-\rho_1}{K_1} S^2 + \rho_1 S - \alpha m_1 \beta_1 L S$$

$$\dot{F} = \frac{-\rho_2}{K_2} F^2 + \rho_2 F - q m_2 \beta_2 L F$$

$$\dot{L} = \varphi \lambda (1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta L^\delta + \varphi \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 S L + \varphi \phi_2 q m_2 \beta_2 F L - \varphi \gamma L$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{S}}{\partial S} &= \frac{-2\rho_1}{K_1}S + \rho_1 - \alpha m_1 \beta_1 L & \frac{\partial \dot{S}}{\partial F} &= 0 & \frac{\partial \dot{S}}{\partial L} &= -\alpha m_1 \beta_1 S \\ \frac{\partial \dot{F}}{\partial S} &= 0 & \frac{\partial \dot{F}}{\partial F} &= \frac{-2\rho_2}{K_2}F + \rho_2 - q m_2 \beta_2 L & \frac{\partial \dot{F}}{\partial L} &= -q m_2 \beta_2 F \\ \frac{\partial \dot{L}}{\partial S} &= \varphi \lambda \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 L & \frac{\partial \dot{L}}{\partial F} &= \varphi \phi_2 q m_2 \beta_2 L & \frac{\partial \dot{L}}{\partial L} &= Z \end{aligned}$$

donde $Z = \delta \lambda \varphi (1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta L^{\delta-1} + \varphi \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 S + \varphi \phi_2 q m_2 \beta_2 F - \varphi \gamma$

Entonces la matriz jacobiana queda:

$$J(S, F, L) = \begin{pmatrix} \frac{-2\rho_1}{K_1}S + \rho_1 - \alpha m_1 \beta_1 L & 0 & -\alpha m_1 \beta_1 S \\ 0 & \frac{-2\rho_2}{K_2}F + \rho_2 - q m_2 \beta_2 L & -q m_2 \beta_2 F \\ \varphi \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 L & \varphi \phi_2 q m_2 \beta_2 L & Z \end{pmatrix}$$

Ahora, se evaluará la matriz jacobiana en cada uno de los 5 primeros puntos de equilibrio, encontrados de manera analítica en el capítulo 2.

1. Para $(0, 0, 0)$

$$J(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi \gamma \end{pmatrix}$$

Por ser una matriz diagonal, sus valores propios son los elementos de la diagonal, es decir, los valores propios para el punto de equilibrio $(0, 0, 0)$, son $\lambda_1 = \rho_1$, $\lambda_2 = \rho_2$, $\lambda_3 = -\varphi \gamma$, donde $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 < 0$, ya que todos los parámetros del modelo se consideran positivos. Aplicando el teorema de estabilidad de Lyapunov, se concluye que $(0, 0, 0)$ por tener dos valores propios con parte real positiva, es un punto de equilibrio inestable.

Se puede observar en la figura 3-1 varias trayectorias, tomadas desde diferentes condiciones iniciales muy cercanas al origen, que todas ellas se están alejando del punto de equilibrio, como lo indican las flechas, es decir, no convergen al origen, esto comprueba que $(0, 0, 0)$ es un punto de equilibrio inestable de tipo silla, porque es estable en la dirección de L , e inestable en la dirección de S y F .

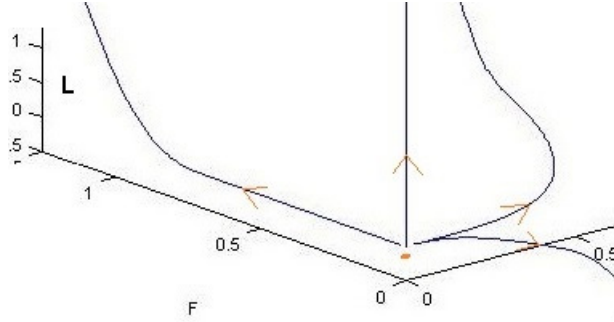


Figura 3-1.: Diagrama de Fase cerca al equ. $(0,0,0)$. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $K_2 = 700$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$.

Desde el punto de vista sostenible es adecuado que ocurra esta inestabilidad, ya que en caso contrario las tres poblaciones dejarían de existir, es decir, colapsaría el sistema; en este caso, a causa de la inestabilidad del punto de equilibrio, no se centra la economía en este punto, además porque es un punto no sostenible, posiblemente se encuentre un punto de equilibrio estable y sostenible donde centrar la economía.

Gracias a los valores propios que se obtuvieron para el origen, se deduce que es un punto de equilibrio hiperbólico y por tanto cumple con las condiciones del teorema de Hartman-Grobman, con lo cual el sistema puede ser analizado de manera local, empleando linealización [32].

2. Para $(K_1, 0, 0)$

$$J(K_1, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\rho_1 & 0 & -\alpha m_1 \beta_1 K_1 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi(\phi_1 \alpha m_1 \beta_1 K_1 - \gamma) \end{pmatrix}$$

Nuevamente, por ser una matriz triangular, sus valores propios son los elementos de la diagonal, es decir, los valores propios para el punto de equilibrio $(K_1, 0, 0)$, son $\lambda_1 = -\rho_1$, $\lambda_2 = \rho_2$, $\lambda_3 = \varphi(\phi_1 \alpha m_1 \beta_1 K_1 - \gamma)$, donde $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, aplicando también, el teorema de estabilidad se concluye que $(K_1, 0, 0)$, es un punto de equilibrio inestable.

Se observa que sobre el valor propio λ_3 , no se concluye si es positivo, negativo o cero, ya que depende de la variación de muchos parámetros, de hecho, se podría pensar en el caso donde $\phi_1 \alpha m_1 \beta_1 K_1 = \gamma$, donde se presentaría un valor propio cero, es decir un posible valor de bifurcación Fold.

En la figura 3-2 se puede ver una proyección del plano SFL al plano dos dimensional SL , donde se visualiza que las trayectorias tomadas desde diferentes condiciones iniciales y debido a los valores dados a los parámetros convergen a la línea de equilibrio

$S = K_1$, por tanto, este punto resulta ser estable en la dirección de S y L , pero más adelante en las figuras 3-4 y 3-5 se observará que es inestable en la dirección de F , con lo que el punto de equilibrio resulta ser inestable tipo silla.

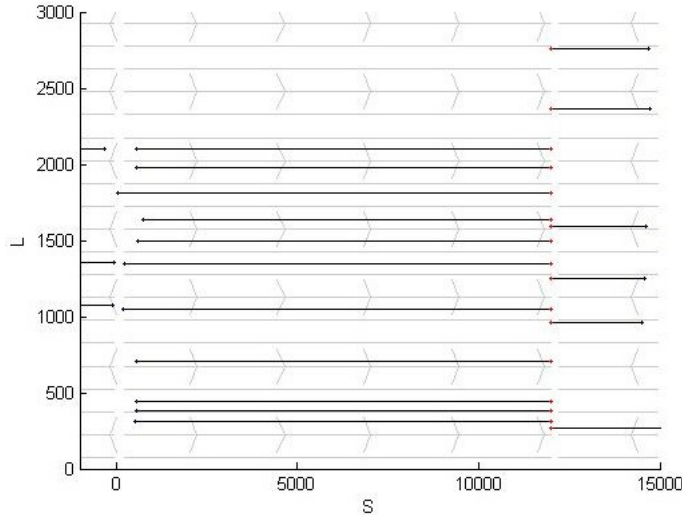


Figura 3-2.: Diagrama de Fase cerca al equ. $(K_1, 0, 0)$. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $K_2 = 700$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$, $F(0) = 0$, $S(0) \neq 0$, $L(0) = 0$.

Se puede notar en la figura 3-2 que el punto de equilibrio $(K_1, 0, 0)$ es estable desde el punto de vista económico, ya que la población humana se beneficia de lo que el bosque produce, incluso todas las calorías que recibe para su crecimiento las recibe únicamente del bosque, estas calorías no le ayudan a crecer como población, pero si a mantenerse aunque la población de peces no está subsistiendo. Por lo tanto, no sería un punto de equilibrio sostenible, es por esto que no sería adecuado tener este punto como referencia para centrar la economía del sistema.

3. Para $(0, K_2, 0)$

$$J(0, K_2, 0) = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_2 & -qm_2\beta_2K_2 \\ 0 & 0 & \varphi(\phi_2qm_2\beta_2K_2 - \gamma) \end{pmatrix}$$

Los valores propios para el punto de equilibrio $(0, K_2, 0)$ son también los elementos de la diagonal, es decir, $\lambda_1 = \rho_1$, $\lambda_2 = -\rho_2$, $\lambda_3 = \varphi(\phi_2qm_2\beta_2K_2 - \gamma)$, donde $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ y aplicando el teorema de estabilidad se llega a que $(0, K_2, 0)$ es un punto de equilibrio inestable. Nuevamente no se concluye nada sobre el valor propio λ_3 , por

depender de muchos parámetros, es un caso donde podría presentarse algún parámetro de bifurcación.

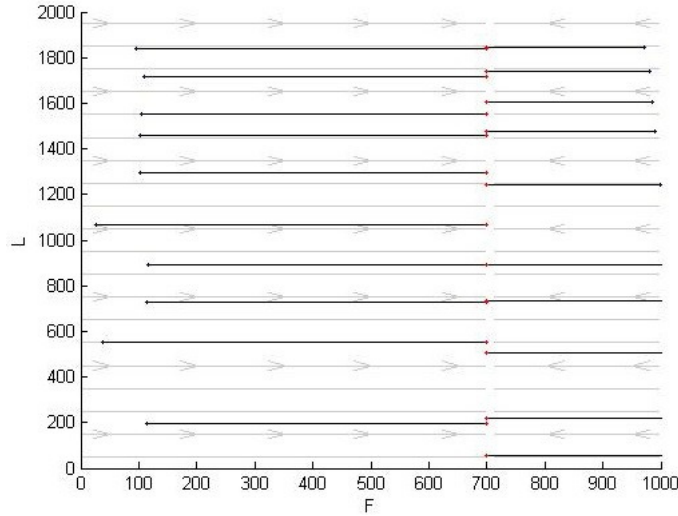


Figura 3-3.: Diagrama de Fase cerca al equ. $(0, K_2, 0)$. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $K_2 = 700(200000)$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$, $S(0) = 0$, $F(0) \neq 0$, $L(0) = 0$.

La figura 3-3 es una proyección del plano SFL al plano FL , y en esta gráfica se ve que el punto de equilibrio $(0, K_2, 0)$ es estable en la dirección de F y de L , ya que todas las trayectorias convergen a una línea de equilibrio $F = K_2$, pero también en las figuras 3-4 y 3-5 se observa que es inestable en la dirección de S , con lo cual resulta ser un punto de equilibrio inestable tipo silla.

Desde el punto de vista económico resulta provechoso este punto, ya que la población humana presente consume las calorías que la producción de peces le ofrece, pero se ve además que la población humana no crece, sino que se mantiene constante y desde el punto de vista sostenible no hay beneficio, debido a que la población de bosque se ve fuertemente afectada, por tanto, tampoco es viable centrar la economía del sistema en este punto de equilibrio.

4. Para $(K_1, K_2, 0)$

$$J(K_1, K_2, 0) = \begin{pmatrix} -\rho_1 & 0 & -\alpha m_1 \beta_1 K_1 \\ 0 & -\rho_2 & -q m_2 \beta_2 K_2 \\ 0 & 0 & \varphi(\phi_1 \alpha m_1 \beta_1 K_1 + \phi_2 q m_2 \beta_2 K_2 - \gamma) \end{pmatrix}$$

Los valores propios son los elementos de la diagonal, es decir, para el punto de equilibrio $(K_1, K_2, 0)$, $\lambda_1 = -\rho_1$, $\lambda_2 = -\rho_2$, $\lambda_3 = \varphi(\phi_1 \alpha m_1 \beta_1 K_1 + \phi_2 q m_2 \beta_2 K_2 - \gamma)$, donde $\lambda_1 < 0$,

$\lambda_2 < 0$ y como λ_3 depende de muchos parámetros, por lo tanto no se aplica directamente el teorema de estabilidad.

Se concluye que el punto de equilibrio es estable si $\lambda_3 < 0$ ó es inestable si $\lambda_3 > 0$, en otras palabras, para $\gamma > \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 K_1 + \phi_2 q m_2 \beta_2 K_2$ hay estabilidad y para $\gamma < \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 K_1 + \phi_2 q m_2 \beta_2 K_2$ se presenta inestabilidad cerca a este punto de equilibrio. Para el caso de $\gamma = \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 K_1 + \phi_2 q m_2 \beta_2 K_2$ se encuentra un posible valor de bifurcación tipo Fold.

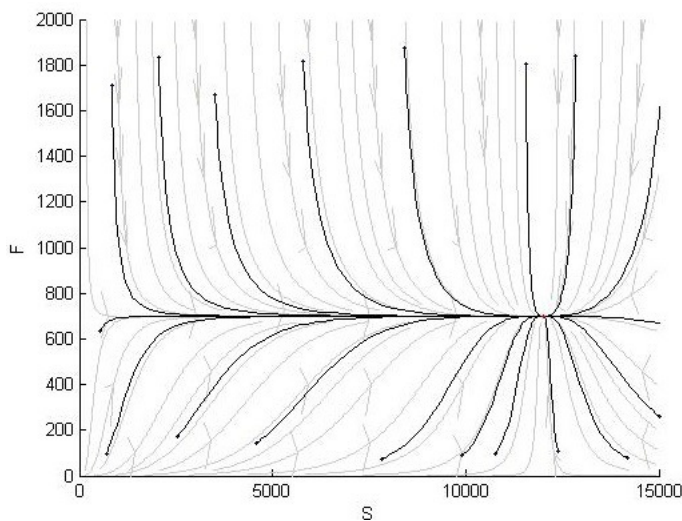


Figura 3-4.: Diagrama de Fase. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $K_2 = 700$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$

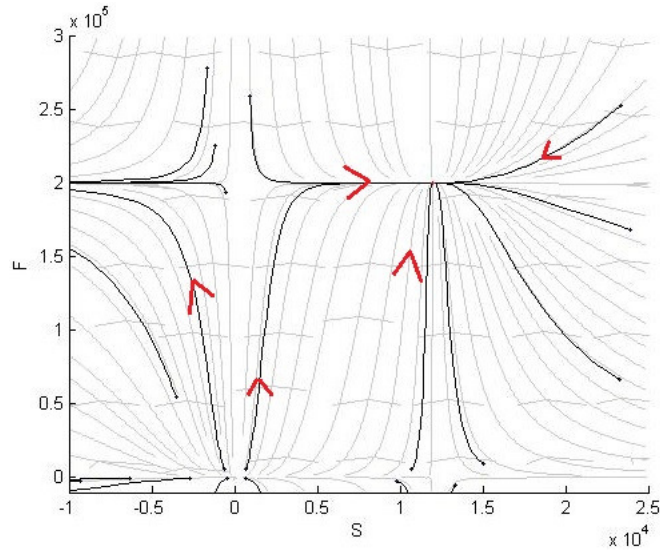


Figura 3-5.: Diagrama de Fase. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $K_2 = 200000$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$

En las figuras 3-4 y 3-5 se observa que el punto de equilibrio es estable en la dirección de S y F , debido a que los valores propios asociados a cada uno son negativos, pero con los valores tomados para los parámetros en la figura 3-4 el sistema resulta estable también para L , pero con los tomados en la figura 3-5 resulta inestable para L , por lo tanto esto comprueba que existe un posible valor de bifurcación tipo Fold al variar alguno de los parámetros presentes en λ_3

Ahora, desde el punto de vista sostenible se dice que con los valores dados a los parámetros en la figura 3-4 no se presenta sostenibilidad, debido a que la población humana tiende a decrecer, porque el medio no le está brindando las suficientes calorías necesarias para su alimentación, aunque el punto es estable desde el punto de vista matemático, no es económicamente provechoso.

Con los valores dados a los parámetros en la figura 3-5 se tiene provecho económico ya que la población humana crece porque las calorías que le brinda el medio son suficientes para su alimentación, pero matemáticamente es inestable.

5. Para $(0, 0, C_0)$

$$\text{Donde } C_0 = \left(\frac{\lambda(1-\beta_1-\beta_2)^\delta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\delta}}$$

$$J(0, 0, C_0) = \begin{pmatrix} \rho_1 - \alpha m_1 \beta_1 \left(\frac{\lambda(1-\beta_1-\beta_2)^\delta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 - q m_2 \beta_2 \left(\frac{\lambda(1-\beta_1-\beta_2)^\delta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} & 0 \\ \varphi \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 \left(\frac{\lambda(1-\beta_1-\beta_2)^\delta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} & \varphi \phi_2 q m_2 \beta_2 \left(\frac{\lambda(1-\beta_1-\beta_2)^\delta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} & \varphi \gamma (\delta - 1) \end{pmatrix}$$

Nuevamente, por ser la matriz triangular, sus valores propios son los elementos de la diagonal principal, que para esta matriz son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \rho_1 - \alpha m_1 \beta_1 \left(\frac{\lambda(1-\beta_1-\beta_2)^\delta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \\ \lambda_2 &= \rho_2 - q m_2 \beta_2 \left(\frac{\lambda(1-\beta_1-\beta_2)^\delta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \\ \lambda_3 &= \varphi \gamma (\delta - 1) < 0 \end{aligned}$$

Para este caso no se concluye nada sobre estos valores propios, y por tanto no se deduce nada sobre la estabilidad del punto de equilibrio. Se podría suponer que los valores propios son negativos, y por tanto el punto resultaría estable, pero se observa que los tres valores propios dependen del parámetro δ , y así la estabilidad también depende del parámetro δ .

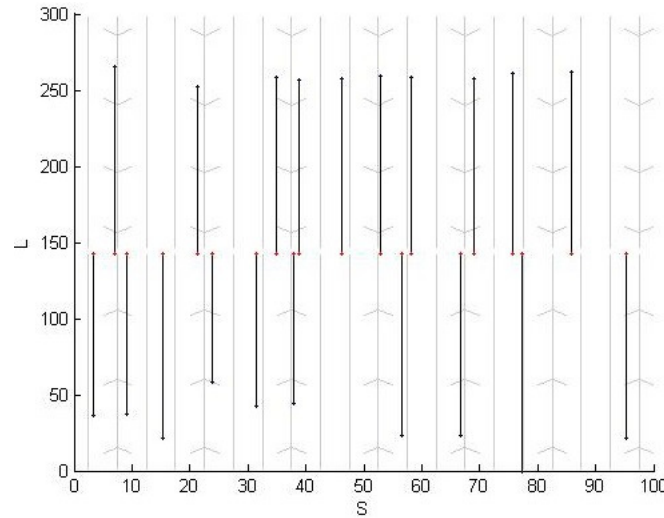


Figura 3-6.: Diagrama de Fase. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $K_2 = 700$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$, $F(0) = 0$, $S(0) = 0$.

En la figura 3-6 se observa que en la proyección al plano SL , el punto de equilibrio resulta ser inestable donde todas las trayectorias tomadas desde varias condiciones

iniciales, tienden a una línea de equilibrio en $L = C_0$, por lo que el sistema resulta inestable en este punto, el punto de equilibrio se dice que es estable en la dirección de L , pero inestable en la dirección tanto de S como de F .

Este equilibrio no es económicamente muy provechoso, debido a que la población humana no crece, sino que se mantiene, esto debido a que el medio no le está ofreciendo las calorías necesarias para su crecimiento y desde el punto de vista sostenible no es útil ya que la población de bosque y de peces no permanecen, sino que son totalmente consumidas por la población humana.

En este punto se presenta estabilidad debido a que la población humana sobrevive de la agricultura, económicamente es estable porque hay beneficios económicos gracias a la producción de la tierra, es decir a que el parámetro $\delta < 1$, porque en el caso donde $\delta > 1$ la tierra producirá más de lo necesario, trayendo como consecuencia que la población continúe creciendo sin control, generando problemas de sobrepoblación y por ende la no preservación del medio ambiente.

6. $(0, b_1, C_1)$.

La estabilidad de este punto se analiza únicamente de manera numérica, debido a lo compleja que resulta su escritura y más aún el computo de sus valores propios.

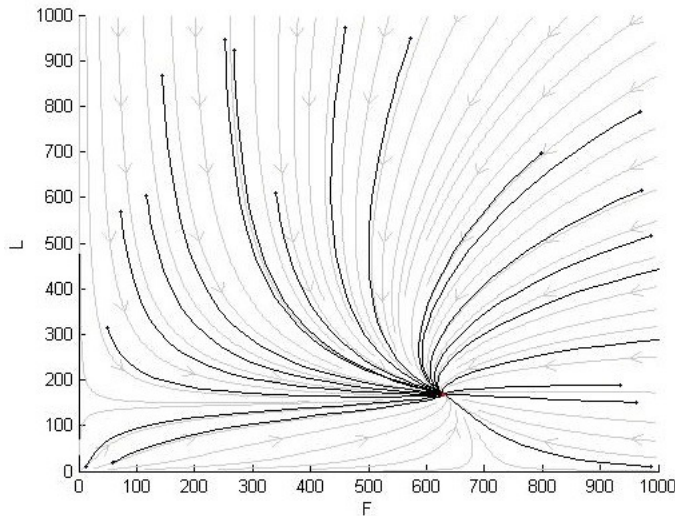


Figura 3-7.: Diagrama de Fase. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$, $K_2 = 700$

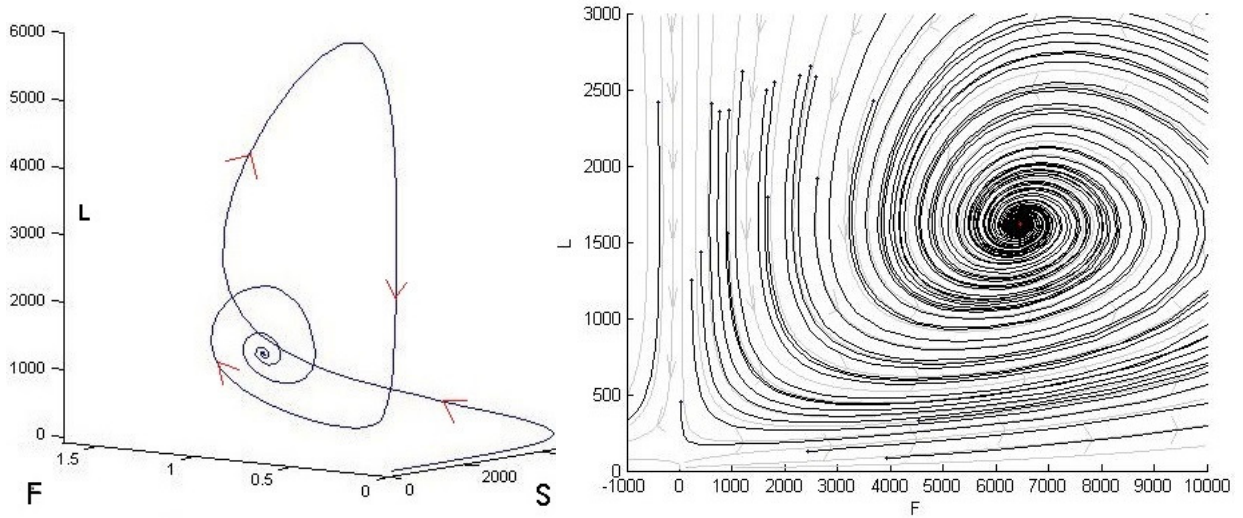


Figura 3-8.: Diagrama de Fase. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$, $K_2 = 200000$, $S(0) = 0$.

Con los valores dados a los parámetros en la figura 3-7 se tiene un nodo estable para $(S^*, F^*, L^*)_{approx} = (0,629, 169)$ y en la figura 3-8 (izquierda) un foco estable (sumidero) para $(S^*, F^*, L^*)_{approx} = (0,6472, 1611)$, la única diferencia entre estas dos gráficas es el valor dado a la capacidad máxima de peces. La figura 3-8 (derecha) es una proyección al plano FL donde se observa el foco estable que se presenta para el punto de equilibrio.

Este punto es no sostenible, debido a que la población de bosque tiende a extinguirse, aunque la población humana se beneficia al obtener las calorías necesarias para subsistir y la población de peces también logra sobrevivir. Ahora, se observa además que, si la población de peces aumenta la población humana también aumenta, gracias a que se pueden obtener más calorías de la producción pesquera, esto se puede observar en la figura 3-8.

7. $(A_2, 0, C_2)$.

La estabilidad de este punto se analiza únicamente de manera numérica, debido a lo compleja que resulta su escritura y más aún el computo de sus valores propios.

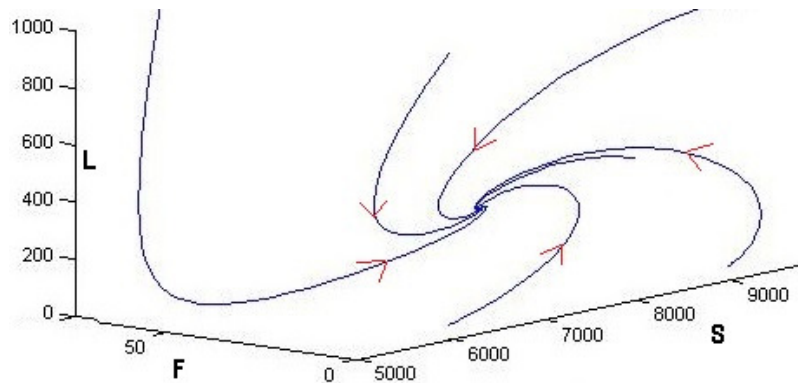


Figura 3-9.: Diagrama de Fase. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$, $K_2 = 700$

Las figuras 3-9 y 3-10 presentan un nodo estable en el plano SL para el punto de equilibrio, adicional a esto la figura 3-10 presenta el foco estable hallado para el punto de equilibrio anterior $(S^*, F^*, L^*)_{approx} = (0, 629, 169)$, en el plano FL . Se puede notar que para diferentes condiciones iniciales, las trayectorias tienden al punto de equilibrio $(S^*, F^*, L^*)_{approx} = (6346, 0, 436)$, según los valores dados a los parámetros para estas dos gráficas.

Desde el punto de vista sostenible, se puede observar que la población humana se mantiene gracias a que el bosque produce las suficientes calorías para su alimentación, y el bosque no desaparece, pero se dirá que no hay sostenibilidad, porque la población de peces se ha extinguido.

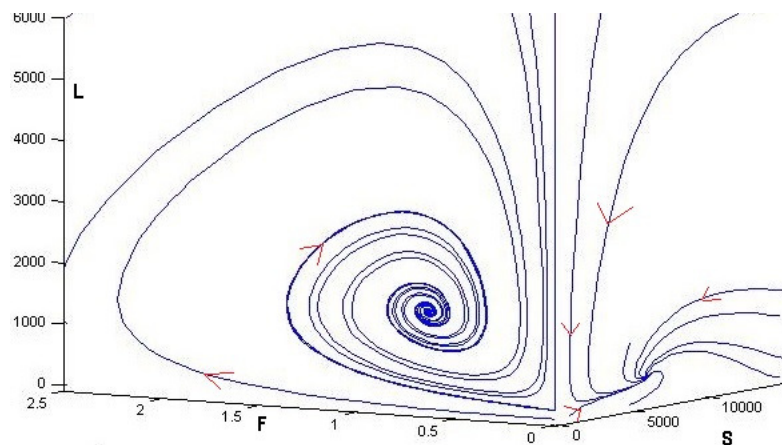


Figura 3-10.: Diagrama de Fase. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$, $K_2 = 200000$

8. (A_3, b_3, C_3) .

La estabilidad de este punto también se analiza de manera numérica, debido a lo compleja que resulta su escritura y más aún el computo de sus valores propios.

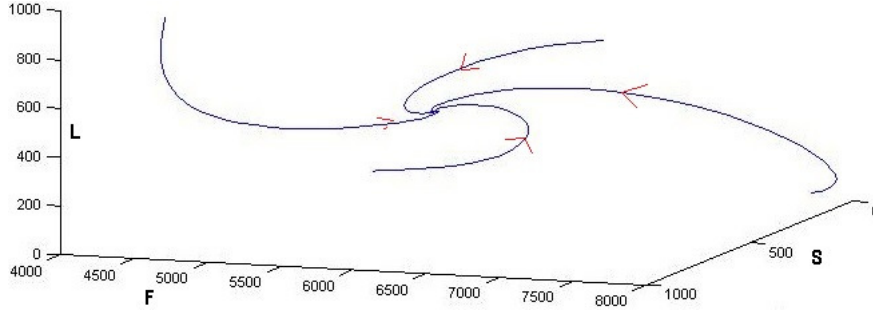


Figura 3-11.: Diagrama de Fase. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$, $K_2 = 700$, $S(0) \neq 0$, $L(0) \neq 0$, $F(0) \neq 0$

Se observa en las figuras 3-11 (anterior) y 3-12 (siguiente) algo similar a lo ocurrido con el punto de equilibrio $(0, b_1, C_1)$, donde se presenta en la figura 3-11 un nodo estable y en la figura 3-12 un foco estable, para el punto de equilibrio $(S^*, F^*, L^*)_{approx} = (5851, 500, 474)$, con la diferencia de haber cambiado la capacidad máxima de peces del medio. Cabe destacar que, si la capacidad de peces que el medio admite aumenta, también aumenta la población humana, debido a que se producen más calorías que ayudan al crecimiento de dicha población humana.

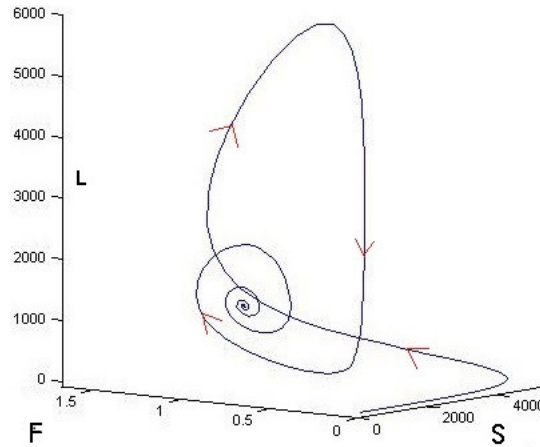


Figura 3-12.: Diagrama de Fase. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$, $K_2 = 200000$, $S(0) \neq 0$, $L(0) \neq 0$, $F(0) \neq 0$

Este es un punto de sostenibilidad óptima, porque las tres poblaciones se conservan, si la capacidad máxima de peces que dicha región puede abarcar aumenta, entonces crece la biomasa de población humana presente en dicha región, además que según la figura 3-12, el medio puede llegar a beneficiar económicamente a la población alcanzando un umbral significativo y después bajar hasta estabilizarse, sin afectar esto la conservación de los recursos naturales, es decir, llega un momento en el tiempo que el medio posee recursos que benefician una cantidad máxima de población y cuando llega a este punto los recursos naturales no están en riesgo alguno de desaparecer.

3.2. Estabilidad del Modelo con Efecto Alleé

Para hacer el análisis de estabilidad del modelo con efecto Alleé se procede de forma similar a la sección anterior, es decir empleando linealización.

Primero, se calcula la matriz jacobiana del sistema con efecto Alleé y luego es evaluada en cada uno de los puntos de equilibrio encontrados de manera analítica, para después hallar los valores propios de cada matriz.

Tomando \dot{S} , \dot{F} , \dot{L} y las derivando con respecto a S , luego con respecto a F y luego con respecto a L , para luego reemplazar en la matriz jacobiana.

Se tiene que:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \frac{-\rho_1}{K_1 K_3} S^3 + \frac{\rho_1(K_1 + K_3)}{K_1 K_3} S^2 - \rho_1 S - \alpha m_1 \beta_1 L S \\ \dot{F} &= \frac{-\rho_2}{K_2} F^2 + \rho_2 F - q m_2 \beta_2 L F \\ \dot{L} &= \varphi \lambda (1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta L^\delta + \varphi \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 S L + \varphi \phi_2 q m_2 \beta_2 F L - \varphi \gamma L\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{S}}{\partial S} &= \frac{-3\rho_1 S^2 + 2\rho_1(K_1 + K_3)S}{K_1 K_3} - \rho_1 - \alpha m_1 \beta_1 L & \frac{\partial \dot{S}}{\partial F} &= 0 & \frac{\partial \dot{S}}{\partial L} &= -\alpha m_1 \beta_1 S \\ \frac{\partial \dot{F}}{\partial S} &= 0 & \frac{\partial \dot{F}}{\partial F} &= \frac{-2\rho_2}{K_2} F + \rho_2 - q m_2 \beta_2 L & \frac{\partial \dot{F}}{\partial L} &= -q m_2 \beta_2 F \\ \frac{\partial \dot{L}}{\partial S} &= \varphi \lambda \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 L & \frac{\partial \dot{L}}{\partial F} &= \varphi \phi_2 q m_2 \beta_2 L & &\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \dot{L}}{\partial L} = \delta \lambda \varphi (1 - \beta_1 - \beta_2)^\delta L^{\delta-1} + \varphi \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 S + \varphi \phi_2 q m_2 \beta_2 F - \varphi \gamma = Z$$

Entonces la matriz jacobiana queda:

$$J(S, F, L) = \begin{pmatrix} \frac{-3\rho_1}{K_1 K_3} S^2 + \frac{2\rho_1(K_1 + K_3)}{K_1 K_3} S - \rho_1 - \alpha m_1 \beta_1 L & 0 & -\alpha m_1 \beta_1 S \\ 0 & \frac{-2\rho_2}{K_2} F + \rho_2 - q m_2 \beta_2 L & -q m_2 \beta_2 F \\ \varphi \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 L & \varphi \phi_2 q m_2 \beta_2 L & Z \end{pmatrix}$$

Ahora se evalúa la matriz jacobiana en cada uno de los 7 puntos de equilibrio encontrados de manera analítica

1. Para $(0, 0, 0)$

$$J(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi\gamma \end{pmatrix}$$

Por ser una matriz diagonal, sus valores propios son los elementos de la diagonal, es decir $\lambda_1 = -\rho_1$, $\lambda_2 = \rho_2$, $\lambda_3 = -\varphi\gamma$, de donde $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 < 0$; y aplicando el teorema de estabilidad se concluye que el origen es un punto de equilibrio inestable de tipo silla, estable en dirección a S y L , e inestable en dirección a F . Debido al efecto Alleé de este modelo se presentó cambio en la dirección de estabilidad con respecto a S , que para el modelo sin efecto Alleé era inestable en dirección a S .

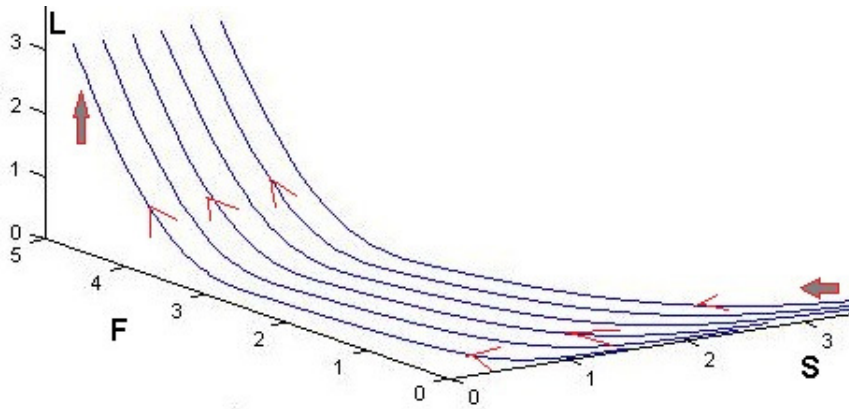


Figura 3-13.: Diagrama de Fase cerca al equ. $(0, 0, 0)$. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $K_2 = 200000$, $K_3 = 700$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$.

En la figura 3-13 se ve que el origen es un punto de equilibrio tipo silla, debido a que las trayectorias tomadas desde diferentes condiciones iniciales en una dirección se acercan al origen pero en otra se alejan.

Nuevamente, al igual que en el modelo sin efecto Alleé es adecuado que ocurra esta inestabilidad, ya que así no se centra la mirada económica en este punto, que no es sostenible, debido a que si fuera estable las tres poblaciones se extinguirían, generándose un colapso biológico, sucedería de forma similar al caso sin efecto Alleé, la única diferencia sería que gracias al efecto Alleé se presenta una mayor resistencia del medio a la extinción de los recursos, pero debido a las condiciones que el medio presenta llegarán a acabarse sin traer ningún tipo de beneficio socioeconómico ni ecológico.

2. Para $(K_1, 0, 0)$

$$J(K_1, 0, 0) = \begin{pmatrix} \rho_1 \left(1 - \frac{K_1}{K_3}\right) & 0 & -\alpha m_1 \beta_1 K_1 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi(\phi_1 \alpha m_1 \beta_1 K_1 - \gamma) \end{pmatrix}$$

Nuevamente sus valores propios son los elementos de la diagonal, es decir $\lambda_1 = \rho_1 \left(1 - \frac{K_1}{K_3}\right)$, $\lambda_2 = \rho_2$ y $\lambda_3 = \varphi(\phi_1 \alpha m_1 \beta_1 K_1 - \gamma)$, donde se halla que $\lambda_1 < 0$ debido a que $K_1 > K_3$, $\lambda_2 > 0$ y aplicando el teorema de estabilidad se concluye que el punto de equilibrio $(K_1, 0, 0)$ es inestable. Se puede observar que el valor propio λ_3 , depende de los valores que tomen los parámetros, por lo tanto, no se define con un valor. Además este punto de equilibrio no posee diferencia significativa en cuanto a estabilidad, con su similar en el modelo sin efecto Alleé.

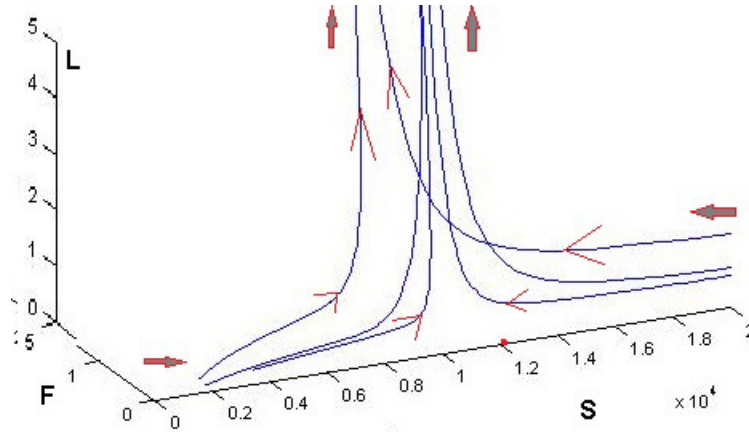


Figura 3-14.: Diagrama de Fase cerca al equ. $(K_1, 0, 0)$. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $K_2 = 200000$, $K_3 = 700$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$.

En la figura 3-14 las trayectorias tomadas desde varias condiciones iniciales cercanas al punto de equilibrio $(K_1, 0, 0)$, todas se alejan del punto de equilibrio, mostrando con esto la inestabilidad del punto.

Como en el modelo sin efecto Alleé, este punto desde la perspectiva sostenible no es válido debido a que la población humana obtiene beneficios económicos, pero no hay preservación de las dos especies presentes en el medio, por tanto, es mejor no centrar la mirada económica en este punto.

3. Para $(K_3, 0, 0)$

$$J(K_3, 0, 0) = \begin{pmatrix} \rho_1 \left(1 - \frac{K_3}{K_1}\right) & 0 & -\alpha m_1 \beta_1 K_1 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi(\phi_1 \alpha m_1 \beta_1 K_3 - \gamma) \end{pmatrix}$$

Por ser una matriz triangular, sus valores propios son los elementos de la diagonal, es decir $\lambda_1 = \rho_1 \left(1 - \frac{K_3}{K_1}\right)$, $\lambda_2 = \rho_2$ y $\lambda_3 = \varphi(\phi_1 \alpha m_1 \beta_1 K_3 - \gamma)$, donde se encuentra que $\lambda_1 > 0$ debido a que $K_1 > K_3$, $\lambda_2 > 0$ y aplicando el teorema de estabilidad se llega a que el punto de equilibrio $(K_3, 0, 0)$ es inestable, el valor propio λ_3 , depende de los valores que tomen los parámetros por lo tanto, no se define un valor.

Este es el primer punto de equilibrio adicional, surge a partir de implementar al modelo el efecto Alleé sobre la población de bosque, pero es un punto inestable en dirección a F y a S , y posiblemente también en la dirección L , en cuyo caso se tiene inestabilidad asintótica; en caso que sea estable en dirección a L , se presenta un punto de equilibrio inestable tipo silla.

Es interesante su característica de punto inestable, porque hablando de inestabilidad no es correcto para una población -en este caso el bosque-, alcanzar su capacidad mínima y las demás poblaciones se extingan. A razón de ello no se centrará la mirada en este punto de equilibrio.

4. Para $(0, K_2, 0)$

$$J(0, K_2, 0) = \begin{pmatrix} -\rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_2 & -q m_2 \beta_2 K_2 \\ 0 & 0 & \varphi(\phi_2 q m_2 \beta_2 K_2 - \gamma) \end{pmatrix}$$

Por ser una matriz triangular, sus valores propios son los elementos de la diagonal, es decir, $\lambda_1 = -\rho_1$, $\lambda_2 = -\rho_2$ y $\lambda_3 = \varphi(\phi_2 q m_2 \beta_2 K_2 - \gamma)$. Donde $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Pero se observa que el valor propio λ_3 , depende de los valores que tomen los parámetros, por tanto no se puede definir ni positivo ni negativo ni cero, lo que permite deducir que, dependiendo de los valores tomados por estos parámetros en $(0, K_2, 0)$ se tiene un punto de equilibrio estable o inestable, este es un posible caso de bifurcación. Este punto es estable en la dirección de S y F y comparando con su similar en el modelo sin efecto Alleé se presentó cambio en la dirección de estabilidad con respecto a S .

En la figura 3-15 se observa que a causa de los valores dados a los parámetros el punto de equilibrio resulta ser inestable tipo silla, si se varía la capacidad máxima de peces se puede presentar estabilidad, se concluye que si las calorías aportadas por la producción

de peces baja, entonces la población humana tiende a desaparecer, resultado de su insatisfacción alimentaria y de la incapacidad del bosque para suplir necesidades de calorías. En la figura 3-15 se ve que la población humana crece, pero el bosque no permanece, lo cual lo hace un punto insostenible.

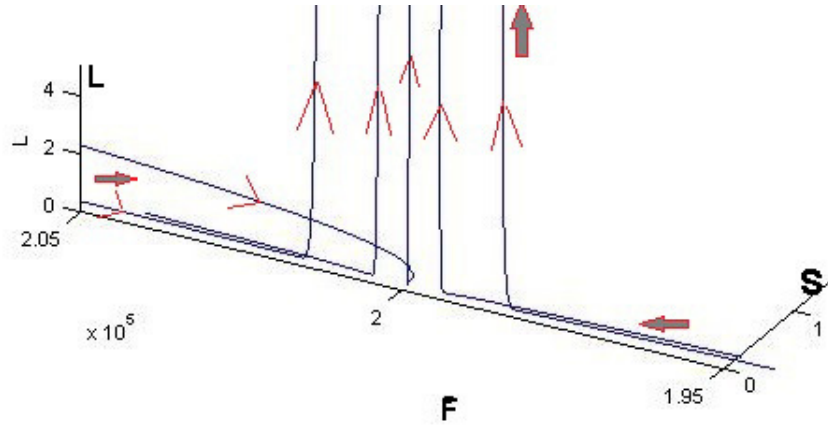


Figura 3-15.: Diagrama de Fase cerca al equ. $(0, K_2, 0)$. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $K_2 = 200000$, $K_3 = 700$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$.

5. Para $(K_1, K_2, 0)$

$$J(K_1, K_2, 0) = \begin{pmatrix} \rho_1 \left(1 - \frac{K_1}{K_3}\right) & 0 & -\alpha m_1 \beta_1 K_1 \\ 0 & -\rho_2 & -q m_2 \beta_2 K_2 \\ 0 & 0 & \varphi(\phi_1 \alpha m_1 \beta_1 K_1 + \phi_2 q m_2 \beta_2 K_2 - \gamma) \end{pmatrix}$$

Por ser una matriz triangular, sus valores propios son los elementos de la diagonal, es decir $\lambda_1 = \rho_1 \left(1 - \frac{K_1}{K_3}\right)$, $\lambda_2 = -\rho_2$ y $\lambda_3 = \varphi(\phi_1 \alpha m_1 \beta_1 K_1 + \phi_2 q m_2 \beta_2 K_2 - \gamma)$, donde se llega a que $\lambda_1 < 0$ debido a que $K_1 > K_3$, $\lambda_2 < 0$. Pero se observa que el valor propio λ_3 , depende de los valores que tomen los parámetros, por tanto no se puede definir ni positivo ni negativo ni cero, se deduce que con los valores tomados por estos parámetros en $(K_1, K_2, 0)$ tenemos un punto de equilibrio estable o inestable, es decir, otro posible caso de bifurcación.

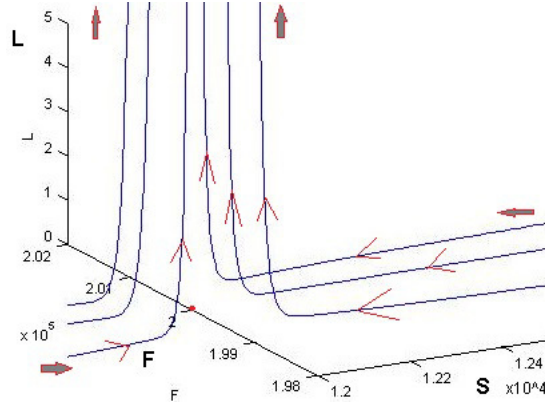


Figura 3-16.: Diagrama de Fase cerca al equ. $(K_1, K_2, 0)$. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $K_2 = 200000$, $K_3 = 700$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$.

En cuanto a la estabilidad de este punto se deduce que al asignar valores como los dados en la figura 3-16 el punto de equilibrio resulta inestable tipo silla, pero si se varían reduciendo el factor de alimentación se tendrá estabilidad. El punto gracias a sus valores propios es estable en dirección a S y a F y dependiendo de los valores tomados por los parámetros estable o inestable (figura 3-16) en dirección a L .

Si este punto resultará estable, no sería económicamente viable ya que la población humana tendería a desaparecer, y al no existir quien explote los recursos que el medio proporciona, las poblaciones de bosque y de peces llegan a alcanzar su capacidad máxima y allí tiende a permanecer durante un tiempo.

6. Para $(K_3, K_2, 0)$

Es otro punto de equilibrio que surgió a partir de implementar el efecto Alleé.

$$J(K_3, K_2, 0) = \begin{pmatrix} \rho_1 \left(1 - \frac{K_3}{K_1}\right) & 0 & -\alpha m_1 \beta_1 K_1 \\ 0 & -\rho_2 & -q m_2 \beta_2 K_2 \\ 0 & 0 & \varphi(\phi_1 \alpha m_1 \beta_1 K_3 + \phi_2 q m_2 \beta_2 K_2 - \gamma) \end{pmatrix}$$

Por ser una matriz triangular, sus valores propios son los elementos de la diagonal, es decir $\lambda_1 = \rho_1 \left(1 - \frac{K_3}{K_1}\right)$, $\lambda_2 = -\rho_2$ y $\lambda_3 = \varphi(\phi_1 \alpha m_1 \beta_1 K_3 + \phi_2 q m_2 \beta_2 K_2 - \gamma)$, donde $\lambda_1 > 0$ debido a que $K_1 > K_3$, $\lambda_2 < 0$. y aplicando el teorema de estabilidad se concluye que el punto de equilibrio $(K_3, K_2, 0)$ es un punto de equilibrio inestable, el valor propio λ_3 , depende de varios parámetros.

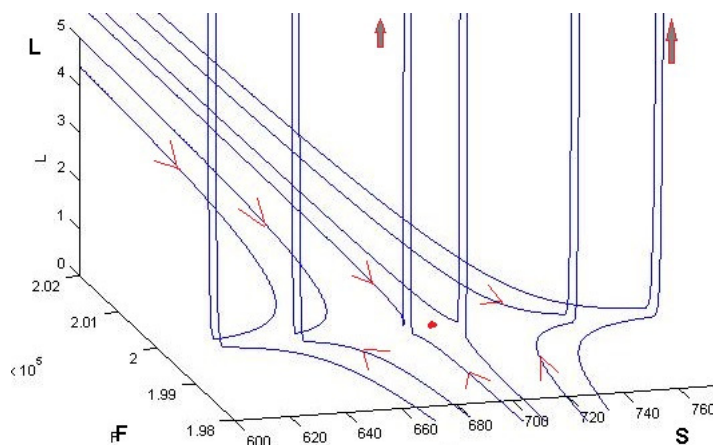


Figura 3-17.: Diagrama de Fase cerca al equ. $(K_3, K_2, 0)$. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $K_2 = 200000$, $K_3 = 700$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = \phi_2 = 3$.

En la figura 3-17 el punto de equilibrio resulta inestable tipo silla, y con los valores dados a los parámetros λ_3 resulta ser también positivo, con lo cual las trayectorias son estables en dirección a S e inestables con dirección a F y a L .

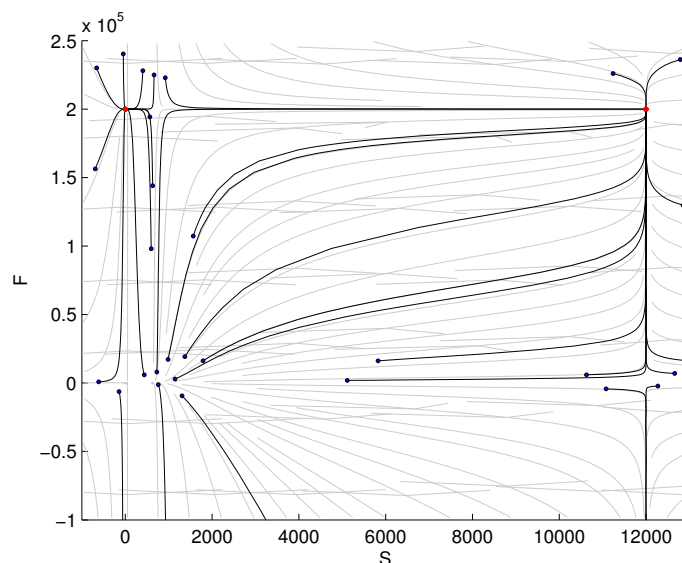


Figura 3-18.: Diagrama de Fase cerca a los 6 puntos de equilibrio anteriores. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $K_2 = 200000$, $K_3 = 700$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$, $L(0) = 0$.

La figura 3-18 es una proyección al plano SF , donde se visualiza los seis puntos de equilibrio anteriores para este modelo con efecto Alleé, según los valores dados a los parámetros en esta gráfica se tiene que el equi. $(0, 0, 0)$ es inestable tipo silla, el equi. $(K_3, 0, 0)$ presenta inestabilidad asintótica, el equi. $(K_1, 0, 0)$ es inestable tipo silla, el equi. $(0, K_2, 0)$ es estable localmente, $(K_3, K_2, 0)$ es inestable tipo silla, y $(K_1, K_2, 0)$ es estable tipo nodo.

Los anteriores puntos de equilibrio son todos los que consideran $L = 0$, por tanto, es lógico que dos de los seis puntos de equilibrio son estables.

Desde el punto de vista sostenible, los recursos se conservan, pero la población humana no, lo cual causa no centrar la mirada económica en estos puntos, debido a que no habría ningún beneficio si se considera la no existencia de población para explotar dichos recursos.

Para el punto de equilibrio $(K_1, K_2, 0)$ es lógico que en ausencia de la población humana, las demás poblaciones alcancen su umbral de crecimiento, por un periodo de tiempo, la población de bosque se vería afectada y comenzaría a reducir su biomasa por fenómenos puramente biológicos, llegando a su capacidad mínima y es aquí donde se daría un ciclo biológico de crecimiento y decrecimiento.

7. Para $(0, 0, C_0)$

$$\text{donde } C_0 = \left(\frac{\lambda(1-\beta_1-\beta_2)^\delta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\delta}}$$

$$J(0, 0, C_0) = \begin{pmatrix} -\rho_1 - \alpha m_1 \beta_1 \left(\frac{\lambda(1-\beta_1-\beta_2)^\delta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 - q m_2 \beta_2 \left(\frac{\lambda(1-\beta_1-\beta_2)^\delta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} & 0 \\ \varphi \phi_1 \alpha m_1 \beta_1 \left(\frac{\lambda(1-\beta_1-\beta_2)^\delta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} & \varphi \phi_2 q m_2 \beta_2 \left(\frac{\lambda(1-\beta_1-\beta_2)^\delta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} & \varphi \gamma (\delta - 1) \end{pmatrix}$$

Nuevamente, por ser la matriz triangular, sus valores propios son los elementos de la diagonal principal, es decir:

$$\lambda_1 = -\rho_1 - \alpha m_1 \beta_1 \left(\frac{\lambda(1-\beta_1-\beta_2)^\delta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} < 0$$

$$\lambda_2 = \rho_2 - q m_2 \beta_2 \left(\frac{\lambda(1-\beta_1-\beta_2)^\delta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\delta}}$$

$$\lambda_3 = \varphi \gamma (\delta - 1) < 0$$

Donde $\lambda_1 < 0$, $\lambda_3 < 0$, y λ_2 depende de los valores que sean asignados a los parámetros, entonces sobre la estabilidad de este punto no se define nada directamente, se describe

que a diferencia con el modelo sin efecto Alleé, para este caso el primer valor propio ya se define directamente negativo, sin depender de los parámetros, ahora, según el valor de los parámetros se tiene estabilidad asintótica o inestabilidad tipo silla, se deduce que para este λ_2 existe un parámetro que al ser variado genera bifurcación tipo Fold.

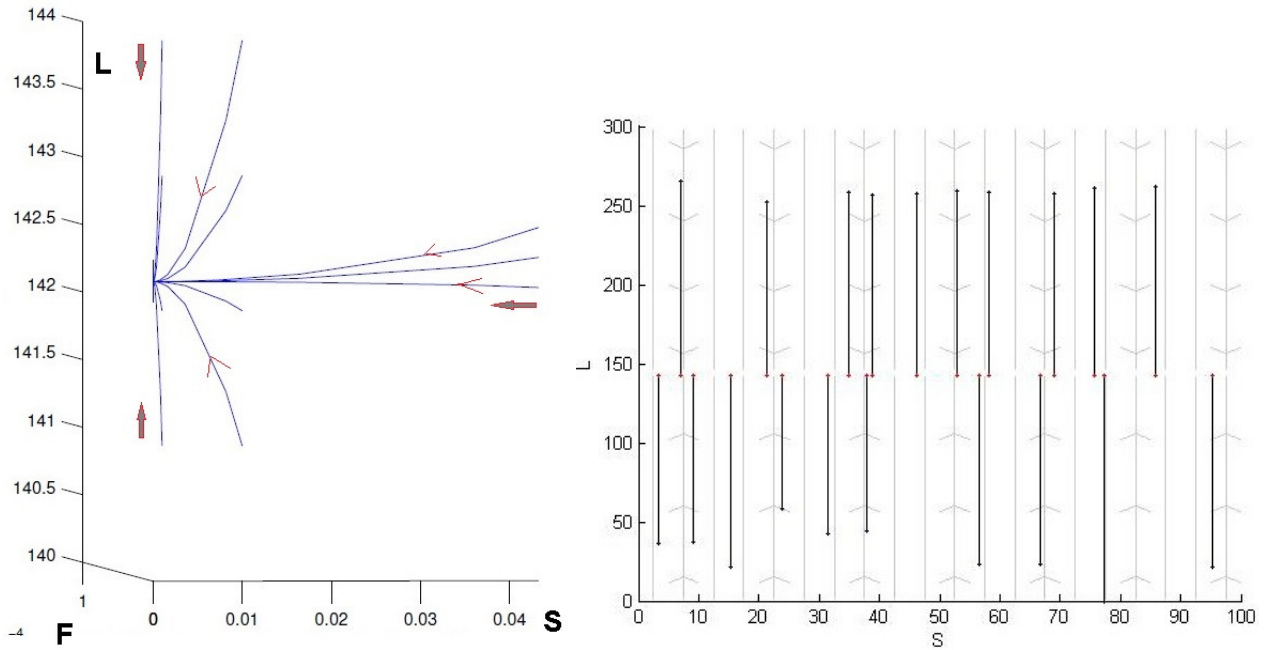


Figura 3-19.: Diagrama de Fase. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$, $K_2 = K_3 = 700$.

En la figura 3-19 (izquierda) se visualiza la estabilidad que ocurre en el punto de equilibrio, gracias a los valores dados a los parámetros, además las trayectorias tomadas desde diferentes condiciones iniciales se acercan al punto $(0, 0, C_0)$, la figura 3-19 (derecha) muestra la proyección al plano SL , y allí las trayectorias tienden a la recta $L = C_0$.

Para la figura 3-20 se tiene únicamente la proyección al plano SL , donde es variado el parámetro K_2 y se obtiene la vista de aproximadamente 6 equilibrios: $(0, 0, 0)$, $(0, 0, C_0)$, $(K_3, 0, 0)$, $(K_1, 0, 0)$ y posiblemente $(A_2, 0, C_2)_{approx} = (161, 0, 197)$ y $(A_3, b_3, C_3)_{approx} = (10506, 6441, 1613)$.

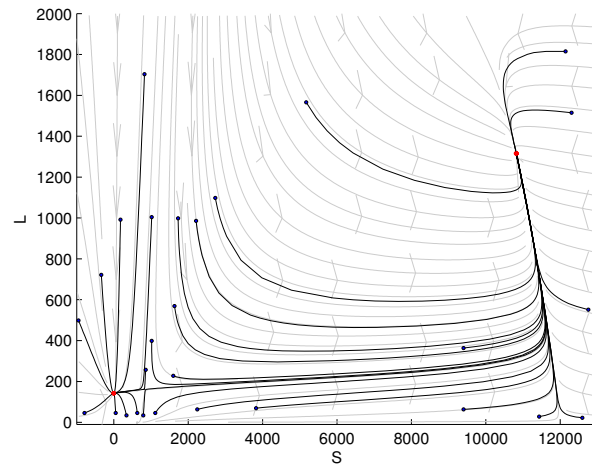


Figura 3-20.: Diagrama de Fase cerca a otros 6 puntos de equilibrio. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $K_2 = 200000$, $K_3 = 700$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$.

La estabilidad matemática de este punto, permite inferir que es aquel caso donde la población humana consume todos los recursos presentes en el medio, sin cuidar su conservación, si es variada la capacidad máxima de peces y el nivel de alimentación no, entonces la tendencia a la extinción por parte del bosque y de los mismos peces es más reducida. Este podría ser el caso de cero sostenibilidad. El ser humano aprovecha todos los recursos de manera económica y las calorías para su crecimiento, pero los recursos renovables tienden a desaparecer.

8. $(A_2, 0, C_2)$.

Este punto de equilibrio fue difícil de hallar numéricamente, pero en la figura 3-20 se muestra que es inestable tipo silla, según los valores dados a los parámetros.

Desde el punto de vista sostenible, la ocurrencia de inestabilidad es muy buena ya que no se centra la mirada económica en este punto. la población humana se beneficia, la población de árboles se conserva, pero la población de peces se extingue.

9. Para $(0, b_1, C_1)$

Este es uno de los puntos de equilibrio encontrados de manera numérica.

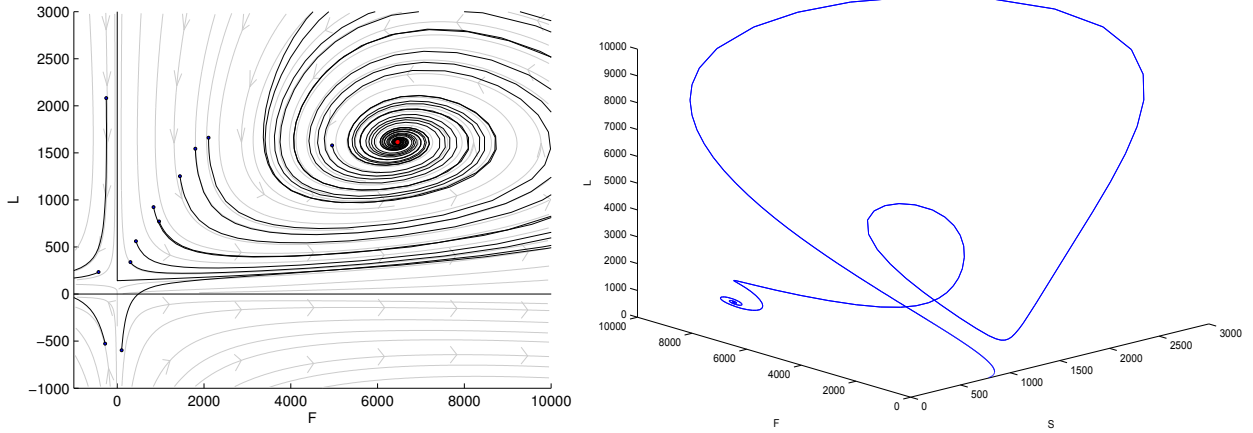


Figura 3-21.: Diagrama de Fase. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$, $K_2 = 700$

En la figura 3-21 (derecha) se observa que el punto de equilibrio $(0, b_1, C_1)_{approx} = (0, 6472, 1612)$ presenta estabilidad tipo foco, lo que se comprueba con la proyección al plano FL figura 3-21 (izquierda) .

En este punto de equilibrio se presenta sostenibilidad no óptima, la población humana crece, la biomasa de peces también crece, mientras la biomasa de bosque tiende a desaparecer, lo cual traería consigo problemas ambientales.

En este punto no se recomienda fijar la mirada económica, porque como consecuencia de los problemas biológicos a ocurrir, surgirán problemas de salud que en un tiempo afectarán a la población.

En la figura 3-21 (izquierda) se aprecian otros posibles puntos de equilibrio, los cuales no son lógicos bajo el punto de visto biológico, ya que considera poblaciones negativas, es decir, puntos por fuera del primer octante de \mathbb{R}^3

10. Para (A_3, b_3, C_3) .

Punto de equilibrio donde ninguna de sus componentes es cero, encontrado de manera numérica.

Como se observa en las siguientes gráficas (figura 3-22 y 3-23), dependiendo de las condiciones iniciales el sistema evoluciona a este punto de equilibrio o hacia el punto de equilibrio anterior $(0, b_1, C_1)_{approx} = (0, 6472, 1612)$.

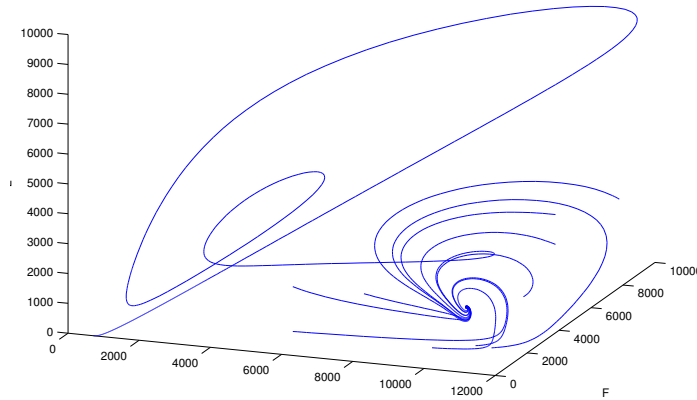


Figura 3-22.: Diagrama de Fase cerca al equi. (a_3, b_3, c_3) donde $a_3, b_3, c_3 \neq 0$. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $K_2 = 200000$, $K_3 = 700$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$.

La figura 3-22 presenta en el punto de equilibrio $(A_3, b_3, C_3)_{approx} = (10506, 6441, 1613)$ un foco estable, esto debido a los valores asignados a los diferentes parámetros.

La figura 3-23 muestra que según las condiciones iniciales las trayectorias convergen a uno de los dos puntos de equilibrio, ya sea $(0, b_1, C_1)_{approx} = (0, 12282, 1566)$ o $(A_3, b_3, C_3)_{approx} = (10506, 6441, 1613)$.

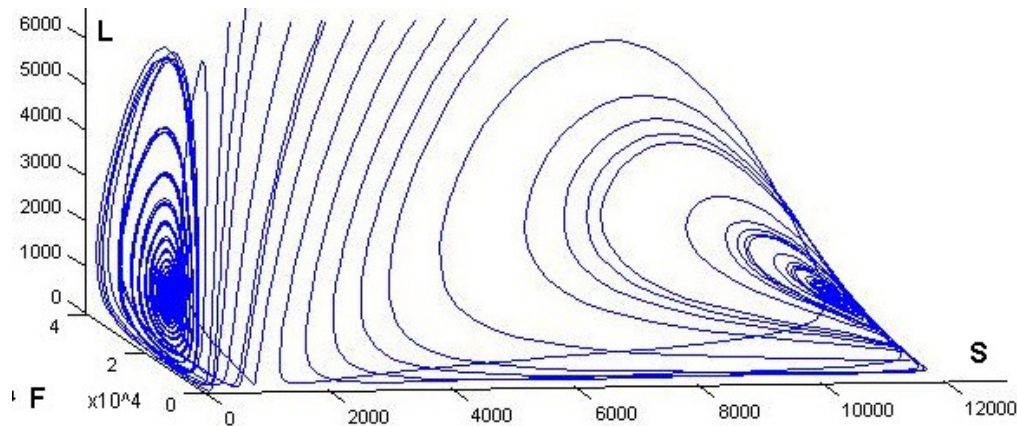


Figura 3-23.: Diagrama de Fase cerca al equi. (a_3, b_3, c_3) y $(0, b_2, c_2)$ donde $a_3, b_3, b_2, c_3, c_2 \neq 0$. Parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $K_2 = 200000$, $K_3 = 700$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$.

La estabilidad de este punto de equilibrio es ideal para el tema de sostenibilidad, porque las tres poblaciones sobreviven en el mismo medio. Se observa como la población humana crece, cuando crecen la biomasa de bosque y la biomasa de peces, se generan más calorías, pero después de un tiempo y por fenómenos biológicos, todas las poblaciones bajan a un punto de estabilidad. La población humana se beneficia tanto biológica, como económicamente y los recursos se conservan.

Capítulo 4

Bifurcaciones

En este capítulo presenta los diagramas de bifurcación a través de curvas de equilibrio, referentes a la variación de parámetros para los dos modelos, tanto para el modelo sin efecto Alleé como para el modelo con efecto Alleé. Estos diagramas son realizados con el paquete `matcont` de `matlab` y el análisis bifurcacional se hace únicamente de manera numérica.

4.1. Bifurcaciones sin Efecto Alleé

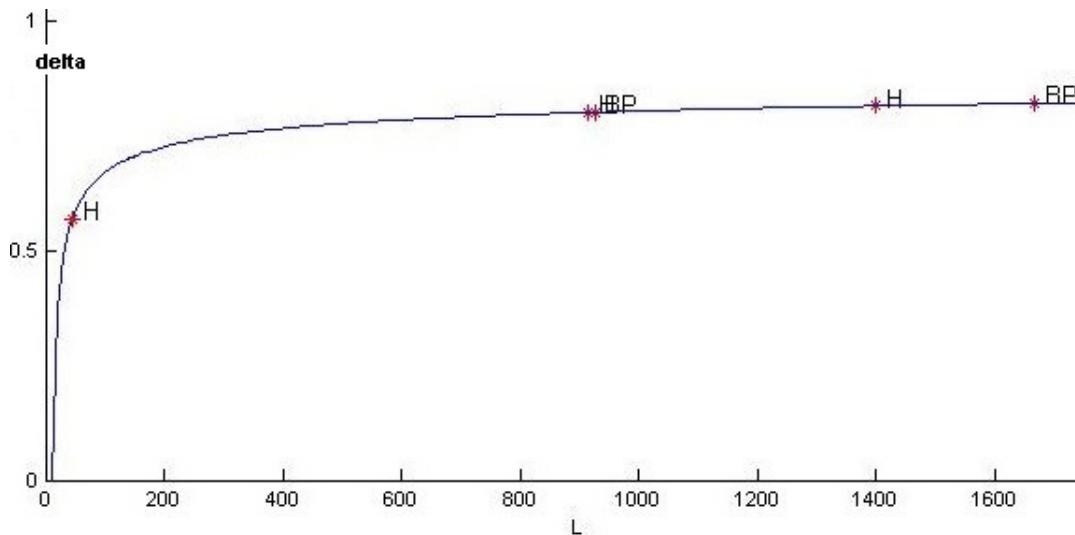


Figura 4-1.: Bifurcaciones variando δ : con: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $K_2 = 700$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = \phi_2 = 3$.

La figura 4-1 presenta la curva de equilibrios, al variar el parámetro δ del modelo sin efecto Alleé, la cual muestra varios cambios en la estabilidad del sistema: tres H referentes a neutral

saddles, que no son propiamente bifurcaciones, pero si cambio en los valores propios, esto se describe como una silla hiperbólica, que es aquella inestabilidad tipo silla donde los valores propios suman cero; además dos *BP* branch point o intersección de ramas de equilibrio, es decir por este punto pasa otra curva de equilibrios. Cabe destacar que si se continúa la curva de equilibrios se encuentran más sillas hiperbólicas e intersecciones de ramas de equilibrio, por lo cual no se lleva a cabo esta continuación.

Uno de los branch point está ubicado en $(0, 0, 1666,66)$ con $\delta = 0,8188$; uno de los neutral saddle está en $(0, -908, 1674,237)$ con $\delta = 0,8302$, este último no tiene sentido biológico, debido a que la población de peces es negativa.

Lo que se presenta en esta gráfica 4-1, permite comprobar que los valores propios para el *equi.* $(0, 0, C_0)$ dependían todos del parámetro δ , por lo cual no se pudo definir nada de manera directa sobre la estabilidad de este punto.

Variando el factor de producción de la tierra no se genera cambio en la inestabilidad del sistema, por tanto no hay sostenibilidad, debido a que al aumentar el factor de producción de la tierra, una mayor parte de la población se dedicará a la agricultura, disminuyendo la población dedicada a la pesca y a la silvicultura, descuidando la protección de los recursos renovables, esto ocurre cerca al punto donde sólo sobrevive la población humana.

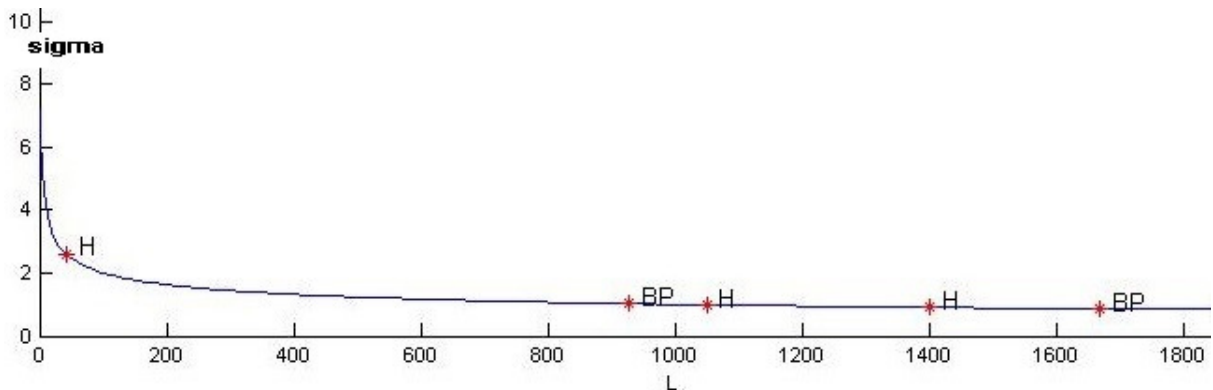


Figura 4-2.: Diagrama de Bifurcación variando γ , parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $K_2 = 700$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = \phi_2 = 3$.

En la figura 4-2 se presenta la variación del parámetro γ cerca al punto de equilibrio $(0, 0, C_0)$, en donde al variar el parámetro δ se encuentra que la inestabilidad no cambia, pero si cambian los valores propios asociados, para esta curva ocurren de manera similar a la figura 4-1 tres sillas hiperbólicas y dos puntos de intersección de curvas de equilibrio, pero a diferencia de la figura 4-1, en este caso todos los cambios tienen sentido biológico pero no son cambios que representen sostenibilidad.

En esta figura 4-2 encontramos tres H (neutral saddle), y dos BP (branch point): $H = (0, 0, 41)$ y $\gamma = 2,5998$, $H = (0, 0, 1049)$ y $\gamma = 0,9884$, $H = (0, 0, 1400)$ y $\gamma = 0,9064$, $BP = (0, 0, 1666)$ y $\gamma = 0,8602$, $BP = (0, 0, 926)$ y $\gamma = 1,02608$.

En esta gráfica 4-2 se ve que si el factor de alimentación disminuye la cantidad de población aumenta, esto es lógico si los recursos que produce el medio son los mismos, pero la población necesita menos calorías para sobrevivir, como consecuencia habrá mayor población beneficiada con estos recursos.

La curva de equilibrios es inestable, y es bueno que ocurra esta inestabilidad, así en definitiva la economía no se centrará en este punto.

Para este modelo sin efecto Alleé se pueden realizar más simulaciones variando el parámetro de alimentación o la capacidad máxima de peces, cerca al *equi.* $(K_1, K_2, 0)$ y posiblemente se encuentren otras bifurcaciones de tipo limit point que en el presente documento no se realizaron.

4.2. Bifurcaciones con Efecto Alleé

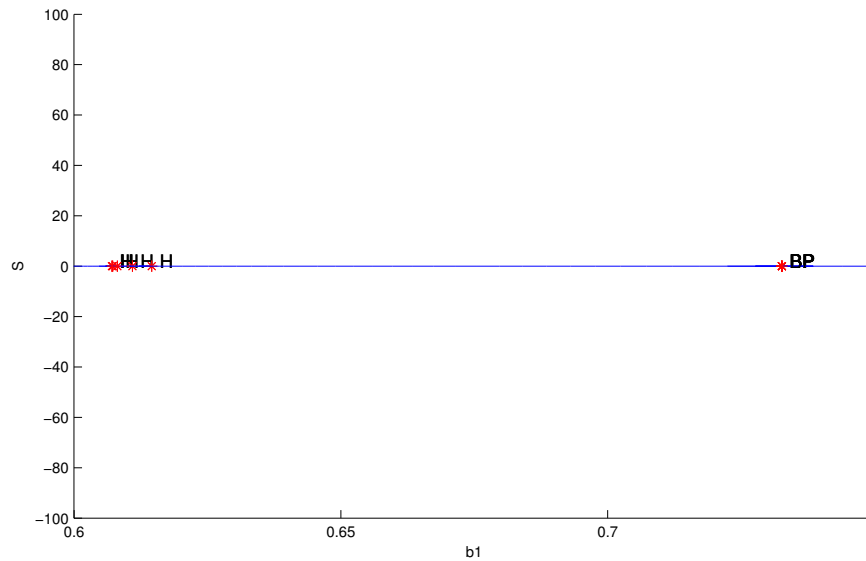


Figura 4-3.: Diagrama de Bifurcación variando β_1 : parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,8$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $K_2 = 200000$, $K_3 = 700$, $m_1 = 0,8$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$.

La figura 4-3 presenta la curva de equilibrios que resulta de variar el parámetro β_1 , en esta gráfica se encuentran 7 *BP* y 9 *H* referentes a Hopf, de las cuales 6 son Hopf subcrítica es decir el primer coeficiente de Lyapunov l_1 es positivo, y 3 supercríticas, es decir, primer coeficiente de Lyapunov negativo, esto desde el punto de vista matemático. La gráfica 4-3 no es muy clara debido a que estos cambios en la curva de equilibrios suceden en puntos muy cercanos, por tanto, todos se ven amontonados como uno solo.

Cabe destacar que estos cambios en la curva de equilibrios no son biológicamente correctos, porque se presentan cuando una de las poblaciones es negativa, lo cual es incorrecto desde la biología.

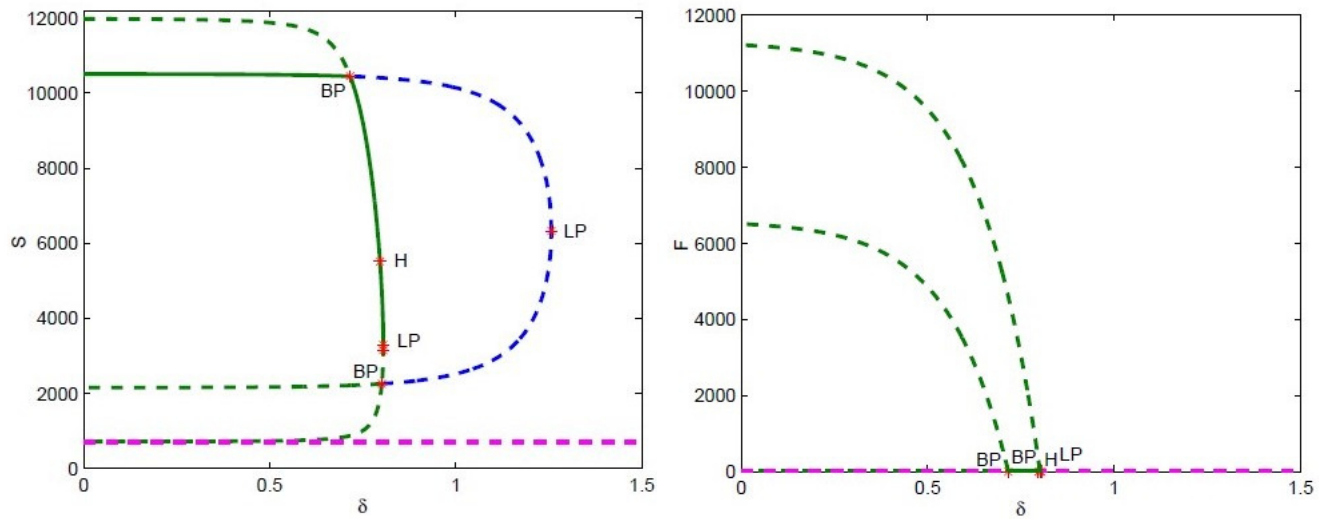


Figura 4-4.: Diagrama de Bifurcación variando δ .

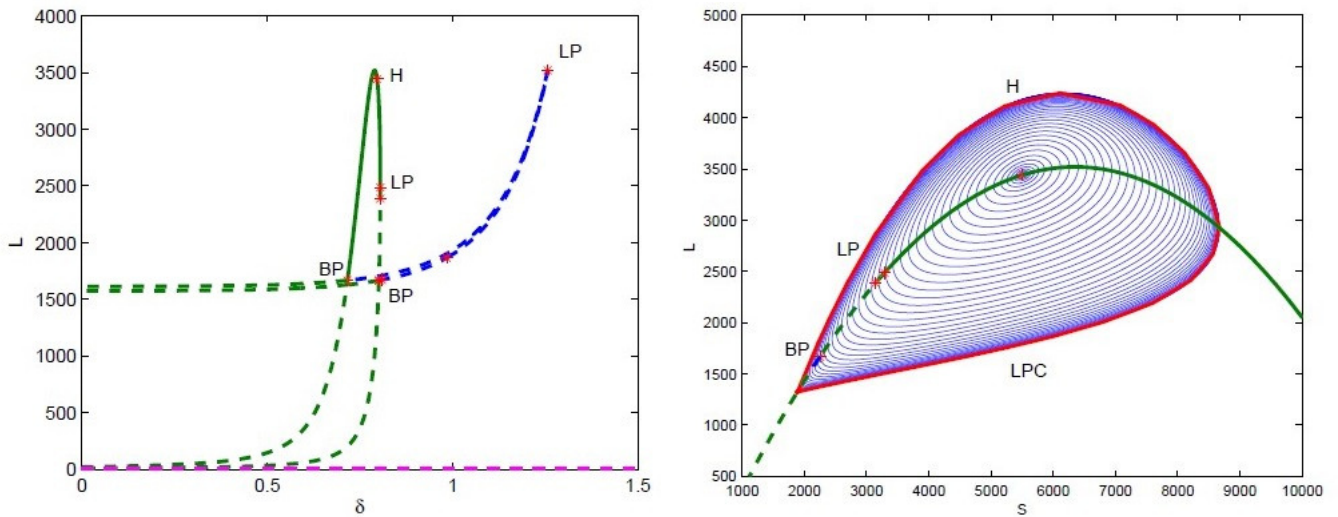


Figura 4-5.: Diagrama de Bifurcación variando δ : parámetros: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\gamma = 1,4(1,8)$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $K_2 = 200000$, $K_3 = 700$, $m_1 = 0,9$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = 3$, $\phi_2 = 3$. Bifurcaciones: *BP*, branching point; *H*, Hopf; *LP*, Limit point; *LPC*, Limit point of cycles. (Gráficas cedidas por Julián Hurtado)

“Las figuras 4-4 y 4-5 son los Diagramas de bifurcaciones. Para los tres primeros diagramas 4-4 y 4-5 (izquierda), las líneas punteadas determinan que estos puntos de equilibrio son inestables, mientras las líneas continuas indican estabilidad. Además, las líneas de color azul indican equilibrios sin sentido biológico ya que una de las variables de estado es negativa. El

último diagrama 4-5 (derecha) muestra algunos ciclos límites a partir del punto de bifurcación de Hopf, mostrando una bifurcación de ciclos límites, la cual está de color rojo” (Julián Hurtado).

Estos diagramas muestran la variación del mismo parámetro δ en los diferentes planos. La figura 4-4 izquierda en el plano δS muestra dos curvas de equilibrios que se intersectan en dos BP , en una ellas se presenta una bifurcación de tipo Fold LP , pero sin sentido biológico de color azul, la otra de color verde muestra el cambio de estabilidad dado en esta bifurcación Fold de inestable a estable, la H representa una bifurcación Hopf.

La figura 4-4 derecha en el plano δF , presenta en la parte superior verde donde dos BP , una silla neutra y un limit point, esta curva es inestable en todo punto, menos donde la población de peces es cero, es decir, donde $F = 0$. La figura 4-5 izquierda presenta los dos BP , la silla neutra y las dos bifurcaciones Fold: la que no tiene sentido biológico como la que si tiene, se dice que esta bifurcación de tipo Fold se da para el punto de equilibrio $(A_2, 0, C_2)$.

El sistema presenta para $S < 6236,80364$ estabilidad y para valores mayores de S inestabilidad, permite afirmar la existencia de estabilidad y a su vez de sostenibilidad. Esto se evidencia observando que en la zona estable, la tierra está produciendo cada vez más recursos y el bosque sigue creciendo, pero cuando la tierra produce lo máximo que dicha región puede dar, comienza a bajar la producción de la tierra y los árboles siguen creciendo hasta alcanzar la capacidad máxima permitida por la región, en este punto se presenta conservación de los recursos naturales renovables, pero no se presentan beneficios económicos.

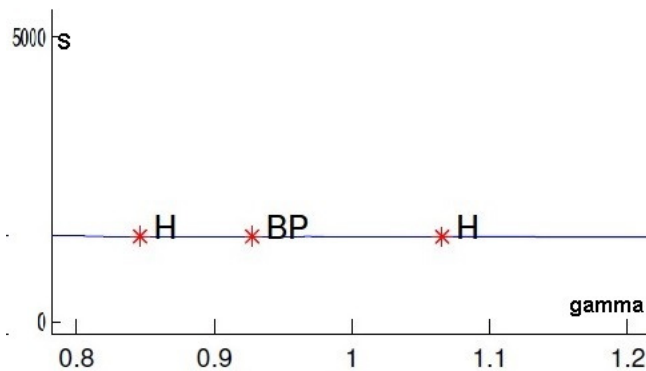


Figura 4-6.: Diagramas de Bifurcación variando γ : con: $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0,3$, $\beta_2 = 0,4$, $\lambda = 18,5$, $\delta = 0,7$, $\varphi = 0,1$, $\rho_1 = 0,025$, $\rho_2 = 0,08$, $K_1 = 12000$, $K_2 = 200000$, $K_3 = 700$, $m_1 = 0,8$, $m_2 = 0,4$, $q = 0,0003$, $\phi_1 = \phi_2 = 3$.

La figura 4-6 muestra tres cambios en la curva de equilibrios: una bifurcación de Hopf subcrítica, en $(S^*, F^*, L^*)_{approx} = (1495,880579, 951,79417, 1658,735049)$ y $(\gamma = approx 1,06581)$ con

$l_1 = 1,54965e - 6$, un BP y una silla neutra H la cual no tiene sentido biológico debido a que la población de peces toma un valor negativo.

Cuando es variado el parámetro de alimentación de la población, se presentan muchos cambios en las diferentes curvas de equilibrio, de las cuales muy pocas tienen sentido biológico, por tanto, no son incluidas en este documento.

Cabe destacar que estos no son los únicos diagramas de bifurcación que se pueden presentar en el modelo con efecto Alleé, las demás se dejan como trabajo posterior.

Conclusiones

5.1. Conclusiones

En este documento se presentó la modelación, el estudio dinámico y un análisis bifurcacional de dos modelos bioeconómicos de interacción entre tres actividades del sector primario: la agricultura, la silvicultura y la pesca. El primer modelo se presentó sin incluir ningún tipo de efecto Alleé sobre las poblaciones y el segundo modelo si consideró el efecto Alleé pero únicamente para la población de árboles; los modelos presentados son del tipo determinista y presentan la evolución dinámica de tres poblaciones: población de árboles (S), población de peces (F) y población humana (L).

Para destacar, primero, analizar modelos bioeconómicos es un tema de mucho interés, así como también es un tema que presenta diferentes niveles de complejidad, dependiendo del tipo de estudio que se quiera realizar y de la cantidad de variables de estado y parámetros que se consideren, eso se pudo evidenciar al trabajar dos modelos similares pero que en niveles de complejidad si presentan diferencias, esta afirmación se comprueba al observar los variados estudios realizados en torno principalmente a la pesca, y a la sostenibilidad como se ve en las referencias de este documento.

Este documento presentó en principio la deducción del modelo y los supuestos que se tuvieron en cuenta para seleccionar los diferentes parámetros y para estructurar de forma adecuada el modelo, haciendo mucho énfasis en lo descrito por D'Alessandro [7], principalmente para la evolución de la población humana y en artículos del profesor Kunal Chakraborty [3, 4, 5, 24]. También se consideró como modelo de respuesta funcional tanto de la explotación de los recursos renovables, como de la pesca la respuesta tipo Holling I, la cual es poco frecuente en estudios dinámicos.

Al buscar de manera analítica los diferentes puntos de equilibrio que poseen los dos modelos, se encontró que para el modelo sin efecto Alleé existen 8 puntos de equilibrio, de los cuales 4 equilibrios son hallados en el caso en el cual la población humana L es cero, es decir, el

caso en el cual no hay población humana; estos equilibrios son también llamados equilibrios coordenados. Para el modelo con efecto Alleé se presentan 10 puntos de equilibrio, de los cuales 6 son equilibrios coordenados y en cuanto a la estabilidad local de cada uno de estos puntos podemos decir que: los modelos presentan inestabilidad tipo silla para el equilibrio $(0, 0, 0)$ donde es inestable en dirección a S y F y estable en dirección a L para el modelo sin efecto Alleé, pero cuando se considera el efecto Alleé el punto se convierte en estable en dirección a S, este punto es considerado el punto de colapso bioeconómico, porque las tres poblaciones desaparecen.

El equilibrio $(0, K_2, 0)$ en el modelo sin efecto Alleé es inestable tipo silla, mientras que para el modelo con efecto Alleé el equilibrio es estable numéricamente, este es el caso donde sobrevive la población de peces y crece hasta alcanzar el máximo que el medio le permite debido a la ausencia de población humana, uno de los valores propios de este equilibrio presenta un indicio de posibles valores de bifurcación tipo Fold para el caso con efecto Alleé. Cabe decir que para el modelo con efecto Alleé se presenta sostenibilidad.

Los demás 6 puntos comunes que poseen los dos modelos presentan en ambas circunstancias la misma estabilidad en uno u otro caso. Los puntos donde sólo la población de bosque es cero $S = 0$ o sólo la población de peces es cero $F = 0$ o ninguna población es cero, fueron puntos cuya estabilidad se probó de manera numérica debido a la complejidad de las ecuaciones resultantes para estos casos o de la dependencia de los valores propios de muchos parámetros, cuando ocurren estos casos para los dos modelos son equilibrios estables numéricamente. El equilibrio $(0, 0, C_0)$ con $C_0 \neq 0$ fue encontrado de manera analítica para ambos modelos y al estudiar su estabilidad de manera numérica resultó ser un equilibrio estable, entre el modelo sin efecto Alleé y el modelo con efecto Alleé el valor propio asociado a S cambio de no poderse definir analíticamente a ser negativo en el caso con efecto Alleé.

Los dos equilibrios que surgieron a partir del efecto Alleé son inestables y ambos se presentan cuando la población de árboles alcanza el mínimo necesario que necesita para subsistir.

En cuanto a sostenibilidad, se presenta sólo biológica o económica para algunos puntos de equilibrio, tal es el caso de los puntos $(K_1, 0, 0)$, $(K_3, 0, 0)$, $(0, K_2, 0)$, $(0, 0, C)$, $(K_1, K_2, 0)$, $(K_3, K_2, 0)$, los demás puntos de equilibrio se consideran, desde el punto de vista bioeconómico, no óptimos pero si con un grado bajo de sostenibilidad, el caso que se busca biológica y económicamente iguales es el caso sostenible por excelencia y este se da cuando ninguna de las poblaciones es cero, y este se puede ver en el equilibrio del tipo (A_3, b_3, C_3) en el cual ninguna población se hace cero, este punto resultó ser estable, según el análisis numérico realizado al analizar su estabilidad.

El tema de las bifurcaciones fue tratado de manera numérica con el paquete matcont de

MATLAB, realizando curvas de equilibrio y observando los cambios que se presentaron. Hablando sobre el modelo sin efecto Alleé, se presentaron dos diagramas en los cuales no se surgieron bifurcaciones propiamente, lo que si se generó fue cambios en los valores propios asociados al sistema cerca a los *equi.*, en los diagramas se observa únicamente *BP* intersecciones de ramas de equilibrio y *H* referentes a sillas neutras, sillas hiperbólicas donde los valores propios suman cero.

Quedó pendiente para este modelo sin efecto Alleé variar el parámetro γ o K_2 cerca al *equi.* $(K_1, K_2, 0)$, donde posiblemente surjan bifurcaciones, en este documento no se realizaron por problemas de convergencia con *matcont*.

Para el modelo con efecto Alleé existe una gran riqueza bifurcacional, la cual fue encontrada principalmente al variar el parámetro δ parámetro de producción de la tierra, en este caso se obtuvieron tres bifurcaciones dos *LP Fold* una sin sentido biológico, una Hopf de la cual se desprendió un ciclo límite estable, además cuando se varió el factor de personas dedicadas a cuidar del bosque o la silvicultura β_1 y allí se obtuvieron intersecciones de ramas de equilibrio y bifurcaciones Hopf supercríticas y subcríticas, pero sin sentido biológico. Cuando se varía el factor de alimentación de la población humana γ se encuentran muchas variaciones en las curvas de equilibrio, pero pocas con sentido biológico.

Las diferencias en la estabilidad de ciertos puntos de equilibrio y en las bifurcaciones presentadas entre los dos modelos, prueba la hipótesis de otros autores que afirman que el efecto Alleé genera la aparición de nuevos puntos de equilibrio, el cambio de estabilidad de algunos puntos de equilibrio ya presentes para el modelo sin efecto Alleé y la riqueza bifurcacional que se obtiene cuando se incluye el efecto Alleé.[12, 19, 35, 38]

Capítulo 6

Publicaciones y Trabajos Futuros

6.1. Publicaciones

- Poster en el XX Congreso Colombiano de Matemáticas.

6.2. Trabajos Futuros

- Presentación de un artículo en revista nacional o internacional, sobre las bifurcaciones obtenidas en el estudio dinámico del modelo con efecto Alleé.
- Continuación de la formación académica a nivel doctoral, tomando una población más específica, hallando y calibrando el modelo que caracterice su dinámica y realizando todo el estudio dinámico correspondiente.
- Analizar el comportamiento dinámico de los modelos al incluir Delay.
- Estudiar el problema de control óptimo de la fuerza de labor dedicada a las tres actividades primarias: agricultura, silvicultura y pesca.
- Realizar un estudio dinámico incluyendo a cada modelo una adicional población de peces en área de reserva.
- Evaluar la optimización de la fuerza de trabajo dedicada a cada una de las tres actividades.

Apéndice

A

Anexo: Carta Aceptación Poster XX Congreso Colombiano de Matemáticas



Bogotá, 1 de Junio de 2015

Estimados Participantes:

JESÚS DAVID OSSA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE MANIZALES

GERARD OLIVAR TOST
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE MANIZALES

Cordial saludo,

Le informamos que su propuesta en el área de MATEMÁTICAS APLICADAS, bajo el título ESTUDIO DINÁMICO DE UN MODELO BIOECONÓMICO DE INTERACCIÓN ENTRE AGRICULTURA, SILVICULTURA Y PESCA., y modalidad Poster, ha sido aceptada para el *XX Congreso Colombiano de Matemáticas*.

El horario del congreso se publicará próximamente en la página del evento:
<http://www.xxcongresocolombianodematematicas.co/>

Atentamente,

A handwritten signature in black ink, appearing to read "C. Montenegro".

Carlos Montenegro
Presidente
Sociedad Colombiana de Matemáticas



Bibliografía

- [1] BAILER, A.J. ; REED, L.D. ; STAYNER, L.T.: Modeling fatal injury rates using Poisson regression: A case study of workers in agriculture, forestry, and fishing. En: *Journal of Safety Research* 28 (1997), Nr. 3, p. 177 – 186. – ISSN 0022–4375
- [2] BANK, The W.: FISH TO 2030, Prospects for Fisheries and Aquaculture / The World Bank. 2013. – Informe de Investigación
- [3] CHAKRABORTY, Kunal ; CHAKRABORTY, Milon ; KAR, T.K.: Bifurcation and control of a bioeconomic model of a prey–predator system with a time delay. En: *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* 5 (2011), Nr. 4, p. 613 – 625. – ISSN 1751–570X
- [4] CHAKRABORTY, Kunal ; DAS, Sanjoy ; KAR, T.K.: Optimal control of effort of a stage structured prey–predator fishery model with harvesting. En: *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 12 (2011), Nr. 6, p. 3452 – 3467. – ISSN 1468–1218
- [5] CHAKRABORTY, Kunal ; JANA, Soovoojeet ; KAR, T.K.: Global dynamics and bifurcation in a stage structured prey–predator fishery model with harvesting. En: *Applied Mathematics and Computation* 218 (2012), Nr. 18, p. 9271 – 9290. – ISSN 0096–3003
- [6] CHAPMAN, Larry J. ; HUSBERG, Bradley: Agriculture, Forestry, and Fishing Sector. En: *Journal of Safety Research* 39 (2008), Nr. 2, p. 171 – 173. – Prevention through Design. – ISSN 0022–4375
- [7] D’ALESSANDRO, Simone: Non-linear dynamics of population and natural resources: The emergence of different patterns of development. En: *Ecological Economics* 62 (2007), Nr. 3–4, p. 473 – 481. – ISSN 0921–8009
- [8] DANE: 3er Censo Nacional Agropecuario / Ministerio de Agricultura y Desarrollo Rural, Colombia. 2015. – Informe de Investigación
- [9] DE LARA, Luc.: *Sustainable Management of Natural Resources*. Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 2008

-
- [10] DE LARA, Michel. ; DOYEN, Luc.: Mathematics of Bio-Economics / Institut Henri Poincaré. 2013. – Informe de Investigación
- [11] DELGADO, G. P.: Grupos Étnicos se Quedan con 41.4 % de su cosecha. En: *La Republica, Periodico*. (2015), p. 7
- [12] DENNIS, Brian: Allee Effects: Population Growth, Critical Density, and the Chance of Extinction. En: *Natural Resource Modeling* 3 (1989), Nr. 4, p. 481–538
- [13] MINISTERIO DE AGRICULTURA Y DESARROLLO RURAL, Colombia.: Promoviendo Negocios para la Conquista de Mercados: Departamento del Magdalena / Ministerio de Agricultura y Desarrollo Rural., Colombia. 2014. – Informe de Investigación
- [14] DINERO, Revista: Colombia busca aumentar por ocho las exportaciones piscícolas. En: *Revista Dinero* (2015)
- [15] DZIAWGO, Danuta.: *Finance And Natural Environment*. DOM Organizatora, 2003
- [16] ESQUIVEL, María A.: La pesca y la Acuicultura en Colombia / Autoridad Nacional de Acuicultura y Pesca. 2014. – Informe de Investigación
- [17] EUROSTAT: Agriculture, Forestry and Fisheries Statistics Introduced. En: *Eurostat, Statistics Explained* (2016)
- [18] FRANCISCO, S.S.: *Laudato Si´*. Ediciones Paulinas, 2015
- [19] GALLEGO B., Lina M.: *Consecuencias del Efecto Alleé en el Modelo de Depredación de May-Holling-Tanner*, Universidad del Quindío, Tesis de Grado, 2004
- [20] GONZALEZ-OLIVARES, Eduardo: Una clase de modelos bioeconómicos continuos. En: *Investigaciones marinas* 26 (1998), 00, p. 109 – 117. – ISSN 0717–7178
- [21] GONZÁLEZ, Eduardo.: Modelación del Efecto Alleé. En: *Pontificia Universidad Católica de Valparaiso* (2004)
- [22] GONZÁLEZ-OLIVARES, Eduardo ; MENA-LORCA, Jaime ; ROJAS-PALMA, Alejandro ; FLORES, José D.: Dynamical complexities in the Leslie–Gower predator–prey model as consequences of the Allee effect on prey. En: *Applied Mathematical Modelling* 35 (2011), Nr. 1, p. 366 – 381. – ISSN 0307–904X
- [23] GRANADA D., Héctor A.: *Dinámica No Lineal de un Sistema Complejo Demográfico, Económico y Ambiental de Desarrollo Sostenible*, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, Tesis de Grado, 2014

- [24] KAR, T.K. ; MATSUDA, H.: A bioeconomic model of a single-species fishery with a marine reserve. En: *Journal of Environmental Management* 86 (2008), Nr. 1, p. 171 – 180. – ISSN 0301–4797
- [25] KUZNETSOV, Yuri A.: *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, 1998
- [26] LA REPUBLICA, Periodico.: PIJAO, el pueblo que no tiene prisa. En: *Eje Cafetero, Emprendedor e Innovador* (2015), p. 44
- [27] LV, Yunfei ; YUAN, Rong ; PEI, Yongzhen: A prey-predator model with harvesting for fishery resource with reserve area. En: *Applied Mathematical Modelling* 37 (2013), Nr. 5, p. 3048 – 3062. – ISSN 0307–904X
- [28] MANIZALES SOSTENIBLE, .: La Radiografía. En: *Revista Semana* (2013)
- [29] PAL, D. ; MAHAPATRA, G.S.: A bioeconomic modeling of two-prey and one-predator fishery model with optimal harvesting policy through hybridization approach. En: *Applied Mathematics and Computation* 242 (2014), Nr. 0, p. 748 – 763. – ISSN 0096–3003
- [30] PANJA, Prabir ; MONDAL, Shyamal K.: Stability analysis of coexistence of three species prey–predator model. En: *Nonlinear Dynamics* 81 (2015), Nr. 1-2, p. 373–382. – ISSN 0924–090X
- [31] PASSET, René.: La Bioeconomía es el Nuevo Paradigma de la Ciencia Económica. En: *Tendencias* 21 (2005)
- [32] PERKO, Lawrence: *Differential Equations and Dynamical Systems*. Third Edition. Springer-Verlag, 2001
- [33] RAMÍREZ C., Melissa.: Lanzan apuesta para sustituir la mitad de alimentos importados. En: *Periodico El Tiempo* (2015)
- [34] SAEVALDSSON, Hördur: Fisheries Impacts. Recuperado el 14 de marzo de 2016, desde: <http://www.fisheries.is/economy/fisheries-impacts/> / University of Akureyri. 2014. – Informe de Investigación
- [35] SCHEURING, István: Allee Effect Increases the Dynamical Stability of Populations. En: *Journal of Theoretical Biology* 199 (1999), Nr. 4, p. 407 – 414. – ISSN 0022–5193
- [36] SIMONIT, Silvio. ; PERRINGS, Charles.: Indirect Economic Indicators in Bio-Economic Fishery Models: Agricultural Price indicators and Fich Stocks in Lake Victoria. En: *ICES, Journal of Marine Science* 62 (2005)
- [37] STATISTICAL DIVISION, United N.: System of Environmental-Economic Accounting for Agriculture, Forestry and Fisheries / United Nations. 2014. – Informe de Investigación

-
- [38] STEPHENS, Philip A. ; SUTHERLAND, William J.: Consequences of the Allee effect for behaviour, ecology and conservation. En: *Trends in Ecology and Evolution* 14 (1999), Nr. 10, p. 401 – 405. – ISSN 0169–5347
- [39] TINTINAGO R., Paulo C.: *Dinámicas de Modelos Depredador Presa del Tipo Leslie-Gower con Respuesta Funcional Sigmoidea*, Universidad del Quindío, Tesis de Grado, 2012
- [40] WILEN, James E.: Chapter 2 Bioeconomics of renewable resource use. Elsevier, 1985. – ISSN 1573–4439, p. 61 – 124
- [41] WORKFORCE, Australian ; AGENCY, Productivity: Industry Snapshots 2013: Agriculture, Forestry and Fishing / Australian Government. 2013. – Informe de Investigación