



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
Facultad de Ciencias, Departamento de Física

## **Análisis de las diferencias para neutrinos de Majorana y Dirac en medios magnetizados**

Tesis para optar al título de Doctor en Física de la Universidad Nacional de Colombia

**Carlos Alberto Gomez Tarazona**

Director: Dr. Rodolfo Alexander Díaz Sanchez

Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia.

Bogotá D.C., 2015

# Análisis de las diferencias para neutrinos de Majorana y Dirac en medios magnetizados

Carlos Alberto Gomez Tarazona

tesis Doctoral:

Director:  
PhD. Rodolfo Alexander Diaz

Línea de Investigación:  
Teoría de Campos Cuánticos y Física de Partículas  
Grupo de Investigación:  
Grupo de Campos y Partículas

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Departamento de Física  
Bogotá D.C., Colombia  
2015

Este trabajo está dedicado a las personas que son mi soporte  
tanto afectivo, como espiritual, a quienes les debo y nunca podre pagar  
*A mis padres y a mi hija Maria Alejandra*

# Declaración

Me permito afirmar que he realizado la presente tesis de manera autónoma y con la única ayuda de los medios permitidos y no diferentes a los mencionados en la propia tesis. Todos los pasajes que se han tomado de manera textual o figurativa de textos publicados y no publicados, los he reconocido en el presente trabajo. Ninguna parte del presente trabajo se ha empleado en ningún otro tipo de tesis.

Bogotá, D.C., 11.12.2015

---

Carlos Alberto Gomez Tarazona

**Aprobación por parte de los Jurados**

---

Jurado 1

---

Jurado 2

---

Jurado 3

# Índice general

Resumen	8
<b>1. Introducción</b>	<b>10</b>
<b>2. El modelo estándar de partículas elementales</b>	<b>13</b>
2.1. Teoría estándar de las interacciones electrodébiles	14
2.2. El modelo de la interacción electrodébil de GWS	15
2.2.1. Densidad lagrangiana de fermiones	16
2.2.2. Densidad lagrangiana de Yang-Mills	18
2.2.3. Densidad lagrangiana de Higgs	18
2.2.4. Densidad lagrangiana de Yukawa	21
2.3. Conclusiones del capítulo	21
<b>3. Aspectos básicos de la física del neutrino</b>	<b>22</b>
3.1. Neutrinos de Dirac, Majorana y Weyl	23
3.2. Oscilaciones de neutrinos	24
3.2.1. Caso de dos sabores	25
3.2.2. Caso de tres sabores	27
3.3. Neutrinos masivos	28
3.3.1. Número de sabores de neutrinos ligeros	28
3.3.2. Término de masa para neutrinos de Dirac	29
3.3.3. Término de masa para neutrinos de Majorana	30
3.3.4. Término de masa para neutrinos de Dirac-Majorana	32
3.3.5. Mecanismo seesaw	36
3.3.6. Propuesta sobre la masa de los neutrinos	37
3.4. Simetrías discretas para neutrinos de Majorana y Dirac	38
3.4.1. Caso de Dirac	38
3.4.2. Caso de Majorana	39
3.5. Grados de Libertad para neutrinos de Majorana y Dirac	39
3.5.1. Caso de Dirac	40
3.5.2. Caso de Majorana	40
3.6. Decaimiento beta doble	41
3.6.1. Proceso en el que conserva número leptónico ( $2\nu\beta\beta$ )	41
3.6.2. Proceso que viola la conservación del número leptónico ( $0\nu\beta\beta$ )	41
3.7. Conclusiones del capítulo	42

<b>4. Factores de forma electromagnéticos</b>	<b>44</b>
4.1. Una aproximación general . . . . .	44
4.2. Factores de forma electromagnéticos para neutrinos . . . . .	49
4.3. Medidas experimentales para el $\mu_{\nu_a}$ . . . . .	52
4.4. Conclusiones del capítulo . . . . .	53
<b>5. Modelo con dos dobletes de Higgs</b>	<b>54</b>
5.1. Contribuciones del sector de Higgs en el modelo con dos dobletes . . . . .	55
5.1.1. El potencial de Higgs . . . . .	55
5.1.2. El sector cinético . . . . .	56
5.1.3. El Lagrangiano de Yukawa . . . . .	57
5.2. El 2HDM y la masa del neutrino . . . . .	64
5.3. Conclusiones del capítulo . . . . .	67
<b>6. Momento dipolar magnético en el vacío con 2HDM</b>	<b>69</b>
6.1. Análisis del diagrama con contribución de 2 Higgs cargados y 1 leptón en el vacío . . . . .	70
6.2. Análisis del diagrama con contribución de 2 leptones y 1 Higgs cargado en el vacío . . . . .	74
6.3. Suma de las correcciones para 2HDM en el vacío . . . . .	79
6.4. Resultados y análisis para el MDM en 2HDM . . . . .	82
6.5. Modelo 2HDM con neutrino específico . . . . .	85
6.6. Resultados y análisis para el MDM en 2HDM con neutrino específico . . . . .	87
6.7. Conclusiones del capítulo . . . . .	89
<b>7. Momento dipolar magnético con campos magnéticos</b>	<b>90</b>
7.1. Cálculo del MDM a partir de la auto energía . . . . .	90
7.2. MDM incluyendo 2HDM . . . . .	96
7.3. Resultados y análisis para el MDM en 2HDM con campo magnético . . . . .	100
7.4. Modelo 2HDM con neutrino específico . . . . .	103
7.5. Resultados y análisis para el MDM en 2HDM con neutrino específico y campo magnético	103
7.6. Conclusiones del capítulo . . . . .	105
<b>8. Conclusiones</b>	<b>106</b>
<b>A. Notaciones y convenciones</b>	<b>108</b>
A.1. Álgebra de Clifford . . . . .	110
A.2. Propiedades espinoriales e identidades de Gordon . . . . .	112
A.3. Propiedades de las transformaciones <b>C</b> , <b>P</b> y <b>T</b> . . . . .	114
A.3.1. Conjugación de carga . . . . .	114
A.3.2. Paridad . . . . .	115
A.3.3. Reversión temporal . . . . .	116
A.4. Productos $p_1 \cdot p_2$ , $k \cdot p_1$ y $k \cdot p_2$ . . . . .	116
<b>B. Cálculos intermedios para ME</b>	<b>117</b>
B.1. Densidad lagrangiana de fermiones . . . . .	117
B.2. Densidad lagrangiana de Yang-Mills . . . . .	119
B.3. Densidad lagrangiana de Higgs . . . . .	123

B.4. Densidad lagrangiana de Yukawa . . . . .	130
<b>C. Cálculos para aspectos básicos de la física del neutrino</b>	<b>132</b>
C.1. Conservación de sabor de número leptónico . . . . .	132
C.2. El caso de dos sabores . . . . .	132
C.3. Término de Masa de Dirac . . . . .	135
C.4. Término de masa de Majorana . . . . .	136
C.5. Término de masa de Majorana-Dirac . . . . .	138
C.6. Mecanismo seesaw . . . . .	140
C.6.1. Caso de dos generaciones . . . . .	140
C.6.2. Caso más general . . . . .	141
<b>D. Reglas de Feynman</b>	<b>143</b>
D.1. Reglas para la construcción de los diagramas . . . . .	143
D.2. Líneas externas . . . . .	144
D.3. Propagadores - líneas internas . . . . .	144
D.4. Vértices . . . . .	144
<b>E. Regularización dimensional</b>	<b>146</b>
E.1. Relaciones matemáticas . . . . .	146
E.1.1. Función Gamma . . . . .	146
E.1.2. Funciones Digamma y poligamma . . . . .	148
E.1.3. Otras relaciones útiles . . . . .	150
E.2. Parametrización de Feynman . . . . .	151
E.2.1. Función escalar de un punto . . . . .	157
E.2.2. Función escalar de dos puntos . . . . .	158
E.2.3. Función escalar de dos puntos con $\vec{B}$ . . . . .	160
E.2.4. Función escalar de tres puntos . . . . .	163
E.3. Funciones con un momento en el numerador . . . . .	165
E.3.1. Función escalar de dos puntos y $k^\mu$ en el numerador . . . . .	167
E.3.2. Función escalar de dos puntos, $\vec{B}$ y $k^\mu$ en el numerador . . . . .	168
E.4. Función escalar con dos momentos en el numerador . . . . .	169
E.4.1. Función escalar de dos puntos y $k^2$ en el numerador . . . . .	171
E.4.2. Función escalar de tres puntos y $k^\mu k^\nu$ en el numerador . . . . .	172
E.5. Resumen . . . . .	174
<b>F. Cálculos para términos que contienen <math>A, B</math></b>	<b>175</b>
F.1. Simplificación $2H1L$ . . . . .	181
F.2. Simplificación $2L1H$ . . . . .	183
<b>G. Solución de la ecuación de Dirac en un campo magnético externo</b>	<b>188</b>
G.1. Aproximación no relativista . . . . .	188
G.2. Momentos dipolares en el límite no relativista . . . . .	191



<b>H. Propagadores en campos magnéticos</b>	<b>194</b>
H.1. Propagador fermionico en un campo magnético externo . . . . .	194
H.2. Propagador escalar en un campo magnético externo . . . . .	205
H.3. Propagador bosónico en un campo magnético externo . . . . .	208
<b>I. Cálculos para 2HDM</b>	<b>209</b>
<b>J. Bibliografía</b>	<b>212</b>

# Índice de figuras

2.1.	<i>Forma del potencial escalar para <math>\mu^2 &gt; 0</math> (imagen a) y <math>\mu^2 &lt; 0</math> (imagen b), en el segundo caso tenemos un conjunto continuo de vacíos degenerados, correspondientes a las diferentes fases y conectados a través de excitaciones de un campo no masivo.</i>	19
3.1.	<i>Decaimiento beta <math>n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e</math>.</i>	22
3.2.	<i>La primera gráfica representa el escenario general para campos de mano derecha e izquierda con sus respectivos campos conjugados, la segunda gráfica representa el caso de un electrón, el cual solo es posible para partículas tipo Dirac y el último caso sería el de un neutrino, el cual tiene la posibilidad de ser una partícula de Majorana y/o de Dirac.</i>	32
3.3.	<i>Esquema de la jerarquía normal e invertida, para los autoestados de masa de los neutrinos.</i>	37
3.4.	<i>Esquema para la transición entre dos sabores de neutrinos para el caso de simetrías <math>T</math>, <math>CP</math> y <math>CPT</math> para el caso de neutrinos de Dirac</i>	39
3.5.	<i>Esquema para la transición entre dos sabores de neutrinos para el caso de simetrías <math>T</math>, <math>CP</math> y <math>CPT</math> para el caso de neutrinos de Majorana</i>	39
3.6.	<i>Esquema del decaimiento beta doble sin neutrinos.</i>	41
4.1.	<i>Vértice electromagnético efectivo para <math>f \rightarrow \bar{f}\gamma</math>.</i>	44
4.2.	<i>Expansión del vertice de interacción.</i>	48
4.3.	<i>Diagramas a un loop que dan lugar al MDM del neutrino en el ME, debidas a considerar neutrinos masivos.</i>	50
6.1.	<i>Diagramas a un loop que dan lugar a contribuciones adicionales al MDM del neutrino, debidas a considerar Higgs cargados (<math>H^\pm</math>) provenientes del 2HDM.</i>	69
6.2.	<i>Parametrización de los momentos para el diagrama de triángulo de 2H1L.</i>	70
6.3.	<i>Parametrización de los momentos para el diagrama de triángulo de 2L1H.</i>	74
6.4.	<i>Contribución al MDM para el neutrino electrónico proveniente del 2HDM con neutrino específico, barriendo masas del Higgs cargado entre (100 – 1000)Gev. Las líneas horizontales hacen referencia a los límites experimentales para el MDM del neutrino electrónico. La línea azul identifica el límite más bajo para el valor esperado en el vacío para <math>v_2</math> basado en la perturbatividad de los acoples de Yukawa.</i>	87
6.5.	<i>Contribución al MDM para el neutrino muónico proveniente del 2HDM con neutrino específico, barriendo masas del Higgs cargado entre (100 – 1000)Gev. Las líneas horizontales hacen referencia a los límites experimentales para el MDM del neutrino muónico. La línea azul identifica el límite más bajo para el valor esperado en el vacío para <math>v_2</math> basado en la perturbatividad de los acoples de Yukawa.</i>	88

6.6.	<i>Contribución al MDM para el neutrino tauónico proveniente del 2HDM con neutrino específico, barriendo masas del Higgs cargado entre (100–1000)Gev. Las líneas horizontales hacen referencia a los límites experimentales para el MDM del neutrino tauónico. La línea azul identifica el límite más bajo para el valor esperado en el vacío para <math>v_2</math> basado en la perturbatividad de los acoples de Yukawa.</i>	88
7.1.	<i>Diagrama de Feynman que representa la contribución a la auto energía debida al campo magnético, la doble línea corresponde al leptón cargado <math>l</math>, al bosón <math>W</math> y al escalar no físico cargado <math>\Phi</math> en un campo magnético externo. La flecha indica la dirección del flujo fermiónico.</i>	91
7.2.	<i>Diagrama de Feynman que representa la contribución a la auto energía debida al campo magnético, la doble línea corresponde al leptón cargado <math>l</math>, al bosón de Higgs cargado <math>H^\pm</math> en un campo magnético externo. La flecha indica la dirección del flujo fermiónico.</i>	97
A.1.	<i>Diagrama para describir las relaciones de los momentos del decaimiento <math>\nu \rightarrow \nu\gamma</math></i>	116
E.1.	Diagrama de tadpole	157
E.2.	Diagrama de polarización del vacío	159
E.3.	Diagrama de polarización en un campo magnético	161
E.4.	Diagrama de triangulo	163

# Índice de cuadros

2.1. <i>Materia fermiónica agrupada por familias para el ME.</i> . . . . .	13
2.2. <i>Multiplétes por familias fermiónicas.</i> . . . . .	14
2.3. <i>Números cuánticos de isoespín y hipercarga para leptones y quarks del ME.</i> . . . . .	15
4.1. <i>MDM del neutrino en el ME con nuestro anzats de masas.</i> . . . . .	51
5.1. <i>Coefficientes para los acoples de los términos <math>P_L</math> y <math>P_R</math> para 2HDM tipo I,II y III.</i> . . . .	67
5.2. <i>Coefficientes para los acoples de los terminos <math>P_L</math> y <math>P_R</math> para 2HDM con neutrino específico.</i>	67
5.3. <i>Coefficientes para los acoples de los términos <math>P_L</math> y <math>P_R</math> para 2HDM tipo I,II, III y neutrino específico para cada vértice de acople.</i> . . . . .	68
D.1. <i>Líneas externas</i> . . . . .	144
D.2. <i>Líneas internas o propagadores</i> . . . . .	144
D.3. <i>Vértices generales para fermiones y bosones</i> . . . . .	145

## Resumen

Los procesos elementales donde se involucran los neutrinos son el mejor ejemplo de interacciones débiles. Además, la dinámica de neutrinos -debido al descubrimiento de su oscilación- es uno de los casos demostrados experimentalmente de física más allá del modelo estándar de partículas, lo que implica que por lo menos uno de los tipos de neutrinos tenga masa diferente de cero. Ésto nos lleva a considerar casos de física más allá del modelo estandar y motiva la introducción de modelos en donde la masa de los neutrinos esté acorde con los límites impuestos por los análisis fenomenológicos de oscilación.

Otra característica importante es que los neutrinos no poseen carga eléctrica, hecho que los diferencia de los otros tipos de fermiones fundamentales. Ésta circunstancia abre la posibilidad a que los neutrinos no sean partículas de Dirac sino que también puedan ser partículas de Majorana, lo que implicaría que el neutrino es su propia antipartícula; fenómeno muy diferente al que se presenta en el caso de fermiones de Dirac donde el neutrino es diferente a su antineutrino. Sin embargo, el hecho de que el neutrino no tenga carga eléctrica no significa que no puedan tener interacción electromagnética, debido a que es posible deducir propiedades electromagnéticas para el neutrino a través de correcciones radiativas y, como toda partícula neutra, puede entonces exhibir momentos multipolares electromagnéticos.

Debido a que el momento magnético de neutrino es el factor que tiene las mejores perspectivas de detección, analizamos el momento magnético del neutrino como una forma de discriminación en la naturaleza de Dirac o Majorana del neutrino. Esto lo hacemos bajo extensiones al modelo estándar, como son los escenarios de modelo con dos dobletes de Higgs (2HDM) y 2HDM con neutrino específico, tanto en el vacío, como en presencia de campos magnéticos.

Éste último hecho resulta relevante dado que campos magnéticos intensos se pueden encontrar en algunos fenómenos astro físicos y este tipo de campos contribuirán en la auto energía del neutrino debido a las correcciones que se producen en los propagadores de las partículas virtuales, los cuales generan contribuciones adicionales al momento magnético que las que se tienen en el vacío.

Las contribuciones que obtenemos del momento magnético del neutrino tanto en el vacío, como en campos magnéticos, en algunos casos superan la contribución del modelo estandar haciendo de los escenarios 2HDM interesantes marcos de referencia en la búsqueda indirecta de nueva física.

## Abstract

Elementary processes which involve neutrinos are the best example of weak interactions. The dynamics of the neutrinos -due to the discovery of its oscillation- is one experimentally demonstrated physics case beyond the standard model of particle physics, which implies that at least one of the types of neutrinos has nonzero mass. These leads us to consider physics beyond the standard model and encourages the introduction of models in which the mass of neutrinos is consistent with the limits imposed by the phenomenological analysis of oscillation.

Another important feature is that neutrinos have no electric charge, a fact that differentiates them from other fundamental fermions. This circumstance opens the possibility that neutrinos are not Dirac particles but can also be Majorana particles, implying that the neutrino is the own antiparticle; very different phenomenon from the one that occurs in the case of the Dirac fermions, where the neutrino is different from its antineutrino. However, the fact that the neutrino has no electric charge does not mean that they may not have an electromagnetic interaction. It is possible to infer the neutrino electromagnetic properties through radiative corrections and, like all neutral particle, they can display multipole moments electromagnetic.

Because the neutrino magnetic moment is the factor that has the best prospects of detection, we analyze the magnetic moment of the neutrino as a form of discrimination like the Dirac or the Majorana neutrino. We do this on extensions to the standard model, as are the scenarios model with two Higgs doublets (2HDM) and 2HDM with a specific neutrino, both in the vacuum and in the presence of magnetic fields.

The latter fact is important because strong magnetic fields can be found in some astrophysical phenomena and this type of fields will contribute in the self-energy of the neutrino due to corrections that occur in the propagators of virtual particles, which generate additional contributions to the magnetic moment than those that have in the vacuum.

The results that we get from the magnetic moment of the neutrino both in a vacuum and in magnetic fields exceed in some cases the contribution of the standard model making the 2HDM interesting scenarios frameworks in the indirect search for new physics.

# Capítulo 1

## Introducción

En la física de partículas elementales son muy pocas las partículas neutras masivas, que son sus propias antipartículas; el ejemplo más significativo es el bosón  $Z$ , el cual es una de las partículas mediadoras de la interacción débil; otro caso sería el del bosón de Higgs  $h^0$  recientemente descubierto en el Large Hadron Collider (LHC) [1], [2] el cual también es su propia antipartícula. Para el caso del neutrino, que es una partícula neutra masiva, no es seguro que sea su propia antipartícula; sin embargo, si este hecho se presentara los neutrinos con esa característica serían partículas de Majorana. De ahí la importancia de entender claramente la física de los neutrinos, debido a que los neutrinos aparecen en diferentes escenarios como lo son: la física de partículas elementales, la cosmología, la astrofísica y la física nuclear, entre otras [3], [4], [5], [6], [7].

Existen muchos sistemas astrofísicos en los cuales los neutrinos están inmersos en campos magnéticos, como lo son las proto estrellas de neutrones, las cuales poseen campos magnéticos intensos entre  $(10^{12} - 10^{14}) G$ , estos campos han sido asociados a la superficie de supernovas y estrellas de neutrones, los valores de campo magnético en objetos estelares puede incluso llegar a valores  $B = 10^{16} G$  como en el caso de magneto estrellas[30]. Si adicionalmente tenemos en cuenta que los neutrinos participan en la dinámica de las supernovas desde su comienzo hasta su final, la relación de los neutrinos con el campo magnético de dichas estrellas es bastante importante; un ejemplo de esto es el artículo de H. Duan y Y-Z. Qian[33] en el que analizan la relación de campos magnéticos intensos y el enfriamiento de supernovas. De lo anterior, el estudio de lo que sucede para neutrinos de Majorana y neutrinos de Dirac en presencia de campos magnéticos, podría tener consecuencias no triviales para la física de partículas, debido a que fuertes campos magnéticos modifican en particular dos cantidades de especial interés: la auto energía del neutrino[32] y la función electromagnética del vértice[34]. El término de auto energía del neutrino determina la relación de dispersión de los neutrinos que se propagan en el medio magnetizado, mientras que la función electromagnética de vértice determina los acoplamientos relevantes en el cálculo de los procesos electromagnéticos que se producen en el medio con los neutrinos, tales como el decaimiento de plasmones y la radiación de Cherenkov, entre otros.

Así entonces, es posible que mediante observaciones fenomenológicas los resultados del análisis de neutrinos en campos magnéticos nos ayuden a solucionar la pregunta abierta sobre la naturaleza de los neutrinos como fermiones de Dirac o fermiones de Majorana.

Para analizar las diferencias entre neutrinos de Majorana y de Dirac en medios magnetizados, es conveniente comprender las diferencias ya existentes entre neutrinos de Majorana y neutrinos de Dirac; algunas de las referencias interesantes son las expuestas en los libros de Kayser[8], Zuber [9], en los cuales se establece un número de propiedades teóricas mediante las cuales se diferencian neutrinos de

Majorana y de neutrinos de Dirac. Otros artículos que exploran estas diferencias son [10], [11]. Una posible forma de diferenciación experimental es el decaimiento doble beta sin neutrinos ( $0\nu\beta\beta$ ); los trabajos realizados por el grupo HEIDELBERG-MOSCOW [12], [13], [14] identificaron una señal del decaimiento  $0\nu\beta\beta$ , lo cual probaría que el número leptónico no se conserva y podría establecer que el neutrino masivo es una partícula de Majorana. Sin embargo, miembros de la misma colaboración y otros experimentalistas cuestionan la veracidad de los datos.

Son también muy interesantes los aportes de Studenikin [15] en donde se analizan las interacciones de los neutrinos en presencia de campos magnéticos. Otro resultado interesante se presenta en el artículo de V.B. Semikoz[16] donde se explora la diferencia entre neutrinos de Majorana y neutrinos de Dirac por medio de la polarización de los neutrinos electrónicos cuando pasan el núcleo solar.

El análisis de las propiedades de los neutrinos en medios magnéticos ha sido también realizado por múltiples autores destacándose el trabajo de Bhattacharya [17] en 2003, en el cual se hace una corta pero completa revisión de los neutrinos, sus propiedades y su interacción con campos magnéticos, así como también el artículo de Sushan Konar y Subinoy Das[18], en el cual se analizan los procesos fotón-neutrino, los cuales se encuentran prohibidos en el vacío, pero que pueden producirse en medios térmicos y/o campos electromagnéticos externos, esto afectaría la propagación de los neutrinos en el plasma.

El análisis de los factores de forma electromagnético de los neutrinos al estar inmersos en campos magnéticos constantes, se realizó teniendo en cuenta dos aspectos en particular:

- Factores de forma electromagnéticos: sobre estos factores hay un número importante de artículos, entre ellos se encuentran el escrito por M. Nowakowski [19] en el cual se analizan los factores de forma para partículas de espín  $\frac{1}{2}$ . La carga eléctrica y el momento magnético para partículas neutras es analizado en el artículo de K. Bhattacharya[21] el cual aborda la interacción electromagnética de los neutrinos. En esta misma dirección están el artículo de Studenikin[22], en los cuales se presentan algunos resultados fenomenológicos y se hace una corta revisión de las propiedades generales de los neutrinos en general y de las propiedades electromagnéticas en los vértices para neutrinos de Majorana y neutrinos de Dirac. Así mismo está el artículo de Ruderman [23] en el cual se analiza información fenomenológica sobre la carga, el radio de carga y el momento magnético del neutrino. Por otra parte, P. Vogel y J. Engel[24] analizan la relación del momento dipolar magnético y el flujo detectado de neutrinos solares. Mientras en el artículo de José F. Nieves [25] se analizan las propiedades electromagnéticas de neutrinos de Majorana estableciéndose algunas diferencias con lo que se obtiene para el caso de neutrinos de Dirac.
- Contribuciones del campo magnético a la auto energía del neutrino: estas han sido analizadas en numerosos artículos; en particular tenemos el artículo de A. V. Kuznetsov[26] en el cual se analiza la contribución del campo magnético a la auto energía del neutrino y las relaciones de dispersión, así como en el artículo de A. B. García, K. Bhattacharya, S. Sahu[27] donde el medio magnetizado consiste en electrones, positrones, neutrinos y un campo magnético uniforme, lo cual cambia la forma de la auto energía del neutrino. Es también necesario considerar que para ciertos valores del campo magnético se debe incluir las contribuciones provenientes de los niveles de Landau para los fermiones intermedios, como lo propone A. V. Kuznetsov[28]. Usando estos niveles de Landau, E. Elizalde[29] cálculo las expresiones generales a un loop de los coeficientes de la auto energía del neutrino en presencia de un campo magnético, habiendo calculado anteriormente las relaciones de dispersión y los índices de refracción en un vacío magnetizado[30], bajo campos



magnéticos homogéneos los cambios que se presentan en el propagador han sido estudiados por G. McKeon [31], y un uso de estos propagadores bajo la inclusión de neutrinos de mano derecha es realizado por A. Erdas [32].

Este trabajo presenta la siguiente estructura: En el capítulo 2 hacemos un breve resumen del modelo estándar (ME) el cual es uno de los mayores logros de la física de altas energías pero el cual aún tiene algunos problemas, como lo es los neutrinos masivos. En el capítulo 3 analizamos las diferencias entre neutrinos de Majorana y de Dirac desde las simetrías discretas y hacemos el cálculo de los posibles valores de los valores de los autoestados de masa y de sabor en función de las restricciones experimentales actuales. En el capítulo 4 analizamos la diferencia de los factores de forma electromagnéticos para los neutrinos, fijando nuestra atención en el momento dipolar magnético (MDM) como la principal forma de diferenciación. En el capítulo 5 revisamos el modelo de dos dobletes de Higgs, enfocándonos en la contribución leptónica para los vértices. En el capítulo 6 calculamos las contribuciones al MDM del proceso  $\nu \rightarrow \gamma\nu$  en el vacío, por medio de correcciones radiativas a primer orden, obteniendo algunas contribuciones relevantes al compararlas con el ME. En el capítulo 7 calculamos las contribuciones al MDM mediante el cálculo de la autoenergía, debido a la presencia de campos magnéticos. En el capítulo 8 exponemos las conclusiones generales y proponemos unas perspectivas al futuro. En el capítulo 9 relacionamos la bibliografía que hemos utilizado durante el presente trabajo. Finalmente, en los capítulos restantes realizamos con gran detalle los cálculos intermedios de lo realizado a lo largo de los diferentes capítulos.

# Capítulo 2

## El modelo estándar de partículas elementales

El modelo estándar electrodébil (ME), elaborado por Glashow[36], Weinberg[37] y Salam[38] es una teoría gauge basada en el grupo de simetrías locales  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ , la cual describe las interacciones fuertes, débiles y electromagnéticas mediante el intercambio de los correspondientes campos de espín 1 (bosones de gauge): 8 gluones sin masa y 1 fotón sin masa para las interacciones fuertes y electromagnéticas, respectivamente, y 3 bosones masivos ( $W^\pm, Z$ ) para la interacción débil.

El contenido de materia fermiónica consiste en tres familias de quarks y tres familias de leptones, como se representa en la tabla 2.1.

Familias	Leptones			Quarks		
	Nombre	Símbolo	Carga	Nombre	Símbolo	Carga
1 <sup>a</sup>	Electrón	$e$	-1	Up	$u$	2/3
	Neutrino electrónico	$\nu_e$	0	Down	$d$	-1/3
2 <sup>a</sup>	Muon	$\mu$	-1	Charm	$c$	2/3
	Neutrino muónico	$\nu_\mu$	0	Strange	$s$	-1/3
3 <sup>a</sup>	Tau	$\tau$	-1	Top	$t$	2/3
	Neutrino tauónico	$\nu_\tau$	0	Bottom	$b$	-1/3

Cuadro 2.1: *Materia fermiónica agrupada por familias para el ME.*

Las partículas de cada familia tienen espín  $\frac{1}{2}$  y los quarks aparecen en tres posibles estados de color, a los cuales por convención se les asignan los colores rojo, verde y azul.

La materia estable del universo está compuesta por partículas de la primera generación, mientras que la materia generada por las familias restantes, en particular las de la tercera familia, es altamente inestable.

Los campos se agrupan en multipletes (representaciones irreducibles) bajo las transformaciones del grupo como se representa en la tabla 2.2. Los quarks son tripletes y los leptones son singletes bajo el grupo  $SU(3)_C$  de color. Bajo el grupo  $SU(2)_L$ , los componentes de mano izquierda (levógiros) se transforman de forma distinta que las de mano derecha (dextrógiros), como lo veremos más adelante.

Multipletes	$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$	1ª familia	2ª familia	3ª familia
Quarks	$(3, 2, -\frac{1}{6})$	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$
	$(3, 1, 2/3)$	$u_R$	$c_R$	$t_R$
	$(3, 1, -1/3)$	$d_R$	$s_R$	$b_R$
Leptones	$(1, 2, -\frac{1}{2})$	$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$
	$(1, 1, -1)$	$e_R$	$\mu_R$	$\tau_R$

Cuadro 2.2: Multipletes por familias fermiónicas.

## 2.1. Teoría estándar de las interacciones electrodébiles

En la actual teoría de campos, los campos de mano izquierda y de mano derecha son campos fundamentales (conocida como quiralidad), los cuales están dados por

$$\psi = \psi_L + \psi_R = P_L \psi + P_R \psi = \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \psi + \left( \frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \psi, \quad (2.1)$$

donde  $\psi$  es el campo de Dirac,  $\psi_{L,R}$  son autoestados de la transformación quiral  $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$  con autovalores de  $-1$  y  $1$  respectivamente y  $P_L$ ,  $P_R$  son los operadores de proyección quiral<sup>1</sup>. Así entonces la corriente débil puede ser escrita como

$$\bar{\psi} \gamma \psi. \quad (2.2)$$

El término de masa  $m \bar{\psi} \psi$  cambia la quiralidad y se puede escribir como

$$m (\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R). \quad (2.3)$$

Así el término de masa rompe la invariancia quiral de la interacción débil.

Para leptones tomamos los campos fundamentales de la primera generación de partículas, como la proyección de los campos quirales  $e_L$ ,  $\nu_L$  y  $e_R$ , donde  $e_R$  no aparece en la teoría  $V - A$ . La no existencia de  $\nu_R$  conduce a la masa nula del neutrino (2.3), esto es

$$\nu_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \nu = 0, \quad (2.4)$$

mientras que

$$e_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} e \quad (2.5)$$

y por lo tanto  $e_R$ , es un singlete de isospín.

También podemos definir la hipercarga débil  $Y$ , requiriendo que se cumpla la relación de Gell-Mann-Nishijima para la carga eléctrica

$$Q = T_3 + \frac{1}{2} Y, \quad (2.6)$$

donde  $Q$  es la carga eléctrica,  $T_3$  es la tercera componente de isospín y para que dicha relación sea satisfecha es necesario definir

$$Y_L = -1 \quad ; \quad Y_R = -2. \quad (2.7)$$

Tipo de fermión	$T$	$T_3$	$Y$	$Q$
$e_L, \mu_L, \tau_L$	1/2	-1/2	-1	-1
$e_R, \mu_R, \tau_R$	0	0	-2	-1
$\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	1/2	1/2	-1	0
$u_L, c_L, t_L$	1/2	1/2	1/3	2/3
$u_R, c_R, t_R$	0	0	4/3	2/3
$d_L, s_L, b_L$	1/2	-1/2	1/3	-1/3
$d_R, s_R, b_R$	0	0	-2/3	-1/3

Cuadro 2.3: *Números cuánticos de isoespín y hipercarga para leptones y quarks del ME.*

Los números cuánticos  $T$ ,  $T_3$ ,  $Y$  y  $Q$  para los fermiones, lo podemos resumir en la tabla 2.3.

Por construcción la proyección de isospín  $T_3$  y la hipercarga débil conmutan

$$[T_3, Y] = 0. \quad (2.8)$$

## 2.2. El modelo de la interacción electrodébil de GWS

El modelo de la interacción electrodébil de Glashow, Weinberg y Salam (GWS), se construye tomando como grupo gauge, el grupo de simetrías  $SU(2) \times U(1)$  el cual tiene dos constantes de acoplamiento  $g$  y  $g'$  y cuatro campos bosónicos de espín uno:  $W_\mu^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) y  $B_\mu$ .

Los fermiones fundamentales son divididos en dos grupos [53] cada uno compuesto por tres familias

$$\begin{array}{c} \text{Quarks} \\ \left( \begin{array}{c} u \\ d \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} c \\ s \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} t \\ b \end{array} \right) \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{c} \text{Leptones} \\ \left( \begin{array}{c} \nu_e \\ e \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \nu_\mu \\ \mu \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \nu_\tau \\ \tau \end{array} \right) \end{array}. \quad (2.9)$$

Los fermiones también pueden ser organizados como dobletes para los campos quirales izquierdos y singletes para los campos quirales derechos. Los campos de mano izquierda, escritos en términos de los autoestados de sabor serán

$$\psi^l = \left( \begin{array}{c} \nu_l \\ l \end{array} \right), \quad (2.10)$$

donde  $l = e, \mu, \tau$ . Mientras que para el sector de quarks

$$\psi^q = \left( \begin{array}{c} u^q \\ d^q \end{array} \right)_L, \quad (2.11)$$

donde  $u^q = (u, c, t)$  y  $d^q = (d, s, b)$ .

Es importante anotar que los autoestados de masa de los quarks no son idénticos a los autoestados de sabor y ellos están conectados por medio de una matriz de mezcla, llamada matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa.

La densidad lagrangiana del modelo GWS contiene términos cinemáticos y de interacción, pero no contiene términos de masa; las masas de las partículas se generan mediante el rompimiento espontáneo

<sup>1</sup>El operador  $P_L$  proyecta el espín de forma antiparalela a la dirección del momento, equivalente a referirse a helicidad izquierda y el operador  $P_R$  proyecta el espín de forma paralela a la dirección del momento, equivalente a referirse a helicidad derecha. Las propiedades de estos operadores son descritas en el apéndice A.2

de la simetría (Mecanismo de Higgs). La densidad lagrangiana la podemos escribir en términos de la densidad lagrangiana de fermiones ( $\mathcal{L}_F$ ), la densidad lagrangiana de Yang-Mills ( $\mathcal{L}_{Y-M}$ ), la densidad lagrangiana de Higgs ( $\mathcal{L}_H$ ) y la densidad lagrangiana de Yukawa ( $\mathcal{L}_Y$ )

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{Y-M} + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_Y. \quad (2.12)$$

### 2.2.1. Densidad lagrangiana de fermiones

Dado que la dinámica de los fermiones es descrita por medio de un lagrangiano tipo Dirac, podemos escribir la parte fermiónica como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= i\bar{\psi}_L \not{D} \psi_L + i\bar{\psi}_R \not{D}' \psi_R \\ &= \sum_l \left\{ \begin{aligned} &(\bar{v}_l \quad \bar{l})_L i\gamma^\mu D_\mu \begin{pmatrix} v_l \\ l \end{pmatrix}_L + \bar{l}_R i\gamma^\mu D'_\mu l_R + (\bar{u}^q \quad \bar{d}^q)_L i\gamma^\mu D_\mu \begin{pmatrix} u^q \\ d^q \end{pmatrix}_L \\ &+ \bar{u}_R^q i\gamma^\mu D'_\mu u_R^q + \bar{d}_R^q i\gamma^\mu D'_\mu d_R^q \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

La derivada covariante  $D_\mu$  y  $D'_\mu$  se define de forma tal que la densidad lagrangiana sea invariante bajo transformaciones gauge<sup>2</sup> del grupo  $SU(2) \times U(1)$ , lo cual es posible si se introducen tres campos vectoriales  $W = (W_1^\mu, W_2^\mu, W_3^\mu)$  asociados con los generadores de  $SU(2)$  de isospín débil, con una constante de acoplamiento  $g$  y un campo vectorial  $B_\mu$  asociado al generador del grupo  $U(1)_Y$  con una constante de acoplamiento  $g'$ . Las derivadas covariantes serán

$$D_\mu = \partial_\mu + igT \cdot W_\mu + ig' \frac{Y}{2} B_\mu \quad (2.14)$$

y

$$D'_\mu = \partial_\mu + ig' \frac{Y}{2} B_\mu. \quad (2.15)$$

Esto significa que  $D_\mu \psi_L$  y  $D'_\mu \psi_R$  transforman igual que  $\psi$  bajo una transformación gauge. La parte concerniente a  $g' B_\mu$  es abeliana<sup>3</sup>, mientras que el carácter no abeliano aparece en la parte concerniente a  $gW_\mu$ .  $T$  son los operadores de isospín, los cuales representan los generadores del grupo  $SU(2)_L$  y están directamente relacionados con las matrices de Pauli (A.3), cuya acción sobre los fermiones es

$$T\psi_L = \frac{\tau}{2}\psi_L \quad ; \quad T\psi_R = 0 \quad (2.16)$$

sin importar si son leptones o quarks.

Si ahora nos concentramos exclusivamente en la parte leptónica, en el sector izquierdo y teniendo que

$$Yl_L = -l_L, \quad (2.17)$$

<sup>2</sup>Las transformaciones gauge son locales, es decir, dependientes del punto espaciotemporal

<sup>3</sup>Un grupo  $G$  es abeliano si su conjunto de elementos  $(a, b, c, \dots)$  cumple las siguientes propiedades:

- a) Clausuratividad: si  $\forall a, b \in G$  se cumple que  $ab = c \in G$
- b) Asociatividad:  $(ab)c = a(bc)$
- c) Modulatividad: Existe un elemento identidad  $e \in G$  tal que  $\forall a \in G$  se cumple que  $ae = ea = a$
- d) Inverso:  $\forall a \in G \exists a^{-1}$  tal que  $aa^{-1} = a^{-1}a = e$

La conmutatividad no es una propiedad necesaria, si dicha propiedad se cumple se dice que el grupo es abeliano

los dobletes leptónicos de la ecuación (2.13) se pueden escribir como

$$(\bar{\nu}_l \quad \bar{l})_L i\gamma^\mu D_\mu \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L = (\bar{\nu}_l \quad \bar{l})_L i\gamma^\mu \left[ \partial_\mu + ig\frac{\tau}{2} \cdot W_\mu - \frac{i}{2}g'B_\mu \right] \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L. \quad (2.18a)$$

Debemos definir los campos masivos cargados  $W_\mu^\pm$ , en términos de los autoestados de masa como

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \quad (2.19)$$

el bosón neutro masivo

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (gW_\mu^3 - g'B_\mu) \quad (2.20)$$

y el bosón neutro sin masa

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g'W_\mu^3 + gB_\mu). \quad (2.21)$$

donde  $\alpha = \frac{g^2 - g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$  y  $e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$  como la carga eléctrica, la derivada covariante de la ecuación (2.14) toma la forma (ver apéndice B.1)

$$D_\mu = \begin{pmatrix} \partial_\mu + \frac{i}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}Z_\mu & \frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \\ \frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^- & \partial_\mu - \frac{i}{2}(\alpha Z_\mu + 2eA_\mu) \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Remplazando lo anterior en el término leptónico izquierdo de la ecuación (2.13), obtenemos

$$\begin{aligned} (\bar{\nu}_l \quad \bar{l})_L i\gamma^\mu D_\mu \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L &= \bar{\nu}_l i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_l - \bar{\nu}_l \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}\gamma^\mu Z_\mu \nu_l - \bar{\nu}_l \gamma^\mu \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+ l + \bar{l} i\gamma^\mu \partial_\mu l \\ &\quad + \bar{l} \gamma^\mu \frac{1}{2}\alpha Z_\mu l - \bar{l} \gamma^\mu i e A_\mu l - \bar{l} \gamma^\mu \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^- \nu_l. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Mientras que para la parte leptónica derecha, si tenemos en cuenta que

$$T\psi_R = 0 \quad ; \quad Yl_R = -2l_R \quad (2.24)$$

y reescribiendo  $B_\mu$  como (B.3), podemos escribir el singlete fermiónico derecho de (2.13) como

$$\bar{l}_R i\gamma^\mu D'_\mu l_R = \bar{l}_R i\gamma^\mu \left( \partial_\mu - ig'\frac{Y}{2}B_\mu \right) l_R = i\bar{l}_R \gamma^\mu \partial_\mu l_R + e\bar{l}_R \gamma^\mu A_\mu l_R - \frac{g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{l}_R \gamma^\mu Z_\mu l_R, \quad (2.25)$$

teniendo en cuenta las relaciones para los operadores de proyección quiral descritos en el apéndice A.2 y remplazando estas en las ecuaciones (2.23) y (2.25) tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{lep} &= i\bar{\nu}_l \gamma^\mu \partial_\mu \nu_l - \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}\bar{\nu}_l \gamma^\mu Z_\mu \nu_l - \frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_l \gamma^\mu W_\mu^+ l + i\bar{l} \gamma^\mu \partial_\mu l + \frac{1}{2}\alpha\bar{l} \gamma^\mu Z_\mu l \\ &\quad - i e \bar{l} \gamma^\mu A_\mu l - \frac{g}{\sqrt{2}}\bar{l} \gamma^\mu W_\mu^- \nu_l + i\bar{l}_R \gamma^\mu \partial_\mu l_R + e \bar{l}_R \gamma^\mu A_\mu l_R - \frac{g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{l}_R \gamma^\mu Z_\mu l_R \end{aligned} \quad (2.26)$$

La ecuación anterior solo determina el acople de los bosones gauge a los campos de materia, dado que los campos fermiónicos son no masivos, debido a que no hay interacciones que rompan la simetría quiral. Otro punto interesante, es la aparición de corrientes débiles neutras, las cuales están mediadas por el bosón neutro  $Z_\mu$ , estas involucran términos antineutrino-neutrino y antileptón-leptón. Así como también interacciones antileptón-leptón mediadas por el campo fotónico  $A_\mu$ .

### 2.2.2. Densidad lagrangiana de Yang-Mills

La densidad lagrangiana de Yang-Mills o de los bosones gauge corresponde al término cinético de los bosones gauge, los cuales aparecen al exigir la invariancia local de la teoría bajo el grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , esta densidad la podemos escribir como

$$\mathcal{L}_{Y-M} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}, \quad (2.27)$$

donde

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + gf_{ijk}W_\mu^j W_\nu^k = W_{\mu\nu}^i + g\varepsilon_{ijk}W_\mu^j W_\nu^k, \quad (2.28)$$

siendo  $f_{ijk}$  las constantes de estructura del grupo  $SU(N)$ , resultantes del carácter no abeliano de la teoría<sup>4</sup>,  $\varepsilon_{ijk}$  es el tensor de Levi-Civita<sup>5</sup> y

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (2.29)$$

Así entonces, reemplazando lo anterior en (2.27) obtenemos (cálculos detallados en el apéndice B.2)

$$\mathcal{L}_{Y-M} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{2}gW_{\mu\nu}^i \varepsilon^{ijk}W_j^\mu W_k^\nu - \frac{1}{4}g^2 \varepsilon_{ijk}W_\mu^j W_\nu^k \varepsilon^{ijk}W_j^\mu W_k^\nu. \quad (2.30)$$

De lo anterior tenemos que la parte cinética de la densidad de Yang-Mills en términos de los bosones gauge físicos después de hacer algunos cálculos será

$$\mathcal{L}_{Y-M}^{cin} = -\frac{1}{2}W_{\mu\nu}^+ W^{\mu\nu} - \frac{1}{4}A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}. \quad (2.31)$$

El tercer término de la ecuación (2.30) se refiere a interacciones trilineales entre los bosones gauge y sus derivadas (cálculos detallados en el apéndice B.2) y el cuarto término se refiere a las interacciones tetralineales o cuárticas de los campos.

### 2.2.3. Densidad lagrangiana de Higgs

La teoría al ser renormalizable, implica que la densidad lagrangiana no tiene explícitamente términos de masa para los fermiones, ni para los bosones intermediarios<sup>6</sup> ya que de lo contrario éstos romperían explícitamente la simetría y harían a la teoría no renormalizable. En consecuencia es necesario dotar de masa a las partículas, para lo cual es indispensable implementar el mecanismo de ruptura espontánea de la simetría, el cual dote de masa a las partículas. Este mecanismo consiste en introducir un nuevo campo  $\Phi$  el cual interactúa con los bosones gauge  $W_\mu^\pm$ ,  $Z_\mu$  y  $A_\mu$  y cuya naturaleza la describe el siguiente lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H &= (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) \\ &= (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) - |\lambda| (\Phi^\dagger \Phi)^2, \end{aligned} \quad (2.32)$$

<sup>4</sup>Una consecuencia muy importante de la no abelianidad del grupo gauge es la generación de autointeracciones asociadas con los bosones gauge, estas aparecen cuando el término cinético de los bosones gauge (Lagrangiano de Yang-Mills) es introducido

<sup>5</sup>Donde el tensor de Levi-Civita está definido como  $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k) = (1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1) \text{ orden par} \\ -1 & (i, j, k) = (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3) \text{ orden impar} \\ 0 & i = j \text{ o } j = k \text{ o } i = k \text{ para índices repetidos} \end{cases}$

<sup>6</sup>Términos de la forma  $m\bar{\psi}\psi$  para el sector fermiónico y de la forma  $\frac{1}{2}m^2 B_\mu B^\mu$  para los bosones intermediarios.

donde  $D_\mu$  es la misma derivada covariante de (2.14),  $\mu^2$  es un parámetro arbitrario,  $\lambda$  es un factor perturbativo y  $\Phi$  es un doblete escalar de componentes complejas denominado campo de Higgs dado por

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 + i\phi_4 \\ H + i\phi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

el cual consta de cuatro campos reales: dos cargados y dos neutros.

Bajo los operadores de isoespín  $T$  y de hipercarga  $Y$ , el campo de Higgs  $\Phi$  se comporta como

$$T\Phi = \frac{\tau}{2}\Phi \quad ; \quad Y\Phi = \frac{1}{2}\Phi \quad (2.34)$$

El estado base del campo de Higgs se obtiene al calcular el valor del campo que minimiza el potencial

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \mu^2(\Phi^\dagger\Phi) + |\lambda|(\Phi^\dagger\Phi)^2. \quad (2.35)$$

La situación de interés físico se presenta cuando  $\mu^2 < 0$ , ya que para  $\mu^2 > 0$  la densidad lagrangiana de Higgs describiría cuatro campos escalares masivos y el potencial no permitiría la implementación del mecanismo de Higgs (figura 2.1a), mientras que si suponemos que  $\mu^2 < 0$  tenemos un escenario más importante (figura 2.1b).

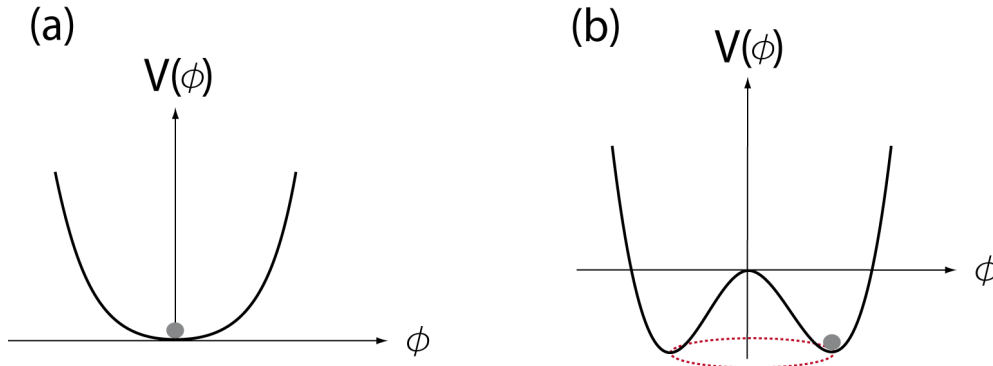


Figura 2.1: Forma del potencial escalar para  $\mu^2 > 0$  (imagen a) y  $\mu^2 < 0$  (imagen b), en el segundo caso tenemos un conjunto continuo de vacíos degenerados, correspondientes a las diferentes fases y conectados a través de excitaciones de un campo no masivo.

Es importante recalcar que el resultado de realizar el rompimiento espontáneo de la simetría depende del tipo de simetrías del Lagrangiano. Si el Lagrangiano es invariante bajo cierta simetría pero el estado de vacío no lo es, entonces dicha ruptura de la simetría lleva a la aparición de nuevas partículas como los bosones de Nambu-Goldstone. Sin embargo, si las simetrías del Lagrangiano son gauge local, los bosones de Nambu-Goldstone son absorbidos por los bosones gauge asociados a las simetrías rotas dotándolos de masa, lo cual se denomina mecanismo de Higgs-Kibble.

### Antes del rompimiento espontáneo de la simetría (ARES)

Para analizar la estructura de los términos del Lagrangiano de Higgs antes del rompimiento espontáneo de la simetría

$$\mathcal{L}_H^{ARES} = \left[ (D_\mu\Phi)^\dagger (D^\mu\Phi) - \mu^2 (\Phi^\dagger\Phi) - |\lambda| (\Phi^\dagger\Phi)^2 \right]_{ARES}, \quad (2.36)$$



es necesario tener en cuenta (2.22) y realizando de forma explícita la multiplicación con los términos  $W_\mu^\pm$ ,  $Z_\mu$  y  $A_\mu$ , obtenemos los términos cinéticos para las componentes de  $\Phi$ , así como los términos de interacción entre ellos y con los bosones gauge físicos de la teoría, los cuales hacen parte de la fase no rota. Por comodidad en la lectura, los términos antes del rompimiento espontáneo de la simetría se calculan en el anexo (B.3)

### Después del rompimiento espontáneo de la simetría (DRES)

Con la implementación del mecanismo de Higgs, la simetría electrodébil es espontáneamente rota a través del esquema  $SU(2) \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$ , ya que el estado de la teoría es degenerado y debido a que este debe de ser univaluado, debemos escoger de forma arbitraria uno de los infinitos estados de vacío distinto de cero. En particular podemos escoger

$$\langle H \rangle_0 = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} = v \quad (2.37)$$

donde  $v$  es una constante que minimiza el potencial escalar, de tal forma que una de las componentes del doblete toma un valor esperado en el vacío diferente de cero

$$\langle \Phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} \langle \phi^+ \rangle_0 \\ \langle \phi^0 \rangle_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \langle \phi_3 \rangle_0 + i \langle \phi_4 \rangle_0 \\ \langle H \rangle_0 + i \langle \phi_2 \rangle_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Debido a la necesidad de hacer una teoría de perturbaciones, el campo  $\Phi$  se redefine alrededor de un estado fundamental, a través de una translación a lo largo del eje real con respecto al valor esperado  $\langle H \rangle_0$

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \langle \Phi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 + i\phi_4 \\ H + i\phi_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\phi^+ \\ H - v + i\phi_2 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

donde hemos definido  $\phi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_3 \pm i\phi_4)$ .

El nuevo estado base corresponde al estado de vacío del campo  $\Phi'$ , si remplazamos este estado en la ecuación (2.32) se obtiene la ruptura espontánea de la simetría, siendo la simetría  $U(1)_{em}$  del electromagnetismo la simetría remanente. Así entonces, al implementar el rompimiento espontáneo de la simetría obtenemos los mismos términos de las ecuaciones (B.14) y (B.15). Teniendo en cuenta que para este caso debemos cambiar  $H \rightarrow H - v$

$$v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{|\lambda|}}, \quad (2.40)$$

entonces aparecen términos de masa tanto para los bosones gauge débiles, como también para el bosón de Higgs, con lo cual, después del rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil, los bosones de Goldstone no aparecen como partículas reales y por lo tanto, los bosones  $W_\mu^\pm$ ,  $Z_\mu$  y  $H$  son partículas físicas con masas dadas por

$$\begin{aligned} M_W &= \frac{gv}{2}, \\ M_Z &= \frac{v}{2} \sqrt{g^2 + g'^2}, \\ M_H &= \sqrt{2\lambda}v. \end{aligned}$$

El cálculo para la obtención de los términos anteriores se realiza en el anexo (B.3).

### 2.2.4. Densidad lagrangiana de Yukawa

Para dotar de masa a los fermiones podríamos partir de un término de la forma

$$\mathcal{L}_{leptones} = -m\bar{\psi}\psi = -m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L),$$

pero un término como este, no está permitido porque rompe explícitamente la simetría gauge. Sin embargo, dado que ya hemos introducido un doble escalar adicional  $\Phi$  en el modelo, podemos escribir un acoplamiento fermión-escalar el cual es invariante gauge. Esta densidad lagrangiana de Yukawa se puede separar en dos partes, una para el sector leptónico y otra para el sector de quarks. Siendo la de nuestro interés la que describe el sector leptónico

$$\mathcal{L}_{leptones} = \sum_l \left\{ g_l (\bar{\nu}_l \ \bar{l})_L \Phi l_R + g_l^* \bar{l}_R \Phi^\dagger \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L \right\}, \quad (2.41)$$

donde  $g_l$  es la constante de Yukawa.

Al implementar el rompimiento espontáneo de la simetría, mediante el cambio  $H \rightarrow H - v$  obtenemos

$$\mathcal{L}_{leptones}^{DRES} = \mathcal{L}_{leptones}^{ARES} - g_l \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{l} l, \quad (2.42)$$

surge entonces un término de interacción entre leptones y el bosón de Higgs, junto con un término de masa para leptones cargados dado por

$$M_{em} = g_l \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (2.43)$$

donde  $v$  es el valor esperado del campo de Higgs en el vacío.

## 2.3. Conclusiones del capítulo

El modelo estándar de partículas es uno de los mayores logros de la física de altas energías. Los datos procedentes de aceleradores han verificado muchas de sus predicciones con una alta precisión. Sin embargo, tiene un alto número de parámetros a determinar mediante la experimentación, como lo son la masa de los leptones cargados y los quarks (9), las constantes de acople de la teoría electrodébil y de la cromodinámica cuántica (3), los parámetros de la matriz CKM (4) y las masas de los bosones (3), los cuales en total suman 18 parámetros a ser calculados. Aunque muchos de estos parámetros ya han sido medidos, aún existen incertidumbres en algunos de ellos.

Sin embargo, el ME es conceptualmente incompleto debido a problemas que no resuelve, entre otros el asunto de los neutrinos masivos, la fuerte jerarquía de masas, la inclusión de la fuerza gravitacional, entre otras. Esto nos lleva a plantearnos escenarios más allá del ME, que permitan resolver estos problemas. Nosotros nos centraremos en el escenario de física más allá del ME proveniente de un modelo con dos dobletes de Higgs y su contribución al momento magnético de neutrinos masivos.

# Capítulo 3

## Aspectos básicos de la física del neutrino

La postulación de la existencia del neutrino se debe al físico Wolfgang Pauli en 1930, como una explicación al espectro continuo que acompaña el decaimiento beta. Para ese momento dicho proceso parecía violar la conservación de la energía y el momento angular. Así entonces, el neutrino fue la forma de salvar la ley de conservación de la energía diciendo que esta nueva partícula no tenía carga eléctrica, una masa muy pequeña (0,01 de la masa del protón) y tendría espín de valor  $\frac{1}{2}$  para respetar las reglas de adición del momento angular.

Pauli adicionalmente argumentó que el momento magnético no era mayor a 0,02 veces el magnetón de Bohr y que el poder de penetración sería 10 veces más grande que el de los rayos gamma [20]. En 1934, Enrico Fermi formuló la teoría de la interacción débil para describir el proceso

$$\mathcal{H} = g (\bar{\psi}_p \Gamma \psi_n) (\bar{\psi}_e \Gamma \psi_\nu) + h.c. \quad (3.1)$$

donde  $\psi_p$ ,  $\psi_n$ ,  $\psi_e$  y  $\psi_\nu$  denotan los campos de protón, neutrón, electrón y neutrino respectivamente [35].

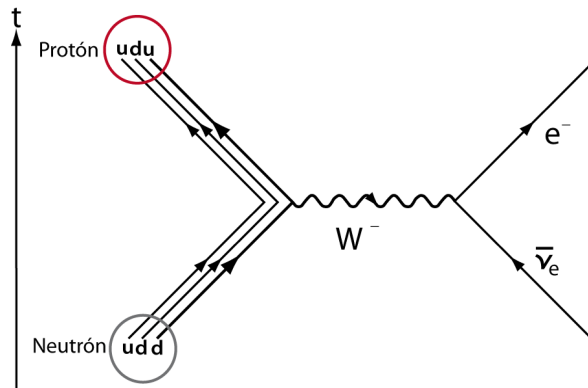


Figura 3.1: Decaimiento beta  $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ .

La evidencia experimental llegó en 1956 cuando Reines y Cowan reportaron su observación en el experimento realizado en el reactor de la planta nuclear de Savannah River[39]. Posteriormente en el año 1962 Leon Lederman, Melvin Schwartz y Jack Steinberger detectaron por primera vez al neutrino muónico y finalmente en el año 2000 la Colaboración DONUT en Fermilab descubre el neutrino tauónico.

En el modelo estándar los neutrinos son partículas no masivas por construcción, esto fue motivado debido a que experimentalmente solo se tenían neutrinos de mano izquierda, con lo cual el modelo se construyó en ausencia de neutrinos de mano derecha, sin los cuales no es posible dotarlos de términos de masa.

Sin embargo, debido al fenómeno de oscilación de neutrinos, el cual fue propuesto por Pontecorvo en 1957, motivado por el fenómeno de oscilación de kaones neutros  $K^0 \rightleftharpoons \bar{K}^0$  [40], así como los trabajos de Z. Maki, M. Nakawata y S. Sakata en 1967[41] con el análisis de la suposición de  $\nu_e$  y  $\nu_\mu$  como estados mezclados de dos autoestados de masa y el trabajo de Pontecorvo en 1967 en el cual presentó un primer trabajo sobre la mezcla y oscilación de dos neutrinos y que fue completado más tarde por V.N. Gribov y el mismo Pontecorvo en 1969[42], permitieron que la teoría de la oscilación de neutrinos, fuese finalmente desarrollada entre 1975–76 por S. Eliezer, A.R. Swift, H. Fritzsch, P. Minkowski, S.M. Bilenky y B. Pontecorvo[43]. Tal teoría implicaba que los neutrinos tengan masa y por lo tanto necesariamente debemos contemplar física más allá del modelo estándar.

De análisis teóricos y resultados experimentales tenemos que la masa del neutrino es mucho más pequeña que la de los fermiones cargados  $m_{\nu_f} \ll m_f$  donde  $f = e, \mu, \tau$ . También sabemos que el neutrino no tiene carga eléctrica y por lo tanto no puede presentar acoples directos con fotones. De hecho en el modelo estándar electrodébil los neutrinos no tienen momento magnético anómalo, y la razón es debido a que el momento magnético anómalo proviene de la inversión de la quiralidad  $\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi F^{\mu\nu}$ , y los neutrinos no presentan tales interacciones debido a que no hay neutrinos de mano derecha en el modelo estándar. Los neutrinos por lo tanto no podrían interactuar con el campo magnético en el modelo estándar. Y entonces, no sería relevante analizar la relación de los neutrinos y los campos magnéticos. Sin embargo, la inclusión de neutrinos masivos nos lleva a física más allá del modelo estándar, con lo cual, las interacciones de los neutrinos con el campo magnético pueden ser reconsideradas, y la proyección quiral derecha puede ser incluida, en consecuencia el momento magnético anómalo del neutrino surge automáticamente cuando las correcciones cuánticas son tomadas en consideración [44], [45], [46].

De otro lado, si los neutrinos son partículas de Majorana [4],[5], lo cual implica que son sus propias antipartículas, estos neutrinos no pueden tener ningún tipo de momento magnético, debido a que al aplicar una simetría **CPT** los momentos magnéticos de partículas y antipartículas deben de ser iguales y opuestos. Sin embargo, aun en este caso pueden haber transiciones de momentos magnéticos, los cuales son los coeficientes de los operadores de la forma  $\bar{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2 F^{\mu\nu}$ , donde  $\psi_1$  y  $\psi_2$  denotan dos campos fermiónicos diferentes y que podrían indicar alguna pequeña interacción con el campo magnético, asociado con un cambio de sabor fermiónico.

### 3.1. Neutrinos de Dirac, Majorana y Weyl

Los quarks y los leptones cargados están descritos por campos de Dirac; si analizamos en particular el caso de los leptones cargados debido a nuestro interés particular, estos están descritos por cuatro espinores básicos. Dos de estos se pueden tomar como los estados de helicidad izquierda y los restantes como los de helicidad derecha. Donde los estados de helicidad izquierda y derecha del leptón cargado serían  $l_L$  y  $l_R$ , mientras que para la antipartícula tenemos los estados  $\bar{l}_L$  y  $\bar{l}_R$ .

Supongamos que el leptón cargado se mueve en la dirección del eje  $x$  con respecto a un sistema de referencia  $O$ , con su espín orientado en sentido contrario a su momento, de tal forma que tenemos un leptón cargado de helicidad izquierda  $l_L$ . Si ahora consideramos un observador en un sistema

de referencia  $O'$  el cual igualmente se mueve en dirección  $x$  pero con una velocidad mayor a la del observador en  $O$ , entonces el observador en  $O'$  observara, que el leptón cargado se mueve en la dirección de las  $x$  negativas y para él, tanto el espín y el momento son paralelos, lo cual equivale a decir que observa un leptón cargado de helicidad derecha. Sin embargo tenemos dos objetos de mano derecha  $l_R$  y  $\bar{l}_R$  y la pregunta que podríamos hacernos es ¿Cuál de los objetos es el que se está observando?. La respuesta en este caso es sencilla, ya que el estado  $\bar{l}_R$  tiene carga eléctrica opuesta a la del estado  $l_R$  y debido a que la carga eléctrica es una cantidad invariante Lorentz. Entonces mediante un boost a un sistema de referencia distinto, no podemos ver una carga distinta en una partícula y lo que el observador ve sería  $l_R$ .

Si ahora consideramos que la partícula es un neutrino masivo, su velocidad será menor que la velocidad de la luz, lo cual nos permite realizar el análisis anterior suponiendo un observador en un sistema de referencia  $O'$  más rápido que el neutrino. En este caso no podemos decir que el objeto es  $\bar{\nu}_R$  o  $\nu_R$  debido a que el neutrino no tiene carga. De observaciones experimentales sabemos que existen neutrinos izquierdos  $\nu_L$  y antineutrinos derechos  $\bar{\nu}_R$ . En consecuencia, si consideramos los neutrinos como partículas de Dirac, deberíamos introducir dos estados adicionales  $\nu_R$  y  $\bar{\nu}_L$  de tal forma que tenemos cuatro grados de libertad independientes, al igual que en el caso del leptón cargado.

Otra opción en el análisis anterior, es no postular estados adicionales debido a que ya se tiene un objeto de mano derecha. El único impedimento sería que al realizar esta consideración se esta violando del número leptónico; Sin embargo, el número leptónico(anexo C.1 ) no es una simetría global, es más una consecuencia de la dinámica y el contenido de campos del ME, por lo tanto podría ser violado. De tal manera que  $\nu_L$  y  $\nu_R$  podrían ser las proyecciones de mano derecha y izquierda del mismo campo fermiónico ( $\bar{\nu}_R = \nu_R$  ;  $\nu_L = \bar{\nu}_L$ ), lo cual nos lleva a postular que el neutrino pueda ser una partícula de Majorana y por ende su propia antipartícula.

Si suponemos que el neutrino solo tiene dos grados de libertad, podríamos llegar a pensar que es una partícula de Weyl. Sin embargo, debemos recordar que este tipo de partículas son no masivas, por lo tanto dicha opción no es viable debido a que los neutrinos son masivos.

### 3.2. Oscilaciones de neutrinos

Desde comienzos de los 70s se postularon cuatro ideas básicas para la oscilación de los neutrinos en el vacío [47]

1. Los neutrinos son partículas altamente relativistas.
2. Los neutrinos son producto de procesos de interacción débil, en los cuales tenemos leptones cargados ( $l = e, \mu, \tau$ ) y los cuales son descritos por estados de sabor como

$$|\nu_l\rangle = \sum_i U_{li} |\nu_i\rangle, \tag{3.2}$$

donde  $U$  es la matriz de mezcla de neutrinos,

$$|\nu_i\rangle = \sum_l U_{i\alpha}^\dagger |\nu_l\rangle.$$

Los estados de neutrinos masivos  $|\nu_i\rangle$  son autoestados de los campos  $\nu_i$  con masa  $m_i$ . Su energía  $E_i$  y momento  $p_i$  están relacionados mediante la relación de dispersión relativista

$$E_k^2 = p_k^2 + m_k^2. \tag{3.3}$$

Debido a que el fenómeno de oscilación es un proceso macroscópico entre la producción y la detección, solo se considera una dirección espacial a lo largo del camino de propagación del neutrino.

3. Los estados de neutrinos masivos  $\nu_i$  tienen el mismo momento  $p$  ( $p_i = p$ ) pero diferentes energías

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \approx p + \frac{1}{2} \frac{m_i^2}{p} = E + \frac{1}{2} \frac{m_i^2}{E}, \quad (3.4)$$

donde  $E = p$  es la energía de un neutrino sin masa y cuya aproximación es válida para neutrinos altamente relativistas

4. El tiempo  $t$  de propagación de los neutrinos desde la fuente hasta el detector es aproximadamente igual a la distancia  $L$  de la fuente al detector

$$\nu_{\text{neutrino}} \approx c \Rightarrow L = \nu_{\text{neutrino}} t \approx ct \approx t.$$

La matriz de mezcla  $U$  por definición es una matriz unitaria, para garantizar valores correctos en el cálculo de la probabilidad

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1, \quad (3.5)$$

siendo esta análoga a la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)<sup>1</sup>, para el sector de quarks. En el ME, los neutrinos son no masivos, en cuyo caso la matriz  $U$  es simplemente la matriz identidad. Por lo tanto, al introducir la matriz de mezcla, estamos suponiendo implícitamente que al menos uno de los neutrinos tiene masa no nula.

Sin pérdida de generalidad, podemos partir del análisis del caso de dos generaciones, a fin de explicar con mayor claridad las ideas teóricas involucradas en el proceso de oscilación y luego realizar la extrapolación al caso más realista el cual es el de tres generaciones[51].

### 3.2.1. Caso de dos sabores

Podemos escribir la matriz de mezcla para dos sabores como

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

donde los estados de sabor  $\nu_e$  y  $\nu_l$  en función de los autoestados de masa serán

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \cos \theta |\nu_1\rangle + \sin \theta |\nu_2\rangle, \\ |\nu_l\rangle &= -\sin \theta |\nu_1\rangle + \cos \theta |\nu_2\rangle. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Mientras que para los estados de masa

$$\begin{aligned} |\nu_1\rangle &= \cos \theta |\nu_e\rangle - \sin \theta |\nu_l\rangle, \\ |\nu_2\rangle &= \sin \theta |\nu_e\rangle + \cos \theta |\nu_l\rangle. \end{aligned} \quad (3.8)$$

---

<sup>1</sup>La matriz CKM es la matriz de mezcla para el sector de quarks y describe la probabilidad de transición entre un quark  $q$  y otro  $q'$ , donde la transición es proporcional a  $|V_{qq'}|^2$ . Es importante también aclarar que debido a la interacción débil, se presenta la transición entre distintos sabores de quarks, al igual que sucede en el cambio de sabor de los neutrinos. Así mismo, la interacción débil es la única interacción que viola las simetrías  $P$  y  $CP$ .

Dado que los autoestados físicos  $|\nu_i\rangle$  deben de satisfacer la ecuación de Schrödinger (ver cálculos anexo C.2 )

$$i \frac{d}{dt} |\nu_i\rangle = \mathcal{H} |\nu_i\rangle, \quad (3.9)$$

donde  $\mathcal{H}$  es el Hamiltoniano del sistema y está representado matricialmente por

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

en el cual,  $E_1$  y  $E_2$  son las energías de los autoestados de masa  $\nu_1$  y  $\nu_2$  respectivamente. Podemos escribir la ecuación de Schrödinger en términos de los autoestados de sabor

$$|\nu_i\rangle = U^\dagger |\nu_l\rangle. \quad (3.11)$$

La solución de la ecuación de Schrödinger (3.9) es

$$\nu_l(t) = e^{-i\mathcal{H}t} \nu_l = e^{-i\mathcal{H}t} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}_l, \quad (3.12)$$

donde  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son constantes que dependen de las condiciones iniciales, las cuales pueden ser determinadas conociendo la proporción inicial de los estados de sabor  $\nu_e$  con relación a los estados de sabor  $\nu_l$ .

Si utilizamos la condición inicial  $\nu_l(0) = |\nu_e\rangle$ , obtenemos la solución particular

$$|\nu_e(t)\rangle = e^{-it \frac{(E_2+E_1)}{2}} \left\{ \left[ \cos\left(\frac{\Delta E}{2}t\right) + i \cos 2\theta \sin\left(\frac{\Delta E}{2}t\right) \right] |\nu_e\rangle - i \sin 2\theta \sin\left(\frac{\Delta E}{2}t\right) |\nu_l\rangle \right\}, \quad (3.13)$$

donde  $\Delta E = E_2 - E_1$ . De la relación anterior podemos apreciar los efectos de mezcla, dado que inicialmente teníamos un estado de sabor puro  $|\nu_e\rangle$ , el cual evolucionó como una composición de estados.

Podemos ahora obtener las probabilidades de conversión  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_l}(t)$  o de supervivencia del neutrino  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t)$  como:

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_l}(t) = |\langle \nu_l | \nu_e(t) \rangle|^2 = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta E}{2} t \right) \quad (3.14)$$

y dado que las probabilidades están normalizadas  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) + P_{\nu_e \rightarrow \nu_l}(t) = 1$  podemos escribir

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta E}{2} t \right). \quad (3.15)$$

De lo anterior, podemos notar explícitamente que las oscilaciones solo ocurren si  $\theta \neq 0$ ,  $\Delta E \neq 0$  y la amplitud es máxima cuando  $\theta = \frac{\pi}{4}$  (mezclado máximamente).

Podemos obtener las soluciones no solamente en el tiempo, sino también en el espacio, para lo cual podemos reescribir el parámetro  $t$ . Dado que los neutrinos son partículas relativistas su masa debe de ser muy pequeña  $m_k \ll E_k$  para  $k = 1, 2$ , por lo tanto podemos intercambiar  $t$  por  $x$  sin pérdida de generalidad y los términos de oscilación pueden ser expresados como

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_l}(t) = |\langle \nu_l | \nu_e(t) \rangle|^2 = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \quad (3.16)$$

y

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \quad (3.17)$$

donde  $L$  se define como la longitud de oscilación.

### 3.2.2. Caso de tres sabores

Este es probablemente el escenario más realista a considerar. En principio es posible generalizar las formulas obtenidas en el caso de dos generaciones, para incluir los efectos de la tercera generación [4], lo que equivale a incluir el sabor restante

$$|\nu_l\rangle = \sum_i^3 U_{\alpha i} |\nu_i\rangle. \quad (3.18)$$

Para las tres generaciones de leptones, la matriz de mezcla la podemos escribir como

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

En el lado de la izquierdo tenemos campos de neutrinos que participan en la interacción débil, mientras que en el lado derecho tenemos la matriz  $U_{PMNS}$  (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata) y el vector de autoestados de masa. La matriz  $U_{PMNS}$  describe la probabilidad de que un neutrino de sabor  $\nu_l$  se encuentran en un estado propio de masa  $\nu_i$ . Estas probabilidades son proporcionales a  $|U_{\alpha i}|^2$ , la cual se escribe como

$$U_{PMNS} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & c_{13}s_{12} & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ -c_{23}s_{12} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta_{CP}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{-i\delta_{CP}} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & -c_{12}s_{23} - c_{23}s_{12}s_{13}e^{-i\delta_{CP}} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\alpha} \\ e^{i\beta} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

donde  $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$ ,  $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$  y tenemos una fase de violación **CP** ( $\delta_{CP}$ ) análoga a la que se tiene en el sector de quarks. Existen adicionalmente dos fases más asociadas a neutrinos de Majorana ( $\alpha, \beta$ ) las cuales en caso de considerar neutrinos de Dirac no son necesarias tenerlas en cuenta.

Tenemos varios aspectos interesantes para la matriz  $U_{PMNS}$ . Por ejemplo, los ángulos de mezcla de neutrinos ( $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ ) están directamente relacionados con los ángulos de mezcla de oscilaciones de neutrinos solares, atmosféricos y de reactores respectivamente. Sin embargo, después de varios años de trabajo experimental tienen una gran incertidumbre si los comparamos con los valores obtenidos experimentalmente para los ángulos de la matriz CKM. Así mismo, la forma de la matriz de mezcla no es única como el que mostramos en la ecuación (3.20), una versión diferente de esta es la propuesta por Kobayashi-Maskawa (KM)[55].

Algunos valores para los términos de la matriz  $U_{PMNS}$  como la descrita en la ecuación(3.20) son[54]

$$U_{PMNS} = \begin{pmatrix} 0,795 \rightarrow 0,846 & 0,513 \rightarrow 0,585 & 0,126 \rightarrow 0,178 \\ 0,205 \rightarrow 0,543 & 0,416 \rightarrow 0,730 & 0,579 \rightarrow 0,808 \\ 0,215 \rightarrow 0,548 & 0,409 \rightarrow 0,725 & 0,567 \rightarrow 0,800 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

o los propuestos bajo el esquema de Kobayashi-Maskawa[55] tiene los siguientes valores

$$U_{PMNS} = \begin{pmatrix} 0,822 & +0,010 & 0,547 & +0,016 & 0,155 \pm 0,008 \\ & -0,011 & & -0,015 & \\ 0,451 \pm 0,014 & 0,648 & +0,012 & 0,614 & +0,019 \\ & & -0,014 & & -0,017 \\ 0,347 & +0,016 & 0,529 & +0,015 & 0,774 & +0,013 \\ & -0,014 & & -0,014 & & -0,015 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$



### 3.3. Neutrinos masivos

Existen numerosas razones para dotar de masa a los neutrinos, una de ellas es la oscilación de neutrinos como lo acabamos de comentar, sin embargo existen algunas razones adicionales:

- La masa nula del fotón se debe a la simetría gauge conservada que gobierna la dinámica de la interacción electromagnética, pero dicha simetría no está presente para el caso de los neutrinos, por lo tanto es de esperar que el neutrino sea masivo.
- Muchos modelos de gran unificación predicen masa de los neutrinos, un ejemplo es supersimetría el cual predice neutrinos masivos a menos que se imponga simetría de número leptónico.

De otro lado una de las particularidades del modelo estándar, es que este contiene proyectores quirales derechos e izquierdos para todos los fermiones, excepto para los neutrinos[4]. Una forma de remediar tal situación consiste en adicionar campos neutros de mano derecha  $\nu_{\alpha R}$  correspondientes a cada leptón cargado  $\alpha = (e, \mu, \tau)$ , como otros campos de mano derecha. Se asume que estos son singletes de  $SU(2)_L$  y de la relación de Gell-Mann-Nishijima para la carga eléctrica

$$Q = T_3 + \frac{1}{2}Y, \quad (3.23)$$

tenemos que  $Y = 0$ , por lo tanto los campos  $\nu_{lR}$  son singletes del grupo gauge completo, lo cual implica que no tiene interacción con los bosones gauge.

#### 3.3.1. Número de sabores de neutrinos ligeros

El número de neutrinos ligeros puede ser calculado partiendo del ancho de decaimiento del bosón  $Z^0$  dado que los neutrinos ligeros se acoplan al  $Z^0$ , esto permite determinar el número de especies de neutrinos ligeros. Este valor fue determinado por LEP midiendo el ancho total de decaimiento  $\Gamma_Z$  de la resonancia  $Z^0$ , por lo tanto[9]

$$\Gamma_Z = \Gamma_{had} + \Gamma_{inv} + 3\Gamma_{lep} \quad (3.24)$$

donde  $\Gamma_{lep}$  representa el decaimiento en pares de leptones  $l^+l^-$ ,  $\Gamma_{had}$  el decaimiento en pares de quarks  $q\bar{q}$  y  $\Gamma_{inv} = N_\nu\Gamma_\nu$  donde  $N_\nu$  es el número de neutrinos a determinarse. Los diferentes anchos de decaimientos medidos por LEP[57] son:

$$\begin{aligned} \Gamma_Z &= (2,4952 \pm 0,0023) GeV, \\ \Gamma(z^0 \rightarrow u\bar{u}, c\bar{c}) &= \left( \frac{3}{2} - 4\sin^2\theta_W + \frac{16}{3}\sin^4\theta_W \right) \Gamma_0 = (0,2894 \pm 0,026) GeV, \\ \Gamma(z^0 \rightarrow d\bar{d}, s\bar{s}, b\bar{b}) &= \left( \frac{3}{2} - 2\sin^2\theta_W + \frac{4}{3}\sin^4\theta_W \right) \Gamma_0 = (0,3892 \pm 0,035) GeV, \\ \Gamma(z^0 \rightarrow e^+e^-, \mu^+\mu^-, \tau^+\tau^-) &= \left( \frac{1}{2} - 2\sin^2\theta_W + 4\sin^4\theta_W \right) \Gamma_0 = (83,984 \pm 0,086) MeV, \\ \Gamma(z^0 \rightarrow \nu\bar{\nu}) &= \frac{1}{2}\Gamma_0 = (167,22 \pm 0,22) MeV \end{aligned}$$

donde

$$\Gamma_0 = \frac{G_F m_Z^3}{6\sqrt{2}\pi}.$$

Por lo tanto despejando  $N_\nu$  de la ecuación (3.24) tenemos que

$$\begin{aligned}\Gamma_Z &= \Gamma_{had} + N_\nu \Gamma_\nu + 3\Gamma_{lep} \\ \Rightarrow N_\nu &= \frac{\Gamma_Z - \Gamma_{had} - 3\Gamma_{lep}}{\Gamma_\nu} = 2,9841 \pm 0,0083\end{aligned}$$

podemos ver entonces, que el valor experimental obtenido está bastante cercano a la idea de solo 3 familias leptónicas y por ende, solo tres sabores de neutrinos.

### 3.3.2. Término de masa para neutrinos de Dirac

Un hecho que podemos apreciar, es que la presencia de estos campos de mano derecha implican una nueva interacción gauge invariante en el sector de Yukawa, la cual la podemos escribir como

$$\mathcal{L}_{leptones-ext} = \sum_{l,l'} \left\{ g_l (\bar{\nu}_l \bar{l})_L \Phi l_R + g'_l (\bar{\nu}_l \bar{l})_L \Phi_C \nu_R + h.c. \right\} \quad (3.25)$$

donde  $l = e, \mu, \tau$ . Podemos observar de la ecuación anterior, que tenemos una nueva constante de acople  $g'_l$  y que

$$\Phi_C = i\tau_2 \Phi^* = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 - i\phi_4 \\ H - i\phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H - i\phi_2 \\ -\phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H - i\phi_2 \\ -\sqrt{2}\phi^- \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

#### Antes del rompimiento espontáneo de la simetría (ARES)

Dado que

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\phi^+ \\ H + i\phi_2 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

debemos resolver el término

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{leptones+\nu}^{ARES} &= \sum_l \left\{ g_l (\bar{\nu}_l \bar{l})_L \Phi l_R + g_l^* \bar{l}_R \Phi^\dagger \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L + g'_l (\bar{\nu}_l \bar{l})_L \Phi_C \nu_R + g_l'^* \bar{\nu}_R \Phi_C^\dagger \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L \right\} \quad (3.28) \\ &= \sum_l g_l \left\{ \bar{\nu}_l \phi^+ R l + \bar{l} \phi^- L \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} i\phi_2 \gamma^5 l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} H l \right\} \\ &\quad + \sum_l g'_l \left\{ -\bar{\nu}_l \phi^+ L l - \bar{l} \phi^- R \nu_l - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_l i\phi_2 \gamma^5 \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_l H \nu_l \right\}\end{aligned}$$

el cual se calcula en el anexo (C.3).

#### Después del rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil (DRES)

Al implementar el rompimiento espontáneo de la simetría, mediante el cambio  $H \rightarrow H - v$  obtenemos

$$\mathcal{L}_{leptones+\nu}^{DRES} = \mathcal{L}_{leptones+\nu}^{ARES} - \frac{v}{\sqrt{2}} \sum_l \{ g_l \bar{l} l + g'_l \bar{\nu}_l \nu_l \}. \quad (3.29)$$

La ecuación (3.29), incluye el término anteriormente calculado para el rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil para el sector de Yukawa sin contemplar neutrinos de mano derecha. Además aparece un término de masa para los neutrinos de Dirac, el cual de forma general lo podemos escribir como [4]

$$-\mathcal{L}_{Dirac\nu} = -\frac{v}{\sqrt{2}} \sum_{l, l'} g_{ll'} \bar{\nu}_{l_L} \nu_{l'_R} . \quad (3.30)$$

Podemos denotar

$$M_{ll'}^D = \frac{v}{\sqrt{2}} g_{ll'}$$

como matriz de masas, la cual en general no será diagonal, esto implica que los campos  $\nu_{l_L}$  y  $\nu_{l_R}$  no corresponden con las proyecciones quirales de los campos fermiónicos físicos. Para obtener los campos físicos es necesario calcular los autovectores de la matriz  $M_{ll'}^D$ , lo cual se puede hacer mediante una transformación biunitaria

$$U^\dagger M V = m .$$

donde  $m$  es una matriz diagonal, de tal forma que los nuevos estados esten definidos por

$$\begin{aligned} \nu_{l_L} &= \sum_{k=1}^3 U_{lk} \nu_{k_L} , \\ \nu_{l_R} &= \sum_{k=1}^3 V_{lk} \nu_{k_R} . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Por lo tanto el término de masa puede escribirse como

$$-\mathcal{L}_{Dirac\nu} = \sum_{k=1}^3 \bar{\nu}_{k_L} m_k \nu_{k_R} \quad (3.32)$$

donde  $m_k$  es el elemento  $k$ -ésimo de la matriz  $m$ . De la ecuación anterior tenemos que los campos  $\nu_k$  son campos con masas definidas  $m_k$  y son por lo tanto partículas físicas.

Un aspecto importante de resaltar es que los neutrinos  $\nu_{l_L}$  se denominan neutrinos activos, mientras que los neutrinos  $\nu_{l_R}$  se denominan neutrinos estériles, debido a que no aparecen en el término de la densidad lagrangiana del modelo estándar electrodébil.

Otra forma de escribir el lagrangiano de Dirac consiste en

$$-\mathcal{L}_{Dirac\nu} = m_D (\bar{\nu}_{k_L} \nu_{k_R} + \bar{\nu}_{k_R} \nu_{k_L}) \quad (3.33)$$

el cual es completamente equivalente a (3.32).

### 3.3.3. Término de masa para neutrinos de Majorana

Como lo habíamos comentado en la introducción de este capítulo, Ettore Majorana mostró que fermiones masivos neutros como el neutrino, pueden ser descritos por un espinor  $\psi(x)$  con solo dos componentes independientes, de tal forma que partícula y antipartícula serían idénticas; el cual sería el caso de los neutrinos de Majorana.

Podemos entonces suponer que  $\psi(x)$  está relacionada de alguna forma con  $\psi^*(x)$ . Sin embargo, si tratamos de imponer

$$\psi(x) = \psi^*(x) , \quad (3.34)$$

esta resulta errónea de forma general, debido a que una propiedad de las teorías relativistas es la covarianza de Lorentz. Lo cual significa que la ecuación anterior debe ser invariante bajo la transición de un sistema inercial de referencia a otro, y la ecuación anterior no lo es. (la demostración se encuentra en el anexo C.4).

Imponiendo la condición de Majorana

$$\psi(x) = \psi(x)^c \quad (3.35)$$

donde

$$\psi^c(x) = \mathbf{C}\bar{\psi}^T(x) = \mathbf{C}\gamma^0\psi^*(x)$$

esta relación se denominada operación conjugación de carga y  $\mathbf{C}$  la matriz de conjugación de carga (la demostración se encuentra en el anexo C.4).

La verdadera definición de un campo de Majorana es un poco más general y exige que

$$\psi(x) = e^{i\theta}\psi^c(x) \quad (3.36)$$

donde la fase  $e^{i\theta}$  siempre puede ser absorbida en la definición del campo fermiónico  $\psi(x)$ , con lo cual podemos escoger  $\theta = 0$  en conveniencia a la definición del campo fermiónico. Sin embargo, la libertad de la fase es conveniente en algunos casos.

Aplicando la condición de Majorana podemos escribir el espinor como

$$\psi = \psi_L + \psi_R = \psi_L^c + \psi_R^c.$$

Teniendo en cuenta las propiedades del anexo (A.3) tenemos que  $\psi_R = \psi_L^c$  y en consecuencia, la componente derecha del neutrino de Majorana no es independiente, debido a que es posible obtenerla a partir de la aplicación del operador conjugación de carga en la componente izquierda. Lo cual nos lleva a escribir el campo de Majorana como

$$\psi = \psi_L + \psi_L^c.$$

Por lo tanto el campo de Majorana solo depende de las componentes de  $\psi_L$ . En consecuencia el lagrangiano de masa de Majorana lo podemos escribir como

$$\mathcal{L}_{Majorana} = -\frac{1}{2}m_M \left( \bar{\psi}_L \psi_L^c + \bar{\psi}_L^c \psi_L \right),$$

lo cual nos permite escribir

$$-\mathcal{L}_{Majorana\nu} = \frac{1}{2}m_L \bar{\nu}_{k_L}^c \nu_{k_L} + \frac{1}{2}m_R \bar{\nu}_{k_R}^c \nu_{k_R}. \quad (3.37)$$

De lo anterior se tiene que

$$\nu_{l_L} = \sum_{k=1}^3 U_{lk} \nu_{k_L},$$

donde  $\nu_k$  es el campo de neutrinos de Majorana con masa  $m_k$ .

Los diferentes tipos de acoples para campos fermiónicos que hasta ahora hemos escrito, los podemos representar como

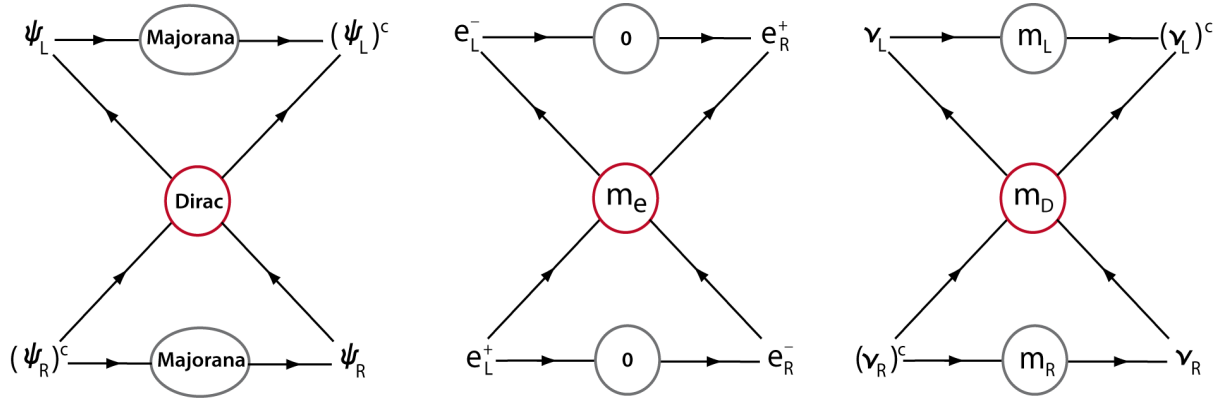


Figura 3.2: La primera gráfica representa el escenario general para campos de mano derecha e izquierda con sus respectivos campos conjugados, la segunda gráfica representa el caso de un electrón, el cual solo es posible para partículas tipo Dirac y el último caso sería el de un neutrino, el cual tiene la posibilidad de ser una partícula de Majorana y/o de Dirac.

### 3.3.4. Término de masa para neutrinos de Dirac-Majorana

Como se ha mencionado anteriormente el término de masa de Dirac conserva el número leptónico, mientras que los términos de masa de Majorana lo violan en dos unidades. Sin embargo, nada impide que ambos términos estén presentes en el lagrangiano y por lo tanto conformar el lagrangiano de masa como aparece en la figura 3.2. Para analizar lo anterior podemos hacerlo para dos casos: el caso de una generación, el cual es el caso más simple pero de gran riqueza en la física, y el caso más relevante el cual es la mezcla de tres neutrinos.

#### Caso de una generación

De forma general podemos escribir

$$-\mathcal{L}^{D+M} = \bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi + m_D(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L) + \frac{1}{2}m_L\left((\bar{\psi}_L)^c\psi_L + \bar{\psi}_L(\psi_L)^c\right) + \frac{1}{2}m_R\left((\bar{\psi}_R)^c\psi_R + \bar{\psi}_R(\psi_R)^c\right) \quad (3.38)$$

donde como sabemos, las únicas interacciones de los neutrinos provienen de  $\psi_L$  y  $(\psi_R)^c$ , los cuales se denominan neutrinos activos, mientras que los campos que no están presentes en las interacciones son  $\psi_R$  y  $(\psi_L)^c$ , los cuales se denominan neutrinos estériles. Así mismo notamos  $m_D$  como los términos de masa para los campos de Dirac y  $m_L, m_R$  como los términos de masa para los campos de Majorana izquierdos y derechos respectivamente. Podemos entender mejor el contenido físico de la ecuación anterior, si la reescribimos en términos de dos nuevos campos  $f$  y  $F$  definidos como

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_L + (\psi_L)^c), \\ F &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_R + (\psi_R)^c). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 f\bar{f} &= \frac{1}{2} \left( (\bar{\psi}_L)^c \psi_L + \bar{\psi}_L (\psi_L)^c \right), \\
 \bar{f}F &= \frac{1}{2} (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L), \\
 \bar{F}f &= \frac{1}{2} (\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R), \\
 \bar{F}F &= \frac{1}{2} \left( (\bar{\psi}_R)^c \psi_R + \bar{\psi}_R (\psi_R)^c \right).
 \end{aligned}$$

(Los cálculos de estos términos se encuentran en el apéndice (C.5)), reemplazando los nuevos campos en la ecuación del lagrangiano (3.38), tenemos:

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi &= (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)\gamma_\mu\partial_\mu(\psi_L + \psi_R) = \bar{f}\gamma_\mu\partial_\mu f + \bar{F}\gamma_\mu\partial_\mu F, \\
 m_D(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L) &= m_D(\bar{f}F + \bar{F}f), \\
 \frac{1}{2}m_L\left((\bar{\psi}_L)^c\psi_L + \bar{\psi}_L(\psi_L)^c\right) &= \frac{1}{2}m_L f\bar{f}, \\
 \frac{1}{2}m_R\left(\bar{\psi}_R^c\psi_R + \bar{\psi}_R(\psi_R)^c\right) &= \frac{1}{2}m_R \bar{F}F.
 \end{aligned}$$

Al reemplazar las relaciones anteriores en la ecuación (3.38), obtenemos

$$\begin{aligned}
 -\mathcal{L}^{D+M} &= \bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi + m_D(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L) + \frac{1}{2}m_L\left((\bar{\psi}_L)^c\psi_L + \bar{\psi}_L(\psi_L)^c\right) + \frac{1}{2}m_R\left(\bar{\psi}_R^c\psi_R + \bar{\psi}_R(\psi_R)^c\right) \\
 &= \bar{f}\gamma_\mu\partial_\mu f + \bar{F}\gamma_\mu\partial_\mu F + m_D(\bar{f}F + \bar{F}f) + \frac{1}{2}m_L f\bar{f} + \frac{1}{2}m_R \bar{F}F \\
 &= \bar{f}\gamma_\mu\partial_\mu f + \bar{F}\gamma_\mu\partial_\mu F + \begin{pmatrix} \bar{f} & \bar{F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Para diagonalizar la matriz  $M$ , la podemos escribir como

$$M = \frac{1}{2}TrM\mathbf{I} + M^0 = \frac{1}{2}(m_L + m_R)\mathbf{I} + M^0,$$

con

$$M^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(m_L - m_R) & m_D \\ m_D & \frac{1}{2}(m_R - m_L) \end{pmatrix},$$

y los valores propios de esta serán

$$m_{1,2}^0 = \frac{\pm\sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2}}{2}. \tag{3.41}$$

La diagonalización de la matriz  $M^0$ , se realiza a través de la transformación unitaria

$$M^0 = Om^0O^T,$$

donde

$$m_{1,2}^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} \end{pmatrix},$$

y  $O$  es la matriz ortogonal

$$O = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Realizando las operaciones, podemos definir el ángulo de mezcla  $\theta$  como: (Ver anexo C.5 )

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \frac{m_L - m_R}{\sqrt{4m_D^2 + (m_L - m_R)^2}}, \\ \sin 2\theta &= \frac{2m_D}{\sqrt{4m_D^2 + (m_L - m_R)^2}}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

La matriz  $M$  igualmente puede ser escrita como

$$M = Om'O^T, \quad (3.44)$$

y los valores propios de esta serán

$$m'_{1,2} = \frac{(m_L + m_R) \pm \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2}}{2}. \quad (3.45)$$

Como se observa, estos valores propios pueden ser positivos o negativos. Pero que sean negativos, impide que estos puedan ser interpretados como campos de masas físicos. Por lo tanto, debemos reescribir estos valores propios como

$$m'_k = m_k K_k^2$$

donde  $m_k$  es la matriz que contiene los valores propios de las masas positivos, y  $K_k^2$  es una matriz diagonal con signos positivos y negativos.

Teniendo en cuenta lo obtenido, podemos escribir la mezcla de neutrinos para el caso de una generación como

$$\begin{pmatrix} \psi_L \\ (\psi_R)^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Por último, podemos reescribir la ecuación (3.40) tomando  $f = \nu'$ ,  $F = N$  como los autovectores con autovalores  $M_{\nu'}$  y  $M_N$ , lo cual lleva a escribir el lagrangiano como

$$-\mathcal{L}^{D+M} = \bar{\nu}'\gamma_\mu\partial_\mu\nu' + \bar{N}\gamma_\mu\partial_\mu N + M_{\nu'}\bar{\nu}'\nu' + M_N\bar{N}N. \quad (3.47)$$

Al escribir de esta forma el lagrangiano, podemos ver que este sería el lagrangiano libre de dos partículas  $\nu'$  y  $N$ , las cuales tienen masas  $M_{\nu'}$  y  $M_N$  respectivamente.

El campo que tenemos ahora, no es igual al campo de Dirac  $\psi$  con el cual fue inicialmente escrito el lagrangiano. Un campo de Dirac está compuesto por cuatro estados, los cuales normalmente describen dos estados de espín para partícula y otros dos estados para antipartículas. Pero ahora tenemos dos partículas  $\nu'$  y  $N$  con diferentes masas. Y por lo tanto se espera, que cada una de estas tenga solo dos estados de espín. Lo cual equivale a decir que cada una de estas sea su autoconjugado bajo simetría **CPT**, equivalente entonces a que sean partículas de Majorana. Ya que debido a la inclusión del término de masa de Majorana, hemos dividido los cuatro estados degenerados del campo  $\psi$  en dos pares de campos no degenerados de Majorana, y por lo tanto los signos de los valores propios de la matriz  $K^2$  determinan las propiedades bajo simetría **CP** de los campos masivos de Majorana.

### Caso de tres generaciones

Como mostramos en la sección (3.3.1) tenemos tres tipos de neutrinos activos, los cuales interactúan débilmente y los podemos escribir como

$$\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{e_L} \\ \nu_{\mu_L} \\ \nu_{\tau_L} \end{pmatrix},$$

mientras que los componentes derechos o neutrinos estériles, los podemos representar como

$$N_R = \begin{pmatrix} \nu_{1R} \\ \nu_{2R} \\ \nu_{3R} \end{pmatrix}.$$

El término de masa más general del lagrangiano lo podemos escribir como

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}^{D+M} &= \bar{\psi}_L M (\psi_R)^c + (\bar{\psi}_R)^c M^\dagger \psi_L \\ &= \bar{\nu}_L m_D N_R + (\bar{N}_L)^c m_D^T \nu_L^c + \frac{1}{2} \bar{\nu}_L m_L (\psi_R)^c + \frac{1}{2} (\bar{N}_L)^c m_R N_R + h.c. \end{aligned}$$

donde

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ (N_L)^c \end{pmatrix} \quad ; \quad (\psi_R)^c = \begin{pmatrix} (\nu_R)^c \\ N_R \end{pmatrix}.$$

Tenemos que  $M$  es ahora una matriz de masa  $6 \times 6$  dada por

$$M = \begin{pmatrix} m_L & (m_D)^T \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

donde  $m_L, m_R$  y  $m_D$  son matrices escalares de Lorentz. Es importante tener en cuenta que estos términos aparecen debido a la ruptura de diferentes simetrías, por ejemplo  $m_D$  conserva el número fermiónico, pero viola  $SU(2) \times U(1)$  debido a que no se transforma como un doblete de  $SU(2)$ , mientras que  $m_L$  y  $m_R$  violan número fermiónico en dos unidades.

Esta matriz al igual que en el caso de una generación, puede ser diagonalizada por una transformación unitaria  $U$ , de forma que

$$n_L = U \nu_L$$

donde la matriz de mezcla  $U$ , es determinada por la diagonalización de  $M$  de forma que

$$U^T M U = \text{diag}(m_1, \dots, m_6),$$

los valores  $m_k$ , son reales y positivos. Lo anterior, nos permite escribir el término de masa del lagrangiano de Dirac-Majorana como

$$-\mathcal{L}^{D+M} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 m_k (\bar{\nu}_{kL})^c \nu_{kL} + h.c.,$$

el cual es una suma de términos de Majorana para los neutrinos masivos de Majorana

$$\nu_k = \nu_{kL} + (\nu_{kL})^c.$$



Así como en el caso de una generación de neutrinos. En este caso, el término de Dirac-Majorana implica que los neutrinos masivos son partículas de Majorana y sus relaciones de Mezcla las podemos escribir como

$$\nu_{lL} = \sum_{k=1}^6 U_{lk} \nu_{kL}$$

donde  $l = e, \mu, \tau$  y

$$(\nu_{sR})^c = \sum_{k=1}^6 U_{sk} \nu_{kL}$$

donde  $s = s_1, s_2, s_3$ . Lo cual muestra que los neutrinos activos y los neutrinos estériles, son combinaciones lineales de los neutrinos masivos.

### 3.3.5. Mecanismo seesaw

Un aspecto importante en la extensión del modelo estándar, es no solo encontrar modelos con neutrinos masivos. Sino entender la diferencia de las masas de los neutrinos comparadas con las masas de los fermiones cargados. Aunque en este punto es importante decir, que incluso las masas de los fermiones cargados varían ampliamente. Por ejemplo, la masa del quark top es unos cinco órdenes de magnitud mayor que la del electrón, lo cual es un hecho, que el modelo estándar es incapaz de explicar.

Al tener el término de masa de Dirac-Majorana, podemos plantear la implementación del mecanismo seesaw para explicar la masa tan pequeña de los neutrinos ligeros. Por simplicidad podemos analizar primero el caso de una generación (3.3.4) [5]

$$M = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}.$$

Dado que en el modelo estándar con un doblete de Higgs, es imposible construir un término de masas del tipo  $\overline{\nu}_L^c \nu_L$  que sea invariante gauge. Asumimos  $m_L = 0$ , y ya que podemos tener un término singlete de la forma  $\overline{\nu}_R^c \nu_R$ , el cual puede introducirse a mano sin romper la simetría. Podemos suponer que  $m_D \approx m_f$ , esto es,  $m_D$  será del orden de la masa del leptón cargado correspondiente al neutrino de su familia, a la escala del rompimiento de la simetría electrodébil ( $\sim 200 GeV$ ), y  $m_R \approx \mathcal{M}$  la cual es del orden de la escala de gran unificación ( $\sim 10^{15} GeV$ ). En esta escala de energía la fuerza electromagnética, fuerte y débil, podrían estar unificadas y provenir de la misma fuerza.

$$\begin{aligned} m_1 &\approx \mathcal{M}, \\ m_2 &\ll m_f. \end{aligned}$$

Lo anterior puede ser revisado en el anexo (C.6). Finalmente, lo que tenemos entonces es un neutrino muy pesado ( $m_1$ ) y otro muy liviano ( $m_2$ ).

Para el caso de tres generaciones el mecanismo seesaw, nos lleva a tener partículas de Majorana con neutrinos masivos ligeros y pesados. Partiendo de (3.48) y teniendo en cuenta, como en el caso de un sabor que  $m_L = 0$  (i.e. que sus autovalores son muy pequeños) entonces [5]

$$M = \begin{pmatrix} 0 & (m_D)^T \\ m_D & m_R \end{pmatrix}.$$

Lo cual nos llevará a tener tres neutrinos ligeros y tres neutrinos pesados del orden de la escala a la cual se presenta la violación de número leptónico. Si suponemos de igual forma como lo hicimos para el caso de un sabor, que  $m_R \gg m_D$ . Entonces el espectro de masas se separa en un sector de neutrinos ligeros, y otro de neutrinos pesados. Lo cual sería lo que esperaríamos, si el término de masa de Majorana para los neutrinos estériles es generado a una escala de energía muy alta. Dado que  $M$  no es necesariamente hermítica.

Para diagonalizar la matriz de masa debemos hacerlo por bloques mediante una transformación unitaria [58], de tal forma que

$$U^T \begin{pmatrix} 0 & (m_D)^T \\ m_D & m_R \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} M_{ligeros} & 0 \\ 0 & M_{pesados} \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

donde  $M_{ligeros}$  y  $M_{pesados}$  son respectivamente matrices simétricas  $n_L \times n_L$  y  $n_R \times n_R$ . La ecuación anterior implica que

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - BB^\dagger} & B \\ -B^\dagger & \sqrt{1 - B^\dagger B} \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

teniendo en cuenta que  $B$  es una matriz  $n_L \times n_R$ , la cual debe ser una función de las matrices  $m_R$ ,  $m_D$  y  $m_L$ .

### 3.3.6. Propuesta sobre la masa de los neutrinos

Sobre la masa de los neutrinos, gracias a los análisis de la anisotropía cósmica de fondo de microondas, en combinación con los estudios de corrimiento al rojo de galaxias y otros datos. Se han obtenido varias mediciones [101, 102] para la  $\sum m_{\nu_i}$ . De estos valores, tomaremos el valor de  $\sum m_{\nu_i} < 0,2$  eV, asumiendo degeneración para los neutrinos.

Adicionalmente tenemos mediciones de las diferencias de las masas al cuadrado para los autoestados de masa [103]  $\nu_2$  y  $\nu_1$  el cual es  $|\Delta m_{21}^2| = (7,60^{+0,19}_{-0,18}) \times 10^{-5}$  eV<sup>2</sup>. Mientras que para los autoestados de masa  $\nu_2$  y  $\nu_3$  tenemos  $|\Delta m_{32}^2| = (2,48^{+0,05}_{-0,07}) \times 10^{-3}$  eV<sup>2</sup>. Con los datos experimentales de los autoestados

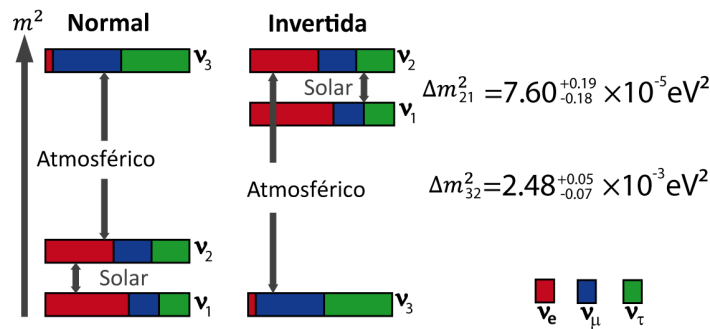


Figura 3.3: Esquema de la jerarquía normal e invertida, para los autoestados de masa de los neutrinos.

de masa, calculamos los valores para  $m_{\nu_1}$ ,  $m_{\nu_2}$  y  $m_{\nu_3}$  tal que se satisfagan las condiciones anteriores. Exigiendo solamente que tengamos una jerarquía normal (JN) en los autoestados de masa. Dicho cálculo arrojó los siguientes valores

$$m_{\nu_1} < m_{\nu_2} < m_{\nu_3} \\ 0,0603302 < 0,0609568 < 0,078713, \quad (3.51)$$

partiendo de estos, podemos entonces calcular los valores probables de los autoestados de sabor. Para hacerlo, podemos postular un operador de masa, tal que

$$\hat{O} |\nu_i\rangle = m_{\nu_i} |\nu_i\rangle,$$

entonces, si queremos obtener la "masa efectiva" de los autoestados de sabor, podemos usar nuestro operador de masa

$$\begin{aligned} \langle \nu_\alpha | \hat{O} | \nu_\alpha \rangle &= \sum_{i,j} \langle \nu_\alpha | \nu_i \rangle \langle \nu_i | \hat{O} | \nu_j \rangle \langle \nu_j | \nu_\alpha \rangle \\ &= \sum_{i,j} m_{\nu_j} \langle \nu_\alpha | \nu_i \rangle \langle \nu_i | \nu_j \rangle \langle \nu_j | \nu_\alpha \rangle \\ &= \sum_{i,j} m_{\nu_j} \delta_{ij} \langle \nu_\alpha | \nu_i \rangle \langle \nu_j | \nu_\alpha \rangle \\ &= \sum_i m_{\nu_i} |\langle \nu_\alpha | \nu_i \rangle|^2 \\ &= \sum_i m_{\nu_i} |U_{\alpha i}|^2 = \langle m_{\nu_\alpha} \rangle. \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde el término  $\langle m_{\nu_\alpha} \rangle$  hace referencia a la "masa efectiva" para los autoestados de sabor, y  $U_{\alpha i}$  es la matriz de mezcla  $U_{PMNS}$ . Para la cual también exigimos que su estructura sea la de jerarquía normal. Usando los valores medios de la matriz  $U_{PMNS}$  (3.22), cuyos valores se encuentran entre los rangos que se tienen para la matriz (3.21).

Al remplazar lo obtenido en (3.51) y (3.22) en (3.52) obtenemos los siguientes valores para los autoestados de sabor

$$\begin{aligned} m_{\nu_e} &< m_{\nu_\mu} < m_{\nu_\tau} \\ 6,0894 \times 10^{-2} &< 6,7542 \times 10^{-2} < 7,1478 \times 10^{-2}, \end{aligned}$$

los cuales como vemos, cumplen también la jerarquía que se tiene en el sector leptónico cargado. Podemos ver que los valores así obtenidos cumplen todos los limitantes que se tienen para los autoestados de masa y adicionalmente que  $m_{\nu_e}, m_{\nu_\mu}, m_{\nu_\tau} < 2,5eV$  [20].

### 3.4. Simetrías discretas para neutrinos de Majorana y Dirac

Cuando analizamos las simetrías discretas y debido a que un neutrino de Majorana es su propia antipartícula [5], podemos esperar que éste posea propiedades especiales bajo simetrías discretas como: simetría de carga **C**, simetría de carga-paridad **CP** y simetría de carga-paridad-temporal **CPT** (Un breve resumen de estas simetrías se encuentra en el apéndice A.3 ).

Este análisis es más claro mediante el estudio de la transición entre dos sabores de neutrinos  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ .

#### 3.4.1. Caso de Dirac

De forma general podemos decir que bajo una transformación **T**, esta cambia el orden de los eventos. Bajo una transformación **CP** tenemos que no solamente se cambian partículas por antipartículas, sino

que también cambiamos el signo de las coordenadas espaciales de la partícula. Para una transformación **CPT**, se cambia partícula por antipartícula, el signo de las coordenadas espaciales y el orden de los eventos.

Si tenemos un neutrino que oscila de un sabor a otro  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$  y aplicamos las transformaciones anteriores tenemos

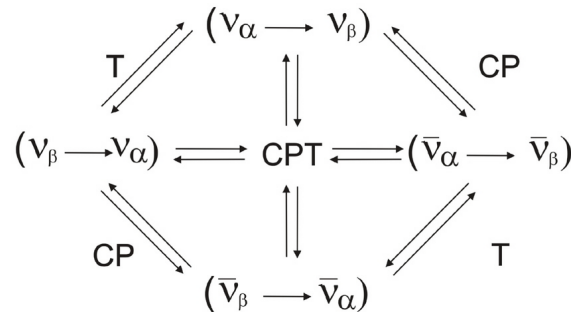


Figura 3.4: Esquema para la transición entre dos sabores de neutrinos para el caso de simetrías **T**, **CP** y **CPT** para el caso de neutrinos de Dirac

### 3.4.2. Caso de Majorana

Para el caso de neutrinos de Majorana, tenemos que bajo una transformación **T**, al igual que en el caso de Dirac se cambia el orden de los eventos. Bajo una transformación **CP** no existe ningún cambio. Finalmente bajo simetría **CPT** solo se cambian el orden de los eventos.

Si tenemos un neutrino que oscila de un sabor a otro  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$  y aplicamos las transformaciones anteriores tenemos

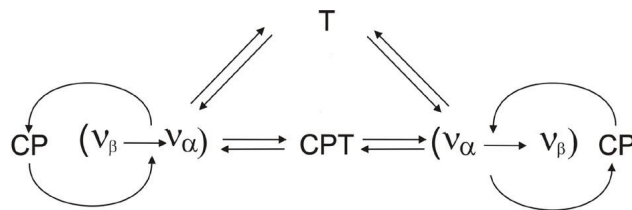


Figura 3.5: Esquema para la transición entre dos sabores de neutrinos para el caso de simetrías **T**, **CP** y **CPT** para el caso de neutrinos de Majorana

## 3.5. Grados de Libertad para neutrinos de Majorana y Dirac

Otra diferencia entre los neutrinos de Majorana y de Dirac puede ser planteada, si consideramos un neutrino con momento  $\mathbf{p}$  y helicidad  $h$ . Si aplicamos una transformación **CPT** y transformaciones de Lorentz, podemos encontrar cuales son los posibles estados con el mismo momento  $\mathbf{p}$ , y por ende, el número de estados posibles, sería el número de grados de libertad.

### 3.5.1. Caso de Dirac

Bajo una transformación **CPT**, un neutrino de Dirac con momento  $\mathbf{p}$  y helicidad  $h$  es transformado, en un antineutrino de Dirac con momento  $\mathbf{p}$  y helicidad  $-h$

$$\nu(\mathbf{p}, h) \xrightarrow{\text{CPT}} \bar{\nu}(\mathbf{p}, -h). \quad (3.53)$$

Con un boost apropiado que invierta el momento  $\mathbf{p}$  y helicidad  $h$  obtenemos

$$\bar{\nu}(\mathbf{p}, -h) \xrightarrow{\text{boost}} \bar{\nu}(-\mathbf{p}, h). \quad (3.54)$$

La dirección del momento de  $\bar{\nu}(-\mathbf{p}, h)$ , puede ser invertida mediante una rotación de  $180^\circ$ , la cual deja la helicidad invariante

$$\bar{\nu}(-\mathbf{p}, h) \xrightarrow{\text{rotación } 180^\circ} \bar{\nu}(\mathbf{p}, h). \quad (3.55)$$

Si realizamos esto para cada uno de los casos posibles obtenemos:

$\nu(\mathbf{p}, h)$	$\xleftrightarrow{\text{CPT}}$	$\bar{\nu}(\mathbf{p}, -h)$
$\Downarrow$ boost		$\Downarrow$ boost
$\bar{\nu}(-\mathbf{p}, -h)$	$\xleftrightarrow{\text{CPT}}$	$\bar{\nu}(-\mathbf{p}, h)$
$\Downarrow$ rotación $180^\circ$		$\Downarrow$ rotación $180^\circ$
$\nu(\mathbf{p}, -h)$		$\bar{\nu}(\mathbf{p}, h)$

Con lo cual encontramos que hay cuatro posibles estados de neutrinos de Dirac, para un mismo valor de momento  $\mathbf{p}$ , los cuales son:

$$\nu(\mathbf{p}, h) ; \nu(\mathbf{p}, -h) ; \bar{\nu}(\mathbf{p}, h) ; \bar{\nu}(\mathbf{p}, -h). \quad (3.56)$$

### 3.5.2. Caso de Majorana

Puesto que un neutrino de Majorana es su propia antipartícula, una transformación **CPT** solo cambia la helicidad:

$$\nu(\mathbf{p}, h) \xrightarrow{\text{CPT}} \nu(\mathbf{p}, -h). \quad (3.57)$$

Con un apropiado boost podemos invertir el momento  $\mathbf{p}$  y la helicidad  $h$

$$\nu(\mathbf{p}, -h) \xrightarrow{\text{boost}} \nu(-\mathbf{p}, h). \quad (3.58)$$

Mediante una rotación de  $180^\circ$  podemos pasar de

$$\nu(-\mathbf{p}, h) \xrightarrow{\text{rotación } 180^\circ} \nu(\mathbf{p}, h). \quad (3.59)$$

Si realizamos esto para cada uno de los casos posibles obtenemos:

$\nu(\mathbf{p}, h)$	$\xleftrightarrow{\text{CPT}}$	$\nu(\mathbf{p}, -h)$
$\Downarrow$ boost	$\swarrow$ rotación $180^\circ$	$\swarrow$ boost
$\nu(-\mathbf{p}, -h)$	$\xleftrightarrow{\text{CPT}}$	$\nu(-\mathbf{p}, h)$

Con lo cual encontramos que hay dos posibles estados de neutrinos de Majorana para un mismo valor de momento  $\mathbf{p}$ , los cuales son:

$$\nu(\mathbf{p}, h) \quad ; \quad \nu(\mathbf{p}, -h). \tag{3.60}$$

### 3.6. Decaimiento beta doble

El proceso nuclear de desintegración beta doble es uno de los procesos más raros de la naturaleza. Existen dos posibles tipos de decaimiento, los cuales se diferencian entre sí por la emisión o no de neutrinos.

#### 3.6.1. Proceso en el que conserva número leptónico ( $2\nu\beta\beta$ )

Este caso es perfectamente permitido por el modelo estándar [9], ya que en este tenemos conservación del número leptónico. El decaimiento lo podemos considerar como un proceso en dos etapas

$$\left. \begin{aligned} n &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \\ n &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \end{aligned} \right\} \equiv 2n \rightarrow 2p + 2e^- + 2\bar{\nu}_e, \\ \Rightarrow (A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e \equiv 2\beta_{2\nu}^- \tag{3.61}$$

Como lo podemos apreciar de la ecuación anterior en el proceso  $2\nu\beta\beta$ , un núcleo con  $A$  nucleones, el cual tiene  $Z$  protones. Se desintegra para formar otro núcleo con  $Z + 2$  protones, emitiendo dos electrones y dos antineutrinos.

El decaimiento  $2\nu\beta\beta$  ha sido observado en muchos isotopos obteniendo una gran estadística. La vida media para este proceso está en el rango de  $\sim 10^{19}$  a  $\sim 10^{21}$  años

#### 3.6.2. Proceso que viola la conservación del número leptónico ( $0\nu\beta\beta$ )

Este proceso aunque es conocido [59], aún no ha sido observado excepto por la colaboración Heidelberg-Moscow [14]. Al igual que en el caso anterior, el decaimiento  $0\nu\beta\beta$  lo podemos considerar como un proceso en dos etapas, el cual tiene el siguiente esquema

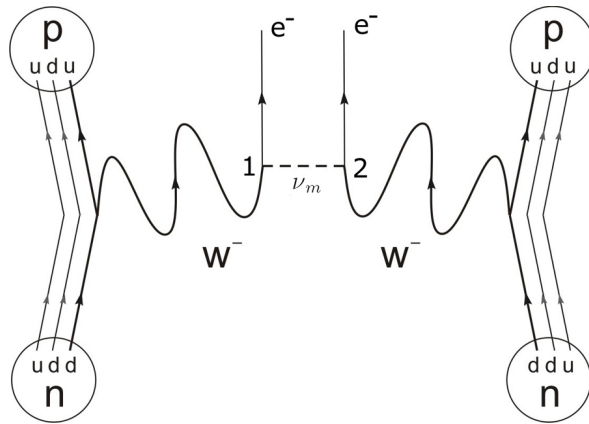


Figura 3.6: Esquema del decaimiento beta doble sin neutrinos.

$$\left. \begin{aligned} n &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \\ n + \nu_e &\rightarrow p + e^- \end{aligned} \right\} \equiv 2n \rightarrow 2p + 2e^-,$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} (A, Z) &\rightarrow (A, Z + 2) + 2e^- \equiv 2\beta_{0\nu}^- \\ (A, Z) &\rightarrow (A, Z - 2) + 2e^+ \equiv 2\beta_{0\nu}^+ \end{aligned} \quad (3.62)$$

En el proceso  $0\nu\beta\beta$ , tenemos un núcleo con  $A$  nucleones, en el cual se tiene  $Z$  protones y se desintegra para formar otro núcleo con  $Z + 2$  protones. Emitiendo dos electrones, este proceso viola conservación del número leptónico. Si suponemos que las corrientes débiles cargadas son las usuales, (conservan número leptónico y son de mano izquierda) el neutrino emitido en el primer vértice será un  $\bar{\nu}$ , mientras que el neutrino absorbido en el segundo vértice sería un  $\nu$ . lo cual no puede ser real, a menos que sea un neutrino de Majorana, con lo cual  $\bar{\nu} = \nu$ . Pero incluso para neutrinos de Majorana este proceso es altamente suprimido.

En el decaimiento  $0\nu\beta\beta$ , los electrones emitidos tienen una energía cinética total  $Q$  esencialmente igual al valor del decaimiento. Este valor tiene una alta dependencia del isótopo. Por ejemplo  $Q$  oscila entre un mínimo de 2,039 keV para  ${}^{76}\text{Ge}$  a un máximo de 2,527 keV para  ${}^{130}\text{Te}$ . Existen valores de  $Q$  mayores para núcleos candidatos a desintegración beta doble, como lo son:  ${}^{150}\text{Nd}$  (3371 keV),  ${}^{100}\text{Mo}$  (3034 keV),  ${}^{82}\text{Se}$  (2995 keV) y  ${}^{96}\text{Zr}$  (3350 keV). La incorporación de estos isótopos es muy importante, debido a que para valores de  $Q$  más grandes, no solo tenemos un aumento en la velocidad de desintegración, sino que también colocaría la región de energía  $0\nu\beta\beta$  por encima de la energía de los rayos gamma y de casi todos los isótopos radiactivos de origen natural, dejando una señal más limpia para la detección [61].

### 3.7. Conclusiones del capítulo

Existen múltiples fuentes de neutrinos naturales o artificiales, el análisis de estos neutrinos en diferentes tipos de procesos, ha dejado claro que los neutrinos oscilan y en consecuencia la masa de por lo menos uno de ellos es distinta de cero. Este es el principal hecho comprobado de física más allá del ME.

Existen diferentes medidas experimentales sobre la diferencia de los autoestados de masa y sobre la suma de estos, provenientes de fenómenos astrofísicos y cosmológicos. A partir de la solución de las relaciones para los autoestados de masa de los neutrinos, podemos proponer valores de la masa de los autoestados de sabor

$$m_{\nu_e} = 6,0894 \times 10^{-2} \quad ; \quad m_{\nu_\mu} = 6,7542 \times 10^{-2} \quad ; \quad m_{\nu_\tau} = 7,1478 \times 10^{-2}.$$

Los cuales como vemos cumplen la jerarquía que se tiene en el sector leptónico cargado. Adicionalmente, los valores así obtenidos cumplen todos los limitantes que se tienen para los autoestados de masa y adicionalmente que  $m_{\nu_e}, m_{\nu_\mu}, m_{\nu_\tau} < 2,5\text{eV}$ .

Para diferenciar si los neutrinos son partículas de Majorana o de Dirac, podría hacerse mediante el análisis de la helicidad. Dado que los neutrinos son partículas masivas, su helicidad depende del marco de referencia. Así entonces, si los neutrinos fueran partículas de Majorana, y tenemos un antineutrino, podríamos encontrar un nuevo marco de referencia en el cual el antineutrino se comporta como un neutrino. Sin embargo este experimento sería imposible de realizar, debido a que el neutrino es ultra relativista.

Otra posibilidad para la diferenciación sobre la naturaleza del neutrino, es el decaimiento beta doble  $0\nu\beta\beta$ . Sin embargo, en el ME debido a la conservación de la simetría **CPT** y del número leptónico. No hay términos de masa de Majorana y el decaimiento doble beta  $0\nu\beta\beta$  es prohibido. Por lo tanto los neutrinos serían partículas de Dirac.

De otro lado, la observación del decaimiento  $0\nu\beta\beta$  probaría que el número leptónico no se conserva, estableciendo que el neutrino masivo es una partícula de Majorana. Así entonces la observación de este decaimiento independientemente de su tasa, podría demostrar que los neutrinos a diferencia de otros constituyentes de la materia, son sus propias antipartículas. En el futuro la implementación de experimentos  $0\nu\beta\beta$  con otros isotopos podría llevarnos a solucionar la naturaleza del neutrino.

Otra opción para la discriminación entre neutrinos de Majorana y de Dirac, podría estar en el análisis de los factores de forma electromagnéticos, el cual es el eje central de nuestro trabajo y que analizaremos en el siguiente capítulo.



# Capítulo 4

## Factores de forma electromagnéticos

### 4.1. Una aproximación general

Las propiedades electromagnéticas de cualquier fermión aparecen en la teoría de campos cuántica, a través de su interacción con el fotón. Para lo cual, se debe considerar el vértice de interacción de la figura 4.1.

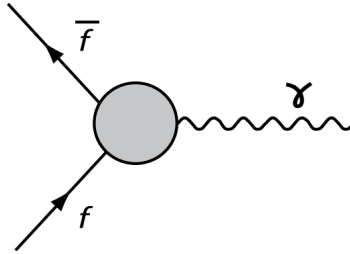


Figura 4.1: *Vértice electromagnético efectivo para  $f \rightarrow \bar{f}\gamma$ .*

Para analizar dicho vértice, es necesario estudiar la estructura de Lorentz más general, la cual contiene 24 términos independientes, los cuales son combinaciones de los cuadvectores  $q^\mu$ ,  $l^\mu$  y las matrices de Dirac (algunas de sus propiedades son presentadas en el anexo A.1) donde hemos definido  $q^\mu = p_2^\mu - p_1^\mu$  y  $l^\mu = p_2^\mu + p_1^\mu$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbb{I} &: q^\mu, l^\mu. \\
 \gamma^\mu &: \gamma^\mu, l^\mu \not{l}, l^\mu \not{q}, q^\mu \not{l}, q^\mu \not{q}, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\nu l_\alpha q_\beta. \\
 \gamma_5 &: \gamma_5 q^\mu, \gamma_5 l^\mu. \\
 \sigma_{\mu\nu} &: \sigma_{\mu\nu} l^\nu, \sigma_{\mu\nu} q^\nu, l^\mu \sigma^{\alpha\beta} l_\alpha q_\beta, q^\mu \sigma^{\alpha\beta} l_\alpha q_\beta, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} l_\nu, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} q_\nu, l^\mu \epsilon^{\mu\nu\delta\sigma} \sigma_{\alpha\beta} l_\delta q_\sigma, q^\mu \epsilon^{\mu\nu\delta\sigma} \sigma_{\alpha\beta} l_\delta q_\sigma. \\
 \gamma_5 \gamma_\mu &: \gamma_5 \gamma^\mu, \gamma_5 l^\mu \not{l}, \gamma_5 l^\mu \not{q}, \gamma_5 q^\mu \not{l}, \gamma_5 q^\mu \not{q}, \gamma_5 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\nu l_\alpha q_\beta.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Para fermiones cargados, hay diagramas de esta forma aún a nivel árbol, ya que el lagrangiano básico de interacción contiene un término que se escribe como

$$i\mathcal{L}_{interacción} = -ieA_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \tag{4.2}$$

donde  $e$  es la carga del electrón.

Consideremos un elemento matricial de corriente electromagnética

$$J_\mu^{EM} = e \sum_f Q_f \bar{f}(p_1, \lambda) \gamma_\mu f(p_2, \lambda') \quad (4.3)$$

entre el estado fermiónico inicial  $f(p_1, \lambda)$  y un estado final  $f(p_2, \lambda')$  el cual puede ser representado como

$$\langle f(p_1, \lambda) | J_\mu^{ME}(x) | f(p_2, \lambda') \rangle = e^{-i(p_2 - p_1)x} \langle f(p_1, \lambda) | J_\mu^{ME}(0) | f(p_2, \lambda') \rangle = \bar{u}(p_1, \lambda) \Lambda_\mu(l, q) u(p_2, \lambda') \quad (4.4)$$

donde  $q^\mu = p_2^\mu - p_1^\mu$ ,  $l^\mu = p_2^\mu + p_1^\mu$  y  $\Lambda_\mu$  es una matriz actuando sobre los espinores<sup>1</sup>, la cual debe cumplir algunas condiciones.

- Dado que  $J_\mu^{ME}$  es un vector de Lorentz, entonces  $\Lambda_\mu$  debe ser un tensor (este requerimiento se denomina covarianza de Lorentz),
- Una segunda condición sería la hermiticidad, esto es,  $J_\mu^{ME} = J_\mu^{\dagger ME}$  lo que implica que

$$\langle f(p_1, \lambda) | J_\mu^{ME}(x) | f(p_2, \lambda') \rangle = \langle f(p_2, \lambda') | J_\mu^{ME}(x) | f(p_1, \lambda) \rangle^* \Rightarrow \Lambda_\mu(l, q) = \gamma^0 \Lambda_\mu^\dagger(l, -q) \gamma^0 \quad (4.5)$$

donde  $\bar{f} = f^\dagger \gamma^0$ .

- Finalmente tenemos la conservación de la corriente (o invariancia gauge)

$$\partial_\mu J_\mu^{ME} = 0,$$

la cual puede ser escrita como

$$q^\mu \bar{u}(p_1, \lambda) \Lambda_\mu(l, q) u(p_2, \lambda') = 0. \quad (4.6)$$

La expresión más general para el vértice puede ser escrita como

$$i\Lambda_\mu(p_1, p_2) = ie \left[ \gamma^\mu (A_1 - A_2 \gamma_5) + (iA_3 + A_4 \gamma_5) \sigma^{\mu\nu} q_\nu + (iA_5 + A_6 \gamma_5) q^\mu + (A_7 + iA_8 \gamma_5) l^\mu + (A_9 + iA_{10} \gamma_5) \sigma^{\mu\nu} l_\nu + \dots \right].$$

Las amplitudes escalares  $A_i$ , son en general funciones de los productos escalares independientes que se pueden construir con los vectores  $p_1$ ,  $p_2$ , esto es,  $A_i(p_2^2, p_1^2, q^2)$ . Hemos introducido la constante  $e$  para que los acoples queden normalizados a los de la electrodinámica cuántica. Si tenemos que los dos fermiones están on-shell, lo cual es equivalente a decir que  $l^2 = m^2$ , la ecuación de Dirac permite eliminar los términos  $A_7$ ,  $A_8$ ,  $A_9$  y  $A_{10}$  debido a que no son independientes

$$i\Lambda_\mu(p_1, p_2) = ie [\gamma^\mu (A_1 - A_2 \gamma_5) + (iA_3 + A_4 \gamma_5) \sigma^{\mu\nu} q_\nu + (iA_5 + A_6 \gamma_5) q^\mu]. \quad (4.7)$$

---

<sup>1</sup>Para construir la matriz  $4 \times 4$  que representa  $\Lambda_\mu(q)$  tenemos a la disposición entonces  $\{q_\mu, l_\mu\}$ ,  $\{\mathbf{1}, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}\}$ , el tensor métrico  $g^{\mu\nu}$  y el tensor antisimétrico de Pauli-Lubanski  $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ . Adicionalmente es necesario tener en cuenta las identidades de Gordon, las cuales se reseñan en el anexo A.2

si adicionalmente tenemos en cuenta que el bosón vectorial  $V$  también esta on-shell, su polarización<sup>2</sup> satisface que  $q^\mu \varepsilon_\mu = 0$ . Así entonces, los términos  $A_5$  y  $A_6$  no contribuyen y el vértice queda como

$$i\Lambda_\mu(p_1, p_2) = ie [\gamma^\mu (A_1 - A_2\gamma_5) + (iA_3 + A_4\gamma_5) \sigma^{\mu\nu} q_\nu]. \quad (4.8)$$

Dado que en nuestro caso  $V = \gamma$ , la invariancia gauge  $U(1)$  impone la conservación de la corriente, i.e.  $q_\mu \Lambda^\mu = 0$ , así entonces, para los fermiones on-shell tenemos que estos son idénticos ( $m = m_1 = m_2$ ) y la amplitud adimensional  $A_i$  solo va a depender de la variable cinemática  $q^2$ , con lo cual podemos escribir  $A_i = A_i(q^2)$  y la expresión general para el vértice  $\Lambda_\mu(l, q)$  será

$$\Lambda_\mu(l, q) = F_Q(q^2) \gamma_\mu + F_M(q^2) i\sigma_{\mu\nu} q^\nu + F_E(q^2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 + F_A(q^2) (q^2 \gamma_\mu - q_\mu \not{q}) \gamma_5. \quad (4.9)$$

Donde se define  $F_Q(q^2)$  como el término asociado al factor de forma eléctrico o de carga eléctrica,  $F_M(q^2)$  asociado al momento dipolar magnético (MDM),  $F_E(q^2)$  asociado al momento dipolar eléctrico (MDE) y  $F_A(q^2)$  asociado al momento anapolar[19],[15].

De la relación anterior hay tres puntos interesantes:

- $\Lambda_\mu(l, q)$  solo depende de  $q_\mu$  y no de  $l_\mu$ , lo cual es debido a la invariancia traslacional
- Debido a la condición de hermiticidad, los factores de forma son reales e invariantes de Lorentz.
- Solo existe una cantidad independiente  $q^2$ , que es invariante de Lorentz y de la cual dependen los factores de forma, pudiéndose escribir  $\Lambda_\mu(l, q) \equiv \Lambda_\mu(q)$ .

Para analizar el significado físico de los factores de forma, partiremos de la solución de la ecuación de Dirac en un campo magnético externo. El cual se realiza con detalle en el anexo G.

Si consideramos el límite no relativista ( $NR$ ), i.e.  $q^2 = 0$ , el factor de forma de carga eléctrica será

$$F_Q(0) = e \quad (4.10)$$

el cual aparece en el Hamiltoniano de interacción como

$$H_{int}^{NR} [F_Q] = F_Q(0) A_0 = e\Phi, \quad (4.11)$$

---

<sup>2</sup>Una partícula masiva de spin 1 y de momento  $p^\mu$ , como el fotón, tiene tres grados de libertad de polarización  $\varepsilon^\mu$ , donde  $\varepsilon^\mu(p)$  es denominado vector de polarización, este vector tiene el rol de la parte espinorial de la función de onda del fotón. Al aplicar la condición de Lorentz  $\partial_\mu A^\mu = 0$  obtenemos una restricción en el vector de polarización.

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^\mu &= 0 \\ \partial_\mu \left[ e^{-ip_\mu x^\mu} \varepsilon^\mu(p) \right] &= 0 \\ (-ip_\mu) e^{-ip_\mu x^\mu} \varepsilon^\mu(p) + e^{-ip_\mu x^\mu} \partial_\mu \varepsilon^\mu(p) &= 0 \end{aligned}$$

debido a que  $\partial_\mu \varepsilon^\mu(p) = 0$  dado que  $\varepsilon^\mu(p)$  es una función del momento y por lo tanto no depende de  $x^\mu$  así entonces

$$\partial_\mu \left[ e^{-ip_\mu x^\mu} \varepsilon^\mu(p) \right] = (-ip_\mu) e^{-ip_\mu x^\mu} \varepsilon^\mu(p) = 0$$

dado que la exponencial puede ser diferente de cero, la única forma de asegurar la igualdad es que

$$p_\mu \varepsilon^\mu(p) = 0$$

donde  $A_0$  es la primera componente del cuadvivector  $A_\mu^{ext} = (\Phi, \vec{A}(x))$  como lo podemos ver en la ecuación de Dirac (G.14).

Definimos  $F_M(0)$  como el momento magnético de la partícula (G.15), el cual se denota generalmente como  $\mu$

$$\vec{\mu} = \frac{e\hbar}{2m_0c} \vec{\sigma} = \frac{e}{m_0c} \vec{S} \quad (4.12)$$

y  $\vec{S}$  es el momento angular. Así mismo, podemos definir el momento magnético total (G.19) como

$$\vec{\mu}_{total} = \frac{e}{2M} (g_l \vec{L} + g_s \vec{S}) = \frac{m_e}{M} \mu_B (g_l \vec{l} + g_s \vec{s}), \quad (4.13)$$

donde  $\mu_B$  se define como el magnetón de Bohr

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}. \quad (4.14)$$

En el caso particular del electrón  $g_l = 1$  y  $g_s = 2$ .

Sin embargo, al introducir correcciones radiativas como las realizadas en la figura 4.2, el momento magnético es corregido, de tal manera que tenemos un nuevo factor de Landé

$$\mu = \frac{e\hbar}{2m} (1 + a) \quad (4.15)$$

donde

$$a = \frac{g_s - 2}{2}. \quad (4.16)$$

Por lo tanto, el primer término en teoría de perturbaciones corresponde a la predicción de la ecuación de Dirac para  $g_s = 2$ , los términos restantes son las correcciones radiativas a diversos ordenes, donde  $a$  es un término adimensional, al cual muchos autores se refieren como *anómalo*.

Con la evolución de los montajes experimentales quedo demostrada la potencia del ME y en particular de la QED. Ejemplo de lo anterior, es la contribución a quinto orden (lo cual es un trabajo impresionante!!!) al valor del momento magnético anómalo del electrón [86]

$$\begin{aligned} a_e^{ME} &= \frac{\alpha}{2\pi} - 0,328478444003 \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 + 1,1812340168 \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 - 1,9144(35) \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^4 \\ &\quad + 0,0(4,6) \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^5 + 1,71 \times 10^{-12} \\ &= 0,00115965218279(771), \end{aligned}$$

donde se ha incluido una pequeña corrección al ME de  $1,71 \times 10^{-12}$  debida a: loops hadrónicos  $1,682(20) \times 10^{-12}$  y a efectos electrodébiles  $0,0297(5) \times 10^{-12}$ .

El valor experimental más preciso de la constante de estructura fina  $\alpha$ , que tenemos actualmente es

$$\alpha^{-1} = \frac{4\pi}{e^2} = 137,035999084(51).$$

Mientras que para el momento magnético anómalo del electrón [87]

$$a_e^{exp} = \frac{g_e - 2}{2} = 0,00115965218073(28),$$

los dos últimos números en el parentesis representan la incertidumbre en  $1\sigma$  en los dos últimos decimales.

Al igual que el  $F_Q$ , el MDM aparece en el Hamiltoniano de interacción (G.14) como

$$H_{int}^{NR} [F_M] = -\mu\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (4.17)$$

donde  $\vec{B}$  es el campo magnético. La aparición de un término de momento magnético anómalo en el modelo estándar, es una consecuencia del rompimiento espontáneo de la simetría a través de mecanismo de Higgs. El cual dota de masa a las partículas físicas y permite procesos de cambio de helicidad, como las transiciones del momento magnético anómalo. En cualquier teoría renormalizable, el término de momento magnético anómalo puede desaparecer a nivel árbol, lo cual significa también, que no hay parámetros libres asociados con este y por lo tanto sería una predicción finita de la teoría de perturbaciones a orden superior.

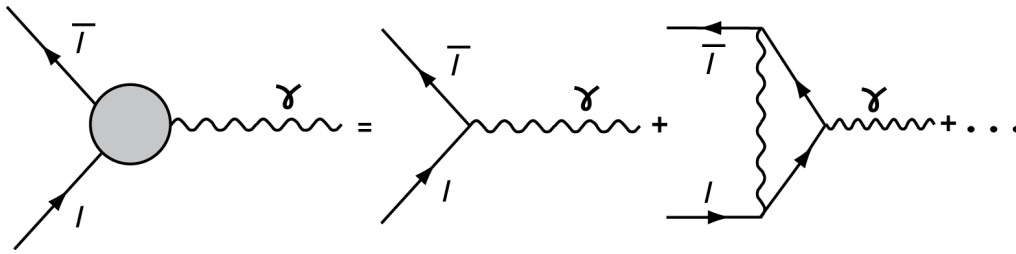


Figura 4.2: *Expansión del vértice de interacción.*

Las correcciones radiativas a nivel árbol del vértice fermión-fotón también permiten introducir el tercer factor de forma  $F_E$ . Este se asocia al momento dipolar eléctrico, el cual surge si hay violación de las simetrías discretas de paridad y reversión temporal (Ambas violadas por las interacciones débiles). El valor de este factor ha sido medido como cero para cualquier valor de  $q^2$  o para cualquier partícula. Lo cual no es sorprendente, ya que de hecho se espera que este factor sea muy pequeño. Existe evidencia indirecta que indica que la violación ocurre en la naturaleza, sin embargo como dijimos este valor sería muy pequeño.

La interacción efectiva la podemos escribir como

$$\delta\mathcal{L}_{efectivo}^{F_E} = -\frac{d_f}{2}\bar{\psi}(x) i\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\psi(x) F_{\mu\nu}(x) \quad (4.18)$$

donde  $d_f$  es el momento dipolar eléctrico. En el límite no relativista (4.18) lo podemos escribir como (ver anexo G)

$$\delta\mathcal{L}_{efectivo}^{F_E} \Rightarrow H_{int}^{NR} [F_E] \simeq -d_f\vec{\sigma} \cdot \vec{E}. \quad (4.19)$$

En el marco de referencia de la teoría cuántica de campos, donde la simetría **CPT** es conservada, la violación de **T** implica una violación directa de la simetría **CP**, siendo pequeña. Por esta razón el MDE es mucho menor que el MDM, por ejemplo, el límite experimental del MDE para el electrón es

$$|d_e| < 1,06 \times 10^{-27} e \cdot cm \quad (4.20)$$

al 90 % C.L. [88], mientras que lo esperado proveniente del modelo estándar es [89]

$$|d_e^{ME}| \simeq 10^{-38} e \cdot cm, \quad (4.21)$$

lo cual lo hace imposible de observar con la sensibilidad actual.

Finalmente, el factor de forma  $F_A(q^2)$  es llamado momento anapolar, el cual corresponde a una interacción efectiva

$$\delta\mathcal{L}_{efectivo}^{F_A} = -\frac{e_l a_l}{4m_l} \bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} \psi(x) F_{\mu\nu}(x) \quad (4.22)$$

donde  $a_l$  es el MDM del leptón correspondiente. En el límite clásico de baja energía la relación anterior la podemos escribir como

$$\delta\mathcal{L}_{efectivo}^{F_A} \Rightarrow H_{int}^{NR}[F_A] \simeq -\frac{e_l a_l}{2m_l} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \propto F_A(0) \vec{\sigma} \cdot \left[ \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]. \quad (4.23)$$

$F_A$  es una cantidad adimensional con características inusuales. En primer lugar este acople al fotón viola paridad pero preserva reversión temporal. Podemos ver también en (4.23), que esta se hace cero a menos que  $\vec{J} \neq 0$ , lo que equivale a decir que las fuentes de los campos eléctrico y magnético deben de ser diferentes de cero. Esto implica que el acople del momento anapolar a un campo electromagnético externo, es relevante solamente en la materia.

Si consideramos el acople de un fotón a un fermión, el acople anapolar es cero si el fotón es real (en el caso *on shell*  $q^2 = 0$  y  $\epsilon_\mu q^\mu = 0$ ). Por lo tanto, en procesos como el Bremsstrahlung el término  $F_A$  no contribuye. Pero en el proceso con fotones *off shell* lo hace. Por ejemplo, si el fotón intercambiado es virtual entre dos fermiones, el momento anapolar podría contribuir al proceso. Como en el caso de  $F_E$  no tenemos evidencia experimental directa para  $F_A$ . La razón es de nuevo la búsqueda de la violación de una de las simetrías discretas, si suponemos que  $F_A$  viola paridad y dicha violación no es tan pequeña como la que se presenta con la violación de la reversión temporal, en procesos reales como  $ep \rightarrow ep$  donde los factores de forma son medidos. La violación de la paridad a través de  $F_A$  puede interferir con una violación de la paridad originada directamente mediante la interacción débil. Lo cual implica una manifestación física del momento anapolar, que puede ocurrir en procesos tales como la dispersión de electrones en la cual se involucre el intercambio de un bosón  $Z^0$  o de un fotón.

## 4.2. Factores de forma electromagnéticos para neutrinos

Para fermiones neutros como el neutrino, los factores de forma electromagnéticos no existen a nivel árbol debido a que los neutrinos no tienen carga eléctrica. Sin embargo, como vimos en la sección anterior podemos tener factores de forma electromagnéticos mediante la consideración de lazos o loops. Incluso Pauli propuso que el neutrino tendría un momento magnético menor a  $0,02\mu_B$  debido a la ausencia de interacciones con la materia [92].

Al considerar la corrección a un loop para neutrinos, los diagramas que contribuyen en el vértice electromagnético con neutrinos en el modelo estándar están representados en la figura 4.3.

Esto hace que dependan del momento general y por lo tanto podemos escribir el término relacionado con los factores de forma, como una interacción efectiva en analogía a (4.2) como

$$\mathcal{L}_{efectivo} = -A^\mu \bar{\psi} \Lambda_\mu \psi. \quad (4.24)$$

La estructura del término  $\Lambda_\mu$  depende directamente de si el neutrino es de Majorana o de Dirac. De hecho, cuando se realiza el cálculo de los factores de forma electromagnéticos, se obtiene que solamente los neutrinos de Dirac poseen momento magnético.

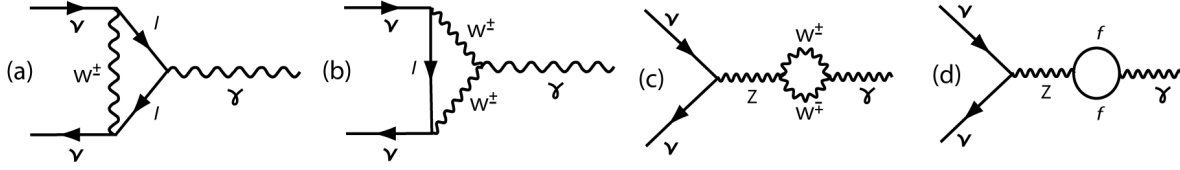


Figura 4.3: Diagramas a un loop que dan lugar al MDM del neutrino en el ME, debidas a considerar neutrinos masivos.

Podemos comenzar considerando un elemento matricial de corriente electromagnética entre los estados  $\nu(p, \lambda)$  y un estado final  $\nu(p', \lambda')$ , el cual puede ser representado como

$$\begin{aligned} \langle \nu(p, \lambda) | J_\mu^{ME}(x) | \nu(p', \lambda') \rangle &= e^{-i(p'-p)x} \langle \nu(p, \lambda) | J_\mu^{ME}(0) | \nu(p', \lambda') \rangle \\ &= \bar{\nu}(p, \lambda) \Lambda_\mu(l, q) \nu(p', \lambda'), \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde  $q_\mu = p'_\mu - p_\mu$ ,  $l_\mu = p'_\mu + p_\mu$  y  $\Lambda_\mu$  es una matriz actuando sobre los espinores, que debe cumplir algunas condiciones.

Dado que  $J_\mu^{ME}$  es un vector de Lorentz, entonces  $\Lambda_\mu$  debe ser un tensor (este requerimiento se le llama covarianza de Lorentz), una segunda condición seria la hermiticidad, esto es,  $J_\mu^{\dagger ME} = J_\mu^{ME}$  lo que implica que

$$\begin{aligned} \langle \nu(p, \lambda) | J_\mu^{ME}(x) | \nu(p', \lambda') \rangle &= \langle \nu(p', \lambda') | J_\mu^{ME}(x) | \nu(p, \lambda) \rangle^* \\ \bar{\nu}(p, \lambda) \Lambda_\mu(l, q) \nu(p', \lambda') &= \bar{\nu}(p, \lambda) \gamma^0 \Lambda_\mu^\dagger(l, -q) \gamma^0 \nu(p', \lambda') \\ \Rightarrow \Lambda_\mu(l, q) &= \gamma^0 \Lambda_\mu^\dagger(l, -q) \gamma^0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Y finalmente la conservación de la corriente (o invariancia gauge)  $\partial_\mu J_\mu^{ME} = 0$ , la cual puede ser escrita como

$$q^\mu \bar{\nu}(p', \lambda') \Lambda_\mu(l, q) \nu(p, \lambda) = 0. \quad (4.27)$$

Las condiciones anteriores, en particular la hermiticidad y la suposición de invarianza bajo simetrías discretas, coloca restricciones a los factores de forma para los neutrinos, las cuales en general son diferentes para neutrinos de Majorana y de Dirac.

Si consideramos que los neutrinos son partículas masivas de Dirac, lo cual implica considerar neutrinos tanto de mano derecha, como de mano izquierda. Al evaluar los diagramas de la figura 4.3. Pero considerando que tenemos  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta + \gamma$  se obtiene la siguiente contribución general al MDM y al MDE [20],[59],[4],[15],[91].

$$\mu_{\nu_\alpha \nu_\beta} = \frac{eG_F}{8\sqrt{2}\pi^2} (m_{\nu_\alpha} + m_{\nu_\beta}) \sum_{i=1}^3 U_{\beta i}^\dagger U_{\alpha j} f(a_i) \quad (4.28)$$

y

$$d_{\nu_\alpha \nu_\beta} = \frac{eG_F}{8\sqrt{2}\pi^2} (m_{\nu_\alpha} - m_{\nu_\beta}) \sum_{i=1}^3 U_{\beta i}^\dagger U_{\alpha j} f(a_i) \quad (4.29)$$

con  $a_l = \left(\frac{m_{l\alpha}}{m_W}\right)^2 \ll 1$  y

$$f(a_l) = \frac{3}{4} \left[ 1 + \frac{1}{1-a_l} - 2\frac{a_l}{(1-a_l)^2} - 2\frac{a_l^2}{(1-a_l)^3} \ln a_l \right] \approx \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{1}{2}a_l \right).$$

Al examinar el caso que nos interesa. En el cual no hay cambio de sabor de neutrino, el proceso será  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha + \gamma$  y al remplazar esta condición ( $\nu_\alpha = \nu_\beta$ ) en las ecuaciones (4.28) y (4.29) tendremos que MDE se hace cero y el MDM estará dado por

$$\begin{aligned} \mu_{\nu_\alpha \nu_\beta} &= \frac{eG_F}{4\sqrt{2}\pi^2} m_{\nu_\alpha} \sum_{i=1}^3 |U_{\alpha i}|^2 \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{2} a_l\right) \\ &= \frac{3eG_F}{8\sqrt{2}\pi^2} m_{\nu_\alpha} \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 a_l |U_{\alpha i}|^2\right) \\ &\simeq \frac{3eG_F}{8\sqrt{2}\pi^2} m_{\nu_\alpha}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde hemos despreciado el término  $\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 a_l |U_{\alpha i}|^2$ .

Un aspecto muy interesante, es que solo se tiene MDM para el neutrino si este es masivo, pero este hecho trae como consecuencia que el valor del MDM es muy pequeño al depender de la masa del neutrino [44],[20],[91],[112].

$$\mu_{\nu_\alpha} = 3,2 \times 10^{-19} \mu_B \left(\frac{m_{\nu_\alpha}}{1\text{eV}}\right), \quad (4.31)$$

donde  $\mu_B = \frac{e}{2m_e}$  es el magnetón de Bohr. El valor del MDM en el ME es varios órdenes de magnitud más pequeño que los actuales límites experimentales, los cuales analizaremos en la sección 4.3.

En la tabla 4.1 podemos ver el valor del MDM en el ME, con el anzats de masas para los neutrinos que estamos empleando

$l$	Masa del neutrino $\left(\frac{eV}{c^2}\right)$	MDM
$\nu_e$	0,06089	$1,948 \times 10^{-20} \mu_B$
$\nu_\mu$	0,06754	$2,161 \times 10^{-20} \mu_B$
$\nu_\tau$	0,07147	$2,287 \times 10^{-20} \mu_B$

Cuadro 4.1: MDM del neutrino en el ME con nuestro anzats de masas.

Al considerar neutrinos de Majorana, en el proceso  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta + \gamma$  la contribución al MDM estara dada por [20][111]

$$\mu_{\nu_\alpha \nu_\beta} = \frac{3eG_F}{16\sqrt{2}\pi^2} (m_{\nu_\alpha} + m_{\nu_\beta}) \sum_{i=1}^3 i \text{Im} \left[ U_{\beta i}^\dagger U_{\alpha j} \left(\frac{m_{l_\alpha}}{m_W}\right)^2 \right]. \quad (4.32)$$

Sin embargo, dado que solo nos interesa procesos sin cambio de sabor. Al aplicar dicha condición en la ecuación anterior tenemos

$$\mu_{\nu_\alpha} = \frac{3eG_F}{8\sqrt{2}\pi^2} m_{\nu_\alpha} \sum_{j=1}^3 i \text{Im} \left[ |U_{\alpha j}|^2 \left(\frac{m_{l_\alpha}}{m_W}\right)^2 \right]. \quad (4.33)$$

Debido a que los factores de forma electromagnéticos deben cumplir la condición de hermiticidad, lo cual implica que dichos factores deben ser reales, y los términos de la ecuación (4.33) no cumple dicha condición. Tenemos que el MDM para neutrinos de Majorana sera cero si no se tiene en cuenta FCNC.



Al considerar neutrinos de Majorana, en donde su partícula coincide con su antipartícula, tenemos una reducción a la mitad en los posibles grados de libertad y estados de helicidad (sección 3.5) entre los neutrinos de Dirac y de Majorana; lo cual nos lleva a que las propiedades electromagnéticas del neutrino de Majorana se reduzcan igualmente [90]. En el caso de los factores de forma para neutrinos de Majorana  $F_Q$ ,  $F_M$  y  $F_E$  son matrices antisimétricas y por lo tanto los elementos en la diagonal serían cero; mientras que el  $F_A$  sería simétrica y podría tener elementos diferentes de cero en la diagonal y sería el único termino posible<sup>3</sup>. Es importante darse cuenta que aunque en particular los elementos diagonales para  $F_M$  sean cero, esto no impide tener transiciones y por lo tanto términos de la forma  $\mu_{\nu_i\nu_j} \neq 0$ , como en el caso de los neutrinos de Dirac. Sin embargo, este no es nuestro escenario de interés.

### 4.3. Medidas experimentales para el $\mu_{\nu_a}$

La astrofísica y la cosmología son fuentes para el estudio de las propiedades de las partículas elementales y en particular de los neutrinos, estas fuentes son complementarias con las fuentes terrestres (aceleradores, reactores nucleares, radioactividad natural ... etc.).

El método experimental más sensible y usado en la investigación experimental del MDM del neutrino, son las mediciones de laboratorio por medio de la dispersión elástica de neutrinos y antineutrinos con electrones de reactores, aceleradores y fuentes solares [91].

Para el neutrino electrónico, los límites experimentales para el MDM más actuales provienen de TEXONO 2007 (Taiwan EXperiment On NeutriNO) [106], el cual tiene un valor de  $\mu_{\bar{\nu}_e} < 7,4 \times 10^{-11} \mu_B$  al 90% C.L., y GEMMA 2013. (Germanium Experiment for measurement of Magnetic Moment of Antineutrino) [107], el cual es  $\mu_{\bar{\nu}_e} < 2,9 \times 10^{-11} \mu_B$  al 90% C.L..

En el caso del neutrino muonico, provienen de LSND 2001 (Liquid Scintillating Neutrino Detector) [108], el cual tiene un valor de  $\mu_{\nu_\mu} < 6,8 \times 10^{-10} \mu_B$  al 90% C.L., y BOREXino 2008 (BOREXino es el diminutivo en italiano para BOREX (Boron solar neutrino experiment)) [109], el cual es  $\mu_{\nu_\mu} < 1,9 \times 10^{-10} \mu_B$  al 90% C.L.

<sup>3</sup>Esto puede ser verificado si escribimos

$$\mathcal{L} = \bar{\chi} \sigma_{\nu\mu} (f + g\gamma_5) \chi$$

dado que la conjugación de la carga está definida como

$$\chi^c = \mathbf{C}^\dagger \chi \mathbf{C} = \mathbf{C} \bar{\chi}^T = i\gamma^2 \chi^*$$

donde hemos escogido  $\mathbf{C} = i\gamma^2$  para el campo de Dirac o lo que es equivalente, en términos de los espinores de dos componentes

$$\begin{aligned} \chi_R^c &= (i\sigma^2) \chi_R^* \\ \chi_L^c &= -(i\sigma^2) \chi_L^* \end{aligned}$$

así entonces, reescribiendo  $\mathcal{L}$  en términos de  $\chi^c = \mathbf{C} \bar{\chi}^T$  obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\bar{\chi}^c \sigma_{\nu\mu} (f + g\gamma_5) \chi^c \\ &= -\bar{\chi} \sigma_{\nu\mu} (f + g\gamma_5) \chi \end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho de que para el caso de una partícula de Majorana partícula y anti-partícula son idénticas  $\chi^c = \chi$

Mientras que para el neutrino tauonico, los datos provienen de DONUT 2001(Direct Observation of the NU Tau) [110], el cual tiene un valor de  $\mu_{\nu_\tau} < 3,9 \times 10^{-7} \mu_B$  al 90 % C.L., y BOREXino 2008 [109], cuyo límite es  $\mu_{\nu_\mu} < 1,5 \times 10^{-10} \mu_B$  al 90 % C.L.<sup>4</sup>

## 4.4. Conclusiones del capítulo

El MDM es el factor electromagnético mejor medido para leptones cargados (a parte de la carga eléctrica), cuya correspondencia con el valor predicho por la teoría es increíblemente alta; Esto hace que el MDM sea un test excelente, no solo de la QED de donde provienen la mayoría de correcciones, sino también para el ME debido a las correcciones hadrónicas que introduce.

Para fermiones neutros como el neutrino, los factores de forma electromagnéticos no existen a nivel árbol. Debido a que estos no tienen carga eléctrica y por lo tanto las interacciones con fotones solo pueden aparecer debido a loops con partículas cargadas.

Si consideramos una extensión minimal al ME, en el cual los neutrinos son partículas masivas, el MDM es el factor de forma electromagnético más relevante para analizar. Adicionalmente el MDM es el factor de forma electromagnético con una mejor estimación experimental. Si consideramos el proceso en el cual no hay cambio de sabor, i.e.  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha + \gamma$ , solamente los neutrinos de Dirac presentarán MDM y sobre el análisis del MDM basaremos gran parte de nuestro trabajo. Este hecho resulta entonces fundamental, a la hora de determinar si el neutrino es una partícula de Dirac o de Majorana.

---

<sup>4</sup>En un estudio reciente [111], Valle hace un análisis actualizado de los momentos magnéticos del neutrino, basado en los datos más recientes de Borexino, proponiendo un nuevo límite en el momento magnético efectivo del neutrino de  $3,1 \times 10^{-11} \mu_B$  al 90 % C.L.

# Capítulo 5

## Modelo con dos dobletes de Higgs

Aunque el ME ha tenido mucho éxito describiendo la mayor parte de la fenomenología de partículas elementales, el sector de Higgs permanece aún desconocido; por lo que es válido pensar que este sector no sea como se predice en el ME, con lo cual es posible considerar un modelo con un segundo doblete con base a los siguientes puntos:

- No hay ninguna razón fundamental para asumir que el sector de Higgs deba ser minimal (un solo doblete de Higgs). Por tanto, es válido preguntarse si el sector de Higgs puede ser no minimal. Evocando argumentos de simplicidad, podemos considerar la extensión minimal como el mejor candidato. La extensión más simple compatible con la invariancia gauge, consiste en la inclusión de un segundo doblete con los mismos números cuánticos del primero.
- La jerarquía de los acoples de Yukawa en la tercera generación de quarks, el cociente entre las masas de los quarks top y bottom es del orden de  $m_t/m_b \approx 174/5 \approx 35$ . En ME, las masas de ambos quarks provienen de un solo doblete de Higgs, lo cual implica una jerarquía no muy natural entre los acoples de Yukawa de top y bottom con el Higgs. Sin embargo, si el top recibiera su masa de un doblete (digamos  $\Phi_1$ ) y la masa del bottom proviene de otro doblete (digamos  $\Phi_2$ ), de tal forma que  $\langle \Phi_2 \rangle / \langle \Phi_1 \rangle \sim m_t/m_b$ ; entonces la jerarquía de los acoples de Yukawa de la tercera generación de quarks sería más natural.
- El estudio de procesos raros conocidos como cambios de sabor en corrientes neutras (FCNC)[56]. Aunque al parecer este tipo de procesos están fuertemente suprimidos por los datos experimentales, no parecen violar ninguna ley fundamental de la naturaleza. Sin embargo existen experimentos que muestran oscilación de neutrinos[62] sugiriendo la existencia de FCNC; siendo esto una consecuencia de la masa del neutrino, lo cual sugiere la existencia de acoples raros, que permitan los cambios de sabor en el sector leptónico y en el sector de los quarks.
- Algunos modelos más allá del ME, tienen un límite de baja energía con un sector de Higgs no minimal. Por ejemplo, al menos dos dobletes son necesarios en modelos supersimétricos (SUSY) y el 2HDM tipo II posee los mismos acoples de Yukawa del Modelo Estándar Minimal Supersimétrico (MSSM).

## 5.1. Contribuciones del sector de Higgs en el modelo con dos dobletes

Si introducimos un nuevo doblete, el cual es una réplica del primero, el sector de Higgs contendrá ahora dos dobletes con los mismos números cuánticos

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_1^0 \end{pmatrix} ; \Phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ \phi_2^0 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

con hipercargas  $Y_1 = Y_2 = 1$ . En general, ambos dobletes pueden adquirir VEV

$$\langle \Phi_1 \rangle = \frac{v_1}{\sqrt{2}} ; \langle \Phi_2 \rangle = \frac{v_2}{\sqrt{2}} e^{i\theta}. \quad (5.2)$$

Parametrizaremos los campos en los dobletes de la siguiente forma:

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \frac{h_1 + v_1 + ig_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} ; \Phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ \frac{h_2 + v_2 e^{i\theta} + ig_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

### 5.1.1. El potencial de Higgs

El potencial de Higgs es el sector que determina la estructura del rompimiento espontáneo de la simetría, además de las masas de los Higgses, sus autoestados de masa y sus autointeracciones. En contraste con el potencial de Higgs en modelo estándar, el potencial en el modelo con dos dobletes de Higgs, no es único.

Con el fin de escribir el potencial más general, renormalizable y compatible con la invariancia gauge, es conveniente introducir una base de operadores hermíticos e invariantes gauge:

$$\begin{aligned} \hat{A} &\equiv \Phi_1^\dagger \Phi_1, \quad \hat{B} \equiv \Phi_2^\dagger \Phi_2, \quad \hat{C} \equiv \frac{1}{2} \left( \Phi_1^\dagger \Phi_2 + \Phi_2^\dagger \Phi_1 \right) = \text{Re} \left( \Phi_1^\dagger \Phi_2 \right), \\ \hat{D} &\equiv -\frac{i}{2} \left( \Phi_1^\dagger \Phi_2 - \Phi_2^\dagger \Phi_1 \right) = \text{Im} \left( \Phi_1^\dagger \Phi_2 \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Escribimos todas las posibles interacciones hermíticas bilineales y cuárticas compatibles con la invariancia gauge

$$\begin{aligned} V_g(\Phi_1, \Phi_2) &= -\mu_1^2 \hat{A} - \mu_2^2 \hat{B} - \mu_3^2 \hat{C} - \mu_4^2 \hat{D} + \lambda_1 \hat{A}^2 + \lambda_2 \hat{B}^2 + \lambda_3 \hat{C}^2 + \lambda_4 \hat{D}^2 \\ &\quad + \lambda_5 \hat{A} \hat{B} + \lambda_6 \hat{A} \hat{C} + \lambda_8 \hat{A} \hat{D} + \lambda_7 \hat{B} \hat{C} + \lambda_9 \hat{B} \hat{D} + \lambda_{10} \hat{C} \hat{D}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Este lagrangiano es mucho más complejo que el de ME, dado que en el potencial, tenemos catorce parámetros libres. Si asumimos que el potencial de Higgs posee una simetría de conjugación de carga (invariancia  $C$ ), el número de parámetros libres se reduce a diez ( la invariancia ante conjugación de carga es equivalente a la invariancia  $CP$ , dado que todos los campos de Higgs son escalares). Bajo conjugación de carga, un doblete de Higgs de hipercarga 1, transforma como  $\Phi_i \rightarrow e^{i\alpha_i} \Phi_i^*$  donde los parámetros  $\alpha_i$  son arbitrarios. En consecuencia, bajo conjugación de carga se obtiene  $\Phi_i^\dagger \Phi_j \rightarrow e^{i(\alpha_j - \alpha_i)} \Phi_j^\dagger \Phi_i$ . En particular, si escogemos  $\alpha_i = \alpha_j$  el operador  $\hat{D}$  invierte su signo bajo conjugación  $-C$ , en tanto que los otros operadores permanecen invariantes, conduciendo al potencial

$$\begin{aligned}
 V(\Phi_1, \Phi_2) = & -\mu_1^2 \widehat{A} - \mu_2^2 \widehat{B} - \mu_3^2 \widehat{C} + \lambda_1 \widehat{A}^2 + \lambda_2 \widehat{B}^2 + \lambda_3 \widehat{C}^2 + \lambda_4 \widehat{D}^2 \\
 & + \lambda_5 \widehat{A}\widehat{B} + \lambda_6 \widehat{A}\widehat{C} + \lambda_7 \widehat{B}\widehat{C}.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Hay dos maneras de imponer de forma natural la invariancia  $CP$  para el mínimo del potencial:

- Exigir invariancia bajo la simetría  $Z_2$ , donde  $\Phi_1 \rightarrow \Phi_1$ ,  $\Phi_2 \rightarrow -\Phi_2$ . El potencial resultante, que se denotará como  $V'_A$  es

$$V'_A = -\mu_1^2 \widehat{A} - \mu_2^2 \widehat{B} + \lambda_1 \widehat{A}^2 + \lambda_2 \widehat{B}^2 + \lambda_3 \widehat{C}^2 + \lambda_4 \widehat{D}^2 + \lambda_5 \widehat{A}\widehat{B} \tag{5.7}$$

y corresponde a asignar  $\mu_3^2 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0$  en (5.6).

- Al imponer la simetría global  $\Phi_2 \rightarrow e^{i\alpha}\Phi_2$ . Este potencial (llamado  $V'_B$ ) se escribe

$$V'_B = -\mu_1^2 \widehat{A} - \mu_2^2 \widehat{B} + \lambda_1 \widehat{A}^2 + \lambda_2 \widehat{B}^2 + \lambda_3 (\widehat{C}^2 + \widehat{D}^2) + \lambda_5 \widehat{A}\widehat{B} \tag{5.8}$$

y se obtiene haciendo  $\mu_3^2 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0$  y  $\lambda_3 = \lambda_4$  en (5.6).

A partir de ahora, solo consideraremos el caso de conservación de  $CP$ , para el cual ambos VEV pueden ser tomados reales. En tal caso el sector de Higgs consiste del siguiente espectro, dos Higgses pares en  $CP$  ( $H^0, h^0$ ), un Higgs impar en  $CP$  ( $A^0$ ), dos Higgses cargados ( $H^\pm$ ), y los bosones de Goldstone ( $G^\pm, G^0$ ) correspondientes a  $W^\pm, Z$  respectivamente.

Un parámetro importante en este modelo, es la relación entre los valores esperados en el vacío

$$\tan \beta = \frac{v_2}{v_1}, \tag{5.9}$$

donde  $v_1$  y  $v_2$  son los valores esperados en el vacío de los dobletes de Higgs [64], con valores entre  $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ . Las contribuciones debidas al 2HDM son muy sensibles a este parámetro.

### 5.1.2. El sector cinético

Teniendo en cuenta el sector cinético del lagrangiano del Higgs de modelo estándar, es inmediato extenderlo de la forma

$$\mathcal{L}_{kin} = (D_\mu \Phi_1)^\dagger (D^\mu \Phi_1) + (D_\mu \Phi_2)^\dagger (D^\mu \Phi_2). \tag{5.10}$$

Donde la derivada covariante está definida por la ecuación (2.14). Este Lagrangiano dota de masa a los bosones gauge, describe las interacciones entre bosones gauge - bosones de Higgs y las autointeracciones de los bosones gauge. En contraste con el potencial de Higgs y el potencial de Yukawa, el sector cinético es básicamente único debido a la invariancia gauge <sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Sin embargo, para algunos potenciales y Lagrangianos de Yukawa es posible rotar los dobletes de tal forma que solo uno de ellos adquiere VEV, como veremos más adelante. En tal caso el término cinético es básicamente el mismo pero tomando (digamos)  $v_2 = 0$  i.e.  $\tan \beta = 0$ .

### 5.1.3. El Lagrangiano de Yukawa

El Lagrangiano más general invariante gauge que acopla los campos de Higgs a fermiones se escribe como:

$$-\mathcal{L}_Y = \eta_{ij}^{U,0} \overline{Q}_{iL}^0 \tilde{\Phi}_1 U_{jR}^0 + \eta_{ij}^{D,0} \overline{Q}_{iL}^0 \Phi_1 D_{jR}^0 + \xi_{ij}^{U,0} \overline{Q}_{iL}^0 \tilde{\Phi}_2 U_{jR}^0 + \xi_{ij}^{D,0} \overline{Q}_{iL}^0 \Phi_2 D_{jR}^0 + \text{sector leptónico} + h.c. \quad (5.11)$$

donde  $\Phi_{1,2}$  representa los dobletes de Higgs,  $\tilde{\Phi}_{1,2} \equiv i\sigma_2 \Phi_{1,2}$ ;  $\eta_{ij}^0$  y  $\xi_{ij}^0$  son matrices no diagonales  $3 \times 3$  y  $i, j$  denota índices de familia.  $D_R^0$  se refiere a los tres singletes de isospín débil de quarks tipo down  $D_R^0 \equiv (d_R^0, s_R^0, b_R^0)^T$ ,  $U$  se refiere a los tres singletes de isospín débil de quarks tipo up  $U_R^0 \equiv (u_R^0, c_R^0, t_R^0)^T$ . Finalmente,  $\overline{Q}_{iL}^0$  denota los dobletes izquierdos de isospín débil de quarks. El superíndice “0” indica que los campos no son aún autoestados de masa.

La ecuación (5.11) escrita de forma específica para el sector leptónico será

$$-\mathcal{L}_Y = \eta_{i,j}^{\nu,0} \overline{l}_{iL}^0 \tilde{\Phi}_1 \nu_{jR}^0 + \eta_{i,j}^{E,0} \overline{l}_{iL}^0 \Phi_1 E_{jR}^0 + \xi_{i,j}^{\nu,0} \overline{l}_{iL}^0 \tilde{\Phi}_2 \nu_{jR}^0 + \xi_{i,j}^{E,0} \overline{l}_{iL}^0 \Phi_2 E_{jR}^0 + h.c. \quad (5.12)$$

donde  $E_R^0$  se refiere a los tres singletes de los leptones cargados,  $\overline{l}_{iL}^0$  denota los dobletes izquierdos de isospín débil de leptones. Hemos introducido adicionalmente masa para los neutrinos de Dirac al incluir singletes de mano derecha para los neutrinos  $\nu_{jR}$ .

En el caso más general para (5.11) y (5.12), ambos bosones de Higgs se acoplan (y en consecuencia dan masa) a los sectores up y down simultáneamente. Sin embargo, esto conduce a procesos FCNC<sup>2</sup> a nivel árbol. Lo cual ocurre básicamente porque, al rotar los espinores tipo down que describen autoestados fermiónicos de gauge, para encontrar los autoestados fermiónicos de masa, no podemos diagonalizar simultáneamente<sup>3</sup> el par de matrices  $\eta^{D,0}, \xi^{D,0}$ . Situación similar ocurre con el sector up  $\eta^{U,0}, \xi^{U,0}$ .

Es posible suprimir los FCNC a nivel árbol en los Lagrangianos (5.11) y (5.12), implementando la simetría discreta  $Z_2[1]$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &\rightarrow \Phi_1 & \text{y} & \Phi_2 \rightarrow -\Phi_2 \\ D_{jR} &\rightarrow \pm D_{jR} & \text{y} & U_{jR} \rightarrow U_{jR} \\ E_{jR} &\rightarrow \pm E_{jR} & \text{y} & \nu_{jR} \rightarrow -\nu_{jR} \end{aligned} \quad (5.13)$$

al exigir invariancia bajo esta simetría encontramos dos casos:

- 2HDM tipo I
- 2HDM tipo II

#### El 2HDM tipo I

Al considerar únicamente el sector leptónico, y aplicando la condición  $E_{jR} \rightarrow -E_{jR}$ , tenemos que  $\Phi_1$  desacopla del sector de Yukawa y solo  $\Phi_2$  se acopla y dota de masa a los sectores up y down. Este caso es conocido como 2HDM tipo I, de lo cual el lagrangiano de Yukawa nos queda:

$$-\mathcal{L}_Y (\text{type I}) = \eta_{ij}^{E,0} \overline{l}_{iL}^0 \tilde{\Phi}_2 \nu_{jR}^0 + \xi_{ij}^{E,0} \overline{l}_{iL}^0 \Phi_2 E_{jR}^0 + h.c. \quad (5.14)$$

<sup>2</sup>Los procesos FCNC mediados por intercambio de Higgses están ausentes en un modelo con múltiples dobletes si todos los fermiones de una carga eléctrica dada se acoplan a no más de un doblete.

<sup>3</sup>Por supuesto, se puede tener la posibilidad de que una transformación diagonalice ambas matrices simultáneamente, sin embargo esta no sería una suposición muy natural.

Nótese que solo un doblete de Higgs se acopla a los fermiones, lo cual lo hace similar al de ME. Pero esto no significa que las interacciones fermiónicas sean similares a las de ME, esto se debe a que cuando reemplazamos los autoestados gauge escalares contenidos en el doblete por sus correspondientes autoestados de masa, estamos tomando en cuenta la mezcla de ambos dobletes proveniente del potencial para obtener dichos autoestados de masa.

Cuando expandimos en términos de los autoestados de masa, el Lagrangiano para el sector leptónico obtenemos

$$\begin{aligned}
 -\mathcal{L}_Y \text{ (tipo I)} &= \frac{g}{2M_W \sin \beta} \bar{l} M_l^{diag} l (\sin \alpha H^0 + \cos \alpha h^0) + \frac{ig \cot \beta}{2M_W} \bar{l} M_l^{diag} \gamma_5 l A^0 \\
 &+ \frac{g}{2M_W \sin \beta} \bar{\nu} M_\nu^{diag} \nu (\sin \alpha H^0 + \cos \alpha h^0) - \frac{ig \cot \beta}{2M_W} \bar{\nu} M_\nu^{diag} \gamma_5 \nu A^0 \\
 &+ \frac{g \cot \beta}{\sqrt{2} M_W} \bar{\nu} \left( K M_l^{diag} P_R - M_\nu^{diag} K P_L \right) l H^\pm - \frac{ig}{2M_W} \bar{\nu} M_\nu^{diag} \gamma_5 \nu G_Z^0 + \frac{ig}{2M_W} \bar{l} M_l^{diag} \gamma_5 l G_Z^0 \\
 &+ \frac{g}{\sqrt{2} M_W} \bar{\nu} \left( K M_l^{diag} P_R - M_\nu^{diag} K P_L \right) l G_W^+ + h.c. \tag{5.15}
 \end{aligned}$$

Debido a que solo nos interesa la contribución debida al Higgs cargado, ya que este se acopla al neutrino y a su leptón cargado. Tenemos

$$-\mathcal{L}_Y \text{ (tipo I)} = \frac{g \cot \beta}{\sqrt{2} M_W} \bar{\nu} \left( U_{PMNS} M_l^{diag} P_R - M_\nu^{diag} U_{PMNS} P_L \right) l H^\pm + h.c. \tag{5.16}$$

es conveniente recordar que la matriz  $K$  es la matriz  $CKM$  en el sector de los quarks, mientras que en el caso del sector leptónico esta matriz será  $U_{PMNS}$  (analizada en la sección 3.2.2), así mismo  $M_l^{diag}$  hace referencia a las masas de los leptones cargados y  $M_\nu^{diag}$  a la masa de los neutrinos (lo cual implica que hemos considerado neutrinos de mano derecha).

Si describimos el acople del vértice  $\nu - l - H^\pm$  de forma general como  $(aP_L + bP_R)$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes que dependen del modelo, podemos igualarlo con la ecuación (5.16) y de esta forma conocer la estructura de las constantes. Por lo tanto

$$aP_L + bP_R = \frac{g \cot \beta}{\sqrt{2} M_W} \bar{\nu} \left( U_{PMNS} M_l^{diag} P_R - M_\nu^{diag} U_{PMNS} P_L \right) l H^\pm.$$

Si tenemos en cuenta que la constante de Fermi<sup>4</sup> la podemos escribir como

$$G_F = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{g^2}{M_W^2} = 1,1663787(6) \times 10^{-5} GeV^{-2}, \tag{5.17}$$

donde  $g$  es la constante de acople de la interacción débil entonces

$$\frac{g \cot \beta}{\sqrt{2} M_W} = \frac{2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F}}{\tan \beta}.$$

Dado que los términos de acople de los vértices, son diferentes para cada sabor. Es necesario calcular cada uno de ellos igualando término a término.

<sup>4</sup>La fuerza de la constante de interacción de Fermi esta dada por la constante de acople de Fermi  $G_F$ , el valor mas preciso de esta proviene de la medida de la vida media del muón la cual es inversamente proporcional a  $G_F$

Para el acople  $\bar{\nu}_e e H^+$  tenemos

$$\begin{aligned}
 \bar{\nu}_e e H^+ &= \frac{2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F}}{\tan \beta} \left( U_{PMNS} M_l^{diag} P_R - M_\nu^{diag} U_{PMNS} P_L \right) \\
 &= \frac{2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F}}{\tan \beta} \left[ \begin{aligned} &\left( U_{11} M_{l_{11}}^{diag} P_R - M_{\nu_{11}}^{diag} U_{11} P_L \right) + \left( U_{12} M_{l_{21}}^{diag} P_R - M_{\nu_{12}}^{diag} U_{21} P_L \right) \\ &+ \left( U_{13} M_{l_{31}}^{diag} P_R - M_{\nu_{13}}^{diag} U_{31} P_L \right) \end{aligned} \right] \\
 &= \frac{2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F}}{\tan \beta} (0,822 m_e P_R - 0,822 m_{\nu_e} P_L) ,
 \end{aligned}$$

hemos renombrado la matriz  $U_{PMNS} = U$ . Al remplazar los términos de la matriz  $U_{PMNS}$  (3.22) y considerando que la matriz leptónica, esta compuesta solo por términos diagonales, obtenemos

$$\begin{aligned}
 a &= -\frac{2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F}}{\tan \beta} 0,822 m_{\nu_e} , \\
 b &= \frac{2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F}}{\tan \beta} 0,822 m_e .
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Para el acople  $\bar{\nu}_\mu \mu H^+$ , haciendo un proceso identico que el realizado en el acople  $\bar{\nu}_e e H^+$  obtenemos

$$\begin{aligned}
 \bar{\nu}_\mu \mu H^+ &= \frac{2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F}}{\tan \beta} \left[ \begin{aligned} &\left( U_{21} M_{l_{12}}^{diag} P_R - M_{\nu_{21}}^{diag} U_{12} P_L \right) + \left( U_{22} M_{l_{22}}^{diag} P_R - M_{\nu_{22}}^{diag} U_{22} P_L \right) \\ &+ \left( U_{23} M_{l_{32}}^{diag} P_R - M_{\nu_{23}}^{diag} U_{32} P_L \right) \end{aligned} \right] \\
 &= \frac{2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F}}{\tan \beta} (0,648 m_\mu P_R - 0,648 m_{\nu_\mu} P_L) ,
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 a &= -\frac{2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F}}{\tan \beta} 0,648 m_{\nu_\mu} , \\
 b &= \frac{2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F}}{\tan \beta} 0,648 m_\mu .
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Finalmente para el acople  $\bar{\nu}_\tau \tau H^+$

$$\begin{aligned}
 \bar{\nu}_\tau \tau H^+ &= \frac{2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F}}{\tan \beta} \left[ \begin{aligned} &\left( U_{31} M_{l_{13}}^{diag} P_R - M_{\nu_{31}}^{diag} U_{13} P_L \right) + \left( U_{32} M_{l_{23}}^{diag} P_R - M_{\nu_{32}}^{diag} U_{23} P_L \right) \\ &+ \left( U_{33} M_{l_{33}}^{diag} P_R - M_{\nu_{33}}^{diag} U_{31} P_L \right) \end{aligned} \right] \\
 &= \frac{2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F}}{\tan \beta} (0,774 m_\tau P_R - 0,774 m_{\nu_\tau} P_L) ,
 \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
 a &= -\frac{2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F}}{\tan \beta} 0,774 m_{\nu_\tau} , \\
 b &= \frac{2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F}}{\tan \beta} 0,774 m_\tau .
 \end{aligned} \tag{5.21}$$



**El 2HDM tipo II**

Al considerar únicamente el sector leptónico, y aplicando la condición  $E_{jR} \rightarrow E_{jR}$ , tenemos que  $\Phi_1$  se acopla y dota de masa al sector leptónico cargado, mientras que  $\Phi_2$  se acopla y dota de masa únicamente al sector de neutrinos. En este caso hablamos del 2HDM tipo II, y el lagrangiano de Yukawa nos queda:

$$-\mathcal{L}_Y = \eta_{ij}^{D,0} \bar{l}_{iL}^0 \Phi_1 E_{jR}^0 + \xi_{ij}^{\nu,0} \bar{l}_{iL}^0 \tilde{\Phi}_2 \nu_{jR}^0 + h.c. \quad (5.22)$$

En este caso, el Lagrangiano para el sector leptónico expandido será

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y \text{ (tipo II)} &= \frac{g}{2M_W \cos \beta} \bar{l} M_l^{diag} l (\cos \alpha H^0 - \sin \alpha h^0) + \frac{ig \tan \beta}{2M_W} \bar{l} M_l^{diag} \gamma_5 l A^0 \\ &+ \frac{g}{2M_W \sin \beta} \bar{\nu} M_\nu^{diag} \nu (\sin \alpha H^0 + \cos \alpha h^0) - \frac{ig \cot \beta}{2M_W} \bar{\nu} M_\nu^{diag} \gamma_5 \nu A^0 \\ &+ \frac{g}{\sqrt{2}M_W} \bar{\nu} \left[ \left( \cot \beta M_\nu^{diag} K P_L + \tan \beta K M_l^{diag} P_R \right) \right] l H^+ - \frac{ig}{2M_W} \bar{\nu} M_\nu^{diag} \gamma_5 \nu G^0 \\ &+ \frac{ig}{2M_W} \bar{l} M_l^{diag} \gamma_5 l G^0 + \frac{g}{\sqrt{2}M_W} \bar{\nu} \left[ \left( K M_l^{diag} P_R - M_\nu^{diag} K P_L \right) \right] l G_W^+ + h.c. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Debido a que solo nos interesa la contribución debida al Higgs cargado tenemos

$$-\mathcal{L}_Y \text{ (tipo II)} = \frac{g}{\sqrt{2}M_W} \bar{\nu} \left[ \left( \cot \beta M_\nu^{diag} U_{PMNS} P_L + \tan \beta U_{PMNS} M_l^{diag} P_R \right) \right] l H^\pm + h.c.$$

Por lo tanto, de forma general para el vértice  $\nu - l - H^\pm$  tenemos

$$a P_L + b P_R = \frac{g}{\sqrt{2}M_W} \bar{\nu} \left( \cot \beta M_\nu^{diag} U_{PMNS} P_L + \tan \beta U_{PMNS} M_l^{diag} P_R \right) l H^\pm.$$

Al igual que en el 2HDM tipo I podemos escribir

$$\frac{g}{\sqrt{2}M_W} = 2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F}.$$

Dado que los valores de  $a$  y  $b$  dependen de cada sabor, debemos remplazar los valores de la matriz  $U_{PMNS}$  (3.2.2),  $M_l^{diag}$  y  $M_\nu^{diag}$ . Por lo tanto para el acople  $\bar{\nu}_e e H^+$  obtenemos

$$\begin{aligned} &\bar{\nu}_e e H^\pm \\ &= 2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F} \left( \cot \beta M_\nu^{diag} U P_L + \tan \beta U M_l^{diag} P_R \right) \\ &= 2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F} \left[ \cot \beta (M_{\nu_{11}}^{diag} U_{11} + M_{\nu_{12}}^{diag} U_{21} + M_{\nu_{13}}^{diag} U_{31}) P_L + \tan \beta (U_{11} M_{l_{11}}^{diag} + U_{12} M_{l_{21}}^{diag} + U_{13} M_{l_{31}}^{diag}) P_R \right] \\ &= 2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F} (0,822 \tan \beta m_e P_R + 0,822 \cot \beta m_{\nu_e} P_L), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \frac{2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F}}{\tan \beta} 0,822 m_{\nu_e}, \\ b &= 2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F} \tan \beta 0,822 m_e. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Para el acople  $\bar{\nu}_\mu \mu H^\pm$  tenemos

$$\begin{aligned} & \bar{\nu}_\mu \mu H^\pm \\ &= 2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F} \left[ \cot \beta (M_{\nu_{21}}^{diag} U_{12} + M_{\nu_{22}}^{diag} U_{22} + M_{\nu_{23}}^{diag} U_{32}) P_L + \tan \beta (U_{21} M_{l_{12}}^{diag} + U_{22} M_{l_{22}}^{diag} + U_{23} M_{l_{32}}^{diag}) P_R \right] \\ &= 2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F} (0,648 \cot \beta m_{\nu_\mu} P_L + 0,648 \tan \beta m_\mu P_R) , \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} a &= \frac{2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F}}{\tan \beta} 0,648 m_{\nu_\mu} , \\ b &= 2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F} \tan \beta 0,648 m_\mu . \end{aligned} \quad (5.25)$$

Finalmente para el acople  $\bar{\nu}_\tau \tau H^\pm$

$$\begin{aligned} & \bar{\nu}_\tau \tau H^\pm \\ &= 2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F} \left[ \cot \beta (M_{\nu_{31}}^{diag} U_{13} + M_{\nu_{32}}^{diag} U_{23} + M_{\nu_{33}}^{diag} U_{33}) P_L + \tan \beta (U_{31} M_{l_{13}}^{diag} + U_{32} M_{l_{23}}^{diag} + U_{33} M_{l_{33}}^{diag}) P_R \right] \\ &= 2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F} (0,774 \cot \beta m_{\nu_\tau} P_L + 0,774 \tan \beta m_\tau P_R) , \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} a &= \frac{2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F}}{\tan \beta} 0,774 m_{\nu_\tau} , \\ b &= 2^{\frac{3}{4}} \sqrt{G_F} \tan \beta 0,774 m_\tau . \end{aligned} \quad (5.26)$$

### El 2HDM tipo III

Al tomar todos los términos en el Lagrangiano (5.12), tenemos que los dos dobletes se acoplan y dotan de masa, tanto a los leptones cargados, como a los neutrinos. En tal caso se habla del 2HDM tipo III [64]. El lagrangiano de Yukawa para el sector leptónico es

$$-\mathcal{L}_Y = \tilde{\eta}_{i,j}^{E,0} \bar{L}_{iL}^0 \Phi'_1 E_{jR}^0 + \tilde{\xi}_{i,j}^{E,0} \bar{L}_{iL}^0 \Phi'_2 E_{jR}^0 + \tilde{\eta}_{i,j}^{\nu,0} \bar{L}_{iL}^0 \tilde{\Phi}'_1 \nu_{jR}^0 + \tilde{\xi}_{i,j}^{\nu,0} \bar{L}_{iL}^0 \tilde{\Phi}'_2 \nu_{jR}^0 + h.c. \quad (5.27)$$

En este modelo los acoples diagonales del bosón de Higgs pseudoescalar y el bosón de Higgs cargado a fermiones, no son proporcionales a la masa del fermión como es el caso de 2HDM tipo I y II. Estos ahora son proporcionales a  $\xi_{ff}$ , los cuales son los elementos diagonales de la matriz de mezcla  $\xi$ .

Haciendo una redefinición de los isodoubletes escalares como:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\theta} \sin \theta \\ -\sin \theta & e^{-i\theta} \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi'_1 \\ \Phi'_2 \end{pmatrix} \\ v &= v_2 - v_1 . \end{aligned}$$

La cual no tiene consecuencias físicas debido a que es solo un cambio de base. Sin embargo, permite escoger que el isodoublete  $\Phi'_1$  sea el responsable de dotar de masa a los fermiones y que  $\Phi'_2$  se acople a los fermiones responsables de los terminos para FCNC, por lo tanto podemos reescribir la densidad lagrangiana de Yukawa como

$$-\mathcal{L}_Y = \eta_{i,j}^E \bar{L}_{iL} H_1 E_{jR} + \xi_{i,j}^E \bar{L}_{iL} H_2 E_{jR} + \eta_{i,j}^\nu \bar{L}_{iL} \tilde{H}_1 \nu_{jR} + \xi_{i,j}^\nu \bar{L}_{iL} \tilde{H}_2 \nu_{jR} + h.c. \quad (5.28)$$

En esta base, sólo los acoples de Yukawa los cuales estan representados por las matrices  $\eta_i$  del doblete  $H_1$ , generan masas para los fermiones

$$\begin{aligned}\eta^\nu &= \frac{\sqrt{2}}{v}M^\nu = \tilde{\eta}^\nu \cos \beta + \tilde{\xi}^\nu e^{-i\nu} \sin \beta , \\ \eta^E &= \frac{\sqrt{2}}{v}M^E = \tilde{\eta}^E \cos \beta + \tilde{\xi}^E e^{i\nu} \sin \beta .\end{aligned}$$

Mientras que para los acoples de Yukawa  $\xi_i$  tenemos

$$\begin{aligned}\xi^\nu &= -\tilde{\eta}^\nu \sin \beta + \tilde{\xi}^\nu e^{-i\nu} \cos \beta , \\ \xi^E &= -\tilde{\eta}^E \sin \beta + \tilde{\xi}^E e^{i\nu} \cos \beta .\end{aligned}$$

Estas matrices pueden ser bidiagonalizadas y no dar lugar a FCNC a nivel de árbol, mediante una transformación biunitaria involucrando las matrices  $V_L^\nu, V_R^\nu, V_L^E$  y  $V_R^E$ . Por lo tanto, los parámetros de Yukawa pueden ser expresados ahora en la base de masas de los fermiones, en donde las matrices de masa  $\bar{\eta}^\nu$  y  $\bar{\eta}^E$  serán diagonales y reales

$$\begin{aligned}\bar{\eta}^\nu &= \frac{\sqrt{2}}{v}M^\nu = V_L^\nu \eta^\nu V_R^{\nu\dagger} , \quad M_{ij}^\nu = \delta_{ij} m_i^\nu , \\ \bar{\eta}^E &= \frac{\sqrt{2}}{v}M^E = V_L^E \eta^E V_R^{E\dagger} , \quad M_{ij}^E = \delta_{ij} m_i^E ,\end{aligned}$$

y los acoples restantes asociados al FCNC serán

$$\begin{aligned}\bar{\xi}^\nu &= V_L^\nu \xi^\nu V_R^{\nu\dagger} , \\ \bar{\xi}^E &= V_L^E \xi^E V_R^{E\dagger} .\end{aligned}$$

Finalmente, para reescribir el lagrangiano (5.28) en términos de los autoestados de masa debemos hacer una transformación unitaria sobre los singletes

$$\begin{aligned}E_{L,R} &= V_{L,R}^E E_{L,R}^0 , \\ \nu_{L,R} &= V_{L,R}^\nu \nu_{L,R}^0 .\end{aligned}$$

Cuando se realiza la bidiagonalización, el cambio de sabor en corrientes neutras lo podemos escribir como

$$\mathcal{L}_{FCNC} = \bar{\xi}_{i,j}^\nu \bar{L}_{iL} \tilde{H}_2 \nu_{jR} + \bar{\xi}_{i,j}^E \bar{L}_{iL} H_2 E_{jR} + h.c. \quad (5.29)$$

donde  $V_R^{E,\nu}$  es completamente desconocido y los términos de las matrices  $\xi^{E,\nu}$  son arbitrarios con el fin de analizar procesos específicos. Bajo ciertas condiciones específicas podemos hacer que la masa fermiónica tenga estructura jerárquica, lo cual se logra al imponer una u otra textura [68]. Podemos proponer que el FCNC de los acoples sea del orden de la media geométrica de los acoplamiento de Yukawa de los dos fermiones

$$\xi_{ij} = \lambda_{ij} \frac{\sqrt{2m_i m_j}}{v} \quad (5.30)$$

donde  $\lambda_{ij}$  son del orden de uno, esta condición se denomina ansatz Sher-Cheng.

Por lo tanto, es posible escribir el lagrangiano (5.28) en términos de las corrientes neutras, en la base de masa de los fermiones

$$\begin{aligned}
 -\mathcal{L}_{Y(\text{neutro})} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^3 (\eta_{ii}^E \bar{L}_{iL} E_{iR} (\phi_1^0) + \eta_{ii}^\nu \bar{\nu}_{iL} \nu_{iR} (\phi_1^0)^* + h.c.) \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i,j=1}^3 (\xi_{ij}^E \bar{L}_{iL} E_{jR} (\phi_2^0) + \xi_{ij}^\nu \bar{\nu}_{iL} \nu_{jR} (\phi_2^0)^* + h.c.) ,
 \end{aligned}$$

donde hemos usado la parametrización(5.3). De otro lado, la parte de corriente cargada de la densidad lagrangiana en la base de masa fermiónica la podemos escribir como

$$\begin{aligned}
 -\mathcal{L}_{Y(\text{cargado})} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^3 [(U_{PMNS} \eta_{ij}^E) \bar{\nu}_{iL} E_{jR} (\phi_1^+) + (U_{PMNS} \eta_{ij}^\nu) \bar{L}_{iL} \nu_{jR} (\phi_1^+)^* + h.c.] \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i,j=1}^3 [(U_{PMNS} \xi_{ij}^E) \bar{\nu}_{iL} E_{jR} (\phi_2^+) + (U_{PMNS} \xi_{ij}^U) \bar{L}_{iL} \nu_{jR} (\phi_2^+)^* + h.c.] ,
 \end{aligned}$$

donde hemos escrito  $U = U_{PMNS}$ . Por lo tanto la regla de Feynman para el sector cargado será

$$\bar{\nu}_i E_j H^\pm = U_{ik} \xi_{kj}^E P_R - \xi_{ik}^\nu U_{kj} P_L, \quad (5.31)$$

teniendo en cuenta el anzats Cheng-Sher, podemos escoger la textura de la matriz, para el sector leptónico [69],[70], [71] y hacer su extrapolación al sector de neutrinos. Esto asumiendo la misma jerarquía de masas del sector leptónico cargado en el sector de neutrinos.

$$\begin{aligned}
 \xi^E &= \begin{pmatrix} 0 & \times & 0 \\ \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix} = \lambda_l \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{m_e m_\mu} & 0 \\ \sqrt{m_e m_\mu} & m_\mu & \sqrt{m_\tau m_\mu} \\ 0 & \sqrt{m_\tau m_\mu} & m_\tau \end{pmatrix}, \\
 \xi^\nu &= \lambda_\nu \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{m_{\nu_e} m_{\nu_\mu}} & 0 \\ \sqrt{m_{\nu_e} m_{\nu_\mu}} & m_{\nu_\mu} & \sqrt{m_{\nu_\tau} m_{\nu_\mu}} \\ 0 & \sqrt{m_{\nu_\tau} m_{\nu_\mu}} & m_{\nu_\tau} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Si tenemos en cuenta que  $\nu_i$  son los autoestados de sabor de los neutrinos y  $E_j$  los autoestados de sabor de los leptones cargados.

Procedemos ahora a factorizar los términos  $aP_L + bP_R$  del vertice  $\nu - l - H^\pm$ . De tal forma que al remplazar los términos de la matriz  $U_{PMNS}$  (3.22) y de la textura de la matriz  $\xi^{E,\nu}$  (5.32). Obtenemos para el acople  $\bar{\nu}_e e H^\pm$

$$\begin{aligned}
 \bar{\nu}_e e H^+ &= U_{1k} \lambda_l \xi_{k1}^E P_R - \lambda_\nu \xi_{1k}^\nu U_{k1} P_L \\
 &= (U_{11} \lambda_l \xi_{11}^E P_R - \lambda_\nu \xi_{11}^\nu U_{11} P_L) + (U_{12} \lambda_l \xi_{21}^E P_R - \lambda_\nu \xi_{12}^\nu U_{21} P_L) + (U_{13} \lambda_l \xi_{31}^E P_R - \lambda_\nu \xi_{13}^\nu U_{31} P_L) \\
 &= -\lambda_\nu (\xi_{11}^\nu U_{11} + \xi_{12}^\nu U_{21} + \xi_{13}^\nu U_{31}) P_L + \lambda_l (U_{11} \xi_{11}^E + U_{12} \xi_{21}^E + U_{13} \xi_{31}^E) P_R \\
 &= -0,451 \lambda_\nu \frac{\sqrt{m_{\nu_e} m_{\nu_\mu}}}{v} P_L + 0,547 \lambda_l \frac{\sqrt{m_e m_\mu}}{v} P_R ,
 \end{aligned} \quad (5.33)$$

donde

$$\begin{aligned}
 a &= -0,451 \lambda_\nu \frac{\sqrt{m_{\nu_e} m_{\nu_\mu}}}{v}, \\
 b &= 0,547 \lambda_l \frac{\sqrt{m_e m_\mu}}{v}.
 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Para el acople  $\bar{\nu}_\mu \mu H^+$  tenemos

$$\begin{aligned}
 \bar{\nu}_\mu \mu H^+ &= U_{2k} \lambda_l \xi_{k2}^E P_R - \lambda_\nu \xi_{2k}^\nu U_{k2} P_L \\
 &= (U_{21} \lambda_l \xi_{12}^E P_R - \lambda_\nu \xi_{21}^\nu U_{12} P_L) + (U_{22} \lambda_l \xi_{22}^E P_R - \lambda_\nu \xi_{22}^\nu U_{22} P_L) + (U_{23} \lambda_l \xi_{32}^E P_R - \lambda_\nu \xi_{23}^\nu U_{32} P_L) \\
 &= -\lambda_\nu (\xi_{21}^\nu U_{12} + \xi_{22}^\nu U_{22} + \xi_{23}^\nu U_{32}) P_L + \lambda_l (U_{21} \xi_{12}^E + U_{22} \xi_{22}^E + U_{23} \xi_{32}^E) P_R \\
 &= -\frac{\lambda_\nu}{v} (0,547 \sqrt{m_{\nu_e} m_{\nu_\mu}} + 0,648 m_{\nu_\mu} + 0,529 \sqrt{m_{\nu_\tau} m_{\nu_\mu}}) P_L \\
 &\quad + \frac{\lambda_l}{v} (0,451 \sqrt{m_e m_\mu} + 0,648 m_\mu + 0,614 \sqrt{m_\tau m_\mu}) P_R,
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 a &= -\frac{\lambda_\nu}{v} (0,547 \sqrt{m_{\nu_e} m_{\nu_\mu}} + 0,648 m_{\nu_\mu} + 0,529 \sqrt{m_{\nu_\tau} m_{\nu_\mu}}) , \\
 b &= \frac{\lambda_l}{v} (0,451 \sqrt{m_e m_\mu} + 0,648 m_\mu + 0,614 \sqrt{m_\tau m_\mu}) .
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

Finalmente para el acople  $\bar{\nu}_\tau \tau H^+$  tenemos

$$\begin{aligned}
 \bar{\nu}_\tau \tau H^+ &= (U_{3k} \lambda_l \xi_{k3}^E P_R - \lambda_\nu \xi_{3k}^\nu U_{k3} P_L) \\
 &= U_{31} \lambda_l \xi_{13}^E P_R - \lambda_\nu \xi_{31}^\nu U_{13} P_L + U_{32} \lambda_l \xi_{23}^E P_R - \lambda_\nu \xi_{32}^\nu U_{23} P_L + U_{33} \lambda_l \xi_{33}^E P_R - \lambda_\nu \xi_{33}^\nu U_{33} P_L \\
 &= -\lambda_\nu (\xi_{31}^\nu U_{13} + \xi_{32}^\nu U_{23} + \xi_{33}^\nu U_{33}) P_L + \lambda_l (U_{31} \xi_{13}^E + U_{32} \xi_{23}^E + U_{33} \xi_{33}^E) P_R \\
 &= -\lambda_\nu (0,614 \sqrt{m_{\nu_\tau} m_{\nu_\mu}} + 0,774 m_{\nu_\tau}) P_L + \lambda_l (0,529 \sqrt{m_\tau m_\mu} + 0,774 m_\tau) P_R,
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned}
 a &= -\lambda_\nu (0,614 \sqrt{m_{\nu_\tau} m_{\nu_\mu}} + 0,774 m_{\nu_\tau}) , \\
 b &= \lambda_l (0,529 \sqrt{m_\tau m_\mu} + 0,774 m_\tau) .
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

## 5.2. El 2HDM y la masa del neutrino

Hasta ahora hemos considerado el 2HDM tipo I, II y III. Adicionalmente hemos introducido neutrinos derechos, los cuales son singletes bajo el grupo gauge del modelo estándar  $SU(2) \times U(1)$ . Estos neutrinos derechos se implementan normalmente de una manera artificial para dar respuesta al hecho de tener neutrinos masivos y en el caso de neutrinos de Dirac, obtener información del momento dipolar magnético del neutrino.

Un posible modelo, el cual generaría masas naturalmente para los neutrinos (el cual llamaremos 2HDM neutrino específico). Consiste en considerar el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}_\mu \Phi_1)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \Phi_1) + (\mathcal{D}_\mu \Phi_2)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \Phi_2) - V_H + \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_\nu \tag{5.39}$$

donde  $V_H$  se define como el potencial de Higgs,  $\mathcal{L}_Y$  es el lagrangiano de Yukawa y  $\mathcal{L}_\nu$  el lagrangiano de neutrinos.

En este modelo, la masa de los neutrinos Dirac se generan con el mismo rompimiento espontáneo de la simetría, que se presenta para los fermiones restantes. Sin embargo, el aspecto interesante es que

esta se genera de forma natural, sin requerir acoples de Yukawa pequeños [65]. La forma de generar la pequeña masa de los neutrinos se debe a que uno de los dobletes adquiere un VEV, en la misma escala de masas de los neutrinos [66] (en el orden de los electronvoltios  $v_2 \approx eV$ ). Para ver esto formalmente, podemos introducir un potencial de Higgs idóneo

$$\begin{aligned}
 V_H = & \bar{m}_{11}^2 \Phi_1^\dagger \Phi_1 + \bar{m}_{22}^2 \Phi_2^\dagger \Phi_2 - \left( \bar{m}_{12}^2 \Phi_1^\dagger \Phi_2 + h.c. \right) + \frac{1}{2} \lambda_1 \left( \Phi_1^\dagger \Phi_1 \right)^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 \left( \Phi_2^\dagger \Phi_2 \right)^2 \\
 & + \lambda_3 \left( \Phi_1^\dagger \Phi_1 \right) \left( \Phi_2^\dagger \Phi_2 \right) + \lambda_4 \left( \Phi_1^\dagger \Phi_2 \right) \left( \Phi_2^\dagger \Phi_1 \right) .
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Al imponer una simetría global  $U(1)^5$  solo nos quedamos con campos de Dirac. Bajo esta simetría los campos  $\Phi_2$  y  $\nu_R$  tienen carga +1, mientras que todos los demás campos serían estériles. De esta forma, el lagrangiano de Yukawa será compatible con la invarianza gauge y además sería renormalizable.

En la ecuación (5.40), podemos fijar  $\bar{m}_{12}^2$  como real y positivo, sin ninguna pérdida de generalidad mediante la redefinición de  $\Phi_2$  y colocando la fase adicional en el acople de Yukawa. La cual en general, es una matriz compleja al tener en cuenta las posibles fases de violación **CP**. Adicionalmente podemos ver que aún después de romper suavemente la simetría global  $U(1)$ , el número leptónico sobrevive como un “accidente” de la simetría del modelo.

Partiendo de (5.11), e incluyendo singletes de mano derecha para los neutrinos, lo cual implica considerar neutrinos masivos, tenemos

$$-\mathcal{L}_Y = \xi_{ij}^\nu \bar{L}_{Li} \tilde{\Phi}_2 \nu_{Rj} + \eta_{ij}^E \bar{L}_{Li} \Phi_1 E_{Rj} + \eta_{ij}^D \bar{Q}_{Li} \Phi_1 D_{Rj} + \eta_{ij}^U \bar{Q}_{Li} \tilde{\Phi}_1 U_{Rj} + h.c. \tag{5.42}$$

Los dobletes escalares  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  tienen los mismos números cuánticos y  $\tilde{\Phi}_{1,2} = i\sigma_2 \Phi_{1,2}$ , el doblete fermiónico lo definimos como  $Q_L \equiv (u_L, d_L)^T$  y  $L_L \equiv (\nu_L, e_L)^T$ . Donde  $E_R (D_R)$  se refiere a los tres singletes de isospín débil para leptones (quarks) y  $\nu_R (U_R)$  se refiere a los tres singletes de isospín débil de neutrinos (quarks). El primer término de (5.42) proviene de incluir neutrinos de mano derecha, mientras que la segunda parte es igual que la que tenemos de ME.

Es importante anotar que la pequeña masa de los neutrinos se debe completamente al VEV del segundo doblete. Así entonces, estos neutrinos de mano derecha  $\nu_R$  al asociarse con los tres neutrinos de mano izquierda del ME formarán partículas de Dirac. Lo cual implica directamente que no tendríamos la posibilidad de un decaimiento beta doble sin neutrinos, dado que la simetría  $U(1)$  no permite términos de Majorana debido a la presencia de singletes de mano derecha

$$\mathcal{L}_{Maj} = \eta^M \overline{(\nu_R^*)} \tilde{\Phi}_2 \nu_R. \tag{5.43}$$

De esta forma, si la simetría  $U(1)$  no está rota, el VEV adquiere el valor  $v_2 = 0$  y por lo tanto los neutrinos permanecen sin masa. Sin embargo, al romper la simetría  $U(1)$  de forma explícita a través de un término bilineal de la forma  $m_{12} \Phi_1^\dagger \Phi_2$  el VEV será

$$v_2 = \frac{m_{12}^2 v_1}{M_A^2} \tag{5.44}$$

<sup>5</sup>Una simetría global  $U(1)$  implica una carga inducida en el segundo doblete

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 & \rightarrow \Phi_1 \\
 \Phi_2 & \rightarrow e^{i\alpha} \Phi_2.
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

donde  $M_A$  es la masa del pseudoescalar, la cual tiene valores  $M_A \sim 100\text{GeV}$ . Finalmente los vértices para el acople  $\bar{\nu} - l - H^\pm$ , de forma general los podemos expresar como

$$\mathcal{L}_Y(\nu \text{ específico}) = \left( \frac{\sqrt{2}m_\nu}{v_2} \right) \bar{\nu} (U_{PMNS}P_R - U_{PMNS}P_L) l H^\pm. \quad (5.45)$$

Para el acople  $\bar{\nu}_e e H^\pm$  tenemos

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_e e H^\pm &= \frac{\sqrt{2}m_{\nu_e}}{v_2} [U_{1k}P_R - U_{k1}P_L] \\ &= \frac{\sqrt{2}m_{\nu_e}}{v_2} [(U_{11}P_R - U_{11}P_L) + (U_{12}P_R - U_{21}P_L) + (U_{13}P_R - U_{31}P_L)] \\ &= \frac{\sqrt{2}m_{\nu_e}}{v_2} [(0,822P_R - 0,822P_L) + (0,547P_R - 0,451P_L) + (0,155P_R - 0,347P_L)] \\ &= \frac{\sqrt{2}m_{\nu_e}}{v_2} [1,524P_R - 1,62P_L] , \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a &= -\frac{\sqrt{2}m_{\nu_e}}{v_2} 1,62 , \\ b &= \frac{\sqrt{2}m_{\nu_e}}{v_2} 1,524 . \end{aligned} \quad (5.46)$$

Para  $\bar{\nu}_\mu \mu H^\pm$  obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_\mu \mu H^\pm &= \frac{\sqrt{2}m_{\nu_\mu}}{v_2} [U_{2k}P_R - U_{k2}P_L] \\ &= \frac{\sqrt{2}m_{\nu_\mu}}{v_2} [(U_{21}P_R - U_{12}P_L) + (U_{22}P_R - U_{22}P_L) + (U_{23}P_R - U_{32}P_L)] \\ &= \frac{\sqrt{2}m_{\nu_\mu}}{v_2} [(0,451P_R - 0,547P_L) + (0,648P_R - 0,648P_L) + (0,614P_R - 0,529P_L)] \\ &= \frac{\sqrt{2}m_{\nu_\mu}}{v_2} [1,713P_R - 1,724P_L] , \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} a &= -\frac{\sqrt{2}m_{\nu_\mu}}{v_2} 1,724 , \\ b &= \frac{\sqrt{2}m_{\nu_\mu}}{v_2} 1,713 . \end{aligned} \quad (5.47)$$

Y finalmente para  $\bar{\nu}_\tau \tau H^\pm$

$$\begin{aligned}
 \bar{\nu}_\tau \tau H^\pm &= \frac{\sqrt{2}m_{\nu_\tau}}{v_2} [U_{3k}P_R - U_{k3}P_L] \\
 &= \frac{\sqrt{2}m_{\nu_\tau}}{v_2} [(U_{31}P_R - U_{13}P_L) + (U_{32}P_R - U_{23}P_L) + (U_{33}P_R - U_{33}P_L)] \\
 &= \frac{\sqrt{2}m_{\nu_\tau}}{v_2} [(0,347P_R - 0,155P_L) + (0,529P_R - 0,614P_L) + (0,774P_R - 0,774P_L)] \\
 &= \frac{\sqrt{2}m_{\nu_\tau}}{v_2} [1,65P_R - 1,543P_L] ,
 \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
 a &= -\frac{\sqrt{2}m_{\nu_\tau}}{v_2} 1,543 , \\
 b &= \frac{\sqrt{2}m_{\nu_\tau}}{v_2} 1,65 .
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

### 5.3. Conclusiones del capítulo

El modelo con dos dobletes de Higgs como lo hemos analizado, es la extensión inmediata al modelo estándar. Si consideramos el 2HDM es posible tener en cuenta nuevas interacciones como lo son  $\nu - l - H^\pm$ . En este tipo de interacciones, los acoples de Yukawa son absolutamente relevantes y van a depender de los ángulos de mezcla para el 2HDM tipo I y II, mientras que para el 2HDM tipo III estos serán proporcionales a la matriz de cambio de sabor en corrientes neutras  $\xi$ . Los factores  $a$  y  $b$  para 2HDM tipo I,II y III, los podemos resumir de forma general como:

Acople del vertice	2HDM tipo I	2HDM tipo II	2HDM tipo III
$a$	$2^{\frac{3}{4}}\sqrt{G_F}m_{\nu_l} \cot \beta U_{k,i}$	$2^{\frac{3}{4}}\sqrt{G_F}m_{\nu_l} \cot \beta U_{k,i}$	$-\lambda_\nu \xi_{i,k}^\nu U_{k,i}$
$b$	$2^{\frac{3}{4}}\sqrt{G_F}m_l \cot \beta U_{i,k}$	$2^{\frac{3}{4}}\sqrt{G_F}m_l \tan \beta U_{i,k}$	$\lambda_l U_{i,k} \xi_{k,i}^E$

Cuadro 5.1: *Coefficientes para los acoples de los términos  $P_L$  y  $P_R$  para 2HDM tipo I,II y III.*

Otro aspecto interesante es que si implementamos el 2HDM con neutrino específico, tenemos una forma natural de generar la masa de los neutrinos. Debido a que solo uno de los dobletes se acopla exclusivamente al sector de neutrinos, mientras que el otro doblete se acoplaría a los quarks y a los leptones cargados. En este modelo los acoples  $a$  y  $b$  de forma general son

Acople del vertice	2HDM con neutrino específico
$a$	$-\frac{\sqrt{2}}{v_2} m_{\nu_i} U_{k,i}$
$b$	$\frac{\sqrt{2}}{v_2} m_{\nu_i} U_{i,k}$

Cuadro 5.2: *Coefficientes para los acoples de los términos  $P_L$  y  $P_R$  para 2HDM con neutrino específico.*



Para tener una mayor claridad, en los términos de los acoples que usaremos en los dos capítulos siguientes. Escribiremos de forma explícita, cada uno de los valores de los acoples  $a$  y  $b$  para cada uno de los vértices que tenemos

2HDM	Acople del vértice	$\bar{\nu}_e e H^\pm$	$\bar{\nu}_\mu \mu H^\pm$	$\bar{\nu}_\tau \tau H^\pm$
Tipo I	$a$	$-\frac{2^{\frac{3}{4}}\sqrt{G_F}}{\tan\beta} 0,822m_{\nu_e}$	$-\frac{2^{\frac{3}{4}}\sqrt{G_F}}{\tan\beta} 0,648m_{\nu_\mu}$	$-\frac{2^{\frac{3}{4}}\sqrt{G_F}}{\tan\beta} 0,774m_{\nu_\tau}$
	$b$	$\frac{2^{\frac{3}{4}}\sqrt{G_F}}{\tan\beta} 0,822m_e$	$\frac{2^{\frac{3}{4}}\sqrt{G_F}}{\tan\beta} 0,648m_\mu$	$\frac{2^{\frac{3}{4}}\sqrt{G_F}}{\tan\beta} 0,774m_\tau$
Tipo II	$a$	$\frac{2^{\frac{3}{4}}\sqrt{G_F}}{\tan\beta} 0,822m_{\nu_e}$	$\frac{2^{\frac{3}{4}}\sqrt{G_F}}{\tan\beta} 0,648m_{\nu_\mu}$	$\frac{2^{\frac{3}{4}}\sqrt{G_F}}{\tan\beta} 0,774m_{\nu_\tau}$
	$b$	$2^{\frac{3}{4}}\sqrt{G_F} \tan\beta 0,822m_e$	$2^{\frac{3}{4}}\sqrt{G_F} \tan\beta 0,648m_\mu$	$2^{\frac{3}{4}}\sqrt{G_F} \tan\beta 0,774m_\tau$
Tipo III	$a$	$-0,451\lambda_\nu \frac{\sqrt{m_{\nu_e} m_{\nu_\mu}}}{v}$	$-\frac{\lambda_\nu}{v} \begin{pmatrix} 0,547\sqrt{m_{\nu_e} m_{\nu_\mu}} \\ +0,648m_{\nu_\mu} \\ +0,529\sqrt{m_{\nu_\tau} m_{\nu_\mu}} \end{pmatrix}$	$-\lambda_\nu \begin{pmatrix} 0,614\sqrt{m_{\nu_\tau} m_{\nu_\mu}} \\ +0,774m_{\nu_\tau} \end{pmatrix}$
	$b$	$0,547\lambda_l \frac{\sqrt{m_e m_\mu}}{v}$	$\frac{\lambda_l}{v} \begin{pmatrix} 0,451\sqrt{m_e m_\mu} \\ +0,648m_\mu \\ +0,614\sqrt{m_\tau m_\mu} \end{pmatrix}$	$\lambda_l \begin{pmatrix} 0,529\sqrt{m_\tau m_\mu} \\ +0,774m_\tau \end{pmatrix}$
Neutrino específico	$a$	$-\frac{\sqrt{2}m_{\nu_e}}{v_2} 1,62$	$-\frac{\sqrt{2}m_{\nu_\mu}}{v_2} 1,724$	$-\frac{\sqrt{2}m_{\nu_\tau}}{v_2} 1,543$
	$b$	$\frac{\sqrt{2}m_{\nu_e}}{v_2} 1,524$	$\frac{\sqrt{2}m_{\nu_\mu}}{v_2} 1,713$	$\frac{\sqrt{2}m_{\nu_\tau}}{v_2} 1,65$

Cuadro 5.3: Coeficientes para los acoples de los términos  $P_L$  y  $P_R$  para 2HDM tipo I, II, III y neutrino específico para cada vértice de acople.

## Capítulo 6

# Momento dipolar magnético en el vacío con 2HDM

La contribución de una partícula de Dirac al momento dipolar magnético (MDM), proviene del acople de esta al fotón, no solo a nivel árbol, sino también, debido a las correcciones al vértice que se realicen. Este tipo de acople, no se presenta en el caso del neutrino del ME, debido a que los neutrinos no tienen carga eléctrica y debido a que no existen neutrinos de quiralidad derecha en el ME. Lo cual si sucede para partículas de Dirac del ME y por lo tanto éstos si pueden interactuar con campos electromagnético externos.

Sin embargo, la inclusión de la masa del neutrino, nos lleva a física más allá del ME y una simple extensión de este, que incluya neutrinos de quiralidad derecha, permite que el MDM aparezca a través de diagramas como los de la Figura 4.3. De hecho, el MDM es de suma importancia cuando se propone como una posible solución para el problema de flujo neutrinos solares, donde una solución viable requiere que el neutrino tenga un momento magnético de cerca de  $10^{-10}\mu_B$ , el cual es mucho mayor que el obtenido en la ecuación (4.31) el cual es del orden  $\sim 10^{-19}\mu_B$ . Adicionalmente los resultados del Sudbury neutrino observatory indican que no hay deficiencia de neutrinos de mano izquierda en interacciones de corrientes neutras.

Si consideramos la contribución de física más allá del ME, debida a la introducción del 2HDM y neutrinos masivos. Debemos tener en cuenta las correcciones a un loop para el proceso  $\nu \rightarrow \nu\gamma$ . El cual aporta los diagramas de la figura 6.1

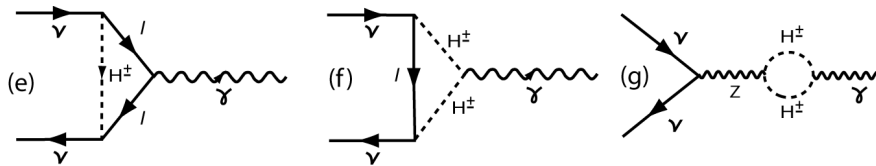


Figura 6.1: Diagramas a un loop que dan lugar a contribuciones adicionales al MDM del neutrino, debidas a considerar Higgs cargados ( $H^\pm$ ) provenientes del 2HDM.

Por lo tanto es necesario analizar los diagramas (e) y (f) los cuales son la correcciones a un loop, mientras que el diagrama (g) es la corrección a la auto energía con Higgs cargado y cuya contribución al MDM es cero. Para calcular las contribuciones al MDM debidas a los diagramas (e) y (f) es necesario considerar los acoples al vértice  $\nu - l - H^\pm$ , los cuales fueron analizados en el capítulo anterior.

## 6.1. Análisis del diagrama con contribución de 2 Higgs cargados y 1 leptón en el vacío

La parametrización de momentos del diagrama de vértice para el caso de 2 Higgs cargados y 1 leptón (2H1L), la podemos escribir como

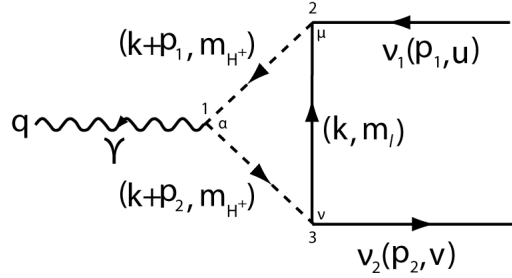


Figura 6.2: Parametrización de los momentos para el diagrama de triángulo de 2H1L.

para revisar lo descrito en la gráfica anterior, podemos calcular el flujo de momentos en los vértices

- Para el vértice general  $\nu \rightarrow \nu\gamma$  tenemos

$$q = p_1 - p_2. \quad (6.1)$$

- Para el vértice 1, el flujo de momentos del  $\gamma - H^\pm - H^\pm$ , lo podemos escribir como

$$\begin{aligned} (k + p_1) - (q) - (k + p_2) &= 0 \\ k + p_1 - q - k - p_2 &= 0 \\ \underbrace{p_1 - p_2}_q - q &= 0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

mientras que la regla para el vértice 1 es

$$V_1 \rightarrow -ie((k^\alpha + p_1^\alpha) + (k^\alpha + p_2^\alpha)) = -ie(2k^\alpha + p_2^\alpha + p_1^\alpha).$$

- Para el vértice 2, el flujo de momentos para las partículas  $H^\pm - \nu - l$  es

$$-(k + p_1) + p_1 + (k) = 0,$$

mientras que la regla en el vértice es

$$V_2 \rightarrow aP_L + bP_R.$$

- Para el vértice 3, el flujo de momentos para las partículas  $H^\pm - v - l$  es

$$-k + (k + p_2) - p_2 = 0,$$

y finalmente la regla para el vértice 3 es

$$V_3 \rightarrow cP_L + dP_R,$$

podemos ver que esta regla es equivalente a la regla del vértice 2, debido a que las partículas interactuantes, son las mismas. Por lo tanto  $a = c$  y  $b = d$ .

Para calcular la integral asociada al diagrama de Feynman de la figura 6.2, seguimos la convención de momentos escrita anteriormente y aplicando las reglas de Feynman tenemos

$$\begin{aligned}
 & \Lambda_{2H1L}^\alpha(q, l) \\
 = & \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ [aP_L + bP_R] \left[ \frac{i}{(k+p_1)^2 - m_{H^\pm}^2} \right] [-ie(2k^\alpha + p_2^\alpha + p_1^\alpha)] \left[ \frac{i}{(k+p_2)^2 - m_{H^\pm}^2} \right] \right. \\
 & \left. [cP_L + dP_R] \left[ \frac{i(\not{k} + m_l)}{k^2 - m_l^2} \right] \right\} \\
 = & -e \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(aP_L + bP_R)(2k^\alpha + p_2^\alpha + p_1^\alpha)(cP_L + dP_R)(\not{k} + m_l)}{((k+p_1)^2 - m_{H^\pm}^2)((k+p_2)^2 - m_{H^\pm}^2)(k^2 - m_l^2)} \right\} \\
 = & -e \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{A(2k^\alpha + p_2^\alpha + p_1^\alpha)B(\not{k} + m_l)}{((k+p_1)^2 - m_{H^\pm}^2)((k+p_2)^2 - m_{H^\pm}^2)(k^2 - m_l^2)} \right\}. \tag{6.3}
 \end{aligned}$$

Donde denotamos  $A = (aP_L + bP_R)$  y  $B = (cP_L + dP_R)$ . Si escribimos lo anterior con los respectivos espinores tenemos

$$\bar{u}(p_2) \Lambda^\alpha(q, l) u(p_1) = \bar{u}(p_2) [A(2k^\alpha + p_2^\alpha + p_1^\alpha)B(\not{k} + m_l)] u(p_1),$$

expandiendo el numerador

$$\begin{aligned}
 & \bar{u}(p_2) [A(2k^\alpha + p_2^\alpha + p_1^\alpha)B(\not{k} + m_l)] u(p_1) \\
 = & \bar{u}(p_2) [A(2k^\alpha + p_2^\alpha + p_1^\alpha)Bk_\beta \gamma^\beta] u(p_1) + \bar{u}(p_2) [A(2k^\alpha + p_2^\alpha + p_1^\alpha)Bm_l] u(p_1) \\
 = & \bar{u}(p_2) (2k^\alpha k_\beta + p_2^\alpha k_\beta + p_1^\alpha k_\beta) AB\gamma^\beta u(p_1) + m_l \bar{u}(p_2) (2k^\alpha + p_2^\alpha + p_1^\alpha) ABu(p_1) \tag{6.4}
 \end{aligned}$$

Remplazando lo anterior en (6.3) tenemos

$$\Lambda_{2H1L}^\alpha(q, l) = -e \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(2k^\alpha k_\beta + p_2^\alpha k_\beta + p_1^\alpha k_\beta) AB\gamma^\beta + m_l(2k^\alpha + p_2^\alpha + p_1^\alpha) AB}{((k+p_1)^2 - m_{H^\pm}^2)((k+p_2)^2 - m_{H^\pm}^2)(k^2 - m_l^2)} \right\}. \tag{6.5}$$

Para resolver esta integral, es necesario utilizar regularización dimensional. Si tenemos en cuenta lo realizado en el anexo E. Vemos que es necesario calcular el término  $D_1 = b^2 - a^2$ , el cual es definido a partir de los denominadores de los propagadores

$$\frac{1}{((k+p_1)^2 - m_{H^\pm}^2)(k^2 - m_l^2)((k+p_2)^2 - m_{H^\pm}^2)}.$$

La forma general del denominador con tres propagadores está descrito en (E.41) y al remplazar nuestras condiciones tenemos

$$\begin{aligned}
 b &= p_1(1-x) + p_2y, \\
 a &= (m_{H^\pm}^2 - m_\nu^2 - m_l^2)x + (m_\nu^2 + m_l^2 - m_{H^\pm}^2)y + m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 D_1 &= (p_1(1-x) + p_2y)^2 - ((m_1^2 - p_1^2 - m_2^2)x + (p_2^2 + m_2^2 - m_3^2)y + p_1^2 - m_1^2) \\
 &= (p_1(1-x) + p_2y)^2 - ((m_{H^\pm}^2 - m_\nu^2 - m_l^2)x + (m_\nu^2 + m_l^2 - m_{H^\pm}^2)y + m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2).
 \end{aligned}$$

Dado que no consideramos el FCNC, entonces no hay cambio de sabor en los neutrinos que interactúan en el loop. Por lo tanto  $p_1^2 = p_2^2 = m_\nu^2$  lo cual nos permite escribir la relación anterior como:

$$\begin{aligned} D_1 &= (p_1(1-x) + p_2y)^2 - (m_{H^\pm}^2 - m_\nu^2 - m_l^2)x - (m_l^2 + m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2)y - m_\nu^2 + m_{H^\pm}^2 \\ &= y^2m_\nu^2 - 2xym_\nu^2 + (m_\nu^2 - m_l^2 + m_{H^\pm}^2)y + x^2m_\nu^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2)x + m_{H^\pm}^2 \\ &= y^2m_\nu^2 - 2xym_\nu^2 + Fy + x^2m_\nu^2 - Fx + m_{H^\pm}^2. \end{aligned}$$

Tuvimos en cuenta que  $q^2 = (p_1 - p_2)^2 = p_1^2 - 2p_1 \cdot p_2 + p_2^2 \Rightarrow p_1 \cdot p_2 = m_\nu^2$ . Adicionalmente hemos definido  $F = (m_{H^\pm}^2 - m_l^2 + m_\nu^2)$ .

Teniendo en cuenta los términos que dependen de  $k$  en el numerador (6.4) y las soluciones generales para cada uno de los tipos de integrales (E.52) tenemos

$$\begin{aligned} &\Lambda_{2H1L}^\alpha(q, l) \\ &= -e \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(2k^\alpha k_\beta + p_2^\alpha k_\beta + p_1^\alpha k_\beta) AB\gamma^\beta + m_l(2k^\alpha + p_2^\alpha + p_1^\alpha) AB}{((k+p_1)^2 - m_{H^\pm}^2)(k^2 - m_l^2)((k+p_2)^2 - m_{H^\pm}^2)} \right\} \\ &= -\frac{ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left\{ \left( -\frac{2b^\alpha b^\beta}{D_1} + g^{\alpha\beta} \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} + \frac{1}{D_1} (p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) b^\beta \right) AB\gamma^\beta + \frac{m_l}{D_1} (2b^\alpha - (p_{2\alpha} + p_{1\alpha})) AB \right\}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Para resolver estas integrales es necesario realizar cada una de las operaciones que se encuentran en el numerador. Debido a que los términos  $b$  contienen términos en  $x$  y  $y$ . Adicionalmente es conveniente llevar los términos de  $\not{p}_1$  a la derecha y los  $\not{p}_2$  a la izquierda para poder emplear ecuación de Dirac

$$\begin{aligned} (\gamma \cdot p_1 - m) u(p_1) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \not{p}_1 u(p_1) = m u(p_1), \\ \bar{u}(p_2) (\gamma \cdot p_2 - m) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}(p_2) \not{p}_2 = m \bar{u}(p_2). \end{aligned}$$

Así mismo<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \not{p}_1 \not{p}_2 &= p_1^\alpha p_2^\beta \gamma_\alpha \gamma_\beta = p_1^\alpha p_2^\beta \gamma_\alpha \gamma_\beta = p_1^\alpha p_2^\beta (2g_{\alpha\beta} - \gamma_\beta \gamma_\alpha) = 2p_1 \cdot p_2 - \not{p}_2 \not{p}_1 = 2m_\nu^2 - \not{p}_2 \not{p}_1, \\ \not{p}_1 \not{p}_1 &= p_1^\alpha p_1^\beta \gamma_\alpha \gamma_\beta = p_1^\alpha p_1^\beta \gamma_\alpha \gamma_\beta = p_1^\alpha p_1^\beta (2g_{\alpha\beta} - \gamma_\beta \gamma_\alpha) = 2p_1 \cdot p_1 - \not{p}_1 \not{p}_1 = m_\nu^2. \end{aligned}$$

Debemos ahora analizar cada uno de los términos, que aparecen en los numeradores de (6.6). Para lo cual es necesario tener en cuenta lo realizado en el anexo F, donde los cálculos se hacen de forma detallada.

- Para el término  $2b^\alpha b^\beta AB\gamma^\beta$  se tiene

$$\begin{aligned} 2b^\alpha b^\beta AB\gamma^\beta &= [p_{1\alpha}(1-x)^2 + p_{2\alpha}y(1-x) + p_{1\alpha}(1-x)y + p_{2\alpha}y^2] m_\nu (ac + bd) \\ &\quad + [p_{1\alpha}(1-x)^2 + p_{2\alpha}y(1-x) - p_{1\alpha}(1-x)y - p_{2\alpha}y^2] m_\nu (bd - ac) \gamma_5. \end{aligned}$$

como se calcula en F.11

<sup>1</sup>De las propiedades de las gammas tenemos

$$\not{k} \gamma^\alpha = k_\beta \gamma^\beta \gamma^\alpha = k_\beta (2g_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 2k_\alpha - \gamma_\alpha \not{k}$$

donde hemos utilizado que  $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$

- Para el término  $g^{\alpha\beta} \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} AB \gamma^\beta$  del resultado F.2 tenemos

$$g^{\alpha\beta} AB \gamma^\beta \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} = g^{\alpha\beta} \gamma^\beta AB \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} = \gamma_\alpha \frac{1}{2} ((ac + bd) + (ac - bd) \gamma_5) \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi}.$$

- Para el término  $(p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) b^\beta AB \gamma^\beta$  obtenemos

$$\begin{aligned} (p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) b^\beta AB \gamma^\beta &= \frac{1}{2} m_\nu [(p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) (1 - x) + (p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) y] (ac + bd) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_\nu [(p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) (1 - x) - (p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) y] (bd - ac) \gamma_5 \end{aligned}$$

donde remplazado el resultado F.12.

- Para los términos  $2m_l b^\alpha AB$  y  $m_l (p_{1\alpha} + p_{2\alpha}) AB$  tenemos

$$\begin{aligned} 2m_l b^\alpha AB &= m_l (p_{1\alpha} (1 - x) + p_{2\alpha} y) ((ac + bd) + (bd - ac) \gamma_5). \\ m_l (p_{1\alpha} + p_{2\alpha}) AB &= \frac{1}{2} m_l (p_{1\alpha} + p_{2\alpha}) ((ac + bd) + (bd - ac) \gamma_5). \end{aligned}$$

donde remplazado el resultado F.1.

Remplazando los resultados anteriores en (6.6) y factorizando por el término  $\gamma_5$ , lo cual se hace en el anexo F.1 obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} &\Lambda_{2H1L}^\alpha(q, l) \\ &= \frac{-ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left\{ \left( -\frac{2b^\alpha b^\beta}{D_1} + g^{\alpha\beta} \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} + \frac{1}{D_1} (p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) b^\beta \right) AB \gamma^\beta + \frac{m_l}{D_1} (2b^\alpha - (p_{2\alpha} + p_{1\alpha})) AB \right\} \\ &= \frac{-ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left\{ \left[ \frac{m_\nu}{D_1} (2m_\nu \gamma_\alpha - i\sigma^{\alpha\mu} q_\mu) (-1 + 3x - x^2) + \frac{m_l}{D_1} (2m_\nu \gamma_\alpha - i\sigma^{\alpha\mu} q_\mu) \left(\frac{1}{2} - x\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \gamma_\alpha \frac{1}{2} \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} \right] (ac + bd) + \left[ \frac{m_l}{D_1} (2m_\nu \gamma_\alpha - i\sigma^{\alpha\mu} q_\mu) \left(\frac{1}{2} - x\right) - \gamma_\alpha \frac{1}{2} \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} \right] (bd - ac) \gamma_5 \right\} \end{aligned}$$

Escrito de esta forma, podemos identificar los términos que contribuyen en cada uno de los factores de forma, los cuales tienen la forma general

$$\Lambda^\alpha(q, l) = F_Q(q^2) \gamma_\alpha + F_M(q^2) i\sigma_{\alpha\mu} q^\mu + F_E(q^2) \sigma_{\alpha\mu} q^\mu \gamma_5 + F_A(q^2) (q^2 \gamma_\alpha - q_\alpha \not{q}) \gamma_5.$$

Por lo tanto:

- La contribución asociada al factor de carga es

$$\Lambda_{2H1L}^\alpha(q, l)_{F_Q} = \frac{-ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left[ \frac{2m_\nu^2}{D_1} (-1 + 3x - x^2) + \frac{m_l m_\nu}{D_1} (1 - 2x) + \frac{1}{2} \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} \right] (ac + bd).$$

- El término asociado al MDM será

$$\Lambda_{2H1L}^\alpha(q, l)_{FM} = \frac{ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left[ \frac{m_\nu}{D_1} (-1 + 3x - x^2) + \frac{m_l}{D_1} \left( \frac{1}{2} - x \right) \right] (ac + bd). \quad (6.7)$$

- Finalmente el asociado al MDE está dado por

$$\Lambda_{2H1L}^\alpha(q, l)_{FE} = \frac{ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{m_l}{D_1} \left( \frac{1}{2} - x \right) (bd - ac) .$$

## 6.2. Análisis del diagrama con contribución de 2 leptones y 1 Higgs cargado en el vacío

La parametrización de momentos del diagrama de vértice para el caso de 2 leptones y 1 Higgs cargado (2L1H), la podemos representar como en la figura 6.3. Calculando el flujo de momentos en los vértices

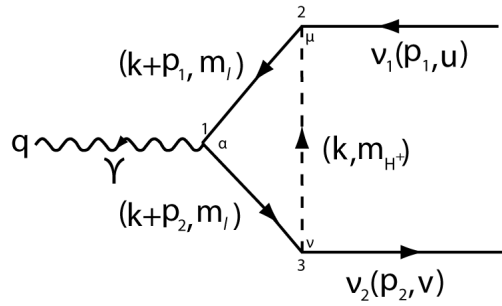


Figura 6.3: Parametrización de los momentos para el diagrama de triángulo de 2L1H.

tenemos

- Para el vértice general  $\nu \rightarrow \nu\gamma$  tenemos

$$q = p_1 - p_2.$$

- Para el vértice 1, el flujo de momentos del  $\gamma - l - l$ , lo podemos escribir como

$$\begin{aligned} (k + p_1) - (q) - (k + p_2) &= 0 \\ \underbrace{p_1 - p_2}_q - q &= 0, \end{aligned} \quad (6.8)$$

mientras que la regla para el vértice 1 es

$$V_1 \rightarrow -ie\gamma^\alpha.$$

- Para el vértice 2, el flujo de momentos del  $\nu - H^\pm - l$  es

$$-(k + p_1) + (p_1) + (k) = 0,$$

mientras que la regla en el vértice 2 será

$$V_2 \rightarrow aP_L + bP_R.$$

- Para el vértice 3 el flujo de momentos para las partículas  $\nu - H^\pm - l$  es

$$(k + p_2) - (k) - (p_2) = 0,$$

y finalmente la regla para este vértice 3 será

$$V_3 \rightarrow cP_L + dP_R.$$

Para calcular la integral asociada al diagrama de Feynman de la figura 6.3, seguimos la convención de momentos escrita anteriormente y aplicando las reglas de Feynman tenemos

$$\begin{aligned} & \Lambda_{2L1H}^\alpha(q, l) \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ (aP_L + bP_R) \left[ \frac{i(\not{k} + \not{p}_1 + m_l)}{(k + p_1)^2 - m_l^2} \right] (-ie\gamma^\alpha) \left[ \frac{i(\not{k} + \not{p}_2 + m_l)}{(k + p_2)^2 - m_l^2} \right] (cP_L + dP_R) \left[ \frac{i}{k^2 - m_{H^\pm}^2} \right] \right\} \\ &= -e \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(aP_L + bP_R) (\not{k} + \not{p}_1 + m_l) \gamma^\alpha (\not{k} + \not{p}_2 + m_l) (cP_L + dP_R)}{((k + p_1)^2 - m_l^2) ((k + p_2)^2 - m_l^2) (k^2 - m_{H^\pm}^2)} \right\} \\ &= -e \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{A (\not{k} + \not{p}_1 + m_l) \gamma^\alpha (\not{k} + \not{p}_2 + m_l) B}{((k + p_1)^2 - m_l^2) ((k + p_2)^2 - m_l^2) (k^2 - m_{H^\pm}^2)} \right\}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Donde denotamos  $A = (aP_L + bP_R)$  y  $B = (cP_L + dP_R)$  si escribimos lo anterior con los respectivos espinores tenemos

$$\bar{u}(p_2) \Lambda^\alpha(q, l) u(p_1) = \bar{u}(p_2) [A (\not{k} + \not{p}_1 + m_l) \gamma^\alpha (\not{k} + \not{p}_2 + m_l) B] u(p_1),$$

expandiendo el numerador

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2) A (\not{k} + \not{p}_1 + m_l) \gamma^\alpha (\not{k} + \not{p}_2 + m_l) B u(p_1) \\ &= \bar{u}(p_2) A \left( (k + p_1)_\mu \gamma^\mu + m_l \right) \gamma^\alpha \left( (k + p_2)_\beta \gamma^\beta + m_l \right) B u(p_1) \\ &= \bar{u}(p_2) A \left( (k + p_1)_\mu \gamma^\mu \gamma^\alpha (k + p_2)_\beta \gamma^\beta + m_l \gamma^\alpha (k + p_2)_\beta \gamma^\beta + (k + p_1)_\mu \gamma^\mu \gamma^\alpha m_l + m_l^2 \gamma^\alpha \right) B u(p_1) \\ &= \bar{u}(p_2) \left( (k_\mu k_\beta + p_{1\mu} k_\beta + k_\mu p_{2\beta} + p_{1\mu} p_{2\beta}) A \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta B + m_l (k + p_2)_\beta A \gamma^\alpha \gamma^\beta B + m_l (k + p_1)_\mu A \gamma^\mu \gamma^\alpha B \right. \\ & \quad \left. + m_l^2 A \gamma^\alpha B \right) u(p_1). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Remplazando lo anterior en (6.9) tenemos

$$\begin{aligned} \Lambda_{2L1H}^\alpha(q, l) &= -e \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \\ & \frac{(k_\mu k_\beta + p_{1\mu} k_\beta + k_\mu p_{2\beta} + p_{1\mu} p_{2\beta}) A \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta B + m_l (k + p_1)_\mu A \gamma^\mu \gamma^\alpha B + m_l (k + p_2)_\beta A \gamma^\alpha \gamma^\beta B + m_l^2 A \gamma^\alpha B}{((k + p_1)^2 - m_l^2) ((k + p_2)^2 - m_l^2) (k^2 - m_{H^\pm}^2)}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Usando el anexo E, podemos calcular el término  $D_2 = b^2 - a^2$ , el cual es definido a partir de los denominadores de los propagadores

$$\frac{1}{((k + p_2)^2 - m_l^2) (k^2 - m_{H^\pm}^2) ((k + p_1)^2 - m_l^2)}.$$



La forma general del denominador con tres propagadores está descrito en (E.41) y al remplazar nuestras condiciones tenemos

$$\begin{aligned} b &= p_1(1-x) + p_2y, \\ a &= (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2)x + (m_{H^\pm}^2 + m_\nu^2 - m_l^2)y + m_\nu^2 - m_l^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$D_2 = (p_1(1-x) + p_2y)^2 - ((m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2)x + (m_{H^\pm}^2 + m_\nu^2 - m_l^2)y + m_\nu^2 - m_l^2).$$

Al igual que para el diagrama anterior. No consideramos el FCNC y por lo tanto  $p_1^2 = p_2^2 = m_\nu^2$  remplazando esto

$$\begin{aligned} D_2 &= (p_1(1-x) + p_2y)^2 - (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2)x - (m_{H^\pm}^2 + m_\nu^2 - m_l^2)y - m_\nu^2 + m_l^2 \\ &= y^2m_\nu^2 - (m_{H^\pm}^2 - m_\nu^2 - m_l^2)y - 2xym_\nu^2 + x^2m_\nu^2 - (m_l^2 + m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2)x + m_l^2 \\ &= y^2m_\nu^2 - Fy - 2xym_\nu^2 + x^2m_\nu^2 + Fx + m_l^2. \end{aligned}$$

Donde tuvimos en cuenta que  $p_1 \cdot p_2 = m_\nu^2$  y  $F = (m_{H^\pm}^2 - m_l^2 - m_\nu^2)$ . Teniendo en cuenta los términos que dependen de  $k$  en el numerador (6.10) y las soluciones generales para cada uno de los tipos de integrales (E.52) tenemos

$$\begin{aligned} \Lambda_{2L1H}^\alpha(q, l) &= -e \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \\ &\frac{(k_\mu k_\beta + p_{1\mu}k_\beta + k_\mu p_{2\beta} + p_{1\mu}p_{2\beta}) A\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta B + m_l(k+p_2)_\beta A\gamma^\alpha \gamma^\beta B + m_l(k+p_1)_\mu A\gamma^\mu \gamma^\alpha B + m_l^2 A\gamma^\alpha B}{((k+p_1)^2 - m_l^2)((k+p_2)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} \\ &= \frac{-ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left[ \left( -\frac{2b^\mu b^\beta}{D_2} + g^{\mu\beta} \ln \frac{D_2}{\mu^2 4\pi} + \frac{p_{1\mu} b^\beta}{D_2} + \frac{p_{2\beta} b^\mu}{D_2} - \frac{p_{1\mu} p_{2\beta}}{D_2} \right) A\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta B \right. \\ &\left. + \left( \frac{b^\beta}{D_2} - \frac{p_{2\beta}}{D_2} \right) m_l A\gamma^\alpha \gamma^\beta B + \left( \frac{b^\mu}{D_2} - \frac{p_{1\mu}}{D_2} \right) m_l A\gamma^\mu \gamma^\alpha B - \frac{1}{D_2} m_l^2 A\gamma^\alpha B \right]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Al igual que en el caso anterior debemos realizar las operaciones que se encuentran en el numerador debido a que los términos  $b$  contienen términos en  $x$  y  $y$ , al igual que términos  $p_1$  y  $p_2$ . Adicionalmente debemos llevar los términos de  $p_1$  a la derecha y los  $p_2$  a la izquierda, como se realizó en el cálculo de  $2H1L$ .

Es necesario analizar cada uno de los términos, que aparecen en los numeradores de (6.12), para lo cual es necesario tener en cuenta lo realizado en el anexo F, donde los cálculos se hacen de forma detallada

- Para el término  $-b^\mu b^\beta A\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta B$  obtenemos

$$\begin{aligned} -b^\mu b^\beta A\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta B &= -Ab\gamma^\alpha b/B \\ &= \left[ \frac{1}{2} m_\nu^2 \gamma^\alpha (y-x+1)^2 - m_\nu (p_{1\alpha} - xp_{1\alpha} + yp_{2\alpha}) (y-x+1) \right] (ad+bc) \\ &\quad + \left[ m_\nu (p_{1\alpha} - xp_{1\alpha} + yp_{2\alpha}) (x+y-1) - m_\nu^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} (y-x+1)^2 \right] (bc-ad) \gamma_5, \end{aligned}$$

como se demuestra en (F.13).

- Para el término  $g^{\mu\beta} A\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta B$  será

$$\begin{aligned} g^{\mu\beta} A\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta B &= A\gamma_\beta\gamma^\alpha\gamma^\beta B = A(2g_{\beta\alpha} - \gamma^\alpha\gamma_\beta)\gamma^\beta B = 2A\gamma^\alpha B - 4A\gamma^\alpha B = -2A\gamma^\alpha B \\ &= -\gamma^\alpha(bc + ad) + \gamma^\alpha(bc - ad)\gamma_5. \end{aligned}$$

como se demuestra en (F.3)

- Para el término  $p_{2\beta} b^\mu A\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta B$  es

$$\begin{aligned} p_{2\beta} b^\mu A\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta B &= m_\nu [(1-x)p_{1\alpha} + (1-x)p_{2\alpha} + yp_{2\alpha}](ad + bc) - \frac{1}{2}\gamma^\alpha m_\nu^2 (y - 3x + 3)(bc + ad) \\ &\quad + m_\nu [(1-x)p_{2\alpha} - (1-x)p_{1\alpha} - yp_{2\alpha}](bc - ad)\gamma_5 + \frac{1}{2}m_\nu^2\gamma^\alpha (y - x + 1)(bc - ad)\gamma_5 \end{aligned}$$

como se demuestra en (F.16).

- Para el término  $p_{1\mu} b^\beta A\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta B$  resulta

$$\begin{aligned} p_{1\mu} b^\beta A\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta B &= m_\nu [(1-x)p_{1\alpha} + yp_{2\alpha} + yp_{1\alpha}](ad + bc) - m_\nu^2\gamma^\alpha \frac{1}{2}(1-x)(bc + ad) \\ &\quad + m_\nu^2\gamma^\alpha \frac{1}{2}(1-x-2y)(bc - ad)\gamma_5 + m_\nu [(1-x)p_{1\alpha} + yp_{2\alpha} - yp_{1\alpha}](bc - ad)\gamma_5 \end{aligned}$$

como se demuestra en (F.17).

- Para el caso  $p_{1\mu} p_{2\beta} A\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta B$  tenemos

$$\begin{aligned} p_{1\mu} p_{2\beta} A\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta B &= m_\nu (p_{2\alpha} + p_{1\alpha})(ad + bc) - \frac{3}{2}m_\nu^2\gamma^\alpha (bc + ad) \\ &\quad + m_\nu (p_{2\alpha} - p_{1\alpha})(bc - ad)\gamma_5 + \frac{1}{2}m_\nu^2\gamma^\alpha (bc - ad)\gamma_5, \end{aligned}$$

como se demuestra en (F.18).

- Para el caso de  $b^\mu A\gamma^\mu\gamma^\alpha B$  se tiene

$$\begin{aligned} b^\mu A\gamma^\mu\gamma^\alpha B &= p_{1\alpha}(1-x)(ac + bd) + m_\nu\gamma^\alpha \frac{1}{2}(y - 1 + x)(bd + ac) \\ &\quad + p_{1\alpha}(1-x)(bd - ac)\gamma_5 + m_\nu\gamma^\alpha \frac{1}{2}(1 - x + y)(bd - ac)\gamma_5, \end{aligned}$$

como se demuestra en (F.14).

- Para el caso de  $p_{1\mu} A\gamma^\mu\gamma^\alpha B$  es

$$\begin{aligned} p_{1\mu} A\gamma^\mu\gamma^\alpha B &= A\not{p}_1\gamma^\alpha B = A(2p_{1\alpha} - \gamma^\alpha\not{p}_1)B = 2p_{1\alpha}AB - A\gamma^\alpha\not{p}_1B \\ &= p_{1\alpha}(ac + bd) - m_\nu\gamma^\alpha \frac{1}{2}(ac + bd) + p_{1\alpha}(bd - ac)\gamma_5 + m_\nu\gamma^\alpha \frac{1}{2}(bd - ac)\gamma_5. \end{aligned}$$

- Para el caso de  $b^\beta A\gamma^\alpha\gamma^\beta B$  será

$$\begin{aligned} & b^\beta A\gamma^\alpha\gamma^\beta B \\ &= p_{2\alpha}y(ac+bd) + m_\nu\gamma^\alpha\frac{1}{2}(1-x-y)(ac+bd) + p_{2\alpha}y(bd-ac)\gamma_5 - m_\nu\gamma^\alpha\frac{1}{2}(1-x-y)(bd-ac)\gamma_5 \end{aligned}$$

como se demuestra en (F.15).

- Para el caso de  $p_{2\beta}A\gamma^\alpha\gamma^\beta B$  se tiene

$$\begin{aligned} p_{2\beta}A\gamma^\alpha\gamma^\beta B &= A\gamma^\alpha\not{p}_2 B = A(2p_{2\alpha} - \not{p}_2\gamma^\alpha)B = 2p_{2\alpha}AB - A\not{p}_2\gamma^\alpha B \\ &= p_{2\alpha}(ac+bd) - \frac{1}{2}m_\nu\gamma^\alpha(ac+bd) + p_{2\alpha}(bd-ac)\gamma_5 - \frac{1}{2}m_\nu\gamma^\alpha(bd-ac)\gamma_5 \end{aligned}$$

- Para el caso de  $A\gamma^\alpha B$  obtenemos

$$A\gamma_\alpha B = \gamma^\alpha\frac{1}{2}(bc+ad) - \gamma^\alpha\frac{1}{2}(bc-ad)\gamma_5.$$

como se demuestra en (F.3).

Teniendo en cuenta los resultados anteriores y reemplazando en (6.12) obtenemos después de hacer algebra (más detalles en F.2)

$$\begin{aligned} & \Lambda_{2L1H}^\alpha(q, l) \\ &= \frac{-ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \\ &+ \frac{1}{2D_2}\gamma^\alpha [x(8x-11)m_\nu^2 - m_l^2] (bc+ad) - \gamma^\alpha (bc+ad) \ln \frac{D_2}{\mu^2 4\pi} + \frac{1}{D_2}m_l m_\nu \gamma^\alpha (ac+bd) \\ &- \frac{1}{D_2}m_\nu (2m_\nu\gamma_\alpha - i\sigma^{\alpha\mu}q_\mu) (4x^2 - 5x + 2) (ad+bc) - \frac{m_l}{D_2}x (2m_\nu\gamma_\alpha - i\sigma^{\alpha\mu}q_\mu) (ac+bd) \\ &+ \frac{1}{D_2}m_\nu (2m_\nu\gamma_\alpha - i\sigma^{\alpha\mu}q_\mu) (x-2) (bc-ad)\gamma_5 - \frac{m_l}{D_2}x (2m_\nu\gamma_\alpha - i\sigma^{\alpha\mu}q_\mu) (bd-ac)\gamma_5 \\ &+ \frac{1}{D_2}\gamma^\alpha \left[ \left( \frac{15}{2}x - 4x^2 - 3 \right) m_\nu^2 + \frac{1}{2}m_l^2 \right] (bc-ad)\gamma_5 + \gamma^\alpha (bc-ad)\gamma_5 \ln \frac{D_2}{\mu^2 4\pi} \\ &+ \frac{1}{D_2}m_l m_\nu \gamma^\alpha (1-x) (bd-ac)\gamma_5 \end{aligned}$$

Escrito de esta forma, podemos identificar los términos que contribuyen en cada uno de los factores de forma, los cuales tienen la forma general

$$\Lambda^\alpha(q, l) = F_Q(q^2)\gamma_\alpha + F_M(q^2)i\sigma_{\alpha\mu}q^\mu + F_E(q^2)\sigma_{\alpha\mu}q^\mu\gamma_5 + F_A(q^2)(q^2\gamma_\alpha - q_\alpha\not{q})\gamma_5.$$

Por lo tanto:

- La contribución asociada al factor de carga es

$$\begin{aligned}
 & \Lambda_{2L1H}^\alpha(q, l)_{F_Q} \\
 &= \frac{-ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left\{ \frac{1}{D_2} \left[ \frac{1}{2}x(8x-11)m_\nu^2 - \frac{1}{2}m_l^2 - m_\nu 2m_\nu(4x^2-5x+2) \right] (bc+ad) + \frac{1}{D_2} m_l m_\nu (1-x) \right\} \\
 &= \frac{-ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left\{ \frac{1}{D_2} \left( \frac{9}{2}x m_\nu^2 - 4x^2 m_\nu^2 - \frac{1}{2}m_l^2 - 4m_\nu^2 \right) (bc+ad) + \frac{1}{D_2} m_l m_\nu (1-2x)(ac+bd) - (bc) \right\}
 \end{aligned}$$

- El término asociado al MDM será

$$\Lambda_{2L1H}^\alpha(q, l)_{F_M} = \frac{-ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D_2} [m_\nu(4x^2-5x+2)(ad+bc) + m_l x(ac+bd)] \quad (6.13)$$

- Finalmente el asociado al MDE está dado por

$$\Lambda_{2L1H}^\alpha(q, l)_{F_E} = \frac{-ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D_2} [m_l x(bd-ac) - m_\nu(x-2)(bc-ad)]$$

### 6.3. Suma de las correcciones para 2HDM en el vacío

Los diagramas que contribuyen al MDM para neutrinos en el ME, están dados por la gráfica 4.3 y el valor de la contribución al MDM es

$$\mu_{\nu_i} = 3,2 \times 10^{-19} \mu_B \left( \frac{m_{\nu_i}}{1eV} \right). \quad (6.14)$$

En el marco del 2HDM con neutrinos masivos, hemos incorporamos los diagramas 6.1. Para analizar los efectos de la nueva física podemos separar ambos tipos de contribuciones

$$\Lambda_{MDM} = \Lambda_{2HDM}^{(n)} + \Delta\Lambda_{ME}, \quad (6.15)$$

donde  $\Delta\Lambda_{ME}$  será la contribución al MDM proveniente ME y  $\Lambda_{2HDM}^{(n)}$  es la contribución al MDM de la nueva física, debido a los dos diagramas que acabamos de calcular, representado en la contribuciones (6.7) y (6.13). Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{2HDM}^{(n)\alpha}(q, l)_{F_M} &= 2\Lambda_{2H1L}^\alpha(q, l)_{F_M} + 2\Lambda_{2L1H}^\alpha(q, l)_{F_M} \\
 &= \frac{2ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D_1} \left[ m_\nu(-1+3x-x^2) + m_l \left( \frac{1}{2} - x \right) \right] (ac+bd) \\
 &\quad + \frac{2ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D_2} [m_\nu(4x^2-5x+2)(ad+bc) + m_l x(ac+bd)], \quad (6.16)
 \end{aligned}$$

el 2 que parece en las ecuaciones se debe a que debemos considerar los dos posibles signos del Higgs cargado. Adicionalmente tenemos que

$$D_1 = y^2 m_\nu^2 - 2xy m_\nu^2 + (m_\nu^2 - m_l^2 + m_{H^\pm}^2) y + x^2 m_\nu^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2) x + m_{H^\pm}^2 ,$$

y

$$D_2 = y^2 m_\nu^2 - (m_{H^\pm}^2 - m_\nu^2 - m_l^2) y - 2xy m_\nu^2 + x^2 m_\nu^2 - (m_l^2 + m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2) x + m_l^2 .$$

Es importante tener en cuenta que los valores de las constantes de los vértices son diferentes, para cada tipo del 2HDM. Estas fueron escritas de forma general como  $(aP_L + bP_R)$ ,  $(cP_L + dP_R)$  y están resumidas de forma general en la tabla 5.1 y expandidas para cada sabor en la tabla 5.3.

Reescribiendo el término (6.16) para el 2HDM tipo I,II y III , y para cada uno de los sabores tenemos:

- 2HDM tipo I, para el proceso  $\nu_e \rightarrow \nu_e \gamma$

$$\begin{aligned} & \Lambda_{2HDM}(q, l)_{FM} \\ &= \frac{ei}{16\pi^2} \frac{\sqrt{2}G_F}{\tan^2 \beta} 0,675 (m_{\nu_e}^2 + m_e^2) \left\{ \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D_1} [m_e(1-2x) + m_{\nu_e}(-2+6x-4x^2)] \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{2}{D_2} (m_{\nu_e}(4x^2-11x+6) + m_e x) \right\} . \end{aligned}$$

Para el proceso  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu \gamma$

$$\begin{aligned} & \Lambda_{2HDM}(q, l)_{FM} \\ &= \frac{ei}{16\pi^2} \frac{\sqrt{2}G_F}{\tan^2 \beta} 0,419 (m_{\nu_\mu}^2 + m_\mu^2) \left\{ \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D_1} [m_\mu(1-2x) + m_{\nu_\mu}(-2+6x-4x^2)] \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{2}{D_2} (m_{\nu_\mu}(4x^2-11x+6) + m_\mu x) \right\} . \end{aligned}$$

Para el proceso  $\nu_\tau \rightarrow \nu_\tau \gamma$

$$\begin{aligned} & \Lambda_{2HDM}(q, l)_{FM} \\ &= \frac{ei}{16\pi^2} \frac{\sqrt{2}G_F}{\tan^2 \beta} 0,599 (m_{\nu_\tau}^2 + m_\tau^2) \left\{ \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D_1} [m_\tau(1-2x) + m_{\nu_\tau}(-2+6x-4x^2)] \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{2}{D_2} (m_{\nu_\tau}(4x^2-11x+6) + m_\tau x) \right\} . \end{aligned}$$

- 2HDM tipo II, para el proceso  $\nu_e \rightarrow \nu_e \gamma$

$$\begin{aligned} & \Lambda_{2HDM}(q, l)_{FM} \\ &= \frac{\sqrt{2}eG_F i}{16\pi^2} 0,675 \left( \frac{m_{\nu_e}^2}{\tan^2 \beta} + m_e^2 \tan^2 \beta \right) \left\{ \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D_1} [m_e(1-2x) + m_{\nu_e}(-2+6x-4x^2)] \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{2}{D_2} (m_{\nu_e}(4x^2-11x+6) + m_e x) \right\}. \end{aligned}$$

para el proceso  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu \gamma$

$$\begin{aligned} & \Lambda_{2HDM}(q, l)_{FM} \\ &= \frac{\sqrt{2}eG_F i}{16\pi^2} 0,419 \left( \frac{m_{\nu_\mu}^2}{\tan^2 \beta} + m_\mu^2 \tan^2 \beta \right) \left\{ \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D_1} [m_\mu(1-2x) + m_{\nu_\mu}(-2+6x-4x^2)] \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{2}{D_2} (m_{\nu_\mu}(4x^2-11x+6) + m_\mu x) \right\}. \end{aligned}$$

para el proceso  $\nu_\tau \rightarrow \nu_\tau \gamma$

$$\begin{aligned} & \Lambda_{2HDM}(q, l)_{FM} \\ &= \frac{\sqrt{2}eG_F i}{16\pi^2} 0,599 \left( \frac{m_{\nu_\tau}^2}{\tan^2 \beta} + m_\tau^2 \tan^2 \beta \right) \left\{ \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D_1} [m_\tau(1-2x) + m_{\nu_\tau}(-2+6x-4x^2)] \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{2}{D_2} (m_{\nu_\tau}(4x^2-11x+6) + m_\tau x) \right\}. \end{aligned}$$

- 2HDM tipo III, para el proceso  $\nu_e \rightarrow \nu_e \gamma$

$$\begin{aligned} & \Lambda_{2HDM}(q, l)_{FM} = \frac{ei}{16\pi^2 v^2} \\ & (0,2034\lambda_\nu^2 m_{\nu_e} m_{\nu_\mu} + 0,2992\lambda_l^2 m_e m_\mu) \left\{ \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D_1} [m_e(1-2x) + m_{\nu_e}(-2+6x-4x^2)] \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{2}{D_2} (m_{\nu_e}(4x^2-11x+6) + m_e x) \right\}. \end{aligned}$$

Para el proceso  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu \gamma$

$$\Lambda_{2HDM}^\alpha(q, l)_{F_M} = \frac{ei}{16\pi^2 v^2} \left[ \lambda_\nu^2 (0,547\sqrt{m_{\nu_e} m_{\nu_\mu}} + 0,648m_{\nu_\mu} + 0,529\sqrt{m_{\nu_\tau} m_{\nu_\mu}})^2 + \lambda_l^2 (0,451\sqrt{m_e m_\mu} + 0,648m_\mu + 0,614\sqrt{m_\tau m_\mu})^2 \right] \left\{ \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D_1} [m_\mu(1-2x) + m_{\nu_\mu}(-2+6x-4x^2)] + \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{2}{D_2} (m_{\nu_\mu}(4x^2-11x+6) + m_\mu x) \right\}.$$

Para el proceso  $\nu_\tau \rightarrow \nu_\tau \gamma$

$$\Lambda_{2HDM}^\alpha(q, l)_{F_M} = \frac{ei}{16\pi^2 v^2} \left[ \lambda_\nu^2 (0,614\sqrt{m_{\nu_\tau} m_{\nu_\mu}} + 0,774m_{\nu_\tau})^2 + \lambda_l^2 (0,529\sqrt{m_\tau m_\mu} + 0,774m_\tau)^2 \right] \left\{ \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D_1} [m_\tau(1-2x) + m_{\nu_\tau}(-2+6x-4x^2)] + \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{2}{D_2} (m_{\nu_\tau}(4x^2-11x+6) + m_\tau x) \right\}.$$

## 6.4. Resultados y análisis para el MDM en 2HDM

Nuestro análisis está basado en diferentes valores para la masa del Higgs cargado, teniendo en cuenta para esto los actuales límites experimentales. Para el 2HDM tipo I y II los posibles valores experimentales de los parámetros  $(m_{H^\pm}, \tan\beta)$  provienen de procesos como  $B_u \rightarrow \tau\nu_\tau$ ,  $D_s \rightarrow \tau\nu_\tau$ ,  $B \rightarrow D\tau\nu_\tau$ ,  $K \rightarrow \mu\nu_\mu$  y  $\text{BR}(B \rightarrow X_s\gamma)$  [104].

Basados en las restricciones fenomenológicas para el 2HDM tipo I, tomaremos los valores de  $\tan\beta$  entre  $(2-90)$  y los valores de la masa del Higgs cargado  $m_{H^\pm}$  entre  $(100-1000) \text{ GeV}$  [105]. Para el 2HDM tipo II, tenemos diferentes intervalos permitidos para la masa del Higgs cargado en función de los valores de  $\tan\beta$ : para  $m_{H^\pm} = 300 \text{ GeV}$  los valores de  $\tan\beta$  se encuentran entre  $(4-40)$ , para  $m_{H^\pm} = 500 \text{ GeV}$  el valor de  $\tan\beta$  es entre  $(2-69)$  y para valores de  $m_{H^\pm} = (700, 900, 1000) \text{ GeV}$  los valores de  $\tan\beta$  están entre  $(1-70)$  [105].

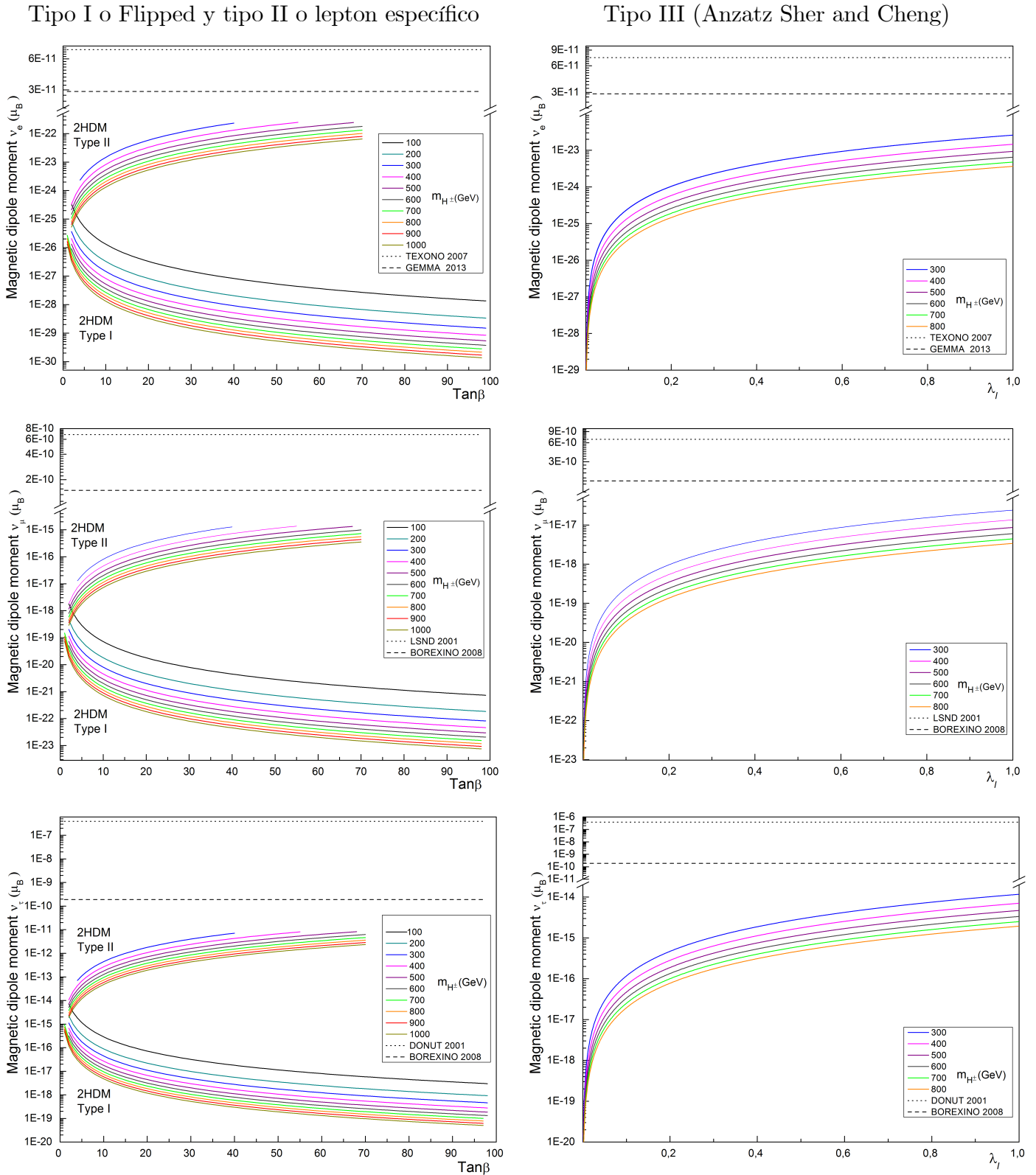


Figura 6.4: Contribución al MDM para neutrinos proveniente del 2HDM tipo I,II y III. Barriendo las masas del Higgs cargado entre (100 – 1000) GeV para el tipo I; entre (300 – 1000) GeV para el tipo II con diferentes valores de  $\tan\beta$  para cada uno de las masas del Higgs cargado y finalmente para el tipo III barriendo masas entre (300 – 800) GeV. Las líneas horizontales hacen referencia a los límites



*experimentales para cada uno de los tipos de neutrino.*

En las primeras tres graficas de la Fig. 6.4, hemos graficado el MDM para el neutrino electrónico, muónico y tauónico versus  $\tan\beta$  para diferentes valores de la masa del Higgs cargado, teniendo en cuenta las restricciones fenomenológicas para el 2HDM tipo I y II. Las líneas horizontales en el caso del neutrino electrónico corresponden a los límites experimentales para MDM provenientes de TEXONO 2007 (Taiwan EXperiment On NeutriNO) [106] el cual tiene un valor de  $\mu_{\bar{\nu}_e} < 7,4 \times 10^{-11} \mu_B$  al 90 % C.L., y GEMMA 2013. (Germanium Experiment for measurement of Magnetic Moment of Antineutrino) [107] la cual es  $\mu_{\bar{\nu}_e} < 2,9 \times 10^{-11} \mu_B$  al 90 % C.L..

En el caso del neutrino muónico las líneas horizontales corresponden a los límites experimentales para MDM provenientes de LSND 2001(Liquid Scintillating Neutrino Detector) [108] el cual tiene un valor de  $\mu_{\nu_\mu} < 6,8 \times 10^{-10} \mu_B$  al 90 % C.L., y BOREXino 2008. (BOREXino es el diminutivo en italiano para BOREX (Boron solar neutrino experiment)) [109] el cual es  $\mu_{\nu_\mu} < 1,9 \times 10^{-10} \mu_B$  al 90 % C.L. Finalmente las líneas horizontales para el neutrino tauónico corresponde a los límites experimentales para MDM provenientes de DONUT 2001(Direct Observation of the NU Tau) [110] el cual tiene un valor de  $\mu_{\nu_\tau} < 3,9 \times 10^{-7} \mu_B$  al 90 % C.L., y BOREXino 2008 [109] cuyo límite es  $\mu_{\nu_\mu} < 1,5 \times 10^{-10} \mu_B$  al 90 % C.L.<sup>2</sup>

Un análisis detallado de la contribución de nueva física es:

- MDM para  $\nu_e$ : Para el caso tipo I, tenemos que la contribución más relevante proviene de los valores de  $\tan\beta < 10$  y con valores pequeños de la masa del Higgs cargado. Lo cual nos da una contribución al MDM de entre  $10^{-26} - 10^{-27} \mu_B$ . Sin embargo, esta contribución de la nueva física no con lleva ninguna corrección apreciable respecto al valor del MDM del ME, la cual es de  $1,948 \times 10^{-20} \mu_B$  bajo nuestro anzats para la masa del neutrino electrónico, el cual tendría un valor de  $m_{\nu_e} = 6,089 \times 10^{-2} eV$ . Por lo tanto no tenemos regiones de exclusión en función de los parámetros del 2HDM tipo I. Para el tipo II, las contribuciones más importantes se obtienen para los valores más grande de  $\tan\beta$  y valores pequeños de masa del Higgs cargado, obteniendo contribuciones cercanas a  $10^{-23} \mu_B$ . Sin embargo estas contribuciones al igual que para el tipo I, están varios ordenes de magnitud por debajo de la contribución del ME.

Un aspecto interesante es la diferencia entre ambos modelos, en el cual en algunos casos puede ser de solo un orden de magnitud para  $1 < \tan\beta < 10$  y puede llegar a ser de más de siete ordenes de magnitud a medida que  $\tan\beta \gg 1$ . Esta diferencia en el comportamiento en los modelos con respecto a la  $\tan\beta$ , se debe a la estructura de acople en el sector de Yukawa, el cual se construye con el fin de evitar el cambio de sabor en corrientes neutras.

- MDM para  $\nu_\mu$ : Podemos ver que con respecto al MDM del neutrino electrónico, la estructura de la contribución es bastante similar. Con la diferencia que el MDM del  $\nu_\mu$  es mayor en casi ocho ordenes de magnitud en relación al caso anterior. Fundamentalmente este efecto es debido a dos aspectos: La suposición de una jerarquía normal en la masa de los neutrinos, lo cual representa que  $m_{\nu_\mu} > m_{\nu_e}$  la cual la hemos hecho compatible con los límites cosmológicos, y el segundo aspecto hace referencia a la jerarquía de los leptones cargados  $m_\mu > m_e$ .

El MDM del  $\nu_\mu$  para el ME es de  $2,161 \times 10^{-20} \mu_B$  bajo nuestro anzats de  $m_{\nu_\mu} = 6,754 \times 10^{-2} eV$ . Bajo esta referencia, la contribución del 2HDM tipo I, es mayor a la del ME para valores de

<sup>2</sup>En un estudio reciente [111], Valle hace un análisis actualizado de los momentos magnéticos del neutrino, basado en los datos más recientes de Borexino, proponiendo un nuevo límite en el momento magnético efectivo del neutrino de  $3,1 \times 10^{-11} \mu_B$  al 90 % C.L.

$\tan \beta < 15$  y para todos los valores de la masa del Higgs cargado, obteniéndose un valor máximo de  $5,027 \times 10^{-18} \mu_B$  para  $m_{H^\pm} = 100 \text{ GeV}$  y  $\tan \beta = 2$ . Mientras que para valores de  $\tan \beta > 15$  todas las contribuciones están por debajo del ME. Para 2HDM tipo II, la contribución es mayor al MDM que la que se tiene en el ME, para cualquier valor de  $\tan \beta$  y para cualquier valor de masa del Higgs cargado, siendo la contribución más grande de  $3,935 \times 10^{-16} \mu_B$  para  $m_{H^\pm} = 400 \text{ GeV}$  y  $\tan \beta = 55$ . Sin embargo, esta contribución se encuentra casi seis ordenes de magnitud por debajo de los umbrales experimentales actuales.

- MDM para  $\nu_\tau$ : Podemos ver que el valor del MDM, se incrementa en cerca de cuatro órdenes de magnitud con respecto a la contribución del neutrino muónico. Este caso es el más interesante en el vacío, debido a que para el 2HDM tipo I y II, la contribución en ambos casos está por encima del ME la cual es de  $2,287 \times 10^{-20} \mu_B$  bajo nuestro anzats de  $m_{\nu_\mu} = 7,147 \times 10^{-2} \text{ eV}$ . Esto se debe a la suposición de una jerarquía normal en el sector de neutrinos y de leptones cargados, además de que la masa el tauon es casi 17 veces la masa de muón.

La contribución del 2HDM tipo I, tiene un valor máximo de  $1,668 \times 10^{-15} \mu_B$  para  $m_{H^\pm} = 100 \text{ GeV}$  y  $\tan \beta = 2$ . Mientras que para 2HDM tipo II, la contribución más grande de es  $1,831 \times 10^{-12} \mu_B$  para  $m_{H^\pm} = 500 \text{ GeV}$  y  $\tan \beta = 68$ . Es importante tener en cuenta que para el 2HDM tipo II, la contribución de nueva física más relevante está a solamente dos órdenes de magnitud por debajo del umbral experimental actual.

- MDM para 2HDM tipo III: En este caso, aunque tenemos cierta libertad en la elección del valor de  $\lambda_{ij}$ , el cual aparece en el lagrangiano de Yukawa. Este no contribuirá significativamente porque está vinculado con la raíz cuadrada de la masa de los neutrinos y dada la masa tan pequeña de estos, la contribución será muy pequeña. Este hecho lo podemos ver en la Fig. 6.4, debido a que las contribuciones de este modelo son más de 15 órdenes de magnitud menores a la contribución del ME y más de 26 órdenes de magnitud por debajo del umbral experimental en el mejor de los casos, el cual se presenta al observar la contribución debida al neutrino tauónico.

## 6.5. Modelo 2HDM con neutrino específico

En el 2HDM con neutrino específico, debemos tener en cuenta que el cambio que tenemos con respecto al 2HDM tipo I, II y III, está en la forma de los acoples de Yukawa. Partiendo de los resultados obtenidos anteriormente en (6.16) la contribución al MDM, para el 2HDM con neutrino específico será

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{2HDM}^\alpha(q, l)_{FM} &= 2\Lambda_{2H1L}(q, l)_{FM} + 2\Lambda_{2L1H}(q, l)_{FM} \\
 &= \frac{ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D_1} [m_l(1-2x) + m_\nu(-2+6x-4x^2)](ac+bd) \\
 &\quad + \frac{ei}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D_2} [m_\nu(4x^2-11x+6) + m_l x](ac+bd). \tag{6.17}
 \end{aligned}$$

Al remplazar las condiciones de los vértices en este modelo, las cuales fueron escritas de forma general como  $(aP_L + bP_R)$ ,  $(cP_L + dP_R)$  y están resumidas de forma general en la tabla 5.2 y expandidas para

cada tipo de neutrino en la tabla 5.3. Obtenemos que la contribución para el proceso  $\nu_e \rightarrow \nu_e \gamma$  será

$$\begin{aligned} \Lambda_{2HDM}^\alpha(q, l)_{FM} &= \frac{ei}{16\pi^2} \left( \frac{9,894}{v_2^2} m_{\nu_e}^2 \right) \left\{ \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D_1} [m_e(1-2x) + m_{\nu_e}(-2+6x-4x^2)] \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{2}{D_2} [m_{\nu_e}(4x^2-11x+6) + m_e x] \right\}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Para el proceso  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu \gamma$  es

$$\begin{aligned} \Lambda_{2HDM}^\alpha(q, l)_{FM} &= \frac{ei}{16\pi^2 v^2} \left( \frac{11,813}{v_2^2} m_{\nu_\mu}^2 \right) \left\{ \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D_1} [m_\mu(1-2x) + m_{\nu_\mu}(-2+6x-4x^2)] \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{2}{D_2} [m_{\nu_\mu}(4x^2-11x+6) + m_\mu x] \right\}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

y finalmente para el proceso  $\nu_\tau \rightarrow \nu_\tau \gamma$  será

$$\begin{aligned} \Lambda_{2HDM}^\alpha(q, l)_{FM} &= \frac{ei}{32\pi^2 v^2} \left( \frac{10,207}{v_2^2} m_{\nu_\tau}^2 \right) \left\{ \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D_1} [m_\tau(1-2x) + m_{\nu_\tau}(-2+6x-4x^2)] \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{2}{D_2} [m_{\nu_\tau}(4x^2-11x+6) + m_\tau x] \right\}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Partiendo de los resultados obtenidos para los autoestados de masa (3.51) podemos calcular VEV para el segundo doblete para un 2HDM neutrino específico, si tenemos en cuenta el límite por perturbatividad para los acoplos de Yukawa es  $4\pi$

$$\frac{\sqrt{2}m_\nu}{v_2} \leq 4\pi,$$

el valor límite máximo para  $v_2$ , con el cual, la teoría continua siendo perturbativa y el cual es diferente para cada uno de los tipos de neutrino será

$$v_2 = U_{PMNS} \frac{\sqrt{2}m_\nu}{4\pi}. \quad (6.21)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \nu_e &\rightarrow v_2 = 5,5810 \times 10^{-3} eV \\ \nu_\mu &\rightarrow v_2 = 4,4453 \times 10^{-3} eV \\ \nu_\tau &\rightarrow v_2 = 6,8563 \times 10^{-3} eV \end{aligned} \quad (6.22)$$

## 6.6. Resultados y análisis para el MDM en 2HDM con neutrino específico

En el escenario de 2HDM con neutrino específico. La contribución al MDM en el caso de los neutrinos electrónicos, no es sensible al VEV para el segundo doblete (que es el que dota de masa a los neutrinos). El pequeño valor del MDM es debido a la estructura del acople, el cual depende directamente de la masa de los neutrinos y el cual se debilita aún más para el caso del neutrino electrónico debido a nuestro anzats en la jerarquía de masas del neutrino (Fig. 6.4).

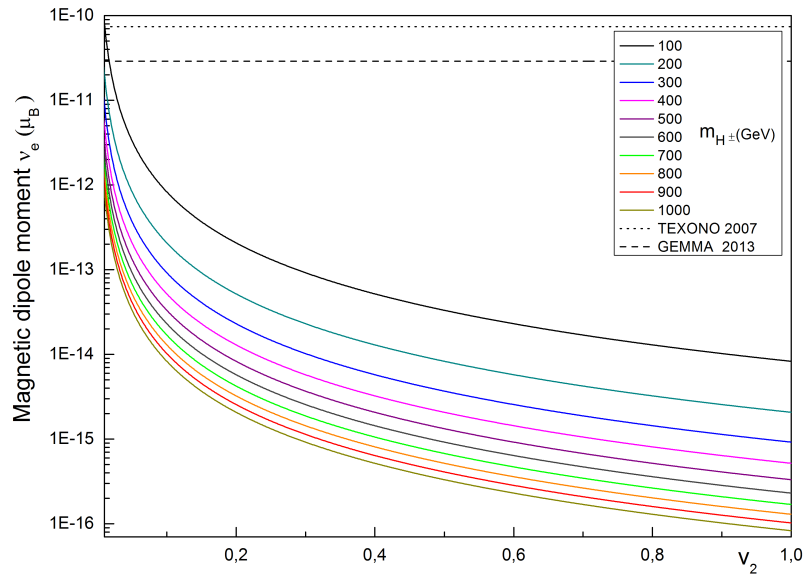


Figura 6.4: Contribución al MDM para el neutrino electrónico proveniente del 2HDM con neutrino específico, barriendo masas del Higgs cargado entre (100 – 1000)Gev. Las líneas horizontales hacen referencia a los límites experimentales para el MDM del neutrino electrónico. La línea azul identifica el límite más bajo para el valor esperado en el vacío para  $v_2$  basado en la perturbatividad de los acoples de Yukawa.

Los valores obtenidos bajo este modelo, están todavía muy lejos de los límites experimentales actuales. Sin embargo, se encuentran por encima de la contribución que tenemos del ME y del asociado a la contribución del 2HDM tipo I y II, esto se debe a la estructura del acople de Yukawa, el cual depende de la relación entre  $\frac{m_\nu}{v_2}$ .

Para el caso del neutrino muónico (Fig. 6.5), tenemos una importante contribución del VEV del segundo doblete a un valor de  $4,44 \times 10^{-3} eV$ , el cual está a siete órdenes de magnitud por debajo de los límites experimentales, y tres ordenes de magnitud por encima de la contribución del ME. Podemos ver que valores de  $v_2$  con los cuales, podríamos tener algún tipo de contribución significativa, violan perturbatividad directamente.

Finalmente para neutrinos tauónicos (Fig. 6.6), encontramos uno de los más interesantes escenarios debido a la proximidad con los límites experimentales. Como ejemplo tenemos que para un VEV de  $1 \times 10^{-5} eV$  estamos a solamente dos órdenes del límite experimental, lo cual podría ser un escenario posible de nueva física. Sin embargo, al igual que para el caso del neutrino muónico, para valores por debajo de  $6,85 \times 10^{-3} eV$  estamos violando directamente el límite de perturbatividad.

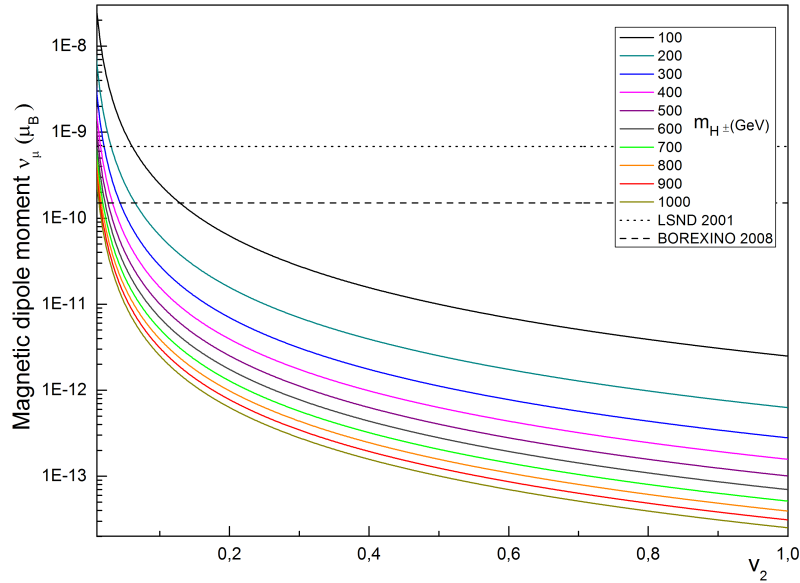


Figura 6.5: Contribución al MDM para el neutrino muónico proveniente del 2HDM con neutrino específico, barriendo masas del Higgs cargado entre (100–1000)Gev. Las líneas horizontales hacen referencia a los límites experimentales para el MDM del neutrino muónico. La línea azul identifica el límite más bajo para el valor esperado en el vacío para  $v_2$  basado en la perturbatividad de los acoples de Yukawa.

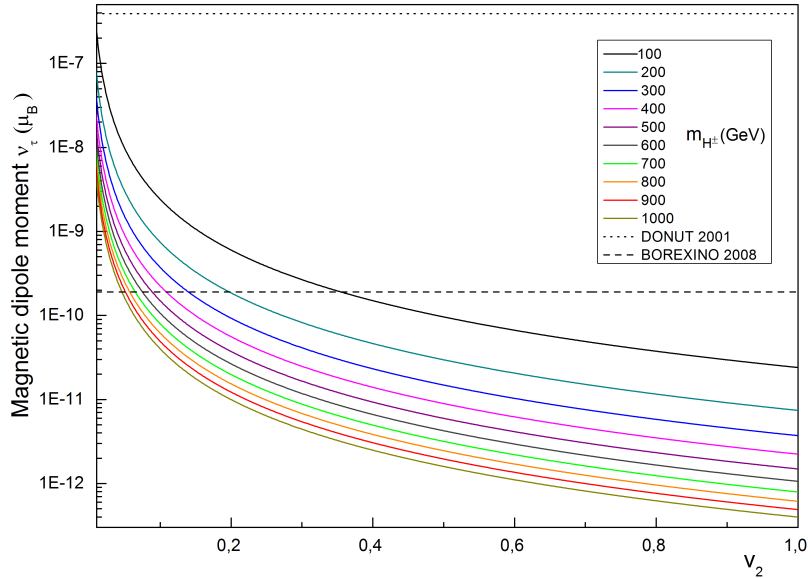


Figura 6.6: Contribución al MDM para el neutrino tauónico proveniente del 2HDM con neutrino específico, barriendo masas del Higgs cargado entre (100–1000)Gev. Las líneas horizontales hacen referencia a los límites experimentales para el MDM del neutrino tauónico. La línea azul identifica el límite más bajo para el valor esperado en el vacío para  $v_2$  basado en la perturbatividad de los acoples de Yukawa.

Debemos recordar, que los límites de perturbatividad son establecidos para evitar las divergencias que se puedan presentar en las ecuaciones del grupo de renormalización. La razón es que el valor del acople de Yukawa no puede exceder el límite de  $4\pi$ , ya que más allá de este límite, la posibilidad de encontrar polos de Landau en la evolución de los acoples de energía es significativamente mayor. Este valor se puede ver como un límite inferior de  $v_2$ , para la respectiva masa del neutrino. Por ejemplo en el caso del  $\nu_\tau$  el valor mínimo de  $v_{2\min} = 6,85 \times 10^{-3} eV$ . Por lo tanto, para valores más bajos a este, las correcciones serán todas no perturbativas.

## 6.7. Conclusiones del capítulo

El MDM del neutrino proporciona una buena herramienta para la búsqueda de posible física más allá del modelo estándar. Aunque la magnitud del MDM se encuentra fuertemente suprimida por la pequeñez de la masa de los neutrinos. La contribución de los nuevos parámetros (tales como masas y ángulos de mezcla) podría llegar a ser relativamente significativa.

En particular, para el 2HDM, al evaluar las contribuciones procedentes de la inserción del bosón de Higgs cargado en los loops muestran que para 2HDM tipo I y tipo II, la contribución al MDM está lejos del umbral de detección experimental. En el caso de los neutrinos electrónicos, obtenemos una contribución máxima de seis órdenes de magnitud por debajo de los valores del ME para el modelo tipo I y de tres órdenes de magnitud para el modelo tipo II. En el caso del neutrino muónico, las mayores contribuciones se presentan para el 2HDM tipo II, con valores que en el mejor de los casos, están seis ordenes de magnitud del límite experimental y por encima para cualquier valor posible de masa del Higgs cargado y de la  $\tan\beta$ . No así, para el 2HDM tipo I, en el cual la contribución en general está por debajo de la contribución del ME.

Finalmente en el caso del neutrino tauónico para 2HDM tipo I y tipo II, tenemos que todas las contribuciones están por encima del ME. Siendo muy interesante la contribución del modelo tipo II, ya que para ciertos valores de la masa del Higgs cargado y de  $\tan\beta$ , la contribución al MDM está a solamente dos órdenes de magnitud por debajo del límite experimental dado por BOREXINO.

A pesar que el 2HDM tipo III muestra un nuevo escenario para interpretar MDM por medio de FCNC. Las contribuciones de este modelo son extremadamente pequeñas, incluso en comparación con las contribuciones provenientes del ME.

Otro hecho importante es que si experimentalmente es posible obtener el MDM del neutrino, este tipo de medición sería muy sensible para los diferentes tipos del 2HDM como se ha descrito anteriormente. Es de recalcar que estos modelos se basan en términos de masa para los neutrinos no naturales. Una forma para introducir dicho término de masa, de forma más natural, es considerar el 2HDM con neutrino específico. El cual incorpora de una forma simple y natural, la masa de los neutrinos. Lo cual se realiza mediante la elección de un VEV en la escala  $eV$  (o incluso menos) para el segundo doblete ( $v_2$ ), el cual se acopla solamente a neutrinos de Dirac. Así entonces, el valor de las masas los neutrinos puede explicarse, si otros parámetros en el modelo, como por ejemplo,  $m_{12}^2$ , toma valores apropiados. El modelo de neutrino específico tiene otras motivaciones fenomenológicas (por ejemplo decaimientos  $\mu \rightarrow e\gamma$ , cosmológicas y la fenomenología de neutrinos). En nuestro caso, además de darle masa a los neutrinos de forma más natural, nos permite calcular el MDM.

# Capítulo 7

## Momento dipolar magnético con campos magnéticos

Los campos magnéticos se encuentran fácilmente a diferentes escalas y ubicaciones en nuestro universo. Uno campo magnético muy conocido por nosotros es el campo magnético de la tierra, este tiene un valor cercano a  $10^{-1}G$ , y produce una magnetosfera. En la cual, las partículas cargadas algunas veces quedan atrapadas y producen sobre la tierra una región con forma de campana. Esta se denomina campana de Van Allen, estas partículas cargadas provienen en su gran mayoría del sol y sus tormentas solares, produciendo alteraciones en el campo magnético de la tierra. La interacción de estas con la campana de Van Allen produce la denominada “aurora borealis”.

En el sol, al valor del campo magnético en las manchas solares puede llegar hasta  $10^3G$ . Valores de campo magnético más intensos se presentan en los núcleos de las supernovas, cuyo campo magnético en la superficie ha sido estimado del orden de  $10^{13}G$ . Sin embargo, no solo los planetas y las estrellas presentan campos magnéticos asociados, sino también los medios galácticos e intergalácticos. Por ejemplo, el promedio del campo magnético en la vía láctea es del orden de  $3 - 4G$  con una escala de longitud de algunos kiloparsecs.

Un aspecto interesante, es que los campos magnéticos afectan las interacciones de las partículas elementales. Pudiendo por ejemplo, aumentar las secciones eficaces de dispersión o las tasas de decaimiento para los valores en el vacío de este tipo de procesos. Así entonces, la acción de los campos magnéticos en la interacción de partículas elementales pueden producir resultados no triviales y explicar algunas interesantes observaciones en astrofísica.

### 7.1. Cálculo del MDM a partir de la auto energía

Un campo magnético fuerte, introduce nuevos términos en los propagadores de las partículas inmersas en el campo. Esto produce que contribuciones adicionales a las que tenemos en el vacío. De hecho, a partir del cálculo de la auto energía del neutrino con campo magnético, podemos calcular el momento magnético del neutrino [32], [100]. Para lo cual debemos tener en cuenta los diagramas de Feynman de la figura 7.1.

Los propagadores para leptones y escalares con campo magnético fueron calculados en el anexo H. Dado que solamente vamos a contemplar contribuciones de campo débil, podemos tener en cuenta solo contribuciones a primer orden en el campo magnético. Así entonces, el propagador bosónico, leptónico

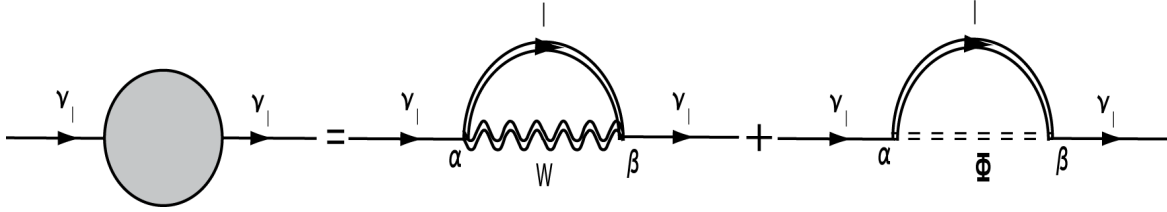


Figura 7.1: Diagrama de Feynman que representa la contribución a la autoenergía debida al campo magnético, la doble línea corresponde al leptón cargado  $l$ , al bosón  $W$  y al escalar no físico cargado  $\Phi$  en un campo magnético externo. La flecha indica la dirección del flujo fermiónico.

y escalar, respectivamente H.24, H.23 y H.20 serán [26], [100].

$$\begin{aligned}
 G_B(p) &= -\frac{ig_{\alpha\beta}}{p^2 - m_W^2} - \frac{2\beta\varphi}{(p^2 - m_W^2)^2} + \mathcal{O}(\beta^2), \\
 D(p) &= \frac{i}{p^2 - m_W^2} + \mathcal{O}(\beta^2), \\
 S_B^F(p) &= \frac{i(m - \not{p})}{p^2 - m^2} + \beta \frac{(m - \not{p}_{\parallel})}{2(p^2 - m^2)^2} (\gamma\varphi\gamma) + \mathcal{O}(\beta^2).
 \end{aligned}$$

En el término  $\gamma\varphi\gamma$ , los índices de Lorentz y del tensor están contraídos como  $\gamma\varphi\gamma = \gamma_{\alpha}\varphi^{\alpha\beta}\gamma_{\beta}$ , donde  $\varphi^{\alpha\beta}$  es un tensor adimensional y normalizado al campo magnético, el cual está relacionado con el tensor electromagnético

$$\begin{aligned}
 \varphi^{\alpha\beta} &= \frac{F^{\alpha\beta}}{B}, \\
 \tilde{\varphi}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\frac{F^{\alpha\beta}}{B}.
 \end{aligned}$$

Debido a que el término de interacción del neutrino y los bosones en el modelo estándar, está definido en función del lagrangiano

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{\sqrt{2}} \left[ (\bar{\psi}_l \gamma_{\alpha} L \psi_{\nu}) W_{\alpha} + (\bar{\psi}_{\nu} \gamma_{\alpha} L \psi_l) W_{\alpha}^* \right] - \frac{g}{\sqrt{2}m_W} \left[ (\bar{\psi}_l (m_l R - m_{\nu} L) \psi_{\nu}) \Phi + (\bar{\psi}_{\nu} (m_l R - m_{\nu} L) \psi_l) \Phi^* \right]$$

donde  $\psi_{\nu}$ ,  $\psi_l$ ,  $W_{\alpha}$  y  $\Phi$  son el campo de neutrino, de leptón cargado, del bosón  $W$  y del escalar cargado. La expresión general del operador de autoenergía del neutrino será, la suma de las contribuciones

$$\Sigma(p) = \Sigma_W(p) + \Sigma_{\Phi}(p).$$

Si tenemos en cuenta que el vértice  $\nu - W^{\pm} - l$  lo podemos escribir como

$$-i\frac{g}{2\sqrt{2}}\gamma_{\mu}(1 - \gamma^5),$$



entonces el término  $\sum_W(p)$  será [32], [112]

$$\begin{aligned}
 & \sum_W(p) \\
 &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left( -i \frac{g}{2\sqrt{2}} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \right) S_B^F(p-k) \left( -i \frac{g}{2\sqrt{2}} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \right) G_B^{\alpha\beta}(k) \\
 &= -\frac{ig^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha P_L S_B^F(p-k) \gamma_\beta P_L G_B^{\alpha\beta}(k) \\
 &= -\frac{ig^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} P_R \gamma_\alpha S_B^F(p-k) G_B^{\alpha\beta}(k) \gamma_\beta P_L \\
 &= -i \frac{g^2}{2} P_R \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha \left( \frac{i(m_l + \not{p} - \not{k})}{(p-k)^2 - m_l^2} + \frac{\beta(m + \gamma \cdot (p_\parallel - k_\parallel))}{2((p-k)^2 - m^2)^2} (\gamma\varphi\gamma) \right) \left( \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 - m_W^2} - \frac{2\beta\varphi}{(k^2 - m_W^2)^2} \right) \gamma_\beta P_L \\
 &= -i \frac{g^2}{2} P_R \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha \left\{ \begin{aligned} & \frac{(m_l + \not{p} - \not{k})_{\alpha\beta}}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} - \frac{\beta(m + \gamma \cdot (p_\parallel - k_\parallel))}{2((p-k)^2 - m^2)^2} (\gamma\varphi\gamma) \frac{ig_{\alpha\beta}}{(k^2 - m_W^2)} \\ & - \frac{2i(m_l + \not{p} - \not{k})_{\beta\varphi}}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)^2} - \frac{\beta^2(m + \gamma \cdot (p_\parallel - k_\parallel))}{2((p-k)^2 - m^2)^2} (\gamma\varphi\gamma) \frac{2\varphi}{(k^2 - m_W^2)^2} \end{aligned} \right\} \gamma_\beta P_L.
 \end{aligned}$$

El último término, está a segundo orden en el campo magnético y por lo tanto podemos despreciarlo, debido a que solo estamos considerando contribuciones del campo magnético a primer orden

$$\begin{aligned}
 \sum_W(p) &= -i \frac{g^2}{2} P_R \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha \left\{ \begin{aligned} & \frac{(m_l + \not{p} - \not{k})_{\alpha\beta}}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} - \frac{i\beta(m_l + \gamma \cdot (p_\parallel - k_\parallel))(\gamma\varphi\gamma)_{\alpha\beta}}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_W^2)} \\ & - \frac{i(m_l + \not{p} - \not{k})_{\beta\varphi}}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)^2} \end{aligned} \right\} \gamma_\beta P_L \\
 &= -i \frac{g^2}{2} P_R \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \begin{aligned} & \frac{4(m_l + \not{p} - \not{k})}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} - \frac{i\beta(m_l + \gamma \cdot (p_\parallel - k_\parallel))(\gamma\varphi\gamma)}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_W^2)} \\ & - \frac{i(m_l + \not{p} - \not{k})_{\beta\gamma\varphi\gamma}}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)^2} \end{aligned} \right\} P_L \\
 &= -i \frac{g^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \begin{aligned} & \frac{4m_l P_R P_L + 4P_R(\not{p} - \not{k}) P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} - \frac{i\beta m_l P_R P_L + i\beta P_R \gamma \cdot (p_\parallel - k_\parallel)(\gamma\varphi\gamma) P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_W^2)} \\ & - \frac{iP_R m_l \beta \gamma \varphi \gamma P_L + iP_R(\not{p} - \not{k})_{\beta\gamma\varphi\gamma} P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)^2} \end{aligned} \right\} \\
 &= -i \frac{g^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \begin{aligned} & \frac{4(\not{p} - \not{k}) P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} - \frac{i\beta \gamma \cdot (p_\parallel - k_\parallel)(\gamma\varphi\gamma) P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_W^2)} \\ & - \frac{i(\not{p} - \not{k})_{\beta\gamma\varphi\gamma} P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)^2} \end{aligned} \right\}.
 \end{aligned}$$

Donde usamos que  $\gamma_\alpha \gamma_\alpha = 4I$ , si tenemos en cuenta las siguientes propiedades [32]

$$\begin{aligned}
 -\frac{i}{2} \not{p}_\parallel (\gamma\varphi\gamma) P_L &= -(p\tilde{\varphi}\gamma) P_L \Rightarrow i\not{p}_\parallel (\gamma\varphi\gamma) P_L = 2(p\tilde{\varphi}\gamma) P_L, \\
 -\frac{i}{2} \not{p}_\parallel (\gamma\varphi\gamma) P_R &= (p\tilde{\varphi}\gamma) P_R \Rightarrow i\not{p}_\parallel (\gamma\varphi\gamma) P_R = -2(p\tilde{\varphi}\gamma) P_R, \\
 P_{R,L} (\gamma\varphi\gamma) &= (\gamma\varphi\gamma) P_{R,L},
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

al remplazar tenemos

$$\sum_W(p) = -i\frac{g^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \begin{aligned} & \frac{4(\not{p}-\not{k})P_L}{((p-k)^2-m_l^2)(k^2-m_W^2)} - \frac{2\beta(p\tilde{\varphi}\gamma)L-2\beta(k\tilde{\varphi}\gamma)L}{((p-k)^2-m_l^2)^2(k^2-m_W^2)} \\ & - \frac{i(\not{p}-\not{k})\beta\gamma\varphi\gamma P_L}{((p-k)^2-m_l^2)(k^2-m_W^2)^2} \end{aligned} \right\}.$$

Para el diagrama con el Goldstone escalar, la regla del vértice  $\nu - \Phi^\pm - l$  será [113]

$$\frac{-ig}{\sqrt{2}} \left( \frac{m_l}{m_W} L, R - \frac{m_{\nu_l}}{m_W} R, L \right),$$

por lo tanto, el término  $\sum_\Phi(p)$  es [32], [112]

$$\begin{aligned} & \sum_\Phi(p) \\ &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left( \frac{-ig}{\sqrt{2}} \left( \frac{m_l}{m_W} P_R - \frac{m_{\nu_l}}{m_W} P_L \right) \right) S_B^F(p-k) \left( \frac{-ig}{\sqrt{2}} \left( \frac{m_l}{m_W} P_L - \frac{m_{\nu_l}}{m_W} P_R \right) \right) D_B(k) \\ &= -\frac{ig^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (m_l P_R - m_{\nu_l} P_L) S_B^F(p-k) (m_l P_L - m_{\nu_l} P_R) D_B(k) \\ &= -\frac{ig^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ (m_l P_R - m_{\nu_l} P_L) \left( \frac{i(m_l + \not{p} - \not{k})}{(p-k)^2 - m_l^2} + \frac{\beta(m_l + \gamma \cdot (p-k)_\parallel)(\gamma\varphi\gamma)}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2} \right) (m_l P_L - m_{\nu_l} P_R) \right. \\ & \quad \left. \left( \frac{i}{k^2 - m_W^2} \right) \right\} \\ &= -\frac{ig^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{m_l^2(\not{p}-\not{k})P_L}{((p-k)^2-m_l^2)(k^2-m_W^2)} + \frac{m_l^2\beta(p\tilde{\varphi}\gamma)P_L - m_l^2\beta(k\tilde{\varphi}\gamma)P_L}{((p-k)^2-m_l^2)^2(k^2-m_W^2)} - \frac{m_{\nu_l}^2(\not{p}-\not{k})P_R}{((p-k)^2-m_l^2)(k^2-m_W^2)} \\ & -\frac{im_{\nu_l}\beta m_l^2(\gamma\varphi\gamma)}{2((p-k)^2-m_l^2)^2(k^2-m_W^2)} + \frac{m_{\nu_l}m_l^2}{((p-k)^2-m_l^2)(k^2-m_W^2)} - \frac{m_{\nu_l}^2\beta(p\tilde{\varphi}\gamma)P_R - m_{\nu_l}^2\beta(k\tilde{\varphi}\gamma)P_R}{((p-k)^2-m_l^2)^2(k^2-m_W^2)} \end{aligned} \right\}. \quad (7.2) \end{aligned}$$

Los cálculos intermedios se encuentran en el anexo I.1.

Si tenemos en cuenta, que el operador de auto energía tiene la siguiente estructura de Lorentz [32],

$$\sum(p) = [a_L\not{p} + b_L\not{p}_\parallel + c_L(p\tilde{\varphi}\gamma)] P_L + [a_R\not{p} + b_R\not{p}_\parallel + c_R(p\tilde{\varphi}\gamma)] P_R + m_\nu [K_1 + iK_2(\gamma\varphi\gamma)].$$

Los términos que debemos calcular, para obtener la contribución al MDM serán de la forma [32], [112]

$$\mu_{\nu_l} = \frac{m_\nu}{2B} (c_L - c_R + 4K_2)$$

donde  $c_L$  es

$$c_L(p\tilde{\varphi}\gamma) P_L = ig^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\beta(p\tilde{\varphi}\gamma) P_L - \beta(k\tilde{\varphi}\gamma) P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} + \frac{ig^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m_l^2\beta(p\tilde{\varphi}\gamma) P_L - m_l^2\beta(k\tilde{\varphi}\gamma) P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)},$$

$c_R$  será

$$c_R(p\tilde{\varphi}\gamma) P_R = \frac{ig^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m_{\nu_l}^2\beta(p\tilde{\varphi}\gamma) P_R - m_{\nu_l}^2\beta(k\tilde{\varphi}\gamma) P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)},$$

y finalmente  $K_2$  es

$$m_\nu i K_2(\gamma\varphi\gamma) = -\frac{g^2}{4m_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m_{\nu_l} \beta m_l^2 (\gamma\varphi\gamma)}{((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)}.$$

Analizando los términos  $c_L, c_R$  y  $K_2$ , podemos ver que solo debemos calcular, una forma del denominador y dos formas en los numeradores

$$\frac{1, k}{((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)},$$

los cuales tienen solución dadas por (E.38,E.48) por lo tanto, al remplazar sobre  $c_L(p\tilde{\varphi}\gamma)L$  tenemos

$$\begin{aligned} & c_L(p\tilde{\varphi}\gamma)L \\ &= ig^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\beta(p\tilde{\varphi}\gamma)L - \beta(k\tilde{\varphi}\gamma)L}{((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} + \frac{ig^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m_l^2 \beta(p\tilde{\varphi}\gamma)L - m_l^2 \beta(k\tilde{\varphi}\gamma)L}{((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} \\ &= ig^2 \left( \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(1-x)\beta(p\tilde{\varphi}\gamma)L}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} - \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(1-x)^2 \beta(p\tilde{\varphi}\gamma)L}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} \right) \\ & \quad + \frac{ig^2}{2m_W^2} \left( \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(1-x)m_l^2 \beta(p\tilde{\varphi}\gamma)L}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} - \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(1-x)^2 m_l^2 \beta(p\tilde{\varphi}\gamma)L}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} \right) \\ &= \frac{g^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(x^2 - 3x + 2)\beta(p\tilde{\varphi}\gamma)L}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} + \frac{g^2}{32\pi^2 m_W^2} \int_0^1 dx \frac{(x^2 - 3x + 2)m_l^2 \beta(p\tilde{\varphi}\gamma)L}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2}, \end{aligned}$$

y el término  $c_L$  será

$$c_L = \frac{g^2 \beta}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(x^2 - 3x + 2)}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} + \frac{g^2 \beta}{32\pi^2 m_W^2} \int_0^1 dx \frac{(x^2 - 3x + 2)m_l^2}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2}.$$

Para el término  $c_R(p\tilde{\varphi}\gamma)P_R$ , remplazando tenemos

$$\begin{aligned} & c_R(p\tilde{\varphi}\gamma)P_R \\ &= \frac{ig^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m_{\nu_l}^2 \beta(p\tilde{\varphi}\gamma)P_R - m_{\nu_l}^2 \beta(k\tilde{\varphi}\gamma)P_R}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} \\ &= \frac{ig^2}{2m_W^2} \left( \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(1-x)im_{\nu_l}^2 \beta(p\tilde{\varphi}\gamma)P_R}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} - \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(1-x)^2 im_{\nu_l}^2 \beta(p\tilde{\varphi}\gamma)P_R}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} \right) \\ &= \frac{g^2}{32\pi^2 m_W^2} \int_0^1 dx \frac{m_{\nu_l}^2 \beta(x^2 - 3x + 2)(p\tilde{\varphi}\gamma)P_R}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2}, \end{aligned}$$

por lo tanto  $c_R$  será

$$c_R = \frac{g^2 \beta}{32\pi^2 m_W^2} \int_0^1 dx \frac{(x^2 - 3x + 2)m_{\nu_l}^2}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2}.$$

Finalmente para  $m_\nu iK_2(\gamma\varphi\gamma)$  remplazando tenemos

$$\begin{aligned} m_\nu iK_2(\gamma\varphi\gamma) &= -\frac{g^2}{4m_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m_{\nu_l} \beta m_l^2 (\gamma\varphi\gamma)}{((p+k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} \\ &= -\frac{g^2 m_{\nu_l} \beta m_l^2 (\gamma\varphi\gamma)}{4m_W^2} \left( \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(1-x)}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} \right), \end{aligned}$$

entonces  $K_2$  es

$$K_2 = \frac{g^2 \beta}{64\pi^2 m_W^2} \int_0^1 dx \frac{(1-x) m_l^2}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2}.$$

De tal forma que el MDM será

$$\begin{aligned} \mu_{\nu_l}^B &= \frac{m_\nu}{2B} (c_L - c_R + 4K_2) \\ &= \frac{m_\nu}{2B} \left( \frac{g^2 \beta}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{x^2 - 3x + 2}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} + \frac{g^2 \beta}{32\pi^2 m_W^2} \int_0^1 dx \frac{(x^2 - 3x + 2)m_l^2}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{g^2 \beta}{32\pi^2 m_W^2} \int_0^1 dx \frac{(x^2 - 3x + 2)m_{\nu_l}^2}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} - \frac{g^2 \beta}{16\pi^2 m_W^2} \int_0^1 dx \frac{(1-x)m_l^2}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} \right) \\ &= \frac{m_\nu}{2B} \frac{g^2 \beta}{32\pi^2 m_W^2} \left( \begin{aligned} &2 \int_0^1 dx \frac{(x^2 - 3x + 2)m_W^2}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} + \int_0^1 dx \frac{(x^2 - 3x + 2)m_l^2}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} \\ &- \int_0^1 dx \frac{(x^2 - 3x + 2)m_{\nu_l}^2}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} - 2 \int_0^1 dx \frac{(1-x)m_l^2}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} \end{aligned} \right). \end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que

$$\mu_B = \frac{e}{2m_e} = \frac{3eG_f}{8\sqrt{2}\pi^2} = \frac{3e}{8\sqrt{2}\pi^2} \left( \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{g^2}{m_W^2} \right) = \frac{3g^2 e}{64\pi^2 m_W^2},$$

entonces

$$\frac{m_\nu}{2B} \frac{g^2 \beta}{32\pi^2 m_W^2} = \frac{g^2 e m_\nu}{64\pi^2 m_W^2} = \frac{1}{3} \mu_{\nu_l}.$$

Donde usamos que  $\beta = eB$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} \mu_{\nu_l}^B &= \frac{\mu_{\nu_l}}{3} \left( \begin{aligned} &2 \int_0^1 dx \frac{(x^2 - 3x + 2)m_W^2}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} + \int_0^1 dx \frac{(x^2 - 3x + 2)m_l^2}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} \\ &- \int_0^1 dx \frac{(x^2 - 3x + 2)m_{\nu_l}^2}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} - 2 \int_0^1 dx \frac{(1-x)m_l^2}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} \end{aligned} \right) \\ &= \frac{\mu_{\nu_l}}{3} \left( \int_0^1 dx \frac{2(x^2 - 3x + 2)m_W^2 + x(x-1)m_l^2 - (x^2 - 3x + 2)m_{\nu_l}^2}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} \right). \end{aligned}$$

Podemos simplificar la integral normalizando por  $m_W^2$  y debido a la jerarquía de masas tan marcada, podemos aproximar  $m_W^2 - m_\nu^2 - m_l^2 \sim m_W^2 - m_l^2$ . Al igual que despreciar los términos de la forma

$\frac{m_{\nu_l}^2}{m_W^2} \sim 1 \times 10^{-30}$ . Por lo tanto la integral nos quedara como

$$\begin{aligned}
 \mu_{\nu_l}^B &= \frac{\mu_{\nu_l}}{3} \left( \int_0^1 dx \frac{2(x^2 - 3x + 2) + x(x-1) \frac{m_l^2}{m_W^2}}{\left(\frac{m_l^2 - m_W^2}{m_W^2}\right)x + 1} \right) \\
 &= \frac{\mu_{\nu_l}}{3} \left( \frac{3 \left( -2 + 7 \frac{m_l^2}{m_W^2} - 6 \left( \frac{m_l^2}{m_W^2} \right)^2 + \left( \frac{m_l^2}{m_W^2} \right)^3 + 2 \left( \frac{m_l^2}{m_W^2} \right)^2 \ln \left( \frac{m_l^2}{m_W^2} \right) \right)}{2 \left( -1 + \frac{m_l^2}{m_W^2} \right)^3} \right) \\
 &= \frac{\mu_{\nu_l}}{\left( -1 + \frac{m_l^2}{m_W^2} \right)^3} \left( -1 + \frac{7}{2} \frac{m_l^2}{m_W^2} - 3 \left( \frac{m_l^2}{m_W^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{m_l^2}{m_W^2} \right)^3 + \left( \frac{m_l^2}{m_W^2} \right)^2 \ln \left( \frac{m_l^2}{m_W^2} \right) \right) \\
 &= \frac{\mu_{\nu_l}}{\left( 1 - \frac{m_l^2}{m_W^2} \right)^3} \left( 1 - \frac{7}{2} \frac{m_l^2}{m_W^2} + 3 \left( \frac{m_l^2}{m_W^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{m_l^2}{m_W^2} \right)^3 - \left( \frac{m_l^2}{m_W^2} \right)^2 \ln \left( \frac{m_l^2}{m_W^2} \right) \right) \\
 &= \frac{\mu_{\nu_l}}{(1 - \lambda_l)^3} \left( 1 - \frac{7}{2} \lambda_l + 3 \lambda_l^2 - \lambda_l^2 \ln(\lambda_l) - \frac{1}{2} \lambda_l^3 \right).
 \end{aligned}$$

Donde hemos definido  $\lambda_l = \frac{m_l^2}{m_W^2}$  como lo hace la literatura, coincidiendo con el resultado reportado por [32], [112]

$$\mu_{\nu_l}^B = \mu_{\nu_l} \frac{1}{(1 - \lambda_l)^3} \left( 1 - \frac{7}{2} \lambda_l + 3 \lambda_l^2 - \lambda_l^2 \ln \lambda_l - \frac{1}{2} \lambda_l^3 \right), \quad (7.3)$$

donde el término  $\mu_{\nu_l}$  es el valor del MDM del neutrino en el vacío. Bajo nuestro anzats en la estructura de masas, tenemos que el MDM del neutrino en el vacío y en presencia de campo magnético será

	$m_\nu [eV]$	$\mu_\nu [\mu_B]$	$\mu_\nu^B [\mu_B]$
$\nu_e$	$6,089 \times 10^{-2}$	$1,948 \times 10^{-20}$	$1,948 \times 10^{-20}$
$\nu_\mu$	$6,754 \times 10^{-2}$	$2,161 \times 10^{-20}$	$2,161 \times 10^{-20}$
$\nu_\tau$	$7,147 \times 10^{-2}$	$2,287 \times 10^{-20}$	$2,286 \times 10^{-20}$

(Hemos tomado la masa del bosón  $W^\pm = 80,385 \pm 0,015 GeV$  [93]).

## 7.2. MDM incluyendo 2HDM

Para incluir la contribución al MDM debido al 2HDM, es necesario calcular la contribución del diagrama de Feynman de la figura 7.2.

De lo realizado en el anexo H.2 tenemos

$$\begin{aligned}
 D(p) &= \frac{i}{p^2 - m_{H^\pm}^2} + \mathcal{O}(\beta^2), \\
 S_B^F(p) &= \frac{i(m + \not{p})}{p^2 - m^2} + \beta \frac{(m + \not{p}_\parallel)}{2(p^2 - m^2)^2} (\gamma \varphi \gamma) + \mathcal{O}(\beta^2).
 \end{aligned}$$

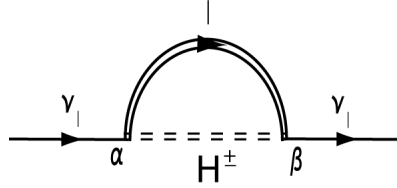


Figura 7.2: Diagrama de Feynman que representa la contribución a la autoenergía debida al campo magnético, la doble línea corresponde al leptón cargado  $l$ , al bosón de Higgs cargado  $H^\pm$  en un campo magnético externo. La flecha indica la dirección del flujo fermiónico.

Por lo tanto, la autoenergía incluyendo la contribución de nueva física proveniente del Higgs cargado, la escribimos como

$$\Sigma(p) = \Sigma_W(p) + \Sigma_\Phi(p) + \Sigma_{H^\pm}(p).$$

Para el diagrama con el Higgs cargado tenemos

$$\begin{aligned} & \Sigma_{H^\pm}(p) \\ &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (aP_L + bP_R) S_B^F(p-k) (cP_R + dP_L) D_B(k) \\ &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (aP_L + bP_R) \left( \frac{i(m_l + \not{p} - \not{k})}{(p-k)^2 - m_l^2} + \frac{\beta(m_l + \gamma \cdot (p-k)_\parallel)(\gamma\varphi\gamma)}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2} \right) (cP_R + dP_L) \left( \frac{i}{k^2 - m_{H^\pm}^2} \right) \\ &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (aP_L + bP_R) \left( \frac{-(m_l + \not{p} - \not{k})}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} + \frac{i\beta(m_l + \gamma \cdot (p-k)_\parallel)(\gamma\varphi\gamma)}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)} \right) (cP_R + dP_L) \\ &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left( \frac{-a^2(\not{p} - \not{k})P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} + \frac{-2a^2\beta(p\tilde{\varphi}\gamma)P_R + 2a^2\beta(k\tilde{\varphi}\gamma)P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)} - \frac{abm_lP_R}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{i\beta abm_l(\gamma\varphi\gamma)}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)} - \frac{abm_lP_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{b^2(\not{p} - \not{k})P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} + \frac{2\beta b^2(p\tilde{\varphi}\gamma)P_L - 2\beta b^2(k\tilde{\varphi}\gamma)P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)} \right). \end{aligned}$$

Donde tuvimos en cuenta que  $a = c$  y  $b = d$ , debido a que los vértices son los mismos, como sucedió en el cálculo en el vacío (cálculos detallados en el anexo I.2).

De lo realizado en la sección anterior, tenemos que los términos que debemos calcular para obtener la contribución al MDM serán

$$\mu_{\nu_l} = \frac{m_\nu}{2B} (c_L - c_R + 4K_2).$$

Para  $c_L$  tenemos

$$c_L(p\tilde{\varphi}\gamma)L = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2\beta b^2(p\tilde{\varphi}\gamma)P_L - 2\beta b^2(k\tilde{\varphi}\gamma)P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)}.$$

Para  $c_R$  será

$$c_R(p\tilde{\varphi}\gamma)R = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-2a^2\beta(p\tilde{\varphi}\gamma)P_R + 2a^2\beta(k\tilde{\varphi}\gamma)P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)}.$$

Y finalmente para  $K_2$  es

$$m_\nu i K_2 (\gamma \varphi \gamma) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i \beta a b m_l (\gamma \varphi \gamma)}{((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_{H^\pm}^2)}.$$

Podemos ver que existe una forma para el denominador y dos formas en los numeradores

$$\frac{1, k}{((p+k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)},$$

los cuales tienen solución dadas por (E.38,E.48) por lo tanto

$$\begin{aligned} & c_L (p \tilde{\varphi} \gamma) L \\ = & i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2\beta b^2 (p \tilde{\varphi} \gamma) P_L - 2\beta b^2 (k \tilde{\varphi} \gamma) P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_{H^\pm}^2)} \\ = & i \left( \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{2(1-x) \beta b^2 (p \tilde{\varphi} \gamma) L}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2) x + m_{H^\pm}^2} - \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{2(1-x)^2 \beta b^2 (p \tilde{\varphi} \gamma) L}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2) x + m_{H^\pm}^2} \right) \\ = & \frac{1}{8\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(x^2 - 3x + 2) \beta b^2 (p \tilde{\varphi} \gamma) L}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2) x + m_{H^\pm}^2}, \end{aligned}$$

y el término  $c_L$  será

$$c_L = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(x^2 - 3x + 2) \beta b^2}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2) x + m_{H^\pm}^2}.$$

Para el término  $c_R (p \tilde{\varphi} \gamma) R$ , reemplazando tenemos

$$\begin{aligned} & c_R (p \tilde{\varphi} \gamma) R \\ = & -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2a^2 \beta (p \tilde{\varphi} \gamma) P_R - 2a^2 \beta (k \tilde{\varphi} \gamma) P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_{H^\pm}^2)} \\ = & -i \left( \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(1-x) \beta a^2 \beta (p \tilde{\varphi} \gamma) R}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2) x + m_{H^\pm}^2} - \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(1-x)^2 \beta a^2 (p \tilde{\varphi} \gamma) R}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2) x + m_{H^\pm}^2} \right) \\ = & \frac{-1}{8\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(x^2 - 3x + 2) \beta a^2 (p \tilde{\varphi} \gamma) R}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2) x + m_{H^\pm}^2}, \end{aligned}$$

por lo tanto, el término  $c_R$  será

$$c_R = \frac{-1}{8\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(x^2 - 3x + 2) \beta a^2}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2) x + m_{H^\pm}^2}.$$

Y para  $m_\nu iK_2(\gamma\varphi\gamma)$  tenemos

$$\begin{aligned} m_\nu iK_2(\gamma\varphi\gamma) &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i\beta ab m_l(\gamma\varphi\gamma)}{((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_{H^\pm}^2)} \\ &= -\beta ab m_l(\gamma\varphi\gamma) \left( \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{1-x}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2)x + m_{H^\pm}^2} \right), \end{aligned}$$

entonces  $K_2$  será

$$K_2 = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(1-x) \beta ab \frac{m_l}{m_\nu}}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2)x + m_{H^\pm}^2}.$$

De tal forma que el MDM finalmente es

$$\begin{aligned} (\mu_{\nu_l}^B)_{H^\pm} &= \frac{m_\nu}{2B} (c_L - c_R + 4K_2) \\ &= \frac{m_\nu}{2B} \left( \frac{1}{8\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(x^2 - 3x + 2)\beta b^2}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2)x + m_{H^\pm}^2} + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(x^2 - 3x + 2)\beta a^2}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2)x + m_{H^\pm}^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(1-x)\beta ab \frac{m_l}{m_\nu}}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2)x + m_{H^\pm}^2} \right) \\ &= \frac{m_\nu}{2B} \frac{\beta}{4\pi^2} \int_0^1 dx \frac{2(x^2 - 3x + 2)(b^2 + a^2) + (1-x) \frac{m_l}{m_\nu} ab}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2)x + m_{H^\pm}^2}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Podemos reescribir

$$\frac{m_\nu}{2B} \frac{eB}{4\pi^2} = \frac{\sqrt{2}}{3G_f} \mu_{\nu_l},$$

por lo tanto, al remplazar en (7.4) tenemos

$$(\mu_{\nu_l}^B)_{H^\pm} = \frac{\sqrt{2}}{3G_f} \mu_{\nu_l} \int_0^1 dx \frac{2(x^2 - 3x + 2)(b^2 + a^2) + (1-x) \frac{m_l}{m_\nu} ab}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2)x + m_{H^\pm}^2}. \quad (7.5)$$

Así entonces, la contribución de nueva física proveniente del 2HDM vendrá dada por la resolución de esta integral. Teniendo en cuenta los valores para  $a$  y  $b$  de la tabla 5.3 tenemos

- Para 2HDM tipo I tenemos

$$\Lambda_{2HDM}^\alpha(q, l)_{FM}^B = U_{k,i} U_{i,k} \frac{4m_{\nu_l} m_l}{3 \tan^2 \beta} \mu_{\nu_l} \int_0^1 dx \frac{2(x^2 - 3x + 2)(b^2 + a^2) + (1-x) \frac{m_l}{m_\nu}}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2)x + m_{H^\pm}^2}.$$

- Para 2HDM tipo II será

$$\Lambda_{2HDM}^\alpha(q, l)_{FM}^B = U_{k,i} U_{i,k} \frac{4m_l m_{\nu_l}}{3} \mu_{\nu_l} \int_0^1 dx \frac{2(x^2 - 3x + 2)(b^2 + a^2) + (1-x) \frac{m_l}{m_\nu}}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2)x + m_{H^\pm}^2}.$$



- Para 2HDM tipo III obtenemos

$$\Lambda_{2HDM}^{\alpha}(q, l)_{FM}^B = \frac{\sqrt{2}\lambda_{\nu}\lambda_l}{3G_f} \mu_{\nu_l} (\xi_{i,k}^{\nu} U_{k,i}) (U_{i,k} \xi_{k,i}^E) \int_0^1 dx \frac{2(x^2 - 3x + 2)(b^2 + a^2) + (1-x) \frac{m_l}{m_{\nu}} ab}{m_{\nu}^2 x^2 + (m_l^2 - m_{\nu}^2 - m_{H^{\pm}}^2) x + m_{H^{\pm}}^2}.$$

### 7.3. Resultados y análisis para el MDM en 2HDM con campo magnético

Al igual que en el capítulo anterior. Nuestro análisis está basado en diferentes valores para la masa del Higgs cargado, teniendo en cuenta para esto los actuales límites experimentales. Para el 2HDM tipo I y II los posibles valores experimentales de los parámetros  $(m_{H^{\pm}}, \tan \beta)$  provienen de procesos como  $B_u \rightarrow \tau \nu_{\tau}$ ,  $D_s \rightarrow \tau \nu_{\tau}$ ,  $B \rightarrow D \tau \nu_{\tau}$ ,  $K \rightarrow \mu \nu_{\mu}$  y BR  $(B \rightarrow X_s \gamma)$  [104].

Basados en las restricciones fenomenológicas para el 2HDM tipo I, tomaremos los valores de  $\tan \beta$  entre  $(2 - 90)$  y los valores de la masa del Higgs cargado  $m_{H^{\pm}}$  entre  $(100 - 1000) GeV$  [105]. Para el 2HDM tipo II, tenemos diferentes intervalos permitidos para la masa del Higgs cargado en función de los valores de  $\tan \beta$ : para  $m_{H^{\pm}} = 300 GeV$  los valores de  $\tan \beta$  se encuentran entre  $(4 - 40)$ , para  $m_{H^{\pm}} = 500 GeV$  el valor de  $\tan \beta$  es entre  $(2 - 69)$  y para valores de  $m_{H^{\pm}} = (700, 900, 1000) GeV$  los valores de  $\tan \beta$  están entre  $(1 - 70)$  [105].

En las primeras tres graficas de la Fig. 7.3, hemos graficado el MDM para el neutrino electrónico, muónico y tauónico versus  $\tan \beta$  para diferentes valores de la masa del Higgs cargado, teniendo en cuenta las restricciones fenomenológicas para el 2HDM tipo I y II. Las líneas horizontales en el caso del neutrino electrónico corresponden a los límites experimentales para MDM provenientes de TEXONO 2007 (Taiwan EXperiment On NeutrINO) [106] el cual tiene un valor de  $\mu_{\bar{\nu}_e} < 7,4 \times 10^{-11} \mu_B$  al 90 % C.L., y GEMMA 2013. (Germanium Experiment for measurement of Magnetic Moment of Antineutrino) [107] la cual es  $\mu_{\bar{\nu}_e} < 2,9 \times 10^{-11} \mu_B$  al 90 % C.L..

En el caso del neutrino muónico las líneas horizontales corresponden a los límites experimentales para MDM provenientes de LSND 2001 (Liquid Scintillating Neutrino Detector) [108] el cual tiene un valor de  $\mu_{\nu_{\mu}} < 6,8 \times 10^{-10} \mu_B$  al 90 % C.L., y BOREXino 2008. (BOREXino es el diminutivo en italiano para BOREX (Boron solar neutrino experiment)) [109] el cual es  $\mu_{\nu_{\mu}} < 1,9 \times 10^{-10} \mu_B$  al 90 % C.L. Finalmente las líneas horizontales para el neutrino tauónico corresponde a los límites experimentales para MDM provenientes de DONUT 2001 (Direct Observation of the NU Tau) [110] el cual tiene un valor de  $\mu_{\nu_{\tau}} < 3,9 \times 10^{-7} \mu_B$  al 90 % C.L., y BOREXino 2008 [109] cuyo límite es  $\mu_{\nu_{\mu}} < 1,5 \times 10^{-10} \mu_B$  al 90 % C.L.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>En un estudio reciente [111], Valle hace un análisis actualizado de los momentos magnéticos del neutrino, basado en los datos más recientes de Borexino, proponiendo un nuevo límite en el momento magnético efectivo del neutrino de  $3,1 \times 10^{-11} \mu_B$  al 90 % C.L.

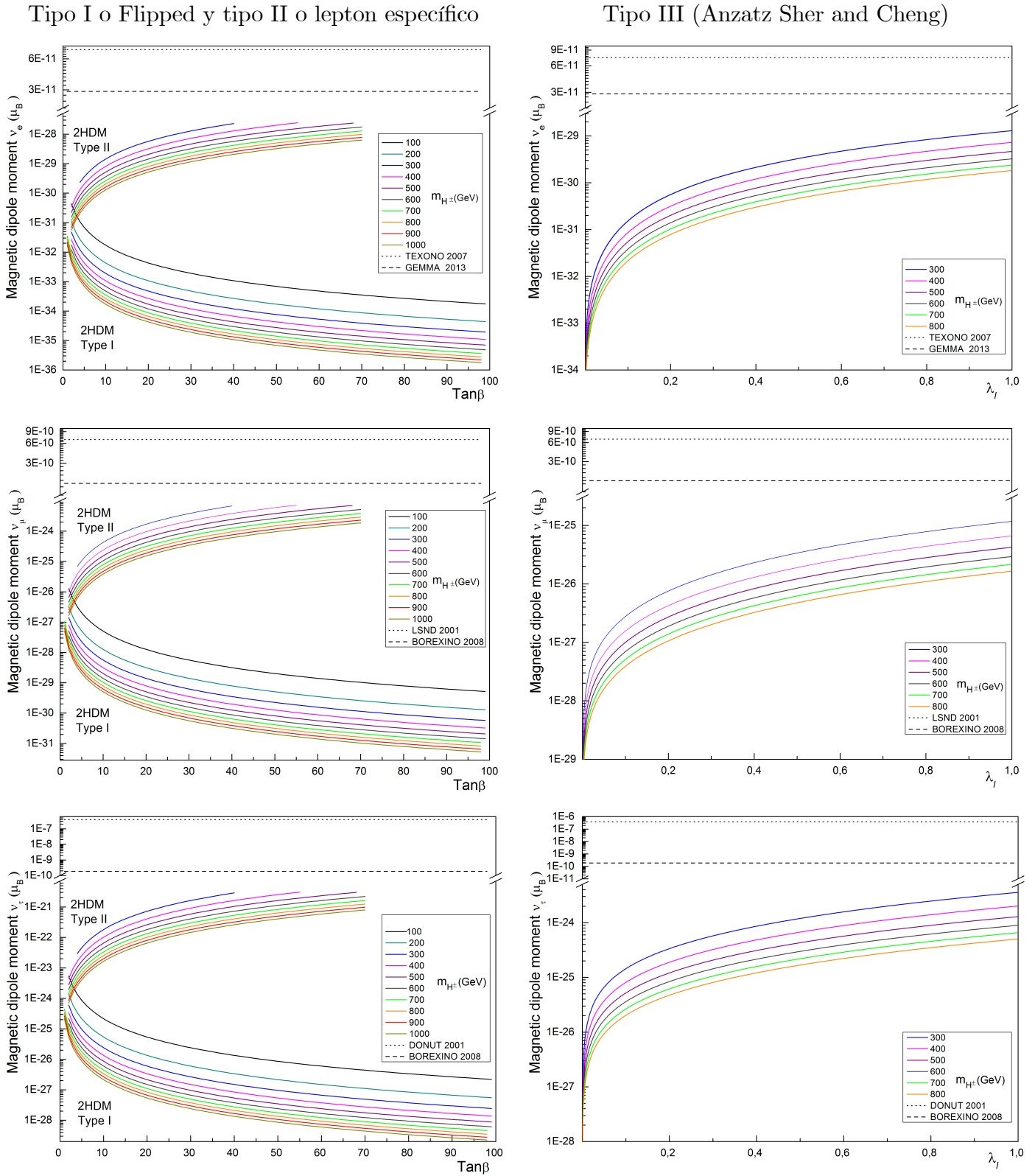


Figura 7.3: Contribución al momento dipolar magnético de neutrino en un campo magnético externo, proveniente de la corrección a la auto energía del 2HDM tipo I,II y III . Barriando las masas del Higgs cargado entre (100 – 1000) GeV para el tipo I, entre (300 – 1000) GeV para el tipo II con diferentes valores de  $\tan\beta$  para cada uno de las masas del Higgs cargado y finalmente para el tipo III barriando

masas entre  $(300 - 800) GeV$ . Las líneas horizontales hacen referencia a los límites experimentales para cada uno de los tipos de neutrino.

Un análisis detallado de la contribución de nueva física es:

- MDM para  $\nu_e$ : Para el caso tipo I, tenemos que la contribución más relevante proviene de los valores de  $\tan \beta < 10$  y con valores pequeños de la masa del Higgs cargado, lo cual nos da una contribución al MDM de entre  $(10^{-31} - 10^{-33}) \mu_B$ ; sin embargo esta contribución de la nueva física no con lleva ninguna corrección apreciable respecto al valor del MDM del ME con campo magnético, la cual es de  $1,948 \times 10^{-20} \mu_B$  con nuestro anzats de la masa del neutrino electrónico de  $m_{\nu_e} = 6,089 \times 10^{-2} eV$  y por lo tanto no tenemos regiones de exclusión en función de los parámetros del 2HDM tipo I. Para el tipo II, las contribuciones más importantes se obtienen, para los valores más grande de  $\tan \beta$  y valores pequeños de masa del Higgs cargado, obteniendo contribuciones cercanas a  $10^{-28} \mu_B$ .

Un aspecto interesante, es la diferencia entre el MDM para ambos modelos. En el cual, en algunos casos puede ser de solo un orden de magnitud para  $1 < \tan \beta < 10$  y pueden llegar a ser mayores a seis ordenes de magnitud por encima para el tipo II, a medida que  $\tan \beta \gg 1$ , esta diferencia en el comportamiento en los modelos con respecto a la  $\tan \beta$  se debe a la estructura de acople en el sector de Yukawa, la cual se construye con el fin de evitar el cambio de sabor en corrientes neutras. De igual forma, ambas contribuciones se encuentran por debajo de los límites experimentales, en el mejor de los casos a 17 ordenes de magnitud, como sucede para 2HDM tipo II.

- MDM para  $\nu_\mu$ : Podemos ver que con respecto al MDM del neutrino electrónico, que aunque la contribución es bastante similar, con la diferencia que esta última es mayor en casi cuatro órdenes de magnitud en relación al caso anterior. Fundamentalmente este efecto es debido a dos aspectos: La suposición de una jerarquía normal en la masa de los neutrinos, lo cual representa que  $m_{\nu_\mu} > m_{\nu_e}$  la cual la hemos hecho compatible con los límites experimentales, y el segundo aspecto hace referencia a la jerarquía de los leptones cargados  $m_\mu > m_e$ .

El MDM del  $\nu_\mu$  para el ME es de  $2,161 \times 10^{-20} \mu_B$  bajo nuestro anzats de  $m_{\nu_\mu} = 6,754 \times 10^{-2} eV$ . Bajo esta referencia, la contribución del 2HDM tipo I, es menor a la del ME para cualquier valores de  $\tan \beta$  y para todos los valores de la masa del Higgs cargado. Tanto para tipo I, como para tipo II. obteniéndose un valor máximo de contribución al tipo I de  $1,266 \times 10^{-26} \mu_B$  para  $m_{H^\pm} = 100 GeV$  y  $\tan \beta = 2$ . Para 2HDM tipo II, la contribución más grande es de  $7,184 \times 10^{-24} \mu_B$  para  $m_{H^\pm} = 400 GeV$  y  $\tan \beta = 55$ . Lo cual deja esta contribución a 14 ordenes de magnitud por debajo de los umbrales experimentales actuales.

- MDM para  $\nu_\tau$ : Este es el escenario más interesante debido a que podemos ver que el valor del MDM, es mayor a los casos anteriores. Para el 2HDM tipo II la mayor contribución al MDM se obtiene con  $\tan B = 55$  y  $m_{H^\pm} = 400 GeV$  para la cual el  $\mu_{\nu_\tau} = 3,067 \times 10^{-21} \mu_B$  y se ubica un orden de magnitud por debajo de la contribución del ME, la cual es de  $2,287 \times 10^{-20} \mu_B$  bajo nuestro anzats de  $m_{\nu_\mu} = 7,147 \times 10^{-2} eV$ . La contribución del 2HDM tipo I tiene un valor máximo de  $5,398 \times 10^{-24} \mu_B$  para  $m_{H^\pm} = 100 GeV$  y  $\tan \beta = 2$ .
- MDM para 2HDM tipo III: En este caso, aunque tenemos cierta libertad en la elección del valor de  $\lambda_{ij}$ , el cual aparece en el lagrangiano de Yukawa, este no contribuirá significativamente porque está vinculado con la raíz cuadrada de la masa de los neutrinos y dada la masa tan pequeña de

estos, la contribución será muy pequeña. Este hecho lo podemos ver en la Fig. 7.3, debido a que las contribuciones de este modelo son más de 13 órdenes de magnitud menores a la contribución del ME y más de 24 órdenes de magnitud por debajo del umbral experimental en el mejor de los casos, el cual se presenta al observar la contribución del neutrino tauónico.

## 7.4. Modelo 2HDM con neutrino específico

En el 2HDM con neutrino específico, debemos tener en cuenta que el cambio que tenemos con respecto al 2HDM tipo I, II y III, está en la forma de los acoples de Yukawa. Partiendo del resultado obtenido en (7.5), la contribución del MDM para el 2HDM con neutrino específico, se obtiene al remplazar las condiciones de los vértices en este modelo. Estas fueron escritas de forma general como  $(aP_L + bP_R)$ ,  $(cP_L + dP_R)$  y están resumidas de forma general en la tabla 5.2 y expandidas para cada tipo de neutrino en la tabla 5.3.

De forma general la contribución al MDM con neutrino específico en un campo magnético será

$$\Lambda_{2HDM}^\alpha(q, l)_{FM} = \frac{\sqrt{2}}{3G_f} \left( -\frac{\sqrt{2}}{v_2} m_{\nu_i} U_{k,i} \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{v_2} m_{\nu_i} U_{i,k} \right) \mu_{\nu_i} \int_0^1 dx \frac{2(x^2 - 3x + 2)(b^2 + a^2) + (1-x) \frac{m_l}{m_\nu}}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_{H^\pm}^2) x + m_{H^\pm}^2}. \quad (7.6)$$

Un aspecto importante, es tener en cuenta los límites de perturbatividad que se calcularon en (6.22), los cuales dependen de la matriz  $U_{PMNS}$  y de la masa del autoestado de sabor del neutrino respectivo.

## 7.5. Resultados y análisis para el MDM en 2HDM con neutrino específico y campo magnético

En el escenario de 2HDM con neutrino específico y campo magnético, la contribución al MDM no es sensible para ninguno de los sabores de neutrino, debido a que necesitaríamos valores del VEV para el segundo doblete (que es el que dota de masa a los neutrinos) más pequeños para obtener algún tipo de contribución, pero el elegir valores más pequeños del segundo doblete arruina la perturbatividad de la teoría.

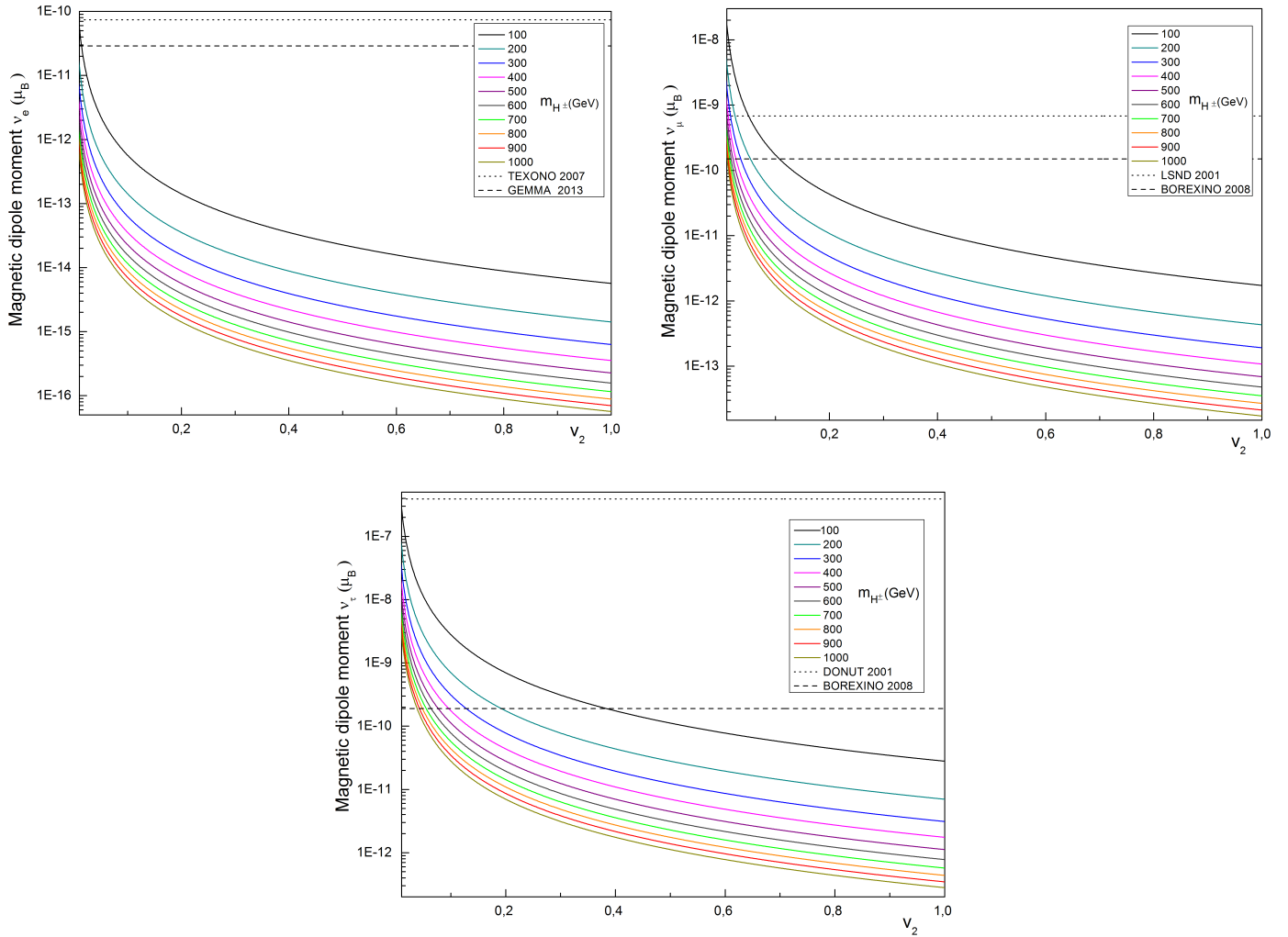


Figura 7.4: Contribución al MDM para el neutrino electrónico, muónico y tauónico proveniente del 2HDM con neutrino específico, barriendo masas del Higgs cargado entre (100 – 1000)GeV. Las líneas horizontales hacen referencia a los límites experimentales para el MDM de cada uno de los tipos de neutrino. La línea azul la cual es más ancha, identifica el límite más bajo para el VEV de cada uno de los sabores de neutrino, basado en la perturbatividad de los acoples de Yukawa.

Podemos ver en la figura 7.4 que el pequeño valor del MDM en este modelo, se debe a la estructura del acople, la cual depende directamente de la masa de los neutrinos y dada nuestro anzats de masas para los neutrinos se debilita aún más, lo cual nos lleva a que tengamos valores tan pequeños del MDM y solo varíen entre sabores un orden de magnitud entre ellos.

Así entonces, Los valores obtenidos bajo este modelo, se encuentran muy lejos de los límites experimentales actuales y por debajo de la contribución que tenemos del ME con campo magnético y del asociado a la contribución del 2HDM tipo I y II con campo magnético, solo estando por encima del 2HDM tipo III.

## 7.6. Conclusiones del capítulo

Al calcular la contribución al MDM debida a 2HDM con campo magnético, tenemos que para 2HDM tipo I y tipo II, la contribución se aproxima al valor que predice el ME, en particular para el neutrino tauónico. En el caso de los neutrinos electrónicos y muónicos, obtenemos una contribución máxima de quince órdenes de magnitud por debajo de los umbrales experimentales y cuatro órdenes de magnitud por debajo del valor del MDM para ME con campo magnético.

Para 2HDM tipo III y 2HDM neutrino específico, las contribuciones son igualmente pequeñas, incluso en comparación con las contribuciones provenientes del ME con campo magnético, en casi catorce órdenes de magnitud para el 2HDM tipo III y diez órdenes en el caso del neutrino específico.

# Capítulo 8

## Conclusiones

Como lo hemos expuesto a lo largo del trabajo, son los neutrinos una fuente interesante de nueva física; Desde el hecho del descubrimiento de su oscilación, lo cual se debe al carácter masivo de los neutrinos. Esto conduce directamente a otra característica importante y es que los neutrinos pueden exhibir momentos multipolares electromagnéticos a través de correcciones radiativas, debido a su carácter masivo.

En esta disertación hemos encontrado que una de las fuentes principales para la discriminación entre neutrinos de Dirac y Majorana, es el momento magnético. Si no consideramos el cambio de sabor en los estados iniciales del neutrino, el MDM solo puede estar presente en neutrinos de Dirac. En virtud de las mediciones experimentales del MDM del neutrino, desarrollada en colaboraciones como TEXONO, GEMMA, LSND, BOREXino y DONUT. Es posible hacer un análisis riguroso del comportamiento electromagnético del neutrino y lo cual nos permite tener una primera aproximación para determinar su naturaleza.

Bajo una de las extensiones al modelo estándar, como lo es el escenario del modelo con dos dobletes de Higgs, tanto en el vacío, como en presencia de campos magnéticos, hemos encontrado: I. Las contribuciones que obtenemos del MDM del neutrino en el vacío, superan la contribución del modelo estándar en modelos tipo I, tipo II y neutrino específico para neutrinos muonicos y tauonicos. Esto los convierte en interesantes escenarios de referencia en la búsqueda indirecta de nueva física. II. La contribución al MDM debida a la presencia de campos magnéticos, está por debajo de la contribución de ME, para los tres sabores de neutrino y todos los modelos.

Es de recalcar la fuerte relación de MDM con la masa del neutrino y su respectivo leptón cargado. La cual, se ve aún más fortalecida para el caso de la tercera generación e incluso ligeramente para la segunda generación, debido al anzats de masa para los neutrinos que hemos empleado, y la cual tiene un ordenamiento como el leptónico cargado. Esta relación del MDM con las masas se puede apreciar claramente cuando se compara la contribución debida al neutrino tauónico (con respecto a los neutrinos muónicos y electrónicos) sin importar si analizamos la contribución de MDM en el vacío o en campos magnéticos.

Como hemos visto en los capítulos 6 y 7, es el MDM del neutrino tauónico y en particular la contribución del 2HDM tipo II, un marco ideal para limitar y detectar los escenarios de nueva física; especialmente a la luz de los futuros experimentos de dispersión coherente neutrino-núcleo, con los cuales se esperan mejorar todos los límites de las propiedades electromagnéticas de neutrinos [111]. Esto debido a que

las contribuciones al MDM del neutrino tauónico en el vacío, están a solo dos órdenes de magnitud de los límites experimentales.

Es de destacar, que si experimentalmente es posible obtener el momento dipolar magnético del neutrino, este tipo de medición sería muy sensible para los diferentes sectores de Yukawa del 2HDM. Es de recalcar, que estos modelos se basan en términos de masa no naturales para los neutrinos. Por ello para introducir dicho término de masa de forma más natural consideramos el 2HDM con neutrino específico. El cual incorpora de una forma simple y plausible la masa de los neutrinos. Sin embargo, el MDM bajo este modelo está fuertemente suprimido en el vacío y bajo la presencia de campos magnéticos, debido a que los valores más cercanos al límite experimental se encuentran suprimidos por perturbatividad de los acoples Yukawa.

Esto deja la base para tratar el MDM en otros modelos que involucren escalares que se acoplen como los Higgs cargados del 2HDM.



# Apéndice A

## Notaciones y convenciones

El tensor métrico está definido como

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Con respecto a las matrices gamma, definimos un conjunto de matrices  $4 \times 4$ , con  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ . En la base de Dirac tenemos

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Las cuales están compuestas por matrices de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

expandiendo lo anterior un poco más tenemos

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\gamma^5$  en la base de Dirac lo podemos escribir como

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Algunos resultados importantes son:

$$\begin{aligned}\gamma^0\gamma^0 &= \gamma^5\gamma^5 = \mathbf{I}, \\ \gamma^1\gamma^1 &= \gamma^2\gamma^2 = \gamma^3\gamma^3 = -\mathbf{I}.\end{aligned}$$

De otra parte, el producto de dos cuadvectores lo podemos escribir como

$$u \cdot v = u^\mu g_{\mu\nu} v_\nu = \begin{pmatrix} u^0 & u^1 & u^2 & u^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = u^0v^0 - u^1v^1 - u^2v^2 - u^3v^3. \quad (\text{A.5})$$

Mientras que

$$g_{\mu\nu}g_\nu^\beta = \delta_\mu^\beta = \delta^{\beta\mu} = \delta_{\mu\beta} = \mathbf{I} = (1, 1, 1, 1).$$

Cuando se tiene un campo magnético uniforme y elegimos una dirección preferencial en el espacio. La invariancia de Lorentz del sistema estará restringida y un nuevo boost arbitrario no preservara un campo magnético puro, y por lo tanto un boost en la dirección del campo magnético o una rotación alrededor de la dirección del campo externo, son las únicas transformaciones de Lorentz permitidas que dejan invariante el campo magnético puro. Lo cual da como resultado, que la estructura del cuadvector se rompa en una parte perpendicular y una parte paralela, esto es

$$\left. \begin{aligned} a_\parallel^\mu &= (a^0, 0, 0, a^3) \\ a_\perp^\mu &= (0, a^1, a^2, 0) \end{aligned} \right\} a^\mu = a_\parallel^\mu + a_\perp^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3). \quad (\text{A.6})$$

Para un cuadvector  $a^\mu$  tendremos:

$$\begin{aligned} a_\parallel^\mu &= a^{\mu\parallel} = (a^0, 0, 0, a^3); \\ \tilde{a}_\parallel^\mu &= \tilde{a}^{\mu\parallel} = (a^3, 0, 0, a^0); \\ a_\perp^\mu &= a^{\mu\perp} = (0, a^1, a^2, 0); \\ \tilde{a}_\perp^\mu &= \tilde{a}^{\mu\perp} = (0, a^2, a^1, 0). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

De tal forma que

$$a^\mu = a_\parallel^\mu + a_\perp^\mu.$$

Así mismo

$$(a \cdot b)_\parallel = a^0b^0 - a^3b^3,$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} a_\parallel^2 &= a^0a^0 - a^3a^3, \\ a_\perp^2 &= a^1a^1 - a^2a^2.\end{aligned}$$

Podemos entonces reescribir el tensor métrico como

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^\parallel + g_{\mu\nu}^\perp \quad (\text{A.8})$$

donde

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu}^{\parallel} &= (1, 0, 0, -1); \\
 g_{\mu\nu}^{\perp} &= (0, -1, -1, 0); \\
 g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu}^{\parallel} + g_{\mu\nu}^{\perp} = (1, -1, -1, -1).
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Por lo tanto

$$g_{\nu\mu} g_{\parallel}^{\mu\beta} = \delta_{\nu\parallel}^{\beta} = \delta_{\parallel}^{\nu\beta} = \mathbf{I}_{\parallel} = (1, 0, 0, 1).$$

De otro lado

$$\begin{aligned}
 a_{\mu\parallel} &= g_{\mu\nu}^{\parallel} a^{\nu} = (g_{00}^{\parallel} a^0, g_{11}^{\parallel} a^1, g_{22}^{\parallel} a^2, g_{33}^{\parallel} a^3) = (a_0, 0 \cdot a_1, 0 \cdot a_2, -a_3) = (a_0, 0, 0, -a_3); \\
 a_{\mu\perp} &= g_{\mu\nu}^{\perp} a^{\nu} = (g_{00}^{\perp} a^0, g_{11}^{\perp} a^1, g_{22}^{\perp} a^2, g_{33}^{\perp} a^3) = (0 \cdot a_0, a_1, a_2, -a_3 \cdot 0) = (0, -a_1, -a_2, 0); \\
 a_{\parallel}^2 &= g_{\mu\nu}^{\parallel} a^{\mu} a^{\nu} = (a^0)^2 - (a^3)^2; \\
 a_{\perp}^2 &= -g_{\mu\nu}^{\perp} a^{\mu} a^{\nu} = (a^1)^2 + (a^2)^2.
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Por lo tanto

$$a^2 = a_{\parallel}^2 - a_{\perp}^2. \tag{A.11}$$

Si  $u$  y  $b$  son dos cuadvectores, tenemos

$$\begin{aligned}
 (u \cdot \tilde{b})_{\parallel} &= u^0 b^3 - u^3 b^0, \\
 (u \cdot \tilde{b})_{\perp} &= -(b \cdot \tilde{u})_{\parallel}, \\
 (u \cdot \tilde{u})_{\parallel} &= 0.
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

## A.1. Álgebra de Clifford

Algunas relaciones de las matrices de Pauli son

$$\begin{aligned}
 [\sigma_i, \sigma_k] &= 2i\epsilon_{ikl}\sigma_l; \\
 \{\sigma_i, \sigma_k\} &= 2\delta_{ik}; \\
 (\sigma_i)^{\dagger} &= \sigma_i; \\
 (\sigma_i)^2 &= 1; \\
 Tr(\sigma_i) &= 0.
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

Donde  $\epsilon_{ikl}$  se define como

$$\epsilon_{ikl} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es } (1, 2, 3), (3, 1, 2) \text{ o } (2, 3, 1) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es } (1, 3, 2), (3, 2, 1) \text{ o } (2, 1, 3) \\ 0 & \text{si } i = j \text{ o } j = k \text{ o } k = i. \end{cases} \tag{A.14}$$

De lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
 (\gamma^{\mu})^{\dagger} &= \gamma^0 \gamma^{\mu} \gamma^0, \\
 \gamma_{\mu} &= g_{\mu\nu} \gamma^{\nu}.
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

Algunas contracciones útiles son

$$\begin{aligned}
 4 &= \gamma^\mu \gamma_\mu; \\
 4g^{\alpha\beta} &= \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu; \\
 \gamma_5 \gamma_\delta \epsilon^{\delta\mu\nu\sigma} &= \frac{i}{6} (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\sigma - \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu - \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\mu).
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

A partir de las matrices gamma, se puede construir una base ( $\{\Gamma^n\}$ ) de las matrices  $4 \times 4$ . Llamada álgebra de Clifford, la cual la podemos escribir como:

$$\begin{aligned}
 \Gamma^S &= \mathbb{I} && \text{Escalar} \\
 \Gamma^V &= \gamma_\mu && \text{Vector} \\
 \Gamma^P &= \gamma_5 && \text{pseudo-escalar} \\
 \Gamma^T &= \sigma_{\mu\nu} && \text{Tensor antisimétrico} \\
 \Gamma_\mu^A &\equiv \gamma_5 \gamma_\mu && \text{Vector axial.}
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

Así mismo, podemos definir

$$\gamma_5 = -\frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \tag{A.18}$$

donde

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & \text{si } (\mu, \nu, \alpha, \beta) \text{ es una permutación par de } (0, 1, 2, 3) \\ -1 & \text{si } (\mu, \nu, \alpha, \beta) \text{ es una permutación impar} \\ 0 & \text{en los casos restantes,} \end{cases} \tag{A.19}$$

y

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}. \tag{A.20}$$

Tenemos además que

$$\begin{aligned}
 \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] &= \sigma_{\mu\nu}; \\
 \{\gamma_\mu, \gamma_5\} &= 0; \\
 (\gamma_5)^\dagger &= \gamma_5; \\
 (\gamma_5)^2 &= \mathbb{I}; \\
 \{\sigma_{\mu\nu}, \gamma_\mu\} &= 0; \\
 (\sigma^{\mu\nu})^\dagger &= \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0; \\
 (\sigma^{\mu\nu})^2 &= g^{\mu\mu} g^{\nu\nu}; \\
 \{\Gamma^{A\mu}, \gamma_\mu\} &= 0; \\
 (\Gamma^{A\mu})^\dagger &= \gamma^0 \Gamma^{A\mu} \gamma^0; \\
 (\Gamma^{A\mu})^2 &= -g^{\mu\mu}.
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

Con lo cual, podemos concluir

- $\forall \Gamma^n$  tenemos que  $(\Gamma^n)^2 = \mathbb{I}$ .
- $\forall \Gamma^n, \Gamma^m, \exists \Gamma^p$  perteneciente al álgebra que cumple que  $\Gamma^n \Gamma^m = \eta_{mn}^p \Gamma^p$ , donde  $\eta_{mn}^p$  es una constante, la cual puede tomar valores  $\pm 1, \pm i$ .
- $\forall \Gamma^n \neq \mathbb{I}, \exists \Gamma^m$  tal que  $\{\Gamma^n, \Gamma^m\} = 0$ , por lo tanto  $Tr \{\Gamma^n\} = 0$ .

## A.2. Propiedades espinoriales e identidades de Gordon

Antes de abordar algunas propiedades espinoriales, debemos recordar las propiedades de los operadores de proyección quirales  $P_L = \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)$  y  $P_R = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)$  los cuales cumplen:

- $\psi_L = P_L\psi$ , así mismo  $\psi_R = P_R\psi$  donde

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} P_L\psi &= \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_L \end{pmatrix}; \\ P_R\psi &= \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_R \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- $\gamma_\mu P_L = P_R\gamma_\mu$  y  $\gamma_\mu P_R = P_L\gamma_\mu$

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right) &= \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\gamma_\mu = P_R\gamma_\mu; \\ \gamma_\mu \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) &= \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\gamma_\mu = P_L\gamma_\mu. \end{aligned} \tag{A.22}$$

- $P_{L,R}P_{L,R} = P_{L,R}$

$$\left(\frac{1 \mp \gamma_5}{2}\right) \left(\frac{1 \mp \gamma_5}{2}\right) = \frac{1}{4} (1 \mp 2\gamma_5 + \gamma_5^2) = \frac{1}{4} (1 \mp 2\gamma_5 + 1) = \frac{1 \mp \gamma_5}{2}.$$

- $P_{L,R}P_{R,L} = 0$

$$\left(\frac{1 \mp \gamma_5}{2}\right) \left(\frac{1 \pm \gamma_5}{2}\right) = \frac{1}{4} (1 \mp \gamma_5 \pm \gamma_5 - \gamma_5^2) = 0.$$

- $P_R + P_L = 1$  y  $P_R - P_L = \gamma_5$

$$\begin{aligned} \frac{1+\gamma_5}{2} + \frac{1-\gamma_5}{2} &= 1; \\ \frac{1+\gamma_5}{2} - \frac{1-\gamma_5}{2} &= \gamma_5. \end{aligned}$$

- $\bar{\psi}_{R,L} = \psi P_{L,R}$ , teniendo en cuenta que  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \overline{\left(\frac{(1+\gamma_5) + (1-\gamma_5)}{2}\psi\right)} = \left(\frac{(1+\gamma_5) + (1-\gamma_5)}{2}\psi\right)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \left(\frac{(1+\gamma_5) + (1-\gamma_5)}{2}\right)^\dagger \gamma^0 \\ &= \psi^\dagger \left(\frac{(1+\gamma_5) + (1-\gamma_5)}{2}\right) \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 \left(\frac{(1-\gamma_5) + (1+\gamma_5)}{2}\right) = \bar{\psi} \left(\frac{(1-\gamma_5) + (1+\gamma_5)}{2}\right), \end{aligned}$$

lo cual es equivalente a escribir

$$\bar{\psi}_{R,L} = \psi P_{L,R}. \tag{A.23}$$

$$\blacksquare \bar{\psi}_L \psi_L = 0$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L \psi_L &= \overline{\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\psi\right)} \psi_L = \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\psi\right)^\dagger \gamma^0 \psi_L = \psi^\dagger \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right) \gamma^0 \psi_L \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \psi_L = \bar{\psi} P_R P_L \psi = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\blacksquare \bar{\psi}_R \psi_R = 0$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_R \psi_R &= \overline{\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\psi\right)} \psi_R = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\psi\right)^\dagger \gamma^0 \psi_R = \psi^\dagger \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \gamma^0 \psi_R \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right) \psi_R = \bar{\psi} P_L P_R \psi = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Partiendo de la ecuación de Dirac

$$(i\partial - m) \psi(x) = 0 \quad (\text{A.26})$$

donde  $\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$  y su solución

$$\psi(x) = u(p) e^{-ipx}. \quad (\text{A.27})$$

Lo que equivale a la solución de la ecuación de Dirac, en el espacio de momentos

$$(\not{p} - m) u(p) = 0 \quad (\text{A.28})$$

y en virtud de las propiedades anteriores, tenemos que

$$\not{p} P_L = P_R \not{p} \quad \text{y} \quad \not{p} P_R = P_L \not{p} \quad (\text{A.29})$$

donde  $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$  y se cumple que

$$\gamma_\mu \not{p} = \gamma_\mu \gamma_\alpha p^\alpha = (2g_{\mu\alpha} - \gamma_\alpha \gamma_\mu) p^\alpha = 2p_\mu - \not{p} \gamma_\mu. \quad (\text{A.30})$$

De manera completamente análoga tenemos

$$\not{p} \gamma_\mu = 2p_\mu - \gamma_\mu \not{p}. \quad (\text{A.31})$$

Así mismo

$$\not{p}_2 \not{p}_1 = p_{2\alpha} p_{1\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta = p_{2\alpha} p_{1\beta} (2g^{\beta\alpha} - \gamma^\beta \gamma^\alpha) = 2p_2 \cdot p_1 - \not{p}_1 \not{p}_2. \quad (\text{A.32})$$

Las identidades de Gordon, que podemos derivar de lo anterior son:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_1) \gamma^\mu u(p_2) &= \frac{1}{2m} \bar{u}(p_1) [l^\mu + i\sigma^{\mu\nu} q_\nu] u(p_2); \\ \bar{u}(p_1) \gamma^\mu \gamma_5 u(p_2) &= \frac{1}{2m} \bar{u}(p_1) [\gamma_5 q^\mu + i\gamma_5 \sigma^{\mu\nu} l_\nu] u(p_2); \\ \bar{u}(p_1) \sigma^{\mu\nu} l_\nu u(p_2) &= \bar{u}(p_1) [-i(m_1 - m_2) \gamma^\mu + i(p_1 - p_2)^\mu] u(p_2); \\ \bar{u}(p_1) \sigma^{\mu\nu} q_\nu u(p_2) &= \bar{u}(p_1) [-i(m_1 + m_2) \gamma^\mu + i(p_1 + p_2)^\mu] u(p_2); \\ \bar{u}(p_1) \gamma_5 \sigma^{\mu\nu} l_\nu u(p_2) &= \bar{u}(p_1) [-i(m_1 + m_2) \gamma^\mu \gamma_5 + i\gamma_5 (p_1 - p_2)^\mu] u(p_2); \\ \bar{u}(p_1) \gamma_5 \sigma^{\mu\nu} q_\nu u(p_2) &= \bar{u}(p_1) [-i(m_1 - m_2) \gamma^\mu \gamma_5 + i\gamma_5 (p_1 + p_2)^\mu] u(p_2). \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Donde

$$\bar{u}(p) = u^\dagger(p) \gamma^0 \quad (\text{A.34})$$

y

$$\bar{u}(p) (\not{p} - m) = 0. \quad (\text{A.35})$$

Otras propiedades útiles de los espinores son

$$\begin{aligned} \not{p}^2 &= p^2; \\ \gamma_2 u^*(p, s) &= v(p, s); \\ \gamma_2 v^*(p, s) &= u(p, s); \\ \gamma_5 v(p, s) &= (-1)^{s-\frac{1}{2}} u(p, -s); \\ \gamma_5 u(p, s) &= -(-1)^{s-\frac{1}{2}} u(p, -s); \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

## A.3. Propiedades de las transformaciones C, P y T

### A.3.1. Conjugación de carga

El operador de conjugación de carga  $\mathbf{C}$ , se define de modo que el estado de partícula  $|f(\vec{p}, s)\rangle$  describe la partícula  $f$  con momento  $\vec{p}$  y proyección de espín  $s$ . Al aplicar el operador de conjugación de carga, este es transformado en un estado de partícula  $|\bar{f}(\vec{p}, s)\rangle$  donde  $\bar{f}$  describe una antipartícula, con el mismo momento y proyección de espín

$$\mathbf{C} |f(\vec{p}, s)\rangle = \eta_C |\bar{f}(\vec{p}, s)\rangle \quad (\text{A.37})$$

donde  $\eta_C$  es el factor de fase.

Es posible definir una matriz unitaria  $C$ , la cual denominamos matriz de conjugación de carga, y tiene las siguientes propiedades

- $C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T$ .
- $C\gamma_5 C^{-1} = \gamma_5^T$ .
- $C(\gamma_5\gamma_\mu) C^{-1} = (\gamma_5\gamma_\mu)^T$ .
- En la representación de Dirac, definimos  $C = i\gamma_2\gamma_0$  donde se satisface que

$$C^{-1} = C^\dagger = C^T = -C = -C^*.$$

- $C\gamma_0 + \gamma_0 C = 0$ .
- $C\gamma_5 - \gamma_5 C = 0$ .

Adicionalmente[50]

- $\psi^c = C\bar{\psi}^T$ .
- $\bar{\psi}^c = \psi^T C = -\psi^T C^{-1}$ .

$$\blacksquare (\psi_{L,R})^c = (\psi^c)_{R,L}$$

$$(\psi_L)^c = C\bar{\psi}_L^T = C\gamma_0 \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi \right)^* = C\gamma_0 \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi^* = \frac{1 + \gamma_5}{2} C\gamma_0 \psi^* = (\psi^c)_R. \quad (\text{A.38})$$

$$\blacksquare \left( \bar{\psi}^c \right)_L (\psi^c)_R = \bar{\psi}_L \psi_R$$

$$\left( \bar{\psi}^c \right)_L (\psi^c)_R = (\bar{\psi}_R)^c (\psi_L)^c = (-\psi_R^T C^{-1}) (C\bar{\psi}_L^T) = -\psi_R^T \bar{\psi}_L^T = \bar{\psi}_L \psi_R. \quad (\text{A.39})$$

$$\blacksquare \left( \bar{\psi}^c \right)_L (\psi^c)_L = 0$$

$$\left( \bar{\psi}^c \right)_L (\psi^c)_L = (\bar{\psi}_R)^c (\psi_R)^c = (-\psi_R^T C^{-1}) (C\bar{\psi}_R^T) = -\psi_R^T \bar{\psi}_R^T = \bar{\psi}_R \psi_R = 0. \quad (\text{A.40})$$

$$\blacksquare \left( \bar{\psi}^c \right)_R (\psi^c)_R = 0$$

$$\left( \bar{\psi}^c \right)_R (\psi^c)_R = (\bar{\psi}_L)^c (\psi_L)^c = (-\psi_L^T C^{-1}) (C\bar{\psi}_L^T) = -\psi_L^T \bar{\psi}_L^T = \bar{\psi}_L \psi_L = 0. \quad (\text{A.41})$$

$$\blacksquare \left( \bar{\psi}^c \right)_R (\psi^c)_L = \bar{\psi}_R \psi_L$$

$$\left( \bar{\psi}^c \right)_R (\psi^c)_L = (\bar{\psi}_L)^c (\psi_R)^c = (-\psi_L^T C^{-1}) (C\bar{\psi}_R^T) = -\psi_L^T \bar{\psi}_R^T = \bar{\psi}_R \psi_L. \quad (\text{A.42})$$

$$\blacksquare (\psi_L)^c \psi_R = 0$$

$$(\psi_L)^c \psi_R = C\bar{\psi}_L^T \psi_R = C\gamma_0 \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi \right)^* \psi_R = C\gamma_0 \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi^* \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi = C\gamma_0 \frac{1 - \gamma_5}{2} \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi^* \psi = 0. \quad (\text{A.43})$$

$$\blacksquare \bar{\psi}_L (\psi_R)^c = 0$$

$$\bar{\psi}_L (\psi_R)^c = \bar{\psi}_R C\bar{\psi}_R^T = \bar{\psi}_R C\gamma_0 \left( \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi \right)^* = \bar{\psi}_R \frac{1 + \gamma_5}{2} \frac{1 - \gamma_5}{2} C\gamma_0 \psi^* = 0. \quad (\text{A.44})$$

### A.3.2. Paridad

Cuando se aplica el operador de paridad  $\mathbf{P}$ , este transforma el vector de espacio  $\vec{r}$  en su opuesto  $-\vec{r}$ . Por lo tanto, el momento  $\vec{p}$  el cual se define como  $m\frac{d\vec{r}}{dt}$  bajo paridad, se transforma como  $-\vec{p}$ . Así mismo, el momento angular  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  permanece invariante. Por lo tanto, para un estado

$$\mathbf{P} |f(\vec{p}, s)\rangle = \eta_P |f(-\vec{p}, s)\rangle \quad (\text{A.45})$$

donde  $\eta_P$  es el factor de fase, el cual se denomina paridad intrínseca de la partícula  $f$ .



### A.3.3. Reversión temporal

El operador de reversión temporal  $\mathbf{T}$ , consiste en revertir el tiempo. Lo cual equivale a decir, que bajo el operador de reversión temporal cambiamos  $t$  por  $-t$ , mientras que  $\vec{r}$  permanece invariante. Así mismo, el momento de la partícula cambia de  $\vec{p}$  a  $-\vec{p}$  y el momento angular cambia de  $\vec{L}$  a  $-\vec{L}$ .

Por lo tanto, para un estado

$$\mathbf{T} |f(\vec{p}, s)\rangle = \eta_T^s |f(-\vec{p}, -s)\rangle \quad (\text{A.46})$$

donde  $\eta_T^s$  es el factor de fase, el cual depende del estado inicial de espín  $s$ .

### A.4. Productos $p_1 \cdot p_2$ , $k \cdot p_1$ y $k \cdot p_2$

Si partimos del siguiente diagrama A.1. Asumiendo que las líneas describen partículas on-shell

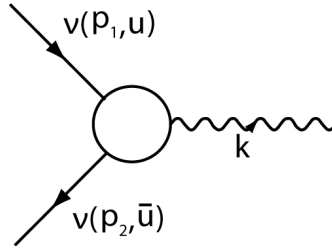


Figura A.1: Diagrama para describir las relaciones de los momentos del decaimiento  $\nu \rightarrow \nu\gamma$

Tenemos que  $k = p_1 - p_2$ . Entonces, los productos  $p_1 \cdot p_2$ ,  $k \cdot p_1$  y  $k \cdot p_2$  serán

$$k^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 \cdot p_2 \Rightarrow p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 - k^2) = \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 - k^2); \quad (\text{A.47})$$

$$k \cdot p_1 = (p_1 - p_2) \cdot p_1 = p_1^2 - p_1 \cdot p_2 = m_1^2 - \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 - k^2) = \frac{1}{2} (m_1^2 - m_2^2 + k^2); \quad (\text{A.48})$$

$$k \cdot p_2 = (p_1 - p_2) \cdot p_2 = p_1 \cdot p_2 - p_2^2 = \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 - k^2) - m_2^2 = \frac{1}{2} (m_1^2 - m_2^2 - k^2). \quad (\text{A.49})$$

# Apéndice B

## Cálculos intermedios para ME

En este apéndice se detallan los cálculos descritos en el capítulo 2

### B.1. Densidad lagrangiana de fermiones

Dado que la derivada covariante está dada por ecuación (2.14)

$$D_\mu = \partial_\mu + igT \cdot W_\mu + ig' \frac{Y}{2} B_\mu$$

para obtener la forma explicita escribimos

$$\begin{aligned} T \cdot W_\mu &= \frac{\tau}{2} \cdot W_\mu = \frac{1}{2} (\tau_1 W_\mu^1 + \tau_2 W_\mu^2 + \tau_3 W_\mu^3) \\ &= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W_\mu^1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} W_\mu^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} W_\mu^3 \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ iW_\mu^2 + W_\mu^1 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde tuvimos en cuenta la ecuación (A.3), por lo tanto

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu + igT \cdot W_\mu + g' \frac{Y}{2} B_\mu \\ &= \begin{pmatrix} \partial_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu \end{pmatrix} + \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ iW_\mu^2 + W_\mu^1 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} - \frac{ig'}{2} \begin{pmatrix} B_\mu & 0 \\ 0 & B_\mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} gW_\mu^3 - g'B_\mu & g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ g(iW_\mu^2 + W_\mu^1) & -gW_\mu^3 - g'B_\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

si remplazamos en la relación anterior para los campos  $W_\mu^\pm$

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)$$

y la relación para los bosones gauge físicos neutros

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (gW_\mu^3 - g'B_\mu) \\ A_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g'W_\mu^3 + gB_\mu) \end{aligned} \tag{B.1}$$

reemplazando, directamente obtenemos

$$\begin{aligned}
 gW_\mu^3 - g'B_\mu &= \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (gW_\mu^3 - g'B_\mu) = \sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu \\
 g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) &= g \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) = g\sqrt{2} W_\mu^+ \\
 g(iW_\mu^2 + W_\mu^1) &= g \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) = g\sqrt{2} W_\mu^-
 \end{aligned}$$

mientras que para el término

$$\begin{aligned}
 gW_\mu^3 + g'B_\mu &= \frac{g^2 + g'^2}{g^2 + g'^2} (gW_\mu^3 + g'B_\mu) \\
 &= \frac{1}{g^2 + g'^2} (g^3 W_\mu^3 + g^2 g' B_\mu + g'^2 g W_\mu^3 + g'^3 B_\mu) + \frac{1}{g^2 + g'^2} (gg'^2 W_\mu^3 + g^2 g' B_\mu - gg'^2 W_\mu^3 - g^2 g' B_\mu) \\
 &= \frac{1}{g^2 + g'^2} (g^2 (gW_\mu^3 - g'B_\mu) - g'^2 (gW_\mu^3 - g'B_\mu) + 2g^2 g' B_\mu + 2g'^2 g W_\mu^3) \\
 &= \frac{1}{g^2 + g'^2} ((g^2 - g'^2) (gW_\mu^3 - g'B_\mu) + 2gg' (gB_\mu + g'W_\mu^3)) \\
 &= \frac{(g^2 - g'^2)}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \left( \frac{gW_\mu^3 - g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right) + \frac{2gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \left( \frac{gB_\mu + g'W_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right) \\
 &= \alpha Z_\mu + 2e A_\mu
 \end{aligned}$$

donde tuvimos en cuenta que  $\alpha = \frac{g^2 - g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$  y  $e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$ .

Finalmente la derivada covariante la podemos expresar como

$$\begin{aligned}
 D_\mu &= \partial_\mu + igT \cdot W_\mu + g' \frac{Y}{2} B_\mu \\
 &= \begin{pmatrix} \partial_\mu + \frac{i}{2} (gW_\mu^3 - g'B_\mu) & \frac{i}{2} g (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ \frac{i}{2} g (iW_\mu^2 + W_\mu^1) & \partial_\mu - \frac{i}{2} (gW_\mu^3 + g'B_\mu) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \partial_\mu + \frac{i}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu & \frac{i}{\sqrt{2}} g W_\mu^+ \\ \frac{i}{\sqrt{2}} g W_\mu^- & \partial_\mu - \frac{i}{2} (\alpha Z_\mu + 2e A_\mu) \end{pmatrix} \tag{B.2}
 \end{aligned}$$

Otro término que debemos calcular explícitamente es el relacionado con  $B_\mu$  el cual aparece para el singlete derecho, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
 Z_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (gW_\mu^3 - g'B_\mu) \\
 A_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g'W_\mu^3 + gB_\mu)
 \end{aligned}$$

restando

$$gA_\mu - g'Z_\mu = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g'W_\mu^3 + gB_\mu) - \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (gW_\mu^3 - g'B_\mu) = \left( \frac{g^2 + g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right) B_\mu = \sqrt{g^2 + g'^2} B_\mu$$

entonces

$$B_\mu = \frac{gA_\mu - g'Z_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (\text{B.3})$$

mientras que para el término  $W_\mu^3$  sumamos

$$g'A_\mu + gZ_\mu = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g'W_\mu^3 + gB_\mu) + \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (gW_\mu^3 - g'B_\mu) = \left( \frac{g^2 + g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right) W_\mu^3 = \sqrt{g^2 + g'^2} W_\mu^3$$

entonces

$$W_\mu^3 = \frac{g'A_\mu + gZ_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (\text{B.4})$$

Por lo tanto, para simplificar el término correspondiente al singlete derecho es conveniente remplazar la ecuación (B.3)

$$\begin{aligned} \bar{l}_R i \gamma^\mu D'_\mu l_R &= \bar{l}_R i \gamma^\mu \left( \partial_\mu - ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) l_R \\ &= \bar{l}_R i \gamma^\mu \left( \partial_\mu - ig' \frac{Y}{2} \left( \frac{gA_\mu - g'Z_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right) \right) l_R \\ &= \bar{l}_R i \gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{ig'gA_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} + \frac{ig'^2 Z_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right) l_R \\ &= \bar{l}_R i \gamma^\mu \left( \partial_\mu - ieA_\mu + \frac{ig'^2 Z_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right) l_R \\ &= i \bar{l}_R \gamma^\mu \partial_\mu l_R + e \bar{l}_R \gamma^\mu A_\mu l_R - \frac{g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{l}_R \gamma^\mu Z_\mu l_R \end{aligned}$$

donde tuvimos en cuenta que  $e = \frac{g'g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$

## B.2. Densidad lagrangiana de Yang-Mills

Partiendo de la densidad lagrangiana de Yang-Mills

$$\mathcal{L}_{Y-M} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

donde

$$F_{\mu\nu}^i = W_{\mu\nu}^i + g \varepsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k$$

entonces

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} &= (W_{\mu\nu}^i + g \varepsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k) (W_i^{\mu\nu} + g \varepsilon^{ijk} W_j^\mu W_k^\nu) \\ &= W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i + 2g W_{\mu\nu}^i \varepsilon^{ijk} W_j^\mu W_k^\nu + g^2 \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k W_j^\mu W_k^\nu \end{aligned}$$

reemplazando

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{Y-M} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \\
 &= -\frac{1}{4}W_i^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{2}gW_{\mu\nu}^i \varepsilon^{ijk}W_j^\mu W_k^\nu - \frac{1}{4}g^2 \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijk}W_\mu^j W_\nu^k W_j^\mu W_k^\nu - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \\
 &= -\frac{1}{4}(W_i^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^i + B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}gW_{\mu\nu}^i \varepsilon^{ijk}W_j^\mu W_k^\nu - \frac{1}{4}g^2 \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijk}W_\mu^j W_\nu^k W_j^\mu W_k^\nu \quad (\text{B.5})
 \end{aligned}$$

la última ecuación está compuesta por un término cinético y términos trilineales y cuárticos en los campos.

El primer término lo podemos expresar como

$$W_i^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^i + B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} = W_1^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^1 + W_2^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^2 + W_3^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^3 + B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$

para

$$\begin{aligned}
 W_1^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^1 + W_2^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^2 &= W_1^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^1 + W_2^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^2 + (iW_{\mu\nu}^1 W_2^{\mu\nu} - iW_{\mu\nu}^2 W_1^{\mu\nu}) \\
 &= W_{\mu\nu}^1 (W_1^{\mu\nu} + iW_2^{\mu\nu}) - iW_2^{\mu\nu} (W_{\mu\nu}^1 + iW_2^{\mu\nu}) \\
 &= (W_{\mu\nu}^1 - iW_2^{\mu\nu}) (W_1^{\mu\nu} + iW_2^{\mu\nu}) \\
 &= \sqrt{2}W_{\mu\nu}^+ \sqrt{2}W_{\mu\nu}^- \\
 &= 2W_{\mu\nu}^+ W_{\mu\nu}^-
 \end{aligned}$$

donde tuvimos en cuenta que  $W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)$ , teniendo en cuenta lo encontrado para  $W_\mu^3$  y  $B_\mu$  obtenido en las ecuaciones (B.4),(B.3) tenemos

$$\begin{aligned}
 &W_3^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^3 + B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \\
 &= \left( \frac{g' A^{\mu\nu} + g Z^{\mu\nu}}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right) \left( \frac{g' A_{\mu\nu} + g Z_{\mu\nu}}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right) + \left( \frac{g A_{\mu\nu} - g' Z_{\mu\nu}}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right) \left( \frac{g A_{\mu\nu} - g' Z_{\mu\nu}}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right) \\
 &= \frac{g'^2 A^{\mu\nu} A_{\mu\nu} + g g' Z^{\mu\nu} A_{\mu\nu} + g' g A^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} + g^2 Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu}}{g^2 + g'^2} + \frac{g^2 A_{\mu\nu} A_{\mu\nu} - g' g Z_{\mu\nu} A_{\mu\nu} - g g' A_{\mu\nu} Z_{\mu\nu} + g'^2 Z_{\mu\nu} Z_{\mu\nu}}{g^2 + g'^2} \\
 &= \frac{(g'^2 + g^2) A_{\mu\nu} A_{\mu\nu} + (g^2 + g'^2) Z_{\mu\nu} Z_{\mu\nu}}{g^2 + g'^2} \\
 &= A_{\mu\nu} A_{\mu\nu} + Z_{\mu\nu} Z_{\mu\nu} \quad (\text{B.6})
 \end{aligned}$$

y por lo tanto el término cinético al reemplazar los resultados anteriores, toma la forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{Y-M}^{cin} &= -\frac{1}{4}(W_i^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^i + B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}(2W_{\mu\nu}^+ W_{\mu\nu}^- + A_{\mu\nu}A_{\mu\nu} + Z_{\mu\nu}Z_{\mu\nu}) \\
 &= -\frac{1}{2}W_{\mu\nu}^+ W_{\mu\nu}^- - \frac{1}{4}A_{\mu\nu}A_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z_{\mu\nu} \quad (\text{B.7})
 \end{aligned}$$

para el término que contempla las interacciones trilineales entre los bosones gauge y sus derivadas de

la ecuación (B.5) al expresarlo en términos de los bosones físicos obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon^{ijk} W_{\mu\nu}^i W_j^\mu W_k^\nu \\
 = & \varepsilon^{111} W_{\mu\nu}^1 W_1^\mu W_1^\nu + \varepsilon^{112} W_{\mu\nu}^1 W_1^\mu W_2^\nu + \varepsilon^{113} W_{\mu\nu}^1 W_1^\mu W_3^\nu + \varepsilon^{121} W_{\mu\nu}^1 W_2^\mu W_1^\nu + \varepsilon^{122} W_{\mu\nu}^1 W_2^\mu W_2^\nu \\
 & + \varepsilon^{123} W_{\mu\nu}^1 W_2^\mu W_3^\nu + \varepsilon^{131} W_{\mu\nu}^1 W_3^\mu W_1^\nu + \varepsilon^{132} W_{\mu\nu}^1 W_3^\mu W_2^\nu + \varepsilon^{133} W_{\mu\nu}^1 W_3^\mu W_3^\nu + \varepsilon^{211} W_{\mu\nu}^2 W_1^\mu W_1^\nu \\
 & + \varepsilon^{212} W_{\mu\nu}^2 W_1^\mu W_2^\nu + \varepsilon^{213} W_{\mu\nu}^2 W_1^\mu W_3^\nu + \varepsilon^{221} W_{\mu\nu}^2 W_2^\mu W_1^\nu + \varepsilon^{222} W_{\mu\nu}^2 W_2^\mu W_2^\nu + \varepsilon^{223} W_{\mu\nu}^2 W_2^\mu W_3^\nu \\
 & + \varepsilon^{231} W_{\mu\nu}^2 W_3^\mu W_1^\nu + \varepsilon^{232} W_{\mu\nu}^2 W_3^\mu W_2^\nu + \varepsilon^{233} W_{\mu\nu}^2 W_3^\mu W_3^\nu + \varepsilon^{311} W_{\mu\nu}^3 W_1^\mu W_1^\nu + \varepsilon^{312} W_{\mu\nu}^3 W_1^\mu W_2^\nu \\
 & + \varepsilon^{313} W_{\mu\nu}^3 W_1^\mu W_3^\nu + \varepsilon^{321} W_{\mu\nu}^3 W_2^\mu W_1^\nu + \varepsilon^{322} W_{\mu\nu}^3 W_2^\mu W_2^\nu + \varepsilon^{323} W_{\mu\nu}^3 W_2^\mu W_3^\nu + \varepsilon^{331} W_{\mu\nu}^3 W_3^\mu W_1^\nu \\
 & + \varepsilon^{332} W_{\mu\nu}^3 W_3^\mu W_2^\nu + \varepsilon^{333} W_{\mu\nu}^3 W_3^\mu W_3^\nu
 \end{aligned}$$

teniendo en cuenta la definición del tensor de Levi-Civita sobre índices repetidos tenemos

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^{ijk} W_{\mu\nu}^i W_j^\mu W_k^\nu &= \varepsilon^{123} W_{\mu\nu}^1 W_2^\mu W_3^\nu + \varepsilon^{132} W_{\mu\nu}^1 W_3^\mu W_2^\nu + \varepsilon^{213} W_{\mu\nu}^2 W_1^\mu W_3^\nu + \varepsilon^{231} W_{\mu\nu}^2 W_3^\mu W_1^\nu + \varepsilon^{312} W_{\mu\nu}^3 W_1^\mu W_2^\nu \\
 &+ \varepsilon^{321} W_{\mu\nu}^3 W_2^\mu W_1^\nu
 \end{aligned}$$

y para orden par e impar

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^{ijk} W_{\mu\nu}^i W_j^\mu W_k^\nu &= W_{\mu\nu}^1 W_2^\mu W_3^\nu - W_{\mu\nu}^1 W_3^\mu W_2^\nu - W_{\mu\nu}^2 W_1^\mu W_3^\nu + W_{\mu\nu}^2 W_3^\mu W_1^\nu + W_{\mu\nu}^3 W_1^\mu W_2^\nu - W_{\mu\nu}^3 W_2^\mu W_1^\nu \\
 &= W_3^\nu (W_{\mu\nu}^1 W_2^\mu - W_{\mu\nu}^2 W_1^\mu) + W_3^\mu (W_{\mu\nu}^2 W_1^\nu - W_{\mu\nu}^1 W_2^\nu) + W_{\mu\nu}^3 (W_1^\mu W_2^\nu - W_2^\mu W_1^\nu) \quad (\text{B.8})
 \end{aligned}$$

podemos ahora redefinir los términos  $A_\mu$  y  $B_\mu$  para llevar la interacción de tercer orden entre los bosones gauge a la que se tiene en la literatura, para lo cual debemos definir el ángulo de mezcla débil o ángulo de Weinberg  $\theta_W$  como

$$\begin{aligned}
 \cos \theta_W &= \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \\
 \sin \theta_W &= \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (\text{B.9})
 \end{aligned}$$

es interesante recordar que

$$\begin{aligned}
 \frac{M_W}{M_Z} &= \cos \theta_W \\
 W_\mu^3 &= Z_\mu \cos \theta_W + A_\mu \sin \theta_W \\
 W_\mu^2 &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (W_\mu^- - W_\mu^+) \\
 W_\mu^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ + W_\mu^-)
 \end{aligned}$$

solucionando primero los paréntesis de la ecuación (B.8)

$$\begin{aligned}
 & W_{\mu\nu}^1 W_2^\mu - W_{\mu\nu}^2 W_1^\mu \\
 = & \frac{1}{\sqrt{2}} (W_{\mu\nu}^+ + W_{\mu\nu}^-) \frac{-i}{\sqrt{2}} (W_\mu^- - W_\mu^+) - \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ + W_\mu^-) \frac{-i}{\sqrt{2}} (W_{\mu\nu}^- - W_{\mu\nu}^+) \\
 = & -\frac{i}{2} (W_{\mu\nu}^+ + W_{\mu\nu}^-) (W_\mu^- - W_\mu^+) + \frac{i}{2} (W_\mu^+ + W_\mu^-) (W_{\mu\nu}^- - W_{\mu\nu}^+) \\
 = & -\frac{i}{2} W_{\mu\nu}^+ W_\mu^- - \frac{i}{2} W_{\mu\nu}^- W_\mu^- + \frac{i}{2} W_{\mu\nu}^+ W_\mu^+ + \frac{i}{2} W_{\mu\nu}^- W_\mu^+ + \frac{i}{2} W_\mu^+ W_{\mu\nu}^- + \frac{i}{2} W_\mu^- W_{\mu\nu}^- - \frac{i}{2} W_\mu^+ W_{\mu\nu}^+ - \frac{i}{2} W_\mu^- W_{\mu\nu}^+ \\
 = & -i W_{\mu\nu}^+ W_\mu^- + i W_{\mu\nu}^- W_\mu^+
 \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
 & W_{\mu\nu}^2 W_1^\nu - W_{\mu\nu}^1 W_2^\nu \\
 = & \frac{-i}{\sqrt{2}} (W_{\mu\nu}^- - W_{\mu\nu}^+) \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\nu^+ + W_\nu^-) - \frac{1}{\sqrt{2}} (W_{\mu\nu}^+ + W_{\mu\nu}^-) \frac{-i}{\sqrt{2}} (W_\nu^- - W_\nu^+) \\
 = & -\frac{i}{2} (W_{\mu\nu}^- - W_{\mu\nu}^+) (W_\nu^+ + W_\nu^-) + \frac{i}{2} (W_{\mu\nu}^+ + W_{\mu\nu}^-) (W_\nu^- - W_\nu^+) \\
 = & -\frac{i}{2} W_{\mu\nu}^- W_\nu^+ + \frac{i}{2} W_{\mu\nu}^+ W_\nu^+ - \frac{i}{2} W_{\mu\nu}^- W_\nu^- + \frac{i}{2} W_{\mu\nu}^+ W_\nu^- + \frac{i}{2} W_{\mu\nu}^+ W_\nu^- + \frac{i}{2} W_{\mu\nu}^- W_\nu^- - \frac{i}{2} W_{\mu\nu}^+ W_\nu^+ - \frac{i}{2} W_{\mu\nu}^- W_\nu^+ \\
 = & -i W_{\mu\nu}^- W_\nu^+ + i W_{\mu\nu}^+ W_\nu^-
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 & W_1^\mu W_2^\nu - W_2^\mu W_1^\nu \\
 = & \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ + W_\mu^-) \frac{-i}{\sqrt{2}} (W_\nu^- - W_\nu^+) - \frac{-i}{\sqrt{2}} (W_\mu^- - W_\mu^+) \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\nu^+ + W_\nu^-) \\
 = & -\frac{i}{2} (W_\mu^+ + W_\mu^-) (W_\nu^- - W_\nu^+) + \frac{i}{2} (W_\mu^- - W_\mu^+) (W_\nu^+ + W_\nu^-) \\
 = & -\frac{i}{2} W_\mu^+ W_\nu^- - \frac{i}{2} W_\mu^+ W_\nu^- - \frac{i}{2} W_\mu^- W_\nu^- + \frac{i}{2} W_\mu^- W_\nu^- + \frac{i}{2} W_\mu^+ W_\nu^+ - \frac{i}{2} W_\mu^+ W_\nu^+ + \frac{i}{2} W_\mu^- W_\nu^+ + \frac{i}{2} W_\mu^- W_\nu^+ \\
 = & -i W_\mu^+ W_\nu^- + i W_\mu^- W_\nu^+
 \end{aligned}$$

reemplazando lo anterior en la ecuación (B.8) tenemos

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon^{ijk} W_{\mu\nu}^i W_j^\mu W_k^\nu \\
 = & W_3^\nu (W_{\mu\nu}^1 W_2^\mu - W_{\mu\nu}^2 W_1^\mu) + W_3^\mu (W_{\mu\nu}^2 W_1^\nu - W_{\mu\nu}^1 W_2^\nu) + W_{\mu\nu}^3 (W_1^\mu W_2^\nu - W_2^\mu W_1^\nu) \\
 = & (Z_\nu \cos \theta_W + A_\nu \sin \theta_W) (-i W_{\mu\nu}^+ W_\mu^- + i W_{\mu\nu}^- W_\mu^+) + (Z_\mu \cos \theta_W + A_\mu \sin \theta_W) (-i W_{\mu\nu}^- W_\nu^+ + i W_{\mu\nu}^+ W_\nu^-) \\
 & + (Z_{\mu\nu} \cos \theta_W + A_{\mu\nu} \sin \theta_W) (-i W_\mu^+ W_\nu^- + i W_\mu^- W_\nu^+) \\
 = & i \cos \theta_W (-Z_\nu W_{\mu\nu}^+ W_\mu^- + Z_\nu W_{\mu\nu}^- W_\mu^+ - Z_{\mu\nu} W_\mu^+ W_\nu^- - Z_\mu W_{\mu\nu}^- W_\nu^+ + Z_\mu W_{\mu\nu}^+ W_\nu^- + Z_{\mu\nu} W_\mu^- W_\nu^+) \\
 & + i \sin \theta_W (-A_\nu W_{\mu\nu}^+ W_\mu^- + A_\nu W_{\mu\nu}^- W_\mu^+ - A_{\mu\nu} W_\mu^+ W_\nu^- - A_\mu W_{\mu\nu}^- W_\nu^+ + A_\mu W_{\mu\nu}^+ W_\nu^- + A_{\mu\nu} W_\mu^- W_\nu^+)
 \end{aligned}$$

si tenemos en cuenta que  $W_{\mu\nu}^\pm = \partial_\mu W_\nu^\pm - \partial_\nu W_\mu^\pm$  podemos expandir los términos

$$\begin{aligned}
 & -Z_\mu W_{\mu\nu}^- W_\nu^+ + Z_\mu W_{\mu\nu}^+ W_\nu^- + Z_{\mu\nu} W_\mu^- W_\nu^+ \\
 = & -Z_\mu (\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) W_\nu^+ + Z_\mu (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) W_\nu^- + (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) W_\mu^- W_\nu^+ \\
 = & -Z_\mu \partial_\mu W_\nu^- W_\nu^+ + Z_\mu \partial_\mu W_\nu^+ W_\nu^- + Z_\mu \partial_\nu W_\mu^- W_\nu^+ - \partial_\nu Z_\mu W_\mu^- W_\nu^+ - Z_\mu \partial_\nu W_\mu^+ W_\nu^- + \partial_\mu Z_\nu W_\mu^- W_\nu^+ \\
 = & -Z_\mu \partial_\nu W_\mu^+ W_\nu^- + \partial_\mu Z_\nu W_\mu^- W_\nu^+
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 & -A_\mu W_{\mu\nu}^- W_\nu^+ + A_\mu W_{\mu\nu}^+ W_\nu^- + A_{\mu\nu} W_\mu^- W_\nu^+ \\
 = & -A_\mu (\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) W_\nu^+ + A_\mu (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) W_\nu^- + (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) W_\mu^- W_\nu^+ \\
 = & -A_\mu \partial_\mu W_\nu^- W_\nu^+ + A_\mu \partial_\mu W_\nu^+ W_\nu^- + A_\mu \partial_\nu W_\mu^- W_\nu^+ - \partial_\nu A_\mu W_\mu^- W_\nu^+ - A_\mu \partial_\nu W_\mu^+ W_\nu^- + \partial_\mu A_\nu W_\mu^- W_\nu^+ \\
 = & -A_\mu \partial_\nu W_\mu^+ W_\nu^- + \partial_\mu A_\nu W_\mu^- W_\nu^+
 \end{aligned}$$

obteniendo entonces

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{ijk} W_{\mu\nu}^i W_j^\mu W_k^\nu \\ &= i \cos \theta_W \left( -Z_\nu W_{\mu\nu}^+ W_\mu^- + Z_\nu W_{\mu\nu}^- W_\mu^+ - Z_{\mu\nu} W_\mu^+ W_\nu^- \right) + i \sin \theta_W \left( -A_\nu W_{\mu\nu}^+ W_\mu^- + A_\nu W_{\mu\nu}^- W_\mu^+ - A_{\mu\nu} W_\mu^+ W_\nu^- \right) \end{aligned}$$

finalmente el término de interacciones trilineales lo podemos expresar como

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} g \varepsilon^{ijk} W_{\mu\nu}^i W_j^\mu W_k^\nu \\ &= \frac{i}{2} g \cos \theta_W \left( Z_\nu W_{\mu\nu}^+ W_\mu^- - Z_\nu W_{\mu\nu}^- W_\mu^+ + Z_{\mu\nu} W_\mu^+ W_\nu^- \right) + \frac{i}{2} g \sin \theta_W \left( -A_\nu W_{\mu\nu}^+ W_\mu^- + A_\nu W_{\mu\nu}^- W_\mu^+ - A_{\mu\nu} W_\mu^+ W_\nu^- \right) \\ &= \mathcal{L}_{WWZ} + \mathcal{L}_{WW\gamma} \end{aligned}$$

de lo anterior tenemos que estos vértices dependen explícitamente del momento de cada uno de los bosones gauge.

Nos queda finalmente el término correspondiente a los vértices de cuatro ramas

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} g^2 \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k W_j^\mu W_k^\nu &= -\frac{1}{4} g^2 \left( (W_\mu^i W_i^\mu)^2 - W_{i\mu} W_\nu^i W_j^\mu W^{j\nu} \right) \\ &= \mathcal{L}_{WWWW} + \mathcal{L}_{WWZZ} + \mathcal{L}_{WW\gamma\gamma} + \mathcal{L}_{WWZ\gamma} \end{aligned}$$

podemos ver que los vértices aparecen como consecuencia del término  $\varepsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k$ , la no abelianidad de la teoría se manifiesta en el hecho de la existencia de interacciones entre los campos gauge.

### B.3. Densidad lagrangiana de Higgs

#### Antes del rompimiento espontáneo de la simetría (ARES)

Para poder analizar el lagrangiano de Higgs antes del rompimiento espontáneo de la simetría

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) - |\lambda| (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (\text{B.10})$$

debemos reescribir la forma de la derivada covariante, para lo cual

$$D_\mu = \partial_\mu + igT \cdot W_\mu + ig' \frac{Y}{2} B_\mu$$

para obtener la forma explícita como se realizó anteriormente

$$T \cdot W_\mu = \frac{\tau}{2} \cdot W_\mu = \frac{1}{2} (\tau_1 W_\mu^1 + \tau_2 W_\mu^2 + \tau_3 W_\mu^3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ iW_\mu^2 + W_\mu^1 & -W_\mu^3 \end{pmatrix}$$

dado que bajo los operadores de isoespín  $T$  y de hipercarga  $Y$  tenemos

$$\begin{aligned} T\Phi &= \frac{\tau}{2} \Phi \\ Y\Phi &= \frac{1}{2} \Phi \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$



donde tuvimos en cuenta la ecuación (A.3), por lo tanto

$$\begin{aligned}
 D_\mu &= \partial_\mu + igT \cdot W_\mu + g' \frac{Y}{2} B_\mu \\
 &= \begin{pmatrix} \partial_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu \end{pmatrix} + \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ iW_\mu^2 + W_\mu^1 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} + \frac{ig'}{2} \begin{pmatrix} B_\mu & 0 \\ 0 & B_\mu \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \partial_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} gW_\mu^3 + g'B_\mu & g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ g(iW_\mu^2 + W_\mu^1) & -gW_\mu^3 + g'B_\mu \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
 Z_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (gW_\mu^3 - g'B_\mu) \\
 A_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g'W_\mu^3 + gB_\mu) \\
 W_\mu^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)
 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 gW_\mu^3 + g'B_\mu &= g \left( \frac{gZ_\mu + g'A_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right) + g' \left( \frac{gA_\mu - g'Z_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right) = \frac{(g^2 - g'^2)Z_\mu + 2gg'A_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \alpha Z_\mu + 2eA_\mu \\
 -gW_\mu^3 + g'B_\mu &= -(gW_\mu^3 - g'B_\mu) = -\sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu
 \end{aligned}$$

donde tuvimos en cuenta que  $\alpha = \frac{g^2 - g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$  y  $e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$ , en consecuencia podemos escribir la derivada covariante como

$$D_\mu = \begin{pmatrix} \partial_\mu + \frac{i}{2}\alpha Z_\mu + ieA_\mu & \frac{ig}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \\ \frac{ig}{\sqrt{2}} W_\mu^- & \partial_\mu - \frac{i}{2}\sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

antes de seguir adelante es conveniente darnos cuenta que la forma final de la derivada covariante es diferente a la obtenida anteriormente, lo cual se debe a la forma en la que actúa el operador de hipercarga  $Y$  sobre el campo de Higgs. Podemos reescribir el campo de Higgs como

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 + i\phi_4 \\ H + i\phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \phi^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_3 \pm i\phi_4) \\
 \phi^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (H + i\phi_2)
 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

por lo tanto el primer término del lagrangiano de Higgs quedará como

$$\begin{aligned}
 (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) &= \left( \left( \begin{pmatrix} \partial_\mu + \frac{i}{2}\alpha Z_\mu + ieA_\mu & \frac{ig}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \\ \frac{ig}{\sqrt{2}} W_\mu^- & \partial_\mu - \frac{i}{2}\sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (H + i\phi_2) \end{pmatrix} \right) \right)^\dagger \\
 &\quad \left( \begin{pmatrix} \partial_\mu + \frac{i}{2}\alpha Z_\mu + ieA_\mu & \frac{ig}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \\ \frac{ig}{\sqrt{2}} W_\mu^- & \partial_\mu - \frac{i}{2}\sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (H + i\phi_2) \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 (D^\mu \Phi)^\dagger &= \left( \left( \begin{array}{cc} \partial_\mu + \frac{i}{2} \alpha Z_\mu + ie A_\mu & \frac{ig}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \\ \frac{ig}{\sqrt{2}} W_\mu^- & \partial_\mu - \frac{i}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (H + i\phi_2) \end{array} \right) \right)^\dagger \\
 &= \left( \partial_\mu \phi^- - \frac{i}{2} \alpha Z_\mu \phi^- - ie A_\mu \phi^- - \frac{ig}{2} W_\mu^- H - \frac{g}{2} W_\mu^- \phi_2 \quad ; \right. \\
 &\quad \left. - \frac{ig}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \phi^- + \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu H - \frac{i}{\sqrt{2}} \partial_\mu \phi_2 + \frac{i\sqrt{g^2 + g'^2}}{2\sqrt{2}} Z_\mu H + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2\sqrt{2}} Z_\mu \phi_2 \right)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 (D_\mu \Phi) &= \left( \begin{array}{cc} \partial_\mu + \frac{i}{2} \alpha Z_\mu + ie A_\mu & \frac{ig}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \\ \frac{ig}{\sqrt{2}} W_\mu^- & \partial_\mu - \frac{i}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (H + i\phi_2) \end{array} \right) \\
 &= \left( \begin{array}{c} \partial_\mu \phi^+ + \frac{i}{2} \alpha Z_\mu \phi^+ + ie A_\mu \phi^+ + \frac{ig}{2} W_\mu^+ H - \frac{g}{2} W_\mu^+ \phi_2 \\ \frac{ig}{\sqrt{2}} W_\mu^- \phi^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu H + \frac{i}{\sqrt{2}} \partial_\mu \phi_2 - \frac{i\sqrt{g^2 + g'^2}}{2\sqrt{2}} Z_\mu H + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2\sqrt{2}} Z_\mu \phi_2 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 &(D_\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi)_{ARES} \\
 &= \left( \partial_\mu \phi^- - \frac{i}{2} \alpha Z_\mu \phi^- - ie A_\mu \phi^- - \frac{ig}{2} W_\mu^- H - \frac{g}{2} W_\mu^- \phi_2 \right) \left( \partial_\mu \phi^+ + \frac{i}{2} \alpha Z_\mu \phi^+ + ie A_\mu \phi^+ + \frac{ig}{2} W_\mu^+ H - \frac{g}{2} W_\mu^+ \phi_2 \right) \\
 &\quad + \left( -\frac{ig}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \phi^- + \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu H - \frac{i}{\sqrt{2}} \partial_\mu \phi_2 + \frac{i\sqrt{g^2 + g'^2}}{2\sqrt{2}} Z_\mu H + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2\sqrt{2}} Z_\mu \phi_2 \right) \\
 &\quad \left( \frac{ig}{\sqrt{2}} W_\mu^- \phi^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu H + \frac{i}{\sqrt{2}} \partial_\mu \phi_2 - \frac{i\sqrt{g^2 + g'^2}}{2\sqrt{2}} Z_\mu H + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2\sqrt{2}} Z_\mu \phi_2 \right)
 \end{aligned}$$

asociando los términos tenemos

$$\begin{aligned}
 (D_\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi)_{ARES} &= \left( \partial_\mu \phi^- \partial_\mu \phi^+ + \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial_\mu H + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial_\mu \phi_2 \right) \\
 &+ \left( \frac{\alpha^2}{4} Z_\mu \phi^- Z_\mu \phi^+ + e^2 A_\mu \phi^- A_\mu \phi^+ + \frac{g^2}{4} W_\mu^- H^2 W_\mu^+ - \frac{g^2}{4} W_\mu^- \phi_2^2 W_\mu^+ + \frac{g^2}{2} W_\mu^+ \phi^- W_\mu^- \phi^+ \right. \\
 &+ \frac{(g^2 + g'^2)}{8} Z_\mu H^2 Z_\mu + \frac{(g^2 + g'^2)}{8} Z_\mu \phi_2^2 Z_\mu + e\alpha A_\mu \phi^- Z_\mu \phi^+ + \frac{g}{2} e A_\mu \phi^- W_\mu^+ H + e \frac{ig}{2} A_\mu \phi^- W_\mu^+ \phi_2 \\
 &+ \frac{g}{4} \left( \alpha - \sqrt{g^2 + g'^2} \right) Z_\mu \phi^- W_\mu^+ H + \frac{g}{2} e W_\mu^- H A_\mu \phi^+ + \frac{g}{2} i e W_\mu^- \phi_2 A_\mu \phi^+ + \frac{g}{4} \left( \alpha - \sqrt{g^2 + g'^2} \right) W_\mu^- H Z_\mu \phi^+ \\
 &+ \frac{ig}{4} \left( \alpha - \sqrt{g^2 + g'^2} \right) Z_\mu \phi^- W_\mu^+ \phi_2 + \frac{ig}{4} \left( \alpha + \sqrt{g^2 + g'^2} \right) W_\mu^- \phi_2 Z_\mu \phi^+ \left. \right) \\
 &+ \left( \frac{i}{2} \alpha Z_\mu (\partial_\mu \phi^- \phi^+ - \phi^- \partial_\mu \phi^+) + ie A_\mu (\partial_\mu \phi^- \phi^+ - \phi^- \partial_\mu \phi^+) + \frac{ig}{2} W_\mu^+ (\partial_\mu \phi^- H - \phi^- \partial_\mu H) \right. \\
 &+ \frac{ig}{2} W_\mu^- (\partial_\mu H \phi^+ - H \partial_\mu \phi^+) + \frac{g}{2} W_\mu^+ (\phi^- \partial_\mu \phi_2 - \partial_\mu \phi^- \phi_2) + \frac{g}{2} W_\mu^- (\phi_2 \partial_\mu \phi^+ + \partial_\mu \phi_2 \phi^+) \\
 &\left. + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4} Z_\mu (\phi_2 \partial_\mu H - H \partial_\mu \phi_2) \right)
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

las reglas de Feynman pueden ser obtenidas para el espacio de momentos si identificamos  $\partial_\mu = -ip_\mu$ . Así, podemos asociar en la ecuación anterior el primer paréntesis con los términos cinéticos de los bosones escalares, para el segundo paréntesis tenemos las interacciones entre los bosones escalares y los bosones vectoriales formando vértices de cuatro ramas y el último de los paréntesis hace referencia a los acoplos entre escalares y vectores formando vértices de tres ramas, los cuales dependen explícitamente del momento al tener en cuenta las siguiente relaciones

$$\begin{aligned} k_\mu &\rightarrow \text{momento de } \phi^- \\ q_\mu &\rightarrow \text{momento de } \phi^+ \\ p_\mu &\rightarrow \text{momento de } H \\ r_\mu &\rightarrow \text{momento de } \phi_2 \end{aligned}$$

para el término del potencial de la ecuación (B.10) tenemos

$$\begin{aligned} &-\mu^2 \Phi^\dagger \Phi - |\lambda| (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ &= -\mu^2 \left( \phi^- \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (H + i\phi_2)^\dagger \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{matrix} \phi^+ \\ (H + i\phi_2) \end{matrix} \right) - |\lambda| \left( \left( \phi^- \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (H + i\phi_2)^\dagger \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{matrix} \phi^+ \\ (H + i\phi_2) \end{matrix} \right) \right)^2 \end{aligned}$$

del primer término

$$\left( \phi^- \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (H + i\phi_2)^\dagger \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{matrix} \phi^+ \\ (H + i\phi_2) \end{matrix} \right) = \left( \phi^- \phi^+ + \frac{1}{2} (H - i\phi_2) (H + i\phi_2) \right) = \left( \phi^- \phi^+ + \frac{1}{2} (H^2 + \phi_2^2) \right)$$

mientras que

$$\begin{aligned} &\left( \left( \phi^- \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (H + i\phi_2)^\dagger \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{matrix} \phi^+ \\ (H + i\phi_2) \end{matrix} \right) \right)^2 \\ &= \left( \phi^- \phi^+ + \frac{1}{2} H^2 + \frac{1}{2} \phi_2^2 \right)^2 \\ &= \phi^- \phi^+ \phi^- \phi^+ + \phi^- \phi^+ H^2 + \phi^- \phi^+ \phi_2^2 + \frac{1}{4} H^4 + \frac{1}{2} H^2 \phi_2^2 + \frac{1}{4} \phi_2^4 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi - |\lambda| (\Phi^\dagger \Phi)^2 &= -\mu^2 \left( \phi^- \phi^+ + \frac{1}{2} (H^2 + \phi_2^2) \right) - |\lambda| \left( \phi^- \phi^+ \phi^- \phi^+ + \phi^- \phi^+ (H^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4} H^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} H^2 \phi_2^2 + \frac{1}{4} \phi_2^2 \phi_2^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

estos términos como vemos hacen referencia a las interacciones de los bosones escalares.

Así, finalmente la densidad lagrangiana de Higgs antes de implementarse el rompimiento espontáneo de la simetría será la suma de los términos de las ecuaciones (B.14) y (B.15)

$$\mathcal{L}_H^{ARES} = \left[ (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) - |\lambda| (\Phi^\dagger \Phi)^2 \right]_{ARES} \quad (\text{B.16})$$

**Después del rompimiento espontáneo de la simetría (DRES)**

Partiendo del doblete de Higgs, ecuación (2.39)

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\phi^+ \\ H - v + i\phi_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.17})$$

es necesario tener en cuenta los cambios que produce la redefinición  $H \rightarrow H - v$  en los términos de las ecuaciones (B.14) y (B.15), por lo tanto, debemos reemplazar y factorizar

$$\begin{aligned} & (D_\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi)_{DRES} \\ = & (D_\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi)_{ARES} + \frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^- W_\mu^+ - \frac{g^2 v}{2} H W_\mu^- W_\mu^+ + \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{8} Z_\mu Z_\mu - \frac{(g^2 + g'^2) v}{4} H Z_\mu Z_\mu \\ & - \frac{gv}{2} e A_\mu \phi^- W_\mu^+ - \frac{gv}{2} e W_\mu^- A_\mu \phi^+ - \frac{gv}{4} (\alpha - \sqrt{g^2 + g'^2}) Z_\mu \phi^- W_\mu^+ - \frac{gv}{4} (\alpha - \sqrt{g^2 + g'^2}) W_\mu^- Z_\mu \phi^+ \\ & + \frac{igv}{2} (W_\mu^- \partial_\mu \phi^+ - W_\mu^+ \partial_\mu \phi^-) + \frac{v\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} Z_\mu \partial_\mu \phi_2 \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

mientras que para el término del potencial dado que  $v^2 |\lambda| = -\mu^2$ , tenemos

$$\begin{aligned} & -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi - |\lambda| (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ = & -\mu^2 \left( \phi^- \phi^+ + \frac{1}{2} (H^2 + \phi_2^2) \right) \\ & - |\lambda| \left( \phi^- \phi^+ \phi^- \phi^+ + \phi^- \phi^+ (H^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4} H^4 + \frac{1}{2} H^2 \phi_2^2 + \frac{1}{4} \phi_2^2 \phi_2^2 \right) \end{aligned}$$

reemplazando  $H \rightarrow H - v$

$$\begin{aligned} -\mu^2 \left( \phi^- \phi^+ + \frac{1}{2} (H^2 + \phi_2^2) \right) &= -\mu^2 \left( \phi^- \phi^+ + \frac{1}{2} (H^2 - 2Hv + v^2 + \phi_2^2) \right) \\ &= -\mu^2 \left( \phi^- \phi^+ + \frac{1}{2} (H^2 + \phi_2^2) \right) + \frac{v^2 |\lambda|}{2} (v^2 - 2Hv) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & -|\lambda| \left( \phi^- \phi^+ \phi^- \phi^+ + \phi^- \phi^+ (H^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4} H^4 + \frac{1}{2} H^2 \phi_2^2 + \frac{1}{4} \phi_2^2 \phi_2^2 \right) \\ = & -|\lambda| \left( \phi^- \phi^+ \phi^- \phi^+ + \phi^- \phi^+ (H^2 - 2Hv + v^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4} (H^4 - 4H^3 v + 6H^2 v^2 - 4Hv^3 + v^4) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (H^2 - 2Hv + v^2) \phi_2^2 + \frac{1}{4} \phi_2^2 \phi_2^2 \right) \\ = & -|\lambda| \left( \phi^- \phi^+ \phi^- \phi^+ + \phi^- \phi^+ (H^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4} H^4 + \frac{1}{2} H^2 \phi_2^2 + \frac{1}{4} \phi_2^2 \phi_2^2 \right) \\ & - |\lambda| \left( \phi^- \phi^+ (v^2 - 2Hv) + \frac{1}{4} (v^4 - 4H^3 v + 6H^2 v^2 - 4Hv^3) + \frac{1}{2} (v^2 - 2Hv) \phi_2^2 \right) \end{aligned}$$

factorizando y dado que  $v^2 |\lambda| = -\mu^2$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 & \left[ -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi - |\lambda| (\Phi^\dagger \Phi)^2 \right]_{DRES} \\
 = & \left[ -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi - |\lambda| (\Phi^\dagger \Phi)^2 \right]_{ARES} + \frac{v^2 |\lambda|}{2} (v^2 - 2Hv) \\
 & - |\lambda| \left( \phi^- \phi^+ (v^2 - 2Hv) + \frac{1}{4} (v^4 - 4H^3 v + 6H^2 v^2 - 4Hv^3) + \frac{1}{2} (v^2 - 2Hv) \phi_2^2 \right) \\
 = & \left[ -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi - |\lambda| (\Phi^\dagger \Phi)^2 \right]_{ARES} + |\lambda| v (H\phi_2^2 + 2\phi^- \phi^+ H + H^3) - \frac{v^2 |\lambda|}{2} (2\phi^- \phi^+ + \phi_2^2 + 3H^2) \\
 & + |\lambda| H v^3 - v^2 |\lambda| H v + \frac{v^4 |\lambda|}{2} - |\lambda| \frac{1}{4} v^4 \\
 = & \left[ -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi - |\lambda| (\Phi^\dagger \Phi)^2 \right]_{ARES} + |\lambda| v (H\phi_2^2 + 2\phi^- \phi^+ H + H^3) - \frac{v^2 |\lambda|}{2} (2\phi^- \phi^+ + \phi_2^2 + 3H^2) + \frac{1}{4} v^4 |\lambda|
 \end{aligned}$$

los términos de la densidad lagrangiana de Higgs que se acoplan con el Higgs y a primer orden en  $v$  son

$$-\frac{g^2 v}{2} H W_\mu^- W_\mu^+ - \frac{(g^2 + g'^2) v}{4} H Z_\mu Z_\mu + |\lambda| v (H\phi_2^2 + 2\phi^- \phi^+ H + H^3)$$

estas cinco interacciones son adicionales a las encontradas en el cálculo de ARES y como vemos están compuestas por vértices de tres ramas.

Si ahora tomamos los términos que están compuestos por la multiplicación de dos campos en el lagrangiano de Higgs después de la ruptura espontánea de la simetría tendremos términos que provienen del ARES

$$\partial_\mu \phi^- \partial_\mu \phi^+ + \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial_\mu H + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial_\mu \phi_2 - \mu^2 \left( \phi^- \phi^+ + \frac{1}{2} (H^2 + \phi_2^2) \right)$$

mientras que los términos provenientes del DRES son

$$\frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^- W_\mu^+ + \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{8} Z_\mu Z_\mu + \frac{igv}{2} (W_\mu^- \partial_\mu \phi^+ - W_\mu^+ \partial_\mu \phi^-) + \frac{v \sqrt{g^2 + g'^2}}{2} Z_\mu \partial_\mu \phi_2 - \frac{v^2 |\lambda|}{2} (2\phi^- \phi^+ + \phi_2^2 + 3H^2)$$

la contribución total será la suma de los términos ARES y DRES

$$\begin{aligned}
 & \partial_\mu \phi^- \partial_\mu \phi^+ + \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial_\mu H + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial_\mu \phi_2 - \mu^2 \left( \phi^- \phi^+ + \frac{1}{2} (H^2 + \phi_2^2) \right) + \frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^- W_\mu^+ + \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{8} Z_\mu Z_\mu \\
 & + \frac{igv}{2} (W_\mu^- \partial_\mu \phi^+ - W_\mu^+ \partial_\mu \phi^-) + \frac{v \sqrt{g^2 + g'^2}}{2} Z_\mu \partial_\mu \phi_2 - \frac{v^2 |\lambda|}{2} (2\phi^- \phi^+ + \phi_2^2 + 3H^2)
 \end{aligned} \tag{B.19}$$

dado que  $v^2 = \frac{-\mu^2}{|\lambda|}$  podemos simplificar los términos

$$\begin{aligned}
 & -\mu^2 \left( \phi^- \phi^+ + \frac{1}{2} (H^2 + \phi_2^2) \right) - \frac{v^2 |\lambda|}{2} (2\phi^- \phi^+ + \phi_2^2 + 3H^2) \\
 = & -\mu^2 \left( \phi^- \phi^+ + \frac{1}{2} (H^2 + \phi_2^2) \right) + \frac{\mu^2}{2} (2\phi^- \phi^+ + \phi_2^2 + 3H^2) \\
 = & \mu^2 \left( \phi^- \phi^+ + \frac{1}{2} \phi_2^2 + \frac{3}{2} H^2 - \phi^- \phi^+ - \frac{1}{2} H^2 - \frac{1}{2} \phi_2^2 \right) \\
 = & \mu^2 H^2
 \end{aligned}$$

y entonces la ecuación (B.19) será

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \phi^- \partial_\mu \phi^+ + \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial_\mu H + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial_\mu \phi_2 + \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{8} Z_\mu Z_\mu \\ & + \frac{igv}{2} (W_\mu^- \partial_\mu \phi^+ - W_\mu^+ \partial_\mu \phi^-) + \frac{v \sqrt{g^2 + g'^2}}{2} Z_\mu \partial_\mu \phi_2 + \mu^2 H^2 \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

si tenemos en cuenta que  $\phi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_3 \pm i\phi_4)$  y  $W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)$  podemos reescribir los términos

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \phi^- \partial_\mu \phi^+ + \frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^- W_\mu^+ + \frac{igv}{2} (W_\mu^- \partial_\mu \phi^+ - W_\mu^+ \partial_\mu \phi^-) \\ = & \partial_\mu \frac{1}{2} (\phi_3 - i\phi_4) \partial_\mu (\phi_3 + i\phi_4) + \frac{g^2 v^2}{8} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) (W_\mu^1 - iW_\mu^2) + \frac{igv}{4} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) \partial_\mu (\phi_3 + i\phi_4) \\ & - \frac{igv}{4} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \partial_\mu (\phi_3 - i\phi_4) \\ = & \frac{1}{2} ((\partial_\mu \phi_3)^2 + (\partial_\mu \phi_4)^2) + \frac{g^2 v^2}{8} (W_\mu^1 W_\mu^1 + W_\mu^2 W_\mu^2) - \frac{gv}{2} (W_\mu^2 \partial_\mu \phi_3 + W_\mu^1 \partial_\mu \phi_4) \\ = & \frac{g^2 v^2}{2} \left( \frac{1}{4} W_\mu^1 W_\mu^1 - \frac{1}{gv} W_\mu^1 \partial_\mu \phi_4 + \frac{1}{g^2 v^2} (\partial_\mu \phi_4)^2 \right) + \frac{g^2 v^2}{2} \left( \frac{1}{4} W_\mu^2 W_\mu^2 - \frac{1}{gv} W_\mu^2 \partial_\mu \phi_3 + \frac{1}{g^2 v^2} (\partial_\mu \phi_3)^2 \right) \\ = & \frac{g^2 v^2}{2} \left( \frac{1}{2} W_\mu^1 - \frac{1}{gv} \partial_\mu \phi_4 \right)^2 + \frac{g^2 v^2}{2} \left( \frac{1}{2} W_\mu^2 - \frac{1}{gv} \partial_\mu \phi_3 \right)^2 \end{aligned}$$

para los términos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial_\mu \phi_2 + \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{8} Z_\mu Z_\mu + \frac{v \sqrt{g^2 + g'^2}}{2} Z_\mu \partial_\mu \phi_2 \\ = & \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{2} \left( \frac{1}{4} Z_\mu Z_\mu + \frac{1}{v \sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu \partial_\mu \phi_2 + \frac{1}{(g^2 + g'^2) v^2} \partial_\mu \phi_2 \partial_\mu \phi_2 \right) \\ = & \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{2} \left( \frac{1}{2} Z_\mu + \frac{1}{v \sqrt{g^2 + g'^2}} \partial_\mu \phi_2 \right)^2 \end{aligned}$$

si tenemos en cuenta que los campos gauge transforman invariamente como

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{ev} \partial_\mu \Theta \quad (\text{B.21})$$

podemos redefinir los campos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \widetilde{W}_\mu^1 &= \frac{1}{2} W_\mu^1 - \frac{1}{gv} \partial_\mu \phi_4 \\ \frac{1}{2} \widetilde{W}_\mu^2 &= \frac{1}{2} W_\mu^2 - \frac{1}{gv} \partial_\mu \phi_3 \\ \frac{1}{2} \widetilde{Z}_\mu &= \frac{1}{2} Z_\mu + \frac{1}{v \sqrt{g^2 + g'^2}} \partial_\mu \phi_2 \end{aligned}$$

lo realizado anteriormente nos lleva a escribir la ecuación (B.19) finalmente

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial_\mu H + \mu^2 H^2 + \frac{g^2 v^2}{2} \left( \frac{1}{2} W_\mu^1 - \frac{1}{g v} \partial_\mu \phi_4 \right)^2 + \frac{g^2 v^2}{2} \left( \frac{1}{2} W_\mu^2 - \frac{1}{g v} \partial_\mu \phi_3 \right)^2 \\
 & + \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{2} \left( \frac{1}{2} Z_\mu + \frac{1}{v \sqrt{g^2 + g'^2}} \partial_\mu \phi_2 \right)^2 \\
 = & \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial_\mu H + \mu^2 H^2 + \frac{g^2 v^2}{2} \left( \frac{1}{2} \widetilde{W}_\mu^1 \right)^2 + \frac{g^2 v^2}{2} \left( \frac{1}{2} \widetilde{W}_\mu^2 \right)^2 + \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{2} \left( \frac{1}{2} \widetilde{Z}_\mu \right)^2 \quad (\text{B.22})
 \end{aligned}$$

vemos que los campos de Goldstone  $\phi_2, \phi_3$  y  $\phi_4$  no aparecen explícitamente en la parte relacionada con la multiplicación de dos campos de la densidad lagrangiana, en cambio aparecen términos de masa tanto para los bosones gauge débiles, así como para el bosón de Higgs, con lo cual, después del rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil, los bosones de Goldstone no aparecen como partículas reales y en consecuencia, los bosones  $W^\pm$ ,  $Z^0$  y  $H$  aparecen como partículas físicas dadas por

$$\begin{aligned}
 M_W &= \frac{g v}{2} \\
 M_Z &= \frac{v}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} \\
 M_H &= \sqrt{2 \lambda} v \quad (\text{B.23})
 \end{aligned}$$

## B.4. Densidad lagrangiana de Yukawa

Antes del rompimiento espontáneo de la simetría (ARES)

Partiendo de

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \phi^+ \\ H + i \phi_2 \end{pmatrix}$$

y de la ecuación (2.41) tenemos

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_{leptones}^{ARES} \\
 = & \sum_l \left\{ g_l (\bar{\nu}_l \bar{l})_L \Phi l_R + g_l^* \bar{l}_R \Phi^\dagger \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L \right\} \\
 = & \sum_l \left\{ \frac{g_l}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_l \bar{l})_L \begin{pmatrix} \sqrt{2}\phi^+ \\ H + i\phi_2 \end{pmatrix} l_R + \frac{g_l^*}{\sqrt{2}} \bar{l}_R (\sqrt{2}\phi^- \quad H - i\phi_2) \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L \right\} \\
 = & \sum_l g_l \left\{ \bar{\nu}_l \phi^+ l_R + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l}_L (H + i\phi_2) l_R + \bar{l}_R \phi^- \nu_{lL} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l}_R (H - i\phi_2) l_L \right\} \\
 = & \sum_l g_l \left\{ \bar{\nu}_l \phi^+ R l + \frac{1}{\sqrt{2}} L \bar{l} H R l + \frac{1}{\sqrt{2}} L \bar{l} i\phi_2 R l + R \bar{l} \phi^- \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} R \bar{l} H L l - \frac{1}{\sqrt{2}} R \bar{l} i\phi_2 L l \right\} \\
 = & \sum_l g_l \left\{ \bar{\nu}_l \phi^+ R l + \bar{l} \phi^- L \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} H R R l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} i\phi_2 R R l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} H L L l - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} i\phi_2 L L l \right\} \\
 = & \sum_l g_l \left\{ \bar{\nu}_l \phi^+ R l + \bar{l} \phi^- L \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} H (R R + L L) l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} i\phi_2 (R R - L L) l \right\} \\
 = & \sum_l g_l \left\{ \bar{\nu}_l \phi^+ R l + \bar{l} \phi^- L \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} H l + \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{l} \phi_2 \gamma^5 l \right\}
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

donde tuvimos en cuenta las relaciones de los operadores de quiralidad consignadas en el anexo (A.2)

### Después del rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil (DRES)

Al implementar el rompimiento espontáneo de la simetría, mediante el cambio  $H \rightarrow H - v$  tenemos nuevamente que

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \langle \Phi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\phi^+ \\ H - v + i\phi_2 \end{pmatrix} \tag{B.26}$$

y reemplazando la ecuación anterior en la ecuación (B.25) obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_{leptones}^{DRES} \\
 = & \sum_l \left\{ \frac{g_l}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_l \bar{l})_L \begin{pmatrix} \sqrt{2}\phi^+ \\ H - v + i\phi_2 \end{pmatrix} l_R + \frac{g_l^*}{\sqrt{2}} \bar{l}_R (\sqrt{2}\phi^- \quad H - v - i\phi_2) \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L \right\} \\
 = & \sum_l g_l \left\{ \bar{\nu}_l \phi^+ R l + \bar{l} \phi^- L \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} H l + \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{l} \phi_2 \gamma^5 l - \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{l} l \right\}
 \end{aligned} \tag{B.27}$$

lo cual es equivalente a escribir

$$\mathcal{L}_{leptones}^{DRES} = \mathcal{L}_{leptones}^{ARES} - g_l \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{l} l \tag{B.28}$$

con lo cual, tenemos un término de interacción entre leptones y el bosón de Higgs y lo más importante es que surge un término de masa para estas partículas físicas dado por

$$M_{em} = g_l \frac{v}{\sqrt{2}} \tag{B.29}$$

donde  $v$  es el valor esperado del campo de Higgs en el vacío, dejando sin masa al neutrino, lo cual indica que la teoría es incompleta.



# Apéndice C

## Cálculos para aspectos básicos de la física del neutrino

### C.1. Conservación de sabor de número leptónico

De acuerdo con el modelo estándar de las interacciones electrodébiles, los leptones se encuentran agrupados en tres familias o sabores, denominados

$$\begin{pmatrix} l \\ \nu_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

y sus respectivas familias de antileptones, estas familias se caracterizan por los números leptónicos individuales  $L_l$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & L_e & L_\mu & L_\tau & & L_e & L_\mu & L_\tau \\ (\nu_e, e) & +1 & 0 & 0 & ; & (\bar{\nu}_e, e^+) & -1 & 0 & 0 \\ (\nu_\mu, \mu) & 0 & +1 & 0 & & (\bar{\nu}_\mu, \mu^+) & 0 & -1 & 0 \\ (\nu_\tau, \tau) & 0 & 0 & +1 & & (\bar{\nu}_\tau, \tau^+) & 0 & 0 & -1 \end{array} \quad (\text{C.2})$$

los números leptónicos  $L_l$  en el modelo estándar son conservados y asimismo lo es el número leptónico total

$$L_T = L_e + L_\mu + L_\tau \quad (\text{C.3})$$

La conservación del número de sabor leptónico está relacionada, por medio del teorema de Noether a la invariancia del lagrangiano bajo transformaciones gauge globales  $U(1)$ . Sin embargo, la no conservación de los números leptónicos  $L_T$ ,  $L_e$ ,  $L_\mu$  y  $L_\tau$  juegan un rol importante en la física de neutrinos más allá del modelo estándar, dado que una de las condiciones necesarias para que exista el fenómeno oscilaciones de neutrinos es que los números leptónicos individuales  $L_\alpha$  no sean estrictamente conservados.

### C.2. El caso de dos sabores

Dado que el problema de oscilación de dos sabores, lo podemos considerar como un problema de dos niveles, es posible escribir los operadores en términos de las matrices de Pauli  $\sigma_i$ , definiendo un vector

$$|\nu_l\rangle = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}_l, \text{ donde } |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 = 1 \quad (\text{C.4})$$

donde el subíndice  $l$  indica que el vector está escrito en la base de los dos autoestados de sabor, adicionalmente podemos relacionar la base en el espacio de vectores con una base en el espacio de kets, como

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_l \equiv |\nu_e\rangle \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_l \equiv |\nu_\alpha\rangle$$

de la misma forma podemos escribir los vectores en la base de autoestados de masa

$$|\nu_k\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_k, \quad \text{donde } |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1$$

y relacionando la base en el espacio de vectores con una base en el espacio de kets, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_k \equiv |\nu_1\rangle \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_k \equiv |\nu_2\rangle$$

con esta notación y reescribiendo (C.4), tenemos:

$$|\nu_l\rangle = U |\nu_k\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} |\nu_k\rangle$$

donde la matriz de mezcla  $U$  está definida en función del ángulo de mezcla en el vacío, el cual se encuentra entre  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  y donde no tenemos ninguna fase de violación **CP**.

Partiendo de la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} |\nu_k\rangle = \mathcal{H} |\nu_k\rangle$$

reemplazando el término de los autoestados de sabor

$$|\nu_k\rangle = U^\dagger |\nu_l\rangle$$

y partiendo de la hipótesis de que el ángulo de mezcla es constante en el vacío, tenemos

$$iU^\dagger \frac{d}{dt} |\nu_l\rangle = \mathcal{H}U^\dagger |\nu_l\rangle$$

multiplicando por la izquierda por  $U$  y usando las propiedades de ortogonalidad, tenemos

$$i \frac{d}{dt} |\nu_l\rangle = U\mathcal{H}U^\dagger |\nu_l\rangle$$

si definimos  $\mathcal{H}_l = U\mathcal{H}U^\dagger$  y desarrollamos los productos matriciales

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_l &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_1 \cos^2 \theta + E_2 \sin^2 \theta & (E_2 - E_1) \cos \theta \sin \theta \\ (E_2 - E_1) \cos \theta \sin \theta & E_1 \sin^2 \theta + E_2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

podemos escribir  $\mathcal{H}_l$  como una combinación de matrices de Pauli

$$\mathcal{H}_l = \frac{(E_2 + E_1)}{2} \sigma_0 + \frac{(E_2 - E_1)}{2} (\sigma_1 \sin 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta) \quad (\text{C.5})$$

es directo ver que  $\mathcal{H}_l$  no es una matriz diagonal, lo que implica que existe la posibilidad de transiciones entre los estados  $\nu_1$  y  $\nu_2$ .

En consecuencia, la solución de la ecuación de Schrödinger será:

$$\nu_l(t) = e^{-i\mathcal{H}_l t} \nu_l = e^{-i\mathcal{H}_l t} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}_l$$

donde  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son constantes que dependen de las condiciones iniciales, las cuales pueden ser interpretadas conociendo la proporción inicial de neutrinos  $\nu_e$  con relación a los  $\nu_l$ .

Remplazando la ecuación (C.5) en la solución de la ecuación de Schrödinger y usando que

$$e^{-i\alpha(\sigma_1 \sin \beta - \sigma_3 \cos \beta)} = \sigma_0 \cos \alpha - i(\sigma_1 \sin \beta - \sigma_3 \cos \beta) \sin \alpha$$

tenemos

$$\begin{aligned} \nu_l(t) &= e^{-i\mathcal{H}_l t} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}_l \\ &= e^{-i \left[ \frac{(E_2+E_1)}{2} \sigma_0 + \frac{(E_2-E_1)}{2} (\sigma_1 \sin 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta) \right] t} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}_l \\ &= e^{-i \frac{(E_2+E_1)}{2} \sigma_0 t} e^{-i \left( \frac{E_2-E_1}{2} t \right) (\sigma_1 \sin 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta)} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}_l \\ &= e^{-i \left( \frac{E_2+E_1}{2} t \right) \sigma_0} \left[ \sigma_0 \cos \left( \frac{E_2-E_1}{2} t \right) - i(\sigma_1 \sin 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta) \sin \left( \frac{E_2-E_1}{2} t \right) \right] \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}_l \end{aligned}$$

podemos denotar  $\Delta E = E_2 - E_1$ .

Si utilizamos la condición inicial  $\nu_l(0) = |\nu_e\rangle$ , lo que es equivalente a escribir  $\varphi_1 = 1$  y  $\varphi_2 = 0$ , tenemos  $|\nu_e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_l$ , remplazando esto en la solución anterior y realizando los productos  $\sigma_0, \sigma_1$  y  $\sigma_3$ , con el estado inicial

$$\begin{aligned} \sigma_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_l &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_s = |\nu_e\rangle \\ \sigma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_l &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_l = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_l = |\nu_l\rangle \\ \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_l &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_l = |\nu_e\rangle \end{aligned}$$

obtenemos la solución particular

$$|\nu_e(t)\rangle = e^{-i \left( \frac{E_2+E_1}{2} t \right) \sigma_0} \left\{ \left[ \cos \left( \frac{\Delta E}{2} t \right) + i \cos 2\theta \sin \left( \frac{\Delta E}{2} t \right) \right] |\nu_e\rangle - i \sin 2\theta \sin \left( \frac{\Delta E}{2} t \right) |\nu_l\rangle \right\} \quad (C.6)$$

### C.3. Término de Masa de Dirac

A partir de la ecuación (3.28) tenemos

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_{leptones+\nu}^{ARES} \\
 = & \sum_l \left\{ g_l (\bar{\nu}_l \bar{l})_L \Phi l_R + g_l^* \bar{l}_R \Phi^\dagger \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L + g'_l (\bar{\nu}_l \bar{l})_L \Phi_C \nu_{lR} + g_l'^* \bar{\nu}_{lR} \Phi_C^\dagger \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L \right\} \\
 = & \sum_l \left\{ \begin{aligned} & \frac{g_l}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_l \bar{l})_L \begin{pmatrix} \sqrt{2}\phi^+ \\ H + i\phi_2 \end{pmatrix} l_R + \frac{g_l^*}{\sqrt{2}} \bar{l}_R (\sqrt{2}\phi^- \ H - i\phi_2) \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L \\ & + \frac{g'_l}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_l \bar{l})_L \begin{pmatrix} H - i\phi_2 \\ -\sqrt{2}\phi^- \end{pmatrix} \nu_{lR} + g_l'^* \bar{\nu}_{lR} (H + i\phi_2 \ -\sqrt{2}\phi^+) \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L \end{aligned} \right\} \\
 = & \sum_l g_l \left\{ \bar{\nu}_{lL} \phi^+ l_R + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l}_L (H + i\phi_2) l_R + \bar{l}_R \phi^- \nu_{lL} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l}_R (H - i\phi_2) l_L \right\} \\
 & + \sum_l g_l' \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{lL} (H - i\phi_2) \nu_{lR} - \bar{l}_L \phi^- \nu_{lR} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{lR} (H + i\phi_2) \nu_{lL} - \bar{\nu}_{lR} \phi^+ l_L \right\} \\
 = & \sum_l g_l \left\{ L \bar{\nu}_l \phi^+ R l + \frac{1}{\sqrt{2}} L \bar{l} H R l + \frac{1}{\sqrt{2}} L \bar{l} i\phi_2 R l + R \bar{l} \phi^- L \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} R \bar{l} H L l - \frac{1}{\sqrt{2}} R \bar{l} i\phi_2 L l \right\} \\
 & + \sum_l g_l' \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} L \bar{\nu}_l H R \nu_l - \frac{1}{\sqrt{2}} L \bar{\nu}_l i\phi_2 R \nu_l - L \bar{l} \phi^- R \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} R \bar{\nu}_l H L \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} R \bar{\nu}_l i\phi_2 L \nu_l - R \bar{\nu}_l \phi^+ L l \right\} \\
 = & \sum_l g_l \left\{ \bar{\nu}_l \phi^+ R R l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} H R R l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} i\phi_2 R R l + \bar{l} \phi^- L L \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} H L L l - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} i\phi_2 L L l \right\} \\
 & + \sum_l g_l' \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_l H R R \nu_l - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_l i\phi_2 R R \nu_l - \bar{l} \phi^- R R \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_l H L L \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_l i\phi_2 L L \nu_l - \bar{\nu}_l \phi^+ L L l \right\} \\
 = & \sum_l g_l \left\{ \bar{\nu}_l \phi^+ R R l + \bar{l} \phi^- L L \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} i\phi_2 (R R - L L) l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} H (R R + L L) l \right\} \\
 & + \sum_l g_l' \left\{ -\bar{\nu}_l \phi^+ L L l - \bar{l} \phi^- R R \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_l i\phi_2 (L L - R R) \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_l H (L L + R R) \nu_l \right\} \\
 = & \sum_l g_l \left\{ \bar{\nu}_l \phi^+ R l + \bar{l} \phi^- L \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} i\phi_2 \gamma^5 l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} H l \right\} \\
 & + \sum_l g_l' \left\{ -\bar{\nu}_l \phi^+ L l - \bar{l} \phi^- R \nu_l - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_l i\phi_2 \gamma^5 \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_l H \nu_l \right\}
 \end{aligned}$$

donde tuvimos en cuenta las propiedades descritas en el anexo (A.2).

Al implementar el rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil (DRES) mediante el cambio

$H \rightarrow H - v$  obtenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{leptones+\nu}^{DRES} &= \sum_l g_l \left\{ \bar{\nu}_l \phi^+ R l + \bar{l} \phi^- L \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} i \phi_2 \gamma^5 l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} H l \right\} \\
 &+ \sum_l g'_l \left\{ -\bar{\nu}_l \phi^+ L l - \bar{l} \phi^- R \nu_l - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_l i \phi_2 \gamma^5 \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_l H \nu_l \right\} \\
 &= \sum_l g_l \left\{ \bar{\nu}_l \phi^+ R l + \bar{l} \phi^- L \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} i \phi_2 \gamma^5 l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{l} (H - v) l \right\} \\
 &+ \sum_l g'_l \left\{ -\bar{\nu}_l \phi^+ L l - \bar{l} \phi^- R \nu_l - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_l i \phi_2 \gamma^5 \nu_l + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_l (H - v) \nu_l \right\} \\
 &= \mathcal{L}_{leptones+\nu}^{ARES} - \frac{v}{\sqrt{2}} \sum_l \{ g_l \bar{l} l + g'_l \bar{\nu}_l \nu_l \}
 \end{aligned}$$

## C.4. Término de masa de Majorana

Bajo una transformación de Lorentz<sup>1</sup> que cambia de coordenadas

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + w_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (\text{C.7})$$

el espinor del campo cambia bajo la regla

$$\psi'(x') = e^{(-\frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} w^{\mu\nu})} \psi(x) \quad (\text{C.8})$$

donde

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}] \quad (\text{C.9})$$

si aplicamos la condición  $\psi(x) = \psi^*(x)$  la ecuación (C.8) nos queda como

$$\psi'^*(x') = e^{(\frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu}^* w^{\mu\nu})} \psi^*(x) \quad (\text{C.10})$$

la cual en general no tiene la misma regla de transformación que la ecuación (C.8), dado que las componentes de la matriz  $\sigma_{\mu\nu}$  no son imaginarias puras, Por consiguiente, aun cuando imponemos la relación  $\psi(x) = \psi^*(x)$  en un marco de referencia, este puede no ser válido en otro marco de referencia y por lo tanto perder su validez de condición física.

De otro lado, si tenemos en cuenta la condición de Majorana  $\psi(x) = \gamma_0 \mathbf{C} \psi^*(x)$  entonces

$$\begin{aligned}
 \psi'(x') &= \gamma_0 \mathbf{C} \psi'^*(x') \\
 &= \gamma_0 \mathbf{C} e^{(\frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu}^* w^{\mu\nu})} \psi^*(x)
 \end{aligned}$$

donde reemplazamos el resultado de la ecuación (C.10), igualmente el lado derecho lo podemos escribir de términos de la ecuación (C.8) como

$$\psi'(x') = e^{(-\frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} w^{\mu\nu})} \psi(x)$$

<sup>1</sup>Esta es llamada transformación de Lorentz inhomogénea, la cual constituye el grupo de Poincare de diez parámetros: Tres ángulos de rotación + tres componentes de la velocidad relativa + cuatro desplazamientos. El grupo de Poincare es el grupo de simetrías fundamentales de la física y representa la expresión matemática del principio de relatividad.

igualando las ecuaciones anteriores

$$e^{(-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}w^{\mu\nu})}\psi(x) = \gamma_0 C e^{(\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}^*w^{\mu\nu})}\psi^*(x)$$

al remplazar la ecuación (C.8) en la ecuación anterior, se cumple que

$$e^{(-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}w^{\mu\nu})} = e^{(-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}w^{\mu\nu})}\gamma_0 C$$

$$\begin{aligned}\psi'(x') &= \gamma_0 C \psi^*(x') \\ &= \gamma_0 C e^{(\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}^*w^{\mu\nu})}\psi^*(x)\end{aligned}\tag{C.11}$$

con lo cual, las ecuaciones inmediatamente anteriores, requieren que la matriz  $C$  cumpla la relación

$$\gamma_0 C e^{(\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}^*w^{\mu\nu})} = e^{(-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}w^{\mu\nu})}\gamma_0 C\tag{C.12}$$

para cualquier valor de  $w^{\mu\nu}$ , lo que implica

$$\gamma_0 C \sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\mu\nu} \gamma_0 C\tag{C.13}$$

En consecuencia, podemos definir un campo conjugado

$$\hat{\psi}(x) = \gamma_0 C \psi^*(x)\tag{C.14}$$

en términos de una matriz  $C$  cuyos términos aún no hemos definido, de tal forma que  $\hat{\psi}(x)$  transforma de la misma forma bajo transformaciones de Lorentz que  $\psi(x)$

$$\begin{aligned}\hat{\psi}'(x') &= e^{(-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}w^{\mu\nu})}\hat{\psi}(x) \\ &= e^{(-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}w^{\mu\nu})}\gamma_0 C \psi^*(x)\end{aligned}\tag{C.15}$$

sin embargo, utilizando la relación (??) directamente en (C.14), obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{\psi}'(x') &= \gamma_0 C \psi^*(x') \\ &= \gamma_0 C e^{(\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}^*w^{\mu\nu})}\psi^*(x)\end{aligned}\tag{C.16}$$

con lo cual, las ecuaciones inmediatamente anteriores, requieren que la matriz  $C$  cumpla la relación

$$\gamma_0 C e^{(\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}^*w^{\mu\nu})} = e^{(-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}w^{\mu\nu})}\gamma_0 C\tag{C.17}$$

para cualquier valor de  $w^{\mu\nu}$ , lo que implica

$$\gamma_0 C \sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\mu\nu} \gamma_0 C\tag{C.18}$$

## C.5. Término de masa de Majorana-Dirac

De la definición de la ecuación (3.39)

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_L + (\psi_L)^c) \\ F &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_R + (\psi_R)^c) \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

debemos de analizar las posibles combinaciones de las definiciones anteriores y teniendo en cuenta las relaciones del anexo(A.3.1) y la ecuación (A.24) tenemos

$$\begin{aligned} f\bar{f} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_L + (\bar{\psi}_L)^c) \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_L + (\psi_L)^c) = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_L\psi_L + (\bar{\psi}_L)^c\psi_L + \bar{\psi}_L(\psi_L)^c + (\bar{\psi}_L)^c(\psi_L)^c) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{\psi}_L\psi_L + (\bar{\psi}_L)^c\psi_L + \bar{\psi}_L(\psi_L)^c + \bar{\psi}_R\psi_R) = \frac{1}{2} ((\bar{\psi}_L)^c\psi_L + \bar{\psi}_L(\psi_L)^c) \\ \bar{f}F &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_L + (\bar{\psi}_L)^c) \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_R + (\psi_R)^c) = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_L\psi_R + (\bar{\psi}_L)^c\psi_R + \bar{\psi}_L(\psi_R)^c + (\bar{\psi}_L)^c(\psi_R)^c) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{\psi}_L\psi_R + (\bar{\psi}_L)^c\psi_R + \bar{\psi}_L(\psi_R)^c + \bar{\psi}_R\psi_L) = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L) \\ \bar{F}f &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_R + (\bar{\psi}_R)^c) \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_L + (\psi_L)^c) = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_R\psi_L + (\bar{\psi}_R)^c\psi_L + \bar{\psi}_R(\psi_L)^c + (\bar{\psi}_R)^c(\psi_L)^c) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{\psi}_R\psi_L + (\bar{\psi}_R)^c\psi_L + \bar{\psi}_R(\psi_L)^c + \bar{\psi}_L\psi_R) = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R) \\ \bar{F}F &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_R + (\bar{\psi}_R)^c) \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_R + (\psi_R)^c) = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_R\psi_R + (\bar{\psi}_R)^c\psi_R + \bar{\psi}_R(\psi_R)^c + (\bar{\psi}_R)^c(\psi_R)^c) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{\psi}_R\psi_R + (\bar{\psi}_R)^c\psi_R + \bar{\psi}_R(\psi_R)^c + \bar{\psi}_L\psi_L) = \frac{1}{2} ((\bar{\psi}_R)^c\psi_R + \bar{\psi}_R(\psi_R)^c) \end{aligned}$$

de otro lado

$$\begin{aligned} \bar{f}\gamma_\mu\partial_\mu f + \bar{F}\gamma_\mu\partial_\mu F &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_L + (\bar{\psi}_L)^c) \gamma_\mu\partial_\mu \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_L + (\psi_L)^c) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_R + (\bar{\psi}_R)^c) \gamma_\mu\partial_\mu \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_R + (\psi_R)^c) \\ &= \frac{1}{2} ((\bar{\psi}_L)^c \gamma_\mu\partial_\mu\psi_L + \bar{\psi}_L\gamma_\mu\partial_\mu(\psi_L)^c) + \frac{1}{2} ((\bar{\psi}_R)^c \gamma_\mu\partial_\mu\psi_R + \bar{\psi}_R\gamma_\mu\partial_\mu(\psi_R)^c) \end{aligned}$$

Para calcular los valores propios de la matriz

$$M^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(m_L - m_R) & m_D \\ m_D & \frac{1}{2}(m_R - m_L) \end{pmatrix}$$

tenemos que los valores propios son las raíces del polinomio característico, esto es  $f(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - M^0)$

$$\begin{aligned} \det(\lambda\mathbf{I} - M^0) &= \det\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(m_L - m_R) & m_D \\ m_D & \frac{1}{2}(m_R - m_L) \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} \lambda - \frac{1}{2}(m_L - m_R) & -m_D \\ -m_D & \lambda - \frac{1}{2}(m_R - m_L) \end{pmatrix} \\ &= \left(\lambda - \frac{1}{2}(m_L - m_R)\right) \left(\lambda - \frac{1}{2}(m_R - m_L)\right) - m_D^2 \\ &= \lambda^2 + \frac{1}{4}(2m_L m_R - m_R^2 - m_L^2) - m_D^2 \end{aligned}$$

por lo tanto las raíces serán

$$m_{1,2}^0 = \frac{\pm \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2}}{2}$$

Si tenemos en cuenta

$$\begin{aligned} & Om^0 O^T \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sqrt{4m_D^2 + (m_L - m_R)^2} & -\cos \theta \sin \theta \sqrt{4m_D^2 + (m_L - m_R)^2} \\ -(\cos \theta \sin \theta) \sqrt{4m_D^2 + (m_L - m_R)^2} & \frac{1}{2} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \sqrt{4m_D^2 + (m_L - m_R)^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos 2\theta \sqrt{4m_D^2 + (m_L - m_R)^2} & -\frac{1}{2} \sin 2\theta \sqrt{4m_D^2 + (m_L - m_R)^2} \\ -\frac{1}{2} \sin 2\theta \sqrt{4m_D^2 + (m_L - m_R)^2} & -\frac{1}{2} \cos 2\theta \sqrt{4m_D^2 + (m_L - m_R)^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dado que  $Om^0 O^T = M^0$  entonces

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos 2\theta \sqrt{4m_D^2 + (m_L - m_R)^2} & -\frac{1}{2} \sin 2\theta \sqrt{4m_D^2 + (m_L - m_R)^2} \\ -\frac{1}{2} \sin 2\theta \sqrt{4m_D^2 + (m_L - m_R)^2} & -\frac{1}{2} \cos 2\theta \sqrt{4m_D^2 + (m_L - m_R)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (m_L - m_R) & m_D \\ m_D & -\frac{1}{2} (m_L - m_R) \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \frac{m_L - m_R}{\sqrt{4m_D^2 + (m_L - m_R)^2}} \\ \sin 2\theta &= \frac{2m_D}{\sqrt{4m_D^2 + (m_L - m_R)^2}} \end{aligned}$$

Mientras que

$$M = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}$$

tenemos que los valores propios son las raíces del polinomio característico, esto es  $f(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - M)$

$$\begin{aligned} \det(\lambda \mathbf{I} - M^0) &= \det \left( \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda - m_L & -m_D \\ -m_D & \lambda - m_R \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - m_L)(\lambda - m_R) - m_D^2 \\ &= \lambda^2 - \lambda(m_L + m_R) + m_L m_R - m_D^2 \end{aligned}$$

por lo tanto las raíces serán

$$\begin{aligned} m'_{1,2} &= \frac{(m_L + m_R) \pm \sqrt{(m_L + m_R)^2 + 4(m_D^2 - m_L m_R)}}{2} \\ &= \frac{(m_L + m_R) \pm \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2}}{2} \end{aligned} \tag{C.20}$$



## C.6. Mecanismo seesaw

### C.6.1. Caso de dos generaciones

Partiendo de la relación del ángulo de mezcla (ecuación 3.43), dado que  $m_L = 0$  y suponiendo que  $m_R \gg m_D$  tenemos

$$\sin 2\theta = \frac{2m_D}{\sqrt{4m_D^2 + (m_L - m_R)^2}} \approx \frac{2m_D}{\sqrt{4m_D^2 + m_R^2}} \approx 2\frac{m_D}{m_R}$$

teniendo en cuenta que podemos expandir  $\sin 2\theta$  como  $\sin 2\theta = 2\theta - \frac{4}{3}\theta^3 + \frac{4}{15}\theta^5 + O(\theta^6)$  entonces

$$\sin 2\theta = \frac{2m_D}{\sqrt{4m_D^2 + (m_L - m_R)^2}} \approx 2\frac{m_D}{m_R} - \frac{4}{3}\left(\frac{m_D}{m_R}\right)^3 + \frac{4}{15}\left(\frac{m_D}{m_R}\right)^5 + O(\theta^6)$$

por lo tanto

$$\theta = \frac{m_D}{m_R} \simeq \frac{m_f}{\mathcal{M}}$$

mientras que los valores propios de la matriz  $M$  bajo la suposición  $m_L = 0$  y suponiendo que  $m_R \gg m_D$  serán

$$\begin{aligned} m'_{1,2} &= \frac{(m_L + m_R) \pm \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2}}{2} \\ &= \frac{m_R \pm \sqrt{m_R^2 + 4m_D^2}}{2} \\ &= \frac{m_R \pm m_R \sqrt{1 + \frac{4m_D^2}{m_R^2}}}{2} \end{aligned}$$

si realizamos una expansión en series de Taylor  $(1+x)^k = 1 + kx + k(k-1)\frac{x^2}{2} + \dots$  entonces

$$m'_{1,2} = \frac{m_R \pm m_R \sqrt{1 + \frac{4m_D^2}{m_R^2}}}{2} \approx \frac{m_R}{2} \pm \frac{m_R}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{4m_D^2}{m_R^2}\right) = \frac{m_R}{2} \pm \left(\frac{m_R}{2} + \frac{m_D^2}{m_R}\right)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{m_R}{2} + \left(\frac{m_R}{2} + \frac{m_D^2}{m_R}\right) = m_R + \frac{m_D^2}{m_R} \\ m_2 &= \frac{m_R}{2} - \left(\frac{m_R}{2} + \frac{m_D^2}{m_R}\right) = \frac{m_D^2}{m_R} \end{aligned}$$

y dado que  $m_D \approx m_f$  y  $m_R \approx \mathcal{M} \gg m_f$

$$\begin{aligned} m_1 &= \mathcal{M} + \frac{m_f^2}{\mathcal{M}} \approx \mathcal{M} \\ m_2 &= \frac{m_f^2}{\mathcal{M}} \ll m_f \end{aligned}$$

### C.6.2. Caso más general

Tenemos que la ecuación

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - BB^\dagger} & B \\ -B^\dagger & \sqrt{1 - B^\dagger B} \end{pmatrix} \quad (\text{C.21})$$

debe ser una matriz unitaria por construcción, por ejemplo para el caso  $2 \times 2$  esta matriz tendrá la forma

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} & \sin \theta \\ -\sin \theta & \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

dado que en un escenario sewsaw los ángulos de rotación son pequeños, podemos hacer una expansión en series de potencias como

$$\sqrt{1 - BB^\dagger} \approx 1 - \frac{1}{2}BB^\dagger - \frac{1}{8}BB^\dagger BB^\dagger - \frac{1}{16}BB^\dagger BB^\dagger BB^\dagger - \dots$$

La diagonalización de la matriz de masa de términos de Dirac-Majorana la podemos expandir como

$$\begin{aligned} & U^T \begin{pmatrix} 0 & (m_D)^T \\ m_D & m_R \end{pmatrix} U \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{1 - B^* B^\dagger} & B^* \\ -B^\dagger & \sqrt{1 - B^\dagger B^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (m_D)^T \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1 - BB^\dagger} & B \\ -B^\dagger & \sqrt{1 - B^\dagger B} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{1 - B^* B^\dagger} & B^* \\ -B^\dagger & \sqrt{1 - B^\dagger B^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m_D^T B^\dagger & m_D^T \sqrt{1 - BB^\dagger} \\ m_D \sqrt{1 - BB^\dagger} - m_R B^\dagger & m_D B + m_R \sqrt{1 - BB^\dagger} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^* (m_D \sqrt{1 - BB^\dagger} - m_R B^\dagger) - m_D^T B^\dagger \sqrt{1 - B^\dagger B^*} & m_D^T \sqrt{1 - BB^\dagger} \sqrt{1 - B^* B^\dagger} + B^* (m_D B + m_R \sqrt{1 - BB^\dagger}) \\ B^\dagger (m_D^T B^\dagger) + \sqrt{1 - B^\dagger B^*} (m_D \sqrt{1 - BB^\dagger} - m_R B) & \sqrt{1 - B^\dagger B^*} (m_D B + m_R \sqrt{1 - BB^\dagger}) - B^\dagger m_D^T \sqrt{1 - BB^\dagger} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_{\text{ligeros}} & 0 \\ 0 & M_{\text{pesados}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} M_{\text{ligeros}} &= B^* (m_D \sqrt{1 - BB^\dagger} - m_R B^\dagger) - m_D^T B^\dagger \sqrt{1 - B^\dagger B^*} \\ M_{\text{pesados}} &= \sqrt{1 - B^\dagger B^*} (m_D B + m_R \sqrt{1 - BB^\dagger}) - B^\dagger m_D^T \sqrt{1 - BB^\dagger} \\ 0 &= m_D^T \sqrt{1 - BB^\dagger} \sqrt{1 - B^* B^\dagger} + B^* (m_D B + m_R \sqrt{1 - BB^\dagger}) \\ 0 &= B^\dagger (m_D^T B^\dagger) + \sqrt{1 - B^\dagger B^*} (m_D \sqrt{1 - BB^\dagger} - m_R B) \end{aligned}$$

las ecuaciones anteriores pueden ser solucionadas asumiendo que  $B$  lo podemos escribir como una serie de potencias

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \quad \text{donde} \quad B_k = \frac{1}{B_R^k}$$

por lo tanto

$$\sqrt{1 - BB^\dagger} = \sqrt{1 - \sum_{k,k'}^{\infty} B_k B_{k'}^\dagger} \approx 1 - \frac{1}{2} B_1 B_1^\dagger - \frac{1}{2} (B_1 B_2^\dagger + B_2 B_1^\dagger) - \frac{1}{2} (B_1 B_3^\dagger + B_2 B_2^\dagger + B_3 B_1^\dagger) - \dots$$

teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
 0 &= m_D^T \sqrt{1 - BB^\dagger} \sqrt{1 - B^* B^\dagger} + B^* \left( m_D B + m_R \sqrt{1 - BB^\dagger} \right) \\
 0 &= m_D^T \sqrt{1 - BB^\dagger} \sqrt{1 - B^* B^\dagger} + B^* m_D B + B^* m_R \sqrt{1 - BB^\dagger} \\
 0 &= m_D^T \left( 1 - \frac{1}{2} B_1 B_1^\dagger \right) \left( 1 - \frac{1}{2} B_1^* B_1^\dagger \right) + B_1^* m_D B_1 + B_1^* m_R \left( 1 - \frac{1}{2} B_1 B_1^\dagger \right) \\
 0 &= m_D^T - \frac{1}{2} m_D^T B_1 B_1^\dagger - \frac{1}{2} m_D^T B_1^* B_1^\dagger + \frac{1}{4} m_D^T B_1 B_1^\dagger B_1^* B_1^\dagger + B_1^* m_D B_1 + B_1^* m_R - \frac{1}{2} B_1^* m_R B_1 B_1^\dagger \\
 0 &= m_D^T - B_1^* m_R
 \end{aligned}$$

si solo tenemos en cuenta las contribuciones a primer orden, tenemos

$$B_1 = m_D^\dagger m_R^{-1\dagger} \quad (\text{C.22})$$

por lo tanto, el término ligero lo podemos reescribir en una aproximación a primer orden como

$$\begin{aligned}
 M_{\text{ligeros}} &= B_1^* \left( m_D \sqrt{1 - B_1 B_1^\dagger} - m_R B_1^\dagger \right) - m_D^T B_1^\dagger \sqrt{1 - B_1^\dagger B_1^*} \\
 &= B_1^* m_D \left( 1 - \frac{1}{2} B_1 B_1^\dagger \right) - B_1^* m_R B_1^\dagger - m_D^T B_1^\dagger \left( 1 - \frac{1}{2} B_1^* B_1^\dagger \right) \\
 &= B_1^* m_D - \frac{1}{2} B_1^* m_D B_1 B_1^\dagger - B_1^* m_R B_1^\dagger - m_D^T B_1^\dagger + m_D^T B_1^\dagger \frac{1}{2} B_1^* B_1^\dagger \\
 &= B_1^* m_D - m_D^T B_1^\dagger
 \end{aligned}$$

reemplazando la ecuación (C.22) en la ecuación anterior tenemos

$$M_{\text{ligeros}} = B_1^* m_D - m_D^T B_1^\dagger = \left( m_D^\dagger m_R^{-1\dagger} \right)^* m_D - m_D^T \left( m_D^\dagger m_R^{-1\dagger} \right)^\dagger \dots$$

mientras que para el término pesado

$$\begin{aligned}
 M_{\text{pesados}} &= \sqrt{1 - B_1^\dagger B_1^*} \left( m_D B_1 + m_R \sqrt{1 - B_1 B_1^\dagger} \right) - B_1^\dagger m_D^T \sqrt{1 - B_1 B_1^\dagger} \\
 &= \left( 1 - \frac{1}{2} B_1^* B_1^\dagger \right) \left( m_D B_1 + m_R \left( 1 - \frac{1}{2} B_1 B_1^\dagger \right) \right) - B_1^\dagger m_D^T \left( 1 - \frac{1}{2} B_1 B_1^\dagger \right) \\
 &= m_D B_1 + m_R - \frac{1}{2} m_R B_1 B_1^\dagger - \frac{1}{2} B_1^* B_1^\dagger m_D B_1 - \frac{1}{2} B_1^* B_1^\dagger m_R \left( 1 - \frac{1}{2} B_1 B_1^\dagger \right) - B_1^\dagger m_D^T + \frac{1}{2} B_1^\dagger m_D^T B_1 B_1^\dagger \\
 &= m_D B_1 + m_R - B_1^\dagger m_D^T
 \end{aligned}$$

reemplazando la ecuación (C.22) en la ecuación anterior tenemos

$$M_{\text{pesados}} = m_D B_1 + m_R - B_1^\dagger m_D^T = m_D \left( m_D^\dagger m_R^{-1\dagger} \right) + m_R - \left( m_D^\dagger m_R^{-1\dagger} \right)^\dagger m_D^T$$

# Apéndice D

## Reglas de Feynman

### D.1. Reglas para la construcción de los diagramas

Los diagramas de Feynman constituyen un método gráfico para obtener de manera sencilla los elementos de matriz correspondientes a un determinado proceso en cualquier orden  $n$ , para lo cual, es necesario establecer un sentido del tiempo, después de lo cual se debe tener en cuenta:

1. Se construyen todos los diagramas topológicamente distintos que conecten el estado inicial y el estado final en el orden del desarrollo perturbativo, donde  $n$  es el número de vértices del diagrama<sup>1,2</sup>.
2. Se le asigna a cada vértice un índice griego:  $\mu, \nu, \kappa, \dots$
3. Se dibujan flechas en las líneas fermiónicas en el sentido del tiempo, si se trata de fermiones o en el sentido contrario si se trata de antifermiones.
4. Se le asigna  $u(p, s)$  a cada partícula entrante y  $\bar{v}(p, s)$  para su antipartícula entrante, mientras que si sale una partícula sera  $\bar{u}(p, s)$  y  $v(p, s)$  para su antipartícula saliente.
5. Se le asigna a cada línea un momento, las líneas externas tendrán asociados momentos determinados por los estados inicial y final, mientras que a las líneas internas se les asigna un valor arbitrario, donde el signo del momento por convención se toma positivo si el sentido de la flecha de la línea es el mismo que el sentido del tiempo para el proceso, de lo contrario se le asigna un valor negativo.
6. Comenzando por la línea fermiónica, se escriben, en sentido contrario a la flecha, los elementos correspondientes a las líneas externas, vértices y líneas internas y se multiplica este término por lo obtenido de forma análoga en las demás líneas fermiónicas.
7. La expresión final del elemento de matriz asociado al diagrama se obtiene integrando respecto a los cuadrimentos de las partículas virtuales, es decir a los asociados a las líneas internas

---

<sup>1</sup>Dos diagramas son topológicamente equivalentes si existe una correspondencia entre sus vértices, de manera que a ellos confluyan líneas con los mismos valores de los momentos.

<sup>2</sup>Dos diagramas no equivalentes que difieren en una permutación de líneas fermiónicas externas tiene un signo relativo de  $(-1)^P$ , donde  $P$  es el número de permutaciones, sin embargo, no hay cambio de signo si se permutan dos líneas fotónicas.

## D.2. Líneas externas

Si denotamos  $p$  como el momento de la partícula,  $r$  el índice de espín para fermiones y  $\alpha$  es el índice de espín para bosones de espín uno

Fermión entrante $f(p, r)$	$u_f^{(r)}(p)$
Fermión saliente $f(p, r)$	$\overline{u_f^{(r)}}(p)$
Antifermión entrante $\bar{f}(p, r)$	$v_f^{(r)}(p)$
Antifermión saliente $\bar{f}(p, r)$	$\overline{v_f^{(r)}}(p)$
Fotón entrante $A(p, \alpha)$	$\varepsilon^{(\alpha)}(p)$
Fotón saliente $A(p, \alpha)$	$\varepsilon^{(\alpha)*}(p)$
$Z(p, \alpha)$ entrante	$\varepsilon^{(\alpha)}(p)$
$Z(p, \alpha)$ saliente	$\varepsilon^{(\alpha)*}(p)$
$W^+(p, \alpha)$ entrante	$\varepsilon^{(\alpha)}(p)$
$W^+(p, \alpha)$ saliente	$\varepsilon^{(\alpha)*}(p)$
$W^-(p, \alpha)$ entrante	$\varepsilon^{(\alpha)*}(p)$
$W^-(p, \alpha)$ saliente	$\varepsilon^{(\alpha)}(p)$
$H(p)$ Higgs entrante o saliente (SM)	1

Cuadro D.1: Líneas externas

## D.3. Propagadores - líneas internas

Algunos de los propagadores que se han de utilizar son las siguientes:

Propagador fermionico	$S^{(f)}(p) = \frac{i(\not{p} + m_f)}{p^2 - m_f^2 + i\epsilon}$
Propagador de fotón	$S_{\mu\nu}^{(A)}(p) = -\frac{ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$
Propagador del $W$	$S_{\mu\nu}^{(W)}(p) = i\frac{-g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M_W^2}}{p^2 - M_W^2 + i\epsilon}$
Propagador del $Z$	$S_{\mu\nu}^{(Z)}(p) = i\frac{-g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M_Z^2}}{p^2 - M_Z^2 + i\epsilon}$
Propagador del $Higgs$	$S_{\mu\nu}^{(H)}(p) = \frac{i}{p^2 - m_H^2 + i\epsilon}$

Cuadro D.2: Líneas internas o propagadores

## D.4. Vértices

Otro punto importante en la construcción de los diagramas de Feynman, es el relacionado con los vértices, para los cuales tenemos las siguientes reglas:

EM	$f - f - A_\mu$	$-ieQ_f\gamma_\mu$
NC	$f - f - Z_\mu$	$-\frac{ig}{2\cos\theta_W}\gamma_\mu\left(g_V^f - g_A^f\gamma_5\right)$
CC	$l_\alpha^- - \nu_\alpha - W_\mu$	$-i\frac{g}{2\sqrt{2}}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)$
$W\gamma$	$W_\mu^+(p_1) - W_\nu^-(p_2) - A_\lambda(p_3)$	$ie\left[(p_1 - p_2)_\lambda g_{\mu\nu} + (p_2 - p_3)_\mu g_{\nu\lambda} + (p_3 - p_1)_\nu g_{\lambda\mu}\right]$
$WZ$	$W_\mu^+(p_1) - W_\nu^-(p_2) - Z_\lambda(p_3)$	$ig\cos\theta_W\left[(p_1 - p_2)_\lambda g_{\mu\nu} + (p_2 - p_3)_\mu g_{\nu\lambda} + (p_3 - p_1)_\nu g_{\lambda\mu}\right]$
$fH$ (SM)	$f - f - H$	$-\frac{igm_f}{2m_W}g_{\mu\nu}$
$WH$ (SM)	$W_\mu^+ - W_\nu^- - H$	$igm_W g_{\mu\nu}$
$ZH$ (SM)	$Z_\mu - Z_\nu - H$	$\frac{igm_Z g_{\mu\nu}}{\cos\theta_W}$
$H^\pm\gamma$	$H^\pm(p_1) - H^\pm(p_2) - A_\mu$	$-ie(p_1 + p_2)^\mu$
$fH^\pm$	$f - f - H^\pm$	$(aP_L + bP_R)$

 Cuadro D.3: *Vértices generales para fermiones y bosones*

# Apéndice E

## Regularización dimensional

Presento a continuación la forma en la cual se resolvieron los cálculos que aparecen en los capítulos 6 y 7, para los cuales fue necesaria la utilización del método de regularización dimensional. En este apéndice, primero se mostraran algunos aspectos relacionados con la matemática necesaria en los procesos de la implementación de la regularización dimensional y posteriormente el método de regularización propiamente dicho de forma generalizada para cualquier número de propagadores y términos en el numerador.

### E.1. Relaciones matemáticas

#### E.1.1. Función Gamma

Existen múltiples definiciones de la función gamma, como la integral definida (Euler), límite infinito (Euler) y producto Infinito (Weierstrass). Definimos la función gamma de Euler como

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (\text{E.1})$$

la definición anterior, es solamente válida para  $\text{Re}(x) > 0$  esta restricción es necesaria para evitar la divergencia de la integral

Otra definición importante es la de límite infinito (Euler)

$$\Gamma(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} n^x \quad (\text{E.2})$$

la cual es igualmente válida solo para  $\text{Re}(x) > 0$ .

Algunas propiedades de la función gamma que usaremos son:

- $\Gamma(1) = 1$

**Proof.** De la definición de la función gamma de Euler tenemos

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1$$

■

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ <sup>1</sup>
- Para  $(x > 0)$  i.e  $x$  es un entero no negativo

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \tag{E.3}$$

**Proof.**

$$\Gamma(x + 1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x dt = \left[-e^{-t}t^x\right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-t}xt^{x-1}dt = 0 - x \int_0^\infty -e^{-t}t^{x-1}dt = x\Gamma(x)$$

■

- Si  $x$  es un entero no negativo, entonces

$$\Gamma(x + 1) = x!$$

**Proof.** Usando el último resultado

$$\Gamma(x + 1) = x(x - 1)\Gamma(x - 1) = x(x - 1)(x - 2)\Gamma(x - 2) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3) \dots \Gamma(1) = x!\Gamma(1) = x!$$

■

- La relación de la funciones gamma con las funciones trigonométricas la podemos expresar como

$$\Gamma(x)\Gamma(1 - x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

y

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{\pi}{\cos \pi x}$$

Para valores negativos del argumento en la función gamma tenemos

- $\Gamma(x) = \infty$  si  $x$  es cero o un entero negativo

**Proof.** De la relación (E.3) tenemos

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x + 1)}{x} \tag{E.4}$$

to  $x = 0$ , then  $\Gamma(0) = \frac{\Gamma(1)}{0} \rightarrow \infty$ , igualmente,

$$\begin{aligned} \Gamma(-1) &= \frac{\Gamma(0)}{-1} = \infty \\ \Gamma(-2) &= \frac{\Gamma(-1)}{-2} = \infty \end{aligned}$$

---

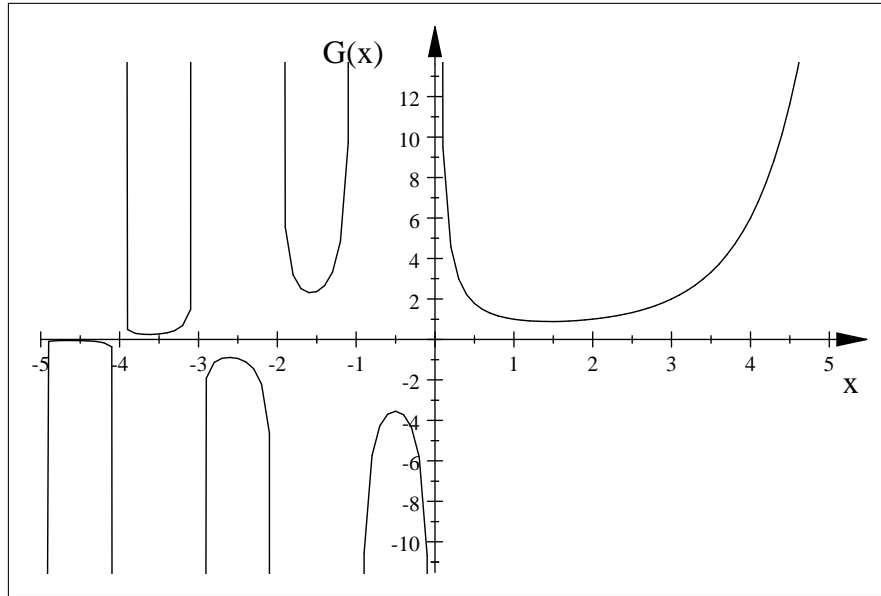
<sup>1</sup>Para entender este resultado, es conveniente usar una variación de la integral de Euler

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^\infty e^{-t^2}t^{2x-1} dt$$



■  
 Un punto importante darnos cuenta que el lado izquierdo de la ecuación(E.3) esta solo definido para  $x > 0$  , sin embargo es posible extender esta definición para  $x > -1$ , si tenemos en cuenta que el lado derecho esta bien definido para  $x > -1$  debido a que  $\Gamma(x)$  para  $x > 0$  esta bien definido, podemos entonces usar el lado derecho, para definir el lado izquierdo para  $x > -1$ , y por lo tanto extrapolar este resultado para  $x > -2$  y asi entonces repetir este proceso para definir  $\Gamma(x)$  para todos los valores negativos de  $x$ .

Lo anterior nos lleva a poder dibujar la función gamma  $\Gamma(x)$



Grafica de la función gamma

### E.1.2. Funciones Digamma y poligamma

La función digamma  $\psi(x)$  es la primera de las funciones poligamma, la cual está definida como

$$\psi(x+1) \equiv \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x+1) \tag{E.5}$$

reemplazando en la ecuación(E.2),  $x$  por  $x+1$

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}{(x+1)(x+2) \dots (x+n)(x+n+1)} n^{x+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2) \dots (x+n)(x+n+1)} n^x \end{aligned}$$

tomando el logaritmo

$$\ln \Gamma(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(n!) + x \ln n - \ln(x+1) - \ln(x+2) - \dots - \ln(x+n)]$$

dado que el logaritmo del límite es igual al límite del logaritmo, al diferenciar obtenemos

$$\frac{d}{dx} \ln \Gamma(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \ln n - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \dots - \frac{1}{x+n} \right] \tag{E.6}$$

si tenemos en cuenta la definición de la constante de Euler-Mascheroni (cuyo valor es  $\gamma_E = 0,577215664901\dots$ )

$$\gamma_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

podemos reescribir la ecuación(E.6) como

$$\frac{d}{dx} \ln \Gamma(x+1) = -\gamma_E - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} \right) = -\gamma_E - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(x+n)n}$$

donde  $\psi(1) = -\gamma_E$ .

Al derivar la función digamma repetidamente obtenemos la función poligamma

$$\psi^{(m)}(x+1) \equiv \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \ln \Gamma(x) = (-1)^{m+1} m! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^{m+1}}$$

donde  $m = 1, 2, 3, \dots$  la última ecuación puede ser reescrita con la ayuda de la función zeta de Riemann (con  $x = 0$ )

$$\zeta(m) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m}$$

por lo tanto

$$\psi^{(m)}(1) = (-1)^{m+1} m! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{m+1}} = (-1)^{m+1} m! \zeta(m+1) \quad (\text{E.7})$$

en términos de la función gamma

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \ln \Gamma(x) = \frac{d^n}{dx^n} \psi(x) = \psi^{(n)}(x)$$

donde  $\psi^{(1)}(1) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ .

Para nuestros propósitos, si tomamos  $x$  tendiendo a cero  $\Gamma(x)$ [85].

$$\Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{1}{x+n} - \gamma_E + 1 + \dots + \frac{1}{n} + \mathcal{O}(x+n) \right) \quad (\text{E.8})$$

finalmente

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E - \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \gamma_E^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{E.9})$$

y

$$\Gamma(-\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \gamma_E^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{E.10})$$

### Función beta

La función beta también se llama integral de Euler de primera clase definida como

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (\text{E.11})$$

para  $\text{Re}(x), \text{Re}(y) > 0$ , debido que solo para estos valores esta integral converge, algunas propiedades de la función beta son

- Es simétrica

$$B(x, y) = B(y, x) \quad (\text{E.12})$$

- En términos de las funciones gamma

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

- Para  $\text{Re}(x) > 0$  y  $\text{Re}(y) > 0$  podemos escribir la función beta como

$$B(x, y) = 2 \int_0^1 (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta \quad (\text{E.13})$$

### E.1.3. Otras relaciones útiles

Algunas expansiones muy utilizadas durante los cálculos son

- La expansión en series de Taylor de cualquier función en el entorno de un punto  $a$ , se puede expresar formalmente como

$$f(x) = f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + f^{(2)}(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + f^{(3)}(a) \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + \dots \quad (\text{E.14})$$

- La serie binomial de  $f(x) = (1+x)^n$  para  $-1 < x < 1$  la podemos expresar como

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}x^k + \dots \quad (\text{E.15})$$

si  $|x| > 1$  tenemos

$$\begin{aligned} & (1+x)^n \quad (\text{E.16}) \\ &= x^n \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \\ &= x^n \left[1 + n\frac{1}{x} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{1}{x}\right)^k + \dots \right] \end{aligned}$$

- En general, si  $\varepsilon$  es tiende a cero

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x^\varepsilon \rightarrow 1 + \varepsilon \ln x + \varepsilon^2 \frac{(\ln x)^2}{2!} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (\text{E.17})$$

- $\Gamma(1 - \varepsilon) = -\varepsilon\Gamma(-\varepsilon)$

$$\Gamma(1 - \varepsilon) = -\varepsilon\Gamma(-\varepsilon) = -\varepsilon \left( -\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \gamma_E^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) = 1 + \varepsilon\gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{E.18})$$

- Si tenemos  $(-2 - \varepsilon)\Gamma(-2 - \varepsilon) = \Gamma(-1 - \varepsilon)$  y  $(-1 - \varepsilon)\Gamma(-1 - \varepsilon) = \Gamma(-\varepsilon)$  entonces

$$\Gamma(-2 - \varepsilon) = \frac{\Gamma(-\varepsilon)}{(-2 - \varepsilon)(-1 - \varepsilon)} \quad (\text{E.19})$$

realizando una expansión binomial sobre los términos  $(-2 - \varepsilon)$  y  $(-1 - \varepsilon)$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \varepsilon} &= 1 + (-1)\varepsilon + \frac{-1(-2)}{2!}\varepsilon^2 + \frac{-1(-3)(-3)}{3!}\varepsilon^3 + \dots = 1 - \varepsilon + \frac{2}{2!}\varepsilon^2 - \frac{6}{3!}\varepsilon^3 + \dots \\ &= 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \dots \\ \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} &= 1 + (-1)\frac{\varepsilon}{2} + \frac{-1(-2)}{2!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \frac{-1(-3)(-3)}{3!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^3 + \dots = 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2!2} - \frac{3\varepsilon^3}{3!4} + \dots \\ &= 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\varepsilon^3}{8} + \dots \end{aligned}$$

reemplazando y quedamos solamente con los términos en orden  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \Gamma(-2 - \varepsilon) &= \frac{\Gamma(-\varepsilon)}{(-2 - \varepsilon)(-1 - \varepsilon)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) (1 - \varepsilon) \left(-\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon\right) \left(-\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \frac{3}{2} - \gamma_E\right) \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

y

$$\begin{aligned} \Gamma(-1 - \varepsilon) &= \frac{\Gamma(-\varepsilon)}{(-1 - \varepsilon)} = -(1 - \varepsilon) \left(-\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

## E.2. Parametrización de Feynman

La parametrización de Feynman es una técnica muy útil en la evaluación de las integrales que aparecen en los diagramas de Feynman de uno o más loops, para poder llegar a la solución más general posible, partiremos del caso de  $n$  propagadores, el cual resolveremos completamente y de forma general, para luego hacer la generalización a cualquier orden en los momentos en el numerador.

Definimos los momentos externos como

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3, 0, \dots, 0) \quad 4 - \text{dimensional}$$

mientras que los momentos en el loop se calcularan en un espacio de Minkowski  $d - \text{dimensional}$ , con una dimensión temporal y  $d - 1$  dimensiones espaciales, las cuales podemos escribir como

$$\begin{aligned} k^\mu &= (k^0, \dots, k^{d-1}) && d - \text{dimensional} \\ k^2 &= (k^0)^2 - (k^1)^2 - \dots - (k^{d-1})^2 && d - \text{dimensional} \\ k^\mu &= p^0 k^0 - \vec{p} \cdot \vec{k} && 4 - \text{dimensional} \end{aligned}$$

Para  $n$  propagadores podemos escribir la parametrización de Feynman como

$$\begin{aligned} & \left( \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{a_1^{\alpha_1} \dots a_i^{\alpha_i} \dots a_n^{\alpha_n}} \tag{E.22} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \dots \Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \frac{(x_0 - x_1)^{(\alpha_n-1)} (x_1 - x_2)^{(\alpha_{n-1}-1)} \dots (x_{n-1} - x_n)^{(\alpha_1-1)}}{\left[ \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} (x_i - x_{i+1}) \right]^N} \end{aligned}$$

donde definimos  $p_n = 0$ ,  $x_0 = 1$ ,  $x_n = 0$  y  $N = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ , antes de seguir adelante podemos demostrar para el caso de dos propagadores que esta nueva representación deja intacta la forma original, si tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1) \Gamma(1)} \int_0^1 dx_1 \frac{(x_0 - x_1)^{(1-1)} (x_1 - x_2)^{(1-1)}}{[A_2 (x_0 - x_1) + A_1 (x_1 - x_2)]^2} \\ &= \frac{1}{1} \int_0^1 dx_1 \frac{(1 - x_1)^0 (x_1 - 0)^0}{[A_2 (1 - x_1) + A_1 (x_1 - 0)]^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{[A_2 (1 - x) + A_1 x]^2} \end{aligned}$$

para resolver esta integral podemos hacer la sustitución  $u = A_2(1 - x) + A_1 x$  por lo tanto  $du = (A_1 - A_2) dx$  haciendo los cambios en los límites de integración

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} &= \int_0^1 \frac{dx}{[A_2 (1 - x) + A_1 x]^2} = \int_{A_2}^{A_1} \frac{du}{(A_1 - A_2) u^2} = \frac{1}{(A_1 - A_2)} \left( -\frac{1}{u} \right) \Big|_{A_2}^{A_1} = \frac{1}{(A_1 - A_2)} \left( \frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1} \right) \\ &= \frac{1}{(A_1 - A_2)} \left( \frac{A_1 - A_2}{A_2 A_1} \right) = \frac{1}{A_1 A_2} \end{aligned}$$

quedando demostrado.

La ecuación(E.22) la podemos escribir de forma equivalente como

$$\left( \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i} \right)^{-1} = \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\dots\Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)}}{[k^2 + 2k \cdot b + a^2]^N}$$

la cual debe de realizarse en el cuadierspacio, por lo tanto

$$\int d^4k \left( \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i} \right)^{-1} = \frac{\Gamma(N)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + 2k \cdot b + a^2]^N} \quad (\text{E.23})$$

donde hemos definido

$$a^2 = \sum_{i=0}^{n-i} (p_{n-i}^2 - m_{n-i}^2) (x_i - x_{i+1}) \quad (\text{E.24})$$

$$b = \sum_{i=0}^{n-i} p_{n-i} (x_i - x_{i+1}) \quad (\text{E.25})$$

Si queremos realizar esta integral directamente obtendremos contribuciones divergentes, sin embargo para resolver este inconveniente podemos hacer la integral en  $2w$  dimensiones, para lo cual usamos la rotación de Wick<sup>2</sup>

$$k_0 \rightarrow ik_{2w}$$

donde  $4 \rightarrow 2w = 2(2 + \varepsilon)$ , por lo tanto podemos escribir

$$\int d^{2w}k \left( \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i} \right)^{-1} = \frac{\Gamma(N)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + 2k \cdot b + a^2]^N}$$

donde

$$k^2 = (k_0, \tilde{k}) \cdot (k_0, -\tilde{k}) = k_0^2 - \tilde{k}^2$$

esto es

$$k^2 = k_0^2 - \tilde{k}_1^2 - \dots - \tilde{k}_{2w-1}^2 = - \sum_{i=1}^{2w} k_i^2 = -k_1^2 - k_2^2 - \dots - k_{2w-1}^2 - k_{2w}^2 = -k_1^2 - k_2^2 - \dots - k_{2w-1}^2 + k_0^2$$

donde  $k_{2w} = -ik_0$ , por lo tanto

$$d^4k \rightarrow \mu^{4-2w} d^{2w}k \rightarrow i \mu^{4-2w} d^{2w}k = i \mu^{4-2w} \prod_{i=1}^{2w} dk_i$$

<sup>2</sup>La rotación Wick, que se realiza en  $k$ , y en la cual se pasa de la métrica de Minkowski a la métrica euclidiana sin pasar por los polos.

donde  $\mu$  es un parámetro de escala arbitrario con dimensiones de energía de tal forma que los términos que aparecerán en forma de logaritmos sean adimensionales, debido a que tenemos un espacio  $2w$  dimensional, la integral es ahora convergente

$$\int d^4k \left( \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i} \right)^{-1} = \frac{\Gamma(N) \mu^{4-2w}}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \int \frac{i \prod_{i=1}^{2w} dk_i \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)}}{(2\pi)^{2w} [k^2 + 2k \cdot b + a^2]^N}$$

haciendo la transformación  $k \rightarrow k - b$  tenemos

$$\begin{aligned} k^2 + 2k \cdot b + a^2 &= (k - b)^2 + 2(k - b) \cdot b + a^2 \\ &= k^2 - 2k \cdot b + b^2 + 2k \cdot b - 2b^2 + a^2 \\ &= k^2 + a^2 - b^2 \\ &= k^2 + D^2 \end{aligned}$$

donde  $D = a^2 - b^2$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} &\int d^4k \left( \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i} \right)^{-1} \\ &= \frac{\mu^{4-2w} \Gamma(N)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \int \frac{i \prod_{i=1}^{2w} dk_i \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)}}{(2\pi)^{2w} \left[ -\sum_{i=1}^{2w} k_i^2 - D \right]^N} \\ &= \frac{\mu^{4-2w} \Gamma(N)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \left[ \frac{i \prod_{i=1}^{2w} dk_i \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)}}{(-1)^N \left[ \sum_{i=1}^{2w} k_i^2 + D \right]^N} \right] \\ &= \frac{\mu^{4-2w} \Gamma(N)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)} \left[ \frac{i (-1)^N \prod_{i=1}^{2w} dk_i}{(2\pi)^{2w} \left[ \sum_{i=1}^{2w} k_i^2 + D \right]^N} \right] \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que

$$\beta_i^2 = \sum_{i=1}^{2w} k_i^2 + D$$

para  $i = 1, 2, \dots, 2w - 1$  y  $\beta_{2w}^2 = D$ , tenemos que

$$\begin{aligned} & \int d^4k \left( \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i} \right)^{-1} \\ &= \frac{\mu^{4-2w} \Gamma(N)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)} \frac{i(-1)^N}{(2\pi)^{2w}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{2w} dk_{2w-1} \dots dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{(k_1^2 + \beta_1^2)^N} \end{aligned} \quad (\text{E.26})$$

donde  $\beta_1^2 = \sum_{j=2}^{2w} k_j^2 + D$ .

Para resolver la última integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{(k_1^2 + \beta_1^2)^N}$  podemos hacerlo mediante la sustitución  $k_1 = \beta_1 \tan \theta_1$  y por lo tanto  $dk_1 = \beta_1 \sec^2 \theta_1 d\theta_1$

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\infty} \frac{dk_1}{(k_1^2 + \beta_1^2)^N} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\beta_1 \sec^2 \theta_1}{(\beta_1^2 + \beta_1^2 \tan^2 \theta_1)^N} d\theta_1 \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\beta_1 \sec^2 \theta_1}{(\beta_1^2)^N (1 + \tan^2 \theta_1)^N} d\theta_1 \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \beta_1^{1-2N} \frac{\sec^2 \theta_1}{\sec^{2N} \theta_1} d\theta_1 \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \beta_1^{1-2N} (\sec \theta_1)^{2-2N} d\theta_1 \\ &= 2\beta_1^{1-2N} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta_1)^{2N-2} d\theta_1 \\ &= \frac{2\Gamma(N - \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(N)} (\beta_1^2)^{\frac{1}{2}-N} \end{aligned}$$



reemplazando el resultado anterior en la ecuación(E.26)

$$\begin{aligned}
 & \int d^4k \left( \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i} \right)^{-1} \\
 &= \frac{\mu^{4-2w} \Gamma(N)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)} \left[ \frac{i(-1)^N}{(2\pi)^{2w}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{2w} dk_{2w-1} \dots dk_3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_2 \Gamma(N - \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(N) (\beta_1^2)^{-\frac{1}{2}+N}} \right] \\
 &= \frac{\mu^{4-2w} \Gamma(N)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)} \\
 & \quad \left[ \frac{i(-1)^N \Gamma(N - \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{(2\pi)^{2w} \Gamma(N)} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{2w} dk_{2w-1} \dots dk_3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_2}{(k_2^2 - \beta_2^2)^{-\frac{1}{2}+N}} \right]
 \end{aligned}$$

donde<sup>3</sup>

$$\beta_1^2 = \sum_{j=2}^{2w} k_j^2 + D = k_2^2 + \sum_{j=3}^{2w} k_j^2 + D = k_2^2 + \beta_2^2$$

Si realizamos el mismo proceso con cada uno de los términos siguientes

$$\int d^4k \left( \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i} \right)^{-1} = \frac{\mu^{4-2w} \Gamma(N)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)} \left[ \frac{i(-1)^N \Gamma(N-w) \pi^w}{(2\pi)^{2w} \Gamma(N)} (\beta_{2w}^2)^{w-N} \right]$$

donde  $\beta_{2w}^2 = \sum_{j=2w+1}^{2w} k_j^2 + D = D$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \int d^4k \left( \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i} \right)^{-1} &= \frac{\mu^{4-2w} \Gamma(N)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)} \left[ \frac{i(-1)^N \Gamma(N-w) \pi^w}{(2\pi)^{2w} \Gamma(N)} D^{w-N} \right] \\
 &= \frac{\mu^{4-2w}}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)} \left[ \frac{i(-1)^N}{(2\pi)^{2w}} \Gamma(N-w) \pi^w D^{w-N} \right] \quad (\text{E.27})
 \end{aligned}$$

lo cual podemos escribir como

$$\int d^4k \left( \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i} \right)^{-1} = \frac{i \mu^{4-2w} (-1)^N \Gamma(N-w) \pi^w}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i) (2\pi)^{2w}} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)} (b^2 - a^2)^{w-N} \quad (\text{E.28})$$

Algunos ejemplos interesantes útiles para nuestros cálculos son

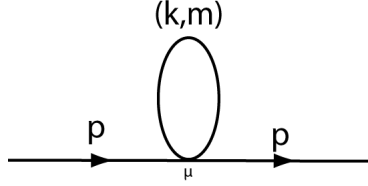


Figura E.1: Diagrama de tadpole

### E.2.1. Función escalar de un punto

Para  $N = 1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i$  tenemos  $\alpha_1 = 1$ , reemplazando en la ecuación(E.28)

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 k}{k^2 - m^2} &= \frac{i(-)^1 \mu^{4-2w} \Gamma(1-w) \pi^w}{\Gamma(1) (2\pi)^{2w}} \int_0^1 dx (x_0 - x_1)^{(1-1)} (b^2 - a^2)^{w-1} \\ &= -\frac{i\mu^{4-2w} \Gamma(1-w) \pi^w}{2\pi^{2w}} \int_0^1 dx \frac{1}{(b^2 - a^2)^{-w+1}} \end{aligned}$$

dado que  $k^2 + 2k \cdot b + a^2$  y teniendo en cuenta las definiciones(E.24) y (E.25),

$$\begin{aligned} a^2 &= \sum_{i=0}^{n-i} (p_{n-i}^2 - m_{n-i}^2) (x_i - x_{i+1}) = (0 - m^2) (1 - 0) = -m^2 \\ b &= \sum_{i=0}^{n-i} p_{n-i} (x_i - x_{i+1}) = 0 (1 - 0) = 0 \end{aligned}$$

donde  $p_1 = 0$ ,  $x_0 = 1$  y  $x_1 = 0$  entonces

$$\int d^4 k \frac{1}{(k^2 - m^2)} = -\frac{i\mu^{4-2w} \Gamma(1-w) \pi^w}{(2\pi)^{2w}} \int_0^1 dx \frac{1}{(m^2)^{-w+1}}$$

dado que  $w = 2 + \varepsilon$  tenemos  $\frac{1}{(m_1^2)^{-w+1}} = \frac{1}{(m_1^2)^{-2-\varepsilon+1}} = (m_1^2)^{\varepsilon+1} = m^2 (m^2)^\varepsilon$

$$-\frac{i\mu^{4-2w} \Gamma(1-w) \pi^w}{(2\pi)^{2w}} \int_0^1 dx \frac{1}{(m^2)^{-w+1}} = -\frac{i\mu^{4-2w} \Gamma(1-w) \pi^w}{(2\pi)^{2w}} \int_0^1 dx m^2 (m^2)^\varepsilon \quad (\text{E.29})$$

teniendo en cuenta que  $\frac{\pi^w}{(2\pi)^{2w}} = \frac{\pi^w}{2^{2w} \pi^{2w}} = \frac{1}{2^{2w} \pi^w} = \frac{1}{(4\pi)^w}$ , si reemplazamos la definición de  $w$  sobre el término

$$\frac{i\mu^{4-2w}}{(4\pi)^w} = \frac{i\mu^{4-2(2+\varepsilon)}}{(4\pi)^{2+\varepsilon}} = \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2 (4\pi)^\varepsilon} = \frac{i\mu^{-2\varepsilon} (4\pi)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^2} = \frac{i(\mu^2 4\pi)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^2} \quad (\text{E.30})$$

<sup>3</sup>Recordando que  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

debemos ahora hacer la regularización del término de masa, debido a que cuando se haga la expansión en series de Taylor, se podrían tener logaritmos dimensionales

$$(\mu^2 4\pi)^{-\varepsilon} (m^2)^\varepsilon = \frac{(m^2)^\varepsilon}{(4\pi\mu^2)^\varepsilon} = \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^\varepsilon$$

reemplazando entonces lo realizado anteriormente en la ecuación(E.29)

$$\begin{aligned} -\frac{i\Gamma(1-w)\mu^{4-2w}\pi^w}{(2\pi)^{2w}} \int_0^1 dx m^2 (m^2)^\varepsilon &= -im^2\Gamma(-1-\varepsilon) \frac{\mu^{4-2w}}{(4\pi)^w} (m^2)^\varepsilon \int_0^1 dx \\ &= -im^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1\right) \frac{(\mu^2 4\pi)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^2} (m^2)^\varepsilon x|_0^1 \\ &= -\frac{im^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1\right) \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^\varepsilon \\ &= -\frac{im^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1\right) \left(1 + \varepsilon \frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) \\ &= -\frac{im^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1\right) \left(1 + \varepsilon \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) \\ &= -\frac{im^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 + \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2} + \gamma_E \varepsilon \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2} - \varepsilon \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) \\ &= -\frac{im^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 + \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) \\ &= -\frac{im^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 - \ln 4\pi + \ln \frac{m^2}{\mu^2}\right) \\ &= \frac{im_1^2}{16\pi^2} \left(\ln \Lambda^2 + 1 - \ln \frac{m^2}{\mu^2}\right) \end{aligned}$$

donde definimos  $\ln \Lambda^2 = -\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi$ , podemos reescribir lo anterior como

$$\int \frac{d^4k}{(k^2 - m_1^2)} = \frac{im_1^2}{16\pi^2} \left(\ln \Lambda^2 + 1 - \ln \frac{m^2}{\mu^2}\right) = \frac{im_1^2}{16\pi^2} \left(1 - \ln \frac{m^2}{\Lambda^2 \mu^2}\right) \quad (\text{E.31})$$

### E.2.2. Función escalar de dos puntos

Para el caso  $N = \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2$  como el que representamos en la grafica tenemos que al reemplazar en la ecuación(E.28)

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4k}{((k+p)^2 - m_1^2)(k^2 - m_2^2)} &= \frac{i(-1)^2 \mu^{4-2w} \Gamma(2-w) \pi^w}{\Gamma(1)\Gamma(1)(2\pi)^{2w}} \int_0^1 dx_1 (x_0 - x_1)^{(1-1)} (x_i - x_{i+1})^{(1-1)} (b^2 - a^2)^{w-2} \\ &= \frac{i\mu^{4-2w} \Gamma(2-w)}{(4\pi)^w} \int_0^1 dx (b^2 - a^2)^{w-2} \end{aligned} \quad (\text{E.32})$$

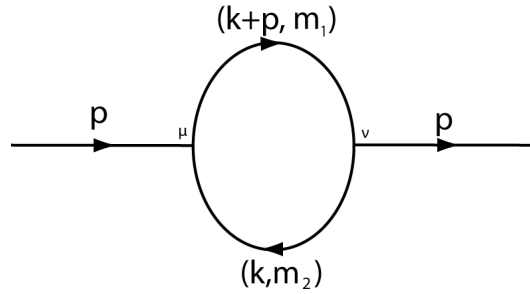


Figura E.2: Diagrama de polarización del vacío

donde  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , por definición  $p_2 = 0$ ,  $x_0 = 1$  y  $x_2 = 0$ , dado que solo tenemos una variable de integración podemos renombrar  $x_1 = x$ , así mismo es necesario calcular los términos  $a$  y  $b$  para lo cual tenemos en cuenta las ecuaciones(E.24,E.25)

$$\begin{aligned} a^2 &= \sum_{i=0}^{n-i} (p_{n-i}^2 - m_{n-i}^2) (x_i - x_{i+1}) = (p_2^2 - m_2^2) (x_0 - x_1) + (p_1^2 - m_1^2) (x_1 - x_2) \\ &= -m_2^2 (1 - x) + (p^2 - m_1^2) (x - 0) = x (p^2 + m_2^2 - m_1^2) - m_2^2 \end{aligned}$$

y

$$b = \sum_{i=0}^{n-i} p_{n-i} (x_i - x_{i+1}) = p_2 (x_0 - x_1) + p_1 (x_1 - x_2) = px$$

otra forma para calcular estos términos, absolutamente equivalente la podemos hacer, mediante la parametrización de Feynman(E.22)

$$\begin{aligned} (k^2 - m_1^2) (x_0 - x_1) + ((k+p)^2 - m_2^2) (x_1 - x_2) &= (k^2 - m_1^2) (1 - x) + ((k+p)^2 - m_2^2) x \\ &= k^2 - m_1^2 - k^2 x + m_1^2 x + k^2 x + 2k \cdot px + p^2 x - m_2^2 x \\ &= k^2 + 2k \cdot \underbrace{px}_b + \underbrace{m_1^2 x + p^2 x - m_2^2 x - m_1^2}_{a^2} \end{aligned}$$

dado que

$$D = b^2 - a^2 = p^2 x^2 - x (p^2 + m_2^2 - m_1^2) + m_2^2$$

reemplazando  $D = b^2 - a^2$ ,  $w = 2 + \varepsilon$ , la expansión sobre  $\Gamma(2 - w) = \Gamma(2 - (2 + \varepsilon)) = \Gamma(-\varepsilon)$  ecuación(E.10) y la expansión obtenida en la ecuación(E.30)

$$\frac{i\mu^{4-2w}}{(4\pi)^w} = \frac{i(\mu^2 4\pi)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^2}$$

debemos usar

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^4 k}{(k^2 - m_1^2) ((k-p)^2 - m_2^2)} &= i\Gamma(2-w) \frac{\mu^{4-2w}}{(4\pi)^w} \int_0^1 dx D^{w-2} \\
 &= i \left( -\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E \right) \frac{(\mu^2 4\pi)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx D^{(2+\varepsilon)-2} \\
 &= \frac{i}{16\pi^2} \left( -\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E \right) \int_0^1 dx (\mu^2 4\pi)^{-\varepsilon} D^\varepsilon \\
 &= \frac{i}{16\pi^2} \left( -\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E \right) \int_0^1 dx \left( \frac{D}{\mu^2 4\pi} \right)^\varepsilon \\
 &= \frac{i}{16\pi^2} \left( -\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E \right) \int_0^1 dx \left( 1 + \varepsilon \ln \frac{D}{\mu^2 4\pi} \right) \\
 &= \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left( -\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E \right) \left( 1 + \varepsilon \left[ -\ln 4\pi + \ln \frac{D}{\mu^2} \right] \right) \\
 &= \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left( -\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi + \gamma_E \varepsilon \ln 4\pi - \ln \frac{D}{\mu^2} - \gamma_E \varepsilon \ln \frac{D}{\mu^2} \right) \\
 &= \frac{i}{16\pi^2} \left[ \ln \Lambda^2 - \int_0^1 dx \ln \left( \frac{p^2 x^2 - x(p^2 + m_2^2 - m_1^2) + m_2^2}{\mu^2} \right) \right] \quad (\text{E.33})
 \end{aligned}$$

donde tuvimos en cuenta que  $\ln \Lambda^2 = -\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi$ .

### E.2.3. Función escalar de dos puntos con $\vec{B}$

Teniendo en cuenta que al incluir campo magnético uno de los terminos del propagador puede quedar al cuadrado en una aproximación a primer orden en el campo magnético como sucede en el caso del boson W y en el caso de los leptones cargados. Por lo tanto es necesario analizar este caso de forma general

Partiendo de la ecuación (E.28)

$$\int d^4 k \left( \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i} \right)^{-1} = \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N \Gamma(N-w) \pi^w}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i) (2\pi)^{2w}} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)} (b^2 - a^2)^{w-N}$$

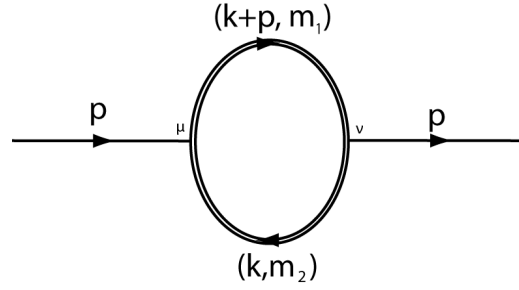


Figura E.3: Diagrama de polarización en un campo magnético

al remplazar tenemos

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^4 k}{(k^2 - m_2^2)^2 ((k+p)^2 - m_1^2)} &= \frac{i(-1)^3 \mu^{4-2w} \Gamma(3-w) \pi^w}{\Gamma(1) \Gamma(2) (2\pi)^{2w}} \int_0^1 dx_1 (x_0 - x_1)^{(1-1)} (x_1 - x_2)^{(2-1)} (b^2 - a^2)^{w-3} \\
 &= -\frac{i\mu^{4-2w} \Gamma(3-w)}{(4\pi)^w} \int_0^1 dx x (b^2 - a^2)^{w-3}
 \end{aligned} \tag{E.34}$$

donde  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 2$  y  $N = \sum_{i=1}^n \alpha_i = 3$ , por definición  $x_0 = 1$  y  $x_2 = 0$ , dado que tiene la misma estructura del caso anterior, los resultados para el término  $D$  serán los mismos, por lo tanto

$$(k^2 - m_1^2)(x_0 - x_1) + ((k+p)^2 - m_2^2)(x_1 - x_2) = k^2 + 2k \cdot \underbrace{px}_b + \underbrace{(m_1^2 + p^2 - m_2^2)x - m_1^2}_{a^2}$$

donde

$$D = b^2 - a^2 = p^2 x^2 + (m_2^2 - m_1^2 - p^2)x + m_1^2$$

remplazando  $w = 2 + \varepsilon$ , y teniendo en cuenta (E.18) el término  $\Gamma(3-w) = \Gamma(3 - (2 + \varepsilon)) = \Gamma(1 - \varepsilon)$  y de la expansión (E.30)

$$\frac{i\mu^{4-2w}}{(4\pi)^w} = \frac{i(\mu^2 4\pi)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^2}$$

al remplazar tenemos

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^4 k}{(k^2 - m_2^2)^2 ((k+p)^2 - m_1^2)} &= -i\Gamma(3-w) \frac{\mu^{4-2w}}{(4\pi)^w} \int_0^1 dx x D^{w-3} \\
 &= -i(1 + \varepsilon\gamma_E) \frac{(\mu^2 4\pi)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x D^{(2+\varepsilon)-3} \\
 &= \frac{-i}{16\pi^2} (1 + \varepsilon\gamma_E) \int_0^1 dx x (\mu^2 4\pi)^{-\varepsilon} D^{\varepsilon-1} \\
 &= \frac{i}{16\pi^2} (1 + \varepsilon\gamma_E) \int_0^1 dx x \left( \frac{D}{\mu^2 4\pi} \right)^\varepsilon \frac{1}{D} \\
 &= \frac{-i}{16\pi^2} (1 + \varepsilon\gamma_E) \int_0^1 dx x \left( 1 + \varepsilon \ln \frac{D}{\mu^2 4\pi} \right) \frac{1}{D} \\
 &= \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 dx x (1 + \varepsilon\gamma_E) \left( 1 + \varepsilon \left[ -\ln 4\pi + \ln \frac{D}{\mu^2} \right] \right) \frac{1}{D} \\
 &= \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 dx x \left( 1 - \varepsilon \ln 4\pi + \varepsilon \ln \frac{D}{\mu^2} + \varepsilon\gamma_E - \varepsilon^2 \gamma_E \ln 4\pi + \varepsilon^2 \gamma_E \ln \frac{D}{\mu^2} \right) \frac{1}{D} \\
 &= \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{x}{p^2 x^2 + (m_2^2 - m_1^2 - p^2)x + m_1^2} \tag{E.35}
 \end{aligned}$$

donde usamos que  $\Gamma(3-w) = \Gamma(3-(2+\varepsilon)) = \Gamma(1-\varepsilon) = 1 + \varepsilon\gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$  y por lo tanto

$$\int \frac{d^4 k}{(k^2 - m_W^2)^2 ((p+k)^2 - m_l^2)} = \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{x}{m_\nu^2 x^2 + x(m_W^2 - m_\nu^2 - m_l^2) + m_l^2} \tag{E.36}$$

Para el caso en el cual los propagadores estan escritos como

$$\frac{1}{((p+k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)}$$

al realizar el mismo procedimiento que en el caso anterior tenemos

$$((p+k)^2 - m_l^2)(x_0 - x_1) + (k^2 - m_W^2)(x_1 - x_2) = k^2 + 2k \cdot \underbrace{p(1-x)}_b + \underbrace{(m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x - m_l^2 + m_\nu^2}_{a^2}$$

y

$$D = b^2 - a^2 = p^2(1-x)^2 - ((m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x - m_l^2 + m_\nu^2) = p^2 x^2 + (m_W^2 - m_\nu^2 - m_l^2)x + m_l^2$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^4 k}{((p+k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} &= \frac{i(-1)^3 \mu^{4-2w} \Gamma(3-w) \pi^w}{\Gamma(1) \Gamma(2) (2\pi)^{2w}} \int_0^1 dx_1 (x_0 - x_1)^{(2-1)} (x_1 - x_2)^{(1-1)} (b^2 - a^2)^{w-3} \\
 &= -i\Gamma(3-w) \frac{\mu^{4-2w}}{(4\pi)^w} \int_0^1 dx (1-x) D^{w-3} \\
 &= \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{1-x}{m_\nu^2 x^2 + (m_W^2 - m_\nu^2 - m_l^2)x + m_l^2}
 \end{aligned} \tag{E.37}$$

asi mismo, si planteamos

$$(k^2 - m_W^2)(x_0 - x_1) + ((p-k)^2 - m_l^2)(x_1 - x_2) = k^2 + 2k \cdot \underbrace{(-px)}_b + \underbrace{(m_\nu^2 - m_l^2 + m_W^2)x - m_W^2}_{a^2}$$

y

$$D = b^2 - a^2 = p^2 x^2 - (m_\nu^2 - m_l^2 + m_W^2)x - m_W^2 = m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2$$

por lo tanto

$$\int \frac{d^4 k}{((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} = \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{1-x}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} \tag{E.38}$$

### E.2.4. Función escalar de tres puntos

Para el caso  $N = \sum_{i=1}^n \alpha_i = 3$  como el que representamos en la graficatenemos que al remplazar en la

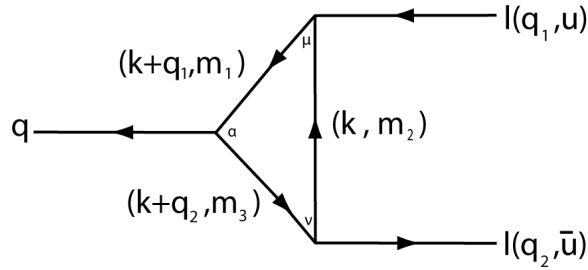


Figura E.4: Diagrama de triangulo

ecuación(E.28)

$$\int d^4 k \left( \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i} \right)^{-1} = \frac{i(-1)^N \mu^{4-2w} \Gamma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i - w\right) \pi^w}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i) (2\pi)^{2w}} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)} (b^2 - a^2)^{w-N}$$



si tomamos como ejemplo el caso

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^4 k}{[(k+q_1)^2 - m_1^2] (k^2 - m_2^2) [(k+q_2)^2 - m_3^2]} \\
 &= \frac{i(-1)^3 \mu^{4-2w} \Gamma(3-w) \pi^w}{\Gamma(1) \Gamma(1) \Gamma(1) (2\pi)^{2w}} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 (x_0 - x_1)^{(1-1)} (x_1 - x_2)^{(1-1)} (x_2 - x_3)^{(1-1)} (b^2 - a^2)^{w-3} \\
 &= -i \frac{\mu^{4-2w} \Gamma(3-w)}{(4\pi)^w} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 (b^2 - a^2)^{w-3} \tag{E.39}
 \end{aligned}$$

donde tuvimos en cuenta que  $\frac{\pi^w}{(2\pi)^{2w}} = \frac{1}{(4\pi)^w}$ , debido a que solo tenemos dos variables de integración renombramos  $x_1 = x$  y  $x_2 = y$ , para nuestro ejemplo  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ , por definición  $p_3 = 0$ ,  $x_0 = 1$  y  $x_3 = 0$ .

Es necesario calcular los términos  $a$  y  $b$ , lo cual lo haremos mediante la parametrización de Feynman(E.22)

$$\begin{aligned}
 & ((k+p_1)^2 - m_1^2) (x_0 - x_1) + (k^2 - m_2^2) (x_1 - x_2) + ((k+p_2)^2 - m_3^2) (x_2 - x_3) \\
 &= ((k+p_1)^2 - m_1^2) (1-x) + (k^2 - m_2^2) (x-y) + ((k+p_2)^2 - m_3^2) y \\
 &= (k^2 + 2k \cdot p_1 + p_1^2 - m_1^2) (1-x) + (k^2 - m_2^2) (x-y) + (k^2 + 2k \cdot p_2 + p_2^2 - m_3^2) y \\
 &= k^2 + 2k \cdot \underbrace{p_1(1-x) + p_2 y}_b + \underbrace{(m_1^2 - p_1^2 - m_2^2)x + (p_2^2 + m_2^2 - m_3^2)y + p_1^2 - m_1^2}_{a^2}
 \end{aligned}$$

dado que

$$D = b^2 - a^2 = (p_1(1-x) + p_2 y)^2 - ((m_1^2 - p_1^2 - m_2^2)x + (p_2^2 + m_2^2 - m_3^2)y + p_1^2 - m_1^2) \tag{E.40}$$

para simplificaciones específicas de cada calculo, puede ser conveniente tener en cuenta  $q^2 = (q_1 - q_2)^2 = p_1^2 - 2p_1 \cdot p_2 + p_2^2 \Rightarrow 2p_1 \cdot p_2 = p_1^2 + p_2^2 - q^2$ , debido a que  $w = 2 + \varepsilon$ , la expansión sobre  $\Gamma(3-w) = \Gamma(3 - (2 + \varepsilon)) = \Gamma(1 - \varepsilon) = 1 + \varepsilon \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$  y de la expansión obtenida en la ecuación(E.30)

$$\frac{i\mu^{4-2w}}{(4\pi)^w} = \frac{i(\mu^2 4\pi)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^2}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^4 k}{[(k+q_1)^2 - m_1^2] (k^2 - m_2^2) [(k+q_2)^2 - m_3^2]} \\
 = & -i \frac{\mu^{4-2w} \Gamma(3-w)}{(4\pi)^w} \int_0^1 dx \int_0^{x_1} dy (b^2 - a^2)^{w-3} \\
 = & -\frac{i (\mu^2 4\pi)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{x_1} dy (1 + \varepsilon \gamma_E) D^{-1+\varepsilon} \\
 = & -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy (1 + \varepsilon \gamma_E) (\mu^2 4\pi)^{-\varepsilon} \frac{D^\varepsilon}{D} \\
 = & -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D} (1 + \varepsilon \gamma_E) \left( \frac{D}{\mu^2 4\pi} \right)^\varepsilon \\
 = & -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D} (1 + \varepsilon \gamma_E) \left( 1 + \varepsilon \left[ -\ln 4\pi + \ln \frac{D}{\mu^2} \right] \right) \\
 = & -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D} \left( 1 - \varepsilon \ln 4\pi + \varepsilon \ln \frac{D}{\mu^2} + \varepsilon \gamma_E - \varepsilon^2 \gamma_E \ln 4\pi + \varepsilon^2 \gamma_E \ln \frac{D}{\mu^2} \right) \\
 = & \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D} \tag{E.41}
 \end{aligned}$$

Finalmente

$$\int \frac{d^4 k}{[(k+q_1)^2 - m_1^2] (k^2 - m_2^2) [(k+q_2)^2 - m_3^2]} = \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D}$$

### E.3. Funciones con un momento en el numerador

Es necesario tener ahora en cuenta términos de momento en el numerador, debido a que en nuestro cálculo estos son relevantes y aparecen en todos los diagramas que analizamos. Partiendo de la ecuación (E.23)

$$\int d^4 k \left( \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i} \right)^{-1} = \frac{\Gamma(N)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + 2k \cdot b + a^2]^N}$$

y teniendo en cuenta la ecuación(E.27)

$$\int d^4k \left( \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i} \right)^{-1} = \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N \Gamma(N-w) \pi^w}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i) (2\pi)^{2w}} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)} (b^2 - a^2)^{w-N}$$

dado que es la misma integral, podemos igualar por lo tanto los términos diferentes

$$\Gamma(N) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + 2k \cdot b + a^2]^N} = \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N \Gamma(N-w) \pi^w}{(2\pi)^{2w}} (b^2 - a^2)^{w-N}$$

pudiendo reescribirlo como

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + 2k \cdot b + a^2]^N} = \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N \Gamma(N-w) \pi^w}{\Gamma(N) (2\pi)^{2w}} (b^2 - a^2)^{w-N}$$

derivando a ambos lados por  $b_\mu$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b_\mu} \int \frac{d^4k}{(k^2 + 2k^\mu b_\mu + a^2)^N} &= - \int d^4k \frac{(k^2 + 2k^\mu b_\mu + a^2)^{N-1} \cdot 2k^\mu}{(k^2 + 2k^\mu b_\mu + a^2)^{2N}} \\ &= - \int d^4k \frac{N (k^2 + 2k^\mu b_\mu + a^2)^{N-1} \cdot 2k^\mu}{(k^2 + 2k^\mu b_\mu + a^2)^{2N}} \\ &= - \int d^4k \frac{2(N) k^\mu}{(k^2 + 2k \cdot b + a^2)^{N+1}} \\ &= -2N \int d^4k \frac{k^\mu}{(k^2 + 2k \cdot b + a^2)^{N+1}} \end{aligned} \quad (\text{E.42})$$

mientras que para la segunda parte

$$\frac{\partial}{\partial b_\mu} \left( \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N \Gamma(N-w) \pi^w}{\Gamma(N) (2\pi)^{2w}} (b^2 - a^2)^{w-N} \right) = \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N \Gamma(N-w) \pi^w}{\Gamma(N) (2\pi)^{2w}} (w-N) (b^2 - a^2)^{w-N-1} (2b^\mu)$$

igualando con el resultado anterior tenemos

$$\begin{aligned} -2N \int d^4k \frac{k^\mu}{(k^2 + 2k \cdot b + a^2)^{N+1}} &= \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N \Gamma(N-w) \pi^w}{\Gamma(N) (2\pi)^{2w}} (w-N) (b^2 - a^2)^{w-N-1} (2b^\mu) \\ \int d^4k \frac{k^\mu}{(k^2 + 2k \cdot b + a^2)^{N+1}} &= \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^{N+1} \Gamma(N-w) \pi^w}{N\Gamma(N) (2\pi)^{2w}} (w-N) (b^2 - a^2)^{w-N-1} b^\mu \end{aligned}$$

reemplazando la propiedad de la función gamma  $N\Gamma(N) = \Gamma(N+1)$  dado que  $(w-N)\Gamma(N-w) = (-1)\Gamma(N-w+1)$  entonces

$$\int d^4k \frac{k^\mu}{(k^2 + 2k \cdot b + a^2)^{N+1}} = \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^{N+1} \Gamma(N-w+1) \pi^w}{\Gamma(N+1) (2\pi)^{2w}} (b^2 - a^2)^{w-N-1} (-b^\mu)$$

teniendo en cuenta que  $\frac{\pi^w}{(2\pi)^{2w}} = \frac{1}{(4\pi)^w}$  y definiendo  $N' = N + 1$  obtenemos

$$\int d^4k \frac{k^\mu}{(k^2 + 2k \cdot b + a^2)^{N'}} = \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^{N'} \Gamma(N' - w)}{(4\pi)^w \Gamma(N')} (b^2 - a^2)^{w-N'} (-b^\mu)$$

pero dado que  $N'$  es una variable muda podemos escribir

$$\int d^4k \frac{k^\mu}{(k^2 + 2k \cdot b + a^2)^N} = \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N \Gamma(N - w)}{(4\pi)^w \Gamma(N)} (b^2 - a^2)^{w-N} (-b^\mu) \quad (\text{E.43})$$

Obteniendo finalmente

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{\prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i}} = \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N \Gamma(N - w)}{(4\pi)^w \prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)} D^{w-N} (-b^\mu) \quad (\text{E.44})$$

### E.3.1. Función escalar de dos puntos y $k^\mu$ en el numerador

Para el caso de dos propagadores, pero con  $N = 2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ , donde  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  y teniendo en cuenta la gráfica(E.2) como apoyo, podemos usar la ecuación(E.44) y el resultado obtenido para el cálculo de la función escalar de dos puntos (E.32)

$$\int \frac{d^4k k^\mu}{((k+p)^2 - m_1^2)(k^2 - m_2^2)} = \frac{i\mu^{4-2w} \Gamma(2-w)}{2(4\pi)^w} \int_0^1 dx (b^2 - a^2)^{w-2} (-b^\mu)$$

donde  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , por definición  $p_2 = 0$ ,  $x_0 = 1$  y  $x_2 = 0$ , dado que solo tenemos una variable de integración renombramos  $x_1 = x$ . Podemos apreciar que los términos  $a$  y  $b$  son los mismos a los obtenidos anteriormente en el cálculo de la función escalar de dos puntos debido a que estos no depende de  $k$ , los cuales son  $a^2 = x(p^2 + m_2^2 - m_1^2) - m_2^2$  y  $b = px$  donde

$$D = b^2 - a^2 = p^2 x^2 - x(p^2 + m_2^2 - m_1^2) + m_2^2$$

al tener en cuenta que  $w = 2 + \varepsilon$ ,  $\frac{i\mu^{4-2w}}{(4\pi)^w} = \frac{i(\mu^2 4\pi)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^2}$  y teniendo en cuenta lo realizado para la función escalar de dos puntos(E.33)

$$\begin{aligned}
 \frac{i\mu^{4-2w}\Gamma(2-w)}{(4\pi)^w} \int_0^1 dx (b^2 - a^2)^{w-2} (-b^\mu) &= \frac{i(\mu^2 4\pi)^{-\varepsilon} \Gamma(2 - (2 + \varepsilon))}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (b^2 - a^2)^{(2+\varepsilon)-2} (-b^\mu) \\
 &= -\frac{i(\mu^2 4\pi)^{-\varepsilon} \Gamma(-\varepsilon)}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx D^\varepsilon b^\mu \\
 &= -\frac{i\Gamma(-\varepsilon)}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left(\frac{D}{4\pi\mu^2}\right)^\varepsilon b^\mu \\
 &= -\frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left(-\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E\right) \left(1 + \varepsilon \left[-\ln 4\pi + \ln \frac{D}{\mu^2}\right]\right) b^\mu \\
 &= -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx b^\mu \left(\ln \Lambda^2 - \ln \left(\frac{p^2 x^2 - x(p^2 + m_2^2 - m_1^2) + m_2^2}{\mu^2}\right)\right)
 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\int d^4 k \frac{k^\mu}{((k+p)^2 - m_1^2)(k^2 - m_2^2)} = -\frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 dx p^\mu x \left(\ln \Lambda^2 - \ln \left(\frac{p^2 x^2 - x(p^2 + m_2^2 - m_1^2) + m_2^2}{\mu^2}\right)\right) \quad (\text{E.45})$$

### E.3.2. Función escalar de dos puntos, $\vec{B}$ y $k^\mu$ en el numerador

Dado que hemos supuesto para este caso (gráficaE.3) que  $\alpha_1 = 1$  y  $\alpha_2 = 2$  entonces  $N = \sum_{i=1}^n \alpha_i = 3$  recordando (E.44) y el resultado obtenido en (E.35)

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^4 k k}{(k^2 - m_2^2)^2 ((k+p)^2 - m_1^2)} &= \frac{-i\mu^{4-2w}\Gamma(3-w)}{(4\pi)^w \prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 dx_1 (x_0 - x_1)^{(1-1)} (x_1 - x_2)^{(2-1)} D^{w-3} (-b^\mu) \\
 &= \frac{-i\mu^{4-2w}\Gamma(3-w)}{(4\pi)^w \prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 dx x D^{w-3} (-b^\mu)
 \end{aligned}$$

por definición  $p_2 = 0$ ,  $x_0 = 1$  y  $x_2 = 0$ , dado que solo tenemos una variable de integración renombramos  $x_1 = x$  donde los términos  $a$  y  $b$  son los mismos a los obtenidos anteriormente en el cálculo de la función escalar de dos puntos y campo magnético, por lo tanto

$$D = b^2 - a^2 = p^2 x^2 + x(m_1^2 - p^2 - m_2^2) + m_2^2$$

teniendo en cuenta lo realizado en (E.35)

$$\begin{aligned}
 -\frac{i\mu^{4-2w}\Gamma(3-w)}{(4\pi)^w} \int_0^1 dx (b^2 - a^2)^{w-3} (-b^\mu) &= \frac{-i(\mu^2 4\pi)^{-\varepsilon} \Gamma(3 - (2 + \varepsilon))}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x (b^2 - a^2)^{(2+\varepsilon)-3} (-b^\mu) \\
 &= \frac{i}{16\pi^2} (1 + \varepsilon\gamma_E) \int_0^1 dx x \left(1 + \varepsilon \ln \frac{D}{\mu^2 4\pi}\right) \frac{1}{D} b^\mu \\
 &= \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{x^2 p^\mu}{p^2 x^2 + x(m_1^2 - p^2 - m_2^2) + m_2^2} \quad (E.46)
 \end{aligned}$$

donde tuvimos en cuenta que  $b = px$ , lo cual lo podemos escribir como

$$\int \frac{k^\mu d^4 k}{(k^2 - m_W^2)^2 ((p+k)^2 - m_l^2)} = \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{x^2 p^\mu}{m_\nu^2 x^2 + x(m_W^2 - m_\nu^2 - m_l^2) + m_l^2} \quad (E.47)$$

y para

$$\int \frac{k^\mu d^4 k}{((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} = \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(1-x)^2 p^\mu}{m_\nu^2 x^2 + (m_l^2 - m_\nu^2 - m_W^2)x + m_W^2} \quad (E.48)$$

## E.4. Función escalar con dos momentos en el numerador

Debemos considerar ahora el caso de dos momentos en el numerador, podemos partir de lo realizado para el caso de un solo momento, partiendo de la ecuación(E.43)

$$\int d^4 k \frac{k^\mu}{(k^2 + 2k \cdot b + a^2)^N} = \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N \Gamma(N-w)}{(4\pi)^w \Gamma(N)} (b^2 - a^2)^{w-N} (-b^\mu) \quad (E.49)$$

podemos derivar a ambos lados, para el lado izquierdo tenemos

$$\frac{\partial}{\partial b_\nu} \int \frac{d^4 k k^\mu}{(k^2 + 2k \cdot b + a^2)^N} = -2N \int \frac{d^4 k k^\mu k^\nu}{(k^2 + 2k \cdot b + a^2)^{N+1}}$$

mientras que para la segunda parte

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial b_\nu} \left( \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N \Gamma(N-w)}{(4\pi)^w \Gamma(N)} (b^2 - a^2)^{w-N} (-b^\mu) \right) \\
 &= \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N \Gamma(N-w)}{(4\pi)^w \Gamma(N)} \left( -b^\mu \frac{\partial (b^2 - a^2)^{w-N}}{\partial b_\nu} - (b^2 - a^2)^{w-N} \frac{\partial b^\mu}{\partial b_\nu} \right) \\
 &= \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N \Gamma(N-w)}{(4\pi)^w \Gamma(N)} \left( -b^\mu (w-N) (b^2 - a^2)^{w-N-1} 2b_\nu - (b^2 - a^2)^{w-N} g^{\mu\nu} \right) \\
 &= \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N \Gamma(N-w)}{(4\pi)^w \Gamma(N)} D^{w-N} (-2b^\mu b_\nu (w-N) D^{-1} - g^{\mu\nu}) \\
 &= \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N}{(4\pi)^w \Gamma(N)} D^{w-N} (-2b^\mu b_\nu (w-N) \Gamma(N-w) D^{-1} - g^{\mu\nu} \Gamma(N-w)) \\
 &= \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N}{(4\pi)^w \Gamma(N)} D^{w-N-1} (2b^\mu b_\nu \Gamma(N-w+1) - g^{\mu\nu} \Gamma(N-w) D)
 \end{aligned}$$

donde tuvimos en cuenta que  $(w-N)\Gamma(N-w) = (-1)\Gamma(N-w+1)$  igualando los resultados anteriores tenemos

$$\begin{aligned}
 -2N \int \frac{d^4 k \ k^\mu \ k^\nu}{(k^2 + 2k \cdot b + a^2)^{N+1}} &= \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N}{(4\pi)^w \Gamma(N)} D^{w-N-1} (2b^\mu b_\nu \Gamma(N-w+1) - g^{\mu\nu} \Gamma(N-w) D) \\
 \int \frac{d^4 k \ k^\mu \ k^\nu}{(k^2 + 2k \cdot b + a^2)^{N+1}} &= \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^{N+1}}{2(4\pi)^w \Gamma(N+1)} D^{w-N-1} (2b^\mu b_\nu \Gamma(N-w+1) - g^{\mu\nu} \Gamma(N-w) D)
 \end{aligned}$$

recordando que  $N\Gamma(N) = \Gamma(N+1)$ , podemos hacer el cambio de variable  $N' = N+1$

$$\int \frac{d^4 k \ k^\mu \ k^\nu}{(k^2 + 2k \cdot b + a^2)^{N'}} = \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^{N'}}{2(4\pi)^w \Gamma(N')} D^{w-N'} (2b^\mu b_\nu \Gamma(N'-w) - g^{\mu\nu} \Gamma(N'-w-1) D)$$

pero dado que  $N'$  es una variable muda, podemos renombrarla y factorizando por 2 el lado derecho

$$\int \frac{d^4 k \ k^\mu \ k^\nu}{(k^2 + 2k \cdot b + a^2)^N} = \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N}{(4\pi)^w \Gamma(N)} D^{w-N} \left( b^\mu b_\nu \Gamma(N-w) - \Gamma(N-w-1) \frac{g^{\mu\nu}}{2} D \right)$$

obteniendo finalmente

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^4 k \ k^\mu \ k^\nu}{\prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i}} \\
 &= \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N}{(4\pi)^w \Gamma(N)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_n - i - 1)} D^{w-N} \left( b^\mu b_\nu \Gamma(N-w) - \Gamma(N-w-1) \frac{g^{\mu\nu}}{2} D \right)
 \end{aligned} \tag{E.50}$$

Si multiplicamos la ecuación anterior por  $g_{\mu\nu}$

$$\int \frac{d^4 k \ k^\mu \ k^\nu \ g_{\mu\nu}}{\prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i}} = \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N}{(4\pi)^w \Gamma(N)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)}$$

$$\times D^{w-N} \left( b^\mu b_\nu g_{\mu\nu} \Gamma(N-w) - \Gamma(N-w-1) \frac{g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}}{2} D \right)$$

obtenemos finalmente

$$\int \frac{d^4 k \ k^2}{(2\pi)^4 \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i}} = \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N}{(4\pi)^w \Gamma(N)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)}$$

$$\times D^{w-N} (b^2 \Gamma(N-w) - \Gamma(N-w-1) w D) \quad (\text{E.51})$$

#### E.4.1. Función escalar de dos puntos y $k^2$ en el numerador

Para el caso de dos propagadores  $N = 2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ , donde  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , teniendo en cuenta la gráfica(E.2) como apoyo y usando la ecuación(E.51) tenemos

$$\int \frac{d^4 k \ k^2}{(2\pi)^4 ((k+p)^2 - m_1^2) (k^2 - m_2^2)}$$

$$= \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^2}{(4\pi)^w \Gamma(1) \Gamma(1)} \int_0^1 dx_1 (x_0 - x_1)^{(1-1)} (x_1 - x_2)^{(1-1)} D^{w-2} (b^2 \Gamma(2-w) - \Gamma(2-w-1) D)$$

$$= \frac{i\mu^{4-2w}}{(4\pi)^w} \int_0^1 dx \ D^{w-2} (b^2 \Gamma(2-w) - \Gamma(1-w) D)$$

$$= \frac{i\mu^{4-2(2+\varepsilon)}}{(4\pi)^{2+\varepsilon}} \int_0^1 dx \ D^{2+\varepsilon-2} (b^2 \Gamma(2-2-\varepsilon) - \Gamma(1-2-\varepsilon) D)$$

$$= \frac{i\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2+\varepsilon}} \int_0^1 dx \ D^\varepsilon (b^2 \Gamma(-\varepsilon) - \Gamma(-1-\varepsilon) D)$$

...



### E.4.2. Función escalar de tres puntos y $k^\mu k^\nu$ en el numerador

Para el caso de tres propagadores  $N = 3 = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ , donde  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$  y teniendo en cuenta la grafica(E.4) como apoyo, podemos usar la ecuación(E.50)

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 k \ k^\mu \ k^\nu}{(2\pi)^4 \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i}} \\ &= \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^N}{(4\pi)^w \Gamma(N)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^{(\alpha_{n-i}-1)} D^{w-N} \left( b^\mu b_\nu \Gamma(N-w) - \Gamma(N-w-1) \frac{g^{\mu\nu}}{2} D \right) \end{aligned}$$

reemplazando tenemos

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 k \ k^\mu \ k^\nu}{[(k+q_1)^2 - m_1^2] (k^2 - m_2^2) [(k+q_2)^2 - m_3^2]} \\ &= \frac{i\mu^{4-2w} (-1)^3}{(4\pi)^w} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 D^{w-3} \left( b^\mu b_\nu \Gamma(3-w) - \Gamma(3-w-1) \frac{g^{\mu\nu}}{2} D \right) \\ &= -\frac{i(\mu^2 4\pi)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy D^{(2+\varepsilon)-3} \left( b^\mu b_\nu \Gamma(3-(2+\varepsilon)) - \Gamma(2-(2+\varepsilon)) \frac{g^{\mu\nu}}{2} D \right) \\ &= -\frac{i(\mu^2 4\pi)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy D^{-1+\varepsilon} \left( b^\mu b_\nu \Gamma(1-\varepsilon) - \Gamma(-\varepsilon) \frac{g^{\mu\nu}}{2} D \right) \end{aligned}$$

debido a que solo tenemos dos variables de integración renombramos  $x_1 = x$  y  $x_2 = y$  y dado que  $w = 2 + \varepsilon$  podemos escribir  $\frac{i\mu^{4-2w}}{(4\pi)^w} = \frac{i(\mu^2 4\pi)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^2}$ , si ahora reemplazamos  $\Gamma(1-\varepsilon) = 1 + \varepsilon\gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$  y

$\Gamma(-\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \gamma_E^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$  obtenemos

$$\begin{aligned}
 & -\frac{i(\mu^2 4\pi)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy D^{-1+\varepsilon} \left( b^\mu b_\nu \Gamma(1-\varepsilon) - \Gamma(-\varepsilon) \frac{g^{\mu\nu}}{2} D \right) \\
 = & -\frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left( \frac{D}{\mu^2 4\pi} \right)^\varepsilon \left( \frac{b^\mu b_\nu}{D} (1 + \varepsilon \gamma_E) - \left( -\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E \right) \frac{g^{\mu\nu}}{2} \right) \\
 = & -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left( 1 + \varepsilon \ln \frac{D}{\mu^2 4\pi} \right) \left( \frac{b^\mu b_\nu}{D} + \varepsilon \gamma_E \frac{b^\mu b_\nu}{D} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{g^{\mu\nu}}{2} + \gamma_E \frac{g^{\mu\nu}}{2} \right) \\
 = & -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left( \frac{b^\mu b_\nu}{D} + \varepsilon \gamma_E \frac{b^\mu b_\nu}{D} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{g^{\mu\nu}}{2} + \gamma_E \frac{g^{\mu\nu}}{2} + \varepsilon \frac{b^\mu b_\nu}{D} \ln \frac{D}{\mu^2 4\pi} + \varepsilon^2 \gamma_E \frac{b^\mu b_\nu}{D} \ln \frac{D}{\mu^2 4\pi} \right. \\
 & \left. + \frac{g^{\mu\nu}}{2} \ln \frac{D}{\mu^2 4\pi} + \gamma_E \varepsilon \frac{g^{\mu\nu}}{2} \ln \frac{D}{\mu^2 4\pi} \right) \\
 = & -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left( \frac{b^\mu b_\nu}{D} + \frac{g^{\mu\nu}}{2} \ln \frac{D}{\mu^2 4\pi} \right)
 \end{aligned}$$

por lo tanto podemos escribir finalmente

$$\int \frac{d^4 k \, k^\mu \, k^\nu}{[(k+q_1)^2 - m_1^2] (k^2 - m_2^2) [(k+q_2)^2 - m_3^2]} = -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left( \frac{b^\mu b_\nu}{D} + \frac{g^{\mu\nu}}{2} \ln \frac{D}{\mu^2 4\pi} \right)$$

donde conviene recordar que

$$D = b^2 - a^2 = (p_1(1-x) + p_2 y)^2 - ((m_1^2 - p_1^2 - m_2^2)x + (p_2^2 + m_2^2 - m_3^2)y + p_1^2 - m_1^2)$$

Las formas integrales relevantes para los cálculos realizados son:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^4 k}{[(k+q_1)^2 - m_1^2] (k^2 - m_2^2) [(k+q_2)^2 - m_3^2]} &= \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{D} & (E.52) \\
 \int \frac{d^4 k \, k^\mu}{[(k+q_1)^2 - m_1^2] (k^2 - m_2^2) [(k+q_2)^2 - m_3^2]} &= \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{b^\mu}{D} \\
 \int \frac{d^4 k \, k^\mu \, k^\nu}{[(k+q_1)^2 - m_1^2] (k^2 - m_2^2) [(k+q_2)^2 - m_3^2]} &= -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left( \frac{b^\mu b_\nu}{D} + \frac{g^{\mu\nu}}{2} \ln \frac{D}{\mu^2 4\pi} \right)
 \end{aligned}$$

## E.5. Resumen

Por comodidad compilamos todas las relaciones anteriormente calculadas en una sola tabla

$$\int \frac{d^4 k}{((p+k)^2 - m_i^2)^2 (k^2 - m_W^2)} = \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{1-x}{m_\nu^2 x^2 + (m_W^2 - m_\nu^2 - m_i^2)x + m_i^2}$$

$$\int \frac{d^4 k}{(k^2 - m_W^2)^2 ((p+k)^2 - m_i^2)} = \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{x}{m_\nu^2 x^2 + x(m_W^2 - m_\nu^2 - m_i^2) + m_i^2}$$

$$\int \frac{k^\mu d^4 k}{(k^2 - m_W^2)^2 ((p+k)^2 - m_i^2)} = \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{x^2 p^\mu}{m_\nu^2 x^2 + x(m_W^2 - m_\nu^2 - m_i^2) + m_i^2}$$

$$\int \frac{k^\mu d^4 k}{((p+k)^2 - m_i^2)^2 (k^2 - m_W^2)} = \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(1-x)^2 p^\mu}{m_\nu^2 x^2 + x(m_W^2 - m_\nu^2 - m_i^2) + m_i^2}$$

# Apéndice F

## Cálculos para términos que contienen $A$ , $B$

Los calculos intermedios que se encuentran en los numeradores de las integrales en el capítulo 6 son:

- Caso  $AB$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 AB &= (aP_L + bP_R)(cP_L + dP_R) = (acP_LP_L + bcP_RP_L + adP_LP_R + bdP_RP_R) \\
 &= (acP_L + bdP_R) = \left( \frac{ac}{2}(1 - \gamma_5) + \frac{bd}{2}(1 + \gamma_5) \right) \\
 &= \frac{1}{2}((ac + bd) + (bd - ac)\gamma_5)
 \end{aligned} \tag{F.1}$$

- Caso  $AB\gamma_\alpha$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 AB\gamma_\alpha &= (aP_L + bP_R)(cP_L + dP_R)\gamma_\alpha = \gamma_\alpha(aP_R + bP_L)(cP_R + dP_L) = \gamma_\alpha(acP_R + bdP_L) \\
 &= \gamma_\alpha \frac{1}{2}((ac + bd) + (ac - bd)\gamma_5)
 \end{aligned} \tag{F.2}$$

- Caso  $A\gamma_\alpha B$ , el término  $\gamma_\alpha$  lo sacaremos siempre por la izquierda

$$\begin{aligned}
 A\gamma_\alpha B &= (aP_L + bP_R)\gamma_\alpha(cP_L + dP_R) = \gamma_\alpha(aP_R + bP_L)(cP_L + dP_R) = \gamma_\alpha(bcP_L + adP_R) \\
 &= \gamma_\alpha \frac{1}{2}((bc + ad) + (ad - bc)\gamma_5)
 \end{aligned} \tag{F.3}$$

- Caso  $AB\not{p}'_1$ , debido a que el espinor  $u(p_1)$  se encuentra a la derecha tenemos

$$AB\not{p}'_1 = (aP_L + bP_R)(cP_L + dP_R)\not{p}'_1 = \frac{1}{2}((ac + bd) + (bd - ac)\gamma_5)m_\nu \tag{F.4}$$

- Caso  $A\not{p}'_1 B$ , debido a que el espinor  $u(p_1)$  se encuentra a la derecha, debemos llevar el término  $\not{p}'_1$  en esa dirección, para emplear la ecuación de Dirac

$$\begin{aligned}
 A\not{p}'_1 B &= (aP_L + bP_R)\not{p}'_1(cP_L + dP_R) = (aP_L + bP_R)(cP_R + dP_L)\not{p}'_1 = (adP_L + bcP_R)m_\nu \\
 &= \left( \frac{ad}{2}(1 - \gamma_5) + \frac{bc}{2}(1 + \gamma_5) \right) = \frac{1}{2}m_\nu((ad + bc) + (bc - ad)\gamma_5)
 \end{aligned} \tag{F.5}$$

- Caso  $A\gamma^\alpha \not{P}_1 B$ , de lo anterior

$$\begin{aligned} A\gamma^\alpha \not{P}_1 B &= (aP_L + bP_R) \gamma^\alpha \not{P}_1 (cP_L + dP_R) = \gamma^\alpha (aP_R + bP_L) (cP_R + dP_L) \not{P}_1 \\ &= m_\nu \gamma^\alpha \frac{1}{2} ((bd + ac) + (ac - bd) \gamma_5) \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

- Caso  $A\not{P}_2 B$ , debido a que el espinor  $\bar{u}(p_2)$  se encuentra a la izquierda, debemos llevar el término  $\not{P}_2$  en esa dirección, para emplear la ecuación de Dirac

$$\begin{aligned} A\not{P}_2 B &= (aP_L + bP_R) \not{P}_2 (cP_L + dP_R) = \not{P}_2 (aP_R + bP_L) (cP_L + dP_R) = \not{P}_2 (adP_R + bcP_L) \\ &= \left( \frac{ad}{2} (1 + \gamma_5) + \frac{bc}{2} (1 - \gamma_5) \right) = \frac{1}{2} m_\nu ((ad + bc) + (ad - bc) \gamma_5) \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

- Caso  $A\not{P}_2 \gamma^\alpha B$ , de lo anterior

$$\begin{aligned} A\not{P}_2 \gamma^\alpha B &= (aP_L + bP_R) \not{P}_2 \gamma^\alpha (cP_L + dP_R) = \not{P}_2 \gamma^\alpha (aP_L + bP_R) (cP_L + dP_R) \\ &= m_\nu \gamma^\alpha \frac{1}{2} ((ac + bd) + (bd - ac) \gamma_5) \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

- Caso  $AB\not{P}_2$ , de lo anterior

$$\begin{aligned} AB\not{P}_2 &= (aP_L + bP_R) (cP_L + dP_R) \not{P}_2 = \not{P}_2 (aP_R + bP_L) (cP_R + dP_L) = \not{P}_2 (acP_R + bdP_L) \\ &= \frac{1}{2} m_\nu ((ac + bd) + (ac - bd) \gamma_5) \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

- Caso  $A\not{P}_2 \gamma^\alpha \not{P}_1 B$ , siguiendo el mismo procedimiento anterior

$$\begin{aligned} A\not{P}_2 \gamma^\alpha \not{P}_1 B &= (aP_L + bP_R) \not{P}_2 \gamma^\alpha \not{P}_1 (cP_L + dP_R) = \not{P}_2 \gamma^\alpha (aP_L + bP_R) (cP_R + dP_L) \not{P}_1 \\ &= m_\nu^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} ((bc + ad) + (bc - ad) \gamma_5) \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

- Caso  $2b^\alpha b^\beta AB\gamma^\beta$ , teniendo en cuenta que  $b = (p_1(1-x) + p_2y)$  tenemos

$$\begin{aligned} 2b^\alpha b^\beta AB\gamma^\beta &= 2b^\alpha AB\not{P} \\ &= 2(p_{1\alpha}(1-x) + p_{2\alpha}y) AB(\not{P}_1(1-x) + \not{P}_2y) \\ &= 2(p_{1\alpha}(1-x) + p_{2\alpha}y) (AB\not{P}_1(1-x) + AB\not{P}_2y) \\ &= [2p_{1\alpha}(1-x)^2 + 2p_{2\alpha}y(1-x)] AB\not{P}_1 + [2p_{1\alpha}(1-x)y + 2p_{2\alpha}y^2] AB\not{P}_2 \end{aligned}$$

reemplazando los resultados obtenidos en (F.4,F.9) obtenemos

$$\begin{aligned} 2b^\alpha b^\beta AB\gamma^\beta &= [2p_{1\alpha}(1-x)^2 + 2p_{2\alpha}y(1-x)] \frac{1}{2} m_\nu ((ac + bd) + (bd - ac) \gamma_5) \\ &\quad + [2p_{1\alpha}(1-x)y + 2p_{2\alpha}y^2] \frac{1}{2} m_\nu ((ac + bd) + (ac - bd) \gamma_5) \\ &= [p_{1\alpha}(1-x)^2 + p_{2\alpha}y(1-x)] m_\nu ((ac + bd) + (bd - ac) \gamma_5) \\ &\quad + [p_{1\alpha}(1-x)y + p_{2\alpha}y^2] m_\nu ((ac + bd) - (bd - ac) \gamma_5) \\ &= [p_{1\alpha}(1-x)^2 + p_{2\alpha}y(1-x) + p_{1\alpha}(1-x)y + p_{2\alpha}y^2] m_\nu (ac + bd) \\ &\quad + [p_{1\alpha}(1-x)^2 + p_{2\alpha}y(1-x) - p_{1\alpha}(1-x)y - p_{2\alpha}y^2] m_\nu (bd - ac) \gamma_5 \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

- Caso  $(p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) b^\beta AB\gamma^\beta$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 (p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) b^\beta AB\gamma^\beta &= (p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) AB\eta \\
 &= (p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) AB (\eta'_1 (1-x) + \eta'_2 y) \\
 &= (p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) AB\eta'_1 (1-x) + (p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) AB\eta'_2 y
 \end{aligned}$$

reemplazando los resultados obtenidos en (F.4,F.9) obtenemos

$$\begin{aligned}
 &(p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) b^\beta AB\gamma^\beta \\
 = &(p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) \frac{1}{2} m_\nu ((ac + bd) + (bd - ac) \gamma_5) (1-x) + (p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) \frac{1}{2} m_\nu ((ac + bd) + (ac - bd) \gamma_5) y \\
 = &\frac{1}{2} m_\nu [(p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) (1-x) + (p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) y] (ac + bd) \\
 &+ \frac{1}{2} m_\nu [(p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) (1-x) - (p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) y] (bd - ac) \gamma_5
 \end{aligned} \tag{F.12}$$

Para los siguientes calculos debemos tener en cuenta que  $\eta'_2 \eta'_2 = m_\nu^2$ ,  $\eta'_1 \eta'_2 = 2m_\nu^2 - \eta'_2 \eta'_1$  y  $\gamma^\alpha \gamma^\beta = 2g^{\beta\alpha} - \gamma^\beta \gamma^\alpha$

- Caso  $-A\eta\gamma^\alpha\eta B$  tenemos

$$\begin{aligned}
 &-A\eta\gamma^\alpha\eta B \\
 = &-A (\eta'_1 (1-x) + \eta'_2 y) \gamma^\alpha (\eta'_1 (1-x) + \eta'_2 y) B \\
 = &-(1-x)^2 A\eta'_1 \gamma^\alpha \eta'_1 B - y(1-x) A\eta'_2 \gamma^\alpha \eta'_1 B - (1-x) y A\eta'_1 \gamma^\alpha \eta'_2 B - y^2 A\eta'_2 \gamma^\alpha \eta'_2 B \\
 = &-(1-x)^2 A(2p_{1\alpha} - \gamma_\alpha \eta'_1) \eta'_1 B - y(1-x) A\eta'_2 \gamma^\alpha \eta'_1 B - (1-x) y A(2p_{1\alpha} - \gamma_\alpha \eta'_1) \eta'_2 B \\
 &- y^2 A\eta'_2 (2p_{2\alpha} - \eta'_2 \gamma_\alpha) B \\
 = &-2(1-x)^2 A p_{1\alpha} \eta'_1 B + (1-x)^2 A \gamma_\alpha \eta'_1 \eta'_1 B - y(1-x) A\eta'_2 \gamma^\alpha \eta'_1 B - 2(1-x) y A p_{1\alpha} \eta'_2 B \\
 &+ (1-x) y A \gamma_\alpha \eta'_1 \eta'_2 B - 2y^2 A\eta'_2 p_{2\alpha} B + y^2 A\eta'_2 \eta'_2 \gamma_\alpha B \\
 = &-2(1-x)^2 A p_{1\alpha} \eta'_1 B + (1-x)^2 m_\nu^2 A \gamma_\alpha B - y(1-x) A\eta'_2 \gamma^\alpha \eta'_1 B - 2(1-x) y A p_{1\alpha} \eta'_2 B \\
 &+ 2m_\nu^2 (1-x) y A \gamma_\alpha B - (1-x) y A \gamma_\alpha \eta'_2 \eta'_1 B - 2y^2 A\eta'_2 p_{2\alpha} B + y^2 m_\nu^2 A \gamma_\alpha B \\
 = &m_\nu^2 ((1-x)^2 + 2(1-x)y + y^2) A \gamma_\alpha B - 2(1-x)^2 A p_{1\alpha} \eta'_1 B - y(1-x) A\eta'_2 \gamma^\alpha \eta'_1 B \\
 &- 2(1-x) y A\eta'_2 p_{1\alpha} B - (1-x) y A \gamma_\alpha \eta'_2 \eta'_1 B - 2y^2 A\eta'_2 p_{2\alpha} B \\
 = &m_\nu^2 ((1-x)^2 + 2(1-x)y + y^2) A \gamma_\alpha B - 2p_{1\alpha} (1-x)^2 A \eta'_1 B - y(1-x) A\eta'_2 \gamma^\alpha \eta'_1 B \\
 &- 2p_{1\alpha} (1-x) y A\eta'_2 B - (1-x) y A(2p_{2\alpha} - \eta'_2 \gamma_\alpha) \eta'_1 B - 2p_{2\alpha} y^2 A\eta'_2 B \\
 = &m_\nu^2 ((1-x)^2 + 2(1-x)y + y^2) A \gamma_\alpha B - 2p_{1\alpha} (1-x)^2 A \eta'_1 B - y(1-x) A\eta'_2 \gamma^\alpha \eta'_1 B \\
 &- 2p_{1\alpha} (1-x) y A\eta'_2 B - 2p_{2\alpha} (1-x) y A \eta'_1 B + (1-x) y A\eta'_2 \gamma_\alpha \eta'_1 B - 2p_{2\alpha} y^2 A\eta'_2 B
 \end{aligned}$$

si reemplazamos ahora los resultados de las ecuaciones( F.3, F.5 ,F.10 y F.7) obtenemos

$$\begin{aligned}
 & -Ab\gamma^\alpha bB \\
 = & m_\nu^2 ((1-x)^2 + 2(1-x)y + y^2) \gamma^\alpha \frac{1}{2} ((bc+ad) + (ad-bc)\gamma_5) \\
 & -2p_{1\alpha}(1-x)^2 \frac{1}{2} m_\nu ((ad+bc) + (bc-ad)\gamma_5) - y(1-x) m_\nu^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} ((bc+ad) + (bc-ad)\gamma_5) \\
 & -2p_{1\alpha}(1-x)y \frac{1}{2} m_\nu ((ad+bc) + (ad-bc)\gamma_5) - 2p_{2\alpha}(1-x)y \frac{1}{2} m_\nu ((ad+bc) + (bc-ad)\gamma_5) \\
 & + (1-x)ym_\nu^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} ((bc+ad) + (bc-ad)\gamma_5) - 2p_{2\alpha}y^2 \frac{1}{2} m_\nu ((ad+bc) + (ad-bc)\gamma_5) \\
 = & m_\nu^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} [((1-x)^2 + 2(1-x)y + y^2) - y(1-x) + (1-x)y] (bc+ad) \\
 & -m_\nu [p_{1\alpha}(1-x)^2 + p_{1\alpha}(1-x)y + p_{2\alpha}(1-x)y + p_{2\alpha}y^2] (ad+bc) \\
 & +m_\nu^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} [(1-x)y - ((1-x)^2 + 2(1-x)y + y^2) - y(1-x)] (bc-ad)\gamma_5 \\
 & +m_\nu [p_{1\alpha}(1-x)y + p_{2\alpha}y^2 - p_{1\alpha}(1-x)^2 - p_{2\alpha}(1-x)y] (bc-ad)\gamma_5 \\
 = & \frac{1}{2} m_\nu^2 \gamma^\alpha (y-x+1)^2 (bc+ad) - m_\nu (p_{1\alpha} - xp_{1\alpha} + yp_{2\alpha}) (y-x+1) (ad+bc) \\
 & -m_\nu^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} (y-x+1)^2 (bc-ad)\gamma_5 + m_\nu (p_{1\alpha} - xp_{1\alpha} + yp_{2\alpha}) (x+y-1) (bc-ad)\gamma_5 \\
 = & \left[ \frac{1}{2} m_\nu^2 \gamma^\alpha (y-x+1)^2 - m_\nu (p_{1\alpha} - xp_{1\alpha} + yp_{2\alpha}) (y-x+1) \right] (ad+bc) \\
 & + \left[ m_\nu (p_{1\alpha} - xp_{1\alpha} + yp_{2\alpha}) (x+y-1) - m_\nu^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} (y-x+1)^2 \right] (bc-ad)\gamma_5 \tag{F.13}
 \end{aligned}$$

■ Caso  $b^\mu A\gamma^\mu \gamma^\alpha B$  tenemos

$$\begin{aligned}
 b^\mu A\gamma^\mu \gamma^\alpha B & = Ab\gamma^\alpha B \\
 & = A(\not{p}_1(1-x) + \not{p}_2 y) \gamma^\alpha B \\
 & = (1-x)A\not{p}_1 \gamma^\alpha B + yA\not{p}_2 \gamma^\alpha B \\
 & = (1-x)A(2p_{1\alpha} - \gamma^\alpha \not{p}_1)B + yA\not{p}_2 \gamma^\alpha B \\
 & = 2p_{1\alpha}(1-x)AB - (1-x)A\gamma^\alpha \not{p}_1 B + yA\not{p}_2 \gamma^\alpha B
 \end{aligned}$$

si reemplazamos ahora los resultados de las ecuaciones( F.1, F.6 y F.8) obtenemos

$$\begin{aligned}
 & b^\mu A\gamma^\mu \gamma^\alpha B \\
 = & 2p_{1\alpha}(1-x) \frac{1}{2} ((ac+bd) + (bd-ac)\gamma_5) - (1-x)m_\nu \gamma^\alpha \frac{1}{2} ((bd+ac) + (ac-bd)\gamma_5) \\
 & +ym_\nu \gamma^\alpha \frac{1}{2} ((ac+bd) + (bd-ac)\gamma_5) \\
 = & p_{1\alpha}(1-x)(ac+bd) + m_\nu \gamma^\alpha \frac{1}{2} (y-1+x)(bd+ac) \\
 & +p_{1\alpha}(1-x)(bd-ac)\gamma_5 + m_\nu \gamma^\alpha \frac{1}{2} (1-x+y)(bd-ac)\gamma_5 \tag{F.14}
 \end{aligned}$$

- Caso  $b^\beta A\gamma^\alpha\gamma^\beta B$  tenemos

$$\begin{aligned}
 b^\beta A\gamma^\alpha\gamma^\beta B &= A\gamma^\alpha\psi B \\
 &= A\gamma^\alpha (\psi_1 (1-x) + \psi_2 y) B \\
 &= (1-x) A\gamma^\alpha\psi_1 B + yA\gamma^\alpha\psi_2 B \\
 &= (1-x) A\gamma^\alpha\psi_1 B + yA (2p_{2\alpha} - \psi_2\gamma^\alpha) B \\
 &= (1-x) A\gamma^\alpha\psi_1 B + 2p_{2\alpha}yAB - yA\psi_2\gamma^\alpha B
 \end{aligned}$$

si reemplazamos ahora los resultados de las ecuaciones( F.1, F.6 y F.8) obtenemos

$$\begin{aligned}
 &b^\beta A\gamma^\alpha\gamma^\beta B \\
 = &(1-x) m_\nu\gamma^\alpha \frac{1}{2} ((bd+ac) + (ac-bd)\gamma_5) + 2p_{2\alpha}y \frac{1}{2} ((ac+bd) + (bd-ac)\gamma_5) \\
 &- ym_\nu\gamma^\alpha \frac{1}{2} ((bd+ac) + (bd-ac)\gamma_5) \\
 = &p_{2\alpha}y(ac+bd) + m_\nu\gamma^\alpha \frac{1}{2} (1-x-y)(ac+bd) \\
 &+ p_{2\alpha}y(bd-ac)\gamma_5 - m_\nu\gamma^\alpha \frac{1}{2} (1-x-y)(bd-ac)\gamma_5
 \end{aligned} \tag{F.15}$$

- Caso  $p_{2\beta} b^\mu A\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta B$  obtenemos

$$\begin{aligned}
 p_{2\beta} b^\mu A\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta B &= Ab\gamma^\alpha\psi_2 B \\
 &= A(\psi_1 (1-x) + \psi_2 y) \gamma^\alpha\psi_2 B \\
 &= (1-x) A\psi_1\gamma^\alpha\psi_2 B + yA\psi_2\gamma^\alpha\psi_2 B \\
 &= (1-x) A(2p_{1\alpha} - \gamma^\alpha\psi_1) \psi_2 B + yA\psi_2(2p_{2\alpha} - \psi_2\gamma^\alpha) B \\
 &= (1-x) A(2p_{1\alpha}\psi_2 - \gamma^\alpha\psi_1\psi_2) B + yA(2\psi_2p_{2\alpha} - \psi_2\psi_2\gamma^\alpha) B \\
 &= (1-x) A(2p_{1\alpha}\psi_2 - 2\gamma^\alpha p_1 \cdot p_2 + \gamma^\alpha\psi_2\psi_1) B + yA(2\psi_2p_{2\alpha} - \psi_2\psi_2\gamma^\alpha) B \\
 &= (1-x) A(2p_{1\alpha}\psi_2 - 2\gamma^\alpha p_1 \cdot p_2 + 2p_{2\alpha}\psi_1 - \psi_2\gamma^\alpha\psi_1) B + yA(2\psi_2p_{2\alpha} - \psi_2\psi_2\gamma^\alpha) B \\
 &= 2(1-x) p_{1\alpha}A\psi_2 B - 2(1-x) m_\nu^2 A\gamma^\alpha B + 2(1-x) p_{2\alpha}A\psi_1 B - (1-x) A\psi_2\gamma^\alpha\psi_1 B \\
 &\quad + 2yp_{2\alpha}A\psi_2 B - yAm_\nu^2\gamma^\alpha B
 \end{aligned}$$



si reemplazamos ahora los resultados de las ecuaciones( F.7, F.3,F.10)

$$\begin{aligned}
 & p_{2\beta} b^\mu A \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta B \\
 = & 2(1-x) p_{1\alpha} \frac{1}{2} m_\nu ((ad+bc) + (ad-bc) \gamma_5) - 2(1-x) m_\nu^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} ((bc+ad) + (ad-bc) \gamma_5) \\
 & + 2(1-x) p_{2\alpha} \frac{1}{2} m_\nu ((ad+bc) + (bc-ad) \gamma_5) - (1-x) m_\nu^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} ((bc+ad) + (bc-ad) \gamma_5) \\
 & + 2yp_{2\alpha} \frac{1}{2} m_\nu ((ad+bc) + (ad-bc) \gamma_5) - ym_\nu^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} ((bc+ad) + (ad-bc) \gamma_5) \\
 = & m_\nu [(1-x) p_{1\alpha} + (1-x) p_{2\alpha} + yp_{2\alpha}] (ad+bc) - \left[ (1-x) m_\nu^2 \gamma^\alpha + (1-x) m_\nu^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} + ym_\nu^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} \right] (bc+ad) \\
 & + m_\nu [(1-x) p_{2\alpha} - (1-x) p_{1\alpha} - yp_{2\alpha}] (bc-ad) \gamma_5 + m_\nu^2 \gamma^\alpha \left[ (1-x) - (1-x) \frac{1}{2} + y \frac{1}{2} \right] (bc-ad) \gamma_5 \\
 = & m_\nu [(1-x) p_{1\alpha} + (1-x) p_{2\alpha} + yp_{2\alpha}] (ad+bc) - \frac{1}{2} \gamma^\alpha m_\nu^2 (y-3x+3) (bc+ad) \\
 & + m_\nu [(1-x) p_{2\alpha} - (1-x) p_{1\alpha} - yp_{2\alpha}] (bc-ad) \gamma_5 + \frac{1}{2} m_\nu^2 \gamma^\alpha (y-x+1) (bc-ad) \gamma_5 \tag{F.1}
 \end{aligned}$$

- Caso  $p_{1\mu} b^\beta A \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta B$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 & p_{1\mu} b^\beta A \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta B \\
 = & A \not{p}_1 \gamma^\alpha \not{b} B \\
 = & A \not{p}_1 \gamma^\alpha (\not{p}_1 (1-x) + \not{p}_2 y) B \\
 = & (1-x) A \not{p}_1 \gamma^\alpha \not{p}_1 B + y A \not{p}_1 \gamma^\alpha \not{p}_2 B \\
 = & (1-x) A (2p_{1\alpha} - \gamma^\alpha \not{p}_1) \not{p}_1 B + y A \not{p}_1 (2p_{2\alpha} - \not{p}_2 \gamma^\alpha) B \\
 = & 2(1-x) A p_{1\alpha} \not{p}_1 B - (1-x) A \gamma^\alpha \not{p}_1 \not{p}_1 B + 2y A \not{p}_1 p_{2\alpha} B - y A \not{p}_1 \not{p}_2 \gamma^\alpha B \\
 = & 2(1-x) p_{1\alpha} A \not{p}_1 B - (1-x) A \gamma^\alpha p_1^2 B + 2yp_{2\alpha} A \not{p}_1 B - y A (p_1 \cdot p_2 - \not{p}_2 \not{p}_1) \gamma^\alpha B \\
 = & 2(1-x) p_{1\alpha} A \not{p}_1 B - (1-x) m_\nu^2 A \gamma^\alpha B + 2yp_{2\alpha} A \not{p}_1 B - y m_\nu^2 A \gamma^\alpha B + y A \not{p}_2 \not{p}_1 \gamma^\alpha B \\
 = & 2(1-x) p_{1\alpha} A \not{p}_1 B - (1-x) m_\nu^2 A \gamma^\alpha B + 2yp_{2\alpha} A \not{p}_1 B - y m_\nu^2 A \gamma^\alpha B + y A \not{p}_2 (2p_{1\alpha} - \gamma^\alpha \not{p}_1) B \\
 = & 2((1-x) p_{1\alpha} + yp_{2\alpha}) A \not{p}_1 B - m_\nu^2 (1-x-y) A \gamma^\alpha B + 2yp_{1\alpha} A \not{p}_2 B - y A \not{p}_2 \gamma^\alpha \not{p}_1 B
 \end{aligned}$$

si reemplazamos ahora los resultados de las ecuaciones(F.5 ,F.3,F.7 y F.10)

$$\begin{aligned}
 & p_{1\mu} b^\beta A \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta B \\
 = & 2((1-x) p_{1\alpha} + yp_{2\alpha}) \frac{1}{2} m_\nu ((ad+bc) + (bc-ad) \gamma_5) - m_\nu^2 (1-x-y) \gamma^\alpha \frac{1}{2} ((bc+ad) + (ad-bc) \gamma_5) \\
 & + 2yp_{1\alpha} \frac{1}{2} m_\nu ((ad+bc) + (ad-bc) \gamma_5) - ym_\nu^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} ((bc+ad) + (bc-ad) \gamma_5) \\
 = & m_\nu [(1-x) p_{1\alpha} + yp_{2\alpha} + yp_{1\alpha}] (ad+bc) - m_\nu^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} [(1-x-y) + y] (bc+ad) \\
 & + m_\nu^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} [(1-x-y) - y] (bc-ad) \gamma_5 + m_\nu [((1-x) p_{1\alpha} + yp_{2\alpha}) - yp_{1\alpha}] (bc-ad) \gamma_5 \\
 = & m_\nu [(1-x) p_{1\alpha} + yp_{2\alpha} + yp_{1\alpha}] (ad+bc) - m_\nu^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} (1-x) (bc+ad) \\
 & + m_\nu^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} (1-x-2y) (bc-ad) \gamma_5 + m_\nu [(1-x) p_{1\alpha} + yp_{2\alpha} - yp_{1\alpha}] (bc-ad) \gamma_5 \tag{F.17}
 \end{aligned}$$

- Caso  $p_{1\mu}p_{2\beta}A\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta B$  tenemos

$$\begin{aligned}
 p_{1\mu}p_{2\beta}A\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta B &= A\not{p}_1\gamma^\alpha\not{p}_2B \\
 &= A(2p_{1\alpha} - \gamma^\alpha\not{p}_1)\not{p}_2B \\
 &= A(2p_{1\alpha}\not{p}_2 - \gamma^\alpha\not{p}_1\not{p}_2)B \\
 &= A(2p_{1\alpha}\not{p}_2 - 2\gamma^\alpha p_1 \cdot p_2 + \gamma^\alpha\not{p}_2\not{p}_1)B \\
 &= A(2p_{1\alpha}\not{p}_2 - 2\gamma^\alpha p_1 \cdot p_2 + 2p_{2\alpha}\not{p}_1 - \not{p}_2\gamma^\alpha\not{p}_1)B \\
 &= 2p_{2\alpha}A\not{p}_1B - 2m_\nu^2A\gamma^\alpha B + 2p_{1\alpha}A\not{p}_2B - A\not{p}_2\gamma^\alpha\not{p}_1B
 \end{aligned}$$

si remplazamos ahora los resultados de las ecuaciones(F.5 ,F.3,F.7 y F.10)

$$\begin{aligned}
 p_{1\mu}p_{2\beta}A\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta B &= 2p_{2\alpha}\frac{1}{2}m_\nu((ad+bc) + (bc-ad)\gamma_5) - 2m_\nu^2\gamma^\alpha\frac{1}{2}((bc+ad) + (ad-bc)\gamma_5) \\
 &\quad + 2p_{1\alpha}\frac{1}{2}m_\nu((ad+bc) + (ad-bc)\gamma_5) - m_\nu^2\gamma^\alpha\frac{1}{2}((bc+ad) + (bc-ad)\gamma_5) \\
 &= m_\nu(p_{2\alpha} + p_{1\alpha})(ad+bc) - \frac{3}{2}m_\nu^2\gamma^\alpha(bc+ad) \\
 &\quad + m_\nu(p_{2\alpha} - p_{1\alpha})(bc-ad)\gamma_5 + \frac{1}{2}m_\nu^2\gamma^\alpha(bc-ad)\gamma_5
 \end{aligned} \tag{F.18}$$

## F.1. Simplificación $2H1L$

Es necesario ahora reescribir la integral para el término  $\Lambda_{2H1L}^\alpha(q, l)$  en funcion de los resultados obtenidos anteriormente, para lo cual partimos de la ecuación (6.6)

$$\begin{aligned}
 &\Lambda_{2H1L}^\alpha(q, l) \\
 &= -\frac{ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left\{ \left( -\frac{2b^\alpha b^\beta}{D_1} + g^{\alpha\beta} \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} + \frac{1}{D_1} (p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) b^\beta \right) AB\gamma^\beta + \frac{m_l}{D_1} (2b^\alpha - (p_{2\alpha} + p_{1\alpha})) AB \right\} \\
 &= -\frac{ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left\{ \begin{aligned} &-\frac{m_\nu}{D_1} \left( \begin{aligned} &[p_{1\alpha}(1-x)^2 + p_{2\alpha}y(1-x) + p_{1\alpha}(1-x)y + p_{2\alpha}y^2] m_\nu(ac+bd) + \\ &[p_{1\alpha}(1-x)^2 + p_{2\alpha}y(1-x) - p_{1\alpha}(1-x)y - p_{2\alpha}y^2] m_\nu(bd-ac)\gamma_5 \end{aligned} \right. \\ &\quad \left. + \gamma_\alpha \frac{1}{2} ((ac+bd) + (ac-bd)\gamma_5) \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_\nu}{2D_1} \left( \begin{aligned} &[(p_{2\alpha} + p_{1\alpha})(1-x) + (p_{2\alpha} + p_{1\alpha})y](ac+bd) + \\ &[(p_{2\alpha} + p_{1\alpha})(1-x) - (p_{2\alpha} + p_{1\alpha})y](bd-ac)\gamma_5 \end{aligned} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_l}{D_1} (p_{1\alpha}(1-x) + p_{2\alpha}y) ((ac+bd) + (bd-ac)\gamma_5) \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_l}{2D_1} (p_{1\alpha} + p_{2\alpha}) ((ac+bd) + (bd-ac)\gamma_5) \right) \\ &= -\frac{ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left\{ \begin{aligned} &\left[ -\frac{m_\nu}{D_1} [p_{1\alpha}(1-x)^2 + p_{2\alpha}y(1-x) + p_{1\alpha}(1-x)y + p_{2\alpha}y^2] + \gamma_\alpha \frac{1}{2} \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_\nu}{2D_1} [(p_{2\alpha} + p_{1\alpha})(1-x) + (p_{2\alpha} + p_{1\alpha})y] \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_l}{D_1} (p_{1\alpha}(1-x) + p_{2\alpha}y) - \frac{m_l}{2D_1} (p_{1\alpha} + p_{2\alpha}) \right] (ac+bd) + \\ &\left[ -\frac{m_\nu}{D_1} [p_{1\alpha}(1-x)^2 + p_{2\alpha}y(1-x) - p_{1\alpha}(1-x)y - p_{2\alpha}y^2] - \gamma_\alpha \frac{1}{2} \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_\nu}{2D_1} [(p_{2\alpha} + p_{1\alpha})(1-x) - (p_{2\alpha} + p_{1\alpha})y] \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_l}{D_1} (p_{1\alpha}(1-x) + p_{2\alpha}y) - \frac{m_l}{2D_1} (p_{1\alpha} + p_{2\alpha}) \right] (bd-ac)\gamma_5 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Para cualquier función algebraica podemos utilizar el teorema de cambio de orden de integración<sup>1</sup>. Empleando este teorema sobre el resultado anterior, debemos reescribir cada uno de los términos que contengan la variable  $y$ , esto es

$$\begin{aligned}
 p_{1\alpha}(1-x)^2 + p_{2\alpha}y(1-x) + p_{1\alpha}(1-x)y + p_{2\alpha}y^2 &= p_{1\alpha}(1-x)^2 + p_{2\alpha}(1-x)^2 + p_{1\alpha}(1-x)^2 + p_{2\alpha}(1-x)^2 \\
 &= 2(p_{1\alpha} + p_{2\alpha})(1-x)^2, \\
 (p_{2\alpha} + p_{1\alpha})(1-x) + (p_{2\alpha} + p_{1\alpha})y &= (p_{2\alpha} + p_{1\alpha})(1-x) + (p_{2\alpha} + p_{1\alpha})(1-x) \\
 &= 2(p_{2\alpha} + p_{1\alpha})(1-x), \\
 p_{1\alpha}(1-x) + p_{2\alpha}y &= p_{1\alpha}(1-x) + p_{2\alpha}(1-x) = (p_{1\alpha} + p_{2\alpha})(1-x), \\
 p_{1\alpha}(1-x)^2 + p_{2\alpha}y(1-x) - p_{1\alpha}(1-x)y - p_{2\alpha}y^2 \\
 &= p_{1\alpha}(1-x)^2 + p_{2\alpha}(1-x)^2 - p_{1\alpha}(1-x)^2 - p_{2\alpha}(1-x)^2 = 0, \\
 (p_{2\alpha} + p_{1\alpha})(1-x) - (p_{2\alpha} + p_{1\alpha})y &= (p_{2\alpha} + p_{1\alpha})(1-x) - (p_{2\alpha} + p_{1\alpha})(1-x) = 0, \\
 p_{1\alpha}(1-x) + p_{2\alpha}y &= p_{1\alpha}(1-x) + p_{2\alpha}(1-x) = (p_{1\alpha} + p_{2\alpha})(1-x).
 \end{aligned}$$

al remplazar las relaciones anteriores tenemos

$$\begin{aligned}
 &\Lambda_{2H1L}^\alpha(q, l) \\
 &= -\frac{ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left\{ \begin{aligned} &\left[ -\frac{m_\nu}{D_1} [p_{1\alpha}(1-x)^2 + p_{2\alpha}y(1-x) + p_{1\alpha}(1-x)y + p_{2\alpha}y^2] + \gamma_\alpha \frac{1}{2} \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_l}{2D_1} [(p_{2\alpha} + p_{1\alpha})(1-x) + (p_{2\alpha} + p_{1\alpha})y] \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_l}{D_1} (p_{1\alpha}(1-x) + p_{2\alpha}y) - \frac{m_l}{2D_1} (p_{1\alpha} + p_{2\alpha}) \right] (ac + bd) + \\ &\left[ -\frac{m_\nu}{D_1} [p_{1\alpha}(1-x)^2 + p_{2\alpha}y(1-x) - p_{1\alpha}(1-x)y - p_{2\alpha}y^2] - \gamma_\alpha \frac{1}{2} \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_l}{2D_1} [(p_{2\alpha} + p_{1\alpha})(1-x) - (p_{2\alpha} + p_{1\alpha})y] \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_l}{D_1} (p_{1\alpha}(1-x) + p_{2\alpha}y) - \frac{m_l}{2D_1} (p_{1\alpha} + p_{2\alpha}) \right] (bd - ac) \gamma_5 \end{aligned} \right\} \\
 &= -\frac{ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left\{ \begin{aligned} &\left[ -\frac{2m_\nu}{D_1} (p_{1\alpha} + p_{2\alpha})(1-x)^2 + \gamma_\alpha \frac{1}{2} \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} + \frac{m_\nu}{D_1} (p_{2\alpha} + p_{1\alpha})(1-x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_l}{D_1} (p_{1\alpha} + p_{2\alpha})(1-x) - \frac{m_l}{2D_1} (p_{1\alpha} + p_{2\alpha}) \right] (ac + bd) + \\ &\left[ -\gamma_\alpha \frac{1}{2} \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} + \frac{m_l}{D_1} (p_{1\alpha} + p_{2\alpha})(1-x) - \frac{m_l}{2D_1} (p_{1\alpha} + p_{2\alpha}) \right] (bd - ac) \gamma_5 \end{aligned} \right\} \\
 &= -\frac{ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left\{ \begin{aligned} &\left[ \frac{m_\nu}{D_1} (p_{1\alpha} + p_{2\alpha})(-1 + 3x - x^2) + \frac{m_l}{D_1} (p_{1\alpha} + p_{2\alpha}) \left(\frac{1}{2} - x\right) + \gamma_\alpha \frac{1}{2} \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} \right] (ac + bd) \\ &\quad \left. + \left[ \frac{m_l}{D_1} (p_{1\alpha} + p_{2\alpha}) \left(\frac{1}{2} - x\right) - \gamma_\alpha \frac{1}{2} \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} \right] (bd - ac) \gamma_5 \right\}
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ahora, la relación de Gordon

$$\bar{u}(p_{2\alpha}) \gamma_\alpha u(p_{1\alpha}) = \frac{1}{2m_\nu} \bar{u}(p_{2\alpha}) [(p_2 + p_1)_\alpha + i\sigma^{\alpha\mu} q_\mu] u(p_{1\alpha})$$

donde  $q_\mu = (p_2 - p_1)_\mu$  y despejando obtenemos

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(p_{2\alpha}) (p_2 + p_1)_\alpha u(p_{1\alpha}) &= \bar{u}(p_{2\alpha}) 2m_\nu \gamma_\alpha u(p_{1\alpha}) - \bar{u}(p_{2\alpha}) i\sigma^{\alpha\mu} q_\mu u(p_{1\alpha}) \\
 &= \bar{u}(p_{2\alpha}) (2m_\nu \gamma_\alpha - i\sigma^{\alpha\mu} q_\mu) u(p_{1\alpha}).
 \end{aligned} \tag{F.19}$$

<sup>1</sup>Si tenemos una función algebraica  $\Phi(x, y)$  entonces podemos reescribirla como

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy \Phi(x, y) = \int_0^1 dx \int_0^x dy \Phi(1-y, 1-x)$$

Remplazando lo anterior en la integral obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \Lambda_{2H1L}^\alpha(q, l) \\
 = & -\frac{ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{m_\nu}{D_1} (p_{1\alpha} + p_{2\alpha}) (-1 + 3x - x^2) + \frac{m_l}{D_1} (p_{1\alpha} + p_{2\alpha}) \left(\frac{1}{2} - x\right) + \gamma_\alpha \frac{1}{2} \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} \right] (ac + bd) \\ & + \left[ \frac{m_l}{D_1} (p_{1\alpha} + p_{2\alpha}) \left(\frac{1}{2} - x\right) - \gamma_\alpha \frac{1}{2} \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} \right] (bd - ac) \gamma_5 \end{aligned} \right\} \\
 = & -\frac{ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{m_\nu}{D_1} (2m_\nu \gamma_\alpha - i\sigma^{\alpha\mu} q_\mu) (-1 + 3x - x^2) \right. \\ & \left. + \frac{m_l}{D_1} (2m_\nu \gamma_\alpha - i\sigma^{\alpha\mu} q_\mu) \left(\frac{1}{2} - x\right) + \gamma_\alpha \frac{1}{2} \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} \right] (ac + bd) \\ & + \left[ \frac{m_l}{D_1} (2m_\nu \gamma_\alpha - i\sigma^{\alpha\mu} q_\mu) \left(\frac{1}{2} - x\right) - \gamma_\alpha \frac{1}{2} \ln \frac{D_1}{\mu^2 4\pi} \right] (bd - ac) \gamma_5 \end{aligned} \right\} \quad (F.20)
 \end{aligned}$$

## F.2. Simplificación 2L1H

Es necesario ahora reescribir la integral para el término  $\Lambda_{2L1H}^\alpha(q, l)$  en funcion de los resultados obtenidos anteriormente, para lo cual partimos de la ecuación (6.12)

$$\begin{aligned}
 & \Lambda_{2L1H}^\alpha(q, l) \\
 = & \frac{-ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left[ \left( -\frac{2b^\mu b^\beta}{D_2} + g^{\mu\beta} \ln \frac{D_2}{\mu^2 4\pi} + \frac{p_{1\mu} b^\beta}{D_2} + \frac{p_{2\beta} b^\mu}{D_2} - \frac{p_{1\mu} p_{2\beta}}{D_2} \right) A\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta B \right. \\
 & \left. + \left( \frac{b^\beta}{D_2} - \frac{p_{2\beta}}{D_2} \right) m_l A\gamma^\alpha \gamma^\beta B + \left( \frac{b^\mu}{D_2} - \frac{p_{1\mu}}{D_2} \right) m_l A\gamma^\mu \gamma^\alpha B - \frac{1}{D_2} m_l^2 A\gamma^\alpha B \right]
 \end{aligned}$$

remplazando por los calculos realizados anteriormente tenemos

$$\begin{aligned}
 & \Lambda_{2L1H}^\alpha(q, l) \\
 = & \frac{-ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \\
 & \frac{2}{D_2} \left[ \frac{1}{2} m_\nu^2 \gamma^\alpha (y-x+1)^2 - m_\nu (p_{1\alpha} - xp_{1\alpha} + yp_{2\alpha}) (y-x+1) \right] (ad+bc) \\
 & + \frac{2}{D_2} \left[ m_\nu (p_{1\alpha} - xp_{1\alpha} + yp_{2\alpha}) (x+y-1) - m_\nu^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} (y-x+1)^2 \right] (bc-ad) \gamma_5 \\
 & - \gamma^\alpha (bc+ad) \ln \frac{D_2}{\mu^2 4\pi} + \gamma^\alpha (bc-ad) \gamma_5 \ln \frac{D_2}{\mu^2 4\pi} \\
 & + \frac{1}{D_2} m_\nu [(1-x)p_{1\alpha} + yp_{2\alpha} + yp_{1\alpha}] (ad+bc) - m_\nu^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2D_2} (1-x) (bc+ad) \\
 & + \frac{1}{D_2} m_\nu^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} (1-x-2y) (bc-ad) \gamma_5 + \frac{1}{D_2} m_\nu [(1-x)p_{1\alpha} + yp_{2\alpha} - yp_{1\alpha}] (bc-ad) \gamma_5 \\
 & + \frac{1}{D_2} m_\nu [(1-x)p_{1\alpha} + (1-x)p_{2\alpha} + yp_{2\alpha}] (ad+bc) - \frac{1}{2D_2} \gamma^\alpha m_\nu^2 (y-3x+3) (bc+ad) \\
 & + \frac{1}{D_2} m_\nu [(1-x)p_{2\alpha} - (1-x)p_{1\alpha} - yp_{2\alpha}] (bc-ad) \gamma_5 + \frac{1}{2D_2} m_\nu^2 \gamma^\alpha (y-x+1) (bc-ad) \gamma_5 \\
 & - \frac{1}{D_2} m_\nu (p_{2\alpha} + p_{1\alpha}) (ad+bc) - \frac{3}{2D_2} m_\nu^2 \gamma^\alpha (bc+ad) + \frac{1}{D_2} m_\nu (p_{2\alpha} - p_{1\alpha}) (bc-ad) \gamma_5 + \frac{1}{2D_2} m_\nu^2 \gamma^\alpha (bc-ad) \\
 & + \frac{m_l}{D_2} p_{2\alpha} y (ac+bd) + \frac{m_l}{D_2} m_\nu \gamma^\alpha \frac{1}{2} (1-x-y) (ac+bd) + \frac{m_l}{D_2} p_{2\alpha} y (bd-ac) \gamma_5 - \frac{m_l}{D_2} m_\nu \gamma^\alpha \frac{1}{2} (1-x-y) (bd- \\
 & - \frac{m_l}{D_2} p_{2\alpha} (ac+bd) + \frac{m_l}{D_2} \frac{1}{2} m_\nu \gamma^\alpha (ac+bd) - \frac{m_l}{D_2} p_{2\alpha} (bd-ac) \gamma_5 + \frac{m_l}{D_2} \frac{1}{2} m_\nu \gamma^\alpha (bd-ac) \gamma_5 \\
 & + \frac{m_l}{D_2} p_{1\alpha} (1-x) (ac+bd) + \frac{m_l}{D_2} m_\nu \gamma^\alpha \frac{1}{2} (y-1+x) (bd+ac) + \frac{m_l}{D_2} p_{1\alpha} (1-x) (bd-ac) \gamma_5 + \frac{m_l}{D_2} m_\nu \gamma^\alpha \frac{1}{2} (1- \\
 & - \frac{m_l}{D_2} p_{1\alpha} (ac+bd) + \frac{m_l}{D_2} m_\nu \gamma^\alpha \frac{1}{2} (ac+bd) - \frac{m_l}{D_2} p_{1\alpha} (bd-ac) \gamma_5 - \frac{m_l}{D_2} m_\nu \gamma^\alpha \frac{1}{2} (bd-ac) \gamma_5 \\
 & - \frac{1}{D_2} m_l^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} (bc+ad) + \frac{1}{D_2} m_l^2 \gamma^\alpha \frac{1}{2} (bc-ad) \gamma_5
 \end{aligned}$$

factorizando tenemos

$$\begin{aligned}
 & \Lambda_{2L1H}^\alpha(q, l) \\
 = & \frac{-ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \\
 & + \frac{1}{D_2} \gamma^\alpha \left[ m_\nu^2 (y-x+1)^2 - m_\nu^2 \frac{1}{2} (1-x) - \frac{1}{2} m_\nu^2 (y-3x+3) - \frac{3}{2} m_\nu^2 - \frac{1}{2} m_l^2 \right] (bc+ad) - \gamma^\alpha (bc+ad) \ln \frac{D_2}{\mu^2} \\
 & + \frac{1}{D_2} m_l m_\nu \gamma^\alpha \left[ \frac{1}{2} (1-x-y) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (y-1+x) + \frac{1}{2} \right] (ac+bd) \\
 & + \frac{1}{D_2} m_\nu \left[ [(1-x)p_{1\alpha} + yp_{2\alpha} + yp_{1\alpha}] - 2(p_{1\alpha} - xp_{1\alpha} + yp_{2\alpha})(y-x+1) + [(1-x)p_{1\alpha} + (1-x)p_{2\alpha} + yp_{2\alpha}] \right] \\
 & + \frac{m_l}{D_2} [p_{2\alpha}y - p_{2\alpha} + p_{1\alpha}(1-x) - p_{1\alpha}] (ac+bd) \\
 & + \frac{1}{D_2} m_\nu [2(p_{1\alpha} - xp_{1\alpha} + yp_{2\alpha})(x+y-1) + [(1-x)p_{1\alpha} + yp_{2\alpha} - yp_{1\alpha}] + [(1-x)p_{2\alpha} - (1-x)p_{1\alpha} - yp_{2\alpha}]] \\
 & + \frac{m_l}{D_2} [p_{2\alpha}y - p_{2\alpha} + p_{1\alpha}(1-x) - p_{1\alpha}] (bd-ac) \gamma_5 \\
 & + \frac{1}{D_2} \gamma^\alpha \left[ \frac{1}{2} m_\nu^2 (1-x-2y) - m_\nu^2 (y-x+1)^2 + \frac{1}{2} m_\nu^2 (y-x+1) + \frac{1}{2} m_\nu^2 + \frac{1}{2} m_l^2 \right] (bc-ad) \gamma_5 + \gamma^\alpha (bc-ad) \\
 & + \frac{1}{D_2} m_l m_\nu \gamma^\alpha \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1-x+y) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (1-x-y) \right] (bd-ac) \gamma_5
 \end{aligned}$$

simplificando

$$\begin{aligned}
 & \Lambda_{2L1H}^\alpha(q, l) \\
 = & \frac{-ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \\
 & + \frac{1}{D_2} \gamma^\alpha \left[ \left( x^2 - 2xy + y^2 + \frac{3}{2}y - \frac{5}{2} \right) m_\nu^2 - \frac{1}{2} m_l^2 \right] (bc+ad) - \gamma^\alpha (bc+ad) \ln \frac{D_2}{\mu^2 4\pi} \\
 & + \frac{1}{D_2} m_l m_\nu \gamma^\alpha (ac+bd) \\
 & + \frac{1}{D_2} m_\nu (2xp_{1\alpha} - 2y^2 p_{2\alpha} - p_{1\alpha} - yp_{1\alpha} - xp_{2\alpha} - 2x^2 p_{1\alpha} + 2xyp_{1\alpha} + 2xyp_{2\alpha}) (ad+bc) \\
 & + \frac{m_l}{D_2} (yp_{2\alpha} - xp_{1\alpha} - p_{2\alpha}) (ac+bd) \\
 & + \frac{1}{D_2} m_\nu (2y^2 p_{2\alpha} - 3p_{1\alpha} + 2p_{2\alpha} + 4xp_{1\alpha} + yp_{1\alpha} - xp_{2\alpha} - 2yp_{2\alpha} - 2x^2 p_{1\alpha} - 2xyp_{1\alpha} + 2xyp_{2\alpha}) (bc-ad) \gamma_5 \\
 & + \frac{m_l}{D_2} (yp_{2\alpha} - xp_{1\alpha} - p_{2\alpha}) (bd-ac) \gamma_5 \\
 & + \frac{1}{D_2} \gamma^\alpha \left[ \left( 2xy - x^2 + x - y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{1}{2} \right) m_\nu^2 + \frac{1}{2} m_l^2 \right] (bc-ad) \gamma_5 + \gamma^\alpha (bc-ad) \gamma_5 \ln \frac{D_2}{\mu^2 4\pi} \\
 & + \frac{1}{D_2} m_l m_\nu \gamma^\alpha y (bd-ac) \gamma_5
 \end{aligned}$$

Como para el caso de  $2H1L$  empleamos el teorema de cambio de orden de integración, esto es  $y = (1-x)$

$$\begin{aligned}
 & \Lambda_{2L1H}^\alpha(q, l) \\
 = & \frac{-ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \\
 & \frac{1}{D_2} \gamma^\alpha \left[ \left( x^2 - 2x(1-x) + (1-x)^2 + \frac{3}{2}(1-x) - \frac{5}{2} \right) m_\nu^2 - \frac{1}{2} m_l^2 \right] (bc + ad) - \gamma^\alpha (bc + ad) \ln \frac{D_2}{\mu^2 4\pi} \\
 & + \frac{1}{D_2} m_l m_\nu \gamma^\alpha (ac + bd) \\
 & + \frac{1}{D_2} m_\nu (2xp_{1\alpha} - 2(1-x)^2 p_{2\alpha} - p_{1\alpha} - (1-x)p_{1\alpha} - xp_{2\alpha} - 2x^2 p_{1\alpha} + 2x(1-x)p_{1\alpha} + 2x(1-x)p_{2\alpha}) (ad - bc) \\
 & + \frac{m_l}{D_2} ((1-x)p_{2\alpha} - xp_{1\alpha} - p_{2\alpha}) (ac + bd) \\
 & + \frac{1}{D_2} m_\nu (2(1-x)^2 p_{2\alpha} - 3p_{1\alpha} + 2p_{2\alpha} + 4xp_{1\alpha} + (1-x)p_{1\alpha} - xp_{2\alpha} - 2(1-x)p_{2\alpha} - 2x^2 p_{1\alpha} - 2x(1-x)p_{1\alpha}) (ad - bc) \\
 & + \frac{m_l}{D_2} ((1-x)p_{2\alpha} - xp_{1\alpha} - p_{2\alpha}) (bd - ac) \gamma_5 \\
 & + \frac{1}{D_2} \gamma^\alpha \left[ \left( 2x(1-x) - x^2 + x - (1-x)^2 - \frac{5}{2}(1-x) + \frac{1}{2} \right) m_\nu^2 + \frac{1}{2} m_l^2 \right] (bc - ad) \gamma_5 + \gamma^\alpha (bc - ad) \gamma_5 \ln \frac{D_2}{\mu^2 4\pi} \\
 & + \frac{1}{D_2} m_l m_\nu \gamma^\alpha (1-x) (bd - ac) \gamma_5
 \end{aligned}$$

simplificando nuevamente obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \Lambda_{2L1H}^\alpha(q, l) \\
 = & \frac{-ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \\
 & \frac{1}{2D_2} \gamma^\alpha [x(8x-11)m_\nu^2 - m_l^2] (bc + ad) - \gamma^\alpha (bc + ad) \ln \frac{D_2}{\mu^2 4\pi} + \frac{1}{D_2} m_l m_\nu \gamma^\alpha (ac + bd) \\
 & - \frac{1}{D_2} m_\nu (p_{1\alpha} + p_{2\alpha}) (4x^2 - 5x + 2) (ad + bc) - \frac{m_l}{D_2} x (p_{1\alpha} + p_{2\alpha}) (ac + bd) \\
 & + \frac{1}{D_2} m_\nu (p_{1\alpha} + p_{2\alpha}) (x-2) (bc - ad) \gamma_5 - \frac{m_l}{D_2} x (p_{1\alpha} + p_{2\alpha}) (bd - ac) \gamma_5 \\
 & + \frac{1}{D_2} \gamma^\alpha \left[ \left( \frac{15}{2}x - 4x^2 - 3 \right) m_\nu^2 + \frac{1}{2} m_l^2 \right] (bc - ad) \gamma_5 + \gamma^\alpha (bc - ad) \gamma_5 \ln \frac{D_2}{\mu^2 4\pi} \\
 & + \frac{1}{D_2} m_l m_\nu \gamma^\alpha (1-x) (bd - ac) \gamma_5
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ahora, la relación de Gordon

$$\bar{u}(p_{2\alpha}) \gamma_\alpha u(p_{1\alpha}) = \frac{1}{2m_\nu} \bar{u}(p_{2\alpha}) [(p_2 + p_1)_\alpha + i\sigma^{\alpha\mu} q_\mu] u(p_{1\alpha})$$

donde  $q_\mu = (p_2 - p_1)_\mu$  y despejando obtenemos

$$\bar{u}(p_{2\alpha})(p_2 + p_1)_\alpha u(p_{1\alpha}) = \bar{u}(p_{2\alpha})(2m_\nu\gamma_\alpha - i\sigma^{\alpha\mu}q_\mu)u(p_{1\alpha}).$$

reemplazando obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} & \Lambda_{2L1H}^\alpha(q, l) \\ = & \frac{-ei}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \\ & + \frac{1}{2D_2} \gamma^\alpha [x(8x-11)m_\nu^2 - m_l^2] (bc+ad) - \gamma^\alpha (bc+ad) \ln \frac{D_2}{\mu^2 4\pi} + \frac{1}{D_2} m_l m_\nu \gamma^\alpha (ac+bd) \\ & - \frac{1}{D_2} m_\nu (2m_\nu \gamma_\alpha - i\sigma^{\alpha\mu} q_\mu) (4x^2 - 5x + 2) (ad+bc) - \frac{m_l}{D_2} x (2m_\nu \gamma_\alpha - i\sigma^{\alpha\mu} q_\mu) (ac+bd) \\ & + \frac{1}{D_2} m_\nu (2m_\nu \gamma_\alpha - i\sigma^{\alpha\mu} q_\mu) (x-2) (bc-ad) \gamma_5 - \frac{m_l}{D_2} x (2m_\nu \gamma_\alpha - i\sigma^{\alpha\mu} q_\mu) (bd-ac) \gamma_5 \\ & + \frac{1}{D_2} \gamma^\alpha \left[ \left( \frac{15}{2}x - 4x^2 - 3 \right) m_\nu^2 + \frac{1}{2} m_l^2 \right] (bc-ad) \gamma_5 + \gamma^\alpha (bc-ad) \gamma_5 \ln \frac{D_2}{\mu^2 4\pi} \\ & + \frac{1}{D_2} m_l m_\nu \gamma^\alpha (1-x) (bd-ac) \gamma_5 \end{aligned} \tag{F.21}$$



# Apéndice G

## Solución de la ecuación de Dirac en un campo magnético externo

La forma básica de la materia en el modelo estandar son los quarks y leptones, los cuales son partículas de espín  $\frac{1}{2}$ , para describir su interacción con un campo electromagnético es necesario solucionar la ecuación de Dirac

### G.1. Aproximación no relativista

Partiendo de la ecuación de Dirac, la cual podemos escribir como

$$\left( i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + Q_l\frac{e}{c}\gamma^\mu(A_\mu + A_\mu^{ext}(x)) - m_l c \right) \psi_l(x) = 0 \quad (\text{G.1})$$

donde  $eQ_l$  es la carga del leptón, su masa es  $m_l$  y el campo electromagnético externo es  $A_\mu^{ext}(x)$ , para solucionar la ecuación anterior podemos escribirla como[94]

$$i\hbar\frac{\partial\psi_f}{\partial t} = \left( -c\alpha \cdot \left( i\hbar\nabla - Q_f\frac{e}{c}\vec{A} \right) - Q_f e\Phi + \beta m_f c^2 \right) \psi_f(x) = 0 \quad (\text{G.2})$$

donde  $\beta = \gamma^0$ ,  $\alpha = \gamma^0\gamma$  y  $A_\mu^{ext} = (A_0(x) = \Phi, \vec{A}(x))$ , si queremos tener la representación no relativista a bajas velocidades, es posible separar la fase del campo de Dirac, lo cual es debido a la energía en reposo del leptón

$$\psi = \hat{\psi} e^{-i\frac{m_e c^2}{\hbar}t} \quad (\text{G.3})$$

con lo cual, la ecuación de Dirac toma la forma

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial t} = \left( \hat{H} - m c^2 \right) \hat{\psi} \quad (\text{G.4})$$

donde las cuatro componentes del espinor  $\hat{\psi}$ , pueden descomponerse en las componentes espinoriales  $\hat{\varphi}$ ,  $\hat{\chi}$  cada una de las cuales tiene dos componentes, pudiendose escribir como

$$\psi = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \hat{\varphi} \\ \hat{\chi} \end{pmatrix} \quad (\text{G.5})$$

Al tener en cuenta el campo electromagnético podemos escribir

$$\hat{p} \rightarrow \hat{p}^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \equiv \hat{\Pi}^\mu \quad (\text{G.6})$$

donde  $\hat{\Pi}^\mu$  es el momento cinético y  $\hat{p}^\mu$  es el momento canónico, escribiendo el sistema de ecuaciones acopladas tenemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{\chi} \end{pmatrix} = c\hat{\sigma} \cdot \hat{\Pi} \begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{\chi} \end{pmatrix} + \frac{e}{c} A_0 \begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{\chi} \end{pmatrix} - 2m_0 c^2 \begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{\chi} \end{pmatrix} \quad (\text{G.7})$$

si consideramos que la energía cinética y la energía potencial son pequeñas comparadas con la masa en reposo (i.e.  $|i\hbar \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial t}| \ll |m_0 c^2 \hat{\chi}|$  y  $|eA_0 \hat{\chi}| \ll |m_0 c^2 \hat{\chi}|$ ), lo que es equivalente a considerar  $c \rightarrow \infty$ , de lo cual, obtenemos

$$\hat{\chi} \simeq \frac{1}{2m_0 c} \hat{\sigma} \cdot \left( \hat{p}^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) \hat{\psi} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{c^2} \right) \quad (\text{G.8})$$

y por lo tanto

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c} \Phi \right) \hat{\psi} \simeq \frac{1}{2m_0} \left[ \vec{\sigma} \cdot \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right]^2 \hat{\psi} \quad (\text{G.9})$$

debido a que  $\hat{p}$  no conmuta con  $A$ , es posible utilizar la relación  $(\vec{\sigma} \vec{a}) (\vec{\sigma} \vec{b}) = \vec{a} \vec{b} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$  con lo cual tenemos

$$\left[ \vec{\sigma} \cdot \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right] \left[ \vec{\sigma} \cdot \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right] = \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + i\vec{\sigma} \cdot \left( \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \times \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right) \quad (\text{G.10})$$

así entonces es necesario realizar cada uno de los productos, para lo cual podemos comenzar con el término  $\left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2$ :

$$\left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 = \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) = \hat{p}^2 - \frac{e}{c} \hat{p} \cdot \vec{A} - \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \hat{p} + \frac{e^2}{c^2} \vec{A}^2 \quad (\text{G.11})$$

si tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned} \hat{p} \cdot \vec{A} \psi &= -i\hbar \nabla \cdot (\vec{A} \psi) \\ &= -i\hbar (\nabla \cdot \vec{A}) \psi - i\hbar \vec{A} \cdot (\nabla \psi) \end{aligned}$$

y utilizando el gauge de Coulomb  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$  tenemos que de la relación anterior

$$\hat{p} \cdot \vec{A} \psi = \vec{A} \cdot \hat{p} \psi$$

con lo cual

$$\left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 = \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) = \hat{p}^2 - 2\frac{e}{c} \vec{A} \cdot \hat{p} + \frac{e^2}{c^2} \vec{A}^2 \quad (\text{G.12})$$

adicionalmente el término  $\frac{e^2}{c^2} \vec{A}^2$  se hara cero a menos que el campo magnético sea muy intenso.

De otro lado, para el segundo término de la ecuación (G.11) tenemos

$$\begin{aligned}
 & \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \times \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \\
 &= \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} A_x & i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c} A_y & i\hbar \frac{\partial}{\partial z} + \frac{e}{c} A_z \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} A_x & i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c} A_y & i\hbar \frac{\partial}{\partial z} + \frac{e}{c} A_z \end{pmatrix} \\
 &= \hat{i} \left[ \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c} A_y \right) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial z} + \frac{e}{c} A_z \right) - \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial z} + \frac{e}{c} A_z \right) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c} A_y \right) \right] \\
 &\quad - \hat{j} \left[ \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial z} + \frac{e}{c} A_z \right) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} A_x \right) - \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} A_x \right) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial z} + \frac{e}{c} A_z \right) \right] \\
 &\quad + \hat{k} \left[ \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} A_x \right) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c} A_y \right) - \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c} A_y \right) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} A_x \right) \right] \\
 &= \hat{i} \left[ \left( -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i\hbar e}{c} \frac{\partial}{\partial y} A_z + \frac{i\hbar e}{c} A_y \frac{\partial}{\partial z} + \frac{e^2}{c^2} A_y A_z \right) - \left( -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{i\hbar e}{c} \frac{\partial}{\partial z} A_y + \frac{i\hbar e}{c} A_z \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e^2}{c^2} A_y A_z \right) \right] \\
 &\quad - \hat{j} \left[ \left( -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i\hbar e}{c} \frac{\partial}{\partial z} A_x + \frac{i\hbar e}{c} A_z \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e^2}{c^2} A_z A_x \right) - \left( -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i\hbar e}{c} \frac{\partial}{\partial x} A_z + \frac{i\hbar e}{c} A_x \frac{\partial}{\partial z} + \frac{e^2}{c^2} A_x A_z \right) \right] \\
 &\quad + \hat{k} \left[ \left( -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{i\hbar e}{c} \frac{\partial}{\partial x} A_y + \frac{i\hbar e}{c} A_x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e^2}{c^2} A_x A_y \right) - \left( -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i\hbar e}{c} \frac{\partial}{\partial y} A_x + \frac{i\hbar e}{c} A_y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e^2}{c^2} A_y A_x \right) \right] \\
 &= \hat{i} \left[ \frac{i\hbar e}{c} \frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{i\hbar e}{c} \frac{\partial}{\partial z} A_y + \frac{i\hbar e}{c} A_y \frac{\partial}{\partial z} - \frac{i\hbar e}{c} A_z \frac{\partial}{\partial y} \right] - \hat{j} \left[ \frac{i\hbar e}{c} \frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{i\hbar e}{c} \frac{\partial}{\partial x} A_z + \frac{i\hbar e}{c} A_z \frac{\partial}{\partial x} - \frac{i\hbar e}{c} A_x \frac{\partial}{\partial z} \right] \\
 &\quad + \hat{k} \left[ \frac{i\hbar e}{c} \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{i\hbar e}{c} \frac{\partial}{\partial y} A_x + \frac{i\hbar e}{c} A_x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{i\hbar e}{c} A_y \frac{\partial}{\partial x} \right] \\
 &= \frac{i\hbar e}{c} \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} + \frac{i\hbar e}{c} \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{i\hbar e}{c} \nabla \times \vec{A} + \frac{i\hbar e}{c} \vec{A} \times \nabla
 \end{aligned}$$

dado que  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  tenemos que

$$\begin{aligned}
 \left[ \vec{\sigma} \cdot \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right]^2 &= \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + i\vec{\sigma} \cdot \left( \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \times \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right) \\
 &= \hat{p}^2 - 2\frac{e}{c} \vec{A} \cdot \hat{p} + \frac{e^2}{c^2} \vec{A}^2 + i\vec{\sigma} \cdot \left( \frac{i\hbar e}{c} \vec{B} + \frac{i\hbar e}{c} \vec{A} \times \nabla \right) \\
 &= \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{c} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}
 \end{aligned} \tag{G.13}$$

la ecuación de Dirac queda como

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} = \hat{H} \hat{\psi} = \left( \frac{1}{2m_0} \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\Phi - \frac{e\hbar}{2m_0 c} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right) \hat{\psi} \tag{G.14}$$

de la ecuación anterior podemos ver varias cosas interesantes, dado que  $\hat{\psi}$  tiene dos componentes espinoriales  $\hat{\varphi}$ ,  $\hat{\chi}$ , estas describen los grados de libertad de espín, podemos ver que el último término

tiene la forma de la energía potencial de un dipolo magnético en un campo externo, el leptón en la expansión a  $\frac{1}{c}$  además de tener carga, también tiene momento magnético

$$\vec{\mu} = \frac{e\hbar}{2m_0c}\vec{\sigma} = \frac{e}{m_0c}\vec{S} \quad (\text{G.15})$$

donde  $\vec{S}$  es el momento angular

$$\vec{S} = \hbar\vec{s} = \hbar\frac{\vec{\sigma}}{2} \quad (\text{G.16})$$

si comparamos  $\vec{S}$ , con el momento angular orbital tenemos

$$\vec{\mu}_{\text{orbital}} = \frac{e}{2M}\vec{L} = g_l\frac{e}{2M}\vec{L} \quad (\text{G.17})$$

donde  $g_l$  se define como el factor de Landé y  $\vec{L}$  esta definido como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -i\hbar\vec{r} \times \nabla = \hbar\vec{l} \quad (\text{G.18})$$

con lo cual, el momento magnético total lo podemos escribir como

$$\vec{\mu}_{\text{total}} = \frac{e}{2M}\left(g_l\vec{L} + g_s\vec{S}\right) = \frac{m_e}{M}\mu_B\left(g_l\vec{l} + g_s\vec{s}\right) \quad (\text{G.19})$$

donde  $\mu_B$  se define como el magnetón de Bohr

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} \quad (\text{G.20})$$

y hemos tenido en cuenta que para el electrón  $Q = e$ ,  $M = m_e$ ,  $g_l = -1$  y  $g_s = -2$ , el último resultado implica que el radio giromagnético  $\left(\frac{e}{mc}\right)$  es dos veces más grande que el del momento angular orbital,  $g_l$  y  $g_s$  se denominan factores de Landé quien fue el que identificó cada uno de estos.

Si suponemos que tenemos un campo magnético uniforme de la forma  $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{x}$  entonces

$$\begin{aligned} \left(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 &= \left(\hat{p} - \frac{e}{2c}\vec{B} \times \vec{x}\right)^2 \\ &= \hat{p}^2 - \frac{e}{2c}\hat{p} \cdot (\vec{B} \times \vec{x}) - \frac{e}{2c}(\vec{B} \times \vec{x}) \cdot \hat{p} + \frac{e^2}{4c^2}(\vec{B} \times \vec{x})^2 \\ &\simeq \hat{p}^2 - \frac{e}{c}(\vec{B} \times \vec{x}) \cdot \hat{p} \end{aligned} \quad (\text{G.21})$$

donde  $\hat{L} = \vec{x} \times \hat{p}$  es el operador del momento angular orbital, de lo anterior podemos escribir la ecuación de Pauli

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial t} = \hat{H}\hat{\psi} = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m_0} - \frac{e}{2m_0c}(\hat{L} + 2\hat{S}) \cdot \vec{B} + e\Phi\right)\hat{\psi} \quad (\text{G.22})$$

## G.2. Momentos dipolares en el límite no relativista

Debido a que para el electrón  $g = 2$  como lo analizamos en la sección anterior, se esperaba que este valor fuese el mismo para el caso del protón. Sin embargo lo obtenido experimentalmente fue completamente

diferente, se encontró que el factor  $g$  del protón era  $\sim 5,5$  y para el neutrón era  $\sim -4$ . Razón por la cual, tanto el protón como el neutrón no cumplen la ecuación de Dirac, en la forma considerada (esta es solamente valida para leptones), por tal motivo se dice que el protón y el neutrón tiene un momento magnético anómalo y una estructura interna.

Otra forma de obtener los términos de interacción de los momentos dipolares en el limite no relativista es partir de la forma general (4.9)

$$\delta\mathcal{L}_{efectivo}^{MDM} = -\frac{e_l a_l}{4m_l} \bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} \psi(x) F_{\mu\nu}(x) \quad (\text{G.23})$$

y

$$\delta\mathcal{L}_{efectivo}^{MDE} = -\frac{d_l}{2} \bar{\psi}(x) i\sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \psi(x) F_{\mu\nu}(x) \quad (\text{G.24})$$

cuando el electrón se esta moviendo en un campo externo clásico descrito por el tensor del campo electromagnético  $F_{\mu\nu}^{ext}$ , lo anterior lo podemos resolver de la siguiente forma: Debido a que el tensor electromagnético es antisimetrico las componentes el campo magnético las podemos escribir como  $B^l = \frac{1}{2}\epsilon^{ikl} F_{ik}$  mientras que las componentes del campo eléctrico están mezclada en la parte espacio-temporal  $E^i = F_{0i}$ . Entonces, es necesario trabajar con el término  $\sigma^{\mu\nu}$ , de las relaciones (A.21)

$$\begin{aligned} \sigma^{ik} &= \frac{i}{2} (\gamma^i \gamma^k - \gamma^k \gamma^i) \\ &= \frac{i}{2} \left( \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\sigma^i \sigma^k + \sigma^k \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \sigma^k + \sigma^k \sigma^i \end{pmatrix} \\ &= -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} [\sigma^i, \sigma^k] & 0 \\ 0 & [\sigma^i, \sigma^k] \end{pmatrix} \\ &= \epsilon^{ikl} \begin{pmatrix} \sigma^l & 0 \\ 0 & \sigma^l \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{G.25})$$

y

$$\begin{aligned} \sigma^{0i} \gamma_5 &= \frac{i}{2} (\gamma^0 \gamma^i - \gamma^i \gamma^0) \gamma_5 \\ &= \frac{i}{2} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \gamma_5 \\ &= i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= i \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{G.26})$$

podemos apreciar que el término  $\gamma_5$  es clave para hacer la matriz diagonal por bloques, debido a que solo los términos diagonales por bloques contribuyen en los términos principales en la expansión relativista, como lo podemos apreciar.

En el marco en reposo del electrón los espinores tienen la forma

$$u(p, r) = \frac{1}{\sqrt{p^0 + m}} (\not{p} + m) \bar{u}(0, r) \simeq \bar{u}(0, r) \quad (\text{G.27})$$

donde

$$\bar{u}(0, r) = \begin{pmatrix} U(r) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{G.28})$$

trabajando primero con el término dipolar magnético tenemos

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 \sigma_{\mu\nu} u_1 F_{\mu\nu} &\simeq \begin{pmatrix} U^T(r_2) & 0 \end{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} \begin{pmatrix} U(r_1) \\ 0 \end{pmatrix} F_{\mu\nu} \\ &= \begin{pmatrix} U^T(r_2) & 0 \end{pmatrix} \sigma^{ik} \begin{pmatrix} U(r_1) \\ 0 \end{pmatrix} F_{ik} \\ &= \epsilon^{ikl} \begin{pmatrix} U^T(r_2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^l & 0 \\ 0 & \sigma^l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(r_1) \\ 0 \end{pmatrix} F_{ik} \\ &= 2U^T(r_2) \vec{\sigma} U(r_1) \vec{B} \\ &= 2(\vec{\sigma})_{r_2, r_1} \vec{B} \end{aligned} \quad (\text{G.29})$$

los términos no diagonales no contribuyen en el límite estático, de forma similar podemos hacer lo anterior para el momento dipolar eléctrico

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 u_1 F_{\mu\nu} &\simeq \begin{pmatrix} U^T(r_2) & 0 \end{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \begin{pmatrix} U(r_1) \\ 0 \end{pmatrix} F_{\mu\nu} \\ &= 2 \begin{pmatrix} U^T(r_2) & 0 \end{pmatrix} \sigma^{0i} \gamma_5 \begin{pmatrix} U(r_1) \\ 0 \end{pmatrix} F_{0i} \\ &= 2i \begin{pmatrix} U^T(r_2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^l & 0 \\ 0 & \sigma^l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(r_1) \\ 0 \end{pmatrix} F_{0i} \\ &= 2iU^T(r_2) \vec{\sigma} U(r_1) \vec{E} \\ &= 2i(\vec{\sigma})_{r_2, r_1} \vec{E} \end{aligned} \quad (\text{G.30})$$

en la expansión a bajas energías los elementos de la matriz de la forma  $\bar{v}_2 \Lambda_i u_1$  o  $\bar{u}_2 \Lambda_i v_1$  se puede seleccionar sub matrices  $2 \times 2$  fuera de la diagonal mediante procesos de aniquilación o creación de pares electrón-positrón, el cual tiene umbrales  $\sqrt{s} \geq 2m$  y por lo tanto son realmente efectos relativistas. Los términos principales son los términos conocidos clásicos efectivos a bajas energías.

$$-\delta \mathcal{L}_{efectivo}^{MDM} \Rightarrow H_m \simeq \frac{e_l a_l}{2m_l} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (\text{G.31})$$

y

$$-\delta \mathcal{L}_{efectivo}^{MDE} \Rightarrow H_e \simeq -d_l \vec{\sigma} \cdot \vec{E} \quad (\text{G.32})$$

# Apéndice H

## Propagadores en campos magnéticos

Debido a la presencia de campos magnéticos, los términos de los propagadores cambian, lo cual lleva necesariamente a escribir la nueva forma de los propagadores bajo la condición de campo magnético constante, examinaremos los propagadores fermionicos, escalares y el del boson W.

### H.1. Propagador fermionico en un campo magnético externo

El propagador fermionico en un campo magnético constante fue obtenido inicialmente por J.Schwinger, el cual lo podemos expresar como[26]

$$iS_B^F(x, x') = k(x, x') \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} e^{-ip(x, x')} iS_B^F(p)$$

donde  $x$  es un cuadvivector escrito de la forma usual,  $S_B^F(p)$  es una integral sobre la variable  $s$ , la cual se denominada "tiempo propio"  $k(x, x')$  un factor de fase

$$iS_B^F(p) = \int_0^\infty ds e^{\Phi(p, s)} G(p, s) \quad (\text{H.1})$$

las cantidades  $\Phi(p, s)$  y  $G(p, s)$  en la aproximación de campo magnético débil [96],[97] pueden ser escritas de la siguiente forma[95]

$$\Phi(p, s) = is \left( p_{\parallel}^2 - \frac{\tan(eBs)}{eBs} p_{\perp}^2 - m^2 \right) - \epsilon |s| \quad (\text{H.2})$$

$$G(p, s) = \frac{e^{ieBs\sigma_z}}{\cos(eBs)} \left( -\not{p}_{\parallel} + \frac{e^{-ieBs\sigma_z}}{\cos(eBs)} \not{p}_{\perp} - m \right) \quad (\text{H.3})$$

donde  $\sigma_z = i\gamma^1\gamma^2$  y  $a^\mu, b^\mu$  son cuadvivectores como se muestra en la ecuación (A.6).

Un punto muy importante es darnos cuenta que al haber escogido una dirección preferencial del campo magnético en el espacio, esto produce que la invariancia de Lorentz del sistema quede restringida, debido a que un boost arbitrario podría no preservar solo el campo magnético. Por lo tanto solo un boost a lo largo de la dirección del campo magnético o una rotación sobre la dirección del campo externo, serán las únicas transformaciones permitidas para preservar la dirección preferencial.

El factor de fase  $k(x, x')$  depende del punto sobre el cual realizamos la transformación gauge, este se escribe generalmente como

$$k(x, x') = e^{ieI(x, x')}$$

donde

$$I(x, x') = \int_{x'}^x d\xi^\mu \left( A_\mu(\xi) + \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(\xi - x')^\nu \right) \quad (\text{H.4})$$

$A_\mu$  es el campo gauge de fondo y  $F_{\mu\nu}$  es el tensor electromagnético, podemos ver también de la ecuación anterior que el factor de fase rompe la invariancia translacional del propagador, como lo habíamos dicho anteriormente.

Para un campo magnético constante, es posible escribir el campo gauge como

$$A_\mu(\xi) = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \xi^\nu + \partial_\mu \lambda(\xi)$$

donde  $\lambda(\xi)$  depende de la escogencia del gauge, remplazando lo anterior en la ecuación(H.4)

$$\begin{aligned} I(x, x') &= \int_{x'}^x d\xi^\mu \left( -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \xi^\nu + \partial_\mu \lambda(\xi) + \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (\xi - x')^\nu \right) \\ &= \int_{x'}^x d\xi^\mu \left( -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} x'^\nu + \partial_\mu \lambda(\xi) \right) \\ &= \frac{1}{2} x'^\mu F_{\mu\nu} x'^\nu + \lambda(x) - \lambda(x') \end{aligned}$$

podemos ver que si  $x = x'$ , lo cual equivale a integrar sobre un contorno cerrado en el espacio tiempo,  $I(x, x') = 0$ , por lo tanto  $I(x, x')$  conecta a dos puntos del espacio-tiempo independiente del camino y en consecuencia el factor de fase del propagador de Schwinger también es independiente del camino. Si usamos la independencia del camino en el factor de fase del propagador, es posible escoger una línea recta que conecte a los puntos  $x$  y  $x'$  pudiendo representar los puntos en el camino como

$$\begin{aligned} \xi^\mu &= (1 - \varsigma) x'^\mu + \varsigma x^\mu \\ d\xi^\mu &= (x^\mu - x'^\mu) d\varsigma \end{aligned}$$

donde el parámetro  $\varsigma$  toma valores entre  $(0 - 1)$  por lo tanto si usamos la ecuación (H.4) con la



parametrización anterior tenemos

$$\begin{aligned}
 I(x, x') &= \int_{x'}^x d\xi^\mu A_\mu(\xi) + \int_{x'}^x d\xi^\mu \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(\xi - x')^\nu \\
 &= \int_{x'}^x d\xi^\mu A_\mu(\xi) + \int_0^1 (x^\mu - x'^\mu) d\varsigma \frac{1}{2} F_{\mu\nu}((1 - \varsigma)x' + \varsigma x - x')^\nu \\
 &= \int_{x'}^x d\xi^\mu A_\mu(\xi) + \frac{1}{2} \int_0^1 \varsigma (x^\mu - x'^\mu) d\varsigma F_{\mu\nu}(x - x')^\nu \\
 &= \int_{x'}^x d\xi^\mu A_\mu(\xi)
 \end{aligned}$$

fue necesario tener en cuenta la independencia del camino, lo cual implica que el factor de fase es dependiente solamente del gauge cuando tenemos un campo magnético de fondo el cual es constante, razón por la cual el factor de fase aparece en el término del propagador.

Si reemplazamos sobre la ecuación(H.1)

$$iS_B^F(p) = \int_0^\infty ds e^{\Phi(p,s)} G(p, s)$$

reemplazando los términos(H.2 y H.3)

$$S_B^F(p) = -i \int_0^\infty e^{-is(m^2 - p_\parallel^2 + \frac{\tan(eBs)}{eBs} p_\perp^2)} \frac{1}{\cos(eBs)} \left( e^{ieBs\sigma_3} (m + \gamma \cdot p_\parallel) - \frac{\gamma \cdot p_\perp}{\cos(eBs)} \right) ds \quad (\text{H.5})$$

dado que

$$e^{iv\sigma_3} = \mathbf{I} \cos v + i\sigma_3 \sin v$$

definiendo una nueva variable  $v = eBs$  tenemos que  $dv = ds$  y dado que  $\sigma_3 = \gamma_1\gamma_2$  obteniendo[98]

$$\begin{aligned}
 S_B^F(p) &= -i \int_0^\infty e^{-is(m^2 - p_\parallel^2 + \frac{\tan v}{v} p_\perp^2)} \frac{1}{\cos v} \left( (\mathbf{I} \cos v - \gamma_1\gamma_2 \sin v) (m + \gamma \cdot p_\parallel) - \frac{\gamma \cdot p_\perp}{\cos v} \right) dv \\
 &= -i \int_0^\infty e^{-iv \left( \frac{m^2 - p_\parallel^2}{eB} + \frac{\tan v}{v} \frac{p_\perp^2}{eB} \right)} \left( (\mathbf{I} - \gamma_1\gamma_2 \tan v) (m + \gamma \cdot p_\parallel) - \frac{\gamma \cdot p_\perp}{\cos^2 v} \right) dv \\
 &= -i \int_0^\infty e^{-iv\rho} \left( (m + \gamma \cdot p_\parallel) \mathbf{I} e^{-i\alpha \tan v} - \gamma_1\gamma_2 (m + \gamma \cdot p_\parallel) e^{-i\alpha \tan v} \tan v - \frac{\gamma \cdot p_\perp}{\cos^2 v} e^{-i\alpha \tan v} \right) dv \\
 &= -i \int_0^\infty e^{-iv\rho} \left( (m + \gamma \cdot p_\parallel) I_1 - \gamma_1\gamma_2 (m + \gamma \cdot p_\parallel) I_2 - \gamma \cdot p_\perp I_3 \right) dv \\
 &= -i \int_0^\infty e^{-iv\rho} (m + \gamma \cdot p_\parallel) I_1 dv + i \int_0^\infty e^{-iv\rho} \gamma_1\gamma_2 (m + \gamma \cdot p_\parallel) I_2 dv + i \int_0^\infty e^{-iv\rho} \gamma \cdot p_\perp I_3 dv \quad (\text{H.6})
 \end{aligned}$$

donde hemos definido  $\rho = \frac{m^2 - p_{\parallel}^2}{eB}$ ,  $\alpha = \frac{p_{\perp}^2}{eB}$  así como

$$\begin{aligned} I_1 &= e^{-i\alpha \tan v} \\ I_2 &= e^{-i\alpha \tan v} \tan v \\ I_3 &= \frac{1}{\cos^2 v} e^{-i\alpha \tan v} \end{aligned}$$

dado que  $I_j = I_j(v + n\pi)$  para  $j = 1, 2, 3$  de forma general tenemos

$$\int_0^{\infty} e^{-iv\rho} I_j = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\rho n\pi} \int_0^{\pi} e^{-iv\rho} I_j(v) dv = \frac{1}{1 - e^{-i\rho\pi}} \int_0^{\pi} e^{-iv\rho} I_j(v) dv = \frac{1}{1 - e^{-i\rho\pi}} A_j$$

dado que  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\rho n\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-i\rho\pi})^n$  y  $|e^{-i\rho\pi}| < 1$  podemos expresarlo como una serie geométrica, la cual de forma general es

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$$

para  $|x| < 1$ , por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\rho n\pi} = \frac{1}{1 - e^{-i\rho\pi}}$$

es necesario ahora calcular los términos  $A_j$  para lo cual tenemos

$$A_1 = \int_0^{\pi} e^{-iv\rho} e^{-i\alpha \tan v} dv \quad (\text{H.7})$$

$$A_2 = \int_0^{\pi} e^{-iv\rho} e^{-i\alpha \tan v} \tan v dv = i \frac{\partial}{\partial \alpha} A_1 \quad (\text{H.8})$$

$$A_3 = \int_0^{\pi} e^{-iv\rho} \frac{1}{\cos^2 v} e^{-i\alpha \tan v} dv = \frac{-i}{\alpha} (1 - e^{i\rho\pi}) - \frac{\rho}{\alpha} A_1 \quad (\text{H.9})$$

debemos entonces evaluar  $A_1$  para lo cual expresamos

$$-i\alpha \tan v = -i\alpha \frac{\sin v}{\cos v} = -i\alpha \frac{\frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i}}{\frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2}} = -i\alpha \frac{(e^{iv} - e^{-iv}) e^{-iv}}{i(e^{iv} + e^{-iv}) e^{-iv}} = \alpha \frac{-e^{-2iv} + 1}{-e^{-2iv} - 1}$$

por lo tanto

$$I_1 = e^{-i\alpha \tan v} = e^{\alpha \frac{-e^{-2iv} + 1}{-e^{-2iv} - 1}} \quad (\text{H.10})$$

expandiendo el término de la derecha usando los polinomios de Laguerre

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z^n L_n(x) = \frac{e^{-\frac{xZ}{1-Z}}}{1-Z} \quad (\text{H.11})$$

para  $|Z| \leq 1$ , si multiplicamos a ambos lados de la ecuación anterior por  $Z$  obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z^n L_{n-1}(x) = Z \frac{e^{-\frac{xZ}{1-Z}}}{1-Z} \quad (\text{H.12})$$

y restando las ecuaciones H.11 y H.12 obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\frac{xZ}{1-Z}}}{1-Z} - \frac{Ze^{-\frac{xZ}{1-Z}}}{1-Z} &= \sum_{n=0}^{\infty} Z^n L_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} Z^n L_{n-1}(x) \\ \frac{e^{-\frac{xZ}{1-Z}}(1-Z)}{1-Z} &= \sum_{n=0}^{\infty} (L_n(x) - L_{n-1}(x)) Z^n \\ e^{-\frac{xZ}{1-Z}} &= \sum_{n=0}^{\infty} (L_n(x) - L_{n-1}(x)) Z^n \end{aligned}$$

si escribimos

$$-\frac{xZ}{1-Z} - \frac{x}{2} = \frac{-2xZ - x(1-Z)}{2(1-Z)} = \frac{-xZ - x}{2(1-Z)} = \frac{-x(Z+1)}{2(1-Z)} = \frac{xZ+1}{2Z-1}$$

podemos expresar

$$e^{\frac{xZ+1}{2Z-1}} = e^{-\frac{xZ}{1-Z}} e^{-\frac{x}{2}}$$

por equivalencia a la definición obtenida en la ecuación H.10 tenemos que

$$e^{-i\alpha \tan v} = e^{\alpha \frac{-e^{-2iv} + 1}{-e^{-2iv} - 1}} = e^{\frac{x}{2} \frac{Z+1}{Z-1}}$$

donde  $Z = -e^{-2iv}$  y  $\alpha = \frac{x}{2}$ , por lo tanto reemplazando en las ecuaciones H.7, H.10

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{\pi} e^{-iv\rho} e^{-i\alpha \tan v} dv = \int_0^{\pi} e^{-iv\rho} e^{\frac{x}{2} \frac{Z+1}{Z-1}} dv = \int_0^{\pi} e^{-iv\rho} e^{-\frac{xZ}{1-Z}} e^{-\frac{x}{2}} dv \\ &= \int_0^{\pi} e^{-iv\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (L_n(2\alpha) - L_{n-1}(2\alpha)) Z^n e^{-\frac{2\alpha}{2}} dv \\ &= \int_0^{\pi} e^{-iv\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (L_n(2\alpha) - L_{n-1}(2\alpha)) (-e^{-2iv})^n e^{-\alpha} dv \\ &= \int_0^{\pi} e^{-iv\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (L_n(2\alpha) - L_{n-1}(2\alpha)) (-1)^n e^{-2inv} e^{-\alpha} dv \\ &= e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} C_n(2\alpha) (-1)^n \int_0^{\pi} e^{-i(\rho+2n)v} dv \\ &= -e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} C_n(2\alpha) (-1)^n \frac{1}{i(\rho+2n)} e^{-i(\rho+2n)v} \Big|_0^{\pi} \\ &= -e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(2\alpha) (-1)^n}{i(\rho+2n)} (e^{-i(\rho+2n)\pi} - 1) \end{aligned}$$

donde definimos  $C_n(2\alpha) = L_n(2\alpha) - L_{n-1}(2\alpha)$ , si tenemos en cuenta la formula de Euler

$$e^{-i(\rho+2n)\pi} = e^{-i2n\pi} e^{-i\rho\pi} = (\cos 2n\pi - i \sin 2n\pi) e^{-i\rho\pi} = e^{-i\rho\pi}$$

podemos reescribir el término  $A_1$

$$\begin{aligned} A_1 &= -e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(2\alpha) (-1)^n}{i(\rho+2n)} (e^{-i(\rho+2n)\pi} - 1) \\ &= ie^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(2\alpha) (-1)^n}{(\rho+2n)} (e^{-i\rho\pi} - 1) \\ &= -ie^{-\alpha} (1 - e^{-i\rho\pi}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n C_n(2\alpha)}{(\rho+2n)} \end{aligned}$$

reescribiendo el propagador de la ecuación(H.6) teniendo en cuenta el resultado anterior será

$$\begin{aligned} S_B^F(p) &= -i \int_0^{\infty} e^{-iv\rho} (m + \gamma \cdot p_{\parallel}) I_1 dv + i \int_0^{\infty} e^{-iv\rho} \gamma_1 \gamma_2 (m + \gamma \cdot p_{\parallel}) I_2 dv + i \int_0^{\infty} e^{-iv\rho} \gamma \cdot p_{\perp} I_3 dv \\ &= -i (m + \gamma \cdot p_{\parallel}) \left( \frac{1}{1 - e^{-i\rho\pi}} A_1 \right) + i \gamma_1 \gamma_2 (m + \gamma \cdot p_{\parallel}) \left( \frac{1}{1 - e^{-i\rho\pi}} A_2 \right) + i \gamma \cdot p_{\perp} \left( \frac{1}{1 - e^{-i\rho\pi}} A_3 \right) \\ &= -(m + \gamma \cdot p_{\parallel}) \left( \frac{1}{1 - e^{-i\rho\pi}} e^{-\alpha} (1 - e^{-i\rho\pi}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n C_n(2\alpha)}{(\rho+2n)} \right) \\ &\quad + i \gamma_1 \gamma_2 (m + \gamma \cdot p_{\parallel}) \left( \frac{1}{1 - e^{-i\rho\pi}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( e^{-\alpha} (1 - e^{-i\rho\pi}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n C_n(2\alpha)}{(\rho+2n)} \right) \right) \\ &\quad + i \gamma \cdot p_{\perp} \left( \frac{1}{1 - e^{-i\rho\pi}} \left( \frac{-i}{\alpha} (1 - e^{i\rho\pi}) + \frac{\rho}{\alpha} ie^{-\alpha} (1 - e^{-i\rho\pi}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n C_n(2\alpha)}{(\rho+2n)} \right) \right) \\ &= -(m + \gamma \cdot p_{\parallel}) \left( e^{-\alpha} \frac{(-1)^n C_n(2\alpha)}{(\rho+2n)} \right) + i \gamma_1 \gamma_2 (m + \gamma \cdot p_{\parallel}) \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n C_n(2\alpha)}{(\rho+2n)} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\gamma \cdot p_{\perp}}{\alpha} \left( 1 - \rho e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n C_n(2\alpha)}{(\rho+2n)} \right) \end{aligned}$$

si definimos  $d_n(\alpha) = (-1)^n e^{-\alpha} C_n(2\alpha)$  entonces  $\frac{\partial d_n}{\partial \alpha} = d'_n(\alpha)$ , recordando que  $\alpha = \frac{p_{\perp}^2}{eB}$  y dado que  $\rho+2n$  es un polo, entonces  $\frac{m^2 - p_{\parallel}^2}{eB} = -2n$ , por lo tanto  $m^2 - p_{\parallel}^2 + 2neB = h^2 + 2neB$  donde  $h^2 = m^2 - p_{\parallel}^2$ , si adicionalmente definimos

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \gamma_1 \gamma_2 (m + \gamma \cdot p_{\parallel}) \\ D &= (m + \gamma \cdot p_{\parallel}) + \gamma \cdot p_{\perp} \frac{m^2 - p_{\parallel}^2}{p_{\perp}^2} \end{aligned} \tag{H.13}$$

reemplazando tenemos

$$\begin{aligned}
 S_B^F(p) &= -(m + \gamma \cdot p_{\parallel}) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{d_n(\alpha)}{h^2 + 2neB} \right) + i\gamma_1\gamma_2 (m + \gamma \cdot p_{\parallel}) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{d'_n(\alpha)}{h^2 + 2neB} \right) \\
 &\quad + \frac{\gamma \cdot p_{\perp}}{\alpha} \left( 1 - \rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d'_n(\alpha)}{h^2 + 2neB} \right) \\
 &= -(m + \gamma \cdot p_{\parallel}) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{d_n(\alpha)}{h^2 + 2neB} \right) + i\gamma_1\gamma_2 (m + \gamma \cdot p_{\parallel}) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{d'_n(\alpha)}{h^2 + 2neB} \right) \\
 &\quad + eB \frac{\gamma \cdot p_{\perp}}{p_{\perp}^2} - \gamma \cdot p_{\perp} \frac{m^2 - p_{\parallel}^2}{p_{\perp}^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(\alpha)}{h^2 + 2neB} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-id_n(a) D + d'_n(a) \bar{D}}{h^2 + 2neB} + eB \frac{\gamma \cdot p_{\perp}}{p_{\perp}^2} \tag{H.14}
 \end{aligned}$$

tenemos que para valores máximos o mínimos del campo magnético solo una parte de los términos de la ecuación anterior son relevantes, si el campo es fuerte lo cual equivale a decir que  $B \gg B_c$  donde  $B_c = \frac{m_e^2}{e}$ , solo las contribuciones de los mas bajos niveles de Landau  $n = 0$  podran dar una contribución diferente de cero, mientras que para valores debiles del campo magnético lo cual equivale a decir  $B \ll B_c$  obtendremos una contribución diferente, para analizar esta contribución podemos escribir el término

$$\frac{1}{h^2 + 2neB} = \frac{1}{1 + \frac{2neB}{h^2}} = \frac{1}{1 - \left( \frac{-2neB}{h^2} \right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{-2neB}{h^2} \right)^k$$

el cual es una serie geométrica

$$\frac{2neB}{h^2} = \frac{2neB}{m^2 - p_{\parallel}^2} = \frac{2neB}{m^2 \left( 1 - \frac{p_{\parallel}^2}{m^2} \right)} = \frac{2nB}{B_c \left( 1 - \frac{p_{\parallel}^2}{m^2} \right)}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-id_n(a) D + d'_n(a) \bar{D}}{h^2 + 2neB} &= \frac{1}{h^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-id_n(a) D + d'_n(a) \bar{D}}{1 + \frac{2neB}{h^2}} \\
 &= \frac{1}{h^2} \sum_{n=0}^{\infty} -id_n(a) D + d'_n(a) \bar{D} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{-2neB}{h^2} \right)^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left( \frac{-2eB}{h^2} \right)^k \left( \sum_{n=0}^{\infty} -id_n(a) D + d'_n(a) \bar{D} \right) n^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left( \frac{-2eB}{h^2} \right)^k \left( -iD \sum_{n=0}^{\infty} d_n(a) n^k + \bar{D} \sum_{n=0}^{\infty} d'_n(a) n^k \right)
 \end{aligned}$$

sin embargo, podemos ver que para valores grandes de  $n$  la convergencia no esta asegurada, por lo tanto es conveniente encontrar el valor critico en el cual el valor de  $n$  hace que el término  $\frac{2neB}{m^2 - p_{\parallel}^2}$  sea

mayor que uno, y analizar entonces el comportamiento del polinomio de Laguerre, esto debido a que  $d_n(a) = (-1)^n e^{-\alpha} C_n(2\alpha) = (-1)^n e^{-\alpha} (L_n(2\alpha) - L_{n-1}(2\alpha))$  si calculamos el límite superior para el valor de  $n$  tenemos

$$\frac{2neB}{m^2 - p_{\parallel}^2} = 1 \Rightarrow n = \frac{m^2 - p_{\parallel}^2}{2eB} = \frac{B_c}{2B} - \frac{p_{\parallel}^2}{2eB}$$

si suponemos que ....

y esto tiende a cero, debemos ahora evaluar las series infinitas  $\sum_{n=0}^{\infty} d_n(a) n^k$  y  $\sum_{n=0}^{\infty} d'_n(a) n^k$  para lo cual podemos utilizar la identidad

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n(\alpha) e^{-2inv} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\alpha} C_n(2\alpha) e^{-2inv} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\alpha} (L_n(2\alpha) - L_{n-1}(2\alpha)) (e^{-2iv})^n = e^{-i\alpha \tan v}$$

si tomamos la derivada parcial en  $v$  a ambos lados de la ecuación anterior tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\alpha) e^{-2inv} &= \frac{\partial}{\partial v} e^{-i\alpha \tan v} \\ (-2i)^1 \sum_{n=0}^{\infty} n^1 e^{-2inv} d_n(\alpha) &= -i\alpha e^{-i\alpha \tan v} (\tan^2 v + 1) \\ (-2i)^1 \sum_{n=0}^{\infty} n^1 e^{-2inv} d_n(\alpha) &= \frac{-i\alpha}{\cos^2 v} e^{-i\alpha \tan v} \end{aligned} \quad (\text{H.15})$$

si hacemos la derivada de la función  $k$  veces obtenemos

$$(-2i)^k \sum_{n=0}^{\infty} n^k e^{-2inv} d_n(\alpha) = \left[ \left( \frac{-i\alpha}{\cos^2 v} \right)^k + \mathcal{O}(\alpha^{k-1}) \right] e^{-i\alpha \tan v} \quad (\text{H.16})$$

podemos escribir la ecuación(H.15) definiendo  $U = e^{-i\alpha \tan v}$  por lo tanto

$$\partial_v U = FU$$

donde  $F = \frac{-i\alpha}{\cos^2 v}$  así entonces

$$\begin{aligned} \partial_v^k U &= \sum_{l=0}^{k-1} C_l^{k-1} \partial_v^{k-l-1} F \partial_v^l U \\ &= F^k + C_2^k F^{k-2} \partial_v F + C_3^k F^{k-3} \partial_v^2 F + C_2^3 C_4^k F^{k-4} (\partial_v F)^2 + k_3(\alpha) + k_4(\alpha) + \mathcal{O}(\alpha^{k-5}) \end{aligned}$$

donde  $C_b^a = \frac{a!}{b!(a-b)!}$  lo cual denota el número de combinaciones de una colección de tamaño  $b$  en una de tamaño  $a$ , adicionalmente  $k_3$  y  $k_4$  denotan los términos de tercera y cuarta derivada respectivamente, donde  $k_3(\alpha)$  será

$$k_3(\alpha) = C_4^k F^{k-4} \partial_v^3 F + C_2^5 C_5^k F^{k-5} \partial_v F \partial_v^2 F + C_2^6 C_6^k F^{k-6} (\partial_v F)^3$$

tomando  $v = 0$  en ambos lados de la ecuación(H.16) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n^k d_n(\alpha) &= \left( \frac{\alpha}{2} \right)^k - \frac{1}{2} C_3^k \left( \frac{\alpha}{2} \right)^{k-2} + \left( C_5^k + \frac{5}{2} C_6^k \right) \left( \frac{\alpha}{2} \right)^{k-4} \\ \sum_{n=0}^{\infty} n^k d'_n(\alpha) &= \frac{k}{2} \left( \frac{\alpha}{2} \right)^{k-1} - \frac{k-2}{4} C_3^k \left( \frac{\alpha}{2} \right)^{k-3} + \frac{k-4}{2} \left( C_5^k + \frac{5}{2} C_6^k \right) \left( \frac{\alpha}{2} \right)^{k-5} + \mathcal{O}(\alpha^{k-6}) \end{aligned}$$

si mantenemos solo terminos en orden  $+\mathcal{O}(\alpha^{k-5})$  y teniendo en cuenta que  $\alpha = \frac{p_{\perp}^2}{eB}$  entonces

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-id_n(a)D + d'_n(a)\bar{D}}{h^2 + 2neB} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left( \frac{-2eB}{h^2} \right)^k \left[ -iD \left( \left( \frac{\alpha}{2} \right)^k - \frac{1}{2} C_3^k \left( \frac{\alpha}{2} \right)^{k-2} \right) + \bar{D} \left( \frac{k}{2} \left( \frac{\alpha}{2} \right)^{k-1} - \frac{k-2}{4} C_3^k \left( \frac{\alpha}{2} \right)^{k-3} \right) \right] + S_{B_4}^V(p) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left( \frac{-2eB}{h^2} \right)^k \left[ -iD \left( \left( \frac{1 p_{\perp}^2}{2 eB} \right)^k - \frac{1}{2} C_3^k \left( \frac{1 p_{\perp}^2}{2 eB} \right)^{k-2} \right) + \bar{D} \left( \frac{k}{2} \left( \frac{1 p_{\perp}^2}{2 eB} \right)^{k-1} - \frac{k-2}{4} C_3^k \left( \frac{1 p_{\perp}^2}{2 eB} \right)^{k-3} \right) \right] \\
 & \quad + S_{B_4}^V(p) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left[ -iD \left( \frac{-2eB}{h^2} \right)^k \left( \frac{1 p_{\perp}^2}{2 eB} \right)^k + \bar{D} \frac{k}{2} \left( \frac{-2eB}{h^2} \right)^k \left( \frac{1 p_{\perp}^2}{2 eB} \right)^{k-1} + iD \frac{1}{2} C_3^k \left( \frac{-2eB}{h^2} \right)^k \left( \frac{1 p_{\perp}^2}{2 eB} \right)^{k-2} \right. \\
 & \quad \left. - \bar{D} \frac{k-2}{4} C_3^k \left( \frac{-2eB}{h^2} \right)^k \left( \frac{1 p_{\perp}^2}{2 eB} \right)^{k-3} \right] + S_{B_4}^V(p) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left[ -iD \left( \frac{-p_{\perp}^2}{h^2} \right)^k + \bar{D} \frac{k}{2} \left( \frac{-2eB}{h^2} \right) \left( \frac{-p_{\perp}^2}{h^2} \right)^{k-1} + iD \frac{1}{2} C_3^k \left( \frac{-2eB}{h^2} \right)^2 \left( \frac{p_{\perp}^2}{h^2} \right)^{k-2} \right. \\
 & \quad \left. - \bar{D} \frac{k-2}{4} C_3^k \left( \frac{-2eB}{h^2} \right)^3 \left( \frac{-p_{\perp}^2}{h^2} \right)^{k-3} \right] + S_{B_4}^V(p) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left( -iD \left( \frac{-p_{\perp}^2}{h^2} \right)^k - \bar{D} eB \left( \frac{k}{h^2} \right) \left( \frac{-p_{\perp}^2}{h^2} \right)^{k-1} \right) \\
 & \quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left( i2DC_3^k \left( \frac{eB}{h^2} \right)^2 \left( \frac{p_{\perp}^2}{h^2} \right)^{k-2} + 2\bar{D}(k-2)C_3^k \left( \frac{eB}{h^2} \right)^3 \left( \frac{-p_{\perp}^2}{h^2} \right)^{k-3} \right) + S_{B_4}^V(p)
 \end{aligned}$$

si denotamos  $S_{B_2}^V(p)$  como los terminos en orden  $(eB)^{2,3}$  y  $S_{B_4}^V(p)$  como los terminos de orden  $(eB)^{4,5}$  debido a que solo nos interesan las contribuciones a orden uno en el campo magnético, entonces podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-id_n(a)D + d'_n(a)\bar{D}}{h^2 + 2neB} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left( -iD \left( \frac{-p_{\perp}^2}{h^2} \right)^k - \bar{D} eB \left( \frac{k}{h^2} \right) \left( \frac{-p_{\perp}^2}{h^2} \right)^{k-1} \right) + S_{B_2}^V(p) + S_{B_4}^V(p)$$

donde

$$S_{B_2}^V(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left( i2DC_3^k \left( \frac{eB}{h^2} \right)^2 \left( \frac{p_{\perp}^2}{h^2} \right)^{k-2} + 2\bar{D}(k-2)C_3^k \left( \frac{eB}{h^2} \right)^3 \left( \frac{-p_{\perp}^2}{h^2} \right)^{k-3} \right)$$

dado que  $h^2 = m^2 - p_{\parallel}^2$  entonces

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left( -iD \left( \frac{-p_{\perp}^2}{h^2} \right)^k - \overline{DeB} \left( \frac{k}{h^2} \right) \left( \frac{-p_{\perp}^2}{h^2} \right)^{k-1} \right) \\
 = & \frac{-iD}{h^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{-p_{\perp}^2}{h^2} \right)^k - \frac{\overline{DeB}}{(h^2)^2} \sum_{k=0}^{\infty} k \left( \frac{-p_{\perp}^2}{h^2} \right)^{k-1} \\
 = & \frac{-iD}{h^2} \frac{1}{1 + \frac{p_{\perp}^2}{h^2}} - \frac{\overline{DeB}}{(h^2)^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{p_{\perp}^2}{h^2}\right)^2} + S_{B_2}^V(p) + S_{B_4}^V(p) \\
 = & \frac{-iD}{h^2} \frac{h^2}{h^2 + p_{\perp}^2} - \frac{\overline{DeB}}{(h^2)^2} \frac{(h^2)^2}{(h^2 + p_{\perp}^2)^2} + S_{B_2}^V(p) + S_{B_4}^V(p) \\
 = & \frac{-iD}{m^2 - p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2} - \frac{\overline{DeB}}{\left(m^2 - p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2\right)^2} + S_{B_2}^V(p) + S_{B_4}^V(p) \\
 = & \frac{iD}{h^2 - m^2} - \frac{\overline{DeB}}{(h^2 - m^2)^2} + S_{B_2}^V(p) + S_{B_4}^V(p) \tag{H.17}
 \end{aligned}$$

donde tuvimos en cuenta que  $\frac{p_{\perp}^2}{h^2}$  es menor a 1, lo cual nos permite escribir los términos como una serie geométrica

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{-p_{\perp}^2}{h^2} \right)^k &= \frac{1}{1 - \left( \frac{-p_{\perp}^2}{h^2} \right)} = \frac{1}{1 + \frac{p_{\perp}^2}{h^2}} \\
 \sum_{k=0}^{\infty} k \left( \frac{-p_{\perp}^2}{h^2} \right)^{k-1} &= \frac{1}{\left(1 + \frac{p_{\perp}^2}{h^2}\right)^2}
 \end{aligned}$$

reemplazando los términos  $D$  y  $\overline{D}$  provenientes de la ecuación(H.13) obtenemos

$$\begin{aligned}
 S_B^F(p) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-id_n(a)D + d'_n(a)\overline{D}}{h^2 + 2neB} + \frac{i\gamma \cdot p_{\perp}}{p_{\perp}^2} \\
 &= \frac{iD}{p^2 - m^2} - \frac{\overline{DeB}}{(p^2 - m^2)^2} + \frac{i\gamma \cdot p_{\perp}}{p_{\perp}^2} + S_{B_2}^V(p) + S_{B_4}^V(p) \\
 &= \frac{i}{p^2 - m^2} \left( (m + \gamma \cdot p_{\parallel}) + \gamma \cdot p_{\perp} \frac{m^2 - p_{\parallel}^2}{p_{\perp}^2} \right) - \frac{\gamma_1 \gamma_2 (m + \gamma \cdot p_{\parallel})}{(p^2 - m^2)^2} eB + \frac{i\gamma \cdot p_{\perp}}{p_{\perp}^2} + S_{B_2}^V(p) + S_{B_4}^V(p)
 \end{aligned}$$



haciendo álgebra sobre el término

$$\begin{aligned}
 & \frac{i}{p^2 - m^2} \left( (m + \gamma \cdot p_{\parallel}) + \frac{\gamma \cdot p_{\perp} (m^2 - p_{\parallel}^2)}{p_{\perp}^2} \right) + \frac{i\gamma \cdot p_{\perp}}{p_{\perp}^2} \\
 = & \frac{i}{p^2 - m^2} \left( (m + \gamma \cdot p_{\parallel}) + \frac{\gamma \cdot p_{\perp} (m^2 - p_{\parallel}^2)}{p_{\perp}^2} + \frac{(p^2 - m^2) \gamma \cdot p_{\perp}}{p_{\perp}^2} \right) \\
 = & \frac{i}{p^2 - m^2} \left( \frac{(m + \gamma \cdot p_{\parallel}) p_{\perp}^2 + \gamma \cdot p_{\perp} (m^2 - p_{\parallel}^2) + (p^2 - m^2) \gamma \cdot p_{\perp}}{p_{\perp}^2} \right) \\
 = & \frac{i}{p^2 - m^2} \left( \frac{mp_{\perp}^2 + \gamma \cdot p_{\parallel} p_{\perp}^2 + \gamma \cdot p_{\perp} m^2 - \gamma \cdot p_{\perp} p_{\parallel}^2 + p^2 \gamma \cdot p_{\perp} - m^2 \gamma \cdot p_{\perp}}{p_{\perp}^2} \right) \\
 = & \frac{i}{p^2 - m^2} \left( \frac{mp_{\perp}^2 + \gamma \cdot p_{\parallel} p_{\perp}^2 + \gamma \cdot p_{\perp} m^2 - \gamma \cdot p_{\perp} (p^2 - p_{\perp}^2) + p^2 \gamma \cdot p_{\perp} - m^2 \gamma \cdot p_{\perp}}{p_{\perp}^2} \right) \\
 = & \frac{i}{p^2 - m^2} \left( \frac{(m + \gamma \cdot p_{\perp} + \gamma \cdot p_{\parallel}) p_{\perp}^2 + \gamma \cdot p_{\perp} m^2 - m^2 \gamma \cdot p_{\perp} - \gamma \cdot p_{\perp} p^2 + p^2 \gamma \cdot p_{\perp}}{p_{\perp}^2} \right) \\
 = & \frac{i}{p^2 - m^2} (m + \gamma \cdot p_{\perp} + \gamma \cdot p_{\parallel}) \\
 = & \frac{i}{p^2 - m^2} (m + \gamma \cdot p_{\parallel} - \gamma \cdot p_{\perp}) \\
 = & \frac{i}{p^2 - m^2} (m + \not{p})
 \end{aligned}$$

finalmente el propagador fermionico en presencia de un campo magnetico externo  $B < B_c$  será

$$\begin{aligned}
 S_B^F(p) &= \frac{i}{p^2 - m^2} \left( (m + \gamma \cdot p_{\parallel}) + \gamma \cdot p_{\perp} \frac{m^2 - p_{\parallel}^2}{p_{\perp}^2} \right) - \frac{\gamma_1 \gamma_2 (m + \gamma \cdot p_{\parallel})}{(p^2 - m^2)^2} eB + \frac{i\gamma \cdot p_{\perp}}{p_{\perp}^2} + S_{B_2}^V(p) + S_{B_4}^V(p) \\
 &= \frac{i(m + \not{p})}{p^2 - m^2} - \frac{\gamma_1 \gamma_2 (m + \gamma \cdot p_{\parallel})}{(p^2 - m^2)^2} eB + S_{B_2}^V(p) + S_{B_4}^V(p)
 \end{aligned} \tag{H.18}$$

El primer término de la ecuación anterior representa el propagador fermionico en el vacío, mientras que el segundo término será la corrección a orden uno en el campo magnético. Podemos ver que en cuando  $B = 0$  recuperamos el propagador en el vacío sin campos externos sin dificultad alguna.

Otra forma de escribir el propagador anterior que nos resulta de gran utilidad con el fin de comparar nuestros resultados con calculos realizados por otros autores es reescribir el termino  $\gamma_1 \gamma_2$  para lo cual tenemos que

$$\sigma_3 = \frac{i}{2} [\gamma^1, \gamma^2] \Rightarrow i\gamma^1 \gamma^2 = \sigma_3$$

del artículo de Erdas [32] tenemos que

$$\sigma_3 = \frac{i}{2} [\gamma_1, \gamma_2] = -\frac{i}{2} (\gamma \not{\varphi} \gamma) = i\gamma_1 \gamma_2 \Rightarrow \gamma^1 \gamma^2 = -\frac{1}{2} (\gamma \not{\varphi} \gamma) \tag{H.19}$$

donde  $\varphi$  es el tensor de campo electromagnético adimensional dado que esta normalizado por  $B$

$$\varphi^{\mu\nu} = \frac{F^{\mu\nu}}{B}$$

y  $\gamma\varphi\gamma = \gamma_\mu\varphi^{\mu\nu}\gamma_\nu$ , definiendo  $\beta = eB$ . Tenemos que el propagador fermionico con campo magnético lo podemos reescribir como

$$S_B^F(p) = \frac{i(m + \not{p})}{p^2 - m^2} + \beta \frac{(m + \not{p}_\parallel)}{2(p^2 - m^2)^2} (\gamma\varphi\gamma) + S_{B_2}^V(p) + S_{B_4}^V(p) \quad (\text{H.20})$$

## H.2. Propagador escalar en un campo magnético externo

Para calcular el propagador escalar en un campo magnético constante podemos partir de la misma forma que se uso en el caso fermionico

$$iS_B^S(p) = \int_0^\infty ds e^{\Phi(p,s)} G(p,s)$$

donde las cantidades  $\Phi(p,s)$  y  $G(p,s)$  para el caso escalar pueden ser escritas como[95],[99]

$$\begin{aligned} \Phi(p,s) &= is \left( p_\parallel^2 - \frac{\tan(eBs)}{eBs} p_\perp^2 - m^2 \right) - \epsilon |s| \\ G(p,s) &= \frac{1}{\cos(eBs)} \end{aligned}$$

donde hemos definido  $(a \cdot b)_\parallel = a^0 b^0 - a^3 b^3$  en consecuencia  $a_\parallel^2 = a^0 a^0 - a^3 a^3$  y  $a_\perp^2 = a^1 a^1 - a^2 a^2$  el factor de fase  $k(x, x')$

La solución de la ecuación

$$D_B^S(p) = - \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(eBs)} e^{-is(m^2 - p_\parallel^2 + \frac{\tan(eBs)}{eBs} p_\perp^2)}$$

definiendo una nueva variable  $-iv = eBs$  tenemos que  $-idv = eBds$  obteniendo

$$\begin{aligned} D_B^S(p) &= \frac{-i}{eB} \int_0^\infty e^{-i\frac{v}{eB}(m^2 - p_\parallel^2 + \frac{\tan(-iv)}{v} p_\perp^2)} \frac{dv}{\cos(-iv)} \\ &= \frac{-i}{eB} \int_0^\infty \frac{1}{\cos(-iv)} e^{-v \left( \frac{m^2 - p_\parallel^2}{eB} \right)} e^{-\frac{v_\perp^2}{eB} \tan(-iv)} dv \\ &= \frac{-i}{eB} \int_0^\infty \frac{1}{\cos(-iv)} e^{-v\rho} e^{-\alpha \tan(-iv)} dv \end{aligned} \quad (\text{H.21})$$

donde como en el caso anterior definimos  $\rho = \frac{m^2 - p_{\parallel}^2}{eB}$  y  $\alpha = \frac{p_{\perp}^2}{eB}$ . Si tenemos en cuenta la relación de Euler

$$\begin{aligned} \cos(-iv) &= \frac{e^v + e^{-v}}{2} \\ \Rightarrow \frac{e^{-v}}{e^{-v}} \left( \frac{e^v + e^{-v}}{2} \right) &= \frac{1 + e^{-2v}}{2e^{-v}} \\ \Rightarrow \frac{1}{\cos(-iv)} &= \frac{2e^{-v}}{1 + e^{-2v}} = \frac{2u^{\frac{1}{2}}}{1 + u} \\ i \tan(-iv) &= \frac{i \sin(-iv)}{\cos(-iv)} = \frac{\frac{e^v - e^{-v}}{2}}{\frac{e^v + e^{-v}}{2}} = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} \\ \Rightarrow \frac{e^{-v}}{e^{-v}} \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} &= \frac{1 - e^{-2v}}{1 + e^{-2v}} = 1 - \frac{2e^{-2v}}{1 + e^{-2v}} = 1 - \frac{2u}{1 + u} \end{aligned}$$

donde definimos  $u = e^{-2v}$ , por lo tanto la ecuación(H.21) nos queda como

$$D_B^S(p) = \frac{-i}{eB} \int_0^{\infty} e^{-v\rho} \frac{1}{\cos(-iv)} e^{-\alpha \tan(-iv)} dv = \frac{-i}{eB} \int_0^{\infty} e^{-v\rho} \frac{2u^{\frac{1}{2}}}{1+u} e^{-\alpha(1-\frac{2u}{1+u})} dv = \frac{-2i}{eB} \int_0^{\infty} e^{v\rho} u^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha} \frac{e^{2\alpha(\frac{u}{1+u})}}{1+u} dv \quad (\text{H.22})$$

si tenemos en cuenta la forma general de los polinomios de Laguerre al igual que en el caso fermionico

$$\frac{e^{-\frac{xZ}{1-Z}}}{1-Z} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) Z^n$$

para  $|Z| \leq 1$ , lo cual nos permite entonces escribir la ecuacion H.22 si hacemos  $Z = -u$  en consecuencia

$$\frac{e^{2\alpha(\frac{u}{1+u})}}{1+u} = \frac{e^{2\alpha(\frac{-Z}{1-Z})}}{1-Z} = \frac{e^{-2\alpha(\frac{Z}{1-Z})}}{1-Z} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(2\alpha) Z^n = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(2\alpha) (-1)^n u^n$$

por lo tanto podemos escribir

$$\frac{-2i}{eB} \int_0^{\infty} e^{v\rho} e^{-\alpha} u^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2\alpha(\frac{u}{1+u})}}{1+u} dv = \frac{-2i}{eB} \int_0^{\infty} e^{v\rho} e^{-\alpha} u^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(2\alpha) (-1)^n u^n dv = \frac{-2i}{eB} \int_0^{\infty} e^{v\rho} e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(2\alpha) (-1)^n u^{n+\frac{1}{2}} dv$$

podemos calcular ahora la integral explícitamente sobre  $v$  para lo cual remplazamos  $u = e^{-2v}$  por lo tanto

$$\int_0^{\infty} e^{v\rho} (e^{-2v})^{n+\frac{1}{2}} dv = -\frac{e^{v\rho-v-2nv}}{2n-\rho+1} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2n-\rho+1} = \frac{1}{2n-\frac{m^2-p_{\parallel}^2}{eB}+1} = \frac{eB}{eB(2n+1)-m^2+p_{\parallel}^2}$$

pudiendo entonces escribir el propagador como

$$\frac{-2i}{eB} \int_0^{\infty} e^{v\rho} e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(2\alpha) (-1)^n u^{n+\frac{1}{2}} dv = -2ie^{-\frac{p_{\perp}^2}{eB}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n\left(\frac{2p_{\perp}^2}{eB}\right) (-1)^n}{eB(2n+1)-m^2+p_{\parallel}^2}$$

para el caso en el cual consideramos que el campo magnético es débil lo podemos escribir como  $eB \ll p$  lo cual equivale a escribir que el campo magnético externo es mucho menor que el campo magnético crítico  $B_c = \frac{m_e^2}{e}$  por lo tanto, podemos escribir la solución anterior como

$$D_B^S(p) = -2ie^{-\frac{p_{\perp}^2}{eB}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n\left(2\frac{p_{\perp}^2}{eB}\right) (-1)^n}{eB(2n+1) - m^2 + p_{\parallel}^2} = -2ie^{-\frac{p_{\perp}^2}{eB}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n\left(2\frac{p_{\perp}^2}{eB}\right) (-1)^n}{eB(2n+1) - h^2} = \frac{2ie^{-\frac{p_{\perp}^2}{eB}}}{h^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n\left(2\frac{p_{\perp}^2}{eB}\right) (-1)^n}{1 - \frac{eB(2n+1)}{h^2}}$$

donde hicimos  $h^2 = m^2 - p_{\parallel}^2$ , si analizamos el término

$$\frac{1}{1 - \frac{eB(2n+1)}{h^2}} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{eB(2n+1)}{h^2}\right)^j$$

este lo podemos aproximar de esta forma considerandolo una serie geométrica, por lo tanto el propagador tomara la forma

$$\begin{aligned} D_B^S(p) &= \frac{2ie^{-\frac{p_{\perp}^2}{eB}}}{h^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n\left(2\frac{p_{\perp}^2}{eB}\right) (-1)^n}{1 - \frac{eB(2n+1)}{h^2}} \\ &= \frac{2i}{h^2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{eB}{h^2}\right)^j e^{-\frac{p_{\perp}^2}{eB}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^j L_n\left(2\frac{p_{\perp}^2}{eB}\right) (2n+1)^j \end{aligned}$$

lo cual es solamente valido para  $eB \ll m^2$ , lo que debemos hacer ahora es evaluar las series infinitas, para lo cual podemos tomar

$$f(x) = 2e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(2\alpha) e^{-i(2n+1)x} = \frac{e^{-i\alpha \tan x}}{\cos x}$$

donde

$$\frac{d^j f(x)}{dx^j} = 2e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-i)^j (2n+1)^j L_n(2\alpha) e^{-i(2n+1)x}$$

por lo tanto si tomamos derivas parciales en  $x$  a ambos lados de la ecuacion anterior tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} 2e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(2\alpha) e^{-i(2n+1)x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-i\alpha \tan x}}{\cos x} \\ 2e^{-\alpha} (-i(2n+1))^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(2\alpha) e^{-i(2n+1)x} &= -\frac{e^{-i\alpha \tan x}}{\cos^2 x} (i\alpha \cos x (\tan^2 x + 1) - \sin x) \\ 2e^{-\alpha} (-i(2n+1))^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(2\alpha) e^{-i(2n+1)x} &= -\frac{i\alpha e^{-i\alpha \tan x}}{\cos^2 x} \left( \sec x - \frac{\sin x}{i\alpha} \right) \end{aligned}$$

si hacemos la derivada de la función  $k$  veces

$$2e^{-\alpha} (-i(2n+1))^k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(2\alpha) e^{-i(2n+1)x} = \left[ \left( \frac{-i\alpha}{\cos^2 x} \right)^k + \mathcal{O}(\alpha^{k-1}) \right] e^{-i\alpha \tan x}$$

evaluando la derivada en  $x = 0$

$$2e^{-\alpha} (-i(2n+1))^k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(2\alpha) = \left[ \left( \frac{-i\alpha}{\cos^2 x} \right)^k + \mathcal{O}(\alpha^{k-1}) \right] e^{-i\alpha \tan x}$$

el propagador a bajos ordenes de magnitud será

$$\begin{aligned} iD_B^S(p) &= \frac{i}{p_{\parallel}^2 - p_{\perp}^2 - m^2} \left( 1 - \frac{(eB)^2}{(p_{\parallel}^2 - p_{\perp}^2 - m^2)^2} - \frac{2(eB)^2 p_{\perp}^2}{(p_{\parallel}^2 - p_{\perp}^2 - m^2)^3} \right) \\ &= \frac{i}{p^2 - m^2} \left( 1 - \frac{\beta^2}{(p^2 - m^2)^2} - \frac{2\beta^2 p_{\perp}^2}{(p^2 - m^2)^3} \right) + \mathcal{O}(\beta^3) \end{aligned} \quad (\text{H.23})$$

donde  $\beta = eB$

### H.3. Propagador bosónico en un campo magnético externo

El calculo del propagador bosonico es analizado en el artículo [100]

$$iD_B^G(p) = \frac{-ig_{\rho\sigma}}{p^2 - m_W^2} - \frac{2\beta\varphi}{(p^2 - m_W^2)^2} + i\beta^2 \left[ g_{\rho\sigma} \left( \frac{1}{(p^2 - m_W^2)^3} + \frac{2p_{\perp}^2}{(p^2 - m_W^2)^4} \right) + \frac{4(\varphi\varphi)_{\rho\sigma}}{(p^2 - m_W^2)^3} \right] + \mathcal{O}(\beta^3) \quad (\text{H.24})$$

donde  $\varphi$  se define como  $\varphi_{\alpha\beta} = \frac{F_{\alpha\beta}}{B}$  y  $\beta = eB$

# Apéndice I

## Cálculos para 2HDM

En este anexo se presentan los cálculos relacionados con las expresiones mostradas en el capítulo 7.

Para el término  $\sum_{\Phi}(p)$  tenemos

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\Phi}(p) \\
 = & i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{-ig}{\sqrt{2}} \left( \frac{m_l}{m_W} P_R - \frac{m_{\nu_l}}{m_W} P_L \right) \right) S_B^F(p-k) \left( \frac{-ig}{\sqrt{2}} \left( \frac{m_l}{m_W} P_L - \frac{m_{\nu_l}}{m_W} P_R \right) \right) D_B(k) \\
 = & -\frac{ig^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (m_l P_R - m_{\nu_l} P_L) S_B^F(p-k) (m_l P_L - m_{\nu_l} P_R) D_B(k) \\
 = & -\frac{ig^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ (m_l P_R - m_{\nu_l} P_L) \left( \frac{i(m_l + \not{p} - \not{k})}{(p-k)^2 - m_l^2} + \frac{\beta(m_l + \gamma \cdot (p-k)_{\parallel}) (\gamma \varphi \gamma)}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2} \right) (m_l P_L - m_{\nu_l} P_R) \right. \\
 & \left. \left( \frac{i}{k^2 - m_W^2} \right) \right\} \\
 = & -\frac{ig^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ (m_l P_R - m_{\nu_l} P_L) \left( \frac{-(m_l + \not{p} - \not{k})}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} + \frac{\beta i(m_l + \gamma \cdot (p-k)_{\parallel}) (\gamma \varphi \gamma)}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} \right) \right. \\
 & \left. (m_l P_L - m_{\nu_l} P_R) \right\} \\
 = & -\frac{ig^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{m_l P_R (m_l + \not{p} - \not{k}) m_l P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} + \frac{im_l \beta P_R (m_l + \gamma \cdot (p-k)_{\parallel}) (\gamma \varphi \gamma) m_l P_L}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} + \frac{m_{\nu_l} P_L (m_l + \not{p} - \not{k}) m_l P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} \\ & -\frac{im_{\nu_l} \beta P_L (m_l + \gamma \cdot (p-k)_{\parallel}) (\gamma \varphi \gamma) m_l P_L}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} + \frac{m_l P_R (m_l + \not{p} - \not{k}) m_{\nu_l} P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} - \frac{im_l \beta P_R (m_l + \gamma \cdot (p-k)_{\parallel}) (\gamma \varphi \gamma) m_{\nu_l} P_R}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} \\ & -\frac{m_{\nu_l} P_L (m_l + \not{p} - \not{k}) m_{\nu_l} P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} + \frac{im_{\nu_l} \beta P_L (m_l + \gamma \cdot (p-k)_{\parallel}) (\gamma \varphi \gamma) m_{\nu_l} P_R}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} \end{aligned} \right\} \\
 = & -\frac{ig^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{m_l^3 P_R P_L + m_l^2 (\not{p} - \not{k}) P_L P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} + \frac{im_l^3 \beta (\gamma \varphi \gamma) P_R P_L + im_l^2 \beta \gamma \cdot (p-k)_{\parallel} (\gamma \varphi \gamma) P_L P_L}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} \\ & + \frac{m_{\nu_l} m_l^2 P_L P_L + m_{\nu_l} (\not{p} - \not{k}) m_l P_R P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} - \frac{im_{\nu_l} \beta m_l^2 (\gamma \varphi \gamma) P_L P_L + im_{\nu_l} \beta (\gamma \cdot (p-k)_{\parallel}) (\gamma \varphi \gamma) m_l P_R P_L}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} \\ & + \frac{m_l^2 m_{\nu_l} P_R P_R + m_l (\not{p} - \not{k}) m_{\nu_l} P_L P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} - \frac{im_l^2 \beta (\gamma \varphi \gamma) m_{\nu_l} P_R P_R + im_l \beta (\gamma \cdot (p-k)_{\parallel}) (\gamma \varphi \gamma) m_{\nu_l} P_L P_R}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} \\ & - \frac{m_{\nu_l}^2 m_l P_L P_R + m_{\nu_l}^2 (\not{p} - \not{k}) P_R P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} + \frac{im_{\nu_l}^2 \beta m_l (\gamma \varphi \gamma) P_L P_R + im_{\nu_l}^2 \beta (\gamma \cdot (p-k)_{\parallel}) (\gamma \varphi \gamma) P_R P_R}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} \end{aligned} \right\} \\
 = & -\frac{ig^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{m_l^2 (\not{p} - \not{k}) P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} + \frac{im_l^2 \beta \gamma \cdot (p-k)_{\parallel} (\gamma \varphi \gamma) P_L}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} + \frac{m_{\nu_l} m_l^2 P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} \\ & -\frac{im_{\nu_l} \beta m_l^2 (\gamma \varphi \gamma) P_L}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} + \frac{m_l^2 m_{\nu_l} P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} - \frac{im_l^2 \beta (\gamma \varphi \gamma) m_{\nu_l} P_R}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} \\ & -\frac{m_{\nu_l}^2 (\not{p} - \not{k}) P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} + \frac{im_{\nu_l}^2 \beta (\gamma \cdot (p-k)_{\parallel}) (\gamma \varphi \gamma) P_R}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} \end{aligned} \right\} \\
 = & -\frac{ig^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{m_l^2 (\not{p} - \not{k}) P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} + \frac{2m_l^2 \beta (p\tilde{\varphi}\gamma) P_L - 2m_l^2 \beta (k\tilde{\varphi}\gamma) P_L}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} - \frac{m_{\nu_l}^2 (\not{p} - \not{k}) P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} \\ & -\frac{im_{\nu_l} \beta m_l^2 (\gamma \varphi \gamma) (P_L + P_R)}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} + \frac{m_{\nu_l} m_l^2 (P_L + P_R)}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} - \frac{2m_{\nu_l}^2 \beta (p\tilde{\varphi}\gamma) P_R - 2m_{\nu_l}^2 \beta (k\tilde{\varphi}\gamma) P_R}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} \end{aligned} \right\} \\
 = & -\frac{ig^2}{2m_W^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{m_l^2 (\not{p} - \not{k}) P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} + \frac{m_l^2 \beta (p\tilde{\varphi}\gamma) P_L - m_l^2 \beta (k\tilde{\varphi}\gamma) P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} - \frac{m_{\nu_l}^2 (\not{p} - \not{k}) P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} \\ & -\frac{im_{\nu_l} \beta m_l^2 (\gamma \varphi \gamma)}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} + \frac{m_{\nu_l} m_l^2}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_W^2)} - \frac{m_{\nu_l}^2 \beta (p\tilde{\varphi}\gamma) P_R - m_{\nu_l}^2 \beta (k\tilde{\varphi}\gamma) P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)^2 (k^2 - m_W^2)} \end{aligned} \right\} \quad (I.1)
 \end{aligned}$$

Para el Higgs cargado tenemos

$$\begin{aligned}
 & \sum_{H^\pm} (p) \\
 = & i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (aP_L + bP_R) S_B^F(p-k) (cP_R + dP_L) D_B(k) \\
 = & i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ (aP_L + bP_R) \left( \frac{i(m_l + \not{p} - \not{k})}{(p-k)^2 - m_l^2} + \frac{\beta(m_l + \gamma \cdot (p-k)_\parallel)(\gamma\varphi\gamma)}{2((p-k)^2 - m_l^2)^2} \right) (cP_R + dP_L) \left( \frac{i}{k^2 - m_{H^\pm}^2} \right) \right\} \\
 = & i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ (aP_L + bP_R) \left( \frac{-(m_l + \not{p} - \not{k})}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} + \frac{i\beta(m_l + \gamma \cdot (p-k)_\parallel)(\gamma\varphi\gamma)}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)} \right) (cP_R + dP_L) \right\} \\
 = & i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \begin{aligned} & \frac{-aP_L(m_l + \not{p} - \not{k})cP_R}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} + \frac{aP_L i\beta(m_l + \gamma \cdot (p-k)_\parallel)(\gamma\varphi\gamma)cP_R}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)} - \frac{bP_R(m_l + \not{p} - \not{k})cP_R}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} \\ & + \frac{i\beta bP_R(m_l + \gamma \cdot (p-k)_\parallel)(\gamma\varphi\gamma)cP_R}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)} - \frac{aP_L(m_l + \not{p} - \not{k})dP_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} \\ & + \frac{i\beta aP_L(m_l + \gamma \cdot (p-k)_\parallel)(\gamma\varphi\gamma)dP_L}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)} - \frac{bP_R(m_l + \not{p} - \not{k})dP_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} + \frac{i\beta bP_R(m_l + \gamma \cdot (p-k)_\parallel)(\gamma\varphi\gamma)dP_L}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)} \end{aligned} \right\} \\
 = & i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \begin{aligned} & \frac{-acm_l P_L P_R - ac(\not{p} - \not{k})P_R P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} + \frac{aci\beta m_l(\gamma\varphi\gamma)P_L P_R + aci\beta\gamma \cdot (p-k)_\parallel(\gamma\varphi\gamma)P_R P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)} - \frac{bm_l cP_R P_R + b(\not{p} - \not{k})cP_L P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} \\ & + \frac{i\beta b m_l(\gamma\varphi\gamma)cP_R P_R + i\beta b\gamma \cdot (p-k)_\parallel(\gamma\varphi\gamma)cP_L P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)} - \frac{am_l dP_L P_L + a(\not{p} - \not{k})dP_R P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} \\ & + \frac{i\beta a m_l(\gamma\varphi\gamma)dP_L P_L + i\beta a\gamma \cdot (p-k)_\parallel(\gamma\varphi\gamma)dP_R P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)} - \frac{bm_l dP_R P_L + b(\not{p} - \not{k})dP_L P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} \\ & + \frac{i\beta b m_l(\gamma\varphi\gamma)dP_R P_L + i\beta b\gamma \cdot (p-k)_\parallel(\gamma\varphi\gamma)dP_L P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)} \end{aligned} \right\} \\
 = & i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \begin{aligned} & \frac{-ac(\not{p} - \not{k})P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} + \frac{aci\beta\gamma \cdot (p-k)_\parallel(\gamma\varphi\gamma)P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)} - \frac{bm_l cP_R}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} \\ & + \frac{i\beta b m_l(\gamma\varphi\gamma)cP_R}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)} - \frac{am_l dP_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} \\ & + \frac{i\beta a m_l(\gamma\varphi\gamma)dP_L}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)} - \frac{b(\not{p} - \not{k})dP_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} + \frac{i\beta b\gamma \cdot (p-k)_\parallel(\gamma\varphi\gamma)dP_L}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)} \end{aligned} \right\} \\
 = & i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \begin{aligned} & \frac{-a^2(\not{p} - \not{k})P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} + \frac{-2a^2\beta(p\tilde{\varphi}\gamma)P_R + 2a^2\beta(k\tilde{\varphi}\gamma)P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)} - \frac{abm_l P_R}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} \\ & + \frac{i\beta abm_l(\gamma\varphi\gamma)}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)} - \frac{abm_l P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} - \frac{b^2(\not{p} - \not{k})P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)(k^2 - m_{H^\pm}^2)} \\ & + \frac{2\beta b^2(p\tilde{\varphi}\gamma)P_L - 2\beta b^2(k\tilde{\varphi}\gamma)P_L}{((p-k)^2 - m_l^2)^2(k^2 - m_{H^\pm}^2)} \end{aligned} \right\} \tag{I.2}
 \end{aligned}$$



# Apéndice J

## Bibliografía

# Bibliografía

- [1] J. Gunion, H. Haber, G. Kane, and S. Dawson, The Higgs Hunter's Guide (Addison-Wesley, New York, 1990).
- [2] The CMS Collaboration. ".Evidence for the direct decay of the 125 GeV Higgs boson to fermions". Nature Physics 10: 557–560.
- [3] Raffelt, G. G., Astrophysics probes of particle physics, Phys. Rept. 333 (2000) 593-618.
- [4] N. Mohapatra, P. Bal, Massive neutrinos in physics and astrophysics, World Scientific Lecture Notes in Physics Vol. 72. ISBN 981-238-070-1, 981-238-070-X (pbk). Copyright 2004.
- [5] C. Giunt, C. W. Kim, Fundamentals of neutrino physics and astrophysics, Oxford university press, 2007.
- [6] Pulido, Joao, The Solar neutrino problem and the neutrino magnetic moment, Phys. Rep. 211 (1992) 167-199.
- [7] Astrophysical methods to constrain axions and other novel particle phenomena, Raffelt, Georg G., Phys. Rept. 198 (1990) 1-113.
- [8] Boris Kayser, The physics of massive neutrinos, World scientific lecture notes in physics vol 25 , 1989
- [9] K. Zuber, Neutrino physics, Institute of physics publishing Bristol and Philadelphia. ISBN 0-7503-0750-1, 2004
- [10] E Majorana: Nu cim 14 (1937) 171.
- [11] M. Beuthe, Physics Reports 375 (2003) 105–218.
- [12] Klapdor-Kleingrothaus HV. hep-ph/0103074
- [13] H.V. Klapdor-Kleingrothaus, I.V. Krivosheina, A. Dietz, O. Chkvorets, Phys. Lett. B 586 (2004) 198.
- [14] H. V. Klapdor-Kleingrothaus, I. V. Krivosheina. The evidence for the observation of  $0\nu\beta\beta$  decay: the identification of  $0\nu\beta\beta$  events from the full spectra. Modern Physics Letters A Vol. 21, No. 20 (2006) 1547-1566.
- [15] Alexander Studenikin, Neutrino in magnetic fields: from the first studies to the new effects in neutrino oscillations, arXiv:hep-ph/0407010v1 (2004)

- [16] V.B. Semikoz, Can we distinguish Majorana and Dirac neutrinos in solar neutrino experiments?, Nuclear Physics B 498 (1997) 39-54
- [17] Kaushik Bhattacharya and Palash B. Pal, Neutrinos and magnetic fields : a short review, arXiv:hep-ph/0212118v3 13 Mar 2003
- [18] Sushan Konar and Subinoy Das, Neutrino propagation in a weakly magnetized medium, PRA-MANA, Vol 62 Number 6, 1241-1254, 2004
- [19] Marek Nowakowski, E. A. Paschos, J. M. Rodriguez, All electromagnetic form factors, Eur. J. Phys. 26 (2005) 545, arXiv:physics/0402058.
- [20] M. Fukugita and T. Yanagita, Physics of neutrinos and applications to astrophysics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003
- [21] Kaushik Bhattacharya, The electric charge and magnetic moment of neutral fundamental particles, arXiv:0905.4380v1 [hep-ph] 27 May 2009
- [22] Carlo Giunti, Alexander Studenikin, Neutrino electromagnetic properties, Phys. Atom. Nucl. 72 (2009) 2089-2125, arXiv:0812.3646.
- [23] Jeremy Bernstein and Malvin Ruderman, Electromagnetic properties of the neutrino, Phys. Rev. D, VOLUME 132, N 3, (1963)
- [24] P. Vogel and J. Engel, Neutrino electromagnetic form factors, Phys. Rev. D, VOLUME 39, N 11, (1989)
- [25] Jose F. Nieves, Electromagnetic properties of Majorana neutrinos, Phys. Rev. D, VOLUME 26, N 11, (1982)
- [26] A. Kuznetsov, N. Mikheev, Electroweak processes in external electromagnetic fields, Springer.
- [27] A. B. García, K. Bhattacharya, S. Sahu, The neutrino self-energy in a magnetized medium, arXiv:0706.3921v3 [hep-ph] 23 Sep 2008
- [28] A.V. Kuznetsov, N.V. Mikheev, G. G. Raffelt, L. A. Vassilevskaya, Neutrino dispersion in external magnetic fields, Phys. Rev. D 73, 023001 (2006)
- [29] E. Elizalde, E. J. Ferrer, V. de la Incera, Neutrino Self-Energy and Index of Refraction in Strong Magnetic Field: A New Approach, Annals of Physics 295, 33-49 (2002)
- [30] E. Elizalde, Efrain J. Ferrer, Vivian de la Incera, Neutrino propagation in a strongly magnetized medium, Phys. Rev. D 70, 043012 (2004)
- [31] G. McKeon, Propagation of a neutrino in a homogeneous magnetic field, Phys. Rev. D 24, 2744 (1981)
- [32] A. Erdas, Neutrino self-energy in an external magnetic field, Phys. Rev. D 80, 113004 (2009)
- [33] A. Mezzacappa y G. Fuller, Open issues in core collapse supernova theory, Proceedings from the institute for nuclear theory, Vol 14, 2004

- [34] Jose F. Nieves, Electromagnetic vertex of neutrinos in an electron background and a magnetic field, *PHYSICAL REVIEW D*, Vol 68, 113003 , (2003)
- [35] E. Fermi, Tentativo di una teoria dell emissione dei raggi beta, *Ricerca Scient.* 4(2), 491 (1933)
- [36] S. L. Glashow, Partial Symmetries of Weak Interactions, *Nucl. Phys.* 22, 579 (1961).
- [37] S. Weinberg, A model of leptons, *Phys. Rev. Lett.* 19, 1264 (1967)
- [38] A. Salam, in *Elementary Particle Theory* (Nobel Symposium No. 8), edited by N. Svartholm, (Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1968).
- [39] "The Neutrino", Frederick Reines and Clyde L. Cowan, Jr., *Nature* 178, 446 (1956).
- [40] M. Gell-Mann and A. Pais, *Phys. Rev.*, 97, 1387–1389, 1955.
- [41] Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, *Prog. Theor. Phys.*, 28, 870, 1962.
- [42] V. N. Gribov and B. Pontecorvo, *Phys. Lett.*, B28, 493, 1969.
- [43] H. Fritzsch and P. Minkowski, *Phys. Lett.*, B62, 72, 1976.
- [44] K. Fujikawa and R. Shrock, "The magnetic moment of a massive neutrino and neutrino spin rotation," *Phys. Rev. Lett.* 45, 963 (1980).
- [45] A.V. Kuznetsov and N.V. Mikheev, Neutrino propagation in magnetized plasma, Xiv:hep-ph/0605114v1.
- [46] Wong, H. T., Li, Hau-Bin, Neutrino magnetic moments, *Mod. Phys. Lett. A*20 (2005) 1103-1117.
- [47] Carlo Giunti, Quantum Mechanics of Neutrino Oscillations, arXiv:hep-ph/0105319v1.
- [48] U. Sarkar, S. K. Singh, CP violation in neutrino mass matrix, *Nuclear physics B* 771, 28-39, 2007.
- [49] C. Giunti and C. W. Kim, "Quantum mechanics of neutrino oscillations", *Found. Phys. Lett.*, 14, 213–229, 2001, hep-ph/0011074.
- [50] B. Kayser, "On The Quantum Mechanics Of Neutrino Oscillation," *Phys. Rev. D*24, (1981) 110.
- [51] J. Basdevant, *The quantum mechanics solver*, Springer, 2006.
- [52] G. Degrassi, A. Sirlin and W. J. Marciano, Effective electromagnetic form factor of the neutrino, *Phys. Rev. D*, VOLUME 39, N 1, (1989)
- [53] C. Quigg, *Gauge theories of the strong, weak and electromagnetic interactions*, Addison-Wesley publishing company, 1983.
- [54] M. C. Gonzalez-Garcia, Michele Maltoni, Jordi Salvado, Thomas Schwetze, Global fit to three neutrino mixing: critical look at present precision, *JHEP*12(2012)123
- [55] Y. Zhang, X. Zhang and Bo-Qiang Ma, Quark-lepton complementarity and self-complementarity in different schemes, *Phys. Rev. D* 86, 093019 (2012)

- [56] S. Glashow and S. Weinberg, Natural conservation laws for neutral currents, *Phys. Rev.* **D15** 1958 (1977).
- [57] K.A. Olive et al. (Particle Data Group), *Chin. Phys.* C38, 090001 (2014)
- [58] Walter Grimus, Luís Lavoura, The seesaw mechanism at arbitrary order: disentangling the small scale from the large scale, *JHEP*11(2000)042
- [59] S. T. Petcov, Dirac and Majorana CP-violation, *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)* 145 (2005) 148–153.
- [60] Fedor Simkovic, Double beta decay, nuclear structure and physics beyond the standard model, *Progress in Particle and Nuclear Physics* 57 (2006) 185-202.
- [61] Report to the nuclear science advisory committee, Neutrinoless Double Beta Decay, [http://science.energy.gov/~media/np/nsac/pdf/docs/2014/NLDBD\\_Report\\_2014\\_Final.pdf](http://science.energy.gov/~media/np/nsac/pdf/docs/2014/NLDBD_Report_2014_Final.pdf) (2014).
- [62] Y. Fukuda *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 1562
- [63] Maria Krawczyk [arXiv: hep-ph/0208076]
- [64] R. A. Díaz, Ph.D. Thesis, [arXiv: hep-ph/0212237].
- [65] Shainen M. Davidson and Heather E. Logan, Dirac neutrinos from a second Higgs doublet, *Phys. Rev. D* 80, 095008 (2009)
- [66] Shainen M. Davidson and Heather E. Logan, LHC phenomenology of a two-Higgs-doublet neutrino mass model, *Phys. Rev. D* 82, 115031 (2010)
- [67] Rodolfo A. Diaz, R. Martinez, and J. Alexis Rodriguez, *Phys. Rev.* **D63** (2001) 095007 [arXiv: hep-ph/0010149]
- [68] M. Sher. *Phys. Rep.* **179** (1989) 273
- [69] Gulsheen Ahuja, Sanjeev Kumar, Monika Randhawa, Manmohan Gupta and S. Dev, Texture 4 zero Fritzsch-like lepton mass matrices, *Phys. Rev. D* 76, 013006 (2007)
- [70] J. L. Díaz-Cruz, R. Noriega-Papaqui and A. Rosado, Mass matrix ansatz and lepton flavor violation in the two-Higgs doublet model-III, *Phys. Rev. D* 69, 095002 (2004)
- [71] J. Hernández-Sánchez, S. Morettic, R. Noriega-Papaqui and A. Rosado, Off-diagonal terms in Yukawa textures of the Type-III 2-Higgs doublet model and light charged Higgs boson phenomenology, *JHEP* 07 (2013) 044
- [72] A. V. Borisov, V. Ch. Zhukovski, A. V. Kurilin and A. I. Ternov, *Yad. Fiz.* 41, 743 (1985) [*Sov. J. Nucl. Phys.* 41, 473 (1985)].
- [73] A. Erdas and G. Feldman, *Nucl. Phys. B* 343, 597 (1990).
- [74] K.A. Kouzakov and A.I. Studenikin, Neutrinos, electrons and muons in electromagnetic fields and matter: the method of exact solutions , arXiv:0808.3046v1 [hep-ph] (2008)

- [75] Raffelt, G. G., Limits on neutrino electromagnetic properties: An update, *Phys. Rept.* 320 (1999) 319-327.
- [76] Foot, Robert, Lew, H., Volkas, R. R., J. Electric charge quantization, *Phys. G19* (1993) 361-372, arXiv:hep-ph/9209259.
- [77] Y. Fukuda et al., *Phys. Rev. Lett.*, 81, 1562–1567, 1998, hep-ex/9807003.
- [78] Q. R. Ahmad et al., *Phys. Rev. Lett.*, 89, 011301, 2002, nucl-ex/0204008.
- [79] S. P. Mikheev and A. Y. Smirnov, *Sov. J. Nucl. Phys.*, 42, 913–917, 1985.
- [80] Per Elmfors, David Persson and Bo-Sture Skagerstam, Thermal fermionic dispersion relations in a magnetic fields, CERN-TH/95-243
- [81] Y B Zeldovich: *Doklady* 86 (1952) 505; E J Konopinsky, H M Mahmoud: *PR* 92 (1953) 1045. A. Blondel, A. Cervera-Villanueva, A. Donini, P. Huber, M. Mezzetto, P. Strolin, Future neutrino oscillation facilities, hep-ph/0606111 submitted to *Journal of Physics*.
- [82] The International Scoping Study <http://www.hep.ph.ic.ac.uk/iss/>
- [83] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, Remarks On The Unified Model Of Elementary Particles, *Prog. Theor. Phys.* 28, (1962) 870.
- [84] E. K. Akhmedov, Neutrino physics, hep-ph/0001264.
- [85] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder, An introduction to quantum field theory, Westview Press, 1995.
- [86] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita and M. Nio, Revised value of the eighth-order QED contribution to the anomalous magnetic moment of the electron, *Phys. Rev. D* 77, 053012 (2008)
- [87] D. Hanneke, S. Fogwell, and G. Gabrielse, New Measurement of the Electron Magnetic Moment and the Fine Structure Constant, *PRL* 100, 120801 (2008).
- [88] ACME Collaboration, Baron J, et al., Order of magnitude smaller limit on the electric dipole moment of the electron. *Science*. 2014 Jan 17 ; 343 (6168) : 269-72.
- [89] Lepton Dipole Moments, *Advanced Series on Directions in High Energy Physics: Volume 20*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (2010)
- [90] Kayser, *Phys.*, Majorana neutrinos and their electromagnetic properties, *Rev. D* 26, 1662 (1982)
- [91] Carlo Giunti, et al., Electromagnetic neutrinos in laboratory experiments and astrophysics. arXiv:1506.05387v2 [hep-ph] 12 Nov 2015
- [92] W. Pauli, Carta para L. Meitner y sus colegas fechada el 4 de noviembre de 1930.
- [93] J. Beringer, et al., 2012 Review of Particle Physics - Gauge and Higgs Bosons. *Phys. Rev. D* 86, 010001, (2012)

- [94] Kaushik Bhattacharya, Solution of the Dirac equation in presence of an uniform magnetic field, arXiv:0705.4275v2 [hep-th]
- [95] Kaushik Bhattacharya, Elementary particle interactions in a background magnetic field, arXiv:hep-ph/0407099
- [96] Wu-yang Tsai, Modified electron propagation function in strong magnetic fields, *Phys. Rev. D* 10, 1342, (1974)
- [97] Tzuu-Kang Chyi, Chien-Wen Hwang, W. F. Kao, Guey-Lin Lin, Kin-Wang Ng, and Jie-Jun Tseng, Weak-field expansion for processes in a homogeneous background magnetic field, *Phys. Rev. D* 62, 105014 (2000)
- [98] Alan Chodos, Kenneth Everding and David A. Owen, QED with a chemical potential: The case of a constant magnetic field, *Phys. Rev. D* 42, 2881 (1990)
- [99] Alejandro Ayala, Angel Sánchez, Gabriella Piccinelli, and Sarira Sahu, Effective potential at finite temperature in a constant magnetic field: Ring diagrams in a scalar theory, *Phys. Rev. D* 71, 023004 (2005)
- [100] A. V. Kuznetsov, A. A. Okrugin and A. M. Shitova, Propagators of charged particles in an external magnetic field, expanded over Landau levels, *Int. J. Mod. Phys. A* 30, 1550140 (2015)
- [101] K.N. Abazajian et al., *Astroparticle Physics*. Volume 35, Issue 4 (2011).
- [102] P. A. R. Ade et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters, (2015) [arXiv:1502.01589v2]
- [103] D. V. Forero, M. Tórtola, and J.W. F. Valle, *Phys. Rev. D* 90, 093006 (2014).
- [104] A.G. Akeroyd and F. Mahmoudi, *JHEP*04(2009)121.
- [105] F. Mahmoudi and O. Stal, *Phys. Rev. D* 81, 035016, (2010) [arXiv:0907.1791].
- [106] H. Wong, et al., *Phys. Rev. D* 75 (2007) 012001.
- [107] A. Beda, V. Brudanin, V. Egorov, D. Medvedev, V. Pogosov, et al., Gemma experiment: The results of neutrino magnetic moment search, *Phys. Part. Nucl. Lett.* 10 (2013) 139-143.
- [108] L. B. Auerbach, R. L. Burman, D. O. Caldwell et al. *Phys. Rev. D* 63, 112001 (2001).
- [109] D. Montanino, M. Picariello, and J. Pulido, *Phys. Rev. D* 77, 093011 (2008).
- [110] R. Schwienhorst, D. Ciampa, C. Erickson et al., *Phys. Lett. B*, 513 (2001).
- [111] B. C. Canas, O. G. Miranda, A. Parada, M. Tortola, J. W. F. Valle, *Phys. Lett. B*. 753, 2016. [arXiv:1510.01684].
- [112] A. A. Dobrynina, N. V. Mikheev, and E. N. Narynskaya, Neutrino Self-Energy Operator and Neutrino Magnetic Moment, *Physics of Atomic Nuclei*, 2013, Vol. 76, No. 11, pp. 1352–1355.

- [113] Ta-Pei Cheng, inng-Fong Li, Gauge theory of elementary particles physics, Oxford University Press 2005.
- [114] Alexander Moreno Briceño, Leptogénesis en el modelo simétrico Izquierda-Derecha, Ms. C., Tesis UNAL. 2006