



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# La estimación de un modelo híbrido DSGE-VAR(LAMBDA): Una Aplicación para Colombia

**Juan Camilo Santana Contreras**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias Económicas, Escuela de Economía  
Bogotá, Colombia  
2016



# La estimación de un modelo híbrido DSGE-VAR(LAMBDA): Una Aplicación para Colombia

**Juan Camilo Santana Contreras**

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Ciencias Económicas**

Director(a):  
Dr. Gustavo Adolfo Junca

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias Económicas, Escuela de Economía  
Bogotá, Colombia  
2016



*A Sara*



## Resumen

La investigación propone la implementación de un modelo DSGE-VAR para Colombia en el contexto de una economía abierta que introduce formación de hábitos y rigidez de precios con el objetivo de evaluar el desempeño de esta clase de modelos en comparación con el tradicional DSGE. Considerando que el modelo híbrido puede describirse como una representación VAR en función de la información proporcionada por el DSGE medida a través del parámetro  $\lambda$ , conseguimos probar empíricamente que el modelo DSGE-VAR exhibe un desempeño eficiente frente al DSGE en lo que respecta a bondad de ajuste y capacidad predictiva.

**Palabras clave:** Modelos de Equilibrio General Dinámico Estocástico, Modelo de Vectores Autoregresivos, Modelo Híbrido, Metropolis Hastings, Economía Abierta y Pequeña.

## Abstract

The research establish the implementation of a DSGE-VAR model for Colombia in the context of an open economy which introduces habit formation and price rigidity in order to evaluate the performance of this class of models in relation with the traditional DSGE model. Whereas the hybrid model can be described as a VAR representation based on information provided by DSGE measured by the parameter  $\lambda$ , we could prove empirically that the DSGE-VAR model exhibits an efficient performance in goodness of fit and predictive ability regarding to DSGE model.

**Keywords:** Dynamic Stochastic General Equilibrium Model, Vector Autoregression Model, Hybrid Model, Metropolis Hastings, Small Open Economy)



# Lista de Figuras

4-1. Variables Macroeconómicas Observadas . . . . .	26
4-2. Densidades a-posteriori DSGE-VAR1. Parte 1 . . . . .	35
4-3. Densidades a-posteriori DSGE-VAR1. Parte 2 . . . . .	35
4-4. Variables Ajustadas DSGE-VAR1, DSGE-VAR5 y DSGE . . . . .	36
4-5. Pronósticos Fuera de la Muestra del DSGE-VAR1, DSGE-VAR5 y DSGE . . . . .	37
4-6. Pronósticos Fuera de la Muestra DSGE-VAR1, DSGE-VAR2 y DSGE . . . . .	38
4-7. Choque de la Demanda Doméstica . . . . .	39
4-8. Choque Tecnológico Doméstico . . . . .	39
4-9. Choque de Oferta Doméstica . . . . .	40
4-10. Choque de Política Monetaria . . . . .	41
4-11. Choque Productividad Externa . . . . .	42
4-12. Choque de Oferta Externa . . . . .	42
4-13. Descomposición Varianza Consumo Doméstico . . . . .	43
4-14. Descomposición Varianza Producto Doméstico . . . . .	43
4-15. Descomposición Varianza Exportaciones . . . . .	44
4-16. Descomposición Varianza Tasa de Interés Doméstica . . . . .	44
4-17. Descomposición Varianza Inflación Doméstica . . . . .	45
4-18. Descomposición Varianza Tasa de Interés Externa . . . . .	45
4-19. Densidades residuales estructurales DSGE-VAR1 . . . . .	46
4-20. Diagrama QQ Residuales estructurales DSGE-VAR1 . . . . .	46
A-1. Convergencia Parámetros DSGE-VAR1 Parte 1 . . . . .	50
A-2. Convergencia Parámetros DSGE-VAR1 Parte 2 . . . . .	51
A-3. Convergencia Parámetros DSGE-VAR1 Parte 3 . . . . .	51
A-4. Convergencia Parámetros DSGE-VAR1 Parte 4 . . . . .	51
A-5. Convergencia Parámetros DSGE-VAR1 Parte 5 . . . . .	52
A-6. Convergencia Estimación Multivariada DSGE-VAR1 . . . . .	52
B-1. Densidades a-posteriori DSGE. Parte 1 . . . . .	54
B-2. Densidades a-posteriori DSGE. Parte 2 . . . . .	54
B-3. Convergencia Estimación Multivariada DSGE . . . . .	55
B-4. Choque de Política Monetaria-DSGE . . . . .	56
B-5. Choque Tecnológico Doméstico-DSGE . . . . .	57
B-6. Choque de Oferta Doméstica-DSGE . . . . .	58

<b>B-7.</b> Choque de Producto Externo-DSGE . . . . .	59
<b>B-8.</b> Choque de Oferta Externa-DSGE . . . . .	59
<b>B-9.</b> Choque de Demanda Doméstica-DSGE . . . . .	60
<b>C-1.</b> Criterio de Convergencia Multivariado modelo DSGE-VAR1 deflactado . . .	64
<b>C-2.</b> Densidades a-posteriori modelo DSGE-VAR1 deflactado. Parte 1 . . . . .	64
<b>C-3.</b> Densidades a-posteriori modelo DSGE-VAR1 deflactado. Parte 2 . . . . .	65
<b>C-4.</b> Pronóstico DGSE-VAR1, DSGE-VAR6 y DSGE deflactados . . . . .	66

# Lista de Tablas

4-1. Parámetros Calibrados Consolidado . . . . .	31
4-2. Resumen Bondad de Ajuste y Desempeño en Pronóstico . . . . .	32
4-3. Momentos Variables Observadas y DSGE-VAR1 . . . . .	33
4-4. Correlaciones Variables Observadas y DSGE-VAR1 . . . . .	33
4-5. Estimación Posterior de los Parámetros DSGE-VAR1 y DSGE . . . . .	34
4-6. Robustez del Modelo DSGE-VAR1-Series Filtradas . . . . .	36
4-7. Test de Diabold-Mariano Efectividad de Pronóstico . . . . .	37
B-1. Momentos Variables Observadas y DSGE . . . . .	55
B-2. Correlaciones Variables Observadas y DSGE . . . . .	56
C-1. Bondad de Ajuste de los modelos DSGE y DSGE-VAR deflactado . . . . .	64
C-2. Comparación Estimaciones del Modelo lineal y DGSE-VAR1 deflactado . . .	65

# Contenido

<b>Resumen</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>xi</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>4</b>
2.1. El modelo DSGE . . . . .	8
2.2. El modelo DSGE-VAR . . . . .	9
2.2.1. Enfoque Bayesiano . . . . .	10
2.2.2. Pronóstico con DSGE-VAR . . . . .	13
2.2.3. Metodología de Estimación del DSGE-VAR . . . . .	13
<b>3. El Modelo</b>	<b>17</b>
3.1. Los hogares . . . . .	18
3.2. Las Firmas . . . . .	20
3.3. El Banco Central . . . . .	21
3.4. Sector Externo y Condiciones de Equilibrio . . . . .	21
3.5. Resumen Modelo DSGE . . . . .	24
<b>4. Análisis del Modelo</b>	<b>25</b>
4.1. Descripción de las Variables Observables . . . . .	25
4.2. Calibración . . . . .	28
4.2.1. Hogares . . . . .	28
4.2.2. Firmas . . . . .	29
4.2.3. Parámetros de la Economía Abierta . . . . .	29
4.2.4. El Banco Central . . . . .	30
4.2.5. Los parámetros de Choque . . . . .	30
4.2.6. Resumen de la Calibración . . . . .	31
4.3. Estimación del DSGE-VAR . . . . .	31
4.3.1. Revisión Preliminar . . . . .	31
4.3.2. Momentos de las Variables Observadas . . . . .	33
4.3.3. Parámetros estimados y Criterios de Convergencia . . . . .	34

---

4.3.4. Robustez de la Estimación Bayesiana . . . . .	35
4.3.5. Pronóstico de las Variables Observadas . . . . .	36
4.3.6. Funciones Impulso Respuesta . . . . .	38
4.3.7. Descomposición Histórica de los Choques . . . . .	43
4.4. Comportamiento de los Residuales Estructurales . . . . .	45
<b>5. Conclusiones</b>	<b>48</b>
<b>A. Convergencia Parámetros del DSGE-VAR1</b>	<b>50</b>
<b>B. Modelo DSGE</b>	<b>53</b>
B.1. Estimación Modelo Lineal . . . . .	53
B.2. Simulación del Modelo Lineal . . . . .	53
B.3. Funciones Impulso Respuesta del Modelo Simulado . . . . .	54
<b>C. Modelo No lineal Deflactado</b>	<b>61</b>
C.1. El modelo . . . . .	61
C.2. Resumen de la Estimación . . . . .	63
<b>D. Código en DYNARE</b>	<b>67</b>
<b>E. Código Pronóstico DSGE-VAR</b>	<b>70</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>

# 1. Introducción

El modelo de equilibrio general dinámico estocástico (DSGE) es la representación de un conjunto de relaciones micro-fundamentadas de carácter agregado que le permiten a los gestores de política hacer seguimiento, evaluación y previsión de un fenómeno económico.

Las bondades reconocidas sobre esta clase de modelos para describir y establecer relaciones económicas ha despertado en la última década la crítica de algunos investigadores como [Driffill, 2011a, Driffill, 2011b], [Pesaran y Smith, 2011], [Ascari, 2011], [Miller, 2011] y [Werner, 2011] entre otros, quienes han venido discutiendo sus ventajas, deficiencias y limitaciones al momento de explicar la realidad económica; así también, las investigaciones de [Schorfheide, 2000], [Del Negro *et al.*, 2004] y [Bache *et al.*, 2011] se enfocan en el desempeño de estos modelos en escenarios de pronóstico y bondad de ajuste, controvirtiendo la capacidad de estos modelos para generar respuestas interesantes aún cuando la realidad económica resulta ser más compleja.

Aún cuando estas limitaciones son conocidas, el modelo DSGE sigue proporcionando a los investigadores un método relativamente sencillo que les permite estudiar las causas y efectos de choques económicos de distinta índole; razón por la cual siguen generándose a nivel teórico propuestas que incorporan nuevas caracterizaciones fundamentadas en el DSGE que puedan mejorar aspectos como la capacidad predictiva y explicativa del modelo.

Es por este motivo que el siguiente trabajo tiene como finalidad explorar una clase de modelos que son el resultado de la combinación del tradicional vector autorregresivo (VAR) y el modelo de equilibrio general dinámico estocástico (DSGE) llamado el modelo híbrido (DSGE-VAR) cuyo desempeño ha sido expuesto satisfactoriamente en un conjunto variado de publicaciones internacionales entre las que podemos citar a [Del Negro y Schorfheide, 2002], [Del Negro y Schorfheide, 2006], [Del Negro y Schorfheide, 2007] y [Schorfheide, 2011]. Esta clase de modelos como ha sido descrito anteriormente hace pensar intuitivamente que la combinación de estos dos tipos de estructuras puede resultar interesante debido a que las restricciones y correlaciones implícitas en la especificación del DSGE puede incorporarse en una estructura VAR a través de un parámetro  $\lambda$  que puede generar una representación satisfactoria de los datos frente al tradicional DSGE; como también utilizar el VAR en un entorno retringido cuando por construcción no incorpora de forma explícita restricciones económicas, ver [Hamilton, 1994, Lütkepohl, 2007].

A través de la exploración de esta familia de modelos podemos analizar las propiedades y características de esta especificación, como también establecer las bondades y deficiencias de esta clase de modelos; no obstante, en ningún momento buscamos generalizar las particula-

ridades del modelo híbrido frente al DSGE desde una perspectiva plenamente empírica. Una motivación adicional respecto al desenvolvimiento de este trabajo radica en la ausencia de investigaciones colombianas que hagan referencia explícita respecto a la implementación de esta clase de modelos; como también al desconocimiento que tenemos sobre el desempeño y efectividad de estos en contraste con los modelos de equilibrio general estocástico (DSGE). En este sentido, la primera aproximación tiene como finalidad modelar una economía pequeña y abierta siguiendo las pautas y especificaciones descritas en [Gali, 2008] y [Mickelsson, 2009] para la economía colombiana y a su vez evaluar el impacto de algunos choques de la economía interna y externa sobre el comportamiento de las variables observadas en alusión a la forma como un gestor de política podría actuar al momento de tomar decisiones. Un análisis crítico entorno a los resultados generados por el modelo híbrido y su funcionalidad puede establecer las primeras caracterizaciones de esta familia de modelos respecto del análisis de una economía emergente.

El desarrollo del documento comienza con esta introducción, seguido por el marco teórico donde se hace una revisión de la literatura que envuelve el desarrollo de los DSGE-VAR seguido por una descripción de los principales fundamentos estadísticos que sustentan el desarrollo del DSGE-VAR con enfoque bayesiano. Posteriormente, tendremos la presentación del modelo de economía pequeña y abierta propuesto para Colombia, como también los resultados de los modelos híbridos estimados en conjunto con las conclusiones y las referencias bibliográficas.

## 2. Marco Teórico

El modelo de equilibrio general híbrido (DSGE-VAR) es el resultado metodológico de la combinación de los vectores autorregresivos (VAR) y el tradicional DSGE a través de la representación de una estructura VAR que incorpora las restricciones del DSGE, motivo por el cual en esta clase de modelos resulta interesante identificar que porcentaje de la información prevista en las restricciones del DSGE son relevantes dentro del modelo híbrido. Por ejemplo, [Del Negro y Schorfheide, 2006] establece que el modelo DSGE-VAR es la representación de un conjunto de parámetros bajo una especificación DSGE que puede ser aproximada a partir de un modelo de vectores autorregresivos con un número finito de parámetros haciendo que esta última representación recoja la estructura correlativa intrínseca del sistema descrito por el DSGE y se preserve a su vez las características particulares de los VAR. La inclusión de más parámetros permite describir una estructura más robusta de las covarianzas, restricciones y relaciones cruzadas, permitiendo que el VAR pueda aproximarse con mayor exactitud al DSGE.

Las primeras propuestas de implementación metodológica de esta clase de modelos se deben a [Smith, 1993] y [Gouriéroux *et al.*, 1993]; mientras que el desarrollo de estos modelos bajo el enfoque bayesiano se inició con [Ingram y Whiteman, 1994]; no obstante, fueron los planteamientos teóricos de [Del Negro y Schorfheide, 2002], [Del Negro *et al.*, 2004], [Del Negro y Schorfheide, 2006], [Del Negro y Schorfheide, 2007] y [Del Negro y Schorfheide, 2012] los que establecieron las primeras propuestas para la implementación del modelo híbrido bayesiano evaluando la contribución de las restricciones del DSGE. Algunos otros trabajos como los expuestos por [DeJong *et al.*, 2000], [Smets y Wouters, 2003] y [Warne *et al.*, 2013] hacen énfasis en el modelo híbrido pero con aplicaciones en el contexto de la política monetaria.

Desde entonces la utilización de la teoría bayesiana en la estimación del DSGE ha ganado bastante adeptos en la medida que la estimación paramétrica bajo esquemas de incertidumbre hace necesario la experiencia de los expertos en determinar la trayectoria óptima de un problema económico, como lo establece [Escudé, 2010]; razón por la cual consideramos apropiado las aproximaciones de esta índole en la aplicación utilizando el modelo híbrido. Para profundizar en temas sobre teoría y conceptos bayesianos en el contexto macroeconómico se sugiere la lectura de [Zellner, 1971] y [Del Negro y Schorfheide, 2010]. A partir de este enfoque, las funciones de probabilidad llamadas a-priori y a-posteriori caracterizan el conocimiento o la información sobre el comportamiento de los parámetros del modelo por medio de distribuciones del tipo continuo; a la vez que recogen el comportamiento del vector de

---

parámetros del VAR teniendo en cuenta las restricciones implícitas por el DSGE.

La utilización de técnicas bayesianas en la implementación de un modelo DSGE-VAR basado en teoría Bayesiana es expuesta por [Del Negro y Schorfheide, 2002] cuya estrategia de aproximación puede resumirse de la siguiente manera: (i) Define un modelo DSGE y postula una función a-priori que permita configurar la distribución de los parámetros del modelo DSGE; (ii) genera simulaciones del modelo DSGE a través de las realizaciones de la distribución a-priori y proyecta estos resultados sobre un modelo VAR; (iii) a través de simulaciones con métodos Monte Carlo puede obtener las distribuciones a-posteriori de los parámetros del modelo VAR y DSGE, los que utiliza posteriormente para generar densidades de pronóstico de las variables de interés. Los resultados del modelo híbrido implementado por [Del Negro y Schorfheide, 2002] muestran que el DSGE-VAR tiene un desempeño sobresaliente sobre el VAR no restringido; es decir, aquel modelo que no incorpora las restricciones generadas por el modelo dinámico de equilibrio general estocástico.

La propuesta de [Del Negro *et al.*, 2004] introduce el estudio de los modelos DSGE y el modelo híbrido con base en una modificación del modelo económico propuesto por [Smets y Wouters, 2003], incluyendo el análisis de tendencias estocásticas en el contexto de series no estacionarias. El modelo está basado en el trabajo de [Christiano *et al.*, 2001] y contiene un gran número de fricciones reales y nominales al estilo [Calvo, 1983]. El DSGE introduce una función para productores de bienes finales y bienes intermedios, una función de oferta laboral entre los hogares y las firmas productoras de bienes intermedios; al igual que una función de utilidad para los hogares que maximizan su bienestar a través del establecimiento de trayectorias que describen de manera eficiente los niveles de consumo, trabajo, ocio y balance de dinero. Desde la perspectiva de las decisiones de política monetaria se incorpora la regla de Taylor con la cual se describe el comportamiento de la tasa de interés nominal y adiciona una función de restricción de recursos que equilibra los niveles de consumo y gasto total. Una de las contribuciones más importantes de la propuesta de [Del Negro *et al.*, 2004] es la incorporación del estudio de la mala especificación, mostrando que el DSGE-VAR puede proporcionar informaciones en este contexto al contrastar los resultados con el tradicional DSGE y evaluando el desempeño de cada modelo vía el pronóstico fuera de la muestra y la trayectoria de las funciones de impulso respuesta.

En la misma línea del trabajo anterior, [Del Negro y Schorfheide, 2006] describe las características más favorables del DSGE-VAR convirtiendo este modelo en una herramienta efectiva para contrastar el desempeño del modelo DSGE en asuntos como la bondad de ajuste, el comportamiento en pronóstico e inclusive en temas relevantes como la mala especificación. Estos elementos son interesantes cuando se quiere avanzar hacia una clase de modelos que proporcionen resultados más robustos en contraste con las técnicas tradicionales.

En lo concerniente a la mala especificación [Del Negro y Schorfheide, 2007] investigan la especificación deficiente de un modelo DSGE en la conducción de análisis de política monetaria en la zona Euro, siguiendo los desarrollos de [Christiano *et al.*, 2001], [Del Negro y Schorfheide, 2002] y [Smets y Wouters, 2003]. Con tal objetivo, [Del Negro y Schorfheide,

2007] proponen un modelo DSGE Neo-Keynesiano con acumulación de capital, fricciones del tipo real y nominal. Entre las principales evidencias descubiertas, [Del Negro y Schorfheide, 2007] muestran que una estimación deficiente de un DSGE puede llevar a los hacedores de política monetaria a errar en sus decisiones cuando evalúan las consecuencias de los cambios de la tasa de política monetaria sobre la formación de expectativas y las decisiones de los agentes privados.

Un trabajo posterior de [Del Negro y Schorfheide, 2012] explora el desempeño en pronóstico de los modelos DSGE, considerando al modelo híbrido como un instrumento que permite explicar el co-movimiento entre variables macroeconómicas en un escenario de análisis del ciclo real y la política monetaria. El autor evalúa el modelo DSGE en condiciones de tasas de interés al límite o *zero limit bound*; como también, fricciones financieras en el contexto de la crisis financiera como un caso especial del modelo de [Smets y Wouters, 2007].

En el caso de [Warne *et al.*, 2013] se analiza la capacidad de pronóstico de los modelos DSGE-VAR sobre un modelo simple de economía abierta con datos de la zona Euro y un modelo VAR Bayesiano, destacando particularmente el grado de competitividad de los DSGE-VAR en contraste con los resultados de los modelos individuales DSGE y VAR. El modelo DSGE implementado por [Warne *et al.*, 2013] corresponde con un modelo micro-fundamentado diseñado particularmente para la zona Euro que incluye cuatro clases de agentes económicos: hogares, firmas, una autoridad fiscal y una monetaria. Los hogares hacen escogencias óptimas de sus niveles de consumo y de bienes de inversión a la vez que ofrecen sus servicios laborales en mercados de competencia monopolística. El modelo incorpora los salarios como un *mark up* sobre la tasa marginal de sustitución entre consumo y ocio; al igual que, inversiones en moneda local y extranjera. El modelo también incluye fricciones financieras en la forma de una prima de riesgo e introduce la dinámica de una autoridad fiscal y monetaria que busca estabilizar la inflación en línea con las expectativas del Banco Central Europeo. Un ejercicio parecido es realizado por [DeJong *et al.*, 2000], quien evalúa el desempeño en pronóstico de los DSGE y los VAR en un contexto bayesiano, alcanzando conclusiones equivalentes a las expuestas en las revisiones precedentes. Otras aplicaciones donde se mide el desempeño en pronóstico del DSGE-VAR pueden encontrarse en [Hodge *et al.*, 2008] y [Robinson, 2013], mostrando las bondades del modelo híbrido.

Hasta este punto parece evidente que el modelo híbrido puede competir mejor que otras técnicas; no obstante, a nivel internacional las investigaciones encontrados donde el modelo DSGE-VAR representado a través de un VAR bayesiano compite en el campo del pronóstico con otras técnicas tradicionales como el DSGE, el VAR o representaciones sencillas como el AR revelan resultados mixtos, ni concluyentes como lo expone [Gürkaynak *et al.*, 2013], basando sus resultados en la estimación paramétrica del modelo económico de ciclo real descrito por [Smets y Wouters, 2007]. Así mismo, las conclusiones encontradas le permiten manifestar que los modelos DSGE no son las herramientas idóneas para el pronóstico, contrariamente a como exponen [Del Negro y Schorfheide, 2012].

Como parte de la revisión de la literatura colombiana sobre el modelo híbrido, no identi-

---

ficamos artículos donde se haga una referencia explícita a esta clase de instrumentos; sin embargo, se puede encontrar una amplia variedad de investigaciones que utilizan los DSGE para realizar importantes aportes empíricos y teóricos en la descripción de fenómenos económicos, entre los que podemos citar a [López *et al.*, 1994], [Hamman *et al.*, 2006], [Restrepo, 2008], [Gonzalez *et al.*, 2008], [Mahadeva y Parra, 2008], [Bonaldi *et al.*, 2009], [Gómez *et al.*, 2009], [González *et al.*, 2011], [Suarez, 2011], [Heno, 2013] y [Urrutia *et al.*, 2014], entre otros. Esto permite mostrar que en el contexto de los modelos DSGE-VAR, las investigaciones en Colombia no hacen aún explícito la utilización de esta arquitectura para evaluar el desempeño macroeconómico en aspectos como los impulso respuesta, los pronósticos fuera de la muestra e inclusive la bondad de ajuste.

El desenvolvimiento de los modelos DSGE en la literatura Colombiana se inician con [López *et al.*, 1994] donde se encuentra un compendio de los primeros modelos de equilibrio general utilizados en Colombia que se comenzaron a desarrollar en un contexto determinístico a mediados de los 90s. Las siguientes referencias correspondientes a [Gonzalez *et al.*, 2008], [Mahadeva y Parra, 2008], [Gómez *et al.*, 2009] y [González *et al.*, 2011], cuyas investigaciones contienen importantes aplicaciones del DSGE incorporan en su análisis la utilización de técnicas Bayesianas y comparaciones de desempeño en contraste con herramientas económicas tradicionales.

Frente a la utilización de los DSGE como instrumento para la toma de decisiones de política, podemos citar los trabajos de [González *et al.*, 2011], donde se caracteriza y describe formalmente el modelo PATACON (*Policy Analysis Tool Applied to Colombian Needs*), herramienta base del Banco de la República para medir el impacto de sus estrategias de política monetaria.

Por otro lado, [Restrepo, 2008] proporciona una investigación importante en la especificación de referencias históricas puntuales que permiten definir estados estacionarios de largo plazo de las principales variables macroeconómicas en Colombia. Este compendio de estados estacionarios se ha convertido en el soporte de estudios de modelos de equilibrio general para Colombia. A un nivel más técnico, el trabajo de [Bonaldi *et al.*, 2009] proporciona una metodología de optimización alternativa para los procesos de estimación de los modelos DSGE a través de técnicas basadas en algoritmos de Simulating Annealing. Esta contribución teórica es destacable en la medida que la estimación de los DSGE aún sigue siendo compleja.

Otras investigaciones más recientes como las de [Hamman *et al.*, 2006], [González *et al.*, 2011], [Heno, 2013], [Suarez, 2011] y [Urrutia *et al.*, 2014] proporcionan aplicaciones importantes en asuntos sobre política monetaria, precios y apertura comercial, haciendo uso de los DSGE en el contexto de la economía colombiana. Algunos elementos descritos en estas investigaciones que en la mayoría de casos reflejan la dinámica de una economía abierta y pequeña sirvieron de soporte para la identificación de un conjunto de parámetros en la etapa de calibración de nuestro modelo.

En este capítulo hacemos la descripción del modelo DSGE-VAR, estableciendo las principales características básica del DSGE y fundamentos del modelo híbrido. Utilizamos la notación y

algunos de los elementos descritos entre otros por [Del Negro *et al.*, 2004], [Villaverde, 2009], [Escudé, 2010] y [Griffoli, 2013].

## 2.1. El modelo DSGE

Siguiendo a [Adjemian, 2005] y [Griffoli, 2013], el modelo DSGE es la representación de un sistema de ecuaciones de un vector de variables endógenas  $y_t$ , un vector de variables estocásticas exógenas  $u_t$  y un conjunto de parámetros  $\theta$  de la siguiente forma

$$E_t [f(y_{t+1}, y_t, y_{t-1}, u_{t+1}, \theta)] = 0, \quad (2-1)$$

donde los momentos del vector de choques es dado por  $E_t(u_{t+1}) = 0$  y  $E_t(u_{t+1}u'_{t+1}) = \Sigma_u$ , respectivamente. Por lo general, la solución del sistema de expectativas racionales es dado por las funciones de política de la siguiente manera

$$y_t = g(y_{t-1}, u_t),$$

así que la expresión (2-1) puede reescribirse en una nueva función  $F(\cdot)$  de los valores pasados de la variable endógena y los choques exógenos como se puede apreciar a continuación

$$E_t [F(y_{t-1}, u_t, u_{t+1}, \theta)] = E_t [f(g(y_{t-1}, u_t), g(y_{t-1}, u_t), y_{t-1}, u_t, \theta)] = 0.$$

A partir de esta ecuación, el modelo se resuelve con una aproximación de Taylor de primer orden entorno al estado estacionario de las variables endógenas tal que

$$\bar{y} = g(\bar{y}, 0) = 0,$$

donde  $\bar{y}$  es el estado estacionario. Como se describe en [Griffoli, 2013], la aproximación lineal por series de Taylor permite obtener una expresión de la forma

$$y_t = \bar{y} + g_y \hat{y}_t + g_u u_t,$$

donde  $g_y = \frac{dg}{dy_{t-1}}$ ,  $g_u = \frac{dg}{du_t}$  y  $\hat{y}_t = y_t - \bar{y}$  corresponde con las variables endógenas del modelo. Así mismo, la solución a partir de aproximaciones de Taylor de segundo orden proporciona resultados más exactos e incorpora una mayor estructura de los choques sobre el comportamiento de la función de política. Investigaciones en esta línea han sido expuestas por [Collard y Juillard, 2001b], [Collard y Juillard, 2001a] y [Schmitt-Grohé y Uribe, 2004]. Del mismo modo, [Adjemian, 2005] y [Griffoli, 2013] muestran que la solución del sistema puede escribirse como

$$\begin{aligned} y_t^* &= M\bar{y}(\theta) + M\hat{y}_t + N(\theta)x_t + \eta_t, \\ \hat{y}_t &= g_y(\theta)\hat{y}_{t-1} + g_u(\theta)u_t, \\ E_t(\eta_t\eta'_t) &= V(\theta), \\ E_t(u_t u'_t) &= Q(\theta). \end{aligned}$$

donde  $y_t^*$  corresponde con las variables observables y las demás definidas como antes. En la literatura de los DSGE, la solución del sistema se obtiene a través de una representación de espacio de estados como la presentada arriba, utilizando procedimientos como el método de coeficientes indeterminados de [Uhlig, 1999] o basado en las técnicas de [Sims, 2000] y [Klein, 2000]. Una descripción matemática detallada de la estimación del modelo DSGE puede consultarse en [Villaverde, 2009].

Suponiendo que el vector de estado inicial  $y_1$  en conjunto con los choques estructurales  $(\eta_t, u_t)$  se distribuye normal multivariado entonces es posible construir la función de verosimilitud del vector de observaciones a través de la metodología del filtro de kalman. Este procedimiento proporciona las herramientas para obtener pronósticos óptimos de  $y_t^*$  un paso al frente condicional sobre los valores históricos y sus errores de pronóstico, de tal forma que estos elementos pueden utilizarse para construir la función de verosimilitud; sin embargo en la práctica una expresión algebraica más sencilla se obtiene con la log-verosimilitud. A partir de la representación del espacio de estados, [Griffoli, 2013] muestra que las ecuaciones de recursión basado en el filtro de kalman son

$$\begin{aligned}\hat{y}_{t+1} &= g_y \hat{y}_t + K_t v_t, \\ v_t &= y_t^* - \bar{y}^* - M \hat{y}_t - N x_t, \\ K_t &= g_y P_t g_y' + F_t^{-1}, \\ F_t &= M P_t M' + V, \\ P_{t+1} &= g_y P_t (g_y - K_t M)' + g_u Q g_u',\end{aligned}$$

donde  $\hat{y}_{t+1}$  es la ecuación de actualización del estado;  $v_t$  es la ecuación de error de pronóstico;  $K_t$  es la ganancia de Kalman; mientras que  $F_t$  y  $P_{t+1}$  son la matriz de covarianzas del error de pronóstico de las variables observadas y de la variable de estados, respectivamente. El proceso recursivo se inicializa con el filtro difuso de Kalman. Por último, una consulta más extensa sobre el desarrollo teórico del filtro de Kalman puede encontrarse en [Hamilton, 1994] y [Durbin y Koopman, 2001].

## 2.2. El modelo DSGE-VAR

Suponiendo que el modelo DSGE es una representación restringida de un vector de observaciones  $y_t$  y un vector de parámetros  $\theta$  según [Del Negro *et al.*, 2004], entonces una aproximación del DSGE puede obtenerse a través de un VAR reducido con  $p$ -rezagos de la siguiente forma

$$y_t = \Phi_0^*(\theta) + \Phi_1^*(\theta)y_{t-1} + \dots + \Phi_p^*(\theta)y_{t-p} + u_t. \quad (2-2)$$

donde  $u_t$  corresponde con los residuales del VAR y es distribuido normalmente con media cero y matriz de covarianza  $\Sigma_u^*(\theta)$ . Del mismo modo,  $y_t$  es  $n \times 1$  y  $x_t = [1, y'_{t-1}, \dots, y'_{t-p}]$  de dimensión  $k \times 1$  donde  $t = 1, \dots, T$ . Suponiendo que  $\Phi^*(\theta) =$

$[\Phi_0^*(\theta), \dots, \Phi_p^*(\theta)]'$  siguiendo la notación [Del Negro *et al.*, 2004], el VAR puede re-escribirse como

$$y_t' = x_t' \Phi^*(\theta) + u_t'. \quad (2-3)$$

Puesto que el VAR es una aproximación sobre una representación de espacio de estados de un DSGE linealizado, únicamente más rezagos podrían proporcionar mejores resultados; no obstante, la estimación OLS del modelo VAR en (2-3) puede expresarse como función de los momentos teóricos obtenidos a partir del DSGE para el vector de variables endógenas ( $Y$ ) y exógenas ( $X$ ) de la siguiente forma

$$\Phi^*(\theta) = \Gamma_{XX}^{-1}(\theta) \Gamma_{XY}(\theta) \quad (2-4)$$

y

$$\Sigma_u^*(\theta) = \Gamma_{YY}(\theta) - \Gamma_{YX}(\theta) \Gamma_{XX}^{-1}(\theta) \Gamma_{XY}(\theta), \quad (2-5)$$

donde  $\Gamma_{YY}$ ,  $\Gamma_{YX}$  y  $\Gamma_{XX}$  corresponde con los momentos cruzados y de segundo orden condicionados en  $\theta$  proporcionados por el modelo DSGE. Observe que  $\Gamma_{XX}(\theta)$  debe ser no singular. [Del Negro *et al.*, 2004] utiliza los momentos teóricos debido a que los momentos muestrales pueden incorporar sesgos sobre el modelo resultado de la simulación de variables endógenas y exógenas.

## 2.2.1. Enfoque Bayesiano

### Distribuciones a-Priori

La estructura de un modelo bayesiano puede llegar a ser más informativa en la búsqueda de las condiciones óptimas del problema económico, razón por la cual un subconjunto de parámetros del modelo son especificados a través de densidades de probabilidad. Bajo estas circunstancias definimos una densidad de probabilidad que determine el comportamiento conjunto de los parámetros del DGSE y el VAR

$$P(\Phi, \Sigma_u, \theta \mid \lambda_H, Y) = P(\Phi, \Sigma_u \mid \theta, \lambda_H, Y) \times P(\theta, \lambda_H \mid Y), \quad (2-6)$$

donde destacamos la inclusión del parámetro  $\lambda_H$  introducido por [Del Negro *et al.*, 2004] para medir la desviación de la especificación del DSGE-VAR respecto a la aproximación VAR. Además asumimos que este parámetro es independiente del vector de parámetros  $\theta$ . Como puede ver en la ecuación (2-6), la primera función de densidad a mano derecha representa el VAR condicional con base en los parámetros del DGSE y el parámetro  $\lambda_H$ ; mientras que la densidad de los parámetros  $\theta$  y  $\lambda_H$  representan el conocimiento del experto frente al comportamiento de cada uno de estos parámetros en el contexto del problema analizado. Como veremos a continuación, el comportamiento e interpretabilidad de  $\lambda_H$  trae unas ventajas significativas en el estudio de la especificación del modelo DSGE-VAR.

La aproximación del VAR Bayesiano es obtenida a partir de un incremento de la muestra observada de tamaño  $T$  a través de un conjunto de  $\lambda_H T$  observaciones *dummy* de las variables

endógenas y exógenas del modelo DSGE. De esta manera, [Del Negro *et al.*, 2004] a través del análisis de la razón de verosimilitud del VAR condicional muestra que la función de densidad apropiada para  $\Phi \mid \Sigma_u$  es de la forma

$$\Phi \mid \Sigma_u, \theta, \lambda_H \sim N \left( \Phi^*(\theta), \frac{1}{\lambda_H T} [\Sigma_u^{-1} \times \Gamma_{XX}(\theta)]^{-1} \right), \quad (2-7)$$

mientras que, la función de densidad de las covarianzas es

$$\Sigma_u \mid \theta, \lambda_H \sim IW (\lambda_H T \Sigma_u^*(\theta), \lambda_H T - k - n). \quad (2-8)$$

donde la matriz de covarianzas  $\Sigma_u \mid \theta$  sigue una distribución del tipo Wishart invertida y el vector  $\Phi \mid \Sigma_u, \theta$  sigue una distribución normal multivariada.

Podemos evidenciar en las funciones de densidad (2-7) y (2-8) que el hiper-parámetro  $\lambda_H$ , el cual determina la longitud de la muestra *dummy* como un múltiplo del tamaño muestral observado  $T$ , re-escala la varianza de la distribución que genera  $\Phi$  como también determina el grado de incertidumbre sobre la estructura de covarianzas  $\Sigma_u$ . Esto quiere decir, que el parámetro  $\lambda_H$  tiene un efecto relevante en la forma de las funciones de densidad a-priori.

En la ecuación (2-8) observe que la medida de error de las covarianzas sólo tiene sentido cuando  $\lambda_H \leq \frac{k+n}{T}$ ; es decir, sería imposible estimar más parámetros en el contexto de un conjunto menor de observaciones; restringiendo el dominio de  $\lambda_H$  al intervalo  $[(k+n)/T, \infty)$ .

### Distribuciones a-Posteriori

Las densidades a-priori conjugadas tiene como objetivo establecer que las distribuciones posteriores pertenezcan a la misma familia de distribuciones que las a-priori, según [Zellner, 1971]. De esta forma, los parámetros del VAR condicionales en  $\theta$ ,  $\lambda_H$  y  $Y$  se distribuyen de la siguiente forma

$$\Phi \mid Y, \Sigma_u, \theta, \lambda_H \sim N \left( \hat{\Phi}_b(\theta), \Sigma_u \otimes (\lambda_H T \Gamma_{XX}(\theta) + X'X)^{-1} \right), \quad (2-9)$$

$$\Sigma_u \mid Y, \theta, \lambda_H \sim IW \left( (1 + \lambda_H) T \hat{\Sigma}_{u,b}(\theta), (1 + \lambda_H) T - k - n \right) \quad (2-10)$$

donde  $\hat{\Phi}_b(\theta)$  y  $\hat{\Sigma}_{u,b}(\theta)$  son dados por

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_b(\theta) &= (\lambda_H T \Gamma_{XX}(\theta) + X'X)^{-1} (\lambda_H T \Gamma_{XY} + X'Y) \\ &= \left( \frac{1}{1 + \lambda_H} \Gamma_{XX}(\theta) + \frac{1}{1 + \lambda_H} \frac{X'X}{T} \right)^{-1} \left( \frac{1}{1 + \lambda_H} \Gamma_{XY}(\theta) + \frac{1}{1 + \lambda_H} \frac{X'Y}{T} \right) \end{aligned} \quad (2-11)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{u,b}(\theta) &= \frac{1}{(\lambda_H + 1)T} [(\lambda_H T \Gamma_{YY}(\theta) + Y'Y) - (\lambda_H T \Gamma_{YX}(\theta) + Y'X)] \\ &\quad \times (\lambda_H T \Gamma_{XX}(\theta) + X'X)^{-1} (\lambda_H T \Gamma_{XY}(\theta) + X'Y). \end{aligned} \quad (2-12)$$

Las ecuaciones (2-11) y (2-12) representan los estimadores del DSGE-VAR y evidencian la importancia del parámetro  $\lambda_H$ . En la medida que  $\lambda_H \rightarrow \infty$ , la media posterior de los parámetros converge a la proporcionada por el VAR restringido; es decir, entre más grande el valor del hiper-parámetro, más relevante son las restricciones introducidas por el DSGE dentro de la estructura del VAR. Por otro lado, si  $\lambda_H \rightarrow 0$  entonces la media posterior converge a la versión OLS como las expuestas en (2-4) y (2-5), respectivamente; algo que podrá ocurrir también cuando  $\lambda_H$  se aproxime a  $\frac{(n+k)}{T}$ .

Una vez determinadas las densidades a-posteriori, necesitamos especificar la función densidad del DSGE-VAR definida en (2-6). La primera densidad a la derecha de esta expresión correspondiente con el VAR condicional y puede obtenerse directamente del producto de las densidades (2-9) y (2-10). Para el segundo miembro,  $P(\theta | Y)$ , excluyendo a  $\lambda_H$  del análisis puesto que frecuentemente se asume por construcción independiente del vector  $\theta$ ; reescribimos la densidad utilizando el teorema de Bayes de la siguiente manera

$$P(\theta | Y) \propto P(Y | \theta)P(\theta),$$

y podemos obtener la densidad marginal de los datos integrando sobre los parámetros del VAR condicional como sigue

$$P(Y | \theta) = \int P(Y | \Phi, \Sigma_u)P(\Phi, \Sigma_u | \theta)d(\Phi, \Sigma_u).$$

Siguiendo [Del Negro y Schorfheide, 2002], podemos obtener una forma cerrada para la densidad marginal, la cual involucra la función de verosimilitud del VAR, la densidad del VAR condicional y la densidad a-posteriori del VAR

$$P(Y | \theta, \lambda_H) = \frac{P(Y | \Phi, \Sigma_u, \lambda_H)P(\Phi, \Sigma_u | \theta, \lambda_H)}{P(\Phi, \Sigma_u | Y, \lambda_H)}.$$

La especificación de la a-posteriori del DSGE-VAR en (2-6) puede obtenerse del producto de la función de densidad  $P(Y | \theta)$  por las densidades a-posteriori (2-9) y (2-10), respectivamente.

Las densidades anteriores son determinadas cuando  $\lambda_H$  es finito; sin embargo, cuando  $\lambda_H \rightarrow \infty$  el conjunto de parámetros  $(\Phi, \Sigma_u)$  coincide con  $(\Phi(\theta), \Sigma_u(\theta))$  y la densidad  $P(\Phi, \Sigma_u | \theta, \lambda_H = \infty) = P(\Phi, \Sigma_u | Y, \lambda_H = \infty)$  son equivalentes. De ahí que,

$$P(Y | \theta, \lambda_H = \infty) = P(Y | \Phi, \Sigma_u, \lambda_H = \infty).$$

El segundo miembro de la ecuación anterior es la densidad marginal del VAR, y bajo el supuesto de normalidad multivariada tenemos que

$$P(Y | \Phi, \Sigma_u, \lambda_H = \infty) = (2\pi)^{-nT/2} |\Sigma_u(\theta)|^{-T/2} \exp\left(-\frac{T}{2} \text{tr}\left[\Sigma_u^{-1}(\theta)\tilde{\Sigma}_u(\theta)\right]\right),$$

donde  $\tilde{\Sigma}_u(\theta) = \Gamma_{XX} - \Gamma_{YX}\Gamma_{XX}^{-1}\Gamma'_{YX} + (\Phi(\theta) - \Phi^*(\theta))\Gamma_{XX}(\Phi(\theta) - \Phi^*(\theta))'$ .

### 2.2.2. Pronóstico con DSGE-VAR

El proceso de estimación y pronóstico de los modelos híbridos propuestos en esta investigación ha sido implementado sobre **Dynare** una herramienta de código abierto ampliamente reconocida en el ámbito económico para el análisis, estimación y simulación de modelos de equilibrio general, ver [Griffoli, 2013]. La revisión del código de estimación de la versión **Dynare 4.4.3** nos permite evidenciar que el pronóstico sobre especificaciones del modelo híbrido todavía no ha sido implementado, motivo por el cual proponemos la función de predicción para esta familia de modelos. El código se describe en el anexo (E).

Una vez estimado el modelo DSGE-VAR y expresado en la forma (2-3), el pronóstico  $h$  pasos se realiza simulando los parámetros del DSGE-VAR establecido en las fórmulas (2-9) y (2-10) sobre  $R$ -réplicas, tal que la  $r$ -ésima réplica con choques puede expresarse como

$$y'_{t+h} = x'_{t+h} \Phi^{(r)}(\theta) + u'_t{}^{(r)}$$

donde  $u'_t{}^{(r)} = L'_u \times Z^{(r)}$ ,  $L'_u$  es la matriz triangular inferior de Cholesky obtenida de cada matriz de varianzas covarianzas simulada por  $\Sigma_u^{(r)} | Y, \hat{\theta}, \hat{\lambda}_H$ ; mientras que  $Z^{(r)} \sim N_n(0, I)$ . Las  $R$  simulaciones son consolidadas y se calculan los momentos de primer y segundo orden, entre otros con los cuales se definen bandas de confianza del 95 % .

### 2.2.3. Metodología de Estimación del DSGE-VAR

#### Estructura General de Estimación

La condición no cerrada de la densidad de probabilidad del DSGE-VAR hace necesario utilizar el algoritmo de Metropolis-Hastings (MH) para generar realizaciones de la distribución a-posteriori. Con este objetivo describimos una variación más general del algoritmo MH citado por [An y Schorfheide, 2007] y llamado *Random Walk Metropolis (RWM)* para obtener las realizaciones de la función de densidad a-posteriori. Según [An y Schorfheide, 2007] y [Griffoli, 2013] el algoritmo construye una aproximación Gaussiana alrededor de la moda de la densidad y utiliza una versión escalada de la matriz de covarianzas asintótica como la matriz de covarianzas de la distribución de la a-posteriori. A través de estas especificaciones consigue una exploración eficiente de la densidad a-posteriori alrededor de la moda. El algoritmo trabaja de la siguiente forma

1. Identificar la moda posterior
  - Identificar los momentos de las distribuciones a-priori que proporcionen información inicial sobre  $\theta$  y el valor de  $\lambda_H$
  - Resuelva el modelo DGSE para obtener la representación de espacio de estados  $(M, N, g_y, g_u)$
  - Utilizar el Filtro de Kalman para obtener la log-verosimilitud de la kernel posterior  $\mathbf{L} = \ln P(Y | \theta) + \ln P(\theta)$

- La rutina de optimización sigue hasta encontrar  $\bar{\theta}$  y  $\bar{\Sigma}$ , la moda posterior y la matriz de covarianzas de  $\theta$  en la moda, respectivamente.

## 2. Correr Metropolis-Hastings (**RWM**)

- Identificados la moda posterior de  $\bar{\theta}$  y  $\bar{\Sigma}$ , el proceso comienza para un número de réplicas  $s = 1, \dots, R$
- Obtenga una realización inicial  $\theta^{(0)}$  a partir de  $N_m(\bar{\theta}, c_0^2 \bar{\Sigma})$  donde  $m$  es la dimensión del vector  $\theta$  y  $c_0^2$  es una constante no negativa. Esta constante es escogida de tal forma que permita recorrer ampliamente todos los posibles valores que pueden asumir las distribuciones propuestas y alcanzar tasas de aceptación que según [Griffoli, 2013] puedan estar aproximadamente entre el 20 % - 40 %.
- En el paso ( $s$ ) obtenga una realización  $\theta$  sobre  $N_m(\bar{\theta}^{(s-1)}, c_0^2 \bar{\Sigma})$ . El salto desde  $\theta^{(s-1)}$  se acepta ( $\theta^{(s)} = \theta$ ) con probabilidad  $\min\{1, r(\theta^{(s-1)}, \theta | Y)\}$  y se rechaza ( $\theta^{(s)} = \theta^{(s-1)}$ ) de otra forma y asuma que

$$r(\theta_{(s-1)}, \theta | Y) = \frac{\ln P(Y | \theta) P(\theta)}{\ln P(Y | \theta^{(s-1)}) P(\theta^{(s-1)})}.$$

- Aproximar cualquier momento posterior de una función  $h(\theta)$  por  $\frac{1}{n_{sim}} \sum_{s=1}^{n_{sim}} h(\theta^{(s)})$ .
- El proceso se repite nuevamente hasta alcanzar el número  $R$  de réplicas, de las cuales un cierto porcentaje puede quemarse (*Burning*) de tal forma que se pueda alcanzar la tasa de convergencia prevista y con frecuencia compromete aproximadamente el 50 % de las réplicas. En algunos otros casos, el bloque de réplicas o cadenas se realiza más de un vez hasta conseguir el mismo objetivo.
- Con la moda posterior estimada de  $\tilde{\theta}$  podemos generar los pares  $(\hat{\Phi}_b(\tilde{\theta}), \hat{\Sigma}_{u,b}(\tilde{\theta}))$  a través de las densidades a-posteriori (2-9) y (2-10), respectivamente. De esta forma, con estos parámetros queda especificado el modelo DSGE-VAR para cualquier problema que este relacionado con un VAR reducido.

En la mayoría de los casos, el investigador escoge el valor de  $\lambda_H$  que maximice la densidad marginal de los datos; no obstante, este parámetro puede asignársele una distribución de probabilidad en una forma parecida a los parámetros de  $\theta$  e identificar la moda posterior. En la literatura tradicional sobre DSGE-VAR el valor de la moda del hiper-parámetro se alcanza de la siguiente forma

$$\bar{\lambda}_H = \mathbf{arg\ max} P(Y | \lambda_H),$$

donde  $P(Y | \lambda_H) = \int P(Y | \Phi, \Sigma_u) P(\Phi, \Sigma_u | \theta) d(\theta, \Phi, \Sigma_u)$  es la densidad marginal de los datos. Esta densidad permite consolidar la información de las variables observadas y

proporciona evidencias respecto al grado de ajuste del modelo DSGE-VAR. Puesto que la densidad marginal no tiene una forma cerrada, el valor de la densidad puede aproximarse a través de alguna de dos técnicas como comenta [Escudé, 2010] y también [Griffoli, 2013]. La primera es la aproximación de Laplace donde asume que la densidad de probabilidad kernel sigue una distribución normal y sobre la cual se evalúa la integral anterior. La segunda propuesta utiliza los resultados de la simulación del *Random Walk Metropolis* para utilizar el estimador de media armónica. De esta manera, la densidad marginal permite la comparación entre modelos competitivos.

### Algoritmo de optimización

En los procedimientos de optimización asociados a los modelos DSGE es frecuente encontrar problemas con la condición de no-singularidad de la matriz Hessiana y la estimación de la moda posterior. Algoritmos recientes utilizan métodos Monte Carlo para sobrellevar esta dificultad y alcanzar a través de la simulación, la más alta probabilidad de la densidad posterior. El algoritmo necesita como punto de partida la especificación de una densidad tal que en la  $(s)$ -ésima réplica se obtiene una realización del vector de parámetros  $\varphi^{(s)}$  de la siguiente forma

$$\varphi^{(s)} \sim N_m \left( \phi^{(s-1)}, c^2 \Sigma_\phi \right), s = 1, \dots, R$$

donde  $R$  es el número de réplicas,  $m$  es el tamaño del vector de parámetros,  $c$  es un factor de escala sobre la matriz de covarianzas  $\Sigma_\phi$ , que a su vez es definida positiva. El valor inicial  $\varphi^{(0)}$  puede tomarse de la densidad a-priori establecida para este conjunto de parámetros; mientras que  $\varphi^{(s)}$  puede actualizarse en la forma que establece el **RWM**, la media y la matriz de covarianzas posterior puede actualizarse como

$$\begin{aligned} \mu^{(s)} &= \mu^{(s-1)} + (1/s) [\phi^{(s)} - \mu^{(s-1)}], \\ \Sigma^{(s)} &= \Sigma^{(s-1)} + \mu^{(s-1)} \mu^{(s-1)'} - \mu^{(s)} \mu^{(s)'} \\ &\quad + (1/s) \left[ \phi^{(s)} \phi^{(s)'} - \Sigma^{(s-1)} - \mu^{(s-1)} \mu^{(s-1)'} \right], \end{aligned}$$

y la moda posterior  $\bar{\phi}^{(s)}$  será  $\phi^{(s)}$  si  $p(\phi^{(s)} | Y) \geq p(\bar{\phi}^{(s)} | Y)$ , de lo contrario será  $\bar{\phi}^{(s-1)}$ .

Además de la actualización de la media y la matriz de covarianzas en cada iteración, también es posible actualizar el valor de escala  $c$  y permitir un reajuste en el proceso iterativo hacia una mayor valor en la probabilidad de la densidad posterior. Este valor de ajuste es por lo general opcional y está basado en la tasa de aceptación de las réplicas que como describe [Griffoli, 2013] puede ser del orden de 1/3.

### Criterios de Convergencia

Considerando que la metodología de estimación utilizada en este documento está basada en métodos monte carlo es importante establecer las condiciones que permitan evaluar el grado

de convergencia de los parámetros estimados dentro del modelo. Esto es relevante por que es probable que a través de las simulaciones pueda existir sesgos a lo largo de las realizaciones generadas sobre la densidad a-posteriori como lo establece [Brooks y Gelman, 1998]. Una implementación de las estadísticas de convergencia sobre paquetes como Dynare es decrita brevemente por [Pfeifer, 2014] para cadenas sencillas y múltiples cadenas. Aquí describiremos la metodología sobre múltiples cadenas, pues a través del proceso de implementación obtuvimos mejores resultados con 2 cadenas.

Las estadísticas para evaluar la convergencia se calculan sobre cada parámetro de manera individual y una versión multivariada sobre la log-verosimilitud de la densidad posterior del DSGE-VAR. Respecto a esta última, la densidad kernel a-posteriori es utilizada para consolidar la contribución conjunta de los parámetros. Siguiendo a [Brooks y Gelman, 1998], la operatividad de estas estadísticas es expone a continuación.

Las estadísticas implementadas tienen como objetivo evaluar la variabilidad dentro y entre las cadenas; así que dos indicadores son propuestos. Suponemos que la simulación involucra  $n$  cadenas y  $s$  réplicas, respectivamente.

- **Rango intercuantílico dentro de las Cadenas.** En cada cadena construir el rango intercuantílico del  $100(1 - \alpha)\%$  sobre las  $s$  réplicas para cada parámetro  $\varphi$ ; es decir, con los cuantiles del orden  $100\frac{\alpha}{2}\%$  y  $100(1 - \frac{\alpha}{2})\%$  obtener la longitud del intervalo y mantener las  $n$  estimaciones del rango dentro de las cadenas.
- **Promedio del Rango intercuantílico Total.** A partir del conjunto total de simulaciones a lo largo de las cadenas y las réplicas,  $sn$ , calcular el intervalo  $100(1 - \alpha)\%$  y obtener el promedio del rango intercuantílico.

En la medida que se avanza en las simulaciones, la convergencia se logra cuando los dos indicadores comienzan a tender hacia valores semejantes en una dinámica estable. Esta conclusión es equivalente a la sugerida por [Brooks y Gelman, 1998], quienes proponen una estadística resultado del cociente entre los dos indicadores, la cual llaman  $\hat{R}$  y cuyo valor tiende a 1 cuando se alcanza la convergencia a través de las cadenas.

Así mismo, estos indicadores también pueden calcularse para evaluar otros momentos muestrales del parámetro estimado como por ejemplo momentos de segundo ( $m_2$ ) y tercer orden ( $m_3$ ).

### 3. El Modelo

El modelo propuesto sigue las sugerencias de una economía pequeña y abierta descrita por [Gali, 2008] y [Mickelsson, 2009] para estudiar el papel de la política monetaria. La arquitectura de este modelo está compuesto por cuatro grupos económicos fundamentalmente: los hogares, las firmas, el banco central y la economía externa. Los tres primeros elementos conforman la economía doméstica y la economía externa está representada por nuestro principal socio comercial que para fines de simplicidad del modelo será la economía Estadounidense. Dentro de la economía doméstica, los hogares toman decisiones entre ocio y trabajo incorporando sus hábitos de consumo y la desutilidad que genera el trabajo. En el caso de la economía abierta y pequeña, los hogares tienen la potestad de decidir en que porcentajes deciden consumir bienes domésticos y bienes importados.

Por otro lado, las firmas domésticas emplean a los hogares y se dedican a producir bienes que pueden ser consumidos internamente o en el exterior. Un elemento adicional incorporado a nivel de las firmas es que un porcentaje de las firmas actúa en monopolio fijando el precio de venta de sus bienes producidos en comparación con las demás firmas presentes en el mercado, las cuales interactúan a su vez en un mercado competitivo. Una de las deficiencias del modelo expuesto para las firmas, es que estamos asumiendo que existe pleno empleo, situación que no es completamente cierta para la economía doméstica; no obstante, recordamos que nuestro objetivo es evaluar el desempeño del modelo híbrido a través de una representación sencilla de la economía colombiana. El último de los agentes involucrados en el modelo es el banco central, quien tiene que cumplir con la meta de inflación objetivo a través de la regla de Taylor.

Describimos las ecuaciones no lineales que hacen parte del modelo y simultáneamente mostramos su equivalente en la versión log-linealizada. Utilizamos la notación de [Mickelsson, 2009] para identificar las variables y parámetros asociados con cada grupo económico.

En mayúsculas haremos referencia a las variables en niveles; mientras que en minúsculas relacionamos las variables del modelo log-lineal. En otras palabras, si  $X_t$  representa la serie en niveles entonces la variable en formato log-linealizado puede escribirse como  $X_t = X(1 + x_t)$  donde  $x_t = \log(X_t) - \log(X)$  y  $X$  representa el estado estacionario de la variable  $X_t$ . El desarrollo algebraico relacionado con las condiciones de primer orden pueden obtenerse directamente de [Mickelsson, 2009].

### 3.1. Los hogares

El problema de bienestar de los hogares viene representado por la función de utilidad y la restricción presupuestaria de la siguiente forma

$$\max_{C_t, C_{t+j}} U = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \left[ \frac{1}{1-\theta} \left( \frac{C_{t+j}}{\bar{C}_{t+j-1}^\gamma} \right)^{1-\theta} - \frac{1}{1+\varphi} N_{t+j}^{1+\varphi} \right], \quad (3-1)$$

sujeto a

$$R_{t+j}B_{t+j} + W_{t+j}N_{t+j} = B_{t+j+1} + C_{t+j} \quad \forall j \quad (3-2)$$

donde  $\beta = e^{-\rho}$  es el factor de descuento,  $C_t$  representa el consumo de los hogares en el momento  $t$ ;  $N_t$  es el porcentaje del tiempo destinado por los hogares para el trabajo;  $R_{t+j}$  es la tasa de interés real percibida por los activos  $B_{t+j}$  en que invierten los hogares;  $W_{t+j}$  representa los salarios. Observe en (3-1) que los hogares mantienen o cambian su dinámica de consumo en comparación a un agregado de consumo histórico, cuya persistencia en el tiempo depende del parámetro  $\gamma \in [0, 1]$ . Así mismo, el parámetro  $\theta$  y  $\varphi$  corresponde con la elasticidad inversa de sustitución ( $\theta > 1$ ) y la elasticidad de oferta laboral, respectivamente. La solución del problema de los hogares se obtiene maximizando el lagrangiano que involucra (3-1) sujeto a la restricción presupuestaria (3-2) a través del cual se obtienen las siguientes condiciones de primer orden

$$C_t^{\gamma(1-\theta)-\theta} = \beta \frac{C_{t-1}^{\gamma(1-\theta)}}{C_{t+1}^\theta} \frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} \quad (3-3)$$

$$N_t^\varphi C_{t-1}^{\gamma(1-\theta)} C_t^\theta = W_t. \quad (3-4)$$

Como especificamos al inicio de la sección, escribimos las ecuaciones (3-3) y (3-4) en forma log-linealizada al estilo de [Mickelsson, 2009], obteniendo las ecuaciones IS y oferta laboral, respectivamente. En cada caso, utilizamos la definición previa para la log-linealización y hacemos el desarrollo algebraico.

$$-(\gamma(\theta-1) + \theta)c_t = -\gamma(\theta-1)c_{t-1} - \theta c_{t+1} + i_t - \pi_{t+1} \quad (3-5)$$

$$\varphi n_t - \gamma(\theta-1)c_{t-1} + \theta c_t = w_t \quad (3-6)$$

En el ámbito de una economía abierta, el consumo de los hogares puede distribuirse entre consumo no-transables ( $C_H$ ) y consumo de transables ( $C_F$ ) de la siguiente forma

$$C_t = \left[ (1-\delta)^{\frac{1}{\eta}} C_{H,t}^{\frac{\eta-1}{\eta}} + \delta^{\frac{1}{\eta}} C_{F,t}^{\frac{\eta-1}{\eta}} \right]^{\frac{\eta}{\eta-1}}. \quad (3-7)$$

y el correspondiente índice de precios del consumidor,

$$P_t = \left[ (1-\delta)^{\frac{1}{\eta}} P_{H,t}^{1-\eta} + \delta^{\frac{1}{\eta}} (E_t P_t^*)^{1-\eta} \right]^{\frac{1}{1-\eta}} \quad (3-8)$$

donde  $P_{F,t} = E_t P_t^*$  corresponde con el índice de precios de los bienes extranjeros expresado en términos de la tasa de cambio ( $E_t$ ) y el índice de referencia del precio de los bienes externos ( $P_t^*$ ). Las ecuaciones de demanda del consumidor pueden obtenerse a través de la resolución del problema del consumidor; sin embargo, en esta oportunidad reemplazamos la ecuación (3-7) dentro del lagrangiano y obtenemos las condiciones de primer orden, lo cual conlleva a las siguientes expresiones

$$C_{H,t} = (1 - \delta) \left[ \frac{P_t}{P_{H,t}} \right]^\eta C_t \quad (3-9)$$

y

$$C_{F,t} = \delta \left[ \frac{P_t}{E_t P_t^*} \right]^\eta C_t. \quad (3-10)$$

Las expresiones log-linealizadas del consumo total, el consumo no-transables y el consumo transable se presentan a continuación. Observe que en la ecuación (3-13) incorporamos la versión log-linealizada de los términos de intercambio definida en (3-11) cuyo valor refleja el valor de un bien de referencia en el mercado externo en moneda nacional frente al precio del mismo bien en el mercado interno. Recordemos que, el consumo externo corresponde con las importaciones de la economía doméstica como se exhibe en (3-14).

$$S_t = \frac{E_t P_t^*}{P_{H,t}}. \quad (3-11)$$

$$c_t = (1 - \delta)c_{H,t} + \delta_{F,t} \quad (3-12)$$

$$c_{H,t} = \eta \delta s_t + c_t \quad (3-13)$$

$$c_{F,t} = im_t = c_t - \eta(1 - \delta)s_t. \quad (3-14)$$

Finalmente, el índice de precios al consumidor puede escribirse en función de los precios domésticos ( $P_H$ ) y los precios externos en moneda local ( $P_F$ ) como se expone a seguir, teniendo en cuenta que en la versión log-linealizada obtenemos

$$p_t = (1 - \delta)p_{H,t} + \delta(e_t + p_t^*) = p_{H,t} + \delta(e_t + p_t^* - p_{H,t}). \quad (3-15)$$

Podemos simplificar la ecuación anterior utilizando los términos de intercambio en la versión log-linealizada para obtener

$$p_t = p_{H,t} + \delta s_t, \quad (3-16)$$

y a partir de la primera diferencia obtenemos la inflación del consumidor

$$\pi_t = \pi_{H,t} + \delta \Delta s_t. \quad (3-17)$$

### 3.2. Las Firmas

Siguiendo a [Mickelsson, 2009], las firmas tienen como objetivo maximizar sus beneficios encontrando el nivel óptimo de producción con base en la cantidad de empleo que pueda contratar ( $N_t$ ) y actuando como precio aceptante ( $P_t$ ). El planteamiento del problema para la  $j$ -ésima firma es el siguiente

$$\max_{Y_{t+i}} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i [P_{t+i} Y_{t+i}(j) - W_{t+i} N_{t+i}(j)],$$

donde por simplicidad algebraica se asume que la función de producción de las firmas domésticas sigue una función Cobb-Douglas que depende de la cantidad de trabajo ( $N_t$ ) y la tecnología ( $A_t$ ) como sigue

$$Y_t = A_t N_t^{1-\alpha}. \quad (3-18)$$

La condición de primer orden del problema de las firmas muestra que la productividad marginal del trabajo es igual al salario real

$$(1 - \alpha) \frac{Y_t}{N_t} = \frac{W_t}{P_t} \quad (3-19)$$

de ahí que, el costo marginal de las firmas es dado por  $CM_t = \frac{W_t N_t}{(1-\alpha) Y_t}$ . La versión log-linealizada de la ecuación anterior puede expresarse como

$$cm_t = w_t - (y_t - n_t), \quad (3-20)$$

reemplazando (3-6) en (3-20), y utilizando la versión log-linealizada de (3-18) equivalente a  $n_t = \frac{y_t - a_t}{1-\alpha}$  conseguimos reemplazar  $n_t$  obteniendo la siguiente expresión

$$cm_t = \frac{\varphi + \alpha}{1 - \alpha} y_t - \gamma(\theta - 1)c_{t-1} - \frac{\varphi + 1}{1 - \alpha} a_t + \theta c_t + \delta s_t. \quad (3-21)$$

Cabe destacar que el desarrollo tecnológico tiene un efecto favorable sobre el costo marginal de las firmas, en la medida que la implementación de mejoras en el desarrollo productivo reduce los costos. Del mismo modo, el consumo incide sobre la reducción del costo marginal en una tasa proporcional a la formación de hábitos de los hogares representada en  $\gamma$ .

En contraste con las firmas que actúan en competencia perfecta existe un conjunto de firmas que opera en monopolio con probabilidad  $\omega$ , siguiendo una estructura semejante a la propuesta por [Calvo, 1983]. El problema de las firmas monopolísticas resultará en encontrar el precio óptimo ( $\tilde{P}_t$ ) al que pueden vender sus productos

$$\max_{\tilde{P}_t(j)} \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\omega)^i \left[ \tilde{P}_t(j) \tilde{Y}_{t+i}(j) - CM_{t+i} \tilde{Y}_{t+i}(j) \right],$$

donde  $\tilde{Y}_t(j) = \left( \frac{\tilde{P}_t(j)}{P_t} \right)^{-\varepsilon} \tilde{Y}_t$ .

La solución algebraica de este problema lleva a la ecuación para la curva de Phillips Neo-Keynesiana que puede encontrarse en [Gali, 2008], cuya expresión resulta en

$$\pi_{H,t} = \beta\pi_{H,t+1} + \lambda cm_t \quad (3-22)$$

donde  $cm_t$  hace referencia al costo marginal de las firmas como se describió en la ecuación (3-21) y  $\lambda = \frac{(1-\omega)(1-\beta\omega)}{\omega} \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\varepsilon}$ . Podemos utilizar entonces estas expresiones para obtener una expresión más simplificada de (3-22). La expresión equivalente en la forma log-linealizada se logra reemplazando la ecuación (3-21) y la expresión de  $\lambda$  en (3-22), con lo cual tenemos

$$\pi_{H,t} = \beta\pi_{H,t+1} + \kappa_y y_t - \kappa_a a_t - \lambda\gamma(\theta - 1)c_{t-1} + \lambda\theta c_t + \lambda\delta s_t \quad (3-23)$$

donde  $\kappa_y = \lambda \frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha}$  y  $\kappa_a = \lambda \frac{\varphi+1}{1-\alpha}$ , siguiendo el mismo desarrollo de [Mickelsson, 2009]. Como puede apreciarse a partir de esta fórmula, el progreso tecnológico de las firmas favorece los costos de producción que a su vez benefician el consumo de los hogares a través de una transmisión menor de los costos del productor sobre los precios al consumidor doméstico.

### 3.3. El Banco Central

A diferencia de [Mickelsson, 2009], incluimos en la ecuación de Taylor del modelo doméstico un parámetro adicional que permita un ajuste más suavizado de la tasa de interés en una forma parecida a [Henao, 2013]. La expresión es de la siguiente forma

$$i_t = \phi_i i_{t-1} + \phi_\pi \pi_t + \phi_y y_t. \quad (3-24)$$

Para la economía del extranjero, la política monetaria también se rigue por la regla de Taylor en forma equivalente a la economía doméstica

$$i_t^* = \phi_{i^*} i_{t-1}^* + \phi_{\pi^*} \pi_t^* + \phi_{y^*} y_t^*. \quad (3-25)$$

### 3.4. Sector Externo y Condiciones de Equilibrio

A nivel de participación de las exportaciones se sigue la ecuación de [Gottfries, 2002] como se expone a seguir

$$\frac{EX_t}{Y_t^*} = \left[ \delta^* S_t^* \right]^\mu \left( \frac{EX_{t-1}}{Y_{t-1}^*} \right)^{1-\mu}. \quad (3-26)$$

Como puede notar esta ecuación refleja el grado de participación de las exportaciones domésticas frente al producto de la economía extranjera. Estableciendo que  $\mu \in [0, 1]$  se puede medir el balance de las exportaciones domésticas frente a la economía externa en su comportamiento pasado y presente a la vez que incorpora algún grado de anclaje sobre los términos de intercambio ( $S_t$ ). La ecuación linealizada de (3-26) es

$$ex_t = y_t^* + \mu\eta^* s_t + (1 - \mu) * (ex_{t-1} - y_{t-1}^*). \quad (3-27)$$

Por otro lado, la log-linealización de las exportaciones netas definidas por  $NX_t = EX_t - IM_t$  entorno al estado de equilibrio  $EX = IM$  y  $\delta = \frac{IM}{Y}$  está representada por la ecuación (3-28) como se puede apreciar enseguida

$$nx_t = \delta(ex_t - im_t). \quad (3-28)$$

En estado de equilibrio, la producción doméstica debe igualar al consumo doméstico y a las exportaciones de las firmas de la siguiente forma

$$Y_t = C_{H,t} + EX_t. \quad (3-29)$$

Utilizando la demanda doméstica (3-9) y la función de exportaciones (3-26) sobre (3-29) obtenemos

$$Y_t = (1 - \delta) \left( \frac{P_t}{P_{H,t}} \right)^\eta C_t + \delta^{*\mu} \left( \frac{E_t P_t^*}{P_{H,t}} \right)^{\mu\eta^*} \left( \frac{EX_{t-1}}{Y_{t-1}^*} \right)^{1-\mu} Y_t^*. \quad (3-30)$$

Haciendo alusión a las condiciones de equilibrio de la economía donde  $Y = C$  y  $EX = IM = C_F$ , podemos encontrar que

$$\delta^{*\mu} S^{\mu\eta^*} \left( \frac{EX}{Y^*} \right)^{1-\mu} Y^* = \delta \left( \frac{P}{EP^*} \right)^\eta C. \quad (3-31)$$

Podemos simplificar la ecuación (3-31) considerando que en equilibrio debe cumplirse  $P = P_H = EP^*$  y reemplazar estos resultados en (3-30) llegamos a la expresión

$$y_t = [(1 - \delta)\eta + \mu\eta^*] \delta s_t + (1 - \delta)c_t + \delta y_t^* + \delta(1 - \mu)(ex_{t-1} - y_{t-1}^*) \quad (3-32)$$

Puede observarse que entre más grande es  $\delta$  la preferencia del extranjero es mayor por consumir los bienes producidos domésticamente en contraprestación del consumidor local. Los términos de intercambio, denotado por  $s_t$ , tiene dos efectos diferenciadores sobre el modelo.

El primer efecto depende de la relevancia que establece el consumidor doméstico sobre los bienes domésticos en su canasta de consumo, haciendo decrecer el valor de  $\delta$  como puede apreciar en la ecuación (3-32). El segundo efecto resulta del hecho que un valor mayor de  $s_t$  significa precios más asequibles para los extranjeros en la economía pequeña, lo que implica un incremento en el nivel de apertura comercial ( $\delta$ ). Si no existe relaciones comerciales, evidentemente  $\delta = 0$ .

Para terminar describimos las ecuaciones adicionales del modelo que permiten generar el equilibrio de mercado doméstico. Como se pudo notar en la sección alusiva a los hogares, tanto los individuos de la economía doméstica como la externa pueden invertir parte de sus excedentes en bonos de la economía doméstica, excluyendo la posibilidad de que la economía doméstica pueda invertir en deuda externa.

La ecuación (3-33) describe la dinámica del precio de los bonos que hemos asumido en nuestro modelo en una forma ligeramente diferente a la expuesta por [Mickelsson, 2009] y siguiendo la estructura descrita por [Henaó, 2013] como se muestra enseguida

$$B_t = \frac{1 + i_{t-1}}{1 + \pi_t} B_{t-1} + P_{H,t-1} Y_{t-1} - P_{t-1} C_{t-1} \quad (3-33)$$

cuya expresión log-linealizada corresponde con la ecuación (3-34) donde  $b_t = \frac{B_t}{Y P_{H,t}}$  y  $\delta s_t = p_t - p_{H,t}$ .

$$b_t = (1 + i_{t-1} - \pi_t) b_{t-1} + y_{t-1} - c_{t-1} - \delta s_{t-1}. \quad (3-34)$$

Las tasas de interés tanto doméstica como extranjera se relacionan a través de la paridad no cubierta de tasas de interés que introduce la devaluación y la prima de riesgo de la siguiente forma

$$1 + i_t = (1 + i_t^*) \Phi_t \frac{E_{t+1}}{E_t} \quad (3-35)$$

donde  $\Phi_t = e^{-\psi b_t}$  es la prima de riesgo necesaria por el modelo para alcanzar el nivel de equilibrio. Combinando (3-35) y (3-15) obtenemos la log-linealización respectiva

$$i_t = i_t^* - \psi b_t + \Delta s_{t+1} - \pi_{t+1}^* + \pi_{H,t+1}. \quad (3-36)$$

Observe como los precios extranjeros y la tasa de interés externa inciden sobre el comportamiento de la tasa de interés doméstica como resultado de la paridad de tasas de interés y la prima de riesgo. Por último, la tasa de cambio real puede escribirse de la forma

$$Q = \frac{E_t P_t^*}{P_t}. \quad (3-37)$$

La log-linealización de (3-37) lleva a una expresión para la tasa de cambio real

$$q_t = (1 - \delta) s_t \quad (3-38)$$

### 3.5. Resumen Modelo DSGE

Una vez descrito el modelo, el conjunto de ecuaciones que conforma la estructura del sistema dinámico son

$$c_t = (1 - \delta)c_{H,t} + \delta c_{F,t} \quad (3-39)$$

$$c_{H,t} = \eta \delta s_t + c_t \quad (3-40)$$

$$ex_t = y_t^* + \mu \eta^* s_t + (1 - \mu) * (ex_{t-1} - y_{t-1}^*) \quad (3-41)$$

$$nx_t = \delta(ex_t - im_t) \quad (3-42)$$

$$y_t = ((1 - \delta)\eta + \mu \eta^*) \delta s_t + (1 - \delta)c_t + \delta y_t^* + \delta(1 - \mu)(ex_{t-1} - y_{t-1}^*) \quad (3-43)$$

$$\pi_t = \pi_{H,t} + \delta \Delta s_t \quad (3-44)$$

$$q_t = (1 - \delta)s_t \quad (3-45)$$

$$-(\gamma(\theta - 1) + \theta)c_t = -\gamma(\theta - 1)c_{t-1} - \theta c_{t+1} + i_t - \pi_{t+1} \quad (3-46)$$

$$b_t = (1 + i_{t-1} - \pi_t)b_{t-1} + y_{t-1} - c_{t-1} - \delta s_{t-1} \quad (3-47)$$

$$i_t = i_t^* - \psi b_t + \Delta s_{t+1} - \pi_{t+1}^* + \pi_{H,t+1} \quad (3-48)$$

$$\pi_{H,t} = \beta \pi_{H,t+1} + \kappa_y y_t - \kappa_a a_t - \lambda \gamma(\theta - 1)c_{t-1} + \lambda \theta c_t + \lambda \delta s_t \quad (3-49)$$

$$i_t = \phi_i i_{t-1} + \phi_\pi \pi_t + \phi_y y_t \quad (3-50)$$

$$i_t^* = \phi_{i^*} i_{t-1}^* + \phi_{\pi^*} \pi_t^* + \phi_{y^*} y_t^* \quad (3-51)$$

$$w_t = \varphi n_t - \gamma(\theta - 1)c_{t-1} + \theta c_t \quad (3-52)$$

$$n_t = (y_t - a_t)/(1 - \alpha) \quad (3-53)$$

Incorporamos en el sistema la regla de Taylor para el sector externo en la misma forma que la economía doméstica, más un conjunto de seis choques del tipo proceso autorregresivo que recogen las fluctuaciones tecnológicas de la economía doméstica, de política monetaria, por demanda doméstica, oferta doméstica (curva de Phillips), de producto y precios externo, respectivamente.

$$a_t = \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_t^y, \varepsilon_t^y \sim (0, \sigma_y^2) \quad (3-54)$$

$$v_t = \rho_v v_{t-1} + \varepsilon_t^i, \varepsilon_t^i \sim (0, \sigma_i^2) \quad (3-55)$$

$$z_t = \rho_z z_{t-1} + \varepsilon_t^C, \varepsilon_t^C \sim (0, \sigma_C^2) \quad (3-56)$$

$$u_t = \rho_\pi u_{t-1} + \varepsilon_t^\pi, \varepsilon_t^\pi \sim (0, \sigma_\pi^2) \quad (3-57)$$

$$y_t^* = \rho_{y^*} y_{t-1}^* + \varepsilon_t^{y^*}, \varepsilon_t^{y^*} \sim (0, \sigma_{y^*}^2) \quad (3-58)$$

$$\pi_t^* = \rho_{\pi^*} \pi_{t-1}^* + \varepsilon_t^{\pi^*}, \varepsilon_t^{\pi^*} \sim (0, \sigma_{\pi^*}^2). \quad (3-59)$$

## 4. Análisis del Modelo

En el siguiente capítulo se describen los elementos que permiten el desarrollo de estimación del modelo DSGE-VAR de una economía abierta y pequeña para Colombia. En la primera parte describimos las variables observadas que serán ajustadas por el modelo, como también la evaluación de estacionariedad del sistema multivariado. En la segunda parte, describimos el proceso de calibración general y presentamos la estimación paramétrica del modelo DSGE como preámbulo a la estimación del modelo DSGE-VAR. Una vez se estima el modelo híbrido se pueden contrastar las diferencias con respecto al DSGE; al igual que la robustez de las estimaciones en el contexto bayesiano, el grado de bondad de ajuste y la capacidad de pronóstico. Para fines de referencia del sector externo se ha escogido a la economía Estadounidense, el principal socio comercial de Colombia, representando aproximadamente el 35 % del flujo comercial promedio hacía el exterior en el periodo 2008-2015.

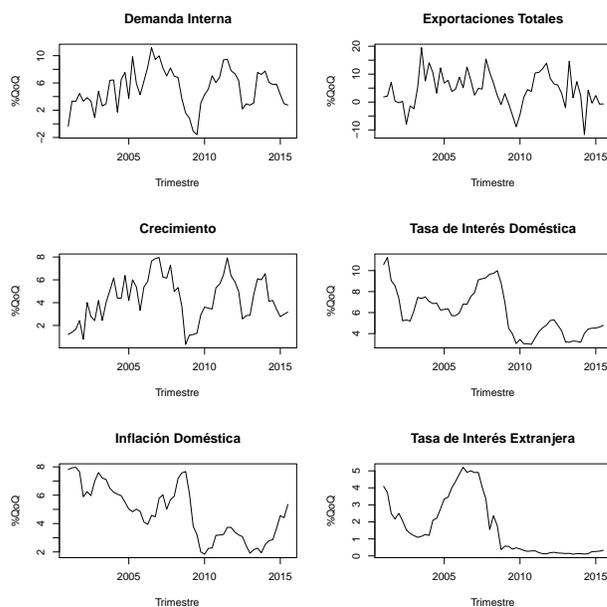
La implementación de los modelos se realiza a través de **MATLAB** utilizando rutinas de optimización proporcionadas por **Dynare**, como también una función de pronóstico propuesta por nosotros para el DSGE-VAR y que explicaremos más adelante.

### 4.1. Descripción de las Variables Observables

El proceso de análisis comprende la observación de seis variables macroeconómicas en el periodo comprendido entre el 2001-T1 y 2015-T3. La selección de las variables observadas pretende analizar elementos macroeconómicos de interés general como son la tasa de interés, el crecimiento y la inflación en el contexto de la política monetaria, más otras variables adicionales que proporcionan información sobre la demanda interna y la dinámica comercial. La fuente y descripción de las variables se expone a continuación.

- **Consumo doméstico total**-(*c*). La serie corresponde con la tasa de crecimiento anual de la demanda interna desestacionalizada obtenida del informe trimestral generado por el DANE para el producto interno bruto por el lado de la demanda.
- **Exportaciones Totales**-(*ex*). La serie es obtenida del informe trimestral de series desestacionalizadas del producto interno bruto por el lado de la demanda realizado por el DANE. Los datos corresponden con los crecimientos anuales de las exportaciones totales.

- **El crecimiento anual del producto interno bruto- $(y)$** . Los datos se obtienen del informe trimestral de series desestacionalizadas del producto interno bruto por el lado de la demanda realizado por el DANE. La base histórica corresponde con el crecimiento anual del total de bienes y servicios producidas reportado trimestralmente.
- **La tasa de interés doméstica- $(i)$** . La tasa de referencia utilizada es la tasa interbancaria. La serie trimestral se obtiene a partir de la base histórica diaria de la tasa interbancaria (E.A.) teniendo en cuenta las tasas de interés que corresponden con las fechas de cierre de cada trimestre. La fuente de la información es el Banco de la República.
- **La inflación anualizada- $(\pi)$** . La serie corresponde con el nivel general de precios de la economía. Utilizamos la serie del IPC Total en variaciones anuales a partir de los reportes sobre inflación del DANE.
- **La tasa de interés externa- $(i^*)$** . La serie se aproxima a partir de las tasas de los bonos del tesoro americano con vencimiento a un año. La serie histórica trimestral se obtiene a partir de la información diaria de negociación de los bonos del tesoro (E.A.) y se construye la serie con los datos que corresponden con las fechas de cierre en cada trimestre. La fuente de información es la Reserva Federal de Estados Unidos.



**Figura 4-1.:** Variables Macroeconómicas Observadas

El conjunto de series temporales observadas ingresan al sistema de ecuaciones por medio de la representación de espacio de estados como se expuso en capítulos anteriores. En este

punto es importante hacer notar tres aspectos sobre estas variables observadas. La primera es que las tasas de interés doméstica y externa ingresan al modelo sobre niveles puesto que el sistema de ecuaciones dinámico incluye versiones de la regla de Taylor tanto para la economía doméstica como la externa además de interactuar con otras variables de forma aditiva. Aún así, el comportamiento histórico entre las tasas nominales y las tasas efectivas anuales de estas tasas de interés exhiben correlaciones del orden del 99 %, motivo por el cual, establecemos la observación directa de las tasas en tasas efectivas sin esperar mayores cambios en los resultados previstos por los modelos ajustados. En segundo lugar, consideramos apropiado la observación directa de todas las variables y no las resultantes de métodos de filtrado puesto que uno de los mayores intereses es pronosticar directamente sobre el modelo DSGE-VAR; sin embargo, como se expone más adelante se consigue mostrar que el sistema de variables observadas es estacionario. Por último, la escogencia de las variables observadas expuestas anteriormente fue estratégico puesto que permite demostrar las bondades del modelo DSGE-VAR frente al DSGE como se presenta más adelante.

La figura (4-1) exhibe el comportamiento trimestral de las variables observadas para la economía Colombiana desde el 2001 hasta el 2015. A través de esta figura se pueden identificar fases interesantes del comportamiento macroeconómico colombiano en el contexto de la política monetaria y la dinámica internacional. En primer lugar, la crisis financiera internacional acaecida desde finales 2008 tuvo un impacto relevante sobre la demanda interna de la mayoría de economías emergentes alrededor del mundo; un escenario económico que implicó para Colombia desde el punto de vista de la política monetaria el inicio de una estrategia expansiva cuyo efecto propició el mejoramiento del consumo interno, las exportaciones y el crecimiento en la post-crisis, en un contexto internacional complejo donde otras economías alrededor del mundo literalmente continuaron en sendas de desaceleración o contracción que se profundizó con la crisis de los PIIGS en Europa desde el 2010. En segundo lugar, el retroceso de los precios del petróleo desde mediados del 2014 y el comienzo de la estabilización de la estrategia de política monetaria en Estados Unidos con posterioridad a la crisis financiera le ha permitido a la economía doméstica reacomodarse a la realidad internacional para mantener el consumo interno y el crecimiento en contraste con el escenario económico desfavorable que exhiben los pares regionales. Por último, nuevas fuentes de riesgo generadas por la inflación del consumidor como consecuencia de factores de oferta ha requerido de nuevas estrategias de política monetaria por parte del emisor para ajustar las expectativas de los agentes frente a sus perspectivas futuras sobre el nivel general de precios de la economía, razón por la cual hemos visto incrementos aproximados de 250 pbs en la tasa de interés de intervención doméstica entre el comienzo del 2014 y finales del 2015.

La construcción del modelo DSGE linealizado hace necesario corroborar si el sistema de variables observadas cumple con la condición de estacionariedad; motivo por el cual aplicamos el filtro de Hodritt Prescott, ver [Hamilton, 1994] para extraer la componente de tendencia de las series con la finalidad de asegurar que el sistema estacionario.

El ajuste del modelo DSGE-VAR se realiza a través de una representación de espacio de estados a través de una aproximación lineal que incorpora adicionalmente estimaciones usando Metropolis Hastings. Las simulaciones involucran la corrida de 50 mil réplicas a lo largo de dos cadenas de Markov. La consideración de este número de réplicas obedece al análisis de convergencia en diferentes escenarios y a las características del procesador para proporcionar resultados rápidos y estables a través de las cadenas.

Por último, complementamos la información del modelo de espacio de estados relacionando las variables observadas con las variables no-observadas. Esto permite que el modelo incorpore mayor información en la descripción del fenómeno de economía abierta.

$$\begin{aligned}
 c_{obs,t} &= c_t - c_{t-4} + z_t \\
 ex_{obs,t} &= ex_t - ex_{t-4} + y_t^* \\
 y_{obs,t} &= y_t - y_{t-4} + a_t \\
 i_{obs,t} &= i_t + v_t \\
 \pi_{obs,t} &= \pi_t + u_t \\
 i_{obs,t}^* &= i_t^* + \pi_t^* + y_t^*
 \end{aligned}$$

## 4.2. Calibración

El proceso de calibración del DSGE-VAR consiste en incorporar dentro de la estructura teórica del modelo las evidencias empíricas proporcionadas por el conjunto de series temporales observadas; es decir, una vez establecido el modelo teórico para una economía abierta, especificamos el conjunto de valores paramétricos que relacione los momentos de las variables observadas con el estado de equilibrio del sistema económico previsto por el modelo teórico. De esta forma, el modelo podrá reflejar de forma dinámica las características propias de la economía Colombiana y preservar las condiciones de equilibrio.

Para identificar los valores de algunos parámetros del modelo consideramos un conjunto de artículos de referencia donde se exponen modelos económicos para el caso colombiano en el contexto de economías abiertas, como un paso previo a la estimación Bayesiana del modelo DSGE-VAR. A continuación hacemos una descripción de los parámetros para cada sector descrito en el modelo de economía abierta.

### 4.2.1. Hogares

Los parámetros involucrados para los hogares son  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ . El valor del parámetro  $\varphi$  que se utilizó fue 1.6 tomado del trabajo de [Heno, 2013]. Recordemos que este parámetro dentro de la estructura de bienestar de los hogares representa la elasticidad de la oferta laboral. Aunque el parámetro utilizado por [Mickelsson, 2009] es más alto considerando que está analizando una economía no emergente, no incorporamos la estimación bayesiana de este parámetro

dentro de la estructura del modelo teniendo en cuenta el valor de referencia doméstico. El parámetro  $\theta$  es un valor frecuentemente alto cuando está involucrado en modelos con formación de hábitos como lo describe [Mickelsson, 2009]; así que, el valor de referencia tomado es 2, el mismo utilizado por [Henaó, 2013]. Podemos entender a  $\theta$  como un parámetro que refleja la disposición o voluntad del consumidor o los hogares para suavizar su consumo en el tiempo.

Con relación al parámetro  $\beta$ , tomamos el valor sugerido por [Mickelsson, 2009] basado en la variación de la tasa de interés anual obteniendo un valor cercano a 0.9900; no obstante, consideramos las revisiones de otros valores de parametrización como los documentados por [Suarez, 2011] y [Henaó, 2013] para el descuento de los flujos futuros del consumo de los hogares; sin embargo, no parece haber una gran diferencia al momento de la estimación del modelo, considerando que este parámetro es excluido del proceso de estimación dentro del esquema bayesiano. Finalmente, el parámetro  $\gamma$  es fundamental puesto que refleja la existencia o no de formación de hábitos, motivo por el cual el valor de referencia del parámetro fue 0.2572 como lo especifica [Henaó, 2013].

### 4.2.2. Firmas

Los parámetros de referencia para las firmas fueron  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  y  $\omega$ . El valor de referencia para  $\alpha$  fue 0.58 tomado directamente de [Restrepo, 2008] y representa la productividad marginal del trabajo. Por otro lado tenemos a  $\varepsilon$ , el parámetro destinado a medir el grado de rigidez de los precios de las firmas utilizando como valor de referencia 6, siguiendo las sugerencias de [Gali, 2008]. Las estimaciones bayesianas preliminares de este parámetro mostraron en moda un valor próximo de 6, motivo por el cual también fijamos el valor de este parámetro. Con respecto a  $\omega$ , parámetro relevante dentro de la estructura de rigidez de precios de las firmas, el valor de calibración utilizado es 0.75, representando la probabilidad o el porcentaje de firmas que mantienen sus precios fijos antes de un cambio en los precios en un esquema al estilo [Calvo, 1983]. La fuente de este valor es [Henaó, 2013].

### 4.2.3. Parámetros de la Economía Abierta

Los parámetros involucrados son  $\eta^*$ ,  $\eta$ ,  $\mu$ ,  $\delta$ ,  $\psi$ . Los parámetros  $\eta^*$  y  $\eta$  corresponden con elasticidades de sustitución entre los bienes domésticos y los bienes extranjeros. El primer parámetro representa la flexibilidad con que la economía extranjera intercambia productos frente al resto del mundo y en el segundo caso, las consideraciones que rigen la decisión entre demandar bienes domésticos o extranjeros por parte de los agentes de la economía doméstica. Los valores de calibración fueron 2.14 y 0.9 tomados directamente de [Tokarick, 2014] y [González *et al.*, 2013], respectivamente. Fijamos estos valores puesto que una elasticidad mayor de  $\eta^*$  respecto de  $\eta$  tiene que darse en la medida que la economía extranjera tiene más opciones de sustitución frente a otras economías a nivel global en contraste con las

oportunidades que tiene una economía pequeña. El parámetro  $\mu$  y  $\psi$  que acompaña la función de exportación son tomados de [Mickelsson, 2009]; no obstante, la estimación bayesiana preliminar de estos dos parámetros exhibieron valores cercanos a los expuestos anteriormente, motivo por el cual se fijaron.

Finalmente, el parámetro  $\delta$  relaciona el grado de apertura de la economía doméstica. Para el caso del modelo de economía abierta calculamos la participación de las importaciones respecto al producto nacional bruto en el periodo 2001T1 y 2015T3, obteniendo un valor promedio de 0.22 parecido al 0.25 presentado por [Henaio, 2013]. Es importante destacar que cuando  $\delta = 0$  el modelo analizado cae en el caso particular de una economía cerrada. Asumimos como fijo el valor de  $\delta$ .

#### 4.2.4. El Banco Central

Los parámetros involucrados son  $\phi_i$ ,  $\phi_\pi$ ,  $\phi_y$ ,  $\phi_{i^*}$ ,  $\phi_{\pi^*}$  y  $\phi_{y^*}$ . En el caso de la especificación de la ecuación de Taylor para la política monetaria de Estados Unidos se toman los parámetros estandar de referencia de la literatura; es decir, 1.5 y 0.5, respectivamente. Por ejemplo, [Mickelsson, 2009] y [Henaio, 2013] utilizan en sus esquemas de calibración esos parámetros para la economía extranjera y doméstica; sin embargo, para la economía doméstica fijamos sobre la regla de Taylor los valores 1.5 y 0.125 utilizados por [Hamman *et al.*, 2006] para considerar una ligera variación frente a la regla de la economía extranjera. Especificamos adicionalmente dos nuevos parámetros dentro de las reglas de Taylor,  $\phi_i$  y  $\phi_{i^*}$  que permiten capturar un mejor suavizamiento de las tasas de interés doméstica y extranjera en una forma parecida a [Henaio, 2013]. Los dos parámetros descritos anteriormente son estimados a través de la técnica bayesiana.

#### 4.2.5. Los parámetros de Choque

Los parámetros autorregresivos de la ecuación de choque de la política monetaria ( $\rho_v$ ) y el choque tecnológico ( $\rho_a$ ) son 0.66 y 0.86, siguiendo a [Henaio, 2013]; mientras que, el choque de oferta doméstica ( $\rho_\pi$ ) y el choque de oferta extranjera ( $\rho_{\pi^*}$ ) son 0.635 y 0.8, respectivamente; valores utilizados por [Mickelsson, 2009]. Por último, se toma el valor 0.45 siguiendo a [Henaio, 2013] para el choque del producto extranjero ( $\rho_{y^*}$ ) y el valor 0.8 para especificar el choque por demanda ( $\rho_z$ ) tomando la sugerencia de [Mickelsson, 2009]. Los valores paramétricos especificados anteriormente sirvieron como punto de partida para la estimación bayesiana. Así mismo, la calibración de las volatilidades que acompañan el término residual en cada ecuación de choque se inicializa en 0.01 como se describe en las ecuaciones (3-54) hasta (3-59) del capítulo 3.

### 4.2.6. Resumen de la Calibración

La tabla (4-1) consolida el conjunto de parámetros que se han fijado para el proceso de optimización. Como consecuencia de esto, el proceso de estimación se concentra sobre los parámetros de persistencia y volatilidad de los choques, relacionados por  $\{\rho_v, \rho_a, \rho_{y^*}, \rho_{\pi^*}, \rho_\pi, \rho_z, \phi_{i^*}, \phi_i, \lambda_H\}$  y  $\{\sigma_c, \sigma_i, \sigma_y, \sigma_\pi, \sigma_{y^*}, \sigma_{\pi^*}\}$ , respectivamente. La asignación de las distribuciones a-priori para los parámetros en cuestión se realiza con base en las referencias citadas en el desarrollo de este trabajo; como también resultado de nuestro análisis como consecuencia de las características inherentes al dominio de cada parámetro.

Fuente	Parámetro	Valor	Referencia
Hogares	$\varphi$	1.6000	[Henao, 2013]
	$\theta$	2.0000	[Henao, 2013]
	$\beta$	0.9900	[Suarez, 2011, Henao, 2013]
	$\gamma$	0.2572	[Henao, 2013]
Firmas	$\alpha$	0.5800	[Restrepo, 2008]
	$\varepsilon$	6.0000	[Gali, 2008]
	$\omega$	0.7500	[Henao, 2013]
Externo	$\eta^*$	2.1400	[Tokarick, 2014]
	$\eta$	0.9000	[González <i>et al.</i> , 2013]
	$\mu$	0.1000	[Gottfries, 2002]
	$\psi$	0.0100	[Mickelsson, 2009]
	$\delta$	0.2200	[Henao, 2013]
Banco C.	$\phi_\pi$	1.5000	[Hamman <i>et al.</i> , 2006]
	$\phi_y$	0.1250	[Hamman <i>et al.</i> , 2006]
	$\phi_{\pi^*}$	1.5000	[Mickelsson, 2009, Henao, 2013]
	$\phi_{y^*}$	0.5000	[Mickelsson, 2009, Henao, 2013]

Tabla 4-1.: Parámetros Calibrados Consolidado

## 4.3. Estimación del DSGE-VAR

### 4.3.1. Revisión Preliminar

La capacidad del modelo DSGE para capturar la estructura de las correlaciones cruzadas inherente en las variables observadas será importante para determinar la efectividad del modelo DSGE-VAR. Los modelos propuestos son estimados utilizando las variables corregidas por la media histórica, valor de referencia del estado de equilibrio de largo plazo como expone [Pfeifer, 2015]. Puesto que el enfoque de análisis está basado en teoría bayesiana y simulaciones Monte Carlo, las primeras exploraciones de la estimación paramétrica nos llevó a concluir que fue necesario incorporar dos cadenas de Monte Carlo y un tamaño de 50 mil réplicas por cadena para lograr una convergencia estable de los parámetros estimados y una descripción aceptable de las funciones de densidad estimadas.

Para establecer el modelo de referencia DSGE-VAR, la siguiente tabla (4-2) resume los valores optimizados de la log-verosimil (log-Kernel) del modelo DSGE y DSGE-VAR, este

último considerando diferentes rezagos (1 a 6). Únicamente evaluamos hasta 6 rezagos puesto que comenzamos a evidenciar un menor valor de la log-kernel frente al proporcionado por el DSGE. Así mismo exponemos el valor de la log-posterior marginal o densidad de los datos  $P(y)$  resultado del procedimiento de optimización. Además para el caso de los DSGE-VAR aparece el valor mínimo admisible del hiperparámetro  $\lambda_H \in [0, \infty)$  como también el valor estimado a través del proceso de estimación posterior.

Modelo	Min $\lambda_H$	$\hat{\lambda}_H$	Log. Kernel	Log. Posterior	RMSE	RMSE-Ex	UI-theil	UII-theil
DSGE	-	-	-894.24	841.20	1.49 %	0.80 %	0.37	0.20
DSGEVAR-1	0.2264	0.3126	-981.50	933.51	2.67 %	0.81 %	0.66	0.34
DSGEVAR-2	0.3396	0.5082	-968.82	920.07	2.42 %	0.81 %	0.60	0.32
DSGEVAR-3	0.4528	0.7098	-959.52	910.63	2.50 %	0.77 %	0.62	0.33
DSGEVAR-4	0.5660	0.8458	-959.11	908.67	2.34 %	0.78 %	0.58	0.32
DSGEVAR-5	0.6792	1.1336	-960.18	909.64	1.87 %	0.78 %	0.46	0.26
DSGEVAR-6	0.7925	1.4508	-962.76	911.30	1.74 %	0.80 %	0.43	0.24

**Tabla 4-2.:** Resumen Bondad de Ajuste y Desempeño en Pronóstico

Para evaluar la capacidad de pronóstico como se expone en la tabla (4-2), la muestra total fue particionada desde el periodo 2001T1 hasta 2014T1 y utilizada en el proceso de estimación; mientras que la muestra restante comprendida entre el 2014T2 y el 2015T3 fue utilizada para evaluar la capacidad predictiva del modelo a través de las medidas RMSE (raíz del error cuadrático medio) en forma semejante a como lo hace [Hodge *et al.*, 2008] y [Robinson, 2013]; sin embargo incluimos también las siguientes medidas: UI-Theil y UII-Theil como son descritas en [Bliemel, 1973].

Los resultados expuestos en la tabla (4-2) muestran que el DSGE-VAR1 exhibe la máxima log-likelihood en contraste con los otros modelos, recogiendo una mayor información sobre la variabilidad de los datos. Además, observe que el conjunto de modelos DGE-VAR consigue mostrar con un valor del hiperparámetro alejando de su cota inferior que las correlaciones cruzadas inherentes a la estructura DSGE es relevante para explicar el desempeño de las variables observadas de la economía abierta aunque en una menor proporción. Por otro lado, a nivel de pronóstico, el modelo DGSE exhibe un mejor desempeño frente a los DSGE-VAR de rezagos menores que 5; pero como veremos más adelante esto ha ocurrido por que el DSGE-VAR fue incapaz de pronosticar una caída inusual de las exportaciones durante el periodo 2014T2 equivalente a una tasa anual del 11,7 %. Por tal razón calculamos nuevamente el RMSE excluyendo la variable de exportaciones, en este caso RMSE-Ex; y concluimos que todos los modelos estimados tienen un desempeño equivalente en pronóstico a través del RMSE.

Para los análisis posteriores del DSGE-VAR, según la tabla (4-2) seguiremos utilizando el modelo de un rezago y para comparaciones de pronósticos incorporamos en el análisis el modelo de 5 rezagos. Con relación al hiper-parámetro, resulta interesante ver que el DSGE-VAR ha incorporado una fracción de la información de las restricciones del DSGE como puede verse sobre  $\hat{\lambda}_H$ , mejorando la bondad de ajuste sobre la especificación VAR bayesiana

y a medida que se incorporan más rezagos, el hiperparámetro estimado se aleja cada vez de su valor mínimo, dando señales que una proporción mayor de información relativa a las restricciones y correlaciones del DSGE mejoran el ajuste sobre el VAR bayesiano. Finalmente, las estadísticas de UI-Theil por debajo de la unidad y entre más cercana a cero revelan la efectividad del pronóstico de cada modelo. Algo parecido ocurre con la UI-Theil. Finalmente, una descripción detallada del modelo DSGE estimado y simulado se revisa en el anexo (B).

### 4.3.2. Momentos de las Variables Observadas

Las siguientes tablas describen los momentos empíricos derivados de la observación de las variables de interés en el periodo 2001T1 a 2014T1; como también los momentos derivados de las series suavizadas a través del DSGE-VAR1. La tabla (4-3) describe la estado de equilibrio utilizado para centrar las variables observadas sobre el modelo lineal; la desviación estandar; el sesgo y la curtosis.

Variable	Empírico				DSGE-VAR1		
	Estado Eq.	DesvStd	Sesgo	Curtosis	DesvStd	Sesgo	Curtosis
$c_{obs}$	5.23 %	2.98 %	-0.23	-0.52	2.94 %	-0.27	-0.42
$ex_{obs}$	5.00 %	5.93 %	0.00	0.03	5.88 %	0.02	-0.02
$y_{obs}$	4.39 %	2.04 %	-0.16	-0.87	2.12 %	-0.48	-0.63
$i_{obs}$	6.17 %	2.28 %	0.31	-0.84	2.00 %	-0.05	-1.21
$\pi_{obs}$	4.86 %	1.93 %	-0.01	-1.27	1.72 %	-0.08	-1.05
$i_{obs}^*$	1.82 %	1.70 %	0.68	-0.93	2.09 %	0.49	-0.58

Tabla 4-3.: Momentos Variables Observadas y DSGE-VAR1

Así también, la tabla (4-4) contrasta las correlaciones observadas y las estimadas por medio del DSGE-VAR1.

Empírica	$c_{obs}$	$ex_{obs}$	$y_{obs}$	$i_{obs}$	$\pi_{obs}$	$i_{obs}^*$
$c_{obs}$	1.0000	0.8638	0.1342	-0.0628	0.3913	0.3844
$ex_{obs}$		1.0000	0.0799	-0.0782	0.3749	0.5028
$y_{obs}$			1.0000	0.7532	0.2310	0.3487
$i_{obs}$				1.0000	-0.2118	0.2153
$\pi_{obs}$					1.0000	0.0939
$i_{obs}^*$						1.0000
DSGE-VAR1	$c_{obs}$	$ex_{obs}$	$y_{obs}$	$i_{obs}$	$\pi_{obs}$	$i_{obs}^*$
$c_{obs}$	1.0000	0.8626	0.1353	-0.0517	0.3709	0.3786
$ex_{obs}$		1.0000	0.1245	-0.0459	0.3707	0.5031
$y_{obs}$			1.0000	0.7428	0.2884	0.4034
$i_{obs}$				1.0000	-0.1882	0.2457
$\pi_{obs}$					1.0000	0.1355
$i_{obs}^*$						1.0000

Tabla 4-4.: Correlaciones Variables Observadas y DSGE-VAR1

### 4.3.3. Parámetros estimados y Criterios de Convergencia

Revisamos los resultados proporcionados por los modelos competitivos, el DSGE y el DSGE-VAR1. La tabla (4-5) presenta los resultados de la estimación posterior bayesiana para el conjunto de parámetros establecido. Notamos que las volatilidades estimadas de los parámetros  $\sigma_y$ ,  $\sigma_{y^*}$  y  $\sigma_{\pi^*}$  resultaron considerablemente más altas sobre la especificación DSGE en contraste con las DSGE-VAR1. El hiperparámetro del modelo DSGE-VAR1 ubicado por encima de su cota inferior de referencia indica que las restricciones proporcionadas por la estructura DSGE contribuyen con relativamente poca información en la explicación de las variables observadas.

$\Theta$	aPri.Dist	Media aPri.	SD.aPri.	DSGE		DSGE-VAR1	
				Media Pos.	DevStd Pos.	Media Pos.	DevStd Pos.
$\rho_v$	NormalT	0.50	0.20	0.5113	0.0644	0.4476	0.1345
$\rho_a$	NormalT	0.50	0.20	0.6370	0.0985	0.4254	0.1627
$\rho_{y^*}$	Beta	0.50	0.20	0.6621	0.0408	0.6653	0.1918
$\rho_{\pi^*}$	Beta	0.40	0.20	0.4887	0.0963	0.4476	0.1746
$\rho_{\pi}$	Beta	0.50	0.20	0.5185	0.0686	0.3250	0.1085
$\rho_z$	Beta	0.30	0.20	0.7849	0.0516	0.3321	0.1939
$\phi_{\xi^*}$	Beta	0.50	0.20	0.1795	0.0875	0.4639	0.1910
$\phi_{\xi}$	Beta	0.50	0.20	0.0712	0.0392	0.4636	0.1853
$\lambda_H$	Gamma	0.50	Inf	-	-	0.3126	0.0428
$\sigma_c$	IGamma	0.01	Inf	0.0075	0.0011	0.0077	0.0020
$\sigma_{\xi}$	IGamma	0.01	Inf	0.0041	0.0004	0.0035	0.0006
$\sigma_y$	IGamma	0.01	Inf	0.0092	0.0010	0.0048	0.0012
$\sigma_{\pi}$	IGamma	0.01	Inf	0.0032	0.0004	0.0033	0.0006
$\sigma_{y^*}$	IGamma	0.01	Inf	0.0242	0.0023	0.0033	0.0006
$\sigma_{\pi^*}$	IGamma	0.01	Inf	0.0150	0.0014	0.0023	0.0003

Tabla 4-5.: Estimación Posterior de los Parámetros DSGE-VAR1 y DSGE

La descripción anterior se puede complementar con las figuras (4-2) y (4-3) donde se exponen las densidades posteriores de los parámetros estimados bajo el modelo DSGE-VAR1. En estas figuras puede apreciar la comparación entre las funciones de densidad a-priori y a-posteriori entorno a la moda estimada obtenida tras el proceso de optimización. Como puede apreciar, las densidades a-posteriori consiguen incorporar a través del proceso de estimación algunas diferencias respecto a las densidades a-priori como consecuencia de las contribuciones generadas por las variables observadas. En otras palabras, la información incorporada a través de las variables observadas ha contribuido en mejorar la capacidad descriptiva del modelo DSGE-VAR.

Evaluamos también el grado de convergencia de los parámetros estimados siguiendo los pasos de [Brooks y Gelman, 1998] como se expuso en el marco teórico. En el apéndice (A) se presentan las figuras que exhiben el grado de convergencia de cada uno de los parámetros estimados sobre las réplicas. En este anexo, el momento central se evalúa con base en un rango intercuantílico del 80%; y se calcula igualmente la convergencia sobre la varianza (momento de segundo orden) y el sesgo (momento de tercer orden). Puede apreciar entonces que el momento central o de intervalo de la mayoría de parámetros estimados consiguen converger establemente después de la primera mitad de las 50 mil réplicas.

En la última figura de este anexo se presenta un tipo de convergencia multivariada basado en

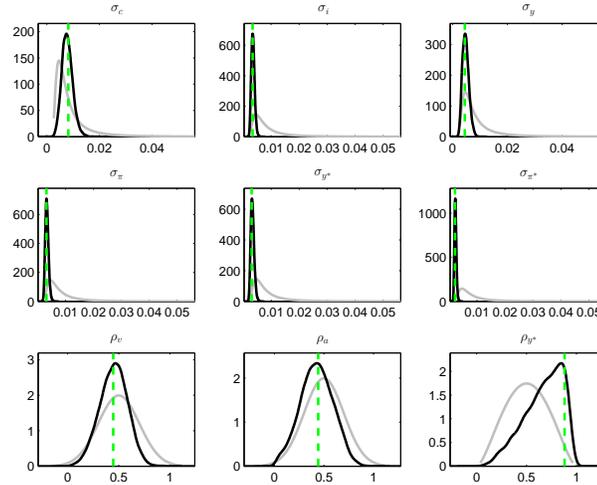


Figura 4-2.: Densidades a-posteriori DSGE-VAR1. Parte 1

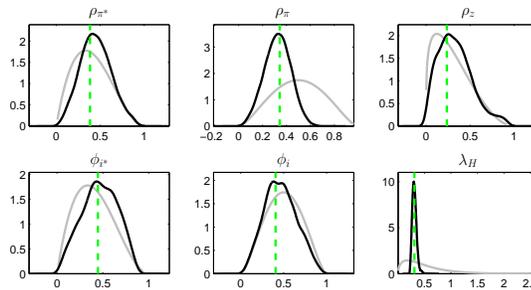


Figura 4-3.: Densidades a-posteriori DSGE-VAR1. Parte 2

el rango intercuantílico sobre la log-kernel a través de las réplicas. Observe como la estimación converge en una dinámica estable a lo largo de todas las simulaciones. Finalmente, el anexo (C) describe la construcción del modelo no lineal deflactado para establecer si se consiguen mejores resultados o una mayor contribución de información a través del enfoque bayesiano que la especificación lineal; no obstante, la revisión de las salidas muestra que el modelo híbrido deflactado revela respuestas semejantes en alusión a la bondad de ajuste y capacidad de pronóstico en forma parecida a la expuesta para el modelo descrito en este capítulo.

#### 4.3.4. Robustez de la Estimación Bayesiana

Revisamos la estimación de los parámetros del modelo DSGE-VAR1 variando la distribución a-priori de los parámetros de referencia. Hacemos un ejercicio semejante al realizado por [Poghosyan y Beidas Strom, 2011] donde asumimos distribuciones normales para la mayoría de parámetros mientras que para los parámetros de volatilidad tomamos distribuciones normales truncadas. La tabla (4-6) registra las estimaciones de la moda con base en la maximización de la log-kernel y las simulaciones de monte carlo sobre la media. Observe que

las estimaciones sobre la moda tanto del modelo DSGE-VAR1 original (Bayes DSGE-VAR1) como las obtenidas sobre el modelo basado en distribuciones normales resultaron parecidas, especialmente en el caso cuando revisamos la comparación entre las medias. Este hecho permitiría probar la convergencia de los parámetros hacia el mismo punto, exceptuando algunos casos como  $\rho_z$  y  $\sigma_{\pi^*}$ . Para los demás parámetros se obtienen aproximaciones aceptables considerando los errores de estimación.

$\Theta$	aPri.Dist	Media aPri.	SD.aPri.	Optim. Post.		MH Post.		Bayes DSGE-VAR1	
				Moda Pos.	DevStd	Media Pos.	DevStd	Media Pos.	DevStd
$\rho_v$	NormalT	0.50	0.20	0.4637	0.1468	0.4390	0.1474	0.4476	0.1345
$\rho_\alpha$	NormalT	0.50	0.20	0.4427	0.1682	0.4420	0.1674	0.4254	0.1627
$\rho_{y^*}$	NormalT	0.50	0.20	0.9676	0.2137	0.7070	0.2342	0.6653	0.1918
$\rho_{\pi^*}$	NormalT	0.50	0.20	0.4329	0.2109	0.5172	0.2110	0.4476	0.1746
$\rho_\pi$	NormalT	0.50	0.20	0.4295	0.1265	0.3942	0.1258	0.3250	0.1085
$\rho_z$	NormalT	0.50	0.20	0.4275	0.1782	0.4451	0.1824	0.3321	0.1939
$\phi_{z^*}$	NormalT	0.50	0.20	0.5104	0.1854	0.5559	0.1912	0.4639	0.1910
$\phi_i$	NormalT	0.50	0.20	0.3529	0.1674	0.4278	0.1732	0.4636	0.1853
$\lambda_H$	NormalT	0.50	0.40	0.3018	0.0373	0.3003	0.0345	0.3126	0.0428
$\sigma_C$	NormalT	0.015	0.01	0.0084	0.0023	0.0083	0.0024	0.0077	0.0020
$\sigma_z$	NormalT	0.015	0.01	0.0031	0.0007	0.0033	0.0007	0.0035	0.0006
$\sigma_y$	NormalT	0.015	0.01	0.0047	0.0017	0.0047	0.0017	0.0048	0.0012
$\sigma_\pi$	NormalT	0.015	0.01	0.0025	0.0007	0.0028	0.0007	0.0033	0.0006
$\sigma_{y^*}$	NormalT	0.015	0.01	0.0015	0.0007	0.0021	0.002	0.0033	0.0006
$\sigma_{\pi^*}$	NormalT	0.015	0.01	0.0011	0.0003	0.0014	0.001	0.0023	0.0003

Tabla 4-6.: Robustez del Modelo DSGE-VAR1-Series Filtradas

### 4.3.5. Pronóstico de las Variables Observadas

La figura (4-4) ilustra la capacidad de ajuste del modelo DSGE-VAR y DSGE sobre las variables observadas para el periodo comprendido entre el 2001-T1 y 2014-T1.

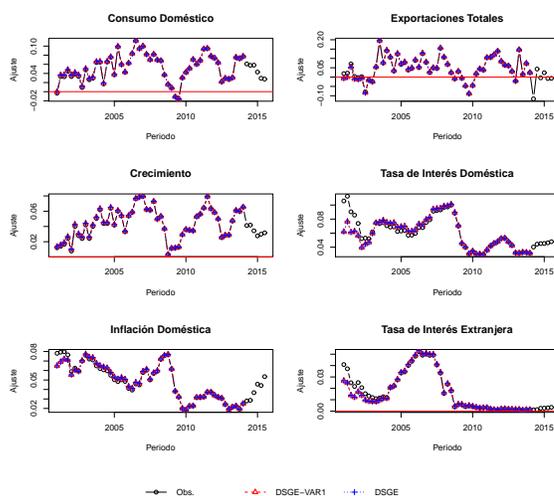
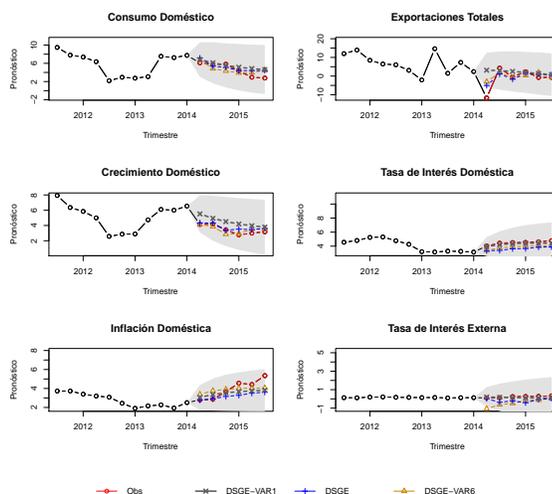


Figura 4-4.: Variables Ajustadas DSGE-VAR1, DSGE-VAR5 y DSGE

Como puede ver, incorporamos también el ajuste de las series observadas del DSGE y el DSGE-VAR con 5 rezagos (DSGE-VAR5) a través de los cuales se puede apreciar un grado de ajuste aceptable, exceptuando los primeros trimestres de las tasas de interés y la inflación doméstica. En este caso, estamos regresando sobre las variables originales observadas teniendo en cuenta que el modelamiento estadístico se realizó sobre las series filtradas.



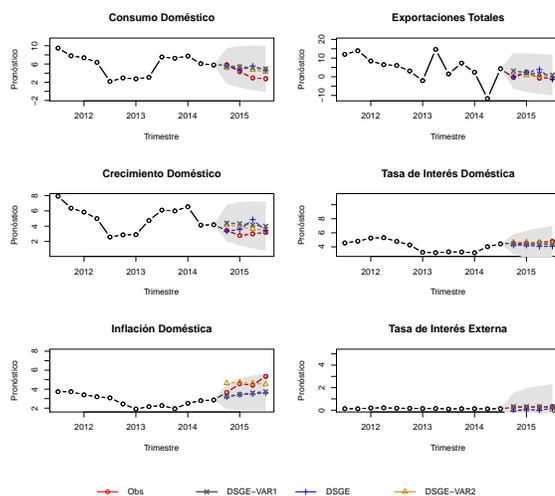
**Figura 4-5.:** Pronósticos Fuera de la Muestra del DSGE-VAR1, DSGE-VAR5 y DSGE

Mientras que la tabla (4-2) describe el desempeño del pronóstico fuera de la muestra, la figura (4-5) nos permite observar gráficamente los resultados obtenidos. Como antes, los últimos 6 trimestres correspondientes al periodo 2014-T2 y 2015-T3 representan la muestra que fue excluida del proceso de estimación que permite medir la capacidad de pronóstico de los tres modelos que fueron presentadas de forma resumida en la misma tabla.

Variable	DSGE-VAR1	DSGE-VAR2	DSGE-VAR3	DSGE-VAR4	DSGE-VAR5	DSGE-VAR6
$c$	0.0101 %	0.0131 %	0.0252 %	0.0065 %	0.0103 %	0.0062 %
$ex$	0.0860 %	0.0012 %	0.0290 %	0.0076 %	0.0028 %	0.0082 %
$y$	0.0761 %	0.0554 %	0.0381 %	0.0343 %	0.0171 %	0.0342 %
$i$	0.0106 %	<0.01 %	<0.01 %	<0.01 %	<0.01 %	<0.01 %
$\pi$	0.0055 %	<0.01 %	<0.01 %	<0.01 %	<0.01 %	<0.01 %
$i^*$	<0.01 %	<0.01 %	<0.01 %	<0.01 %	<0.01 %	<0.01 %

**Tabla 4-7.:** Test de Diabold-Mariano Efectividad de Pronóstico

La figura (4-5) exhibe los resultados de la predicción para cada modelo en contraste con los valores observados en ese lapso de tiempo. La sombra gris representa los intervalos de confianza del 95 % para los pronósticos sobre el DSGE-VAR1. En general podemos evidenciar que los pronósticos son muy parecidos entre el DSGE, DSGE-VAR1 y DSGE-VAR5 como se expuso a través de los índices de Theil y el RMSE-Ex en la tabla (4-2); sin embargo, hay



**Figura 4-6.:** Pronósticos Fuera de la Muestra DSGE-VAR1, DSGE-VAR2 y DSGE

que destacar que el DGSE-VAR exhibe un mejor desempeño en pronóstico frente al DSGE cuando se contrastan los errores de predicción utilizando el test de Diabold-Mariano, ver tabla (4-7). Además, observe que los modelos en conjunto son poco capaces de prever la caída inusual de las exportaciones del periodo 2014-2T.

Finalmente, complementamos el análisis de pronóstico presentando la figura (4-6), el escenario donde se pronosticaron los últimos 4 trimestres de las variables observadas.

Es importante aclarar que la versión **Dynare 4.4.3** que hemos utilizado para la programación de los modelos no tiene incorporada la función de pronóstico sobre los modelos del tipo DSGE-VAR, razón por la cual desarrollamos el código sobre **MATLAB** para obtener estos pronósticos. En el apéndice (E) encuentra el detalle de esta función.

### 4.3.6. Funciones Impulso Respuesta

La siguiente sección presenta las funciones de impulso respuesta generadas por el DSGE-VAR1 y el DSGE sobre las variables observadas: consumo doméstico ( $c$ ); exportaciones totales ( $ex$ ); crecimiento doméstico ( $y$ ); tasa de interés doméstica ( $i$ ); inflación doméstica ( $\pi$ ) y tasa de interés externa ( $i^*$ ). Las siguientes figuras exponen la forma como los choques descritos durante la descripción del modelo económico impactan la dinámica de las variables observadas.

La figura (4-7) exhibe el impacto de la demanda doméstica sobre las variables observadas. Ante un choque positivo de la demanda interna se experimenta un incremento en el consumo de los hogares y la inflación doméstica. Así también, una mayor demanda interna incide sobre un mayor crecimiento económico; es así que en este contexto el gestor de política monetaria sube la tasa de interés. Por otro lado, el DSGE-VAR1 y el DSGE exhiben un impacto diferente sobre las exportaciones; puesto que, el DSGE-VAR1 responde con un incremento

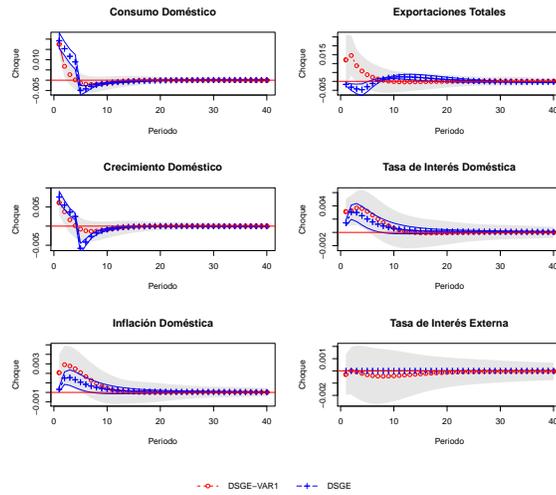


Figura 4-7.: Choque de la Demanda Doméstica

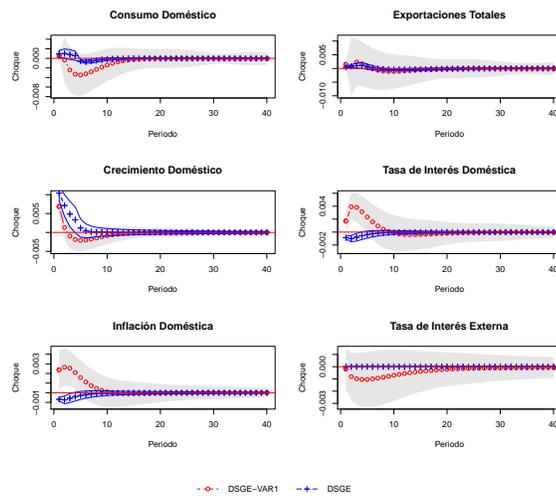
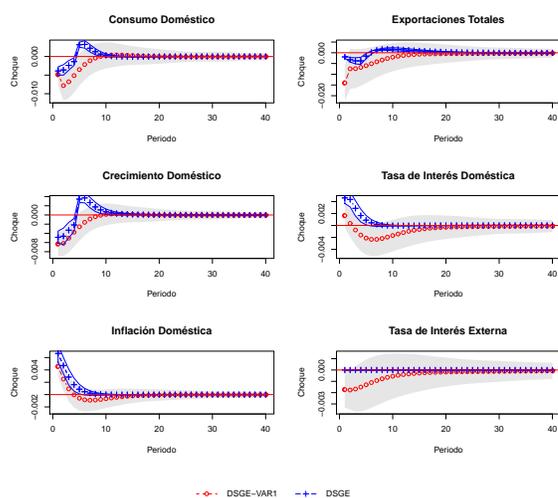


Figura 4-8.: Choque Tecnológico Doméstico



**Figura 4-9.:** Choque de Oferta Doméstica

mientras que el DSGE exhibe una caída aunque con un impacto relativamente menor.

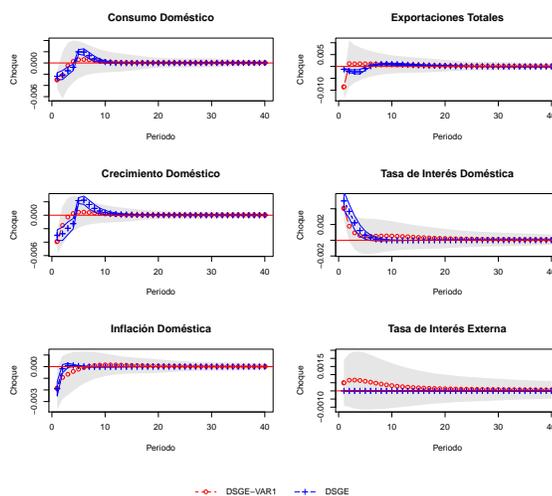
En el caso del DSGE-VAR1, los avances de las exportaciones y el consumo no-transable ante un choque de demanda debe producir incrementos en la productividad doméstica, mientras que, el DSGE sugiere que más consumo interno de no-transables debería desfavorecer las exportaciones. A nivel externo, no debería haber alguna incidencia sobre la economía externa como consecuencia del comportamiento de la demanda interna. Los intervalos de confianza de los choques sobre la tasa de interés externa entorno al cero corrobora este hecho.

Con relación al choque tecnológico doméstico, la figura (4-8) presenta los efectos sobre las variables observadas. Una mejoría tecnológica evidentemente debería generar incrementos en la producción de las firmas y reducción de sus costos. El DSGE-VAR1 no obstante establece que la inflación experimentarías presiones alcistas ante un choque tecnológico en contraste con lo expuesto por el DSGE. Esto puede ser consecuencia de la representación VAR bayesiana que se ha estimado con la porción de información generada sobre la estructura de correlaciones representada a través del DSGE.

Respecto a este último hecho, a través de la representación VAR1 bayesiana la respuesta de la inflación y la tasa de interés a un choque de productividad es positivo, situación que también está ocurriendo sobre el DSGE-VAR1, desligando los resultados del sentido natural de interpretación heredado plenamente del análisis DSGE.

Por último, las exportaciones responden muy lentamente al choque tecnológico tanto en el DSGE-VAR1 como en el DSGE. Posteriormente, cuando se aprecie la descomposición de la varianza se podrá observar que los choques de productividad tienen una contribución considerablemente significativa en la explicación del crecimiento, más que sobre cualquiera de las otras variables observadas.

Por otro lado, el choque de la oferta doméstica propicia incrementos en la inflación como



**Figura 4-10.:** Choque de Política Monetaria

puede ilustrarse en la figura (4-9). Este choque activa el incremento de la tasa de interés como lo exhibe tanto el DSGE-VAR1 como el DSGE. El choque de oferta sobre la economía doméstica incide negativamente sobre el consumo, repercutiendo sobre los niveles de producción y las exportaciones.

Como se puede ver en la figura (4-10), el choque de política monetaria doméstica genera reducciones en la producción de las firmas y el consumo de los hogares, como un mecanismo para reducir las presiones sobre el nivel general de precios de la economía y conducir la inflación doméstica hasta el equilibrio. Como hemos podido apreciar, las variables observadas de la economía doméstica no tienen un mayor efecto sobre las variables observables de la economía externa; sin embargo, es momento de evaluar el choque de estas variables sobre la economía doméstica.

La figura (4-11) representa el choque de productividad externa sobre las variables observadas. El primer impacto es también un incremento de la tasa de interés externa, que a su vez incide sobre la tasa de interés de la economía doméstica como consecuencia de la relación existente a través de la paridad descubierta de las tasas de interés. El choque de productividad externa también favorece las exportaciones y la productividad doméstica. Al generarse una mayor capacidad de producción doméstica y se reduce el consumo de no-transables, entonces la producción diferencial se destina a exportación.

Finalmente, la figura (4-12) representa el choque de la oferta externa. Ante un choque positivo por parte de esta variable, los gestores de política monetaria a nivel externo actúan incrementando la tasa de interés. El choque de oferta externa incentiva la productividad y las exportaciones domésticas en contraste con el consumo doméstico. Una revisión paralela con los resultados del DSGE como se expone en el anexo (B) permite profundizar en la dinámica de las variables no observables del modelo.

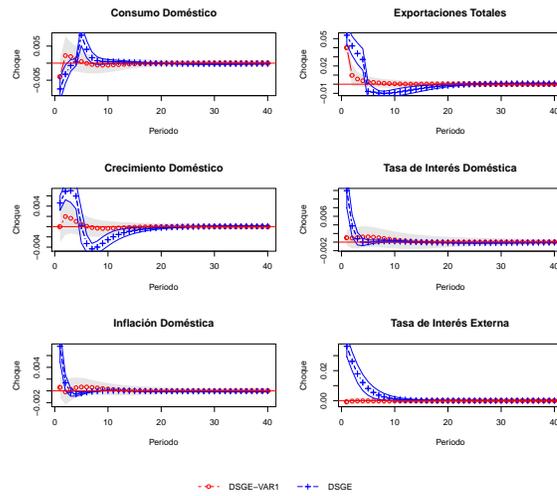


Figura 4-11.: Choque Productividad Externa

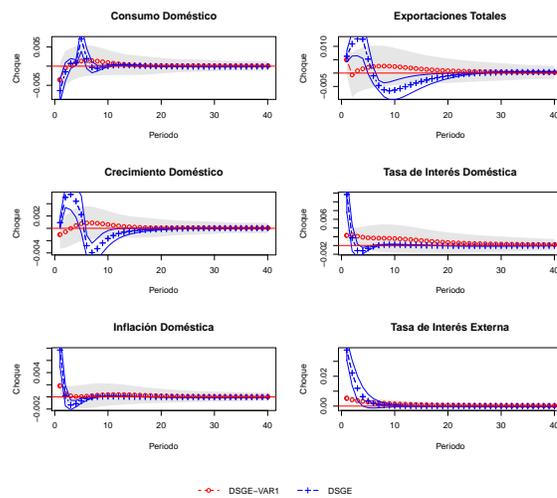


Figura 4-12.: Choque de Oferta Externa

### 4.3.7. Descomposición Histórica de los Choques

Como resultado del modelo DSGE-VAR1 ajustado presentamos la descomposición de varianza de las variables observadas; es decir, la manera como las variables de choque contribuyen a explicar la variabilidad de las series que hemos analizado a través del modelo. Las convenciones en cada una de las figuras representa los choques: demanda interna (ISS), oferta externa (INFSS), productividad externa (WOS), oferta doméstica (PS), productividad doméstica o choque tecnológico (OS) y política monetaria (TS).

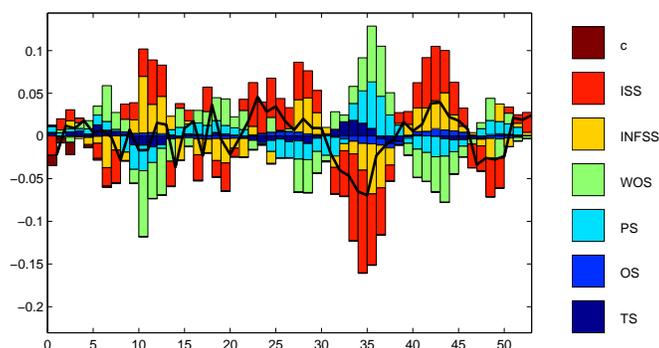


Figura 4-13.: Descomposición Varianza Consumo Doméstico

La figura (4-13) ilustra la descomposición del consumo total cuya variabilidad es explicada en un 53,2% por los choques de la demanda interna; seguido por los choques de oferta doméstica con 16,66% y oferta externa con 11,17%. Así mismo, los choques de la productividad externa explican alrededor del 10,11% de la variabilidad del consumo doméstico. Finalmente, tenemos los choques de productividad doméstica (tecnológica) y política monetaria explicando el 0,41% y 8,42%, respectivamente.

En el caso de la productividad doméstica, ver figura (4-14) el 34,92% de la variabilidad de la productividad de las firmas es explicado por el choque de oferta doméstica; seguido por

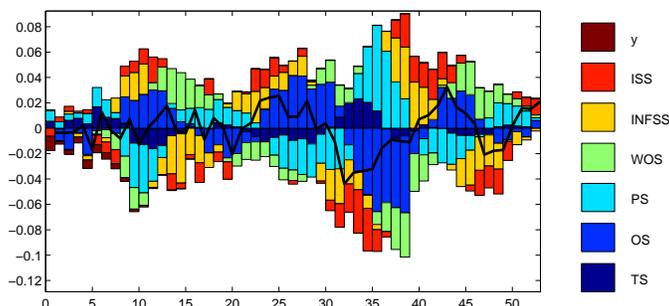
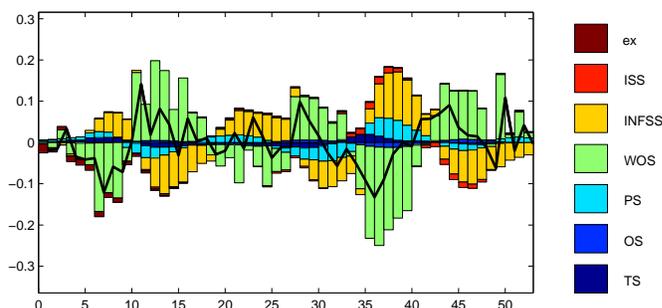
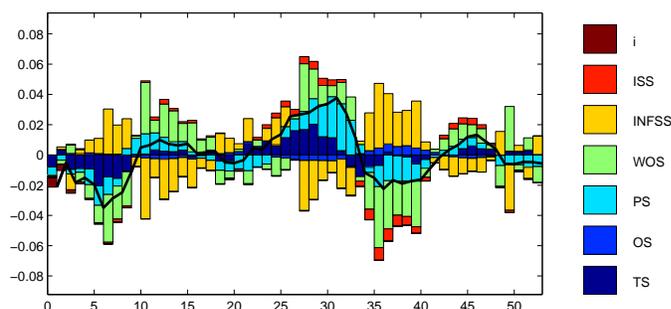


Figura 4-14.: Descomposición Varianza Producto Doméstico



**Figura 4-15.:** Descomposición Varianza Exportaciones



**Figura 4-16.:** Descomposición Varianza Tasa de Interés Doméstica

los choques tecnológicos con el 25,43%; los choques de política monetaria con el 18,22% y los choques de demanda interna con 12,54%; mientras que tenemos una contribución del 3,12% derivado de los choques de productividad externa y 5,76% como consecuencia de los choques de oferta externa.

En lo que concierne a las exportaciones, ver figura (4-15), los choques de productividad externa explican alrededor del 50,43% de la variabilidad de las exportaciones, seguido por los choques de oferta externa con el 23,72%. Estas contribuciones se esperaban por la manera como definimos la dinámica de las exportaciones en el modelo de economía abierta, y por que las cantidades exportadas dependen de la brecha entre productividad y consumo de no-transables. Por otro lado, tenemos los choques de oferta explicando el 14,93%; los choques de demanda con 2,71%; los choques de política monetaria con 7,77% y el choque de productividad doméstica o tecnológica con el 0,44%.

La figura (4-16) exhibe la descomposición de la varianza de la tasa de interés doméstica. Las mayores contribuciones a la variabilidad de la tasa de interés son dadas por los choques de política monetaria con el 46,02%; los choques de oferta doméstica con 25,73%; los choques de oferta externa con 15,58%; los choques de productividad externa con 9,62%; los choques de demanda interna 2,53% y los choques tecnológicos con el 0,52%.

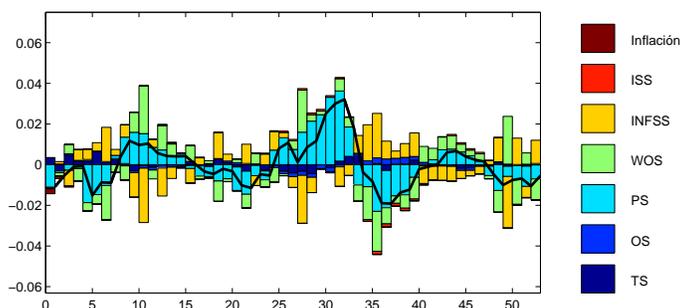


Figura 4-17.: Descomposición Varianza Inflación Doméstica

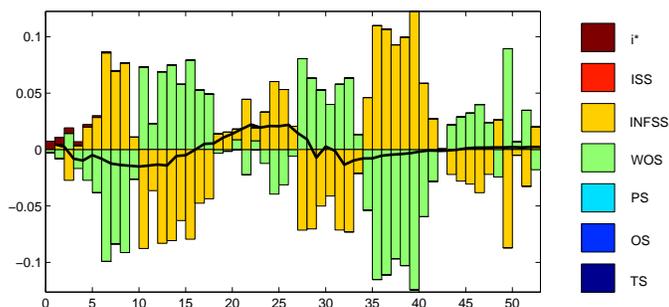


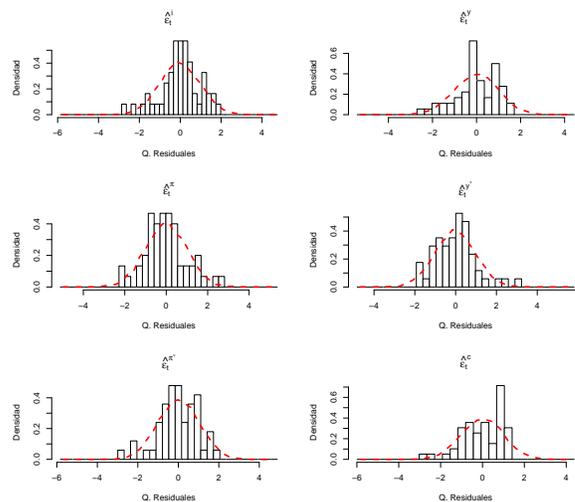
Figura 4-18.: Descomposición Varianza Tasa de Interés Externa

En la figura (4-17) podemos apreciar las contribuciones a la dinámica de la inflación doméstica. Como puede apreciar, alrededor del 76,28 % de la variabilidad de la inflación es explicado por los choques de oferta doméstica; seguido por los choques de política monetaria por el 9,69%; los choques de la oferta externa con 8,65 % y los choques de la productividad externa con el 4,31 %. Finalmente, los choques derivados de la demanda interna y tecnológica explican alrededor del 0,76 % y 0,30 %, respectivamente.

Finalmente, la figura (4-18) representa las contribuciones sobre la dinámica de la tasa de interés externa. En este caso, como lo hemos previsto por construcción; las variables externas deberían explicar completamente la variabilidad de esta variable observada. Es así que, los choques de oferta externa y la productividad externa explican el 58,10 % y 41,90 %, respectivamente.

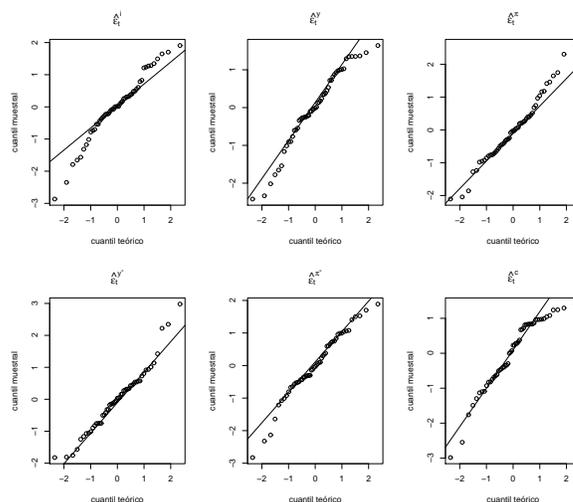
#### 4.4. Comportamiento de los Residuales Estructurales

Hacemos una revisión de los residuales del modelo DSGE-VAR1 y su comportamiento a nivel individual para encontrar alguna evidencia estadística respecto al comportamiento normal multivariado. Los resultados revelan algún grado de simetría en el comportamiento de los



**Figura 4-19.:** Densidades residuales estructurales DSGE-VAR1

residuales en contraste contra una densidad teórica normal y con una mayor curtosis como puede verse en la figura (4-19); mientras que la figura (4-20) muestra que el comportamiento de las series individuales puede ser próxima de la normalidad haciendo un comparativo de contraste entre cuantiles; sin embargo, se evalúan pruebas estadísticas para encontrar evidencias de normalidad multivariada.



**Figura 4-20.:** Diagrama QQ Residuales estructurales DSGE-VAR1

Se realizaron tres pruebas estadísticas de las cuales dos encuentran evidencias de normalidad. La prueba SW arroja un p-valor menor del 1%, en contraste con el test multivariado de Henze-Zirkler (ver [Henze y Zirkler, 1990]) y el test de Royston (ver [Royston, 1992]) con p-valores 5,45% y 2,94%, respectivamente. Aunque los residuales podrían provenir de la

distribución multivariada es importante destacar la existencia latente de correlación serial bajo la representación DSGE-VAR1 y DSGE. Este hecho refleja el grado de complejidad de implementar modelos de esta índole especialmente sobre variables macroeconómicas cuyo comportamiento generalmente es del tipo no-estacionario.

## 5. Conclusiones

La implementación del DSGE-VAR para un modelo de economía pequeña y abierta con base en las cifras de la economía colombiana permitió evaluar algunas de las bondades del modelo híbrido destacable en aplicaciones del ámbito internacional como las presentadas en las investigaciones de [Del Negro *et al.*, 2004], [Del Negro y Schorfheide, 2006] y [Del Negro y Schorfheide, 2007].

Técnicamente, el modelo híbrido DSGE-VAR puede describirse como una estructura VAR basada en una representación DSGE cuyo proceso de implementación y estimación reciente ha venido incorporando elementos de la teoría bayesiana puesto que la información experta puede proporcionar datos adicionales durante la optimización paramétrica. El proceso de estimación a su vez se realizó por medio de una representación de espacio de estados con filtros de Kalman y Metropolis Hastings que adicionalmente implicó la observación de un conjunto de variables de la economía colombiana.

Teniendo en cuenta las características de una economía pequeña y abierta, el conjunto de variables observadas para la economía doméstica fueron el crecimiento de la demanda interna (consumo), el crecimiento anualizado, el crecimiento anual de las exportaciones, la inflación anualizada y la tasa de interés; mientras que para la economía externa se utilizó la tasa de interés basada en los bonos del tesoro. La selección y orden de las variables fue realizado por conveniencia considerando que nuestro interés era encontrar estructuras DSGE-VAR que exhibieran mejores condiciones de ajuste y pronóstico respecto al DSGE.

La metodología de estimación requirió inicialmente el proceso de calibración del DSGE como paso inicial para caracterizar los parámetros de la economía abierta. En esta etapa se identificaron los valores de algunos parámetros siguiendo la revisión de la literatura colombiana en el ámbito de economías pequeñas y abiertas.

Una vez suplida esta fase, los parámetros restantes relacionados directamente con los choques fueron estimados a través del enfoque bayesiano por medio del cual se asignaron densidades de probabilidad a-priori basados en la experiencia para describir el comportamiento de estos parámetros. A través de un análisis de robustez del DSGE-VAR se incorporaron diferentes distribuciones de probabilidad que permitió mostrar que las estimaciones convergieron de forma aproximada entre si, descartando probables divergencias o sesgos excesivos generados por las funciones de probabilidad seleccionadas para representar el comportamiento de los parámetros del modelo.

Los resultados obtenidos a partir de las diferentes especificaciones del modelo híbrido DSGE-VAR exhibieron en general un mejor desempeño en bondad de ajuste frente al tradicional

---

DSGE y aunque el pronóstico fuera de la muestra entre los dos modelos experimentó una dinámica parecida revisando los índices de Theil y el RMSE, el DSGE-VAR consiguió obtener un menor margen de error de proyección frente al DSGE, situación que fue corroborada a través de la prueba estadística de [Diebold y Mariano, 1995]. Además, el incremento del número de rezagos sobre la especificación DSGE-VAR no siempre consiguió superar la capacidad de pronóstico de los modelos híbridos con menores rezagos y la del DSGE, aún cuando mantenía una bondad de ajuste favorable respecto a este último.

El hiper-parámetro del DSGE-VAR por su lado se mantuvo relativamente cerca de su cota inferior de referencia cuando el modelo se especificó con rezagos de primer y segundo orden, mostrando que la información relativa a las restricciones cruzadas proporcionadas por el DSGE contribuyó relativamente poco en la descripción de los datos; sin embargo, a medida que los rezagos se incrementaron, el modelo no solamente consiguió más información sobre las variables observadas sino también incorporó más información sobre las restricciones del DSGE. En esta situación aunque el modelo mantuvo aceptables niveles de ajuste con respecto al DSGE no pudo mejorar consistentemente la capacidad de predicción frente a los modelos híbridos con menores rezagos.

Con relación al DSGE, el proceso de estimación de algunos parámetros de choque, especialmente los relacionados con la economía externa revelaron cierto grado de sesgo en la capacidad de explicar la dinámica de las variables observadas, cuando se compararon con los proporcionados por el DSGE-VAR de un rezago. Este tipo de resultados favorece la gestión del DSGE-VAR tal que el hiper-parámetro estableció el escenario para generar estimaciones balanceadas sobre el conjunto parámetros de choque, relacionando menos información sobre las restricciones y relaciones cruzadas derivadas del DSGE. Este resultado a su vez permitió obtener una descomposición histórico de los choques con una interpretación racional sobre el comportamiento de las variables observadas de la economía colombiana.

Así también, la dinámica de las funciones impulso respuesta difirieron entre el DSGE y el DSGE-VAR como resultado de la contribución del hiperparámetro sobre la estructura DSGE-VAR, haciendo que en algunas de estas relaciones se distorcionaran en favor de las representadas a través de la especificación VAR Bayesiana.

Finalmente, trabajos futuros deben orientarse en la especificación de modelos que incorporen más sectores o mayores desagregaciones que permitan valorar la dinámica de la economía en otros ámbitos como las fricciones financieras, la dinámica del desempleo, el desempeño de firmas importadoras y exportadoras de bienes intermedios y finales, entre otros. Además, teniendo en cuenta las particularidades de las variables macroeconómicas llevar el diseño de los DSGE-VAR un paso adelante incluyendo dentro del análisis modelos de corrección de error o de series no estacionarias a través de la incorporación de tendencias y ciclos.

# A. Convergencia Parámetros del DSGE-VAR1

Las figuras (A-1) hasta (A-6) describen los criterios de convergencia para cada uno de los parámetros estimados con la estructura DSGE-VAR1, basados en los indicadores propuestos en [Brooks y Gelman, 1998] y su evolución a través de las 50 mil réplicas realizadas a lo largo del MCMC.

Para cada parámetro se ilustra la convergencia para el primer momento central (el rango intercuantílico de 80 %), el segundo momento muestral ( $m2$ ) y el tercer momento muestral ( $m3$ ). En la medida que se alcanza la convergencia a través de las simulaciones entonces se podrá observar estabilidad en los indicadores que refleja la variabilidad entre y dentro de las cadenas.

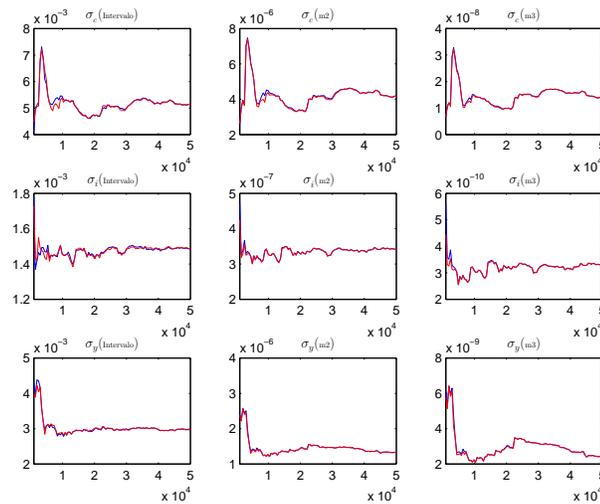


Figura A-1.: Convergencia Parámetros DSGE-VAR1 Parte 1

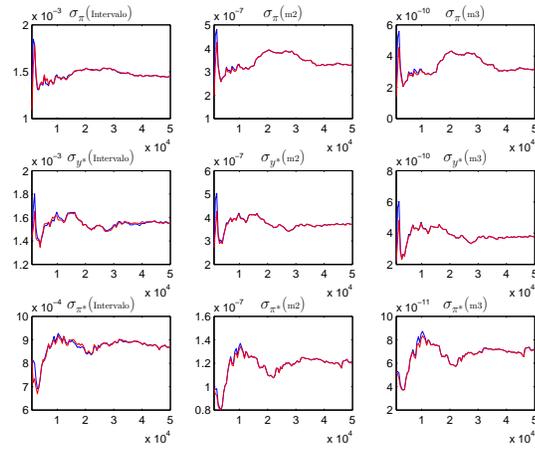


Figura A-2.: Convergencia Parámetros DSGE-VAR1 Parte 2

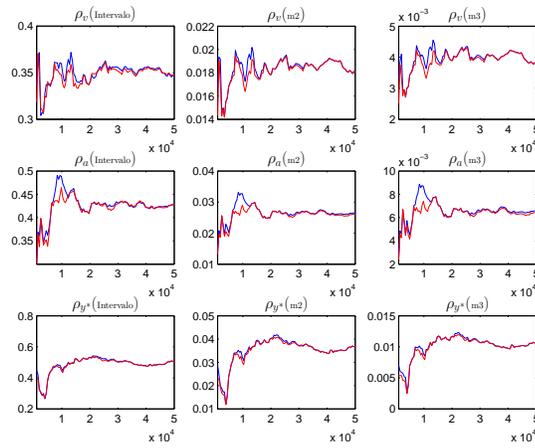


Figura A-3.: Convergencia Parámetros DSGE-VAR1 Parte 3

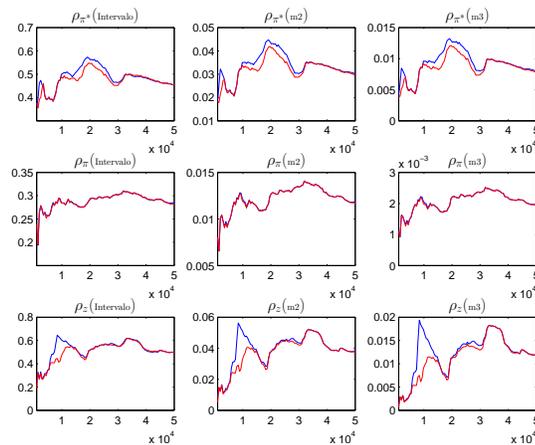


Figura A-4.: Convergencia Parámetros DSGE-VAR1 Parte 4

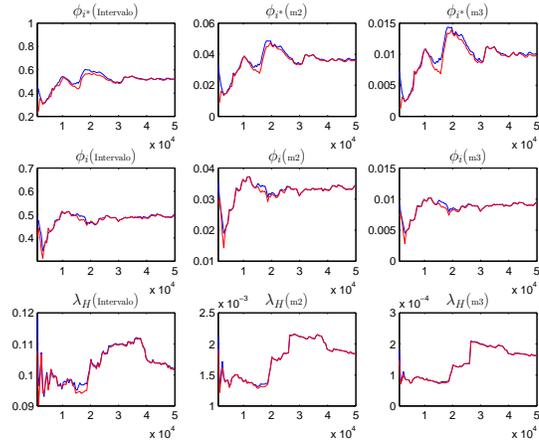


Figura A-5.: Convergencia Parámetros DSGE-VAR1 Parte 5

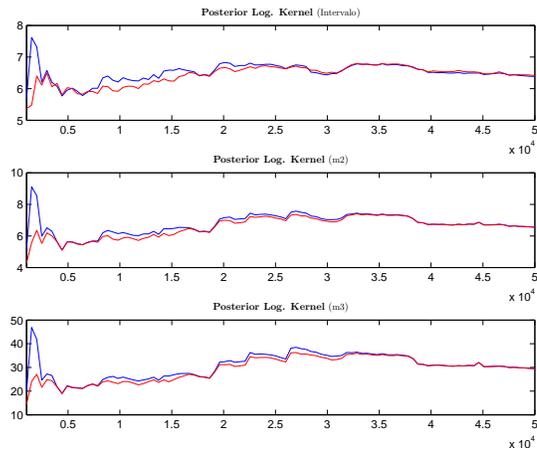


Figura A-6.: Convergencia Estimación Multivariada DSGE-VAR1

## B. Modelo DSGE

En esta sección se exponen los resultados del ajuste del modelo DSGE con enfoque bayesiano sobre las variables observadas estacionarias a través del filtro Hodrick Prescott. Hacemos referencia a la bondad de ajuste del modelo en lo que concierne a las densidades de estimación y criterios de convergencia. Los parámetros estimados se exhiben y comparan con el DSGE-VAR en el anexo ??.

El proceso de estimación del DSGE se realizó a través de una representación de espacio de estados con filtro lineal en conjunto con Metropolis-Hasting con dos cadenas y 50 mil réplicas. El número de réplicas fue el suficiente para alcanzar una convergencia aceptable.

### B.1. Estimación Modelo Lineal

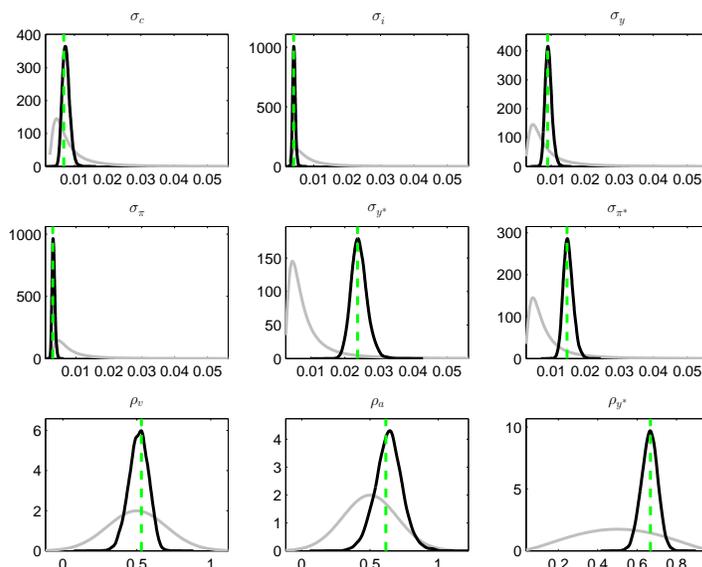
El siguiente conjunto de figuras (B-1) y (B-2) expone las densidades de probabilidad de los parámetros estimados. Como puede notar las variables observadas que hacen parte del proceso de optimización consiguen proporcionar información relevante para la explicación de la dinámica de las variables que describen la economía abierta; sin embargo, como se comentó en el anexo C, las volatilidades estimadas que explican el comportamiento del escenario externo resultan mayores sobre el DSGE en contraste con el DSGE-VAR; situación que podría incorporar sesgos al momento de evaluar las contribuciones relativas de los choques sobre las variables observadas. también pudo observarse una menor persistencia de los parámetros autorregresivos de las reglas de Taylor para la tasa de interés doméstica ( $\phi_i^*$ ) y la tasa de interés externa ( $\phi_i$ ).

El criterio de convergencia del DSGE se mantiene estable a partir de la segunda mitad de las 50 mil réplicas. La figura (B-3) presenta la convergencia multivariada sobre la log-kernel.

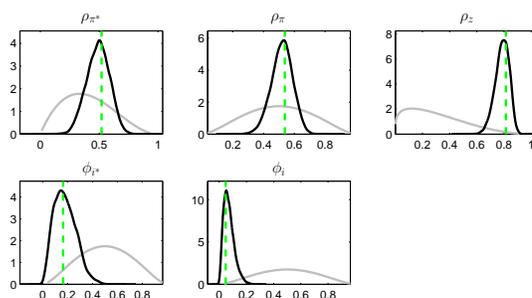
### B.2. Simulación del Modelo Lineal

Con el modelo lineal estimado generamos una simulación y se hace una comparación de los momentos empíricos y teóricos de las variables observadas, como también un análisis de las funciones de impulso respuesta sobre las variables no observadas para tener evidencias sobre el comportamiento de la economía abierta.

La tabla (B-1) ilustra la desviación estandar de las variables observadas en comparación con las teóricas proporcionadas por el DSGE, exhibiendo en general una sobre-estimación de los



**Figura B-1.:** Densidades a-posteriori DSGE. Parte 1



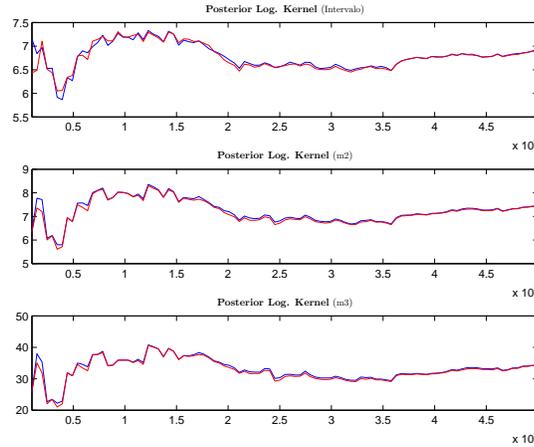
**Figura B-2.:** Densidades a-posteriori DSGE. Parte 2

momentos calculados por parte del modelo teórico. El estado estacionario de las variables observadas sobre la especificación lineal es cero. En lo que respecta a la tasa de interés externa  $i^*$ , la desviación estandar simulada por el DSGE resulta superior a la determinada por la serie observada. Esto puede ser consecuencia de la transmisión de los choques del producto externo y la inflación externa cuyas volatilidades experimentaron las mayores magnitudes de estimación.

Por otro lado, la tabla (B-2) exhibe las correlaciones muestrales en comparación con las proporcionadas por el modelo. Puede observar algunas diferencias en las correlaciones estimadas respecto a la variable de consumo  $c$ .

### B.3. Funciones Impulso Respuesta del Modelo Simulado

El modelo simulado puede ser utilizado para evaluar el comportamiento de la economía abierta ante los choques generados por las variables exógenas y apreciar la dinámica de



**Figura B-3.:** Convergencia Estimación Multivariada DSGE

Variable	Empírico				DSGE		
	Estado Eq.	DesvStd	Sesgo	Curtosis	DesvStd	Sesgo	Curtosis
$c_{obs}$	5.23 %	2.98 %	-0.23	-0.52	2.94 %	-0.27	-0.42
$ex_{obs}$	5.00 %	5.93 %	0.00	0.03	5.88 %	0.02	-0.02
$y_{obs}$	4.39 %	2.04 %	-0.16	-0.87	2.12 %	-0.48	-0.63
$i_{obs}$	6.17 %	2.28 %	0.31	-0.84	2.00 %	-0.05	-1.21
$\pi_{obs}$	4.86 %	1.93 %	-0.01	-1.27	1.72 %	-0.08	-1.05
$i_{obs}^*$	1.82 %	1.70 %	0.68	-0.93	2.09 %	0.49	-0.58

**Tabla B-1.:** Momentos Variables Observadas y DSGE

un conjunto de variables no-observables como la oferta salarial, el trabajo, los términos de intercambio, las importaciones, el consumo no-transable y la inflación de no-transables.

La figura (B-4) describe el comportamiento de este conjunto de variables ante el choque de política monetaria. El incremento de las tasas de interés genera una respuesta a la baja del nivel general de precios de la economía como puede notarse sobre la inflación de no-transables y la inflación doméstica.

Así mismo, como consecuencia del incremento de la tasa de interés, la producción de la economía doméstica retrocede porque caen las exportaciones, generándose un deterioro de los términos de intercambio a favor de las importaciones. Observe que la balanza comercial se mantiene negativa. Este retroceso en la producción propicia una reducción sobre la cantidad de trabajo disponible afectando la oferta salarial y el consumo por parte de los hogares.

La incidencia del choque tecnológico puede apreciarse en la figura (B-5). Puede notarse que los incentivos generados a nivel tecnológico en la economía doméstica tiene efectos favorables sobre la producción doméstica, el consumo de los hogares y las exportaciones favoreciendo los términos de intercambio. En lo que concierne al consumo, una capacidad de producción más eficiente reduce los costos de las firmas y por ende se le transfieren menores precios a los consumidores como se observa en la inflación de no-transables. El choque tecnológico

Empírica	$c_{obs}$	$ex_{obs}$	$y_{obs}$	$i_{obs}$	$\pi_{obs}$	$i_{obs}^*$
$c_{obs}$	1.0000	0.8638	0.1342	-0.0628	0.3913	0.3844
$ex_{obs}$		1.0000	0.0799	-0.0782	0.3749	0.5028
$y_{obs}$			1.0000	0.7532	0.2310	0.3487
$i_{obs}$				1.0000	-0.2118	0.2153
$\pi_{obs}$					1.0000	0.0939
$i_{obs}^*$						1.0000
DSGE	$c_{obs}$	$ex_{obs}$	$y_{obs}$	$i_{obs}$	$\pi_{obs}$	$i_{obs}^*$
$c_{obs}$	1.0000	0.3786	0.8626	0.1353	-0.0517	0.3709
$ex_{obs}$		1.0000	0.5031	0.4034	0.2457	0.1355
$y_{obs}$			1.0000	0.1245	-0.0459	0.3707
$i_{obs}$				1.0000	0.7428	0.2884
$\pi_{obs}$					1.0000	-0.1882
$i_{obs}^*$						1.0000

Tabla B-2.: Correlaciones Variables Observadas y DSGE

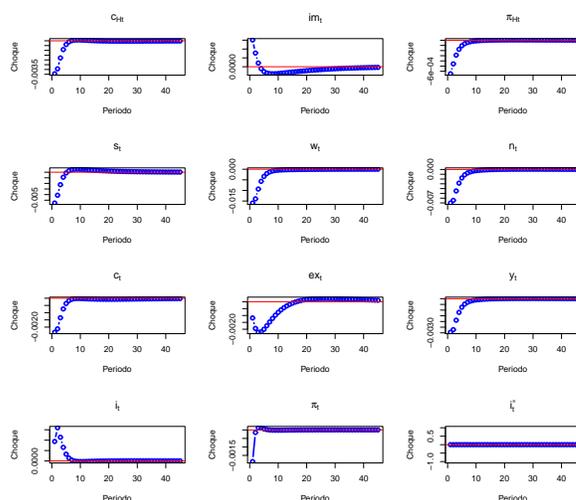


Figura B-4.: Choque de Política Monetaria-DSGE

desplaza la cantidad de trabajo disponible y afecta también la oferta salarial.

Por otro lado, la consideraciones de una producción con rendimientos decrecientes a escala permite establecer que las firmas no podrían seguir contratando trabajo infinitamente, motivo por el cual necesitan ajustar la cantidad de trabajo demandado y los salarios hasta llevar la producción a un nivel de equilibrio.

En el caso de la oferta doméstica, ver figura (B-6), incrementos en los precios al consumidor propician reducciones de los niveles de consumo doméstico de los hogares. Así mismo, las presiones de oferta obligan a los gestores de la política monetaria a incrementar la tasa de interés, situación que incide negativamente sobre los costos de las firmas para mantener estable los niveles de productividad. En este escenario, el costo de los bienes domésticos se encarecen frente a los bienes externos perjudicando las exportaciones en beneficio de las

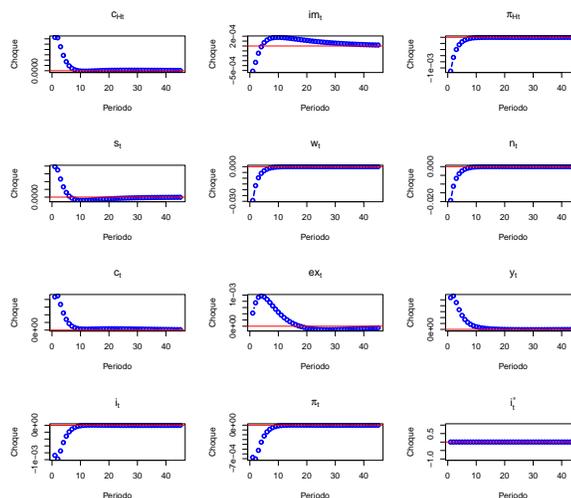


Figura B-5.: Choque Tecnológico Doméstico-DSGE

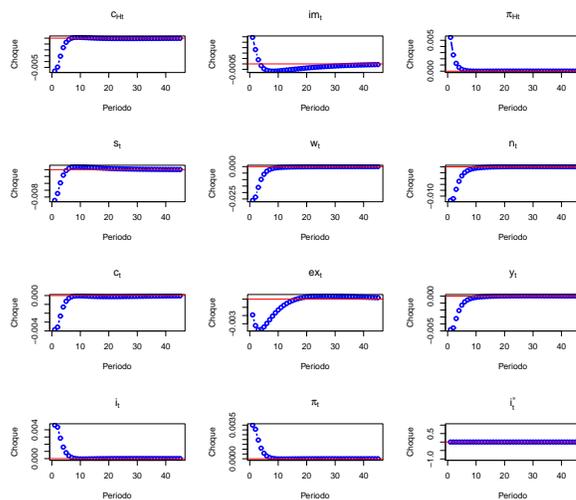
importaciones como puede observarse a través de los términos de intercambio. La caída en la producción de las firmas afecta la cantidad de trabajo demandado y por tanto incide desfavorablemente sobre los salarios de los hogares.

Desde la perspectiva de la economía externa, los choques positivos de productividad externa favorecen los niveles de exportación y productividad doméstica, ver figura (B-7). El incremento de las exportaciones obedece a la disminución del consumo de no-transables frente a los niveles de producción de las firmas, motivo por el cual una mayor cantidad de bienes de consumo pueden venderse en la economía externa. Observe también como se mejoran los términos de intercambio. A medida que la producción doméstica se incrementa, las firmas comienzan a demandar más trabajo, situación que mejora los salarios y la respuesta del consumo de los hogares a través del tiempo.

Otra situación que favorece el consumo de bienes domésticos puede originarse en los incrementos de la productividad de las firmas extranjeras por encima de su nivel potencial y a las presiones inflacionarias que obligan al gestor de política monetaria a incrementar la tasa de interés, situación que favorece el apetito por los bienes de la economía doméstica.

Ante el incremento de los choques de oferta externa, el gestor de política monetaria está obligado a incrementar la tasa de interés, ver figura (B-8). Como describíamos en relación a los choques externos de productividad, el impacto del nivel de precios externo también incentiva a la economía extranjera a demandar productos de la economía doméstica, como puede apreciar a través de los términos de intercambio, las exportaciones e importaciones. Esta situación origina a nivel doméstico una mayor producción y demanda de trabajo por parte de las firmas. Además, los hogares desplazan consumo por trabajo en la medida que también hay presiones inflacionarias domésticas de los bienes no-transables.

Finalmente, la figura (B-9) exhibe los choques de la demanda interna favoreciendo el consu-



**Figura B-6.:** Choque de Oferta Doméstica-DSGE

mo de los hogares por bienes no-transables, contribuyendo a un mayor nivel de producción nacional y también habilitan menos recursos para exportación en contraprestación con la dinámica de las importaciones. Los choques de demanda interna desde luego favorece la economía doméstica, obligando a las firmas a contratar trabajo y esto repercute sobre una mejora en la oferta salarial, que a su vez redundo en mayores niveles de consumo por parte de los hogares. A medida que se genera una mayor demanda doméstica comienzan a generarse presiones sobre los precios de los bienes no-transables y el incremento en las tasas de interés.

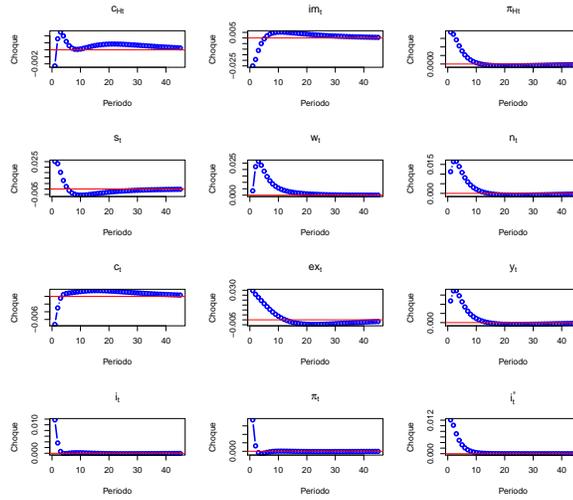


Figura B-7.: Choque de Producto Externo-DSGE

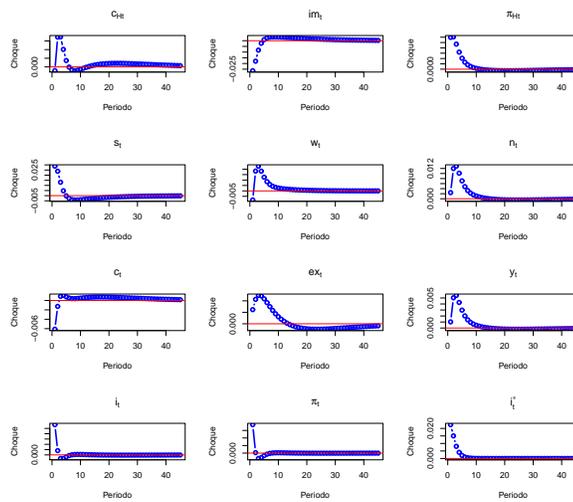


Figura B-8.: Choque de Oferta Externa-DSGE

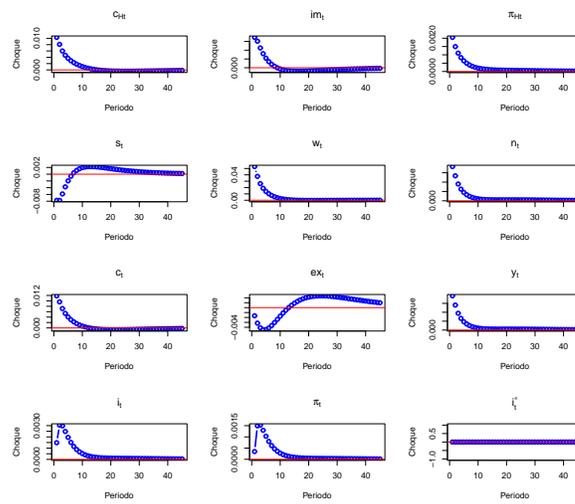


Figura B-9.: Choque de Demanda Doméstica-DSGE

# C. Modelo No lineal Deflactado

## C.1. El modelo

El modelo linealizado utilizado en el capítulo de análisis de este documento tenía previsto ajustar un conjunto de variables observadas bajo el supuesto de que estas fueran estacionarias; no obstante, es posible que las fluctuaciones derivadas del comportamiento no estacionario de estas series individualmente pudieran tener alguna incidencia sobre la capacidad de ajuste y explicación del modelo si no se cumplen con los supuestos previstos.

Considerando que un escenario como ese pudiera ser probable debido a la dinámica que exhiben las variables observadas decidimos ajustar el modelo no lineal deflactado por la productividad total de los factores para tener una nueva aproximación del modelo DSGE-VAR e igualmente poderlo comparar con los resultados proporcionados por el modelo lineal que se relaciona en el capítulo (4). Como antes, observamos las variables filtradas para modelar la estructura DSGE-VAR.

El modelo es construido sobre el sistema de ecuaciones no lineales; sin embargo, en este caso deflactamos por  $A_t$  el siguiente conjunto de variables  $\{C_t, Y_t, EX_t, IM_t, NX_t, B_t\}$  y  $W_t$  es deflactado por  $\frac{A_t^{\theta-(\theta-1)\gamma} g a_t^{(\theta-1)}}{P_t}$ . Las demás variables no se deflactan, como es el caso de  $N_t$  cuya tasa de crecimiento estaría determinada por el tamaño de la población, variable que no se maneja dentro de este modelo.

$$\begin{aligned}
C_t^{-(\theta-1)\gamma-\theta} &= \frac{Z_t}{Z_{ss}} g a_t^{(\theta-1)\gamma} g a_{t+1}^{(-\theta)\beta} \frac{C_{t-1}^{-(\theta-1)\gamma}}{C_{t+1}^\theta} R_t \\
W_t &= C_{t-1}^{-(\theta-1)\gamma} N_t^\varphi C_t^\theta \frac{A_{t-1}^{\theta-(\theta-1)\gamma} g a_t^\theta}{P_t} \\
Y_t &= N_t^{1-\alpha} \\
CM_t &= \frac{W_t}{(1-\alpha) \frac{Y_t}{N_t}} \frac{A_{t-1}^{\theta-(\theta-1)\gamma} g a_t^{(\theta-1)}}{P_t} \\
C_{H,t} &= (1-\delta) \left( \frac{P_{H,t}}{P_t} \right)^\eta C_t \\
C_{F,t} &= \delta \left( \frac{P_t}{E_t P_t^*} \right)^\eta C_t \\
C_t &= \left( (1-\delta) \frac{1}{\eta} C_{H,t} \frac{\eta-1}{\eta} + \delta \frac{1}{\eta} C_{F,t} \frac{\eta-1}{\eta} \right)^{\frac{\eta}{\eta-1}} \\
SS_t &= CM_t + (\omega\beta) SS_{t+1} \\
PM_t &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \frac{SS_t}{\chi} \\
1 &= \left( \omega \left( \frac{P_{t-1}}{P_t} \right)^{1-\varepsilon} + (1-\omega) \left( \frac{PM_t}{P_t} \right)^{1-\varepsilon} \left( A_{t-1}^{\theta-(\theta-1)\gamma} g a_t^{\theta-1} \right)^{1-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \\
1 &= \left( (1-\delta) \left( \frac{P_{H,t}}{P_t} \right)^{1-\eta} + \delta \left( \frac{E_t P_t^*}{P_t} \right)^{1-\eta} \right)^{\frac{1}{1-\eta}} \\
\frac{EX_t}{Y_t^*} &= \left( \delta^* S_t^{\eta*} \right)^\mu \left( \frac{EX_{t-1}}{Y_{t-1}^*} \right)^{1-\mu} g a_t A_{t-1}^{(-\mu)} \\
NX_t &= EX_t - IM_t \\
Y_t &= C_{H,t} - C_{F,t} + EX_t + IM_t \\
R_{t-1} &= \frac{1 + I_{t-1}}{1 + \Pi_t} \\
B_{t+1} &= \frac{Y_t P_{H,t} - C_t P_t + R_t B_t}{1 + g a_{t+1}} \\
1 + I_t &= (1 + I_t^*) \exp \left( (-\psi) \frac{B_t A_t}{P_{H,t} Y_{ss}} \right) \frac{E_{t+1}}{E_t} \\
E_t &= \frac{P_{H,t} S_t}{P_t^*} \\
\frac{I_t}{I_{ss}} &= \left( \frac{I_{t-1}}{I_{ss}} \right)^{\phi_i} \left( \frac{\Pi_t}{\Pi_{ss}} \right)^{\phi_\pi} \left( \frac{Y_t A_t}{Y_{ss}} \right)^{\phi_y} \frac{V_t}{V_{ss}} \\
\frac{I_t^*}{I_{ss}^*} &= \left( \frac{I_{t-1}^*}{I_{ss}^*} \right)^{\phi_i^*} \left( \frac{\Pi_t^*}{\Pi_{ss}^*} \right)^{\phi_\pi^*} \left( \frac{Y_t^*}{Y_{ss}^*} \right)^{\phi_y^*} \\
P_t &= \frac{U_t}{U_{ss}} P_{t-1} \Pi_t \\
P_t^* &= P_{t-1}^* \Pi_t^* \\
A_t &= g a_t A_{t-1} \\
\log(P_t^*) &= (1 - \rho_{\pi^*}) \log(P_{ss}^*) + \rho_{\pi^*} \log(P_{t-1}^*) + \varepsilon_t^{\pi^*} \\
\log(V_t) &= (1 - \rho_v) \log(V_{ss}) + \rho_v \log(V_{t-1}) + \varepsilon_t^v \\
\log(g a_t) &= (1 - \rho_a) \log(g a_{ss}) + \rho_a \log(g a_{t-1}) + \varepsilon_t^a \\
\log(Z_t) &= (1 - \rho_z) \log(Z_{ss}) + \rho_z \log(Z_{t-1}) + \varepsilon_t^z \\
\log(Y_t^*) &= (1 - \rho_{y^*}) \log(Y_{ss}^*) + \rho_{y^*} \log(Y_{t-1}^*) + \varepsilon_t^{y^*} \\
\log(U_t) &= (1 - \rho_u) \log(U_{ss}) + \rho_u \log(U_{t-1}) + \varepsilon_t^u
\end{aligned}$$

donde  $\chi = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \frac{1}{1-\omega\beta} (1-\alpha)^{\frac{1}{\varphi+(\theta-1)(1-\alpha)(1-\gamma)}}$ . Los estados estacionarios de las variables se describen a continuación

$$\begin{aligned}
A_{ss} &= 1 \\
PH_{ss} &= 1 \\
N_{ss} &= (1-\alpha)^{\frac{1}{\varphi+(\theta-1)(1-\alpha)(1-\gamma)}} \\
C_{ss} &= N_{ss}^{(1-\alpha)} \\
W_{ss} &= (1-\alpha)C_{ss} \\
Y_{ss} &= N_{ss}^{(1-\alpha)} \\
CH_{ss} &= (1-\delta)C_{ss} \\
CF_{ss} &= \delta C_{ss} \\
EX_{ss} &= Y_{ss} - CH_{ss} \\
IM_{ss} &= CF_{ss} \\
NX_{ss} &= 0 \\
Q_{ss} &= 0 \\
S_{ss} &= 1 \\
PM_{ss} &= (1-\alpha) \frac{Y_{ss}}{N_{ss}} \\
CM_{ss} &= W_{ss} - PM_{ss} \\
R_{ss} &= \frac{1}{\beta} \\
I_{ss} &= \frac{2}{\beta} - 1 \\
I^*_{ss} &= I_{ss} \\
\Pi_{ss} &= 1 \\
\Pi^*_{ss} &= 1 \\
P_{ss} &= E_{ss} P^*_{ss} = PH_{ss} \\
B_{ss} &= 0 \\
Y^*_{ss} &= 1 \\
V_{ss} &= 1 \\
U_{ss} &= 1 \\
Z_{ss} &= 1 \\
ga_{ss} &= 1
\end{aligned}$$

## C.2. Resumen de la Estimación

Hacemos un resumen de las salidas relativas a la bondad de ajuste de los modelos basados en la estructura deflactada. Observe que las medidas registradas en la tabla (C-1) se asemejan a las expuestas por el modelo lineal del DSGE-VAR. Nuevamente, las variables observadas son las series filtradas por Hodrick Prescott.

Según lo expuesto en la tabla (C-1) el DSGE-VAR1 es el modelo con el mejor ajuste entre los modelos competitivos. La figura (C-1) ilustra el criterio de convergencia para este modelo; mientras que las figuras (C-2) y (C-3) exhiben las densidades a-posteriori para los parámetros ajustados bajo la especificación del modelo DSGE-VAR1. Las densidades de probabilidad a-posteriori exhiben un comportamiento diferente al exhibido por las densidades a-priori como resultado de la información que proporciona el conjunto de variables observadas.

Modelo	Min $\lambda_H$	$\lambda_H$	Log. Kernel	Log. Posterior	RMSE	RMSE-Ex	UI-theil	UII-theil
DSGE	-	-	-837.16	784.26	1.57 %	1.05 %	0.39	0.20
DSGEVAR-1	0.2453	0.3210	-967.61	910.83	2.74 %	0.92 %	0.67	0.34
DSGEVAR-2	0.3585	0.5150	-948.33	898.45	2.69 %	0.88 %	0.66	0.33
DSGEVAR-3	0.4717	0.7465	-936.02	885.23	2.77 %	1.06 %	0.68	0.34
DSGEVAR-4	0.5849	0.8795	-933.99	883.12	2.20 %	1.04 %	0.54	0.27
DSGEVAR-5	0.6981	1.0551	-928.88	876.43	2.14 %	1.22 %	0.53	0.25
DSGEVAR-6	0.8113	1.3246	-926.65	873.40	1.94 %	1.15 %	0.48	0.23

Tabla C-1.: Bondad de Ajuste de los modelos DSGE y DSGE-VAR deflactado

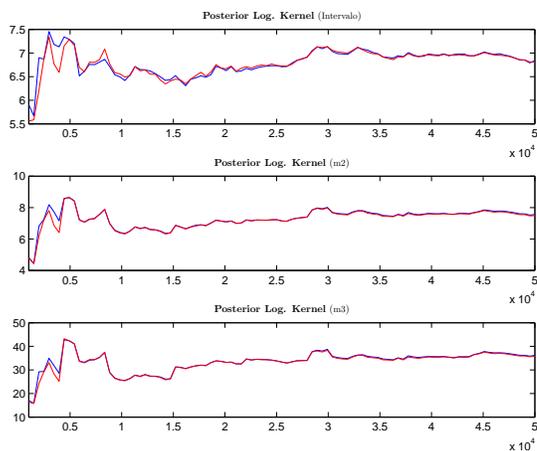


Figura C-1.: Criterio de Convergencia Multivariado modelo DSGE-VAR1 deflactado

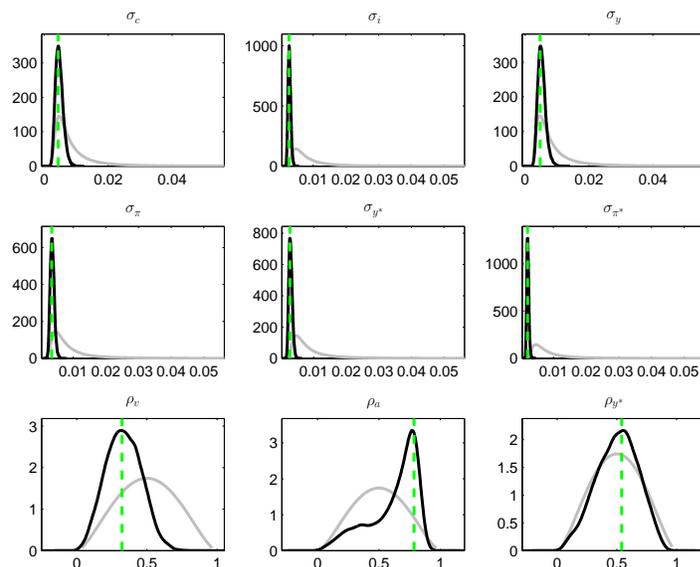
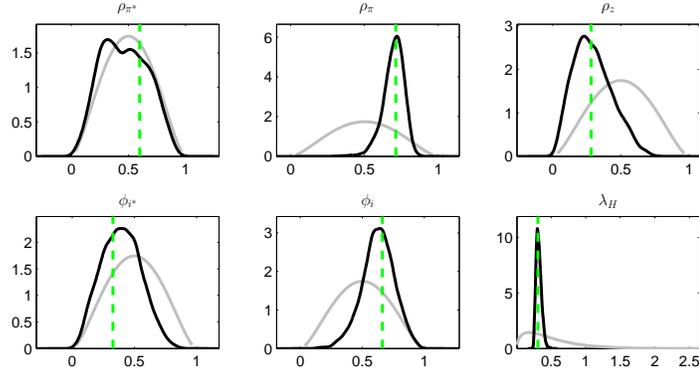


Figura C-2.: Densidades a-posteriori modelo DSGE-VAR1 deflactado. Parte 1



**Figura C-3.:** Densidades a-posteriori modelo DSGE-VAR1 deflactado. Parte 2

La tabla (C-2) ilustra la comparación de los parámetros estimados entre el modelo deflactado y el modelo DSGE-VAR1 obtenido sobre la especificación lineal. El proceso de estimación del modelo deflactado utilizó densidades Beta para los parámetros a-priori en contraste con las variaciones que hicimos de algunas de las densidades del modelo lineal, ver anexo C. Considerando que la especificación del modelo lineal y deflactado es evidentemente diferente, las estimaciones paramétricas del modelo deflactado proporciona resultados en la misma dirección que las obtenidas por el DSGE-VAR en la estructura lineal. Además, las densidades a-posteriori consiguen incorporar igualmente información relevante como consecuencia de la incorporación de las variables observables.

$\Theta$	aPri.Dist	Media aPri.	SD.aPri.	DSGE-VAR1 Deflactado		DSGE-VAR1 Lineal	
				Media Pos.	DevStd Pos.	Media Pos.	DevStd Pos.
$\rho_v$	Beta/NormalT	0.50	0.20	0.3326	0.1251	0.4476	0.1345
$\rho_a$	Beta/NormalT	0.50	0.20	0.6179	0.1963	0.4254	0.1627
$\rho_{y^*}$	Beta	0.50	0.20	0.5013	0.1727	0.6653	0.1918
$\rho_{\pi^*}$	Beta	0.40	0.20	0.4652	0.1999	0.4476	0.1746
$\rho_{\pi}$	Beta	0.50	0.20	0.6952	0.0725	0.3250	0.1085
$\rho_z$	Beta	0.30	0.20	0.2937	0.1408	0.3321	0.1939
$\phi_{i^*}$	Beta	0.50	0.20	0.3934	0.1573	0.4639	0.1910
$\phi_i$	Beta	0.50	0.20	0.6257	0.1296	0.4636	0.1853
$\lambda_H$	Gamma	0.50	Inf	0.3210	0.0390	0.3126	0.0428
$\sigma_c$	IGamma	0.01	Inf	0.0047	0.0012	0.0077	0.0020
$\sigma_i$	IGamma	0.01	Inf	0.0027	0.0004	0.0035	0.0006
$\sigma_y$	IGamma	0.01	Inf	0.0052	0.0012	0.0048	0.0012
$\sigma_{\pi}$	IGamma	0.01	Inf	0.0036	0.0006	0.0033	0.0006
$\sigma_{y^*}$	IGamma	0.01	Inf	0.0029	0.0005	0.0033	0.0006
$\sigma_{\pi^*}$	IGamma	0.01	Inf	0.0022	0.0003	0.0023	0.0003

**Tabla C-2.:** Comparación Estimaciones del Modelo lineal y DGSE-VAR1 deflactado

En lo que concierne a la capacidad de pronóstico de los últimos seis periodos de las variables observadas, el desempeño del DSGE se mantiene por encima de los DSGE-VAR cuando comparamos el RMSE; sin embargo, cuando excluimos las exportaciones como habíamos evidenciado antes, la capacidad de pronóstico entre los diferentes modelos es equivalente como puede evidenciarse observando los índices de Theil. Esto puede apreciarse en la figura (C-4).

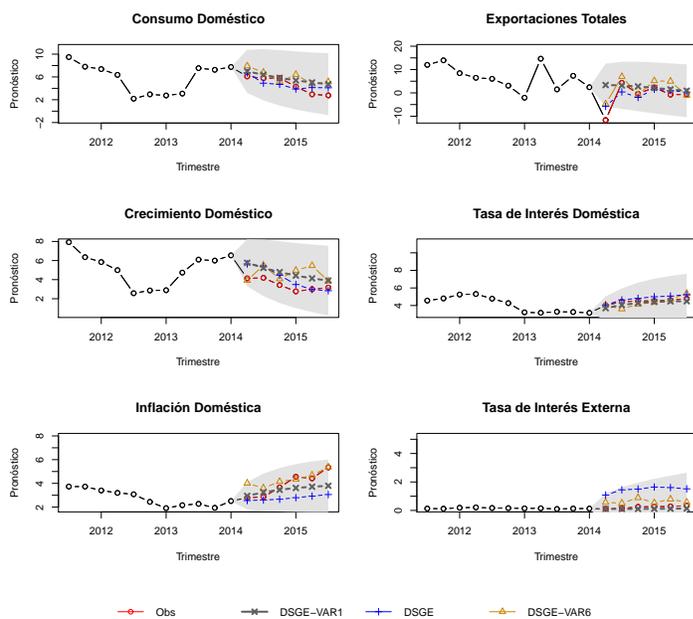


Figura C-4.: Pronóstico DGSE-VAR1, DSGE-VAR6 y DSGE deflactados

# D. Código en DYNARE

El siguiente código fue el utilizado para estimar los modelos híbridos propuestos.

```
close all;

var c c_h im s y y_star ii i_star inflation inflation_star n w b a v nx
inflation_h q ex u z;

var c_obs ex_obs y_obs inflation_obs ii_obs i_star_obs;

varexo Taylor_shock output_shock philip_shock world_output_shock
inflation_star_shock is_shock;

parameters theta phiy phip phiy_star phip_star kappa_a kappa_y lambda
disc beta epsilon rhoi rhoy alpha phi psi M mu theta_gamma gamma
etha delta rhoy_star rho_inflation lambda_ex etha_star rho_inflation_1
rho_is phii_star phii;

lambda_ex = 0.1; %Elasticidad Preferencia entre Producto Foráneo/Doméstico Tomado de Gottfries(2003)
etha_star = 2.14; %(EEUU)Tockarick(2010) estima un valor para EEUU. Elasticidad de Sustitucion con el
%resto del Mundo Tomado de Gottfries(2003), siendo un datos para Suecia; sin embargo
%provamos valores por encima de ETHA
etha = 0.9; %(COL)Gonzalez (2013). Fiscal Policy in a Small Open Economy... Elasticidad de
%substitucion entre bienes Extranjeros/Domesticos
delta = 0.22; %(COL)Identificado para Colombia %IM/PIB desde 2001Q1-2015Q3
disc = 0.01; %(COL)Parametro que refleja el tiempo de espera Trimestral (Pag 24), se ajusta para
%que de el beta de Henao(2008) Demanda Externa,Term. Intercambio y el papel Pol.Mon Crisis 2008
alpha = 0.58; %(COL)Producto Marginal del Trabajo (dY/dL) Par. de Firmas (Pag 24)
gamma = 0.2572; %(COL)Productividad del Trabajo tomado de Parra et al (2007) Pag 14 Cuadro 3
%Formacion de hábitos)(COL)Tomado de Henao(2008) Demanda Externa,Term. Intercambio
%y el papel Pol.Mon Crisis 2008. Parametro tomado de Fuhrer(2000) y Abel(1999) Pag 23
phi = 1.6; %(Formacion de hábitos)(COL)Tomado de Henao(2008) Demanda Externa,Term. Intercambio
%y el papel Pol.Mon Crisis 2008. Elasticidad de la Oferta Laboral. Pag 23 Meghir et al (1998)
psi = 0.01; %Elasticidad de la tasa libre de Riesgo Doméstica Tomado Post(2007), Beigno(2001) Eq51 Pag18
rho_inflation_1 = 0.8; %Choque tomado de Svensson (2000) Pag 25
rhoi = 0.66; %(COL)Parametros de choque tasa de interes de Gali(2008) (Colombia 0.66 Henao(2008))
rhoy = 0.86; %(COL)Parametros de choque tecnologico de Gali(2008) (Colombia 0.86 Henao(2008))
rhoy_star = 0.45; %(COL)Parametros de choque tecnologico externo tomado de Svensson (2000) (Colombia 0.45 Henao(2008))
rho_inflation = 0.635; %Parametros de choque tomado de Svensson (2000)
rho_is = 0.8; %Parametros de Choque tasa de interes externo tomado de Svensson (2000)
beta = exp(-disc); %(COL)Factor de Descuento de los Flujos, parecido a Henao(2008) Demanda Externa,Term.
%Intercambio y el papel Pol.Mon Crisis 2008.
%(COL)Tomado del Artículo Puede seguirse a Sandra Moreno (Pag 29, Cuadro 2,
%Beta (0.910,0.988,0.999,1.000,1.018))
phip = 1.50; %(COL) Tomada la a-priori de Hamman(2006) incluye un valor de 1.5 (1.32).Calculos
%Propios Aproximaciones Trimestrales (Suavizamiento de la Inflación Henao(2008))
phiy = 0.125; %(COL) Tomada la a-priori de Hamman (2006).Calculos Propios Aproximaciones
%Trimestrales (Suavizamiento de la brecha del Producto Henao(2008))
phip_star = 1.5; %(COL) 1.5 Tomados de la regla de Taylor Externa (precios) Svensson (2000)
phiy_star = 0.5; %(COL) 0.5 Tomados de la regla de Taylor Externa (Producto) Svensson(2000)
theta = 2; %(COL) Tomado de Hamman(2006) Bringing DSGE model into Policy Environment.
%(Formacion de hábitos)(COL)Tomado de Henao(2008) Demanda Externa,Term.
%Intercambio y el papel Pol.Mon Crisis 2008. Parametro tomado de Fuhrer(2000) y
%Abel(1999) Pag 23 Elasticidad de Sust = 1/theta.
epsilon = 6; %(COL)Tomado de Gali(2008) parametro para Firmas (Pag 24)
M = epsilon/(epsilon-1);
mu = log(M);
omega = 0.75; %(COL)Tomado de Henao(2008) Demanda Externa,Term. Intercambio y el papel
%Pol.Mon Crisis 2008. Para las Firmas- precios Domesticos. Duracion temporal
%antes del cambio de los precios (Pag 24) Adolfson et al (2007) tiene valores para dif países
%(COL)Valor tomado del articulo Importancia Rigideces Nominales y Reales para Colombia (2012) Pag 62-63

theta_gamma = gamma*(theta-1);
lambda = ((1-omega)*(1-beta*omega)/omega)*((1-alpha)/(1-alpha+alpha*epsilon)); % Grado Stickness Precios
kappa_y = lambda*((phi+alpha)/(1-alpha)); % Ecuacion 59 Parametros Curva Phillips NK
kappa_a = lambda*((phi+1)/(1-alpha)); % Ecuacion 59 Parametros Curva Phillips NK
phii_star = 0.50; %Representa un parámetro de ajuste de la tasa de interés externa
```

```

phii = 0.43;           %Tomado de la posterior de Hamman(2006) Bringing DSGE model
                    %into Policy Enviroment...Representa un parámetro de ajustes de la tasa
                    %de interés doméstica (Obtenido de Henao(2008))

model;
-(theta_delta + theta)*c + z = -theta_gamma*c(-1) - theta*c(+1) + ii - inflation(+1);  % (3.2-13) Ecuación IS Economía Abierta
w = phi*n - theta_gamma*c(-1) + theta*c;                                           % (3.2-12) Funcion de Oferta Laboral
b = (1+ii(-1)-inflation)*b(-1)+y(-1)-c(-1)-delta*s(-1);                          % (4.9) Dinámica de Inversion en Bonos
ex = y_star + lambda_ex*etha_star*s + (1-lambda_ex)*(ex(-1)-y_star(-1));          % (3.4) Funcion de Exportaciones
ii = i_star - psi*b + (s(+1)-s) + inflation_h(+1) - inflation_star(+1);           % (5.3) Disparidad de Tasas de Interés
q = (1-delta)*s;                                                                    % (4.7) Tasa de cambio Real
inflation = inflation_h + delta*(s-s(-1));                                          % (4.5) Inflacion Consumidor Total
c = (1-delta)*c_h + delta*im;                                                       % (3.2) Consumo Total
c_h = etha*delta*s + c;                                                             % (3.1) Consumo Doméstico
y = ((1-delta)*etha + lambda_ex*etha_star)*delta*s + (1-delta)*c + delta*y_star + delta*(1-lambda_ex)*(ex(-1)-y_star(-1));
                                                                    % (4.3) Producto total doméstico
ii = phii*ii(-1)+ phip*inflation + phiy*y + v;                                    % (2.3) Política Monetaria (Regla Taylor)
i_star = phii_star*i_star(-1) + phip_star*inflation_star + phiy_star*y_star;      % (3.4) Regla Taylor Política Externa
inflation_h = beta*inflation_h(+1) + kappa_y*y - kappa_a*a - lambda*theta_gamma*c(-1) + lambda*theta*c + lambda*delta*s + u;
                                                                    % (5.9) Curva de Phillips/Costo Marginal de las Firmas
(1-alpha)*n = y - a;                                                                % (3.4) Funcion de Produccion
nx = delta*(ex-im);                                                                 % (3.6) Balanza Comercial
inflation_star = rho_inflation*inflation_star(-1) + inflation_star_shock;         % (3.4) Choque Precios Externa
v = rhoi*v(-1) + Taylor_shock;                                                     % (3.4) Choque Politica Monetaria
a = rhoi*a(-1) + output_shock;                                                     % (3.4) Choque Tecnologico Doméstico
z = rho_is*z(-1) + is_shock;                                                       % (3.4) Choque por Demanda Doméstica
y_star = rhoy_star*y_star(-1) + world_output_shock;                               % (3.4) Choque de Producto Externo
u = rho_inflation_1*u(-1) + philip_shock;                                          % (3.4) Choque por la Curva Phillips
c_obs = (c - c(-4)) + z;
ex_obs = (ex - ex(-4)) + y_star;
y_obs = (y - y(-4)) + a;
inflation_obs = inflation + u;
ii_obs = ii + v;
i_star_obs = i_star + inflation_star + y_star;
end;

write_latex_dynamic_model;

initval;
c=0;
c_h=0;
im=0;
s=0;
y=0;
y_star=0;
ii=0;
i_star=0;
inflation=0;
inflation_star=0;
n=0;
w=0;
b=0;
a=0;
v=0;
nx=0;
inflation_h=0;
q=0;
ex=0;
u=0;
z=0;
c_obs = 0;
ex_obs = 0;
y_obs = 0;
inflation_obs=0;
ii_obs=0;
i_star_obs=0;
end;

shocks; %Volt. Historicas
var is_shock = (0.029046)^2;
var Taylor_shock = (0.04482)^2;
var output_shock = (0.021281)^2;
var philip_shock = (0.014155)^2;
var world_output_shock = (0.021281)^2;
var inflation_star_shock = (0.010215)^2;
end;

estimated_params;
stderr is_shock,,,inv_gamma_pdf,0.01,inf;
stderr Taylor_shock,,,inv_gamma_pdf,0.01,inf;
stderr output_shock,,,inv_gamma_pdf,0.01,inf;

```

---

```
stderr philip_shock,,,inv_gamma_pdf,0.01,inf;
stderr world_output_shock,,,inv_gamma_pdf,0.01,inf;
stderr inflation_star_shock,,,inv_gamma_pdf,0.01,inf;
rhoi,,0.01,0.99,normal_pdf,0.50,0.20;
rhoiy,,0.01,0.99,normal_pdf,0.50,0.20;
rhoystar,,,beta_pdf,0.5,0.2;
rho_inflation,,,beta_pdf,0.40,0.20;
rho_inflation_1,,,beta_pdf,0.5,0.2;
rho_is,,,beta_pdf,0.30,0.20;
phii_star,,,beta_pdf,0.40,0.20;
phii,,,beta_pdf,0.50,0.20;
dsge_prior_weight,0.2728,,gamma_pdf,0.5,0.4;
end;

varobs c_obs ex_obs y_obs ii_obs inflation_obs i_star_obs;
estimated_params_init(use_calibration);
end;

rand('seed',122); randn('seed',123);

estimation(order=1,datafile=DATABf1,dsge_var,dsge_varlag=1,xls_range=B1:G54,first_obs=2,prefilter=1,
mh_nblocks=2,tex,mode_compute=6,mh_replic=50000,forecast=6,mode_check,moments_varendo,
bayesian_irf) c_obs ex_obs y_obs ii_obs inflation_obs i_star_obs;

shock_decomposition(datafile=DATABf1) i_star_obs ii_obs ex_obs inflation_obs y_obs c_obs;
dsgevar_forecast(1,2,50000,1);
```

# E. Código Pronóstico DSGE-VAR

```
function dsgevar_forecast(nlags, presample, replic, kconst)

% function dsgevar_forecast(nlags)
% builds forecasts for a dsgevar model
% based on the posterior dsgevar
% PHI, SIGMAu, iXX & df estimations
%
% Date: 04.18.2016
%
%
% INPUTS
%   nlags:      number of lags for the bvar
%   presample:  number of data to pre-estimate
%   replic:     number of replics on BVAR forecasts
%   kconst:     1-noconstant; 0-constant
%
% OUTPUTS
%   none
%
% SPECIAL REQUIREMENTS
%   none

global options_ oo_ M_ estim_params_
%global DynareDataset DynareOptions EstimatedParameters Model BayesInfo DynareResults deep

if options_.forecast == 0
    error('dsgevar_forecast: you must specify "forecast" option')
end

%DynareDataset = initialize_dataset1(options_.datafile,options_.varobs,1,options_.nobs,[],[],options_);
dataset = read_variables(options_.datafile, options_.varobs, [], options_.xls_sheet, options_.xls_range);
options_ = set_default_option(options_, 'nobs', size(dataset,1)-options_.first_obs+1);
DynareOptions = options_;
%EstimatedParameters = estim_params_;
%Model = M_;
%[xparam1, estim_params_, bayestopt_, lb, ub, M_] = set_prior(estim_params_,M_,options_);
%BayesInfo = bayestopt_; % a-priori conditions
%DynareResults = oo_;
%deep = M_.params;
%deep = xparam1; % xparam1 initial values

if (options_.first_obs+options_.nobs-1)> size(dataset,1)
    fprintf('Incorrect or missing specification of the number of observations. nobs can be at most %4u\n',size(dataset,1)-options_.first_obs+1);
    error('Inconsistent number of observations.')
end

% Parameters for prior
%if options_.first_obs + options_.presample <= nlags
%   error('first_obs+presample should be > nlags (for initializing the VAR)')
%end

%train = options_.bvar_prior_train;
train = options_.first_obs;
options_.presample = presample;
options_.bvar_replic = replic;
options_.noconstant = kconst;

%if options_.first_obs + options_.presample - train <= nlags
%   error('first_obs+presample-train should be > nlags (for initializing the VAR)')
%end

idx = options_.first_obs+options_.presample-train-nlags:options_.first_obs+options_.nobs-1;

% Prepare dataset
if options_.loglinear && ~options_.logdata
    dataset = log(dataset);
end
```

```

if options_.prefilter
    dataset(idx,:) = dataset(idx,:) - ones(length(idx),1)*mean(dataset(idx,:));
end

ny = size(dataset,2);
%ny = DynareDataset.info.nvobs;

if options_.prefilter || options_.noconstant
    nx = 0;
else
    nx = 1;
end

ydata = dataset(idx, :);
T = size(ydata, 1);
xdata = ones(T,nx);

% Add forecast informations
%if nargout >= 5
    forecast_data.xdata = ones(options_.forecast, nx);
    forecast_data.initval = ydata(end-nlags+1:end, :);
    if options_.first_obs + options_.nobs <= size(dataset, 1)
        forecast_data.realized_val = dataset(options_.first_obs+options_.nobs:end, :);
        forecast_data.realized_xdata = ones(size(forecast_data.realized_val, 1), nx);
    else
        forecast_data.realized_val = [];
    end
end
%end

%[ny, nx, posterior, prior, forecast_data] = bvar_toolbox(nlags);
%[fval,cost_flag,info,PHI,SIGMAu,iXX,prior] = dsge_var_likelihood1(deep,DynareDataset,DynareOptions,Model,EstimatedParameters,BayesInfo,DynareResults);
%bvar = dsgevar_posterior_density1(deep,DynareDataset,DynareOptions,Model,EstimatedParameters,BayesInfo,DynareResults);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% JCSANTANAC 04.17.2016
% Once the optimization was executed
% we call the PHI, SIGMAu, iXX estimations
%

gend = DynareOptions.nobs;
dsge_prior_weight = M_.params(strmatch('dsge_prior_weight',M_.param_names));
DSGE_PRIOR_WEIGHT = floor(gend*(1+dsge_prior_weight));

NumberOfLags = options_.dsge_varlag;
NumberOfVariables = size(options_.varobs,1);
Constant = 'no';
NumberOfEstimatedParameters = NumberOfLags*NumberOfVariables;
if ~options_.noconstant
    Constant = 'yes';
    NumberOfEstimatedParameters = NumberOfEstimatedParameters + ...
        NumberOfVariables;
end

PHI = evalin('base','PHI');
iXX = evalin('base','iXX');
SIGMAu = evalin('base','SIGMAu');
GXX = evalin('base','GXX'); % Component Theoretical Moments XX
Sigma = iXX; % Covariance Matrix Normal MV distribution
S = DSGE_PRIOR_WEIGHT*SIGMAu; % Wishart Distribution (Mean)
df = DSGE_PRIOR_WEIGHT-NumberOfEstimatedParameters; % Wishart Distribution (Var)
piXX = inv((dsge_prior_weight*gend+GXX)+ inv(iXX)); % Covariance Normal Distribution PHI (DelNegro '04)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

sims_no_shock = NaN(options_.forecast, ny, options_.bvar_replic);
sims_with_shocks = NaN(options_.forecast, ny, options_.bvar_replic);

%S_inv_upper_chol = chol(inv(posterior.S));
S_inv_upper_chol = chol(inv(S));

% Option 'lower' of chol() not available in old versions of
% Matlab, so using transpose

'XXi_lower_chol = chol(iXX)';
pXXi_lower_chol = chol(piXX)';

%Num. Obs. a Simular
k = ny*nlags+nx;

% Declaration of the companion matrix

```

```

Companion_matrix = diag(ones(ny*(nlags-1),1),-ny);

% Number of explosive VAR models sampled
p = 0;
% Loop counter initialization
d = 0;
while d <= options_.bvar_replic

    Sigma = rand_inverse_wishart(ny, df, S_inv_upper_chol);

    % Option 'lower' of chol() not available in old versions of
    % Matlab, so using transpose

    Sigma_lower_chol = chol(Sigma)';

    Phi = rand_matrix_normal(k, ny, PHI, Sigma_lower_chol, pXi_lower_chol);

    % All the eigenvalues of the companion matrix have to be on or inside the unit circle
    Companion_matrix(1:ny,:) = Phi(1:ny*nlags,:);
    test = (abs(eig(Companion_matrix)));
    if any(test>1.00000000000001)
        p = p+1;
    end
    d = d+1;

    % Without shocks
    lags_data = forecast_data.initval;
    for t = 1:options_.forecast
        X = [ reshape(flipdim(lags_data, 1)', 1, ny*nlags) forecast_data.xdata(t, :) ];
        y = X * Phi;
        lags_data(1:end-1,:) = lags_data(2:end, :);
        lags_data(end,:) = y;
        sims_no_shock(t, :, d) = y;
    end

    % With shocks
    lags_data = forecast_data.initval;
    for t = 1:options_.forecast
        X = [ reshape(flipdim(lags_data, 1)', 1, ny*nlags) forecast_data.xdata(t, :) ];
        shock = (Sigma_lower_chol * randn(ny, 1))';
        y = X * Phi + shock;
        lags_data(1:end-1,:) = lags_data(2:end, :);
        lags_data(end,:) = y;
        sims_with_shocks(t, :, d) = y;
    end
end

if p > 0
    skipline()
    disp(['Some of the DSGEBVAR models sampled from the posterior distribution'])
    disp(['were found to be explosive ( ' num2str(p/options_.bvar_replic) ' percent).'])
    skipline()
end

% Plot graphs
sims_no_shock_mean = mean(sims_no_shock, 3);

sort_idx = round((0.5 + [-options_.bvar.conf_sig, options_.bvar.conf_sig, 0]/2) * options_.bvar_replic);

sims_no_shock_sort = sort(sims_no_shock, 3);
sims_no_shock_down_conf = sims_no_shock_sort(:, :, sort_idx(1));
sims_no_shock_up_conf = sims_no_shock_sort(:, :, sort_idx(2));
sims_no_shock_median = sims_no_shock_sort(:, :, sort_idx(3));

sims_with_shocks_sort = sort(sims_with_shocks, 3);
sims_with_shocks_down_conf = sims_with_shocks_sort(:, :, sort_idx(1));
sims_with_shocks_up_conf = sims_with_shocks_sort(:, :, sort_idx(2));

OutputDirectoryName = CheckPath('graphs',M_.fname);

dyn_graph=dynare_graph_init(sprintf('DSGEBVAR forecasts (nlags = %d)', nlags), ny, {'b-' 'g-' 'r-' 'r-'});

for i = 1:ny
    dyn_graph=dynare_graph(dyn_graph,[ sims_no_shock_median(:, i) ...
        sims_no_shock_up_conf(:, i) sims_no_shock_down_conf(:, i) ...
        sims_with_shocks_up_conf(:, i) sims_with_shocks_down_conf(:, i) ], ...
        options_.varobs{i});
end

dyn_saveas(dyn_graph.fh,[OutputDirectoryName '/' M_.fname '_DSGEBVAR_forecast_',num2str(nlags)],options_)

```

```

% Compute RMSE

if ~isempty(forecast_data.realized_val)

    sq_err_cumul = zeros(1, ny);

    lags_data = forecast_data.initval;
    for t = 1:size(forecast_data.realized_val, 1)
        X = [ reshape(flipdim(lags_data, 1)', 1, ny*nlags) forecast_data.realized_xdata(t, :) ];
        y = X * PHI;
        lags_data(1:end-1,:) = lags_data(2:end, :);
        lags_data(end,:) = y;
        sq_err_cumul = sq_err_cumul + (y - forecast_data.realized_val(t, :)) .^ 2;
    end

    rmse = sqrt(sq_err_cumul / size(forecast_data.realized_val, 1));

    fprintf('RMSE of DSGEBVAR(%d):\n', nlags);

    for i = 1:size(options_.varobs, 1)
        fprintf('%s: %10.4f\n', options_.varobs{i}, rmse(i));
    end
end

% Store results

DirectoryName = [ M_.fname '/dsgebvar_forecast' ];
if ~isdir(DirectoryName)
    if ~isdir(M_.fname)
        mkdir(M_.fname);
    end
    mkdir(DirectoryName);
end
save([ DirectoryName '/simulations.mat'], 'sims_no_shock', 'sims_with_shocks');

for i = 1:length(options_.varobs)
    name = options_.varobs{i};

    sims = squeeze(sims_with_shocks(:,i,:));
    eval([''oo_.dsgebvar.forecast.with_shocks.Mean.' name ' = mean(sims, 2);']);
    eval([''oo_.dsgebvar.forecast.with_shocks.Median.' name ' = median(sims, 2);']);
    eval([''oo_.dsgebvar.forecast.with_shocks.Var.' name ' = var(sims, 0, 2);']);
    eval([''oo_.dsgebvar.forecast.with_shocks.HPDsup.' name ' = sims_with_shocks_up_conf(:,i);']);
    eval([''oo_.dsgebvar.forecast.with_shocks.HPDinf.' name ' = sims_with_shocks_down_conf(:,i);']);

    sims = squeeze(sims_no_shock(:,i,:));
    eval([''oo_.dsgebvar.forecast.no_shock.Mean.' name ' = sims_no_shock_mean(:,i);']);
    eval([''oo_.dsgebvar.forecast.no_shock.Median.' name ' = sims_no_shock_median(:,i);']);
    eval([''oo_.dsgebvar.forecast.no_shock.Var.' name ' = var(sims, 0, 2);']);
    eval([''oo_.dsgebvar.forecast.no_shock.HPDsup.' name ' = sims_no_shock_up_conf(:,i);']);
    eval([''oo_.dsgebvar.forecast.no_shock.HPDinf.' name ' = sims_no_shock_down_conf(:,i);']);

    if exist('rmse')
        eval([''oo_.dsgebvar.forecast.rmse.' name ' = rmse(i);']);
    end
end
end

```

# Bibliografía

- [Adjemian, 2005] Adjemian, S. (2005). Estimation of a DSGE Model. Université du Maine & CEPREMAP.
- [An y Schorfheide, 2007] An, S. y Schorfheide, F. (2007). Bayesian analysis of DSGE models. *Econometrics Review*, 26:187–192.
- [Ascari, 2011] Ascari, G. (2011). Macroeconomic Models: Better Horses For Tougher Courses. *Manchester School*, 79(s2):17–20.
- [Bache *et al.*, 2011] Bache, I. W., Jore, A. S., Mitchell, J., y Vahey, S. (2011). Combining VAR and DSGE forecast densities. *Journal of Economic Dynamic and Control*, 35:1659–1670.
- [Bliemel, 1973] Bliemel, F. (1973). Theil's Forecast Accuracy Coefficient: A Clarification. *Journal of Marketing Research*, X(6):444–446.
- [Bonaldi *et al.*, 2009] Bonaldi, P., Prada, J. D., González, A., y Rodríguez, D. (2009). Método numérico para la calibración de un modelo DSGE. *Borradores de Economía. Banco de la República*, (548).
- [Brooks y Gelman, 1998] Brooks, S. y Gelman, A. (1998). General Methods for Monitoring Convergence of Iterative Solutions. *Journal of Computational and Graphics Statistics*, 7(4):434–455.
- [Calvo, 1983] Calvo, G. A. (1983). Staggered prices in a utility-maximizing framework. *Journal of Monetary Economics*, 12(3):383–398.
- [Christiano *et al.*, 2001] Christiano, L. J., Eichenbaum, M., y Evans, C. (2001). Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy. Working Paper 8403, National Bureau of Economic Research.
- [Collard y Juillard, 2001a] Collard, F. y Juillard, M. (2001a). A Higher-Order Taylor Expansion Approach to Simulation of Stochastic Forward-Looking Models with an Application to a Nonlinear Phillips Curve Model. *Computational Economics*, 17(2-3):125–139.
- [Collard y Juillard, 2001b] Collard, F. y Juillard, M. (2001b). Accuracy of Stochastic Perturbation Methods: The Case of Asset Pricing Models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25(6-7):979–999.

- [DeJong *et al.*, 2000] DeJong, D. N., Ingram, B. F., y Whiteman, C. H. (2000). A Bayesian Approach to Dynamic Macroeconomics. *Journal of Econometrics*, 98(22):203–223.
- [Del Negro y Schorfheide, 2002] Del Negro, M. y Schorfheide, F. (2002). Priors from general Equilibrium Models for VARs. Working Paper 2002-14, Federal Reserve Bank of Atlanta.
- [Del Negro y Schorfheide, 2006] Del Negro, M. y Schorfheide, F. (2006). How good is what you've got? DSGE-VAR as a toolkit for evaluating DSGE models. *Economic Review*, (Q 2):21–37.
- [Del Negro y Schorfheide, 2007] Del Negro, M. y Schorfheide, F. (2007). Monetary Policy Analysis with Potentially Misspecified Models. Working Paper 13099, National Bureau of Economic Research.
- [Del Negro y Schorfheide, 2010] Del Negro, M. y Schorfheide, F. (2010). Bayesian Macroeconometrics. En *Handbook of Bayesian Econometrics*, pp. 293–389. Oxford Handbooks.
- [Del Negro y Schorfheide, 2012] Del Negro, M. y Schorfheide, F. (2012). DSGE model-based Forecasting. Technical Report 554, Federal Reserve Bank of New York.
- [Del Negro *et al.*, 2004] Del Negro, M., Schorfheide, F., Smets, F., y Wouters, R. (2004). On the Fit and Forecasting Performance of New Keynesian Models. *Federal Reserve Bank of Atlanta Working Papers*, 37.
- [Diebold y Mariano, 1995] Diebold, F. X. y Mariano, R. S. (1995). Comparing Predictive Accuracy. *Journal of Business and Economic Statistics*, 13(3):253–263.
- [Driffill, 2011a] Driffill, J. (2011a). The Future Of Macroeconomics: General Discussion. *Manchester School*, 79(s2):36–38.
- [Driffill, 2011b] Driffill, J. (2011b). The Future Of Macroeconomics: Introductory Remarks. *Manchester School*, 79(s2):1–4.
- [Durbin y Koopman, 2001] Durbin, J. y Koopman, S. J. (2001). *Time Series Analysis by State Spaces*. Oxford University Press.
- [Escudé, 2010] Escudé, G. (2010). Modelos de Equilibrio General Dinámico y Estocástico: Una Introducción. *Ensayos Económicos*, 59(1):25–79.
- [Gali, 2008] Gali, J. (2008). *Monetary Policy, Inflation and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework*. Princeton University Press.
- [Gómez *et al.*, 2009] Gómez, A. G., Mahadeva, L., Rodríguez, D., y Rojas, L. E. (2009). Monetary Policy Forecasting In A DSGE Model With Data That Is Uncertain, Unbalanced And About The Future. Borradores de Economía 005480, Banco de la República.

- [González *et al.*, 2013] González, A., López, M., Rodríguez, N., y Téllez, S. (2013). Fiscal Policy in a Small Open Economy with Oil Sector and Non-Ricardian Agents. Borradores de Economía 759, Banco de la Republica de Colombia.
- [González *et al.*, 2011] González, A., Mahadeva, L., Prada, J. D., y Rodríguez, D. (2011). Policy Analysis Tool Applied to Colombian Needs: PATACON Model Description. Borradores de Economía 656, Banco de la Republica de Colombia.
- [Gonzalez *et al.*, 2008] Gonzalez, A., Ocampo, S., Rodriguez, D. A., y Rodríguez, N. (2008). Asimetrías del Empleo y el Producto, una aproximación de Equilibrio General. Borradores de Economía 008809, Banco de la Republica.
- [Gottfries, 2002] Gottfries, N. (2002). Market shares, Financial Constraints and Pricing Behaviour in the Export Market. *Economica*, 69(276):583–607.
- [Gouriéroux *et al.*, 1993] Gouriéroux, C., Monfort, A., y Renault, E. (1993). Indirect Inference. *Journal of Applied Econometrics*, 8(1):S85–S188.
- [Griffoli, 2013] Griffoli, T. M. (2013). An Introduction to the Solution and Estimation of DSGE models. Dynare User Guide.
- [Gürkaynak *et al.*, 2013] Gürkaynak, R. S., Kisacikoglu, B., y Rossi, B. (2013). Do DSGE Models Forecast More Accurately Out-of-Sample than VAR Models? Cepr discussion papers, C.E.P.R. Discussion Papers.
- [Hamilton, 1994] Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- [Hamman *et al.*, 2006] Hamman, F., Perez, J., y Rodriguez, D. (2006). Bringing a DSGE Model into Policy Environment in Colombia.
- [Henao, 2013] Henao, J. M. (2013). Demanda Externa, términos de intercambio y el papel de la política monetaria durante la crisis de 2008. Documentos de Investigación 7, Centro de Estudios Monetarios Latinomaericanos.
- [Henze y Zirkler, 1990] Henze, N. y Zirkler, B. (1990). A class of invariant consistent tests for multivariate normality. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 19(10):3595–3617.
- [Hodge *et al.*, 2008] Hodge, A., Robinson, T., y Stuart, R. (2008). A Small BVAR-DSGE Model for Forecasting the Australian Economy. Research Discussion Paper 04, Reserve Bank of Australia.
- [Ingram y Whiteman, 1994] Ingram, B. y Whiteman, C. (1994). Supplanting the Minnesota Prior-Forecasting Macroeconomic Time Series Using Real Business Cycle Models Priors. *Journal of Monetary Economics*, 34(1):497–510.

- [Klein, 2000] Klein, P. (2000). Using the Generalized Schur form to Solve a Multivariate Linear Rational Expectations Model. *Journal of Dynamic Economics and Control*, 24(1):1405–1423.
- [López *et al.*, 1994] López, E., Ripoll, M., y Cepeda, F. (1994). Crónica de los Modelos de Equilibrio General en Colombia. *Borradores de Economía*, 13.
- [Lütkepohl, 2007] Lütkepohl, H. (2007). *New Introduction to Multivariate Time Series Analysis*. Springer Verlag.
- [Mahadeva y Parra, 2008] Mahadeva, L. y Parra, J. C. (2008). Testing a DSGE model and its partner database. Borradores de Economía 004507, Banco de la República.
- [Mickelsson, 2009] Mickelsson, G. (2009). Monetary Policy in closed and open economies. Tesis de máster, Uppsala Universitet.
- [Miller, 2011] Miller, M. H. (2011). Macroeconomics: A Discipline Not a Science. *Manchester School*, 79(s2):21–24.
- [Pesaran y Smith, 2011] Pesaran, M. H. y Smith, R. P. (2011). Beyond the DSGE Strait-jacket. En *IZA Discussion Papers*, número 5661.
- [Pfeifer, 2014] Pfeifer, J. (2014). An Introduction to Graphs in Dynare. Research papers, University of Mannheim.
- [Pfeifer, 2015] Pfeifer, J. (2015). A Guide to specifying observation equations for the estimation DSGE models. Research papers, University of Mannheim.
- [Poghosyan y Beidas Strom, 2011] Poghosyan, T. y Beidas Strom, S. (2011). An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Jordanian Economy. Working Paper 1128, International Monetary Fund.
- [Restrepo, 2008] Restrepo, J. C. P. (2008). Hechos Estilizados de la Economía Colombiana: Fundamentos empíricos para la construcción y evaluación de un modelo DSGE. *Borradores de Economía*, 509.
- [Robinson, 2013] Robinson, T. (2013). Estimating and Identifying Empirical BVAR-DSGE Models for Small Open Economies. Research Discussion Papers 06, Reserve Bank of Australia.
- [Royston, 1992] Royston, P. (1992). Approximation the Shapiro-Wilk W Test for Non-Normality. *Statistics and Computing*, 2(3):117–119.
- [Schmitt-Grohé y Uribe, 2004] Schmitt-Grohé, S. y Uribe, M. (2004). Solving Dynamic General Equilibrium Models Using a Second-Order Approximation to the Policy Function. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28(4):755–775.

- [Schorfheide, 2000] Schorfheide, F. (2000). Loss function-based evaluation of DSGE models. *Journal of Applied Econometrics*, 15(6):645–670.
- [Schorfheide, 2011] Schorfheide, F. (2011). Estimation and Evaluation of DSGE models: Progress and Challenges. *National Bureau of Economic Research*, 18781.
- [Sims, 2000] Sims, C. (2000). Solving Linear Rational Expectation Models. Department of Economics, Yale University.
- [Smets y Wouters, 2003] Smets, F. y Wouters, R. (2003). An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Euro Area. *Journal of the European economic association*, 1(5):1123–1175.
- [Smets y Wouters, 2007] Smets, F. y Wouters, R. (2007). Shocks and frictions in US business cycles: a Bayesian DSGE approach. Working Paper Series 0722, European Central Bank.
- [Smith, 1993] Smith, A. (1993). Estimating Nonlinear Time-Series Models Using Simulated Vector Autoregressions. *Journal of Applied Econometrics*, 8(1):S63–S84.
- [Suarez, 2011] Suarez, C. M. (2011). Trade Off de Política Monetaria: La Política Monetaria y el Ciclo Económico en Colombia 1995-2010. Tesis de magister en economía, FCE Universidad Nacional de Colombia.
- [Tokarick, 2014] Tokarick, S. (2014). A Method for Calculating Export Supply and Import Demand Elasticities. *The Journal of International Trade and Economic Development*, 23(7):1059–1087.
- [Uhlig, 1999] Uhlig, H. (1999). A Toolkit for Analysing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily. QM&RBC Codes, Quantitative Macroeconomics & Real Business Cycles.
- [Urrutia *et al.*, 2014] Urrutia, M., Hamann, F., y Hofstetter, M. (2014). Inflation Targeting in Colombia, 2002-2012. Research Department Publications IDB-WP-487, Inter-American Development Bank, Research Department.
- [Villaverde, 2009] Villaverde, J. F. (2009). The Econometrics of DSGE Models. NBER Working Papers 14677, National Bureau of Economic Research, Inc.
- [Warne *et al.*, 2013] Warne, A., Coenen, G., y Christoffel, K. (2013). Predictive Likelihood Comparisons with DSGE and DSGE-VAR Models. Working Paper Series 1536, European Central Bank.
- [Werner, 2011] Werner, R. (2011). Economics As If Banks Mattered: A Contribution Based On The Inductive Methodology. *Manchester School*, 79(s2):25–35.
- [Zellner, 1971] Zellner, A. (1971). *Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*. John Wiley and Sons.