



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

**EL ESTUDIO DE LOS FRISOS COMO ESTRATEGIA  
DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE  
LOS CONCEPTOS DE DIVISIBILIDAD Y LA  
FACTORIZACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS**

ALBERTO RAMÍREZ GALÉ

FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
BOGOTÁ D. C - 2016





UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

EL ESTUDIO DE LOS FRISOS COMO ESTRATEGIA  
DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE  
LOS CONCEPTOS DE DIVISIBILIDAD Y LA  
FACTORIZACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS

ALBERTO RAMÍREZ GALÉ

*Trabajo de Grado presentado a la Facultad de Ciencias de la Universidad  
Nacional de Colombia como requisito para optar al título de*

MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y  
NATURALES.

DIRECTOR

PH. D. AGUSTÍN MORENO CAÑADAS

FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
BOGOTÁ D. C - 2016

## Resumen:

El presente trabajo aborda una estrategia didáctica para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de divisibilidad y factorización, mediante el estudio de frisos de números enteros positivos, con el fin de que los estudiantes del grado sexto del Colegio Bravo Páez de la Ciudad de Bogotá, puedan observar, decir y registrar propiedades que se presentan en el conjunto de los enteros positivos a través de sus divisores. Para tal propósito, se comienza por una reseña histórica en la cual se da a conocer algunos resultados asociados a grupos de simetrías que se han podido encontrar con la ayuda de simetrías ocultas en distintos tipos de objetos matemáticos, la presencia de los grupos de Leonardo Da Vinci en la arquitectura y de los grupos de frisos en la zona urbana de una ciudad en España y en los hallazgos arqueológicos de la cultura Quimbaya. A continuación, se dan algunos conceptos relacionados con la teoría de grupos y geometría dinámica. Además, se exponen algunos aspectos de las investigaciones reportadas por J.H Conway y H.S.M Coxeter en [11] se describen también. Luego, se hace referencia a los conceptos relacionados con frisos de números enteros positivos y el análisis de la distribución de los números primos en la espiral de Ulam. Finalmente, se propone una actividad pedagógica en la cual los estudiantes plantean sus argumentos mediante el “Modelo Argumentativo de Toulmin”.

**Palabras Claves:** Palabras claves: Divisibilidad, Espiral, Factorización, Frisos de enteros positivos, Grupos, Modelo argumentativo de Toulmin, Simetrías.

## Abstract

This paper deals with a teaching strategy for teaching and learning of the concepts of factorization and divisibility, through the study of positive integers numbers friezes, so the students from the sixth grade of Bravo Paez School in Bogotá, will be able to see, to say, and to register properties arising in the set of positive integers by using its divisors. For that purpose, it starts with a historical review which gives some results that have been found with the help of hidden symmetries in various types of mathematical objects, the presence of Leonardo’s groups in the architecture and groups of friezes in the urban area of a city in Spain and the archaeological findings of the Quimbaya culture. Then it is given some concepts regarding the theory of groups and dynamic geometry. Further, some investigations reported by J.H Conway and H.S.M Coxeter in [11] are described as well. Also refers to the concepts related to friezes of positive integers numbers and the analysis of the distribution of primes in the Ulam spiral. Finally, proposes an educational activity in which students propose their arguments using the “Argumentative Toulmin model”.

**Key words:** divisibility, Spiral, Factoring, integers numbers frieze groups, groups, Toulim Model of Argumentation, symmetries.

NOTA DE ACEPTACIÓN

-----  
JURADO

-----  
JURADO

-----  
JURADO

-----  
DIRECTOR  
PH. D. AGUSTÍN MORENO CAÑADAS

Bogotá, D. C, junio de 2016

# Índice general

<b>1. Reseña Histórica</b>	<b>5</b>
1.1. Jacques Tits y la simetría . . . . .	5
1.2. Simetría y arquitectura . . . . .	8
1.2.1. Evidencias de grupos de simetrías de Leonardo Da Vinci	10
1.3. Evidencias de los grupos de simetrías en la arqueología . . . . .	11
1.4. Evidencias de grupos de frisos . . . . .	15
1.5. La visualización en la educación matemática . . . . .	17
<b>2. Grupos</b>	<b>19</b>
2.1. Teorema fundamental de la aritmética . . . . .	25
2.1.1. Criterio General de Divisibilidad . . . . .	28
<b>3. Geometría Dinámica</b>	<b>29</b>
3.1. Simetría . . . . .	29
3.1.1. Movimientos del plano . . . . .	29
3.2. Transformaciones lineales . . . . .	32
3.3. Geometría dinámica . . . . .	34
3.4. Congruencias . . . . .	37
3.5. Grupos ornamentales . . . . .	39
3.5.1. $\mathcal{F}_1$ . . . . .	40
3.5.2. $\mathcal{F}_2^1$ . . . . .	40
3.5.3. $\mathcal{F}_1^2$ . . . . .	40
3.5.4. $\mathcal{F}_1^1$ . . . . .	41
3.5.5. $\mathcal{F}_1^3$ . . . . .	41
3.5.6. $\mathcal{F}_2^2$ . . . . .	41
3.5.7. $\mathcal{F}_2$ . . . . .	41
<b>4. Frisos</b>	<b>43</b>
4.1. Introducción . . . . .	43
4.1.1. Los símbolos de dos dígitos $(r, s)$ . . . . .	44
4.2. Patrones de frisos de enteros . . . . .	45
4.3. Polígonos triangulados y patrones de frisos . . . . .	46
4.3.1. Introducción . . . . .	46
4.3.2. Aspectos sobre patrones de frisos . . . . .	47
4.4. Frisos de enteros . . . . .	48

	1
4.4.1. Patrón de frisos mansos (Tame) . . . . .	50
4.4.2. Patrón de frisos especializados o especiales . . . . .	50
4.5. Números de Catalán . . . . .	52
4.5.1. La recurrencia de Catalán . . . . .	52
4.6. Análisis de distribución de primos en espirales . . . . .	53
4.6.1. Espiral de Ulam . . . . .	53
<b>5. Aspectos Pedagógicos</b>	<b>57</b>
5.1. Introducción . . . . .	57
5.2. Razonamiento . . . . .	57
5.3. Modelo reducido de Toulmin . . . . .	58
<b>6. Análisis de resultados y conclusiones</b>	<b>59</b>
6.1. Primera Pregunta . . . . .	60
6.2. Segunda Pregunta . . . . .	61
6.3. Tercera Pregunta . . . . .	62
6.4. Cuarta Pregunta . . . . .	68
6.5. Conclusiones . . . . .	71
<b>A. Propuesta Didáctica</b>	<b>73</b>

## Introducción

El objetivo general del presente trabajo es el diseño de una secuencia de actividades para abordar con los estudiantes del grado sexto del Colegio Distrital Bravo Páez, el concepto de divisibilidad y la factorización de los números enteros positivos.

Desde la experiencia docente se ha evidenciado la necesidad de implementar una estrategia didáctica distinta a las que se proponen en la mayoría de los textos escolares debido a que en primer lugar, éstos abordan los conceptos de divisibilidad y la factorización de números mediante la formulación de unos criterios que son memorizados por la mayoría de los estudiantes del Colegio Bravo Páez para resolver de forma mecánica los ejercicios sobre dichos temas. En segundo lugar, teniendo en cuenta que la divisibilidad es un tema fundamental para la clasificación de los números enteros positivos en primos y compuestos, se debe implementar una estrategia didáctica que permita a los estudiantes observar, generalizar, relacionar y argumentar sobre qué tipos de propiedades se pueden dar en los enteros positivos a través de sus divisores. En este sentido, se pretende que mediante el estudio de frisos de enteros positivos los estudiantes adquieran la habilidad de argumentar con solidez sus ideas con respecto a los criterios de divisibilidad. Siendo la competencia argumentativa una de las herramientas que contribuyen a la formación de ciudadanos críticos y propositivos según se plantea en los Estándares del M.E.N. [34].

Es importante resaltar que sobre los frisos de números enteros positivos se ha dicho muy poco hasta el momento, puesto que la mayoría de los estudios sobre frisos está dirigido a evidenciar la presencia de éstos en el ámbito urbano como se resalta en la investigación desarrollada por J.H Pérez en España en la ciudad de Alcorcón [42], en la arquitectura con la presencia de los grupos de Leonardo y la arqueología mediante la clasificación de los hallazgos arqueológicos de la cultura Quimbaya. Sin embargo, mediante el presente trabajo se aborda un tipo especial de frisos referente a los números enteros positivos como se define en el capítulo 4.

El documento se presenta en 6 capítulos. En el primero se expone una reseña histórica.

En el segundo capítulo se aborda algunos conceptos de teoría de grupos y el teorema fundamental de la aritmética

En el tercer capítulo se encuentran los conceptos sobre simetría, transformaciones lineales, la geometría dinámica, congruencias y grupos ornamentales [36].

El cuarto capítulo, estudia patrones de frisos [13], polígonos triangulados [11], los frisos de enteros [18] y un análisis de la distribución de los números primos en la espiral de Ulam [26, 29].

El quinto capítulo expone los conceptos de razonamiento y modelo argumentativo de Toulmin como la base pedagógica del presente trabajo de grado.

En el sexto capítulo está el análisis y las conclusiones de la información recolectada sobre la estrategia pedagógica aplicada a los estudiantes ver Apéndice [A](#), haciendo uso del modelo argumentativo de Toulmin como se plantea en [\[48\]](#).



# Capítulo 1

## Reseña Histórica

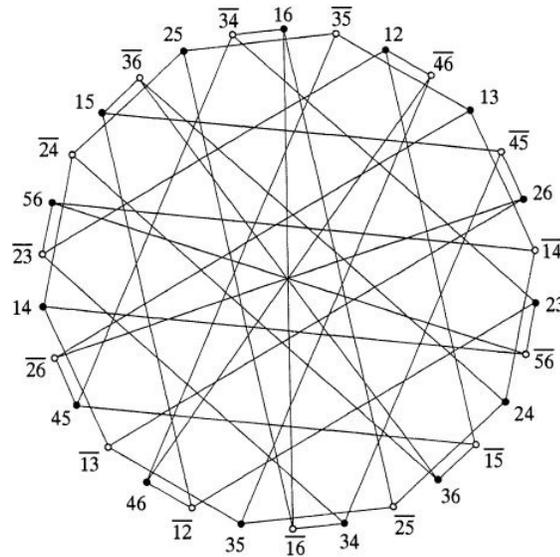
“La simetría es una idea por medio de la cual, el hombre de todas las épocas ha tratado de comprender y crear la belleza, el orden y la perfección”  
(Weyl)

En este capítulo describiremos algunos resultados que han podido obtenerse con la ayuda de simetrías ocultas en distintos tipos de objetos, para ello se tendrán en cuenta los trabajos de Tits, Da Vinci, Albis y J. H. Pérez; además se resalta la importancia que tiene la visualización en la educación matemática.

A continuación se hace referencia al excelente artículo Symmetry escrito por Jacques Tits [47] en donde el uso del concepto de simetría es fundamental para establecer identidades en combinatoria y teoría de grupos.

### 1.1. Jacques Tits y la simetría

Según Jacques Tits en su artículo Symmetry, la simetría posee diferentes significados tanto en el argot popular como en el lenguaje matemático; es más difícil encontrar simetría en la vida diaria, en el arte o en cualquier fenómeno natural que en la matemática, una de las razones es que en el fenómeno natural u objeto de arte se deben conjugar todos los elementos presentes a la vista del observador, mientras que en la matemática se tiende a considerar únicamente las propiedades de un objeto que desde el principio de su análisis han sido descritas eliminando del problema aquellas que en un caso eventual podrían afectar la simetría. Un bello ejemplo, se presenta en la siguiente figura.



(Tomado de [47]).

Al observar de manera superficial la figura anterior aparecen simetrías a simple vista, sin embargo, si se detalla se puede encontrar fácilmente algunas características que rompen dicha simetría. Una de esas características se nota en el hecho de que los 30 vértices poseen nombres diferentes y aunque pasemos por alto ese aspecto se puede encontrar otras irregularidades que destruyen todas las simetrías visibles. Tits argumenta que al despreciar todas esas pequeñas irregularidades se pueden encontrar simetrías ocultas, como la de una simetría rotacional de orden 5, es decir, a cada punto negro: 16, 26, 36, 46 y 56 le corresponde otro punto (que se llama punto “rotado” o punto “imagen”) a la misma distancia del centro, es decir,  $\overline{16}$ ,  $\overline{26}$ ,  $\overline{36}$ ,  $\overline{46}$  y  $\overline{56}$ , de tal manera que el ángulo positivo que forman ambos con el centro de rotación es siempre el mismo. El número de veces que se puede hacer coincidir la imagen rotada con la figura original se llama orden de la rotación. Como también, una simetría de orden 10 al no hacer la distinción entre los puntos blancos y negros de la figura.

También, se hace referencia a otra simetría oculta cuando se observa que cada punto blanco está conectado a tres puntos negros, en la cual cada pareja que forma puntos blancos unidos con las tres parejas de puntos negros forman una partición del conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , de la siguiente manera:

- El punto blanco  $\overline{12}$  forma las particiones (46), (15) y (23).
- El punto blanco  $\overline{13}$  forma las particiones (14), (26) y (35)
- El punto blanco  $\overline{14}$  forma las particiones (24), (56) y (13)
- El punto blanco  $\overline{15}$  forma las particiones (36), (45) y (12)
- El punto blanco  $\overline{16}$  forma las particiones (25), (16) y (34)
- El punto blanco  $\overline{23}$  forma las particiones (56), (12) y (34)
- El punto blanco  $\overline{24}$  forma las particiones (25), (36) y (14)

El punto blanco  $\overline{25}$  forma las particiones (35), (16) y (24)  
 El punto blanco  $\overline{26}$  forma las particiones (13), (26) y (45)  
 El punto blanco  $\overline{34}$  forma las particiones (16), (23) y (45)  
 El punto blanco  $\overline{35}$  forma las particiones (13), (46) y (25)  
 El punto blanco  $\overline{36}$  forma las particiones (24), (36) y (15)  
 El punto blanco  $\overline{45}$  forma las particiones (26), (34) y (15)  
 El punto blanco  $\overline{46}$  forma las particiones (35), (46) y (12)  
 El punto blanco  $\overline{56}$  forma las particiones (14), (56) y (23)

Por consiguiente, los puntos blancos están asociados con las 15 particiones de  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Ahora cada permutación  $\sigma$  del conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  produce una permutación de los puntos negros (ya que éstas corresponden a los pares de elementos de ese conjunto), así como una permutación de los puntos blancos (considerándolos como particiones), las cuales juntas representan una simetría de toda la figura completa.

Además, una de las tareas más interesantes del trabajo matemático consiste en descubrir aquellas simetrías ocultas, por ejemplo en los dos problemas aparentemente distintos que se presentan a continuación.

PROBLEMA 1 ¿De cuántas maneras un número positivo  $N$ , puede expresarse como una secuencia monótona decreciente de números enteros positivos impares?

*Ejemplo*

$$\begin{aligned} 6 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 3 + 1 + 1 + 1 \\ &= 3 + 3 \\ &= 5 + 1 \end{aligned}$$

PROBLEMA 2 ¿De cuántas maneras puede el número  $N$  expresarse como una suma ordenada cuyo primer término es de la forma  $n(n+1)/2$ , mientras que los otros términos forman una secuencia monótona creciente de enteros positivos pares?

*Ejemplo*

$$\begin{aligned} 6 &= 0 + 2 + 2 + 2 \\ &= 0 + 2 + 4 \\ &= 0 + 6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Ambos problemas tienen la misma respuesta  $M$

De hecho, la equivalencia de los problemas 1 y 2 corresponde a la fórmula de Gauss

$$\frac{\eta(q^2)^2}{\eta(q)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{2(n+\frac{1}{4})^2} \quad (1.1.1)$$

donde

$$\eta(q) = q^{1/24} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \quad (1.1.2)$$

Algunos ejemplos de las soluciones a los problemas 1 y 2 , se describen en la siguiente tabla:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
M	1	1	2	2	3	4	4	6	8	10	12	14	17	...

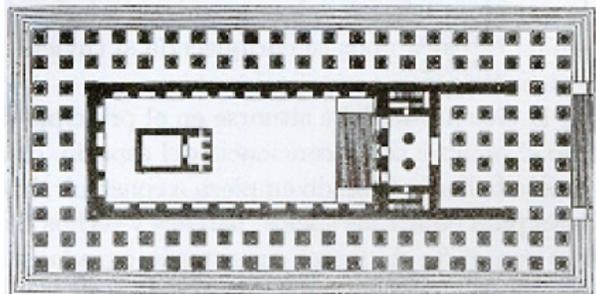
Ahora, podría decirse que la situación queda completamente entendida tan pronto se produzca la prueba para la fórmula de Gauss?. No del todo. Se puede encontrar mayor profundidad construyendo un objeto geométrico que refleje los dos problemas y en consecuencia su equivalencia (esto es del número de soluciones) correspondería con la simetría no necesariamente oculta del objeto. La existencia de esas simetrías no solo prueba la equivalencia de los problemas sino también la fórmula de Gauss. Tal objeto fue encontrado por Frenkel, Kac, Lepowsky en su publicación “La teoría de representación de ciertas álgebras de Kac-Moody-Lie”.

Es importante decir que las simetrías ocultas en un objeto matemático están relacionadas con el hecho de encontrar patrones de frisos en un friso de números enteros positivos a través de sus divisores.

## 1.2. Simetría y arquitectura

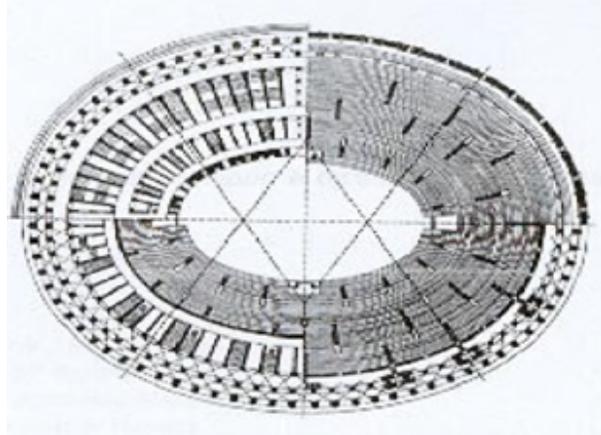
A continuación se hace referencia a algunos conceptos de simetría en la época del Renacimiento como se describe en [9]

Las primeras concepciones sobre simetría arquitectónica identificaban simetría con la proporción, el equilibrio y la belleza.



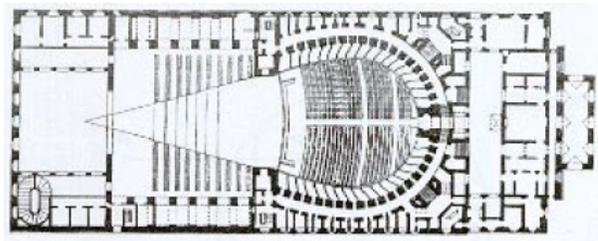
Templo de Apolo Didimeo en Mileto (335-320 a.d.C) (Tomado de [9]).

El arquitecto romano Marco Vitruvio Polión define la simetría como el “vínculo armónico de cada uno de los miembros del edificio respecto a la figura global de la obra”. Esta concepción influyó notablemente en el Renacimiento: Alberto Durero, Miguel Ángel, Piero de la Francesca, Luca Paccioli, Leonardo da Vinci, entre otros, contribuyeron al estudio de la simetría sin desligarla del proporcionado de la obra.



Izda.: Planta del Coliseo de Roma (70-82 d.d.C) (Tomado de [9]).

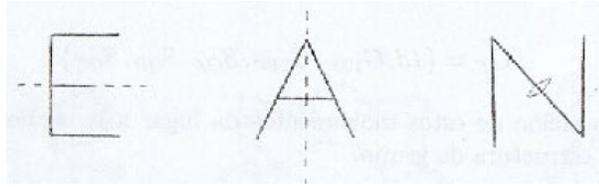
El arquitecto francés Eugène Emmanuel Viollet le Duc, dio otro concepto de simetría: “simetría significa hoy, en el lenguaje de los arquitectos, no un equilibrio ni relación armoniosa de las partes con el todo, sino una similitud de partes opuestas, la reproducción exacta a la izquierda de un eje, de lo que hay a la derecha”.



Planta del Teatro en la Scala de Milán (1774) (Tomado de [9]).

En el fondo, esta definición desmarca la teoría de la proporción de la teoría de la simetría, reduciendo ésta a su aspecto euclídeo puramente geométrico. En este sentido, la teoría de la simetría es una parte de la geometría que, operando sobre el espacio euclídeo, abarca como transformaciones a todas las isometrías (reflexión y rotación), siendo su interés específico el estudio de los grupos de isometrías que dejan invariantes las figuras.

Por ejemplo, el grupo de simetría de una figura plana puede ser estudiada estéticamente analizando sus propiedades métricas o bien dinámicamente, analizando bajo qué isometrías permanecen invariantes.

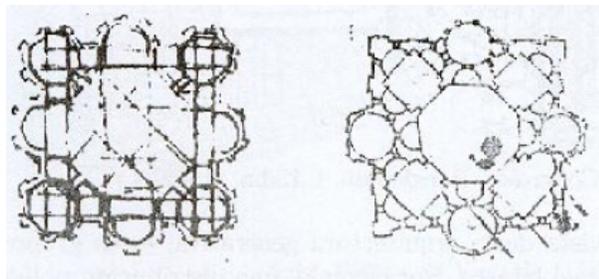


(Tomado de [9]).

Observando en la figura anterior, en las letras  $E$  y  $A$  encontramos inmediatamente su simetría bilateral; en el primer caso el eje de simetría (reflexión) es horizontal y el segundo caso, vertical. La letra  $N$  es simétrica por un giro de amplitud  $\pi$ .

### 1.2.1. Evidencias de grupos de simetrías de Leonardo Da Vinci

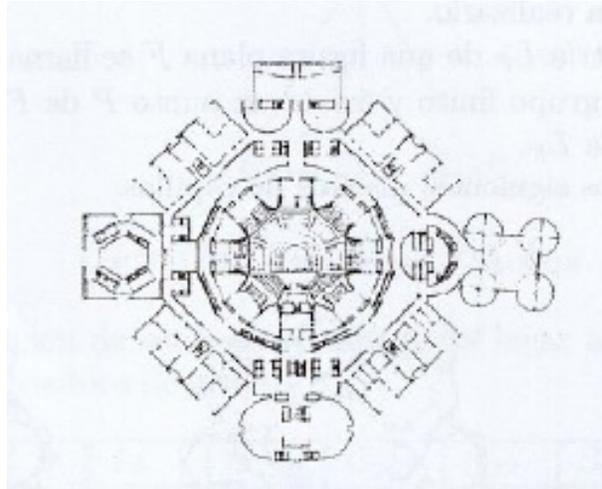
En la época del Renacimiento los grupos puntuales de Leonardo se utilizaron para diseñar capillas adyacentes a un núcleo, sin romper su simetría central. Leonardo hizo un estudio sistemático con el propósito de establecer los métodos óptimos para realizarlo. Así lo demuestran las siguientes capillas:



(Tomado de [9]).

Arquitectónicamente, en los tiempos modernos el uso de los grupos de Leonardo se ha visto enriquecido con nuevas ideas como la existencia de un punto central de simetría en la planta de tal manera que permite ubicar en el centro del diseño todos los servicios comunes e instalaciones de interés general (escaleras, ascensores, conducciones eléctricas, de agua, luz, patios...). Esta centralización geométrica aporta un notable ahorro económico, y sobre todo, un encubrimiento natural de esas instalaciones.

### 1.3. EVIDENCIAS DE LOS GRUPOS DE SIMETRÍAS EN LA ARQUEOLOGÍA11



Edificio Congreso, Bangladesh, L.Kahn (Tomado de [9]).

Y así, brevemente se ha evidenciado la importancia que tienen los grupos puntuales o de Leonardo en la arquitectura y el arte.

### 1.3. Evidencias de los grupos de simetrías en la arqueología

Para el presente trabajo, es importante traer a colación una investigación realizada por Victor Albis, como se describe en [1], con respecto al análisis de las simetrías de diseños arqueológicos mediante la determinación de cuáles traslaciones, rotaciones o reflexiones ocurren en dichos diseños.

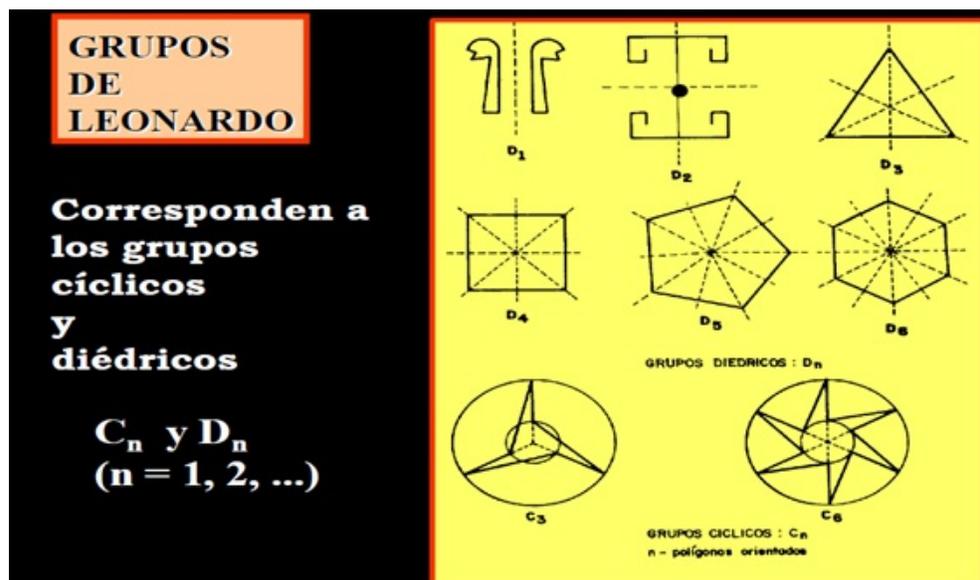
Considerando que la arqueología estudia, entre otras cosas, testimonios y monumentos de las civilizaciones antiguas; clasifica objetos para determinar cronologías, intercambios culturales y entender pensamientos. Es de notar que, en la mayoría de los objetos arqueológicos se presentan formas muy particulares, puesto que tienen elementos o figuras que se repiten de manera regular. En la cual se evidencia el uso consciente o no, de isometrías fundamentales en el diseño de objetos y utensilios como se observa en la siguiente figura



Objeto perteneciente al Grupo de Indígenas Quimbayas en Colombia (Tomado de [1]).

Las isometrías que presentan este tipo de objetos han motivado a los arqueólogos a clasificarlos de acuerdo a un grupo de simetría, teniendo en cuenta que las isometrías son movimientos del plano que permiten repetir (sin deformar) motivos o figuras en un diseño dado. De acuerdo con la simetría que ellos admiten se clasifican en:

1. **Diseños Finitos:** Sólo admiten rotaciones y reflexiones en su grupo de simetría. Un ejemplo clásico son los grupos de Leonardo



Los grupos de Leonardo (Tomado de [1]).

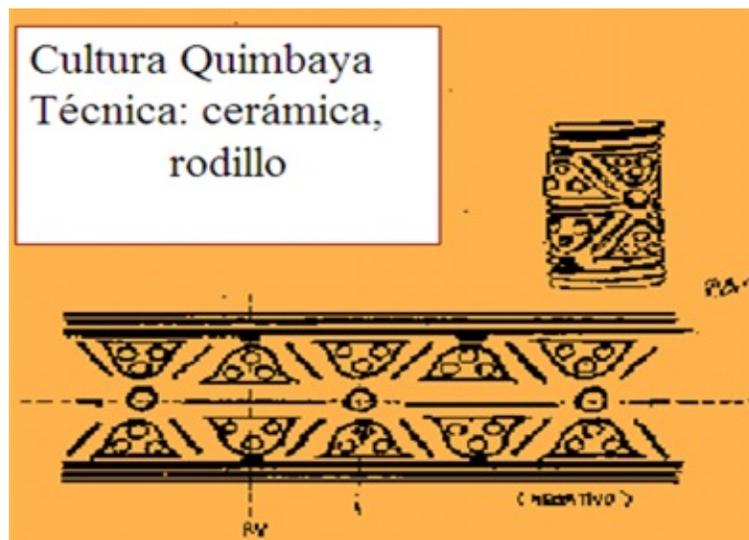
### 1.3. EVIDENCIAS DE LOS GRUPOS DE SIMETRÍAS EN LA ARQUEOLOGÍA13

#### 2. Diseños infinitos:

(a) **Diseños Unidimensionales:** Son los que admiten traslaciones en una sola dirección. Un ejemplo de estos diseños son los frisos, puesto que los movimientos permitidos en éstos, son:

- Traslaciones en una dirección. El friso tiene o no una traslación mínima que lo deja quieto.
- Reflexiones con respecto al eje del friso (simetría horizontal).
- Reflexiones de eje perpendicular al eje del friso (simetría vertical).
- Reflexión deslizante (simetría con deslizamiento).
- Giros de  $180^\circ$  alrededor de un punto situado en el eje del friso.

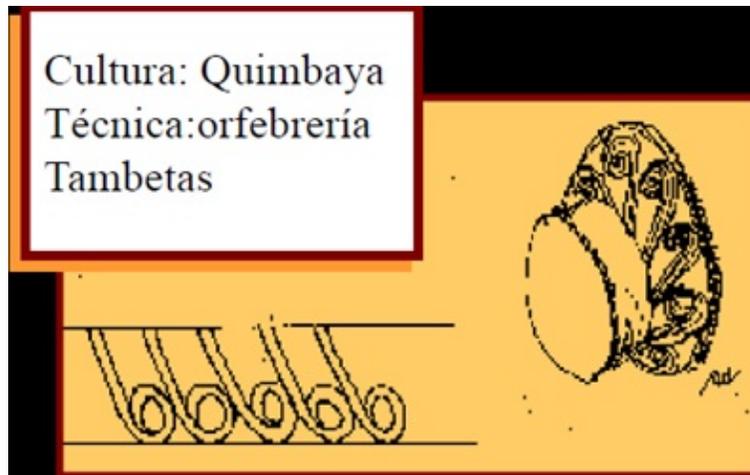
A continuación se muestran algunas imágenes de algunos diseños unidimensionales arqueológicos de la cultura Quimbaya.



Grupo de Frisos  $F_2^1$ : Diseño de la Cultura Quimbaya - Colombia (Tomado de [1]).



Grupo de Frisos  $F_2$ : Diseño de la Cultura Quimbaya - Colombia (Tomado de [1]).



Grupo de Frisos  $F_1$ : Diseño de la Cultura Quimbaya - Colombia (Tomado de [1]).

(b) **Diseños Bidimensionales:** En este diseño se permiten los siguientes movimientos:

- Traslaciones en dos direcciones distintas.
- Una rotación mínima. Sólo hay cuatro posibles rotaciones mínimas:  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ , y  $180^\circ$ .
- Reflexiones en varias direcciones.
- Reflexiones deslizantes (simetrías con deslizamiento).

Ya que para los fines del presente trabajo lo más importante es el diseño unidimensional (frisos), se muestra a continuación sólo un ejemplo de un diseño bidimensional.



Diseño Bidimensional (p. 4): La Vasija Tolima-Colombia (Tomado de [1]).

Finalmente, se ha visto una aplicación de los grupos de simetrías en la arqueología.

## 1.4. Evidencias de grupos de frisos en la zona urbana de la ciudad de Alcorcón (España)

En una investigación con fines didácticos realizada por Hernando Pérez Jesús, en la Ciudad de Alcorcón en España, muestra que en la zona urbana de dicha Ciudad hay la presencia de los grupos de frisos, esto con el propósito de encontrar y evidenciar Matemáticas en un espacio tan próximo y vital como lo es el barrio en el cual habitamos. A continuación se muestran algunas imágenes de los grupos de frisos encontrados en la zona urbana de la Ciudad [42].

### Grupo ( $F_1$ )

Se encontró en las tapas de cables de comunicaciones de la empresa ONO, abundantes en toda la ciudad.



(Tomado de [42]).

Es el grupo de frisos más sencillos y no es otro que el grupo cíclico infinito como se plantea en el capítulo 2. El grupo de simetría de este friso sólo contiene las traslaciones múltiplo de la traslación  $t_{\vec{u}}$ , donde  $\vec{u}$ , marcado en rojo (ver la siguiente figura), es el vector fundamental que corresponde al lado horizontal del rectángulo fundamental. El grupo está generado por dicha traslación.

$$F_1 = \langle t_{\vec{u}} \rangle = \{t_{n\vec{u}} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



Detalle del grupo de friso  $F_1$  (Tomado de [42]).

### Grupo ( $F_2$ )

Se encontró en las tapas de registros en la Avenida de las Retamas.



(Tomado de [42]).

El grupo ( $F_2$ ) está generado por la traslación  $t_{\vec{u}}$  y unos de los giros  $g_{p,\pi}$  con centro en un punto con  $p$  (marcado con un punto oscuro como se puede observar en la siguiente figura) de la recta centro del friso.

$$F_2 = \langle t_{\vec{u}}, g_{p,\pi} \rangle \\ = \{t_{n\vec{u}} \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ g_{P_i} \mid P_i = P + \frac{i}{2}\vec{u}, \quad i \in \mathbb{Z} \right\}$$



Detalle del grupo de friso  $F_2$ (Tomado de [42]).

## 1.5. La visualización en la educación matemática

En el presente trabajo, la visualización juega un papel importante en las relaciones que se pueden dar en las transformaciones isométricas de figuras, en este caso en el plano euclídeo.

Además, por la experiencia docente se observa que los estudiantes se sienten atraídos más por lo visual y dinámico que por las cosas monótonas (que no varían).

También, hay que decir que la historia está marcada por muchos acontecimientos basados en lo visual. Por ejemplo, los grupos de simetrías de Leonardo en los diseños arquitectónicos en la época del Renacimiento y los grupos de simetrías encontrados en las tapas de los registros de comunicaciones encontrados en España.

Los anteriores hallazgos dan fe de que “ver”, permite observar mejor matemáticamente los elementos de las transformaciones isométricas que se pueden dar en el plano.

En general, la visualización amplía la capacidad natural de las personas para promover la abstracción y la generalización.

Finalmente, es importante dar una vistazo sobre la “visualización”, desde una orientación Peirciana, como se plantea en [27].

Charles Sanders Peirce, considera que en el análisis de la visualización, se distinguen tres tipos de signos (icono, índice y símbolos) y según la relación que los signos tengan con el objeto, realiza la siguiente clasificación:

- Iconos: Tienen una relación de semejanza, en tanto se parecen al objeto que representan. La relación con aquello a lo que se refieren es directa, por ejemplo: pinturas, retratos, dibujos figurativos, mapas, etc. La representación muestra la estructura u organización del objeto.

- Índices: La relación con los objetos que representan es de contigüidad (relación de causa-efecto) con respecto a la realidad. Por ejemplo, un rayo (es índice de tormenta), una huella (es índice de alguien que pasó por ahí), etc.
- Símbolos: Representa al objeto designado en virtud de un hábito o regla que es independiente de cualquier cualidad física, o contigüidad contextual, con el objeto. Ejemplo: palabras, logotipos, escudos de armas, señales de tráfico.

Particularmente, aunque no es el objetivo principal de este trabajo, nos interesaría saber de acuerdo a la clasificación que realiza Peirce, los grupos simetrías y de frisos ¿Cómo se clasifican?

Con ligereza puedo decir que es una posible combinación de signos clasificados como iconos e índices, puesto que los grupos de simetrías y de frisos tienen una relación de semejanza y una relación de causa - efecto al estar relacionados con las transformaciones isométricas.

# Capítulo 2

## Grupos

En este capítulo se hace una descripción de los conceptos de teoría de grupos que son importantes para este trabajo como se describe en [36].

**Definición 2.1.** *Un conjunto no vacío  $G$  dotado con una operación  $\cdot$  es un grupo, si:*

1.  *$\cdot$  es una ley de composición interna. Esto es, para todo  $a$  y  $b$  elemento de  $G$  el elemento  $a \cdot b \in G$ .*
2.  *$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ , para todo  $a, b, c \in G$ . Esto es,  $\cdot$  es una operación asociativa.*
3. *Existe  $e \in G$ , tal que para todo  $x \in G$ ,  $e \cdot x = x \cdot e = x$ . Esto es, existe un elemento neutro en  $G$ .*
4. *Para cada  $x \in G$  existe un elemento  $x^*$ , tal que  $x \cdot x^* = x^* \cdot x = e$ .*
5. *En el caso que para todo  $a, b \in G$  se cumpla  $a \cdot b = b \cdot a$ , diremos que  $G$  es un grupo conmutativo o abeliano.*

**Ejemplo 2.1.1.**

1. *Para cada  $n \geq 1$  fijo,  $(\mathbb{Z}_n, +)$  es un grupo finito.*
2. *El conjunto de unidades  $\mathbb{Z}_n^x$ , de  $\mathbb{Z}_n$  es un grupo con*

$$\varphi(n) = n \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

*unidades. En donde  $\varphi(n)$  es la función de euler evaluada en  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ , la cual calcula la cantidad de primos relativos con  $n$  menores que el.*

*Las siguientes son algunas propiedades de la función de Euler:*

- a) *Si  $(n, m) = 1$  entonces  $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ .*
- b) *Para  $k \geq 1$ ,*

$$\varphi(2^k) = 2^{k-1},$$

c) si  $p$  es un número primo entonces

$$\varphi(p) = p \left(1 - \frac{1}{p}\right) = p - 1.$$

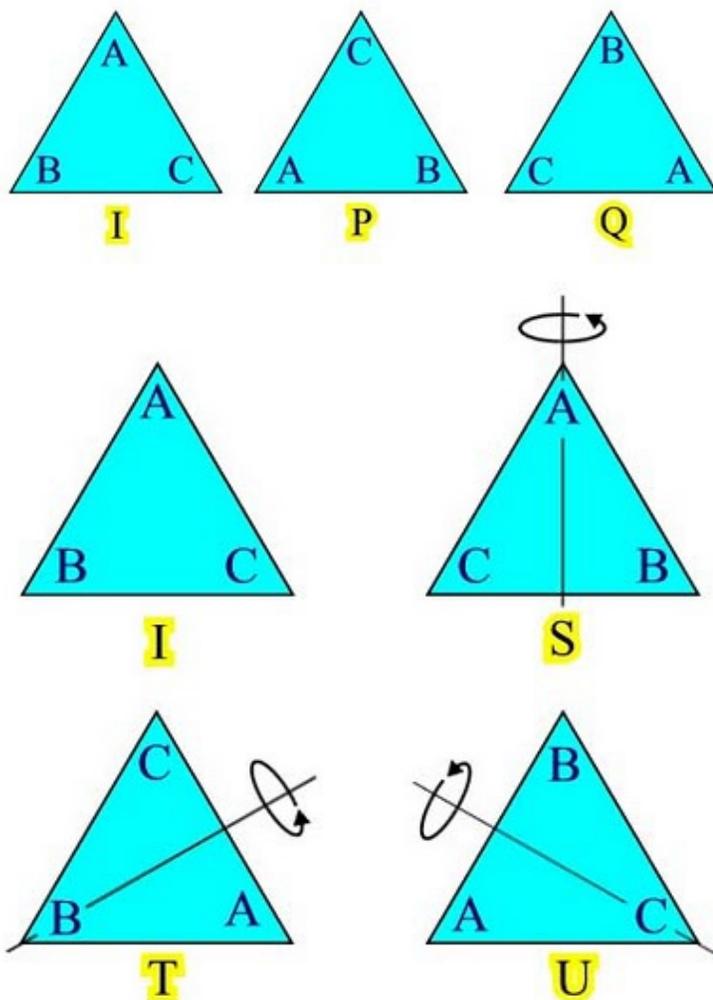
3. El conjunto de los números racionales es un grupo cuando se le dota de la suma usual de números racionales o del producto usual de números racionales sin el cero..
4. El conjunto de los números irracionales, no es un grupo si se le dota con la suma o el producto usual de números reales.

**Definición 2.2.** El número de elementos de un grupo  $G$  se denota por

$$|G| = o(G).$$

Si  $|G| < \infty$  entonces  $G$  es un grupo finito, de otra forma, diremos que  $G$  es un grupo infinito.

**Ejemplo 2.2.1.**  $\{I, S, P, SP, PS, Q\}$  es el único grupo no conmutativo de orden 6, el cual se corresponde biyectivamente con el grupo de las simetrías de un triángulo:



(Tomado de [36]).

Como las operaciones entre funciones

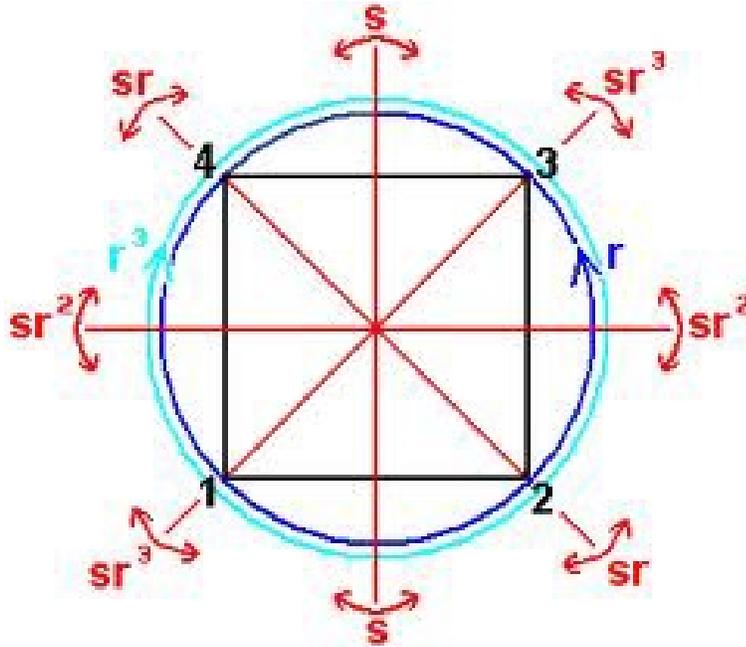
Observe que  $S, P$  se pueden escribir como las funciones:

$$S = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$$

de donde,  $SP = T, PS = U, S^2 = P^3 = I$

El grupo de simetría del cuadrado pertenece a una clase amplia de grupos denominados diédricos que junto con los grupos cíclicos son los grupos de Leonardo. Los cuales se presentan de la siguiente forma

$$D_n = \langle \{a, b \mid a^n = b^2 = 1, bab = a^{-1}\} \rangle$$



En la gráfica anterior, podemos hacer la identificación:

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

en cuyo caso observamos  $r^4 = s^2 = id =$  identidad, en particular

$$sr = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

De esta forma el grupo de simetrías del cuadrado o grupo diédrico, está constituido por los siguientes elementos:

$$D_4 = \{id, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}.$$

**Definición 2.3.** Si  $G$  es un grupo finito y  $a \in G$  entonces el orden de  $a$  es el mínimo entero positivo,  $n_0$  tal que  $a^{n_0} = e$ , en donde  $e$  es el elemento neutro de  $G$ . En particular  $a^0 = e$ , para todo  $a \in G$ .

**Ejemplo 2.3.1.** En  $(\mathbb{Z}_4, +)$ : el orden del elemento  $\bar{0}$  es 0, el orden de  $\bar{1}$  es 4, ya que

$$1 + 1 + 1 + 1 = 0.$$

el orden de  $\bar{2}$  es 2, debido a que

$$2 + 2 = 0.$$

el orden de  $\bar{3}$  es 4, ya que

$$3 + 3 = 2, \quad 3 + 3 + 3 = 1 \quad 3 + 3 + 3 + 3 = 0.$$

**Definición 2.4.** Si  $G$  es un grupo y  $H \subseteq G$  es un grupo entonces diremos que  $H$  es un subgrupo de  $G$ .

**Teorema 2.4.1** (Leyes de los exponentes en un grupo). Sea  $G$  un grupo y  $a, b \in G$  y  $r, s$  números enteros, entonces:

1.  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .
2. Si  $a, b$  conmutan entonces

$$(ab)^r = a^r b^r.$$

3.  $(a^{-1})^r = (a^r)^{-1}$ , lo cual se nota frecuentemente como  $a^{-r}$
4.  $(a^r)^s = a^{rs}$ .
5.  $a^r a^s = a^{r+s}$ .

*Demostración.* En el primer caso, note que el inverso  $x$  de  $ab$  debe ser tal que  $abx = e$ , tal  $x$  es único.

Ahora observamos que

$$abb^{-1}a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e.$$

De donde  $x = b^{-1}a^{-1}$ .

En el segundo caso si  $r \geq 0$ , podemos usar inducción, para probar que  $ba^r = a^r b$  y que  $(ab)^r = a^r b^r$ .

Si  $r$  es negativo entonces  $r = -m$  en donde  $m$  es positivo, note que si  $a$  y  $b$  conmutan entonces también lo hacen  $a^{-1}$  y  $b^{-1}$

Por definición (observe que  $(a^{-1})^n = a^{-n}$ )

$$\begin{aligned}(ab)^{-m} &= ((ab)^{-1})^m \\ &= (b^{-1}a^{-1})^m \\ &= (a^{-1}b^{-1})^m \\ &= a^{-m}b^{-m}.\end{aligned}$$

□

**Teorema 2.4.2** (Criterio para subgrupos). *Si  $G$  es un grupo y  $H \subseteq G$  entonces  $H$  es un subgrupo de  $G$  si para todo  $a, b \in H$ , se cumple  $a \cdot b \in H$ .*

**Teorema 2.4.3** (Un criterio para subgrupos finitos). *Si  $G$  es un grupo finito y  $H \subseteq G$  entonces  $H$  es un subgrupo de  $G$  si para todo  $a, b \in H$  se cumple  $a \cdot b \in H$ . Esto es, en este caso basta verificar que  $\cdot$  es cerrada en  $H$ , para determinar si este subconjunto es un subgrupo de  $G$ .*

**Definición 2.5.** *Si  $G$  es un grupo y  $a \in G$  entonces, notamos  $\langle a \rangle$  al subgrupo generado por el elemento  $a$ , tal que*

$$\langle a \rangle = \{e, a, a^2, a^3 \dots\}$$

*si  $G$  es un grupo tal que para algún elemento  $a \in G$  se cumple  $\langle a \rangle = G$  entonces diremos que  $G$  es un grupo cíclico generado por  $a$ .*

**Ejemplo 2.5.1.** *Los únicos grupos cíclicos finitos (salvo isomorfismos) son los grupos  $(\mathbb{Z}_n, +)$ .*

*Mientras que  $(\mathbb{Z}, +)$  es el único grupo cíclico infinito (salvo isomorfismos).*

Grupos finitos de orden menor que 6

Todo grupo de orden menor que 6 es abeliano. De orden 4  $(\mathbb{Z}_4, +)$  es cíclico y el grupo 4 de Klein es un grupo abeliano de orden 4 no cíclico. De hecho  $K = \{e, a, b, ab\}$  tiene la propiedad de que todos sus elementos son de orden dos. La siguiente es la tabla de multiplicación de  $K$ :

$\cdot$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	aa
ab	ab	b	a	e

**Definición 2.6.** *Si  $H$  es subgrupo de un grupo  $G$  y  $a \in H$  entonces la co-clase  $aH$  de  $G$  es el subconjunto  $aH$  de  $G$ , tal que*

$$aH = \{ah \mid h \in H\}$$

**Ejemplo 2.6.1.** Considere el plano cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  e  $I$  una recta que pasa por el origen. Por tanto existe un vector distinto de cero  $\alpha \in \mathbb{R}^2$ , tal que

$$I = \{r\alpha \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

Es fácil ver que  $I$  es un subgrupo de  $\mathbb{R}^2$ :

$$0 = 0\alpha \in I$$

y si  $r, r' \in \mathbb{R}$  entonces

$$\begin{aligned} r\alpha + r'\alpha &= (r + r')\alpha \in I, \\ -(r\alpha) &= (-r)\alpha \in I, \end{aligned}$$

Si  $\beta \in \mathbb{R}^2$  entonces la co-clase  $\beta + I$  es una recta paralela a  $I$  que contiene a  $\beta$ .

**Ejemplo 2.6.2.** En  $S_3$  (grupo de simetría de un triángulo equilátero) si  $H = \langle U \rangle = \{I, U\}$  entonces:

$$\begin{aligned} TH &= \{T, P\}, \\ SH &= \{S, Q\}. \end{aligned}$$

**Teorema 2.6.1.** Si  $H$  es un subgrupo de un grupo  $G$  y  $a, b \in G$ , entonces:

1.  $aH = bH$  si y solo si  $ab^{-1} \in H$ ,
2. Si  $aH \cap bH \neq \emptyset$  entonces  $aH = bH$ ,
3.  $|aH| = |H|$  para todo  $a \in G$

**Teorema 2.6.2** (Teorema de Lagrange). Si  $G$  es un grupo finito y  $H$  es un subgrupo de  $G$  entonces el orden de  $H$  que notamos  $o(H)$  divide al orden  $o(G)$  de  $G$ .

Note por ejemplo que si  $G$  es un grupo finito de orden un número primo  $p$  entonces los únicos subgrupos de  $G$  son el mismo y el subgrupo constituido por el elemento neutro del grupo.

**Teorema 2.6.3.** Sea  $\{a_1H, a_2H, \dots, a_LH\}$  la familia de todas la co-clases de  $H$  en  $G$ . Entonces

$$G = a_1H \cup a_2H \cup \dots \cup a_LH = \bigcup_{i=1}^L a_iH,$$

Como cada elemento  $g \in G$  pertenece a la clase  $gH$  y  $gH = a_iH$  para algún  $i$ . Por el teorema anterior dichas co-clases son disyuntas por lo que:

$$|G| = \sum_{i=1}^L |a_iH|.$$

Como  $|a_iH| = |H|$ , para todo  $i$  entonces se cumple que  $|G| = t|H|$ .

**Corolario 2.6.1.** *Si  $p$  es un número primo entonces todo grupo de orden  $p$  es cíclico.*

Note que si  $a \in G$ ,  $a \neq e$  y  $H = \langle a \rangle$  es el subgrupo cíclico de  $G$ , generado por  $a$  entonces  $|\langle a \rangle| \mid |G|$ , luego  $|G| = |H| = p$ , ya que  $|H| > 1$ .

Con respecto al orden de un elemento de un grupo finito  $G$  de orden  $n$ , debemos anotar que  $a^t = e$  si y solo si  $n = n_0 t$ , en donde  $n_0$  es un entero. Esto es, el orden de cada elemento de un grupo dado divide el orden del grupo.

Como el subgrupo de unidades de  $\mathbb{Z}_n^x$ , para  $n > 1$  fijo es un grupo multiplicativo finito entonces por el teorema de Lagrange 2.6.2, el orden de toda unidad divide  $\varphi(n)$ , que es el orden de este grupo.

**Definición 2.7.** *Si  $G$  es un grupo cíclico finito y  $a \in G$  es tal que  $\langle a \rangle = G$  entonces diremos que  $a$  es un elemento primitivo de  $G$ .*

Note que para  $G = \mathbb{Z}_n$  los elementos primitivos son aquellos primos relativos con  $n$ . Esto es, si  $m < n$  es tal que  $(n, m) = 1$  entonces  $m$  es un elemento primitivo de  $\mathbb{Z}_n$ .

**Ejemplo 2.7.1.** *Observe que en  $(\mathbb{Z}_4, +)$ , 2 no es primitivo y que los únicos primitivos son 1 y 3.*

*En  $\mathbb{Z}_9^x$ , 5 es un elemento primitivo, pero no lo es 6. Estos hechos nos permiten enunciar resultados:*

**Teorema 2.7.1** (Teorema de Euler). *Si  $a > 0$  es un entero primo relativo con  $n$  entonces  $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ .*

En consecuencia:

**Teorema 2.7.2** (Teorema de Fermat). *Si  $a > 0$  es un entero y  $p$  es un número primo entonces  $a^p \equiv a \pmod{p}$ .*

Esto debido al Teorema de Euler y al hecho de que  $\varphi(p) = p - 1$ , ya que  $p$  es primo.

## 2.1. Algunos referentes sobre el teorema fundamental de la aritmética

En este apartado [28] veremos que cualquier entero  $n \geq 1$  o es primo o puede escribirse como producto de primos. Este resultado, que tiene un equivalente en el libro IX de los Elementos de Euclides, se conoce con el nombre de Teorema fundamental de la aritmética. Procederemos a probarlo, para ello recurrimos a algunos resultados previos referentes al máximo común divisor.

**Teorema 2.7.3.** *Si  $d = \text{mcd}(a, b)$ , entonces  $d$  es el menor entero positivo que puede escribirse como combinación lineal de  $a$  y  $b$  con coeficientes enteros.*

**Teorema 2.7.4.** *Si  $d$  es el menor entero positivo que puede escribirse como combinación lineal con coeficientes enteros de dos enteros dados  $a$  y  $b$  y es divisor común de ambos, entonces  $d = \text{mcd}(a, b)$ .*

**Corolario 2.7.1.** *Sean  $0 \neq a, b \in \mathbb{Z}$ .  $\text{mcd}(a, b) = 1$  si, y sólo si existen  $x, y \in \mathbb{Z}$  tales que*

$$ax + by = 1$$

Notamos “ $a$  divide a  $b$ ” como  $a \mid b$  en caso contrario  $a \nmid b$  para abreviar notación.

**Lema 2.7.1** (Lema de Euclides). *Si  $a \mid (b \cdot c)$  y  $\text{mcd}(a, b) = 1$ , entonces  $a \mid c$ .*

*Demostración.* En efecto, si  $a \mid (b \cdot c)$  y  $\text{mcd}(a, b) = 1$  entonces existen dos números enteros  $x$  e  $y$  tales que

$$ax + by = 1$$

Por otra parte, ya que  $a \mid (b \cdot c)$ , y como  $a \mid a$ , entonces  $a$  dividirá a cualquier combinación lineal con coeficientes enteros de  $a$  y  $bc$ . En particular,

$$a \mid (axc + byc) = (ax + by)c = c$$

de donde se concluye que  $a \mid c$ . □

**Corolario 2.7.2.** *Para  $p$  entero mayor que 1. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a)  $p$  es un número primo.
- (b) Si  $p$  divide a un producto de dos números enteros, entonces divide a uno de los dos.

*Demostración.*

(a)  $\Rightarrow$  (b) Probaremos que para cualquier par de enteros,  $a$  y  $b$ ,

$$p \text{ es primo} \Rightarrow (p \mid ab \Rightarrow p \mid a \text{ ó } p \mid b)$$

o lo que es igual,

$$p \text{ es primo y } p \mid ab \Rightarrow p \mid a \text{ ó } p \mid b$$

Lo haremos por contradicción. En efecto, supongamos que  $p$  es primo y  $p \mid ab$  y  $p \nmid a$  y  $p \nmid b$ . Pues bien,

- si  $p$  no es divisor de  $a$ , como  $p$  es primo, el único divisor común de  $a$  y de  $p$  es 1, luego  $a$  y  $p$  son primos entre sí, es decir,

$$p \mid ab \text{ y } \text{mcd}(a, p) = 1.$$

Aplicamos el lema de Euclides y  $p \mid b$  lo cual contradice la suposición hecha.

- Si  $p$  no divide a  $b$  se hace igual.

(b)  $\Rightarrow$  (a) Probaremos que para cualquier par de enteros,  $a$  y  $b$ ,

$$(p \mid ab \Rightarrow p \mid a \text{ ó } p \mid b) \Rightarrow p \text{ es primo.}$$

Utilizaremos el método de demostración por la contrarrecíproca, es decir probaremos que pueden encontrarse dos enteros  $a$  y  $b$  tales que  $p$  no es primo  $\Rightarrow p \mid ab$  y  $p \nmid a$  y  $p \nmid b$ . En efecto, si  $p$  no es primo, entonces es compuesto luego tendrá, además de 1 y  $p$ , otro divisor  $a$ , es decir, existe  $a$  tal que  $a \mid p$ . Pues bien,

$$a \mid p \Rightarrow \exists b \in \mathbb{Z} : p = ab$$

siendo  $1 < a < p$  y  $1 < b < p$ . Además,

$p \nmid a$  En efecto, si  $p \mid a$ , entonces  $p \mid a$  y  $a \mid p$ ;  $\Rightarrow a = p$  lo cual es imposible.

$p \nmid b$  Igual.

Así pues, hemos encontrado dos enteros  $a$  y  $b$  tales que  $p \mid ab$  y  $p \nmid a$  y  $p \nmid b$ .

□

**Corolario 2.7.3.** *Si un número primo divide al producto de varios números enteros, entonces ha de dividir, al menos, a uno de ellos.*

*Demostración.* En efecto, sea  $p$  un número primo y supongamos que

$$p \mid a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$$

entonces,

$$p \mid a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3 \cdots a_n)$$

y aplicando el corolario anterior

$$p \mid a_1 \text{ ó } p \mid a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$$

Si  $p \mid a_1$ , el corolario está demostrado, de lo contrario

$$p \mid a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$$

luego,

$$p \mid a_2 \cdot (a_3 \cdots a_n)$$

y, nuevamente por el corolario anterior,

$$p \mid a_2 \text{ ó } p \mid a_3 \cdot a_4 \cdots a_n$$

Si  $p \mid a_2$ , el corolario está demostrado, de lo contrario

$$p \mid a_3 \cdot a_4 \cdots a_n$$

luego,

$$p \mid a_3 \cdot (a_4 \cdots a_n)$$

Repitiendo el proceso un número finito de veces, encontraremos, al menos, un  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tal que

$$p \mid a_i.$$

□

### 2.1.1. Criterio General de Divisibilidad

Sean  $a$  y  $b$  dos números enteros tales que  $|a|, |b| > 1$ . Se verifica que  $a$  es divisible por  $b$  si, y sólo si  $a$  tiene, al menos, todos los factores primos de  $b$  con exponentes iguales o mayores.

*Demostración.*

Solo si En efecto, si  $a$  es divisible por  $b$ , entonces existirá un número entero,  $q$ , tal que

$$a = bq$$

por tanto,  $a$  tendrá, al menos, todos los factores primos de  $b$  y sus exponentes serán mayores o iguales que los de  $a$  dependiendo de que los factores primos de  $q$  coincidan o no con los de  $b$ .

Si Si  $a$  tiene, al menos, todos los factores primos de  $b$  con exponentes iguales o mayores, entonces  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$  luego  $a$  es divisible por  $b$ .

□

**Nota 2.7.1.** *Obsérvese que, según este criterio, los divisores de un número tendrán los mismos factores primos que éste con exponentes iguales o menores.*

# Capítulo 3

## Geometría Dinámica

### 3.1. Simetría

En esta sección se aborda la forma como se usa la teoría de grupos para probar algunos teoremas en la Geometría como se describe en [36].

#### 3.1.1. Movimientos del plano

La teoría de grupos nos permite estudiar en detalle los distintos movimientos que pueden realizarse en el plano. Para ello, denotamos el plano como  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ . Dos puntos cualesquiera  $P = (a, b), Q = (c, d) \in \mathbb{R}^2$ , pueden sumarse o restarse, de forma tal que:

$$P \pm Q = (a \pm c, b \pm d).$$

La distancia entre los puntos  $P, Q$  se define de forma tal que:

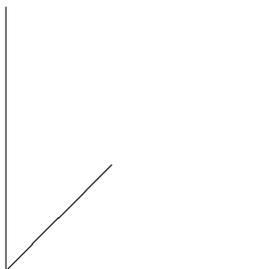
$$d(P, Q) = \|P - Q\| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$

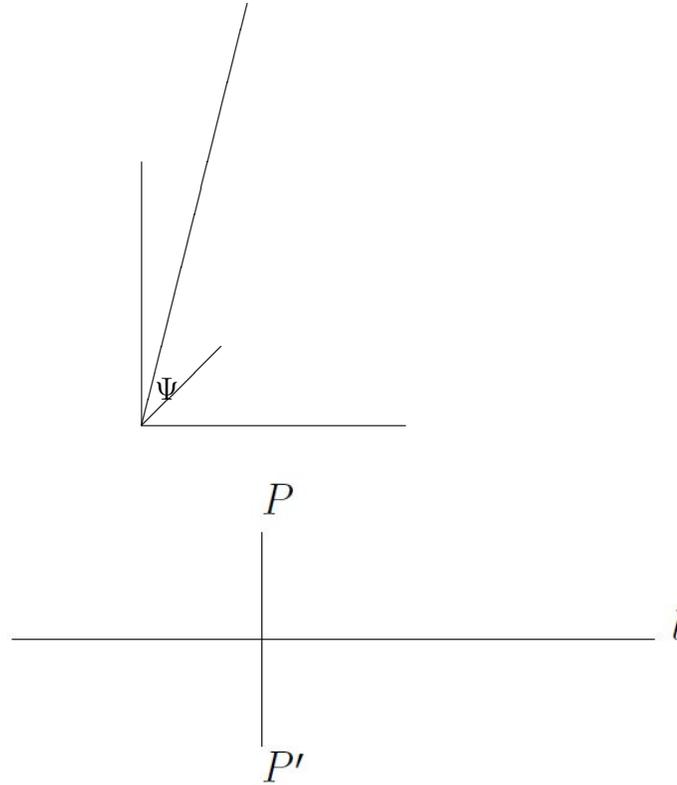
**Definición 3.1.** Una función  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , es un movimiento que preserva la distancia. En tal caso;

$$\|\varphi(P) - \varphi(Q)\| = \|P - Q\|.$$

Para toda pareja de puntos  $P, Q \in \mathbb{R}^2$ .

**Definición 3.2.** Dado un ángulo  $\Psi$ , las rotaciones  $R_\Psi$  respecto al origen  $O = (0, 0)$  se definen de la siguiente forma;  $R_\Psi(O) = O$ ; si  $P \neq O$ , dibuje la línea  $OP$  y rotela hacia la línea  $OP'$ , definida por  $P'$ , de forma tal que  $R_\Psi(P) = P'$ .





**Definición 3.3.** Una reflexión  $\rho_l$  en una línea  $l$ , fija cada punto de  $l$ ; si  $P \notin l$  entonces  $\rho_l(P) = P'$ , en donde  $l$  actúa como bisector perpendicular del segmento  $PP'$ . Si nos imaginamos a  $l$  como un espejo, entonces, podemos inferir que  $P'$  es el reflejo de  $P$ .

**Definición 3.4.** Dado un punto  $V$ , la función de traslación por  $V$  se nota  $\tau_V$  y es tal que:

$$\tau_V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ con } \tau_V(U) = U + V$$

El siguiente resultado muestra como los movimientos conservan algunas propiedades geométricas.

**Teorema 3.4.1.** Dado un movimiento  $\varphi$  entonces:

1. Si  $PQ$  es el segmento de recta que conecta los puntos  $P$  y  $Q$  entonces  $\varphi(PQ)$  es el segmento de recta que conecta los puntos  $\varphi(P)$  y  $\varphi(Q)$ . Si  $l$  es una línea que contiene a  $P$  y  $Q$  entonces  $\varphi(l)$  es una línea que contiene a  $\varphi(P)$  y  $\varphi(Q)$ .
2. Si  $\Delta$  es el triángulo con vértices  $P, Q, U$  entonces  $\varphi(\Delta)$  es un triángulo con vértices  $\varphi(P), \varphi(Q)$  y  $\varphi(U)$ .
3. Si  $l$  y  $l'$  son rectas perpendiculares entonces  $\varphi(l)$  y  $\varphi(l')$  son también rectas perpendiculares.

*Demostración.* Para demostrar el teorema anterior consideramos los siguientes razonamientos:

1. Sea  $d = \|P - Q\|$  y  $U$  un punto sobre el segmento  $PQ$ .  $\|P - U\| = t > 0$  y  $\|U - Q\| = d - t$ . Si  $\varphi(U)$  no está en el segmento de recta  $\varphi(P)\varphi(Q)$  entonces obtendríamos una contradicción via la desigualdad triangular. Esto es,  $d = \|\varphi(P) - \varphi(Q)\| < \|\varphi(P) - \varphi(U)\| + \|\varphi(U) - \varphi(Q)\| = t + (d - t) = d$ . Ahora, debemos probar que todo punto  $V$  sobre el segmento  $\varphi(P)\varphi(Q) \in \text{im } \varphi$ . Note que si  $\|\varphi(P) - V\| = s$ , sea  $U$  un punto sobre  $PQ$  con  $\|P - U\| = s$ . Entonces  $\varphi(U) = V$ , ya que solo hay un punto sobre el segmento  $\varphi(P)\varphi(Q)$  cuya distancia a  $\varphi(P)$  es  $s$ .
2. Para probar el segundo hecho podemos usar el argumento anterior, para observar que cada cateto del triángulo  $\Delta$  se aplica en un cateto del triángulo  $\varphi(\Delta)$ .
3. Para probar el tercer item, consideramos dos rectas perpendiculares  $l, l'$  que se cortan en un punto  $U$  y elegimos dos puntos  $P, Q$  en  $l'$  ambos equidistantes con  $U$ . La recta  $l$  es el conjunto de puntos del plano que equidistan de  $P$  y  $Q$ .

Por lo tanto  $\varphi(l)$  es el conjunto de puntos del plano que equidistan de  $\varphi(P)$  y  $\varphi(Q)$ , por lo que  $\varphi(l)$  bisecta perpendicularmente al segmento  $\varphi(P)\varphi(Q)$ . Pero,  $\varphi(P)$  y  $\varphi(Q)$  están en  $\varphi(l')$ , con lo que  $\varphi(l)$  es perpendicular a  $\varphi(l')$ .  $\square$

### Teorema 3.4.2.

1. *Todo movimiento es una biyección.*
2. *El conjunto  $\mathcal{M}$  de todos los movimientos es un grupo con la composición de funciones.*

*Demostración.* Para probar el primer item, consideramos dos puntos  $P \neq Q$ , entonces  $\|P - Q\| > 0$  si  $\varphi(P) = \varphi(Q)$  entonces  $\|\varphi(P) - \varphi(Q)\| = 0 \neq \|P - Q\|$ . De donde  $\varphi(P) \neq \varphi(Q)$  y  $\varphi$  es por tanto una función uno a uno.

Sea ahora  $V$  un punto arbitrario del plano. Si  $l$  es el eje  $x$  y  $l'$  el eje  $y$  entonces  $\varphi(l)$  y  $\varphi(l')$  son rectas perpendiculares. Ahora si  $V \in \varphi(l) \cup \varphi(l')$ , entonces  $V \in \text{im } \varphi$ .

Si  $V \notin \varphi(l) \cup \varphi(l')$ , elija una recta  $\lambda'$  que pase por  $V$  e intercepte a  $\varphi(l)$  y  $\varphi(l')$

Supongamos que  $\lambda'$  intercepta a  $\varphi(l)$  en  $\varphi(P)$  e intercepta en  $\varphi(Q)$  a  $\varphi(l')$ .

Si  $\lambda$  es la línea determinada por  $P$  y  $Q$  entonces  $\varphi(\lambda)$  es la línea determinada por  $\varphi(P)$  y  $\varphi(Q)$ . Esto es,  $\varphi(\lambda) = \lambda'$ , luego  $V \in \lambda' = \varphi(\lambda) \subset \text{im } \varphi$ . De donde  $\varphi$  es una sobrección.

Probemos ahora que  $\mathcal{M}$  es un subgrupo de  $S_{\mathbb{R}^2}$  el grupo de permutaciones del plano:

La identidad  $i$  es claramente un movimiento. Ahora si  $\varphi$  y  $\varphi'$  son movimientos entonces:

$$\|\varphi'(\varphi(P)) - \varphi'(\varphi(Q))\| = \|\varphi(P) - \varphi(Q)\| = \|P - Q\|.$$

Luego la composición de  $\varphi'\varphi$  es también un movimiento.

Note que como  $\varphi$  es una biyección entonces posee una única inversa  $\varphi^{-1}$ , tal que:

$$\|P - Q\| = \|\varphi(\varphi^{-1}(P)) - \varphi(\varphi^{-1}(Q))\| = \|\varphi^{-1}(P) - \varphi^{-1}(Q)\|.$$

Con lo que  $\varphi^{-1}$  es un movimiento y de esto concluimos que  $\mathcal{M}$  es un grupo.  $\square$

**Teorema 3.4.3.** *La unión de todas las traslaciones y rotaciones con ángulo  $\Psi = 180^\circ$  forman un grupo.*

## 3.2. Transformaciones lineales

**Definición 3.5.** *Una función  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , es una transformación lineal si para cualquier par de puntos  $P, Q \in \mathbb{R}^2$  y todo número  $r \in \mathbb{R}$  se cumple:*

$$T(P + Q) = T(P) + T(Q), \quad T(rP) = rT(P).$$

Por definición se cumple  $T(0 + 0) = T(0) + T(0) = T(0)$ , luego  $T(0) = 0$ .

Note que una transformación lineal conserva combinaciones lineales del tipo  $rP + sQ$ , observe que:

$$T(rP + sQ) = T(rP) + T(sQ) = rT(P) + sT(Q).$$

Con el siguiente teorema, podemos reconocer de forma eficiente el comportamiento de una transformación lineal:

**Teorema 3.5.1.** *Sean  $\varepsilon_1 = (1, 0)$  y  $\varepsilon_2 = (0, 1)$ . Si  $P, Q \in \mathbb{R}^2$ , entonces existe una única transformación lineal*

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ tal que } T(\varepsilon_1) = P, \quad T(\varepsilon_2) = Q.$$

Para probar el teorema anterior, basta observar que todo vector  $U \in \mathbb{R}^2$  se puede escribir de forma única, como una combinación lineal de los vectores  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . Esto es, existen únicos  $s, t \in \mathbb{R}$ , tales que:

$$U = r\varepsilon_1 + s\varepsilon_2.$$

Luego la transformación requerida debe ser tal que:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \text{con} \quad T(W) = r_1P + r_2Q$$

En donde  $W = r_1\varepsilon_1 + r_2\varepsilon_2$ .

**Definición 3.6.** Si  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una transformación lineal con  $T(\varepsilon_1) = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2$ ,  $T(\varepsilon_2) = c\varepsilon_1 + d\varepsilon_2$  entonces la matriz de la transformación tiene la forma:

$$\mu(T) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

En tal caso, podemos decir que si  $T$  y  $T'$  son transformaciones lineales definidas en  $\mathbb{R}^2$  entonces:

La matriz de la composición  $T \circ T'$  es el producto de la matrices correspondientes. Esto es,  $\mu(T \circ T') = \mu(T)\mu(T')$ .

**Ejemplo 3.6.1.** Una rotación  $\Psi$  grados de un objeto en el plano es una transformación lineal cuya matriz tiene la forma:

$$\mu(T) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Con  $a^2 + b^2 = 1$ .

**Ejemplo 3.6.2.** Transformaciones lineales  $T$  definidas en el plano con elementos de la forma ( $a^2 + b^2 \neq 0$ ):

$$\mu(T) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

constituyen un grupo con la composición de funciones.

Note que las transformaciones definidas de esta forma conservan triángulos y paralelismo de rectas.

En el caso  $a^2 + b^2 = 1$  obtendremos una isometría (preserva distancia). Entonces toda reflexión es una isometría.

**Teorema 3.6.1.** El conjunto de todas las simétrías de un conjunto de puntos constituye un grupo.

El conjunto de todas las isometrías del plano constituye un grupo

Un producto de reflexiones es una isometría.

Note que si  $T$  y  $T'$  son rotaciones entonces sus matrices tienen la forma:

$$\mu(T) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad \mu(T') = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$$

Entonces la matriz de la composición tiene la forma:

$$\mu(T \circ T') = \begin{bmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{bmatrix}$$

en donde

$$\begin{aligned} (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 &= a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2adbc + b^2c^2 \\ &= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) = 1. \end{aligned}$$

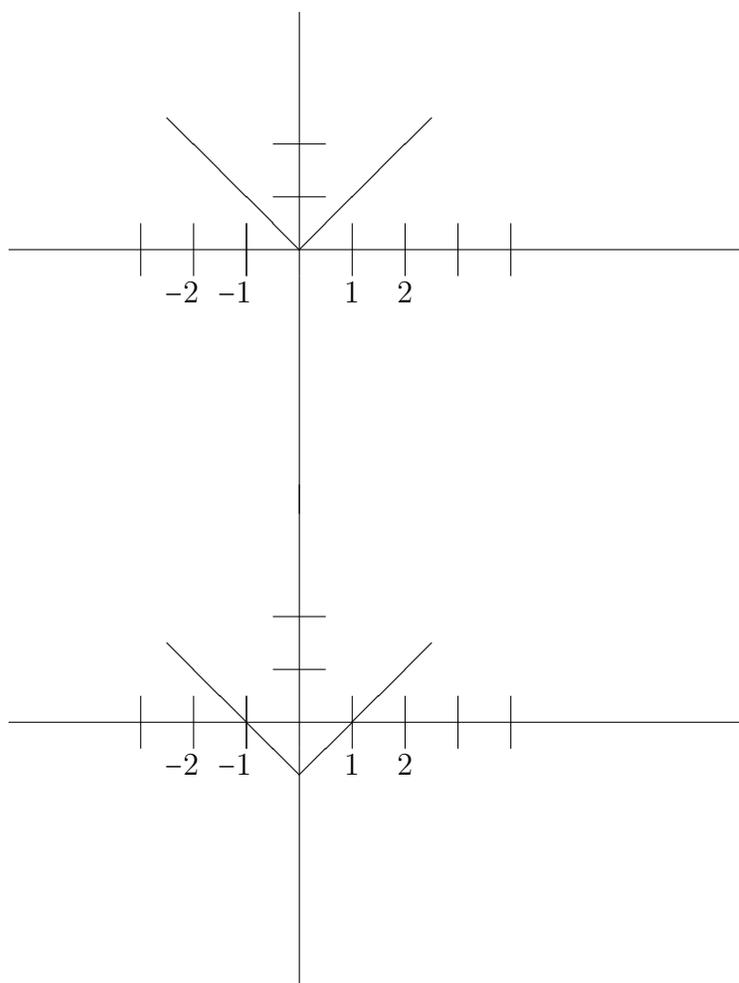
La matriz de  $T^{-1}$  tiene la forma:

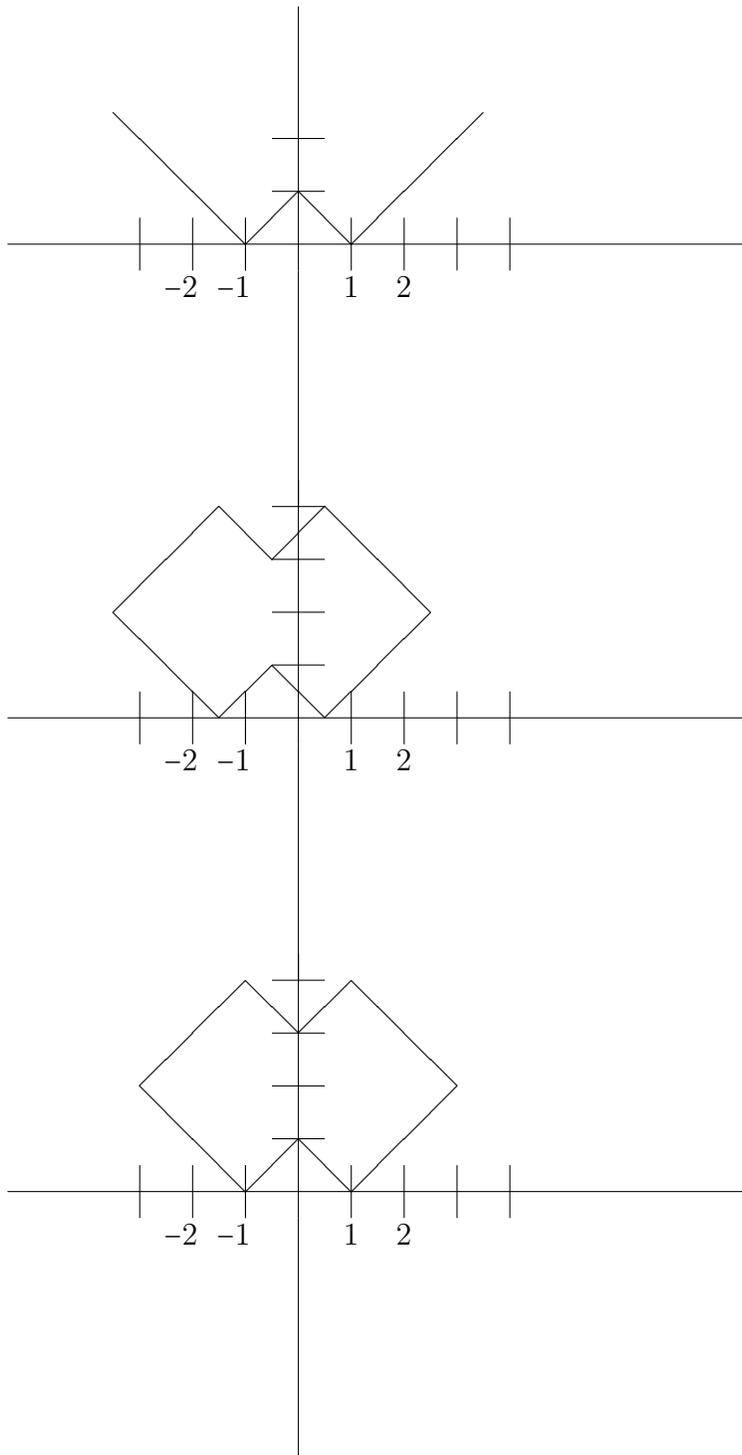
$$\mu(T^{-1}) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

De donde se deduce que  $T^{-1}$  también es una isometría.

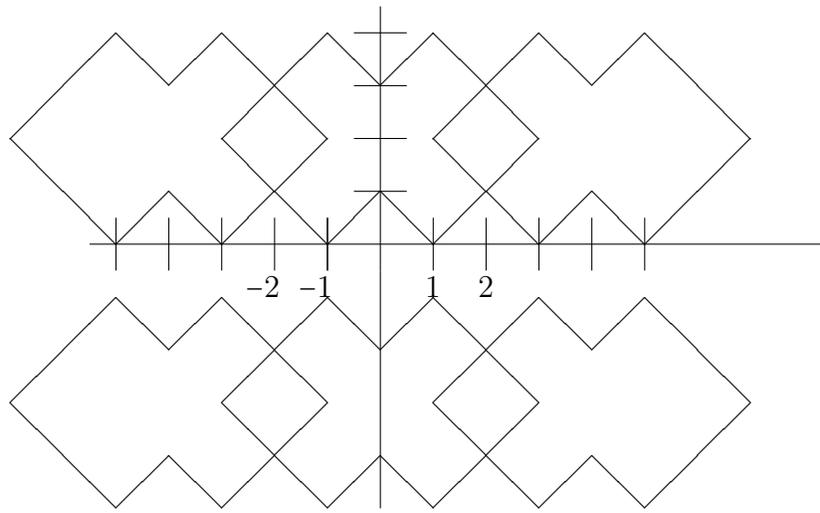
### 3.3. Geometría dinámica

A continuación, describimos conjuntos de traslaciones, reflexiones y traslaciones que nos permiten construir algunos tipos de frisos.





Finalmente después de reflexiones y traslaciones queda la figura



### 3.4. Congruencias

En adelante, denotaremos  $\mathcal{H}$  al conjunto de todas las rotaciones o giros de 180 grados. Nos preguntamos ahora como es el grupo generado por las reflexiones.

Tal pregunta la podemos contestar de la siguiente forma:

Puesto que una reflexión es su propia inversa, podemos inferir que todo elemento en este grupo es un producto de reflexiones. Además, un producto de reflexiones es una isometría.

**Teorema 3.6.2.** *Si una isometría fija dos puntos  $P, Q$  sobre una línea recta, entonces fija todos los puntos de la línea a la cual pertenecen  $P$  y  $Q$ . Si una isometría fija tres puntos no colineales entonces ella debe ser la identidad.*

**Teorema 3.6.3.** *Si  $\alpha$  y  $\beta$  son isometrías tales que:*

$$\alpha(P) = \beta(P), \quad \alpha(Q) = \beta(Q), \quad \alpha(R) = \beta(R)$$

*en donde  $P, Q$  y  $R$  son tres puntos no colineales entonces  $\alpha = \beta$ .*

Para la demostración de este hecho, supongamos que  $\alpha$  y  $\beta$  son isometrías satisfaciendo la condición del teorema. Esto es:

$$\alpha(P) = \beta(P), \quad \alpha(Q) = \beta(Q), \quad \alpha(R) = \beta(R)$$

al multiplicar a izquierda, cada ecuación por  $\beta^{-1}$ , observamos que la aplicación  $\beta^{-1}\alpha$ , fija los puntos  $P, Q$  y  $R$  los cuales son no colineales.

Por el teorema anterior, debemos concluir que  $\alpha\beta^{-1} = id$ , de donde  $\alpha = \beta$ .

**Teorema 3.6.4.** *Una isometría que fija dos puntos es una reflexión o la identidad.*

*Demostración.* Supongamos que una isometría,  $\alpha$  fija dos puntos  $P, Q$  sobre una línea  $m$ . Conocemos dos posibilidades para  $\alpha$ :

1.  $\alpha$  es una reflexión  $\sigma_m$  para la línea  $m$ ,
2.  $\alpha$  es la identidad.

Probemos que estas son las **únicas** posibilidades para  $\alpha$ ;

Supongamos que  $\alpha \neq id$ , entonces hay un punto  $R$  que  $\alpha$  no fija, por lo que  $R$  no está en  $m$ ,  $P, Q$  y  $R$  son puntos no colineales.

Si  $R' = \alpha(R)$  entonces  $PR = PR'$  y  $QR = QR'$ , ya que  $\alpha$  es una isometría; luego  $m$  corta perpendicularmente el segmento de recta  $RR'$ , ya que  $P$  y  $Q$  pertenecen al lugar geométrico de los puntos que equidistan de  $R$  y  $R'$ .

Por lo tanto,  $\alpha(R) = R' = \sigma_m(R)$ , además  $\alpha(P) = P = \sigma_m(P)$  y  $\alpha(Q) = \sigma_m(Q) = Q$ , luego  $\alpha = \sigma_m$ , por el teorema anterior.  $\square$

**Teorema 3.6.5.** *Una isometría que fija exactamente un punto es un producto de dos reflexiones.*

*Demostración.* Supongamos que la isometría  $\alpha$  fija exactamente el punto  $C$ , supongamos ahora que  $P \neq C$  y  $\alpha(P) = P'$

Sea  $m$ , la perpendicular que bisecta el segmento  $\overline{PP'}$ . Puesto que  $CP = CP'$  ya que  $\alpha$  es una isometría, entonces  $C \in m$ ; luego  $\sigma_m(C) = C$  y  $\sigma_m(P) = P'$ . De donde  $\sigma_m\alpha(C) = \sigma_m(C) = C$   $\sigma_m\alpha(P) = \sigma_m(P') = P$ .

Por el teorema anterior  $\sigma_m\alpha = id$  o  $\sigma_m\alpha = \sigma_l$  en donde  $l = CP$ .

Pero  $\sigma_m\alpha \neq id$ , ya que de otra forma  $\alpha$  y  $\sigma_m$  fijarían otros puntos distintos de  $C$ . Luego  $\sigma_m\alpha = \sigma_l$ , para alguna línea  $l$ , multiplicando por  $\sigma_m$ , concluimos  $\alpha = \sigma_l\sigma_m$ .  $\square$

**Corolario 3.6.1.** *Una isometría que fija un punto es a lo más un producto de dos reflexiones.*

*Demostración.*  $id = \sigma_m\sigma_m$  ( $\sigma_m$  es una involución), para cualquier línea  $m$ .  $\square$

**Teorema 3.6.6.** *Un producto de reflexiones es una isometría. Toda isometría es un producto de a lo más tres reflexiones.*

*Demostración.* La identidad es un producto de dos reflexiones.

Supongamos que una isometría  $\alpha$  distinta de la identidad aplica un punto  $P$  a un punto  $Q \neq P$ . Sea  $m$  la línea que bisecta perpendicularmente a  $\overline{PQ}$ . Entonces  $\sigma_m\alpha$  debe ser un producto de a lo más dos reflexiones. Por lo tanto  $\alpha = \sigma_m\beta$ , de donde  $\alpha$  es un producto de a lo más tres reflexiones. Por lo tanto toda isometría  $\alpha$  es un producto de 1,2 o 3 reflexiones.  $\square$

**Teorema 3.6.7.** *Si el triangulo  $\Delta PQR$  es congruente al triangulo  $\Delta ABC$  entonces existe una única isometría,  $\alpha$  tal que:*

$$\alpha(P) = A, \quad \alpha(Q) = B, \quad \alpha(R) = C.$$

Como dos segmentos congruentes cualesquiera se corresponden con lados congruentes de triángulos equiláteros y además dos ángulos congruentes se corresponden con ángulos congruentes de triángulos congruentes, el teorema anterior tiene al siguiente teorema como un corolario inmediato.

**Teorema 3.6.8.** *Dos segmentos, dos ángulos o dos triángulos son respectivamente congruentes si y solo si hay una isometría aplicando uno en el otro.*

Si notamos  $\rho_{(C,\theta)}$  la rotación con ángulo  $\theta$  que deja invariante el punto  $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Esto es:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

entonces:

$$\rho_{(C,0)} = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \text{sen}(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En tales casos diremos que la rotación tiene centro  $C$  y ángulo  $\theta$ . Veamos ahora que toda rotación es una isometría:

Supongamos que  $\rho_{(C,\theta)}$  aplica los puntos  $P$  y  $Q$  en los puntos  $P'$  y  $Q'$  respectivamente.

Si  $C, P$  y  $Q$  son colineales entonces tendremos  $PQ = P'Q'$  por definición. Si  $C, P$  y  $Q$  no son colineales entonces  $\triangle PCQ \cong \triangle P'C'Q'$ , por el criterio LADO-ANGULO-LADO de triángulos congruentes y por lo tanto  $PQ = P'Q'$ . Luego  $\rho_{(C,\theta)}$  es una transformación que conserva la distancia.

Ahora podemos enunciar el teorema de Leonardo da Vinci (1452-1519).

**Teorema 3.6.9.** *Un grupo finito de isometrías es un grupo cíclico  $C_n$  o diédrico  $D_n$ .*

**Definición 3.7.** *Si  $a$  y  $b$  son dos rectas perpendiculares a una línea  $c$  entonces  $\sigma_b\sigma_a$  es una traslación o deslizamiento y  $\sigma_c$  es una reflexión con lo que  $\sigma_c\sigma_b\sigma_a$  es una reflexión con deslizamiento y eje  $c$ .*

## 3.5. Grupos ornamentales

**Definición 3.8.** *Un grupo de isometrías que fija una línea  $c$  y cuyas traslaciones forman un grupo infinito es un grupo friso con centro  $c$ .*

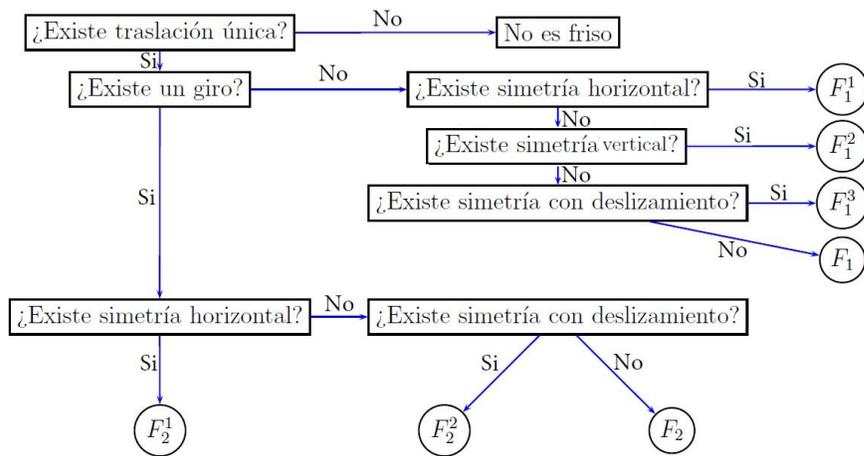
El siguiente teorema describe todos los grupos frisos.

**Teorema 3.8.1.** *Sea  $\mathcal{F}$  un grupo friso con centro  $c$  y cuyo grupo de traslaciones está generado por una traslación  $\tau$ . Si  $\mathcal{F}$  contiene una media vuelta suponga que  $\mathcal{F}$  contiene  $\sigma_A$ . Si  $\mathcal{F}$  contiene una reflexión en una línea perpendicular a  $c$  suponga que  $\mathcal{F}$  contiene  $\sigma_a$  con  $a \perp c$ .*

*Sea  $\gamma$  una reflexión con deslizamiento y eje  $c$  tal que  $\gamma^2 = \tau$ . Entonces  $\mathcal{F}$  es uno de los siguientes 7 grupos:*

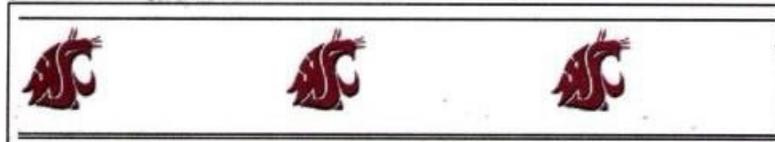
$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 = \langle \tau \rangle, & \quad \mathcal{F}_1^1 = \langle \tau, \sigma_c \rangle, & \quad \mathcal{F}_1^2 = \langle \tau, \sigma_a \rangle, & \quad \mathcal{F}_1^3 = \langle \gamma \rangle, & \quad \mathcal{F}_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle, \\ \mathcal{F}_1^2 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle, & \quad \mathcal{F}_2^2 = \langle \gamma, \sigma_A \rangle. \end{aligned}$$

A continuación se presenta el algoritmo para la clasificación de los grupos de frisos, como lo describe V. Albis en [1].



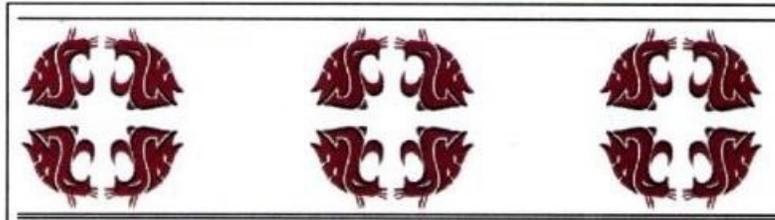
También se presentan ejemplos de estos tipos de grupos

### 3.5.1. $\mathcal{F}_1$



Tomado de [36].

### 3.5.2. $\mathcal{F}_2^1$

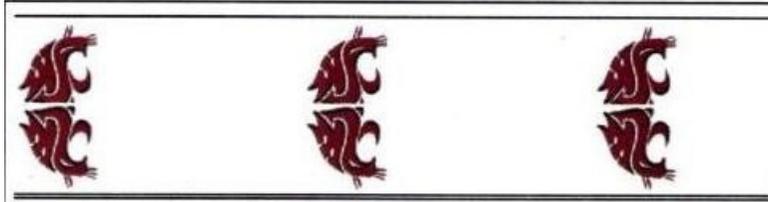


Tomado de [36].

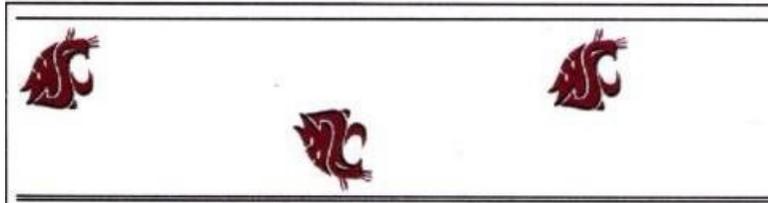
### 3.5.3. $\mathcal{F}_1^2$



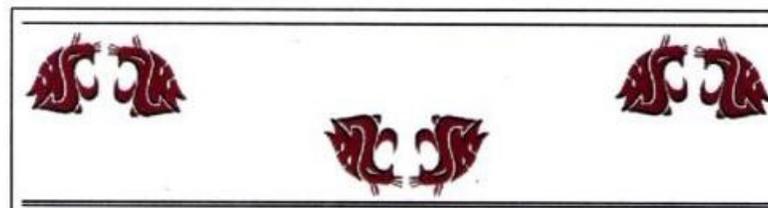
Tomado de [36].

3.5.4.  $\mathcal{F}_1^1$ 

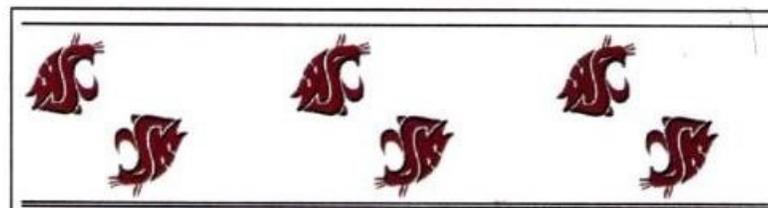
Tomado de [36].

3.5.5.  $\mathcal{F}_1^3$ 

Tomado de [36].

3.5.6.  $\mathcal{F}_2^2$ 

Tomado de [36].

3.5.7.  $\mathcal{F}_2$ 

Tomado de [36].



# Capítulo 4

## Frisos

En este capítulo se describen algunos aspectos de las investigaciones reportadas por J.H Conway y H.M.S Coxeter [11, 13], los conceptos de patrones de frisos mansos, especializados y salvajes [18] y los números de Catalán [43]. Finalmente, se presenta un análisis de la distribución de los números primos en la espiral de Ulam [26, 29, 40, 51].

### 4.1. Introducción

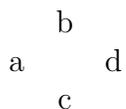
**Definición 4.1.** Sea  $A$  matriz de enteros positivos limitado por diagonales de unos de tal manera que los lados adyacentes de estas diagonales tienen asociadas matrices  $2 \times 2$  con determinante 1.  $A$  es llamada un **patrón de frisos Conway-Coxeter** o simplemente **friso**.

Este concepto fue introducido por Coxeter en [13], y fueron clasificados por primera vez en [11].

La mejor manera de dar una idea de patrones de frisos es a través de un ejemplo.

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	
...			1	2	2	3	1	2	4	1	2	2	3	1	2	2	3	5	...					
			1	3	5	2	1	7	3	1	3	5	...											
...		2	1	7	3	1	3	5	2	1	7	3	...											
		1	2	4	1	2	2	3	1	2	4	...												
...		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...											
			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0...

Aparte de la frontera de ceros y unos, la propiedad esencial es que cada cuatro números adyacentes formando un cuadrado, como se muestra a continuación



Satisface la ecuación unimodular  $ad - bc = 1$ . Por otra parte, se insiste en que todos los números (con excepción de las fronteras de ceros) serán positivos. La conclusión sorprendente es que cada tipo de patrones es periódico. Más precisamente es simétrico por un deslizamiento, es decir, el producto de una traslación horizontal y una reflexión horizontal.

#### 4.1.1. Los símbolos de dos dígitos $(r, s)$ .

Para investigar patrones de frisos en general, encontraremos que es conveniente representar sus elementos por símbolos  $(r, s)$  de la siguiente manera

$$\begin{array}{cccccccc}
 (0,0) & & (1,1) & & (2,2) & & (3,3) & & (4,4) \\
 (-1,1) & (0,1) & (0,2) & (1,2) & (1,3) & (2,3) & (2,4) & (3,4) & (3,5) & \dots \\
 \hline
 & (-1,n-3) & & (0,n-2) & & (1,n-1) & & (2,n) & & \dots \\
 & & (-1,n-2) & & (0,n-1) & & (0,n) & (1,n) & & (1,n+1) & \dots
 \end{array}$$

Las fronteras de ceros y unos se dan por las especificaciones siguientes:

$$(r, r) = 0, \quad (r, r + n) = 0, \quad (r, r + 1) = 1, \quad (r + 1, r + n) = 1$$

También tenemos que  $(r, s) > 0$  para  $r < s < r + n$ , y la regla unimodular

$$(r - 1, s)(r, s + 1) - (r, s)(r - 1)(s + 1) = 1$$

Lo que implica

$$(r, r - 1) = -1, \quad (r - 1, r + n) = -1.$$

Claramente, todo el patrón está determinado por los elementos en una diagonal, como

$$(0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots, (0, n - 1), (0, n).$$

Comenzando con 0 y 1, y terminando con 1 y 0. Por ejemplo,  $(1, 2) = 1$  y el establecimiento de que  $r = 1$ , obtenemos:

$$(1, 3) = \frac{(1, 2)(0, 3) + 1}{(0, 2)}, \quad (1, 4) = \frac{(1, 3)(0, 4) + 1}{(0, 3)}$$

y así sucesivamente, en consecuencia, adoptamos la notación auxiliar

$$f_s = (-1, s), \quad g_s = (0, s)$$

De modo que

$$\begin{aligned}
 f_{-2} &= g_{-1} = f_n = g_{n+1} = -1, \\
 f_{-1} &= g_0 = f_{n-1} = g_n = 0, \\
 f_0 &= g_1 = f_{n-2} = g_{n-1} = 1
 \end{aligned}$$

Luego

$$g_2 = \frac{g_1 f_2 + 1}{f_1}, \quad g_3 = \frac{g_2 f_3 + 1}{f_2}, \quad \dots, \quad g_{n-2} = \frac{g_{n-3} f_{n-2} + 1}{f_{n-3}}$$

Verificamos con facilidad que, para los valores correspondientes de  $r$  y  $s$ , se tiene

$$(r, s) = f_r g_s - f_s g_r$$

De hecho, esta definición de  $(r, s)$ , para todos los enteros  $r$  y  $s$ , implica que

$$\begin{aligned} (r, s)(t, u) + (r, t)(u, s) + (r, u)(s, t) &= 0, \\ (s, r) &= -(r, s), \\ (r-1, s)(r, s+1) - (r, s)(r-1, s+1) - (r-1, r)(s, s+1) &= 0 \end{aligned}$$

Ya que

$$(r-1, s)(r, s+1) - (r, s)(r-1, s+1) = 1 \text{ y } (r-1, r)(s, s+1) = 1$$

En donde la solución general de

$$(r, s)(t, u) + (r, t)(u, s) + (r, u)(s, t) = 0$$

Es

$$(r, s) = f_r g_s - f_s g_r.$$

Para las funciones arbitrarias  $f$  y  $g$ .

## 4.2. Patrones de frisos de enteros

Si todos los números  $(r, s)$  son números enteros, la regla unimodular muestra que cada  $(r, s)$  es coprimo con sus cuatro vecinos [11]. Véase la siguiente figura

$$\begin{array}{ccc} & & b \\ a & & d \\ & c & f \\ & & e \end{array}$$

En donde  $c$  y  $d$  son coprimos, y se tiene que  $ad - bc = 1 = cf - de$  (series de Farey). Luego

$$(a + e)d = (b + f)c,$$

en donde  $c$  divide  $(a + e)$  y  $d$  divide  $(b + f)$

En otras palabras, tres entradas consecutivas en una diagonal, son aquellas en las que el término de la mitad se divide por la suma de los otros dos. A la inversa, si, en un patrón friso,  $a, b, c, d, e$  son números enteros tales

que  $c$  divide  $(a+e)$ , entonces  $(b+f)$  es un entero, y por lo tanto  $f$  es un entero.

Volviendo a la notación de

$$\begin{aligned} f_{-2} &= g_{-1} = f_n = g_{n+1} = -1, \\ f_{-1} &= g_0 = f_{n-1} = g_n = 0, \\ f_0 &= g_1 = f_{n-2} = g_{n-1} = 1 \end{aligned}$$

Inferimos que, si  $f_0, \dots, f_{(n-2)}$  es una secuencia de números enteros empezando y terminando con 1, y si  $f_s \mid (f_{(s-1)} + f_{(s+1)})$  entonces todo  $g_s$  es entero y por tanto, todos  $(r, s)$  son enteros. En otras palabras, un patrón friso consta de números enteros sí y sólo sí la secuencia de generación  $f_0, \dots, f_{(n-2)}$  puede ser  $1, \dots, 1$  o la secuencia de numeradores o denominadores de una serie de Farey.

Varias secuencias pueden yuxtaponerse para hacer uno nuevo; por ejemplo,

$$1, 2, 5, 3, 1 \quad \text{y} \quad 1, 2, 3, 4, 1$$

se pueden combinar para formar

$$1, 2, 5, 3, 1, 2, 3, 4, 1$$

Y por supuesto cada 1 podrá sustituirse por una cadena de cualquier cantidad de unos. Después de elegir  $f_{(s-1)}$  y  $f_s$ , podemos tomar  $f_{(s+1)}$  para hacer  $mf_s - f_{(s-1)}$  para cualquier entero  $m > \frac{f_{s-1}}{f_s}$ , la única dificultad radica en asegurar que, para un patrón de orden  $n$ ,  $f_{n-2} = 1$ .

El siguiente ejemplo (basado en la secuencia anterior) ilustra el hecho de que un patrón de números enteros no incluye necesariamente una diagonal compuesto enteramente de 1 y de 2.

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
	2	3	1	2	5	2	2	1	4	2	2	2	3			
		5	2	1	9	9	3	1	3	7	3	5				
			3	1	4	16	13	1	2	5	10	7	3			
				1	3	7	23	4	1	3	7	23	4			
					1	2	5	10	7	3	1	4	16	13	1	
						1	3	7	3	5	2	1	9	9	3	
							1	4	2	2	3	1	2	5	2	2
								1	1	1	1	1	1	1	1	1
									0	0	0	0	0	0	0	0

### 4.3. Polígonos triangulados y patrones de frisOS

#### 4.3.1. Introducción

Un polígono triangulado es una partición  $p_0p_1 \dots p_{n-1}$  (no necesariamente regulares), en  $n - 2$  triángulos por medio de  $n - 3$  diagonales no cruzadas sea

$a_r$  el número de triángulos en  $P_r$ .

Se puede establecer que

$$a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} = 3(n - 2), \quad 1 \leq a_r \leq n - 2$$

y si  $n > 3$ , hay por lo menos dos iguales a 1, pero no hay dos que tomen este valor de forma consecutiva.

### 4.3.2. Aspectos sobre patrones de frisos

En esta sección se presentan algunos problemas que fueron planteados por Conway y Coxeter en [11].

Desde el punto de vista de la simetría, cada friso pertenece a uno de los siete tipos

- (I) ...  $b$   $b$   $b$   $b$   $b$ ...    ó    ...  $\sqsubset$   $\sqsubset$   $\sqsubset$   $\sqsubset$   $\sqsubset$ ...
- (II) ...  $b$   $p$   $b$   $p$   $b$ ...    ó    ...  $\sqsubset$   $\Gamma$   $\sqsubset$   $\Gamma$   $\sqsubset$ ...
- (III) ...  $b$   $d$   $b$   $d$   $b$ ...    ó    ...  $\vee$   $\vee$   $\vee$   $\vee$   $\vee$ ...
- (IV) ...  $b$   $q$   $b$   $q$   $b$ ...    ó    ...  $N$   $N$   $N$   $N$   $N$ ...
- (V) ...  $b$   $d$   $p$   $q$   $b$ ...    ó    ...  $\vee$   $\wedge$   $\vee$   $\wedge$   $\vee$ ...
- (VI) ...  $c$   $c$   $c$   $c$   $c$ ...    ó    ...  $D$   $D$   $D$   $D$   $D$ ...
- (VII) ...  $o$   $o$   $o$   $o$   $o$ ...    ó    ...  $H$   $H$   $H$   $H$   $H$ ...

Todos estos patrones se pueden desplazar una cierta distancia hacia la derecha o hacia la izquierda sin ser cambiado: son simétrico por traslaciones.

- (I) Son únicamente por simetrías
- (II) El deslizamiento aparece por sí mismo (sin reflexión de las componentes y media vuelta)
- (III) Hay reflexiones sobre algunas líneas verticales
- (IV) Hay algunas medias vueltas: el patrón se ve igual cuando la página se voltea al revés
- (V) Hay dos reflexiones y medias vueltas

El caso (vi) es como en (i), pero con una reflexión extra sobre una línea horizontal.

1. Qué sucede en el caso (vii)?

*Respuesta.* Se combinan todas las simetrías que se han mencionado. Como generadores para el grupo, podemos tomar la reflexión horizontal junto con dos reflexiones verticales  $\square$

2. Qué regla aritmética (relativo a la multiplicación y adición) se satisface con cada uno de estos patrones numéricos?

$$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ 5 & & 3 \\ & 7 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 5 & \\ 3 & & 7 \\ & 4 & \end{array}$$

*Respuesta.* Cuando se gira hacia la derecha a través de 45 grados, estos diamantes se convierten en matrices unimodulares

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

que cumplen con la regla unimodular :

$$(5)(3) - (7)(2) = 1$$

$\square$

## 4.4. Frisos de enteros

**Definición 4.2.** *Es un grupo cíclico infinito, generado por una matriz  $2 \times 2$  de determinante igual a 1. Llamada regla unimodular (regla del diamante).*

Entre las generalizaciones de patrones de frisos que se han introducidos desde su primera aparición están como se plantea en [18]:

- (1) Hay **patrones  $SL_k$ -friso salvaje** (wild) periódicos cuyas entradas son números enteros positivos.
- (2) Hay **patrones  $SL_k$ -friso no periódico** cuyas entradas son números enteros positivos.
- (3) Hay **patrones  $SL_3$ -friso** cuyas entradas son números enteros positivos y con infinitas entradas diferentes.

Por lo general consisten en arreglos de números enteros positivos, por ejemplo:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 13 & 88 & 314 & 25 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 7 & 25 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 138 & 72 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 49 & 138 & 72 & 1 \\ 389 & 203 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 138 & 389 & 203 & 3 \\ 203 & 106 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 72 & 203 & 106 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 17 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 17 & 97 & 40 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 17 \\ 0 & 1 & 7 & 40 & 17 & 6 & 13 & 1 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 6 & 25 & 88 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$



$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 8 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\
4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 8 & 4 & 7 & 1 \\
2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\
3 & 8 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 8 & 4 \\
1 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\
0 & 1 & 3 & 8 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

Es periódico en todas la direcciones, es decir tenemos un friso de enteros positivos  $SL_3$ .

#### 4.4.1. Patrón de frisos mansos (Tame)

Sea  $F$  un patrón de frisos manso, y lo denotamos con

$$F_{i,j}^\ell := \begin{pmatrix} a_{i,j} & \cdots & a_{i,j+\ell-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i+\ell-1,j} & \cdots & a_{i+\ell-1,j+\ell-1} \end{pmatrix}$$

Entonces las matrices  $B_j = F_{i,j}^{-1} F_{i,j+1}$  son todas iguales para  $i, j \in \mathbb{N}$  y son de la forma

$$(c_1, \dots, c_{k-1}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & (-1)^{k+1} \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & (1-)^k c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & -c_{k-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & c_{k-1} \end{pmatrix}$$

donde la última columna tiene signos alternados y  $c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  si el friso es de enteros positivos. Como  $F$  es manso, es periódico con período  $n+k+1$ , por lo tanto la secuencia de la matriz  $B_j$  es periódico, y  $B_1, \dots, B_{n+k+1} = (-1)^{k-1}$ , además, el patrón de friso completo esta determinado de forma unica por por la secuencia de  $B_j$ , y en consecuencia, por una secuencia de  $n+k+1$  tuplas de la forma  $(c_1, \dots, c_{k-1})$ .

#### 4.4.2. Patrón de frisos especializados o especiales

La identidad de mayor utilidad en el contexto de los patrones de frisos  $SL_k$  es la identidad de *Silvestre*: Si denotamos  $D_{i,j}^\ell$  el determinante de los  $\ell \times \ell$  adyacente a la submatriz en la posición  $(i, j)$  en la matriz  $(a_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ , es decir,  $D_{i,j}^\ell = \det F_{i,j}^\ell$ , por lo tanto

$$D_{i,j}^{\ell+1} D_{i+1,j+1}^{\ell-1} = D_{i,j}^\ell D_{i+1,j+1}^\ell - D_{i+1,j}^\ell D_{i,j+1}^\ell; \quad \ell \geq 1 \quad (4.4.1)$$

asumiendo que  $D_{i,j}^0 = 1$ .

**Corolario 4.3.1.** Si  $D_{i,j}^\ell, D_{i+1,j}^\ell, D_{i,j+1}^\ell, D_{i,j}^{\ell+1}, D_{i+1,j+1}^{\ell-1}$  son positivos, entonces  $D_{i+1,j+1}^\ell$  es también positivo.

**Corolario 4.3.2.** Los patrones de frisos especializados  $SL_k$  son también mansos por la ecuación (4.4.1) para

$$\ell = k : D_{i,j}^{k+1} D_{i+1,j+1}^{k-1} = D_{i,j}^k D_{i+1,j+1}^k - D_{i+1,j}^k D_{i,j+1}^k = 1 - 1 = 0$$

Si  $F$  es un patrón de frisos especializados  $SL_k$ , entonces se determina de forma única por cualquier secuencia de  $k - 1$  filas sucesivas.

**Nota:** Reemplazando todas las entradas  $a_{i,j}$  en  $F$  por  $D_{i,j}^{k-1}$  obtenemos un friso doble  $F^\wedge$ . si  $F$  es manso, entonces  $F^\wedge$  es una transposición de la traslación de una copia de  $F$ . Por lo tanto, un patrón de friso manso es especializado sí y solo si es distinto de cero; cabe anotar que hay patrones de frisos mansos que no son especializados. Por ejemplo:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

El arreglo ampliado es periódico en todas las direcciones obteniéndose de esta forma un patrón de frisos enteros, de  $SL_3$  que no es especializado.

**Lema 4.3.1.** Si  $F$  es un patrón de frisos  $SL_k$ , tal que

$$D_{1,j}^\ell > 0 \text{ para todo } \ell = 1, \dots, k-1 \text{ y } j = 1, \dots, n,$$

entonces  $F$  es especializado y por lo tanto es manso y periódico.

*Demostración.* Basta probar que

$$D_{1,j}^\ell > 0 \text{ para todo } \ell = 1, \dots, k-1 \text{ y } j = 1, \dots, n,$$

se cumple para la siguiente secuencia de  $k - 1$  filas del patrón.

Por inducción: Si

$$D_{i,i+j-1}^\ell > 0 \text{ para } \ell = 1, \dots, k-1 \text{ y } j = 1, \dots, n \text{ y } i \geq 1,$$

pero también se cumple para el friso dado por  $(a_{k+1-i,k+1-j})_{i,j}$ .

Así, el mismo argumento muestra que

$$D_{i,i+j-1}^\ell > 0 \text{ para } \ell = 1, \dots, k-1 \text{ y } j = 1, \dots, n \text{ y para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

En particular, el caso  $\ell = k - 1$  implica que  $F$  es especializado.

(I) cuando  $\ell = 2$ , entonces  $D_{1,1}^{\ell-1}$ , y  $D_{1,2}^{\ell-1}$  y  $D_{1,1}^{\ell}$  son positivos por la ecuación

$$D_{1,j}^{\ell} > 0 \text{ para todo } \ell = 1, \dots, k-1 \text{ y } j = 1, \dots, n,$$

Para  $i = 1$ , y  $j = 1$ , y  $\ell = 2$  obtenemos  $D_{2,2}^1 > 0$ .

(II) Ahora podemos seguir a la siguientes entrada  $D_{2,j}^{\ell-1}$ ,  $j \geq 3$ , entonces,  $D_{1,j-1}^{\ell-1}$ ,  $D_{1,j}^{\ell-1}$ ,  $D_{1,j-1}^{\ell}$  son positivos por ser

$$D_{i,i+j-1}^{\ell} > 0 \text{ para } \ell = 1, \dots, k-1, \quad j = 1, \dots, n$$

$D_{2,j-1}^{\ell-1} > 0$  por inducción en (I).

□

**Nota:** A continuación se presenta un tipo de frisos salvajes

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

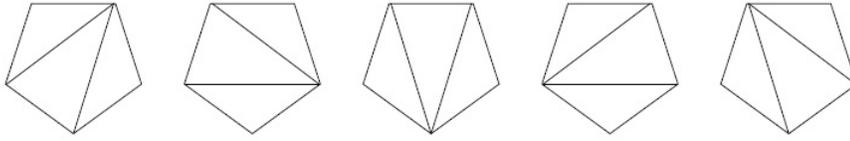
El anterior arreglo es periódico en todas las direcciones, por lo tanto obtenemos un patrón de friso de enteros positivos  $SL_k$  salvaje.

## 4.5. Números de Catalán

Fue el gran Leonhard Euler (1707-1783) la primera persona en calcular los números de Catalán. Alrededor de un siglo después Eugene Catalan (1814-1894), volvería a calcular el número de maneras de triangular un polígono. En su memoria, los números de Catalán llevan hoy en día su nombre. Cabe señalar, que Conway y Coxeter clasificaron completamente los patrones de frisos cuyas entradas son enteros positivos como se indicó en la sección anterior y demostraron que estos patrones de frisos constituyen una manifestación de los números de Catalán. De hecho, ellos probaron que existe una asociación natural entre patrones de frisos de enteros y triangulaciones de polígonos regulados con vértices etiquetados.

### 4.5.1. La recurrencia de Catalán

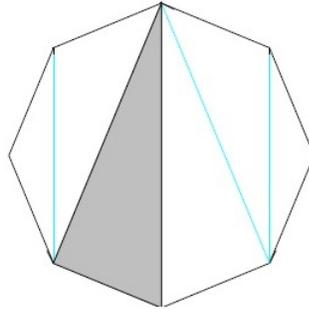
Una triangulación de un polígono es una manera de descomponerlo como una unión disjunta de triángulos, cuyos vértices coinciden con los del polígono. Es fácil ver que para triangular un polígono con  $n + 2$  vértices se necesitan exactamente  $n$  triángulos (y viceversa). Por ejemplo, en la siguiente Figura se ilustra las cinco triangulaciones de un pentágono, cada una de ellas construida utilizando exactamente tres triángulos.



Podemos triangular un triángulo de una única manera, un cuadrado de dos maneras, un pentágono de cinco maneras, y un hexágono de catorce maneras diferentes. El problema se complica cada vez que aumentamos el número de lados del polígono. En esta sección presentaremos una recurrencia que nos permite calcular estos valores fácilmente.

Sea  $C_n$  el número de maneras de descomponer un polígono utilizando exactamente  $n$  triángulos. Procedemos por inducción en  $n$  para calcular  $C_n$ . Supongamos que sabemos triangular todos los polígonos con un máximo de  $n + 2$  lados, y con esta información triangulemos un polígono con  $n + 3$  lados. (El problema es trivial si tenemos un sólo triángulo).

Procedemos de la siguiente manera. Primero escogemos un lado del polígono de vértices  $1, 2, \dots, n + 3$ . el lado sería el que une a los vértices  $1$  y  $n + 3$ . Este lado pertenece a un único triángulo en nuestra triangulación,  $T_i$ , cuyo tercer vértice  $i$  pertenece al conjunto  $\{2, 3, \dots, n + 2\}$ . ver la figura



Eliminando al triángulo  $T_i$  de nuestro polígono, obtenemos dos nuevos polígonos que se encuentran triangulados. El primero de ellos tiene como vértices a los números  $1, 2, \dots, i$ , y en consecuencia, puede ser triangulado de  $C_{i-1}$  maneras diferentes. El segundo polígono tiene como vértices a los números  $i, i + 1, \dots, n + 3$ , y en consecuencia puede ser triangulado de  $C_{n-i+2}$  maneras distintas. Ambas elecciones son independientes. Así que el número de maneras de triangular al polígono (que contienen al triángulo  $T_i$ ) es  $C_{i-2}C_{n-i+2}$ .

Al variar al tercer vértice del triángulo  $T_i$  sobre todos los valores posibles,  $2, 3, \dots, n + 2$ , obtenemos la recurrencia de Catalán;

$$C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + \dots + C_{n-1}C_1 + C_nC_0.$$

Nótese que se supone que  $C_0 = 1$ .

La recurrencia de Catalán nos permite inferir que:

$$C_n = \left( \frac{1}{n+1} \right) \binom{2n}{n}, \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Los primeros diez números de catalán son los siguientes:

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \dots$$

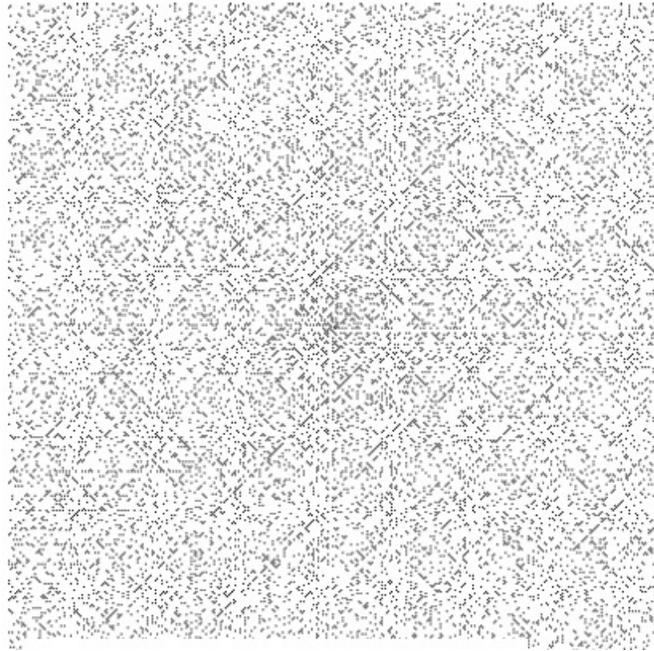
## 4.6. Análisis de la distribución de los números primos en espirales

### 4.6.1. Espiral de Ulam

La espiral de Ulam es un patrón de números de enteros positivos. Fue descubierto en 1963 por **Stanislaw Ulam**, era un matemático con un instinto para encontrar la simplicidad en la complejidad, desarrolló muchas herramientas matemáticas, como es el caso de su famosa espiral. **Stanislaw Ulam** como se plante en [26, 29, 40, 51], aburrido en una reunión científica, decidió ubicar los enteros positivos en una cuadrícula. A partir del 1 en el medio y en espiral hacia fuera del centro. Encontró que los números primos tienden a alinearse en diagonal, como se muestra en la siguiente figura.

43	42	41	40	39	38	37
44	21	20	19	18	17	36
45	22	7	6	5	16	35
46	23	8	1	4	15	34
47	24	9	2	3	14	33
48	25	10	11	12	13	32
49	26	27	28	29	30	31
50	51	<i>etc</i>				

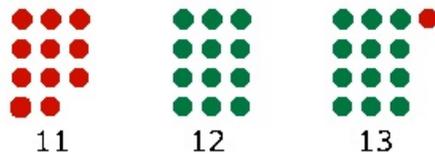
A continuación se muestra una espiral Ulam que contiene un total de 160,000 números enteros. Los números primos son los píxeles negros. Hay 14,683 números primos en esta espiral de Ulam.



Tomado de [29].

Estas espirales permiten visualizar patrones relativos a las características de los números primos para ser descubiertos, puede de hecho estimular la imaginación matemática e inspirar a más intentos creativos de reconocimiento de patrones visuales en esta área. pero, la espiral de Ulam como sus derivados, aún tiene que ser interpretadas con éxito en términos de principios aritméticos posibles que puedan explicar con exactitud la génesis de la aún desconocida distribución de los números primos.

La espiral de Ulam, sin embargo, corrobora la intuición de que toda la cuestión de primalidad, articulado sobre la base de un producto aritmético de dos factores, es inherente a una problemática en dos dimensiones, en la que un par de factores junto con su producto puede ser entendido como una longitud, un ancho y un área en forma discreta cuantificados en unidades enteras de espacio de dos dimensiones, como se muestra en el siguiente ejemplo.



Tomado de [29].

En la figura anterior, se muestra dos primos y su vecino común en dos dimensiones. los primos de 11 y 13: no importa cuántas permutaciones uno intenta, reorganizar sus elementos componente en diferentes filas y columnas, uno nunca llega a una configuración rectangular.



# Capítulo 5

## Aspectos Pedagógicos

### 5.1. Introducción

La población de estudio para del presente trabajo de grado, está conformado por 25 estudiantes del grado sexto, entre los 10 y 12 años de edad, de la jornada tarde del Colegio Distrital Bravo Páez, ubicado en el Barrio Quiroga de la localidad Rafael Uribe. La propuesta didáctica se desarrolló en una única sesión de 4 horas.

La intervención en el aula se orientó de acuerdo a las siguientes disposiciones:

1. Se utilizó la espiral de Ulam y un friso de números enteros positivos con el fin de abordar a través de éstos, conceptos de divisibilidad y factorización de números enteros positivos, a través de preguntas orientadoras, que permitan a los estudiantes ver, describir, decir y registrar; regularidades, patrones y generalidades.
2. Se realizó el análisis sobre el trabajo desarrollado por los estudiantes durante la sesión, con el fin de identificar los argumentos surgidos utilizando el modelo argumentativo de Toulmin [31].

Por otra parte, la clasificación de los enteros positivos en primos y compuestos ha sido unos de los problemas de gran interés para la comunidad académica y en el ámbito curricular a nivel de la secundaria. Se constituye además, en un problema didáctico pues los docentes, no conocen una estrategia que les permita trabajar con los estudiantes el concepto de divisibilidad, diferente a la de plantear una lista de criterios sin ningún contexto matemático, que en el mejor de los casos, son aprendidos de memoria por los estudiantes..

### 5.2. Razonamiento

Para el desarrollo de esta propuesta de trabajo de grado, es pertinente aclarar que se entiende por razonamiento y específicamente como se caracteriza el razonamiento matemático.

Balacheff [3] considera el razonamiento como una actividad intelectual no completamente explícita cuya función es la de manipular la información dada o adquirida, para generar una nueva información. Es claro que el razonamiento es una actividad intelectual que se hace totalmente evidente en la medida que se expresan las ideas, las creencias de lo que se considera como cierto, en el desarrollo del problema propuesto.

El proceso de razonamiento, según los Estándares en Matemáticas [34] está relacionado con el reconocimiento de regularidades y relaciones; el planteamiento de predicciones y conjeturas; la justificación o refutación de esas conjeturas; las explicaciones coherentes; el proponer interpretaciones y respuestas posibles de un interrogante o problema y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones. Todo lo anterior entendido como un conjunto de indicadores que permite dar cuenta de cómo se va desarrollando dicho proceso en el estudiante, y de qué manera se puede fortalecer desarrollando tareas que impliquen motivar la actividad mental de razonar.

El Ministerio de Educación, cataloga como tipos de razonamientos el lógico inductivo y abductivo para situaciones en las cuales se quiera formular hipótesis o conjeturas, y el lógico deductivo que permite demostrar una proposición a partir de otras ya aceptadas como teoremas, axiomas, postulados o principios, o, refutar una proposición por carecer de lógica y sentido haciendo uso de otras proposiciones, o basándose en el planteamiento y análisis de contraejemplos.

### 5.3. Modelo reducido de Toulmin

Para el caso de nuestros intereses la construcción de los argumentos se basará en tres elementos fundamentales expuestos claramente por Toulmin [31] en su libro **Los usos de la argumentación**: La(s) garantía(s) y la aserción o conclusión son sus elementos fundamentales. Se hace necesario definir cada uno de los tres componentes fundamentales del argumento desde el modelo Toulmin.

- 1 **La aserción.** Es aquello que se va a defender, debatir, en forma oral o escrita.
- 2 **La evidencia o datos.** La evidencia aporta la razón (información) en la que la aserción se basa y está formada por hechos o condiciones que son observables. La evidencia es significativa porque establece la base de toda la argumentación.
- 3 **La garantía.** La garantía implica verificar que las bases de la argumentación sean las apropiadas. Brinda la lógica para la transición de la evidencia a la aserción. Justifica la importancia de la evidencia. Por ser la garantía una categoría de la argumentación que establece la relación entre la evidencia y la aserción, expresa el momento en el que la audiencia (estudiantes y docente) puede disentir de la conclusión a la cual se quiere arribar.

# Capítulo 6

## Análisis de resultados y conclusiones

En este capítulo se presenta el análisis y las conclusiones de la información obtenida de la propuesta didáctica desarrollada por parte de los estudiantes del grado sexto. Los argumentos surgidos en este proceso se describen usando el modelo reducido de Toulmin.

A continuación se muestran algunos argumentos y algunas fotografías como evidencia del trabajo desarrollado por los estudiantes.

## 6.1. Con respecto a la primera pregunta de la actividad

### Argumento 1

DATOS												
Dado el siguiente friso												
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
	1											
		1										
			3									
				2								
					1							
						2						
							1					
								1				
									1			
										1		
											1	
												1



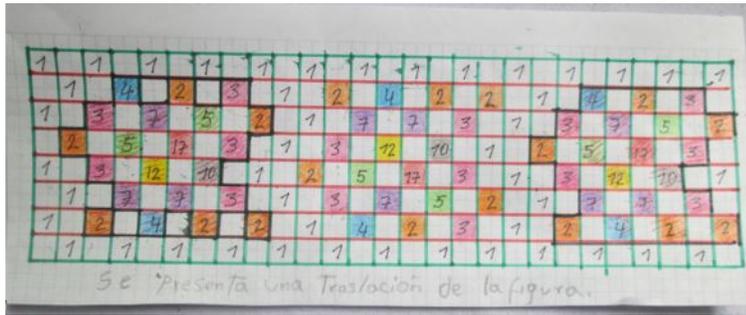
GARANTÍA	
Se utiliza la regla unimodular	
b	d
a	c
Es decir $ad - bc = cf - de = 1$	



ASERCIÓN										
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
	1	2	4	1	2	4	1	2	4	
3	1	7	3	1	7	3	1	7	3	...
	2	3	5	2	3	5	2	3	5	
3	5	2	3	5	2	3	5	2	3	...
	7	3	1	7	3	1	7	3	1	
2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	...
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Es un patrón de frisos de orden 7

## 6.2. Con respecto a la segunda pregunta



Fotografía de patrón de frisos por traslación

### Argumento 2

DATOS

Completar el siguiente friso multiplicativo

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1															
1		4		2		3		7		2		4		2		2		7		4		2		3		7		3		5		7		
1	3		7		5		2		7		7		2		3		7		3		7		3		7		3		5		7			
1		2		5		12		3		7		3		12		10		7		2		5		12		3		7		3		7		
1	3		12		10		7		2		5		7		3		7		3		7		3		7		3		7		3		7	
1		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		
1	2		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7	
1		2		4		2		3		2		3		2		3		2		3		2		3		2		3		2		3		2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	



GARANTÍA

Se utiliza la regla unimodular

b	d
a	c

Es decir  $ad - bc = 1$



ASERCIÓN

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		4		2		3		7		2		4		2		2		7		4		2		3		7		3		5		7					
1	3		7		5		2		7		7		2		3		7		3		7		3		7		3		5		7						
1	2		5		12		3		7		3		12		10		7		2		5		12		3		7		3		7						
1		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7					
1	2		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7		7						
1		2		4		2		3		2		3		2		3		2		3		2		3		2		3		2		3		2			
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		

La figura se mueve por traslación

### 6.3. Con respecto a la tercera pregunta de la actividad

(Ver apéndice A)

#### Argumento 3.

DATOS													
Dado el siguiente friso													
...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
...		1	2	2	3	1	2	4	3	1	2	2	3
...			1	3	5	2	1	7	3	1	3	5	...
...		2	1	7	3	1	3	5	2	1	7	3	...
...			1	2	4	1	2	2	3	1	2	4	...
...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...



**GARANTÍA**  
Teniendo en cuenta la Serie de Farey

	b	
a	d	
	c	f
	e	

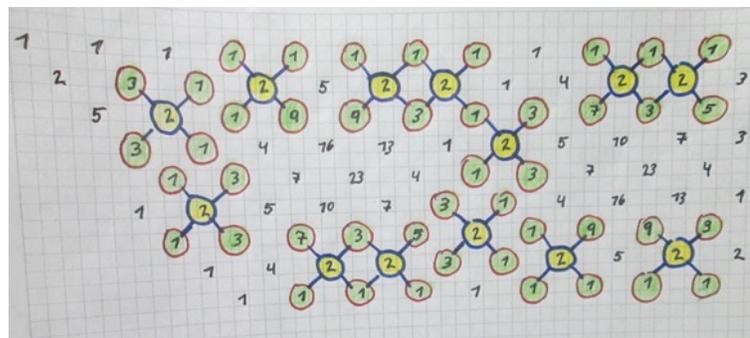
En donde  $c$  y  $d$  son coprimos, se tiene que:  
 $ad - bc = cf - de = 1$   
 Luego se tiene la igualdad  
 $(a + e)d = (b + f)c$   
 Se tiene que  $c$  divide a  $(a + e)$  y  $d$  divide a  $(b + f)$   
 En otras palabras, tres entradas (números) consecutivas en una diagonal, son aquellas en las que el término de la mitad se divide por la suma de los otros dos.



**ASERCIÓN**  
Se concluye que los números divisibles por 2 son:

**2, 4, 6, 8, 10.**

- $\frac{(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$
- $\frac{(1+3)}{2} = \frac{4}{2} = 2$
- $\frac{(1+5)}{2} = \frac{6}{2} = 3$
- $\frac{(7+1)}{2} = \frac{8}{2} = 4$
- $\frac{(1+9)}{2} = \frac{10}{2} = 5$



Fotografía de los números divisibles por 2.

### Argumento 4

DATOS												
Dado el siguiente friso												
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
...	1	2	2	3	1	2	4	1	2	2	3	
		1	3	5	2	1	7	3	1	3	5	...
...	2	1	7	3	1	3	5	2	1	7	3	
		1	2	4	1	2	2	3	1	2	4	...
...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	



**GARANTÍA**  
 Teniendo en cuenta la Serie de Farey

	b	
a	d	
	c	f
	e	

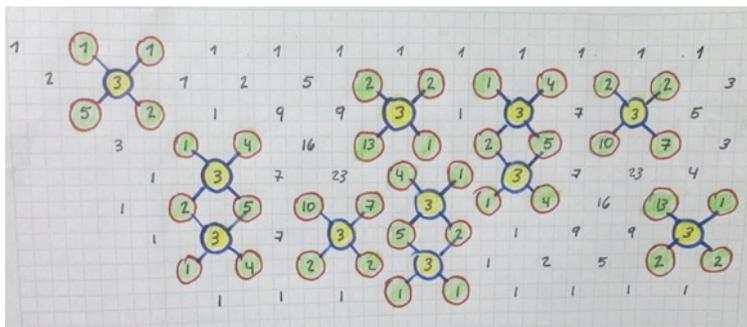
En donde  $c$  y  $d$  son coprimos, se tiene que:  
 $ad - bc = cf - de = 1$   
 Luego se tiene la igualdad  
 $(a + e)d = (b + f)c$   
 Se tiene que  $c$  divide a  $(a + e)$  y  $d$  divide a  $(b + f)$   
 En otras palabras, tres entradas (números) consecutivas en una diagonal, son aquellas en las que el término de la mitad se divide por la suma de los otros dos.



**ASERCIÓN**  
 Se concluye que los números divisibles por 3 son:

**3, 6, 9, 12, 15**

- $\frac{(2+1)}{3} = \frac{3}{3} = 1$
- $\frac{(5+1)}{3} = \frac{6}{3} = 2$
- $\frac{(2+7)}{3} = \frac{9}{3} = 3$
- $\frac{(10+2)}{3} = \frac{12}{3} = 4$
- $\frac{(13+2)}{3} = \frac{15}{3} = 5$



Fotografía de los números divisibles por 3.



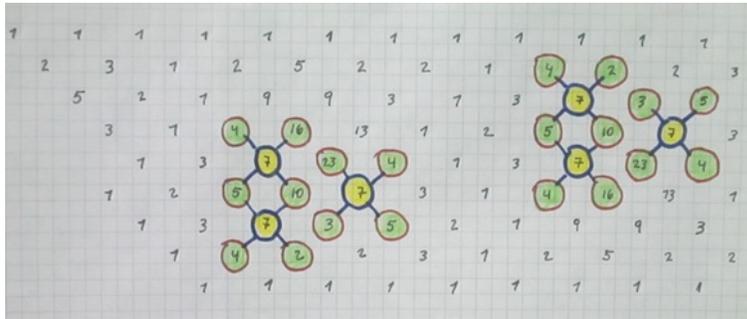


Figura 6.2: Fotografía de los números divisibles por 7.

### Argumento 6

DATOS												
Dado el siguiente friso												
...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
...		1	2	2	3	1	2	4	1	2	2	3
...			1	3	5	2	1	7	3	1	3	5
...				1	7	3	1	3	5	2	1	7
...					1	4	1	2	2	3	1	2
...						1	1	2	3	1	2	4
...							1	1	1	1	1	1



**GARANTÍA**  
 Teniendo en cuenta la Serie de Farey

	b	
a	d	
	c	f
	e	

En donde  $c$  y  $d$  son coprimos, se tiene que:  
 $ad - bc = cf - de = 1$   
 Luego se tiene la igualdad  
 $(a + e)d = (b + f)c$   
 Se tiene que  $c$  divide a  $(a + e)$  y  $d$  divide a  $(b + f)$   
 En otras palabras, tres entradas (números) consecutivas en una diagonal, son aquellas en las que el término de la mitad se divide por la suma de los otros dos.



**ASERCIÓN**  
 Se concluye que los números divisibles por 7 son:

**7, 14, 21, 28.**

- $\frac{(5+2)}{7} = \frac{7}{7} = 1$
- $\frac{(4+10)}{7} = \frac{14}{7} = 2$
- $\frac{(5+16)}{7} = \frac{21}{7} = 3$
- $\frac{(23+5)}{7} = \frac{28}{7} = 4$

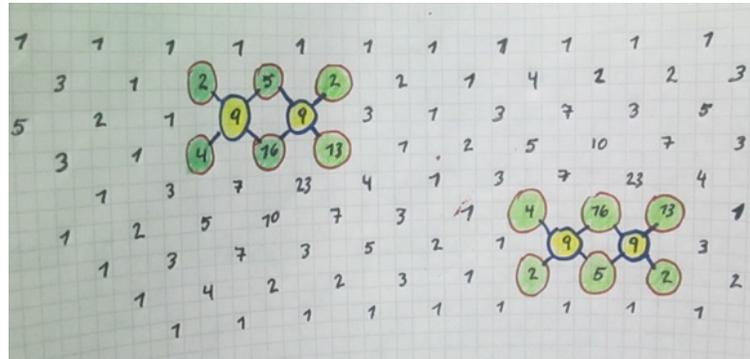


Figura 6.3: Fotografía de los números divisibles por 9.

### Argumento 7

DATOS												
Dado el siguiente friso												
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
...		1	2	2	3	1	2	4	1	2	2	3
			1	3	5	2	1	7	3	1	3	5
...				2	7	3	1	3	5	2	1	7
					1	2	2	3	1	2	4	...
...						1	1	1	1	1	1	1



**GARANTÍA**  
 Teniendo en cuenta la Serie de Farey

	b	
a		d
	c	f
	e	

En donde  $c$  y  $d$  son coprimos, se tiene que:  
 $ad - bc = cf - de = 1$   
 Luego se tiene la igualdad  
 $(a + e)d = (b + f)c$   
 Se tiene que  $c$  divide a  $(a + e)$  y  $d$  divide a  $(b + f)$   
 En otras palabras, tres entradas (números) consecutivas en una diagonal, son aquellas en las que el término de la mitad se divide por la suma de los otros dos.



**ASERCIÓN**  
 Se concluye que los números divisibles por 9 son:

**9, 18**

- $\frac{(4+5)}{9} = \frac{9}{9} = 1$
- $\frac{(5+13)}{9} = \frac{18}{9} = 2$

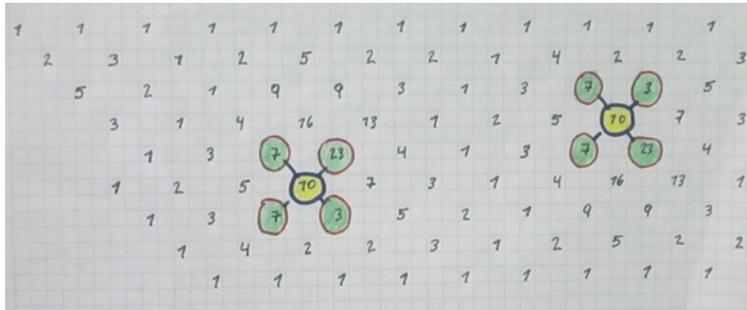


Figura 6.4: Fotografía de los números divisibles por 10.

### Argumento 8

DATOS												
Dado el siguiente friso												
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
...		1	2	2	3	1	2	4	1	2	2	3
		1	3	5	2	1	7	3	1	3	5	...
...		2	1	7	3	1	3	5	2	1	7	3
		1	2	4	1	2	2	3	1	2	4	...
...		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1



**GARANTÍA**  
 Teniendo en cuenta la Serie de Farey

	b	
a	d	
	c	f
	e	

En donde  $c$  y  $d$  son coprimos, se tiene que:  
 $ad - bc = cf - de = 1$   
 Luego se tiene la igualdad  
 $(a + e)d = (b + f)c$   
 Se tiene que  $c$  divide a  $(a + e)$  y  $d$  divide a  $(b + f)$   
 En otras palabras, tres entradas (números) consecutivas en una diagonal, son aquellas en las que el término de la mitad se divide por la suma de los otros dos.



**ASERCIÓN**  
 Se concluye que los números divisibles por 10 son:

**10, 30.**

- $\frac{(7+3)}{10} = \frac{10}{10} = 1$
- $\frac{(7+23)}{10} = \frac{30}{10} = 3$

## 6.4. Con respecto a la cuarta pregunta de la actividad

(Ver apéndice A)

### Argumento 9.

DATOS							
Dado la espiral de Ulam							
43	42	41	40	39	38	37	
44	21	20	19	18	17	36	
45	22	7	6	5	16	35	
46	23	8	1	4	15	34	
47	24	9	2	3	14	33	
48	25	10	11	12	13	32	
49	26	27	28	29	30	31	
50	51	<i>etc</i>					

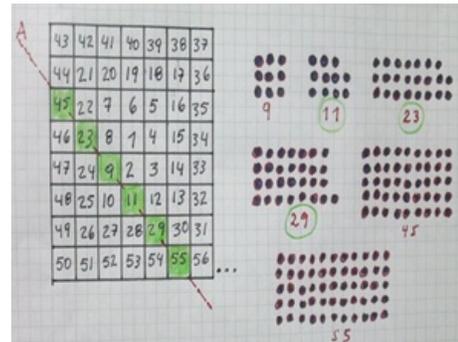


#### GARANTÍA

- Los números primos no pueden ser expresados como el producto de la longitud por el ancho de un rectángulo.
- Los números compuestos pueden disponerse de distintas maneras para formar un rectángulo o un cuadrado.



#### ASERCIÓN



En la diagonal A, los números primos son: 11, 23 y 29.

**Argumento 10.**

DATOS							
Dado la espiral de Ulam							
43	42	41	40	39	38	37	
44	21	20	19	18	17	36	
45	22	7	6	5	16	35	
46	23	8	1	4	15	34	
47	24	9	2	3	14	33	
48	25	10	11	12	13	32	
49	26	27	28	29	30	31	
50	51	<i>etc</i>					



GARANTÍA
<ul style="list-style-type: none"> <li>Los números primos no pueden ser expresados como el producto de la longitud por el ancho de un rectángulo.</li> <li>Los números compuestos pueden disponerse de distintas maneras para formar un rectángulo o un cuadrado.</li> </ul>



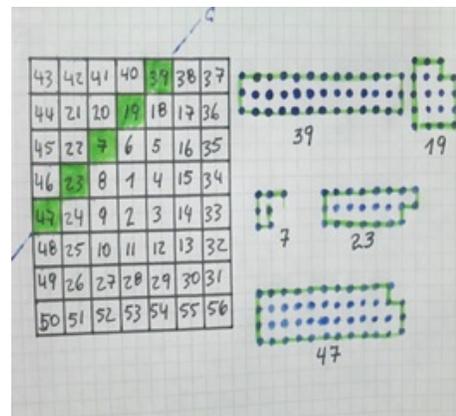
ASERCIÓN
<p>En la diagonal <math>B</math> Los números primos son: 13, 29 y 53.</p>

**Argumento 11.**

DATOS							
Dado la espiral de Ulam							
43	42	41	40	39	38	37	
44	21	20	19	18	17	36	
45	22	7	6	5	16	35	
46	23	8	1	4	15	34	
47	24	9	2	3	14	33	
48	25	10	11	12	13	32	
49	26	27	28	29	30	31	
50	51	<i>etc</i>					

**GARANTÍA**

- Los números primos no pueden ser expresados como el producto de la longitud por el ancho de un rectángulo.
- Los números compuestos pueden disponerse de distintas maneras para formar un rectángulo o un cuadrado.

**ASERCIÓN**

En la diagonal  $C$  Los números primos son: 7, 19, 23 Y 47.

## 6.5. Conclusiones

1. Los estudiantes mediante la observación lograron ver y registrar argumentos utilizando el modelo argumentativo de Toulmin.
2. Los estudiantes participaron espontáneamente en la actividad sin el temor a equivocarse y corregir sus errores.
3. Los conceptos de divisibilidad y factorización de los números enteros positivos fueron abordados mediante una nueva estrategia didáctica, distinta a los planteados en los textos escolares.
4. Se utilizó la serie de Farey para encontrar algunos criterios de divisibilidad en el friso de números de enteros positivos.
5. En la propuesta pedagógica se utilizó la espiral de Ulam para mostrar a los estudiantes del grado sexto que en el estudio y análisis de la primalidad, ocurren situaciones interesantes tales como que los números primos al parecer se encuentran aglomerados en algunas diagonales de la espiral.
6. Se recomienda a las personas que deseen reproducir las actividades del presente trabajo que exploren otras simetrías ocultas que se pudiesen presentar en los frisos de números enteros positivos, mediante la utilización de generadores de frisos numéricos. Como por ejemplo el que se presenta en el blog Guirnalda Matemática.



# Apéndice A

## Propuesta Didáctica



**COLEGIO "BRAVO PÁEZ"**  
INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL  
NIT. 860.532.422-8 – CÓDIGO DANE: 11100112614  
Resolución de Integración No. 2589 de Agosto 28 de 2002 y  
Resolución Aclaratoria No. 1879 del 30 de Mayo de 2008



Nombre: \_\_\_\_\_ Curso: 601 J.T Fecha: febrero del 2016

### Objetivo

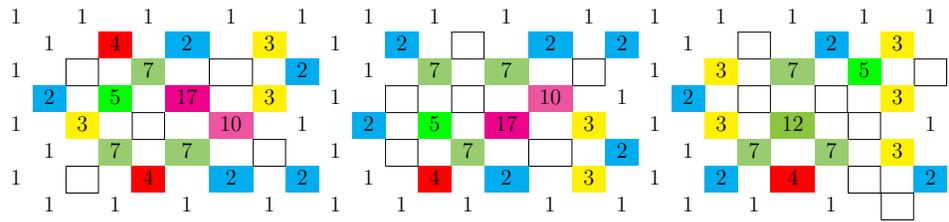
Analizar un tipo especial de friso de enteros positivos como herramienta didáctica para abordar los conceptos de divisibilidad y la factorización de los números enteros positivos.

### Actividad

1. ¿Cómo debe continuar el patrón de acuerdo a la regla unimodular?  
¿Cuál es su orden?

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
	1												
		1											
			3										
				2									
					1								
						2							
		...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...

2. Completar el siguiente friso multiplicativo



- I. Determina patrones de frisos que se puedan visualizar en el arreglo anterior.
- II. ¿Qué tipos de simetrías se observan en los patrones de frisos encontrados en I?

3. Observa el siguiente arreglo

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1				
	2	3	1	2	5	2	2	1	4	2	2	3					
		5	2	1	9	9	3	1	3	7	3	5					
			3	1	4	16	13	1	2	5	10	7	3				
				1	3	7	23	4	1	3	7	23	4				
					1	2	5	10	3	7	16	13	1				
						1	3	7	3	5	2	1	9	3			
							1	4	2	2	3	1	2	5	9	2	3
								1	1	2	1	1	2	1	5	2	2
									1	1	1	1	1	1	1	1	1

Teniendo en cuenta la serie de Farey

$$\begin{array}{ccc}
 & & b \\
 & a & d \\
 & & c \quad f \\
 & & & e
 \end{array}$$

En donde  $c$  y  $d$  son coprimos, se tiene que  $ad - bc = cf - de = 1$ .  
Luego se tiene la identidad

$$(a + e)d = (b + f)c,$$

Se tiene que  $c$  divide a  $(a + e)$  y  $d$  divide a  $(b + f)$ . En otras palabras, tres entradas (números) consecutivas en una diagonal, son aquellas en las que el término de la mitad se divide por la suma de los otros dos.  
¿Qué números son divisibles por

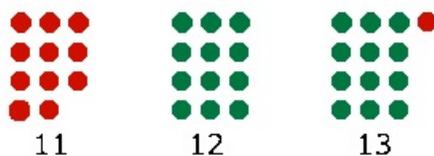
2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 13, 16, 23?

¿Qué tipos de simetrías (reflexiones, rotaciones o traslaciones) se presentan en los números divisibles por 2,3,4,7,9,10,13,16,23?

4. Observa la espiral de Ulam

43	42	41	40	39	38	37
44	21	20	19	18	17	36
45	22	7	6	5	16	35
46	23	8	1	4	15	34
47	24	9	2	3	14	33
48	25	10	11	12	13	32
49	26	27	28	29	30	31
50	51	<i>etc</i>				

Teniendo en cuenta que los números primos NO se pueden representar como el producto de longitud por el ancho de un rectángulo o un cuadrado como por ejemplo



Se observa que no importa como uno quisiera acomodar los puntos en los números primos 11 y 13 (son números primos), no se podrá lograr formar un rectángulo o un cuadrado, pero en cambio con el 12, no hay ningún problema.

De la espiral de Ulam, utilizando la misma estrategia, identifica cuales son números primos.



# Bibliografía

- [1] V. S. Albis and C. Samper Mejía, *Simetrías y arqueología*, Universidad Nacional de Colombia, 2011.
- [2] P. Alegría, *La simetrías y el teorema enorme*.
- [3] N. Balacheff, *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*, 2000.
- [4] F. Barrera Mora, *Introducción a la teoría de grupos*, Uaeh, 2004.
- [5] H. G. Bateman P. T. and Diamond, *A hundred years of prime numbers*, Amer. Math. Monthly **103** (1996), no. 9.
- [6] F. Beaucoup, P. Borwein, D. Boyd, and C. Pinner, *Multiple roots of  $[-1, 1]$  power series*, 1998.
- [7] J. Borwein and P. Borwein, *On the generating function of the integer part:  $[nu + y]$* , J. Number Theory **43** (1993).
- [8] P. Borwein and L. Jorgenson, *Visible structures in number theory*, American Mathematical Monthly (2001), 897–910.
- [9] F. Calcerrada, *Las matemáticas y la arquitectura*.
- [10] J. P. Chavero, *Generación de teselaciones periódicas: grupos de friso y de roseta*.
- [11] J. H. Conway and H. S. M. Coxeter, *Triangulated polygons and frieze patterns*, The Mathematical Gazette, 1973.
- [12] C. M. Cordes and D. P. Roselle, *Generalized frieze patterns*, Duke Math. J. **39** (1972), 637–648.
- [13] H. S. M. Coxeter, *Frieze patterns*, Acta arithmetica **1** (1971), no. 18, 297–310.
- [14] ———, *Fundamentos de geometría*, Limusa, 1984.
- [15] ———, *Cyclic sequences and frieze patterns*, The Ultimate Challenge, 2010.
- [16] H. S. M. Coxeter and J. F. Rigby, *Frieze patterns, triangulated polygons and dichromatic symmetry*, The Lighter Side of Mathematics, 15–27, 1961.
- [17] M. Cuntz, *Frieze patterns as root posets and ane triangulations*, European J. Combin. **42** (2014).
- [18] ———, *On wild frieze patterns*, arXiv preprint arXiv:1504. 07048., 2015.
- [19] D. Dantzig, *G. pólya mathematics and plausible reasoning*, Synthese **11** (1959), no. 4, 353–358.
- [20] M. Davis, *The geometry and topology of coxeter groups*, Princeton University Press., 2008.
- [21] H. G. Diamond, *Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers*, Bulletin of the American Mathematical Society **7** (1982), no. 3, 553–589.

- [22] L. Euler and A. Speiser, *Commentationes geometricae*, Springer Science and Business Media, 1953.
- [23] E. S. Fedorov, *Simetría de los sistemas regulares de figuras*, Obras completas, Akad. Nauk, moscú, 1949.
- [24] Friedrich Gauss, *Geometrías no-euclidianas*, 1777.
- [25] J. R. Gaytan, *El teorema de los números primos*, Miscelánea Matemática 3815-31, 2003.
- [26] G. Glogglger, *On primes and prime factorization of a number*.
- [27] J. D. Godino, M. Gonzato, Cajaraville J. A., and Fernández T., *Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática*, Enseñanza de las ciencias revista de investigación y experiencias didácticas **30** (2012), no. 2, 109–130.
- [28] Francisco José González Gutiérrez, *Apuntes de matemática discreta*, Universidad de Cádiz, Departamento de Matemáticas, Octubre de 2004.
- [29] C. Gribble, *Primes in spirals*, University of Arizona, 2010.
- [30] B. Grunbaum and G. C. Shephard, *Tilings and patterns*, 1987.
- [31] E. Harada, *Algunas aclaraciones sobre el modelo argumentativo de toulmin*, Contacto S, 2009.
- [32] G.H. Hardy, E.M. Wright, D.R. Heath-Brown, and J. Silverman, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford mathematics, OUP Oxford, 2008.
- [33] E. Lluís-Puebla, *Teoría de grupos, un primer curso*.
- [34] C. Men, *Estándares básicos de matemáticas*, Ministerio de educación, Santafé de Bogotá, 2003.
- [35] J. M Montesinos, *Las geometrías no-euclídeas*, Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, Madrid, 1987.
- [36] A. Moreno, *Notas de clase del curso temas de álgebra y aritmética*.
- [37] P. K. Muay, *Frieze patterns on ming porcelains*.
- [38] W. K. Nicholson, *Introduction to abstract algebra*, Second Edition, 1999.
- [39] M. Peña and J. Enrique, *Funciones de aritméticas de los números  $g$ -primos duales*, 2014.
- [40] I. Peterson, *Prime spirals*, Science News Magazine of the Society for Science and the Public, 2002.
- [41] Fundación Polar, *El mundo de los movimientos y de las simetrías*, Revista Matemáticas para todos **Fascículo 4**.
- [42] J. H. Pérez and I. E. S Los Castillos, *Los siete grupos de frisos en el mobiliario urbano de alcorcón*.
- [43] M. H. Rosas, *Los números de (euler)-catalán*, Bol. Asoc. Mat. Venez **10** (2003), no. 1, 43–58.
- [44] M. R. Silvestre, *Generación de teselaciones periódicas: grupos cristalográficos*.
- [45] J. Tena, *Grupos de simetría y teselaciones del plano*, Universidad de Valladolid (2004).
- [46] E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, Oxford Univ. Press, London, 1991.
- [47] J. Tits and J. Stillwell, *Symmetry*, The American Mathematical Monthly **107** (2000), no. 5, 454–461.

- [48] S. E. Toulmin, *The uses of argument*, Cambridge University Press, 2003.
- [49] J. C. Várilly, *Grupos y anillos*, MA-561, 2014.
- [50] L. Weinstein, *Divisibility properties of fibonacci numbers*, Fibonacci Quarterly **4** (1966), no. 1, 83.
- [51] D. Wells, *Prime numbers: the most mysterious figures in math*, John Wiley and Sons.
- [52] H. Weyl, *Simetría*, McGraw Hill, 1990.
- [53] D. Zagier, *Newmans short proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **104** (1997), 8.
- [54] F. Zaldívar, *La función zeta de riemann*, Miscelánea Matemática, 2002.