



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Sobre operadores diferenciales en dominios fractales

Luis Fernando Contreras Hernández

Universidad Nacional de Colombia
Facultad Ciencias, Departamento de matemáticas
Bogotá, Colombia
2016

Sobre operadores diferenciales en dominios fractales

Luis Fernando Contreras Hernandez

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Mágister en Ciencias Matemáticas

Director(a):
Título (Ph.D.) Milton Jara
Co-Director(a):
Título (Ph.D.) Juan Galvis

Línea de Investigación:
Nombrar la línea de investigación en la que enmarca la tesis o trabajo de investigación
Grupo de Investigación:
Nombrar el grupo en caso que sea posible

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de matemáticas
Bogotá, Colombia
2016

A mis padres

Las proposiciones matemáticas, en cuanto tienen que ver con la realidad, no son ciertas; y en cuanto que son ciertas, no tienen que ver con la realidad.

Albert Einstein

Agradecimientos

Agradezco a mis padres que a sido muy importante acompañándome en este proceso, a mi novia y amigos, a la Universidad Nacional de Colombia y a los profesores que me formaron durante mis estudios.

También, agradezco a mi director Milton Jara y sobre todo al profesor Juan Carlos Galvis que es si como profesional es excelente con persona es grandioso.

Resumen

En este proyecto, se busca estudiar y analizar las distintas propiedades algunos conjuntos autosimilares y como a partir de este estudio se pueden construir operadores diferenciales que modelan procesos de difusión y propagación de densidades en estos dominios fractales. Se pretende también estudiar aproximaciones numéricas de los modelos obtenidos a partir del método de elementos finitos. Un caso particular que es estudiado con detalles es la solución del problema de Dirichlet en el triángulo de Sierpinski.

Palabras clave: fractal, difusión, Laplaciano, constante de renormalización, método de los elementos finitos..

Abstract

Key words: fractal, diffusion, Laplacian, renormalization constant, finite element method..

Contenido

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
Lista de figuras	xiii
1. Introducción	2
2. Conjuntos autosimilares	4
2.1. Teorema de contracción de Banach	4
2.2. Métrica de Hausdorff	5
2.3. Construcción de conjuntos autosimilares	8
2.4. Ejemplos de conjuntos autosimilares	10
2.4.1. La curva de Koch	10
2.4.2. El triángulo de Sierpinski	11
2.4.3. El árbol de Hata en el plano	13
2.4.4. Árbol de Hata en el espacio	15
3. Laplaciano de un grafo	17
3.1. Aproximación del Laplaciano en el plano	17
3.2. El Laplaciano de un grafo	19
3.3. Energía asociada al Laplaciano de un grafo	21
3.4. Forma matricial y constante de renormalización	25
3.5. Propiedades de la energía sobre un grafo conexo	27
4. Forma débil de operadores diferenciales	31
4.1. Medida autosimilar	31
4.2. Fórmula de la integración por partes	33
4.3. Formulaciones para el problema de Dirichlet	34
5. Aproximaciones numéricas para el problema de Dirichlet	35
5.1. Método de diferencias finitas: aproximación por sucesión de Laplacianos re-normalizados	35
5.1.1. Un procedimiento para aproximar la constante de renormalización	36

5.2. Método de elementos finitos	38
5.2.1. Integrales a lo largo de las aristas	39
5.2.2. Integrales sobre triángulos	41
5.3. Ilustraciones de los métodos numéricos	44
5.3.1. El triángulo de Sierpinski	44
5.3.2. La curva de Kosh	47
5.3.3. El árbol de Hata	49
5.3.4. Árbol de Hata 3D	50
6. Conclusiones y trabajo futuro	52
A. Anexo: Constante de renormalización determinada por teoría de redes eléctricas	54
A.1. Interpretación a partir de redes eléctricas	54
B. Anexo: Formulación variacional para ecuaciones diferenciales ordinarias y par-	
 ciales	59
B.1. Formulación variacional para ecuaciones diferenciales ordinarias	59
B.2. Formulación variacional para la ecuación diferencial de Poisson	60
Bibliografía	62

Lista de Figuras

2-1.	Las primeras cuatro iteraciones de la curva de Koch: W_1 (arriba derecha), W_2 (arriba izquierda), W_3 (abajo derecha), W_4 (abajo izquierda).	11
2-2.	Las primeras cuatro iteraciones del triángulo de Sierpinski: W_1 (arriba derecha), W_2 (arriba izquierda), W_3 (abajo derecha), W_4 (abajo izquierda).	12
2-3.	La primera iteración del árbol de Hata con ángulo $\theta = 60^\circ$	14
2-4.	Las primeras cuatro iteraciones del árbol de Hata: Observamos W_1 (arriba derecha), W_2 (arriba izquierda), W_3 (abajo derecha) y W_4 (abajo izquierda).	14
2-5.	Las primeras cuatro iteraciones del árbol de Hata 3D. Observamos W_1 (arriba derecha), W_2 (arriba izquierda), W_3 (abajo derecha) y W_4 (abajo izquierda).	16
3-1.	En el triángulo de Sierpinski, $u(x_i) = \alpha_i$, donde $x_i \in V_n$ y $u(y_i) = \beta_i$ para $y_i \in V_{n+1} \setminus V_n$, para $i \in \{0, 1, 2\}$	22
3-2.	Como podemos ver en el gráfico existen dos caminos mínimos desde el vértice representado por \times y el vértice representado por \circ	28
5-1.	Aproximación de la función $g(x, y) = \sin(x + y)$ a través de rectas que pasan por los puntos $\{g(x)\}_{x \in V_n}$ cuando $n = 1$	40
5-2.	Uno de los segmentos de recta para la función $g(x, y) = \sin(x + y)$ donde $a = (0, 0)$ y $b = (\frac{1}{2}, 0)$ en la iteración $n = 1$	41
5-3.	Solución $u(x, y)$ de la ecuación de Poisson $5^n \widetilde{\Delta}_n u = g(x, y)$ (Izquierda) y $r^{(1)} \cdot \mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = \int g v d\nu_n^{(1)}$ (Derecha) cuando $g(x, y) = \sin(x + y)$, $u(a_0) = 1$ y $u(a_1) = u(a_2) = 0$ en el espacio V_4 del triángulo de Sierpinski.	45
5-4.	Aproximación de $u(x, y)$ de la ecuación de Poisson $5^n \widetilde{\Delta}_n u = g(x, y)$ (Izquierda) y $k_n \cdot \mathcal{E}_n^{(2)}(u, v) = \int g v d\nu_n^{(2)}$ (Derecha) cuando $g(x, y) = \sin(x + y)$, $u(a_0) = 1$ y $u(a_1) = u(a_2) = 0$ en el espacio V_5 del triángulo de Sierpinski.	46
5-5.	Aproximación de $u(x, y)$ de la ecuación de Poisson $5^n \widetilde{\Delta}_n u = 0$ (Izquierda) y $r^{(1)} \cdot \mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = 0$ (Derecha) $u(a_0) = 1$ y $u(a_1) = 0$ en el espacio V_3 del árbol de Hata.	47
5-6.	Aproximación de $u(x, y)$ de la ecuación de Poisson $16^n \widetilde{\Delta}_n u = g(x, y)$ (Izquierda) y $r^{(1)} \cdot \mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = \int g v d\nu_n^{(1)}$ (Derecha) cuando $g(x, y) = 10 \cdot \sin(x + y)$, $u(a_0) = 1$ y $u(a_1) = 0$ en el espacio V_5 de la curva de Koch.	48
5-7.	Aproximación de $u(x, y)$ de la ecuación de Poisson $15^n \widetilde{\Delta}_n u = 0$ (Izquierda) y $r^{(1)} \cdot \mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = 0$ (Derecha), $u(a_0) = 1$ y $u(a_1) = 0$ en el espacio V_3 de la curva de Koch.	48

<p>5-8. Aproximación de $u(x, y)$ de la ecuación de Poisson $15^n \widetilde{\Delta}_n u = g(x, y)$ (Izquierda) y $r^{(1)} \cdot \mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = \int g v d\nu_n^{(1)}$ (Derecha) cuando $g(x, y) = 10 \cdot \sin(x + y)$, $u(a_0) = 1$ y $u(a_1) = 0$ en el espacio V_3 del árbol de Hata.</p>	49
<p>5-9. Aproximación de $u(x, y)$ de la ecuación de Poisson $15^n \widetilde{\Delta}_n u = 0$ (Izquierda) y $r^{(1)} \cdot \mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = 0$ (Derecha), $u(a_0) = 1$ y $u(a_1) = 0$ en el espacio V_3 del árbol de Hata.</p>	50
<p>5-10. Aproximación de $u(x, y)$ de la ecuación de Poisson $18^n \widetilde{\Delta}_n u = g(x, y)$ cuando $g(x, y) = 10 \cdot \sin(x + y)$, $u(a_0) = 0$ y $u(a_1) = 1$ en el espacio V_3 del árbol de Hata 3D.</p>	51
<p>A-1. Red eléctrica tipo Y (izquierda) y red eléctrica tipo Δ (derecha).</p>	55

1. Introducción

En la actualidad, la modelación matemática de distintos problemas prácticos es del interés de investigadores teóricos y aplicados ya que el correcto desarrollo de estos modelos puede ayudar a comprender mejor, predecir y controlar los posibles resultados de un experimento o situación.

Muchos de los fenómenos presentes en situaciones prácticas son modelados por ecuaciones diferenciales parciales clásicas. En este caso los operadores diferenciales actúan sobre funciones definidas en dominios abiertos de \mathbb{R}^d . Este enfoque se ha mostrado muy adecuado y fructífero en el estudio en modelos relacionados a diversos problemas de flujo de fluidos, propagación del calor, propagación de ondas, entre otros.

Por otro lado, en muchos otros problemas descriptivos se han usado objetos conocidos como fractales que a grandes rasgos son conjuntos con un formato aparentemente irregular pero que tienen muchas propiedades de simetría y auto-similitud. Esto es debido a que muchos fractales tienen características particulares y similares a varios objetos que aparecen en la naturaleza. Por ejemplo, modelos de conjuntos fractales son usados para describir varios fenómenos, tales como la curva formada por el agua en la playa (curva de Koch), hojas de helecho, el conjunto de puntos geográficos donde ocurre un evento (por ejemplo sísmico), e.t.c.. Otro ejemplo interesante es cuando se quiebra en dos una barra de metal, la superficie que se forma en el punto de quiebre no es necesariamente suave y en muchos casos puede ser modelada por un conjunto fractal. En situaciones como esta, es importante, para efectos prácticos, conocer las propiedades de este conjunto (fractal). En particular es importante entender las propiedades de difusión del calor y de resistencia a determinadas presiones. Otro ejemplo es el estudio de difusión de aerosoles médicos en los pulmones. El proceso de difusión también ocurre en el estudio de flujo de fluidos en medios porosos en los que se presentan fracturas en el interior del medio poroso (la superficie de la fractura puede ser modelado por un conjunto fractal en el caso que el ancho de la fractura es muy pequeño cuando comparado con el tamaño del medio poroso estudiado).

En este documento, se estudian y analizan distintas propiedades de algunos fractales y como a partir de estas propiedades se pueden construir operadores diferenciales que modelan procesos de difusión y propagación de densidades en estos dominios fractales. En este trabajo se consideran únicamente fractales definidos como conjuntos autosimilares con algunas propie-

dades adicionales y que son conocidos como post-críticamente finitos. Estos son conjuntos autosimilares que en cierto sentido pueden ser aproximados (en la métrica de Hausdorff) por conjuntos finitos con grafos asociados a ellos. Estos grafos son conexos y se pueden desconectar en partes iguales removiendo un número finito de puntos. Con la definición de operador diferencial se pueden plantear problemas de contorno y deducir la formulación débil de estos problemas usando la medida autosimilar.

También pretendemos introducir aproximaciones numéricas de los modelos obtenidos. Un caso particular que será estudiado con mayor detalle es la solución del problema de Dirichlet en el triángulo de Sierpinski. Otros operadores diferenciales y condiciones de frontera pueden ser considerados, así como otras realizaciones de fractales autosimilares. En términos de construcción de aproximaciones numéricas usaremos el método de los elementos finitos (FEM) el cual puede ser extendido a conjuntos fractales en donde podamos introducir una formulación variacional del modelo (o en casos en que las soluciones puedan escribirse como minimizadores de funcionales de energía elípticos). Presentaremos los elementos fundamentales de una formulación de elementos finitos para estos modelos. Por analogía con la formulación débil del problema de Dirichlet, las aproximaciones de elementos finitos incluyen:

- Aproximación del cálculo de “derivadas” en donde se usan derivadas clásicas de interpolaciones lineales por partes en dimensiones uno y dos.
- Aproximación de la medida autosimilar. Usaremos dos aproximaciones: 1) la medida de longitud restringida a las aristas de los triángulos de la aproximación del fractal y 2) La medida de área restringida a los triángulos de la aproximación del fractal.
- Aproximación de los parámetros de escala para obtener matrices renormalizadas y garantizar que la solución numérica converge a la solución del problema continuo.

Ilustraremos numéricamente el desempeño del método de elementos finitos para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales definidas en fractales. En particular calcularemos algunas soluciones de ecuaciones diferenciales en el triángulo de Sierpinski, la curva de Koch y dos realizaciones diferentes del árbol de Hata. Por último compararemos el métodos de elementos finitos y el método de diferencias finitas.

2. Conjuntos autosimilares

El propósito de este capítulo es presentar el concepto de conjunto autosimilar y sus propiedades básicas. Primero revisaremos el principio de contracción de Banach el cual garantiza la existencia de punto fijo de una iteración funcional donde la función involucrada es una contracción. Un conjunto autosimilar se obtiene al aplicar una iteración funcional de punto fijo en el espacio métrico formado por la colección de conjuntos compactos dotados de la métrica de Hausdorff. En particular presentaremos la construcción del triángulo de Sierpinski, la curva de Koch y dos realizaciones diferentes del árbol de Hata (una en el plano y otra en el espacio tridimensional). Para más información de conjuntos autosimilares, referimos al lector a [1, 2, 3].

2.1. Teorema de contracción de Banach

Empezamos considerando un espacio métrico (X, d_X) donde X es un conjunto no vacío y d_X es una métrica definida sobre X . Cuando no dé lugar a confusión denotaremos por d la métrica d_X . Denotamos la bola cerrada con centro $x \in X$ y radio $r > 0$ por $B_r(x)$, es decir,

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}.$$

Introducimos ahora el concepto de constante de Lipschitz con el cual distinguiremos las funciones de tipo contractivo o contracciones. Las contracciones son importantes para construir conjuntos autosimilares. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Una función $f : X \rightarrow Y$ es uniformemente Lipschitz continua sobre X con respecto a las distancias d_X, d_Y , si tenemos que

$$L = \text{Lip}(f) := \sup_{x, y \in X, x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)} < \infty.$$

La constante $L = \text{Lip}(f)$ se conoce como la constante de Lipschitz de f . Se debe notar que una función uniformemente Lipschitz continua es uniformemente continua. Se trabajará con funciones que tienen constante de Lipschitz menor que uno, como en la siguiente definición.

Definición 2.1.1 (Contracción). *Sea (X, d) un espacio métrico. Si $f : X \rightarrow X$ es continua de Lipschitz sobre X con respecto a d y $\text{Lip}(f) < 1$ entonces f es llamada contracción con respecto a la métrica d con constante de contracción $\text{Lip}(f)$. En particular, una contracción f con constante de contracción constante r es llamada similitud si $d(f(x), f(y)) = rd(x, y)$, para todo $x, y \in X$.*

Dada $f : X \rightarrow X$, denotamos por f^n la n -ésima iteración de f ; es decir, $f^n = f \circ f^{n-1}$ para $n \geq 1$ y $f^0 = f$. Tenemos el siguiente principio de contracción que juega un papel central en la construcción de muchos fractales.

Teorema 2.1.2 (Principio de contracción de Banach). *Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \rightarrow X$ una contracción con respecto a la métrica d . Entonces existe un único punto fijo de f , en otras palabras, existe una única solución a la ecuación $f(x) = x$. Además, si x es el punto fijo de f entonces la sucesión $\{f^n(a)\}_{n \geq 0}$ converge a x para todo $a \in X$.*

Demostración: Dado $a \in X$ considere la sucesión $\{f^n(a)\}_{n < \infty} \subset X$. Se demostrará que esta sucesión es de Cauchy y por lo tanto converge ya que (X, d) es un espacio métrico completo.

En efecto, si denotamos por r la constante de contracción de f , entonces para $m > n$, tenemos que al aplicar repetidamente la desigualdad triángular obtenemos

$$d(f^n(a), f^m(a)) \leq d(f^n(a), f^{n+1}(a)) + \dots + d(f^{m-1}(a), f^m(a)).$$

Por la definición de contracción (Definición 2.1.1) aplicada a cada término a la derecha obtenemos que,

$$d(f^n(a), f^m(a)) \leq (r^n + \dots + r^{m-1})d(a, f(a)).$$

Recordando que $0 < r < 1$ obtenemos $r^n + \dots + r^{m-1} < \sum_{i=n}^{\infty} r^i = \frac{r^n}{1-r}$. Por lo tanto,

$$d(f^n(a), f^m(a)) \leq \frac{r^n}{1-r} d(a, f(a)).$$

Dado que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1-r} = 0$, tenemos que la sucesión $\{f^n(a)\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de Cauchy y como (X, d) es completo entonces es también convergente. Es decir, existe $x_0 \in X$ tal que $f^n(a) \rightarrow x_0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Como f es continua, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(a) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(a)) = f(x_0) = x_0.$$

Con esto demostramos que existe un punto fijo para f . Por último veremos que el punto fijo es único. Si tenemos que $f(x) = x$ y $f(y) = y$, vemos que

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq rd(x, y),$$

y dado que $0 < r < 1$, concluimos que $d(x, y) = 0$ y así, $x = y$. □

2.2. Métrica de Hausdorff

El propósito es mostrar la existencia de conjuntos autosimilares que son los dominios de las funciones sobre las cuales definiremos operadores diferenciales en este trabajo. Necesitaremos

en particular del espacio métrico de Hausdorff que aparece naturalmente de la siguiente manera. Suponga que tenemos funciones $f_i : X \rightarrow X$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$, y que todas ellas son contracciones con respecto al espacio métrico (X, d) . Veremos que existe un único conjunto compacto no vacío $K \subset X$ tal que

$$K = f_1(K) \cup f_2(K) \cup \dots \cup f_N(K). \quad (2-1)$$

El conjunto K es llamado el conjunto auto-similar con respecto a $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ y es un conjunto fractal. El término autosimilar viene del hecho de que K es la unión de imágenes de si mismos por una contracción. Esto es más fácil de entender cuando las funciones f_i son similitudes (vea Definición 2.1.1).

Para hacer la demostración de este resultado, el cual es el principal de esta sección, definimos la aplicación F que actúa sobre subconjuntos de X y que está dada por

$$F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_N(A), \quad (2-2)$$

para $A \subseteq X$. En otras palabras $F(A)$ es la unión de las imágenes directas de A por las aplicaciones f_i , $i = 1, 2, \dots, N$. La idea principal es probar la existencia de un “punto” fijo para la aplicación F (vea (2-2)). En este orden de ideas se define un dominio para F , donde F es una contracción con respecto a alguna métrica. Note primero que si $A \subset X$ es compacto, entonces $F(A)$ también lo es, ya que la unión finita de conjuntos compactos es compacta y la imagen directa de un compacto por una aplicación continua es compacta. Recuerde que las funciones f_i , $i = 1, 2, \dots, N$, son continuas por ser contracciones. Resulta natural entonces definir el siguiente subconjunto de partes de X dado por

$$C(X) = \{A \subseteq X : A \neq \emptyset, A \text{ subconjunto compacto de } (X, d)\}.$$

Lo siguiente que definiremos es una métrica d_C sobre $C(X)$ que es la métrica de Hausdorff y se probará lo necesario para usar el principio de contracción de Banach en este caso particular:

- Se demostrará que $C(X)$ es completo con respecto a la métrica de Hausdorff.
- Se demostrará que la aplicación F definida en (2-2) es una contracción con respecto a la métrica de Hausdorff.

Tenemos la siguiente definición. Ver [1, 2, 3].

Definición 2.2.1 (Métrica de Hausdorff). *Sea (X, d) un espacio métrico y considere $C(X)$ la colección de subconjuntos compactos de X . Para $Z, Y \in C(X)$, se define*

$$d_C(Z, Y) = \inf\{r \geq 0 : Y \subseteq U_r(Z) \quad \text{y} \quad Z \subseteq U_r(Y)\},$$

donde $U_r(Z) = \{x \in X : d(x, y) \leq r, y \in Z\} = \bigcup_{y \in Z} B_r(y)$. La aplicación d_C se conoce como métrica de Hausdorff.

La siguiente proposición muestra que d_C es realmente una métrica sobre $C(X)$.

Proposición 2.2.2. *La aplicación d_C introducida en la Definición 2.2.1 es una métrica sobre $C(X)$. Además, $(C(X), d_C)$ es completo cuando (X, d) es completo. La métrica d_C se conoce como la métrica de Hausdorff.*

Demostración: Demostraremos las propiedades de la definición de métrica:

- *Positividad y simetría:* Por definición, tenemos que $d_C(Z, Y) = d_C(Y, Z) \geq 0$ y además que $d_C(Z, Z) = 0$.
- *Distancia nula:* Se demostrará que si $d_C(Z, Y) = 0$, entonces $Z = Y$. Si $d_C(Z, Y) = 0$ tenemos por definición de d_C que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ vale

$$Z \subseteq U_{1/n}(Y).$$

Entonces para cada $x \in Z$ podemos escoger $x_n \in Y$ tal que $d(x, x_n) \leq 1/n$. Vemos que $x_n \rightarrow x$ y como Y es cerrado concluimos que $x \in Y$. Por lo tanto $Z \subseteq Y$. De la misma forma se puede demostrar que $Y \subseteq Z$. Así, $Z = Y$.

- *Desigualdad triangular:* Considere $A, B, D \in C(X)$ y sean r y s tales que $r > d_C(A, B)$ y $s > d_C(B, D)$.

Por definición de d_C tenemos que $D \subseteq U_s(B)$ y $B \subseteq U_r(A)$. Entonces vemos que $D \subseteq U_s(B) \subseteq U_s(U_r(A)) \subseteq U_{r+s}A$. Esta última inclusión puede ser fácilmente verificada a partir de la definición de bolas. De forma similar $A \subseteq U_{r+s}(D)$.

De las dos inclusiones $D \subseteq U_{r+s}A$ y $A \subseteq U_{r+s}(D)$ se concluye que $r + s \geq d_C(A, D)$. Por consiguiente $d_C(A, B) + d_C(B, D) \geq d_C(A, D)$.

□

En la siguiente proposición mostraremos que el espacio métrico de Hausdorff $(C(X), d_C)$ es completo cuando el espacio métrico inicial lo es.

Proposición 2.2.3. *Si (X, d) es completo entonces el espacio métrico $(C(X), d_C)$ es también completo.*

Demostración: Sea $\{A_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $(C(X), d_C)$. Se define

$$\mathcal{B}_n = \overline{\bigcup_{k \geq n} A_k}$$

donde la barra indica el cierre o completamiento de un conjunto en $(C(X), d_C)$.

Note que la sucesión $\{\mathcal{B}_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de conjuntos encajados que es monótonamente decreciente (en el orden de la inclusión de conjuntos). Note también que por definición todos los \mathcal{B}_n son cerrados en $(C(X), d_C)$.

Afirmamos que para cada n , \mathcal{B}_n es compacto.

Para todo $r > 0$, se puede escoger un m tal que para todo $k \geq m$ podemos escribir $A_k \subseteq U_{r/2}(A_m)$. Como A_m es compacto entonces existe una $\frac{r}{2}$ -red P de A_m . Así, podemos verificar fácilmente que

$$\bigcup_{k \geq m} A_k \subseteq U_{\frac{r}{2}}(A_m) \subseteq \bigcup_{x \in P} B_r(x).$$

Por lo tanto P es una red de \mathcal{B}_m . Dado que $\bigcup_{x \in P} B_r(x)$ es cerrado, se tiene que $\mathcal{B}_m \subseteq \bigcup_{x \in P} B_r(x)$, de esa forma, P es una r -redes de \mathcal{B}_m . Juntado las r -redes de A_1, A_2, \dots, A_{m-1} a P , se obtiene una r -redes de \mathcal{B}_1 . De este modo \mathcal{B}_1 es totalmente acotado. También se tiene que \mathcal{B}_1 es completo dado que es un subconjunto cerrado de un espacio métrico completo X . Dado que para cualquier n , \mathcal{B}_n es completo y totalmente acotado, se tiene que \mathcal{B}_n es compacto.

Ahora, como $\{\mathcal{B}_n\}$ es una sucesión monótonamente decreciente de conjuntos compactos no vacíos entonces su intersección es no vacía. Sea $A = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{B}_n$, tenemos que A es compacto y no vacío.

Dado $r > 0$, se puede escoger un m tal que $A_k \subseteq U_r(A_m)$ para todo $k \geq m$. Entonces $A \subseteq \mathcal{B}_m \subseteq U_r(A_m)$. Por otro lado, $A_m \subseteq B_m \subseteq U_r(A)$ para un m lo suficientemente grande. Así, $A_m \rightarrow A$ cuando $m \rightarrow \infty$ en la métrica de Hausdorff. Por consiguiente $(C(X), d_C)$ es completo. \square

2.3. Construcción de conjuntos autosimilares

En esta sección probamos el resultado principal para construir conjuntos autosimilares. Este resultado es algunas veces referido como el principio generalizado de contracción. En esencia, este resultado es el principio de contracción de Banach aplicado al espacio métrico $(C(X), d_C)$. Ver [1, 2, 3].

Antes de enunciar el resultado es conveniente mostrar algunas propiedades adicionales de la métrica de Hausdorff.

El siguiente lema relaciona la distancia de Hausdorff de unión de conjuntos con la distancia de Hausdorff de los respectivos conjuntos.

Lema 2.3.1. *Para $A_1, A_2, B_1, B_2 \in C(X)$, se tiene que,*

$$d_C(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq \max\{d_C(A_1, B_1), d_C(A_2, B_2)\}.$$

Demostración: Si $r > \max\{d_C(A_1, B_1), d_C(A_2, B_2)\}$ entonces $B_1 \subseteq U_r(A_1)$ y $B_2 \subseteq U_r(A_2)$. Así,

$$B_1 \cup B_2 \subseteq U_r(A_1) \cup U_r(A_2) = \bigcup_{x \in A_1} B_r(x) \cup \bigcup_{x \in A_2} B_r(x) = U_r(A_1 \cup A_2).$$

Análogamente, obtenemos que $A_1 \cup A_2 \subseteq U_r(B_1 \cup B_2)$. Luego $r \geq d_C(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)$. Esto completa la prueba. \square

El siguiente resultado dice que la aplicación imagen directa basada en una contracción es también contracción en la métrica de Hausdorff.

Lema 2.3.2. *Si f es una contracción con constante de contracción r , entonces para $A, B \in C(X)$ se tiene*

$$d_C(f(A), f(B)) \leq r d_C(A, B).$$

Demostración: Si $s > d_C(A, B)$, entonces $B \subseteq U_s(A)$ y $A \subseteq U_s(B)$.

Observe que $f(B) \subseteq f(U_s(A)) = f(\bigcup_{x \in A} B_s(x)) = \bigcup_{x \in A} f(B_s(x)) \subseteq \bigcup_{x \in f(A)} B_{sr}(x) = U_{rs}(f(A))$. En la última contención usamos que f es contracción y en la última igualdad usamos que f es continua.

De la misma forma $f(A) \subseteq U_{rs}(f(B))$. Por consiguiente $sr > d_C(f(A), f(B))$, que es lo que se quería demostrar. \square

El siguiente teorema fue anticipado varias veces en este trabajo y garantiza la existencia de conjuntos autosimilares. Además, sugiere un mecanismo natural de construcción y aproximación para estos conjuntos como límites (en la métrica de Hausdorff) de iteraciones de punto fijo donde una iteración equivale a mapear la aproximación anterior por las contracciones asociadas y unir estas imágenes directas para obtener la nueva aproximación.

Teorema 2.3.3. *Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f_i : X \rightarrow X$ una contracción para $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Se define $F : C(X) \rightarrow C(X)$ por $F(A) = \bigcup_{1 \leq i \leq N} f_i(A)$. Entonces F tiene un único punto fijo K . Además, para cualquier $A \in C(X)$, $F^n(A)$ converge a K cuando $n \rightarrow \infty$ con respecto a la métrica de Hausdorff.*

Demostración: Usando el Lema 2.3.1 repetidamente, se obtiene

$$d_C(F(A), F(B)) = d_C\left(\bigcup_{1 \leq j \leq N} f_j(A), \bigcup_{1 \leq j \leq N} f_j(B)\right) \leq \max_{1 \leq j \leq N} d_C(f_j(A), f_j(B)).$$

Por Lema 2.3.2 tenemos que $d_C(f_i(A), f_i(B)) \leq r_i d_C(A, B)$ para $i = 1, 2, \dots, N$, donde r_i es la constante de contracción de f_i . Sea $r = \max_{1 \leq j \leq N} \{r_j\}$, entonces concluimos que

$$d_C(F(A), F(B)) \leq r d_C(A, B).$$

Con lo cual F es una contracción sobre la métrica de Hausdorff. Ya demostramos que $(C(X), d_C)$ es completo (Teorema 2.2.2); entonces, por el Principio de Contracción (Teorema 2.1.2) deducimos inmediatamente el resultado. \square

2.4. Ejemplos de conjuntos autosimilares

En esta sección se mostrarán algunos ejemplos de conjuntos autosimilares obtenidos usando el Teorema 2.3.3. Para esto solo se necesita especificar el espacio métrico inicial $((X, d))$ que será un subconjunto acotado de \mathbb{R}^d , $d = 1, 2, 3$ con la distancia euclidiana) junto con la familia finita de contracciones (definidas en (X, d)). Ver [1, 2, 3].

2.4.1. La curva de Koch

Este es un fractal muy conocido que se puede usar para modelar, entre otras cosas, la curva determinada por la línea de la costa en la playa, la forma de un copo de nieve o incluso el ala de una antena de recepción de señales electromagnéticas.

Podemos usar el Teorema 2.3.3 para construir la curva de Koch y motivar sus aproximaciones de la siguiente forma. Considere el conjunto $X = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ dotado con la métrica euclidiana. Sean $a_1 = (0, 0)$ y $a_2 = (1, 0)$ los vértices iniciales del segmento con los cuales construiremos la curva de Koch. A este conjunto lo denotaremos con $W_0 = [a_1, a_2]$ ¹. Ahora definiremos las funciones contracción con las cuales se puede construir el conjunto autosimilar.

Para esto vamos a trabajar con la matriz rotación dada por

$$r(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (2-3)$$

Así, definimos la función contracción así

$$f_i(x) = \frac{1}{3}r(\theta)^i \cdot x + \left(\frac{i}{3}, 0\right) \quad \text{donde } i = 0, 1, 2, 3.$$

Estas son las funciones contracción con las cuales se va a construir el conjunto autosimilar. Definimos el conjunto $\{W_n : n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ de manera inductiva,

$$W_{n+1} = f_0(W_n) \cup f_1(W_n) \cup f_2(W_n) \cup f_3(W_n).$$

De acuerdo con el Teorema 2.3.3 podemos definir $K = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ con el límite tomado en la métrica de Hausdorff. El conjunto K es llamado la curva de Koch. Note que W_n es una

¹Para $a, b \in \mathbb{R}^2$, $[a, b]$ denota el segmento de recta cerrado desde a hasta b .

aproximación a la curva de Koch (que es la sugerida por el Teorema 2.3.3). Vea la Figura 2.4.1 donde se ilustran las primeras iteraciones de la curva de Koch W_1 hasta W_4 .

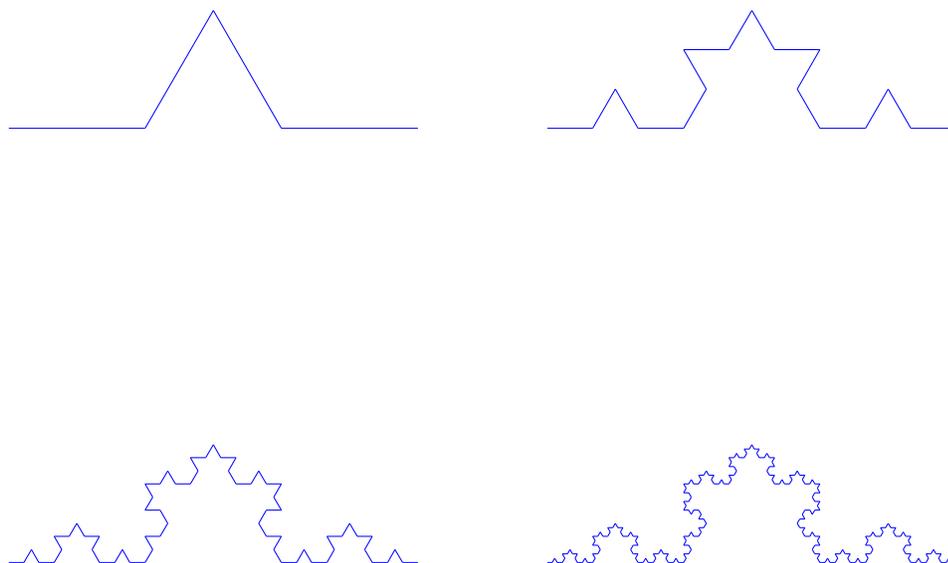


Figura 2-1.: Las primeras cuatro iteraciones de la curva de Koch: W_1 (arriba derecha), W_2 (arriba izquierda), W_3 (abajo derecha), W_4 (abajo izquierda).

Para uso posterior observamos que también se puede construir este fractal a partir de $V_0 = \{a_0, a_1\}$ y definiendo la iteración

$$V_{n+1} = f_0(V_n) \cup f_1(V_n) \cup f_2(V_n) \cup f_3(V_n).$$

Denotamos por $V_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$.

2.4.2. El triángulo de Sierpinski

El triángulo de Sierpinski es uno de los ejemplos más conocidos de conjuntos autosimilares y también el ejemplo central en este manuscrito. Hay muchas construcciones del triángulo de Sierpinski. Una de ellas es usando el resultado general de contracciones enunciado en el Teorema 2.3.3.

Sean $a_0 = (0, 0)$, $a_1 = (1, 0)$, $a_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ los vértices del triángulo equilátero $X \subseteq \mathbb{R}^2$. El triángulo X está formado por los puntos de la forma $\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$, donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ con $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Consideramos el conjunto X con la distancia euclidiana.

Para cada $i = 0, 1, 2$ se define la transformación lineal afín

$$f_i : X \rightarrow X \quad (2-4)$$

$$x \rightarrow f_i(x) = \frac{1}{2}(x - a_i) + a_i. \quad (2-5)$$

Considere el conjunto formado la unión de las aristas de X , esto es sea $W_0 = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup [a_2, a_0]$ y defina la sucesión $\{W_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ por:

$$W_{n+1} = f_0(W_n) \cup f_1(W_n) \cup f_2(W_n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

El Teorema 2.3.3 garantiza la existencia de $K = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ donde el límite es tomado en $C(X)$ en la métrica de Hausdorff. Este límite es conocido como triángulo de Sierpinski. Vea la Figura 2-2 donde se muestran las aproximaciones W_1 a W_4 .

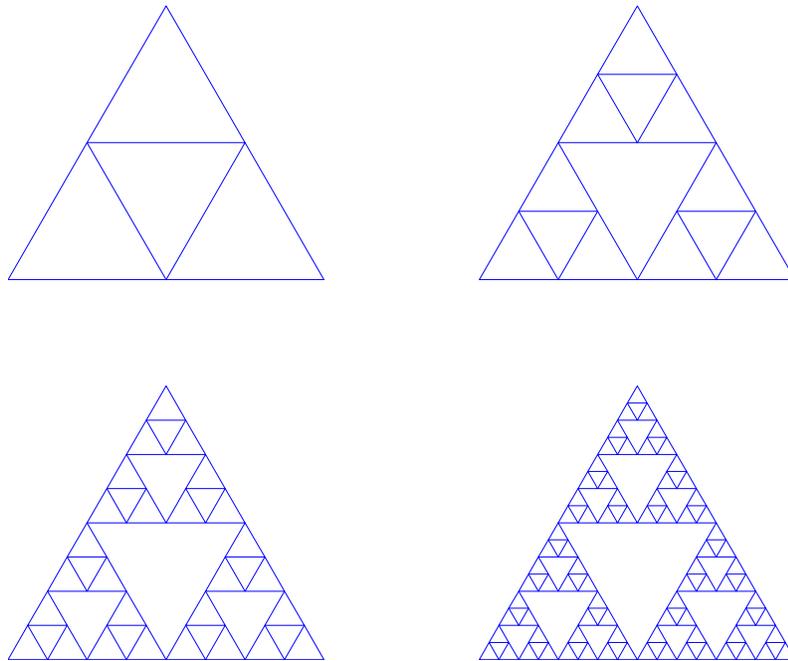


Figura 2-2.: Las primeras cuatro iteraciones del triángulo de Sierpinski: W_1 (arriba derecha), W_2 (arriba izquierda), W_3 (abajo derecha), W_4 (abajo izquierda).

Como podemos ver $W_n \subseteq W_{n+1}$ Para uso posterior observamos que también se puede construir este fractal a partir de $V_0 = \{a_0, a_1, a_2\}$ y definiendo la iteración $V_{n+1} = f_1(V_n) \cup f_2(V_n) \cup f_3(V_n)$.

Denotamos por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \cup_{n=0}^{\infty} V_n. \quad (2-6)$$

Vamos a escribir K de una forma un poco diferente. Dado m entero denotemos la cadena de longitud m por $w = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_m)$ donde $w_j \in \{0, 1, 2\}$ para todo j . También denotamos $|w|$ la longitud de la cadena w . Dada una cadena w denote $F_w = F_{w_1} \circ F_{w_2} \circ \dots \circ F_{w_m}$. el conjunto K también se puede escribir con la siguiente ecuación del punto fijo

$$K = \bigcup_{|w|=m} f_w(K). \quad (2-7)$$

Durante el documento vamos a recurrir a esta definición.

2.4.3. El árbol de Hata en el plano

Sea $p_1 = (0, 0)$ y $p_2 = (1, 0)$ los vértices del elemento $W_0 = [p_1, p_2]$, con el cual se inicia la construcción del árbol de Hata.

Las funciones contracción que construyen el conjunto autosimilar que define el árbol de Hata para los vértices son,

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{x}{3}, \\ f_1(x) &= \left(\frac{1}{3}, 0\right) + \frac{x}{3} \cdot r(60^\circ), \\ f_2(x) &= \left(\frac{1}{3}, 0\right) + \frac{x}{3}, \\ f_3(x) &= \left(\frac{2}{3}, 0\right) + \frac{x}{3} \cdot r(60^\circ), \\ f_4(x) &= \left(\frac{2}{3}, 0\right) + \frac{x}{3}. \end{aligned}$$

Donde $r(60^\circ)$ está dado en (2-3). (ver Figura 2-3.).

Como antes, definimos recursivamente

$$W_{n+1} = \bigcup_{i=0}^4 f_i(W_n) \text{ para todo } n.$$

Las primeras iteraciones son ilustradas en la Figura 2-4.

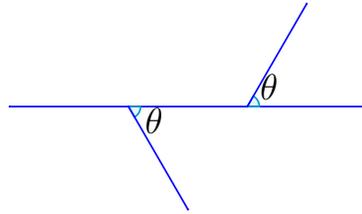


Figura 2-3.: La primera iteración del árbol de Hata con ángulo $\theta = 60^\circ$.

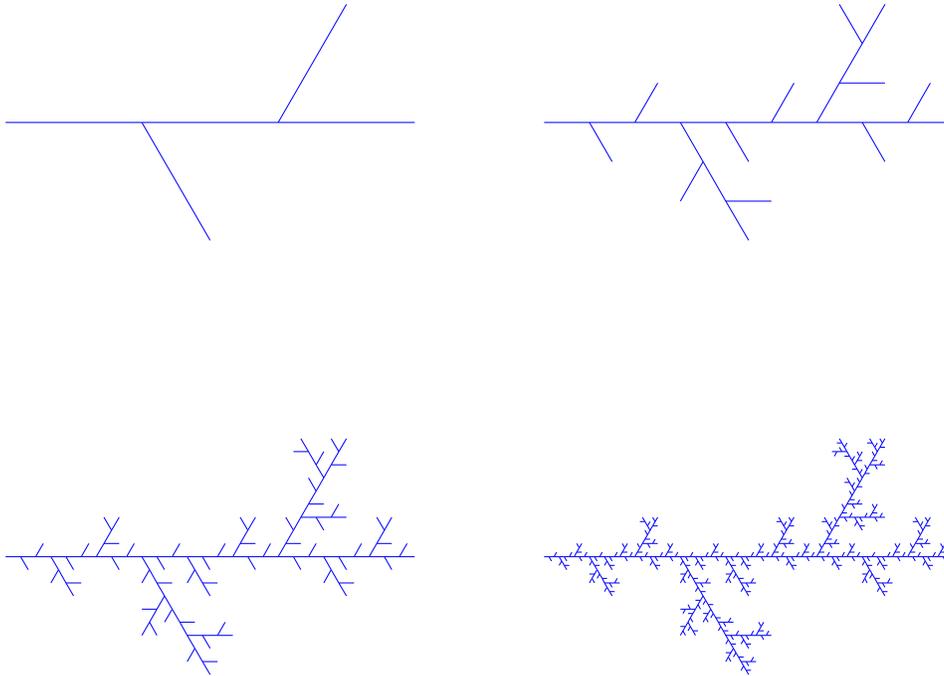


Figura 2-4.: Las primeras cuatro iteraciones del árbol de Hata: Observamos W_1 (arriba derecha), W_2 (arriba izquierda), W_3 (abajo derecha) y W_4 (abajo izquierda).

Para uso posterior observamos que también se puede construir este fractal a partir de $V_0 = \{p_1, p_2\}$ y definiendo la iteración

$$V_{n+1} = \bigcup_{i=0}^4 f_i(V_n).$$

Denotamos por $V_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$.

2.4.4. Árbol de Hata en el espacio

Sea $p_1 = (0, 0, 0)$ y $p_2 = (0, 0, 1)$ los vértices del conjunto $W_0 = [p_1, p_2]$, con el cual se inicia la construcción del árbol de Hata.

Las funciones de contracción son,

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{x}{3}, \\ f_1(x) &= \left(0, 0, \frac{1}{3}\right) + k_2 \frac{x}{3} + k_1 \cdot n_1 \cos(60^\circ) + k_1 \cdot n_2 \sin(60^\circ), \\ f_2(x) &= \left(0, 0, \frac{1}{3}\right) + \frac{x}{3}, \\ f_3(x) &= \left(0, 0, \frac{2}{3}\right) + k_2 \frac{x}{3} + k_1 \cdot n_1 \cos(120^\circ) + k_1 \cdot n_2 \sin(120^\circ), \\ f_4(x) &= \left(0, 0, \frac{2}{3}\right) + k_2 \frac{x}{3} + k_1 \cdot n_1 \cos(180^\circ) + k_1 \cdot n_2 \sin(180^\circ), \\ f_5(x) &= \left(0, 0, \frac{2}{3}\right) + \frac{x}{3}. \end{aligned}$$

Donde $k_1 = \frac{1}{3} \sin(45^\circ)$, $k_2 = \frac{1}{3} \cos(45^\circ)$ y $\left\{n_1, n_2, \frac{x}{|x|}\right\}$ es un conjunto ortonormal.

Como antes defina recursivamente

$$W_{n+1} = \bigcup_{i=0}^5 f_i(W_n) \text{ para todo } n.$$

Las primeras iteraciones son ilustradas en la Figura 2.4.4.

Para uso posterior observamos que también se puede construir este fractal a partir de $V_0 = \{p_1, p_2\}$ y definiendo la iteración

$$V_{n+1} = \bigcup_{i=0}^5 f_i(V_n).$$

Denotamos por $V_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$.

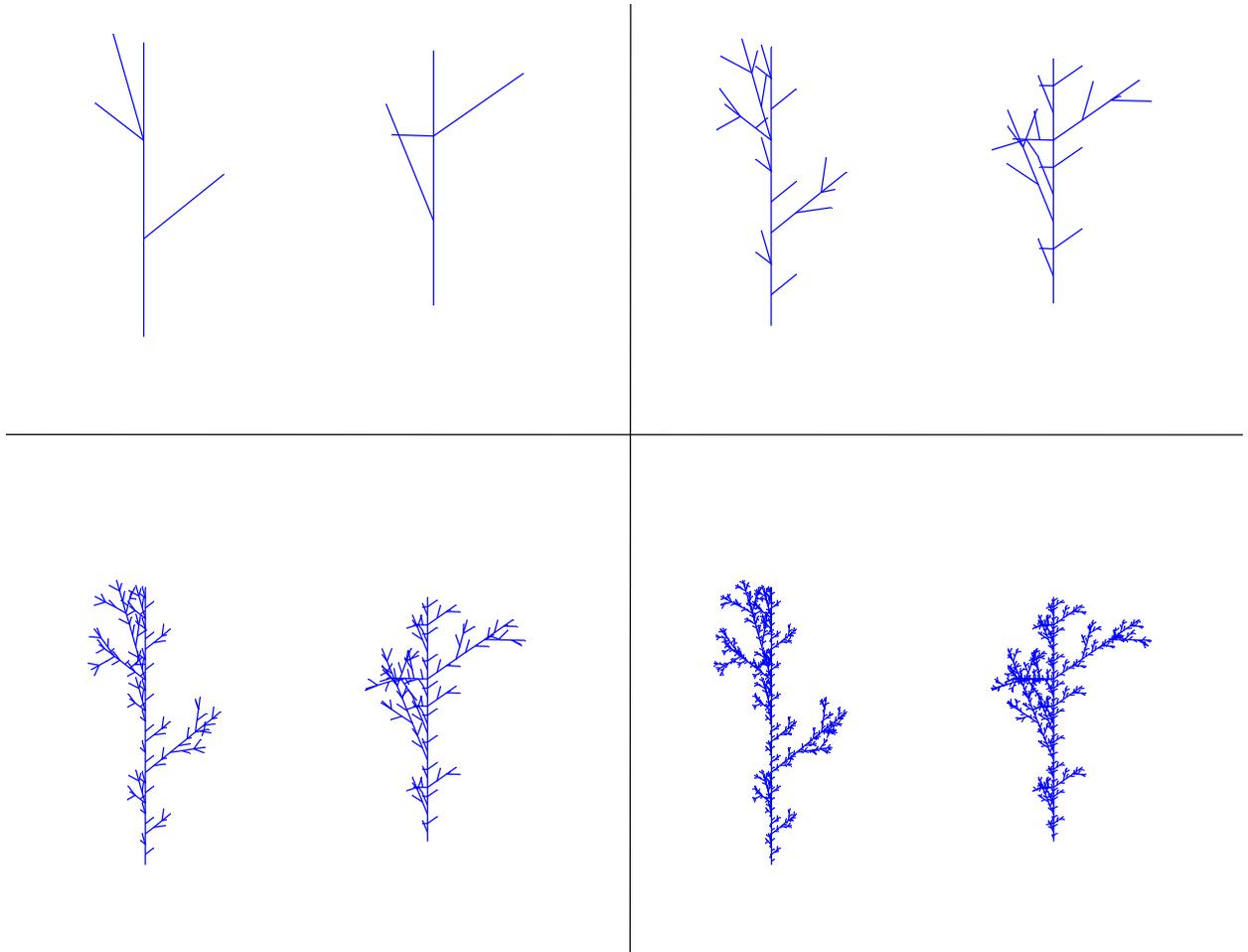


Figura 2-5.: Las primeras cuatro iteraciones del árbol de Hata 3D. Observamos W_1 (arriba derecha), W_2 (arriba izquierda), W_3 (abajo derecha) y W_4 (abajo izquierda).

3. Laplaciano de un grafo

En este capítulo revisamos la construcción del operador Laplaciano de un grafo y sus propiedades. En la primera parte de este capítulo haremos una comparación entre el Laplaciano clásico discretizado en una malla uniforme por diferencias finitas y el Laplaciano de un grafo, estudiando sus características principales. Daremos la definición de energía de un grafo y estudiaremos el límite de estas energías asociadas a una familia de grafos que aproxima a un fractal. En particular definiremos la constante de renormalización que es importante para obtener un límite finito de una familia de energías asociadas a un familia de grafos que aproxima a un fractal. Ver [1, 2, 3].

3.1. Aproximación del Laplaciano en el plano

Denote $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Recuerde que el operador de Laplace en \mathbb{R}^2 esta definido para funciones con dominio \mathbb{R}^2 . Dado $f : (R)^2 \rightarrow (R)$ definimos

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x).$$

Denote $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$ los vectores canónicos de \mathbb{R}^2 . Una aproximación discreta al operador derivada parcial de segundo orden esta dado por la diferencias centradas de segundo orden. Por ejemplo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) \approx k^2 \left(f\left(x + \frac{e_1}{k}\right) - 2f(x) + f\left(x - \frac{e_1}{k}\right) \right),$$

donde k es un parámetro de escala. Análogamente,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) \approx k^2 \left(f\left(x + \frac{e_2}{k}\right) - 2f(x) + f\left(x - \frac{e_2}{k}\right) \right).$$

Usando estas aproximaciones vemos que una aproximación del Laplaciano clásico está dada por el Laplaciano discreto

$$\Delta f(x) \approx \Delta_k f(x) := k^2 \sum_{z \in \{\pm e_1, \pm e_2\}} \left(f\left(x + \frac{z}{k}\right) - f(x) \right).$$

La idea es que $\Delta_k f(x) \rightarrow \Delta f(x)$ cuando $k \rightarrow \infty$. Podemos tomar en particular $k = 2^n$ para n entero y obtener una familia de aproximaciones $\{\Delta_{2^n}\}_{n \geq 0}$ para Δ .

Note que, al reescalar por el parámetro de escala (o renormalización) $k^2 = 4^n$ y reorganizando la suma tenemos que

$$4^{-n} \Delta_{2^n} f(x) = \left(\sum_{z \in \{\pm e_1, \pm e_2\}} f\left(x + \frac{z}{2^n}\right) \right) - \left(\sum_{z \in \{\pm e_1, \pm e_2\}} 1 \right) f(x). \quad (3-1)$$

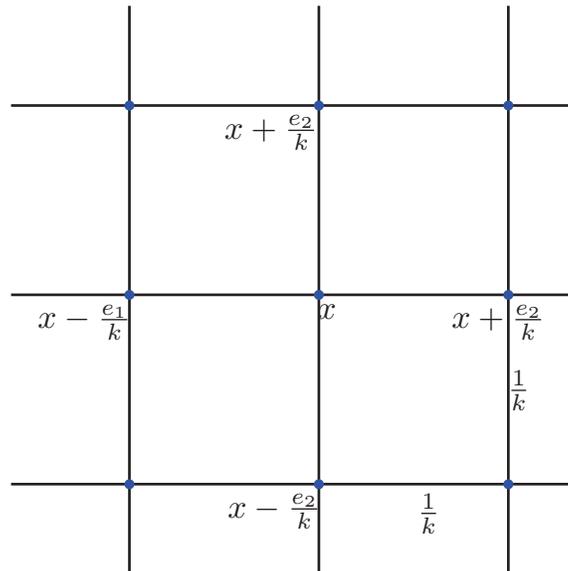
Note que:

- El primer paréntesis es la suma de los valores correspondientes a nodos adyacentes al nodo x que puede ser escrita como

$$\sum_{z \in \{\pm e_1, \pm e_2\}} f\left(x + \frac{z}{2^n}\right) = \sum_{y \sim x} f(y)$$

donde $x \sim y$ determina que y es adyacente a x , es decir que la suma la efectuaremos sobre todos los nodos que están unidos por una arista a x . Ver la Figura 3.1.

- El segundo paréntesis es la suma del número de vértices que llegan a x en la Figura 3.1.



Recuerde que los fractales autosimilares construidos en el Capítulo 2 pueden aproximarse por V_n , donde V_n es una unión finita de vértices. Cada uno de estos V_n puede ser visto como un grafo (puede pensarse que W_n en los ejemplos del Capítulo 2 representa las aristas de dicho grafo). El objetivo es definir una aproximación del Laplaciano en cada uno de los grafos (V_n, W_n) usando una analogía con el operador de Laplace en \mathbb{R}^2 . Veremos que el Laplaciano

en cada grafo lo podemos definir de manera similar al lado derecho de la ecuación (3-1). El inconveniente es que la constante de renormalización (que sería el análogo del factor 4^n) requiere un análisis no trivial. De la ecuación (3-1) puede intuirse que el factor de escala (o constante de renormalización) es **esencial** para obtener que el límite cuando $n \rightarrow \infty$ aproxima de hecho al operador Laplaciano. Si por ejemplo definimos un operador $\tilde{\Delta}_{2^n}$ como

$$\tilde{\Delta}_{2^n} f(x) = r^n \left(\sum_z f\left(x + \frac{z}{2^n}\right) - \left(\sum_z 1 \right) f(x) \right),$$

vemos que este operador no converge a $\Delta f(x)$ si $r \neq 4$.

Como mencionamos el análisis relacionado a la constante de renormalización es no trivial y puede depender del fractal que está siendo analizado, en particular de la estructura de los grafos sobre los conjuntos que son aproximaciones de los fractales. En la siguiente sección recordamos algunas definiciones básicas sobre grafos para presentar con más detalles la construcción del operador Laplaciano usando la analogía con la aproximación del operador de Laplace clásico en \mathbb{R}^2 presentado en esta sección.

Vale la pena notar que el parámetro de renormalización en (3-1) aparece de manera natural debido a que estamos considerando aproximaciones sobre un grafo estructurado. Ver Figura 3.1. Si la malla en la Figura 3.1 no fuese una malla estructurada entonces deberíamos proceder con más cuidado ya que en la aproximación del operador del Laplace clásico entrarían a jugar las distancias entre los vértices así como los ángulos entre las aristas.

La aproximación introducida arriba es del tipo de *diferencias finitas en una malla estructurada* en donde usamos la información de la malla para construir directamente el operador lineal de dimensión finita que pretende aproximar al operador de Laplace. Existen otras aproximaciones clásicas del operador de Laplace, como los métodos de *elementos finitos y de Galerkin*, que usan la información de la malla (es decir del grafo) para construir espacios de funciones de dimensión finita y se aproxima el operador de Laplace usando proyecciones en estos espacios de dimensión finita. En este caso debemos tener ya un procedimiento para calcular la acción del operador de Laplace continuo sobre funciones (suficientemente regulares).

En el caso estudiado en este manuscrito y siguiendo las referencias [1, 2, 3] pretendemos construir el operador definido en el fractal usando un proceso de límites y de forma análoga al proceso de aproximación del operador de Laplace en mallas regulares.

3.2. El Laplaciano de un grafo

Es esta sección recordaremos algunos conceptos asociados a grafos y definiremos el Laplaciano del grafo por analogía a la aproximación anterior del operador de Laplace en \mathbb{R}^2 .

Sea $G(V, E)$ un grafo, donde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ determina el conjunto de vértices y E el conjunto de aristas (sin dirección) que unen dos elementos que pertenecen a V . Acto seguido vamos a definir matriz de adyacencia y la matriz de pesos asociados a un grafo. Si $v, w \in V$ y existe una arista de que una v y w escribimos $v \sim w \in E$.

Definimos formalmente la matriz de adyacencia en la siguiente definición.

Definición 3.2.1 (Matriz de adyacencia). *Sea $G(V, E)$ un grafo con n vértices. Definimos la matriz de adyacencia A_G asociada a un grafo G de n como la matriz $n \times n$ $A_G = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ donde:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \sim v_j \in E \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La matriz de pesos es introducida a continuación.

Definición 3.2.2 (Matriz de pesos). *Sea $G(V, E)$ un grafo con n vértices. La matriz de pesos P_G de G es la matriz diagonal de dimensión $n \times n$ definida por $P_G = [p_{ij}]_{i,j=1}^n$ con $p_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$ y para $i = 1, 2, \dots, n$ tenemos que p_{ii} es el número de vértices adyacentes al vértice v_i . Es decir,*

$$p_{ii} = \#\{w \quad : \quad v \sim w \in E\}. \quad (3-2)$$

Con estas dos matrices (que dependen solo de las propiedades del grafo) podemos definir el Laplaciano de un grafo G de la siguiente forma.

Definición 3.2.3 (Laplaciano de un grafo). *Sea $G(V, E)$ un grafo. La matriz del operador Laplaciano asociado a $G(V, E)$ está dada por*

$$\Delta_G = P_G - A_G.$$

En el capítulo anterior presentamos ejemplos de conjuntos autosimilares. Sea K uno de estos conjuntos autosimilares. En cada caso presentamos una aproximación $\{V_n\}_{n=0}^\infty$ donde cada V_n contenía un conjunto de vértices. También mostramos una aproximación $\{W_n\}_{n=0}^\infty$ donde cada W_n puede ser interpretado como un grafo con vértices en V_n . Vea la Figura **2-2** para el caso del triángulo de Sierpinski. Denotemos por $G_n(V_n, E_n)$ al grafo correspondiente a la aproximación W_n . En cada uno de esto grafos podemos construir la matriz del Laplaciano del grafo la cual denotaremos por $\tilde{\Delta}_n$. En otras palabras, para $n = 0, 1, 2, \dots$ defina

$$\tilde{\Delta}_n = \Delta_{G_n}. \quad (3-3)$$

Recordando la analogía de la aproximación del operador de Laplace clásico presentada en la Sección 3.1. El siguiente paso es analizar como debemos reescalar esta familia de Laplacianos

discretos de tal forma que podamos garantizar que el límite existe cuando $n \rightarrow \infty$. Un camino para poder garantizar la existencia del límite de los operadores $\{\tilde{\Delta}_n\}_{n=0}^{\infty}$ después de reescalados es comparar $\tilde{\Delta}_n$ con $\tilde{\Delta}_{n+1}$. Para esta comparación hay que considerar la extensión de funciones de V_n a V_{n+1} y comparar la energía asociada a los Laplacianos $\tilde{\Delta}_n$ con $\tilde{\Delta}_{n+1}$ definidos sobre los grafos respectivos. Ver [1, 2, 3]. Para esto en la próxima sección revisamos el concepto de energía asociado al Laplaciano de un grafo.

3.3. Energía asociada al Laplaciano de un grafo

Considere $G(V, E)$ un grafo conexo con n vértices. Sea u una función a valor real sobre los vértices. Se define la energía de u por

$$\mathcal{E}_G(u, u) = \sum_{x \sim y} (u(x) - u(y))^2$$

donde $x \sim y$ quiere decir que x e y son vértices adyacentes, es decir $xy \in E$. La forma bilineal asociada está dada por,

$$\mathcal{E}_G(u, v) = \sum_{x \sim y} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)).$$

Para que no haya confusión, en algunos casos, vamos a notar $\mathcal{E}(u, u) = \mathcal{E}(u)$.

Es fácil ver que si introducimos los vectores $U, V \in \mathbb{R}^n$ dados por $U = \{u(x)\}_{x \in V}$ y $V = \{v(x)\}_{x \in V}$ entonces

$$\mathcal{E}_G(u, v) = U^T \Delta_G V \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_G(u, u) = U^T \Delta_G U.$$

Vemos que la matriz Δ_G es la representación matricial de la energía \mathcal{E}_G .

Vamos a considerar ahora el caso particular de las aproximaciones $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$. En este caso debemos comparar las energías asociadas a los Laplacianos Δ_n y Δ_{n+1} , denotadas de aquí en adelante por

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(u, v) = \mathcal{E}_{G_n(V_n, W_n)}. \tag{3-4}$$

Para fijar ideas consideraremos solo el caso del triángulo de Sierpinski y el caso de V_0 y V_1 . En particular considere la energía asociada a V_0 y consideremos la energía asociada a una extensión de una función a V_1 en la Figura 3.2. Considere la función $u : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tomando valores como indicamos en la Figura 3.2.

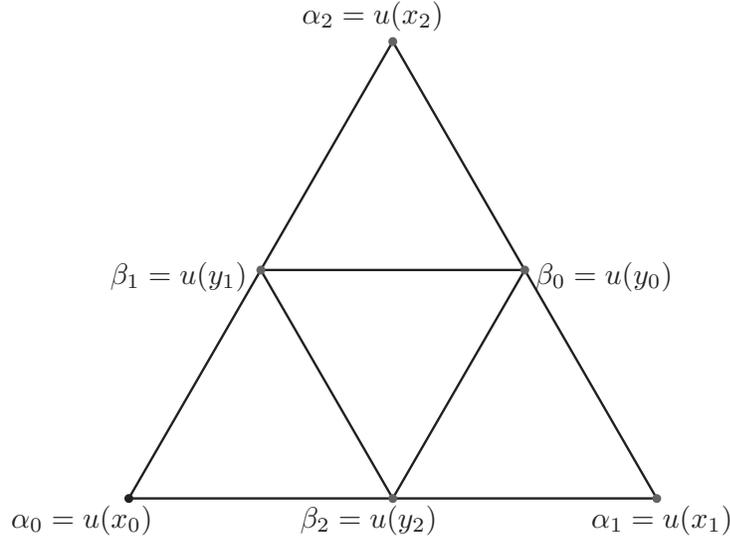


Figura 3-1.: En el triángulo de Sierpinski, $u(x_i) = \alpha_i$, donde $x_i \in V_n$ y $u(y_i) = \beta_i$ para $y_i \in V_{n+1} \setminus V_n$, para $i \in \{0, 1, 2\}$.

Podemos calcular directamente la energía en V_1 que será dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_1(u, u) = & (\alpha_0 - \beta_2)^2 + (\beta_2 - \alpha_1)^2 + (\alpha_1 - \beta_0)^2 + (\beta_0 - \alpha_2)^2 + (\alpha_2 - \beta_1)^2 \\ & + (\beta_1 - \alpha_0)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 + (\beta_2 - \beta_0)^2 + (\beta_1 - \beta_0)^2. \end{aligned}$$

Reescribiendo, tenemos

$$\tilde{\mathcal{E}}_1(u, u) = \sum_{i \neq j} \left[(\alpha_i - \beta_j)^2 + \frac{1}{2}(\beta_i - \beta_j)^2 \right].$$

Note ahora que $V_0 \subseteq V_1$. Sea u_1 una función definida en V_1 y considere la restricción de u a V_0 , es decir $u_0 = u_1|_{V_0}$ en V_0 . En principio no hay una relación entre $\tilde{\mathcal{E}}_1(u_1)$ y $\tilde{\mathcal{E}}_0(u_0)$. Note que si u_0 está definido sobre V_0 , existen muchas extensiones a V_1 , pero, existe solo una extensión que minimiza la energía $\tilde{\mathcal{E}}_1(u_1)$ (con u_1 extensión de u_0). Es decir, si planteamos el problema de dados α_0, α_1 y α_2 queremos resolver el problema de encontrar

$$\inf_{\beta_0, \beta_1, \beta_2} \tilde{\mathcal{E}}(u_1, u_1).$$

Este problema de minimización tiene una única solución como podemos ver fácilmente en la siguiente proposición.

Proposición 3.3.1. Sean $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, entonces:

1. Tenemos

$$\inf_{\beta_i \in \mathbb{R}} \sum_{i \neq j} \left[(\alpha_i - \beta_j)^2 + \frac{1}{2}(\beta_i - \beta_j)^2 \right] = \frac{3}{5} \sum_{i \neq j} \frac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_j)^2 \quad (3-5)$$

en donde $i, j = \{0, 1, 2\}$.

2. El ínfimo es alcanzado en $\beta_i = \frac{2s - \alpha_i}{5}$ donde $s = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Demostración: Calcularemos el mínimo de la función

$$f(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \sum_{i \neq j} \left[(\alpha_i - \beta_j)^2 + \frac{1}{2}(\beta_i - \beta_j)^2 \right],$$

para $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. buscamos los puntos críticos resolviendo el sistema

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_i} = 0 \text{ para } i = 0, 1, 2.$$

Por ejemplo para $i = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta_1} f(\beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \sum_{i=2}^3 [-2(\alpha_i - \beta_1) - (\beta_i - \beta_1)] + \sum_{j=2}^3 (\beta_1 - \beta_j) \\ &= 8\beta_1 - 2(\beta_2 + \beta_3) - 2(\alpha_2 - \alpha_3). \end{aligned}$$

Ahora por el método de mínimos sin restricción, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 4\beta_0 - \beta_1 - \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 4\beta_1 - \beta_0 - \beta_1 = \alpha_0 + \alpha_2 \\ 4\beta_2 - \beta_1 - \beta_0 = \alpha_0 + \alpha_1. \end{cases}$$

Al resolver el sistema, para cada β_i , obtenemos la solución $\beta_i = \frac{s - \alpha_i}{5}$, donde $s = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Dado que f es una función convexa este punto crítico es mínimo global y el valor mínimo es de

$$f\left(\frac{s - \alpha_1}{5}, \frac{s - \alpha_2}{5}, \frac{s - \alpha_3}{5}\right) = \frac{3}{5} \sum_{i \neq j} \frac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

□

Podemos introducir las energías renormalizadas usando (3-5). Defina

$$\mathcal{E}_0(u_0, u_0) = \tilde{\mathcal{E}}_0(u_0, u_0)$$

y

$$\mathcal{E}_1(u_1, u_1) = \frac{5}{3} \tilde{\mathcal{E}}_1(u_1, u_1)$$

De esta forma la constante $\frac{3}{5}$ asocia la energía del grafo con vértices V_0 con la energía del grafo con vértices V_1 . En particular para toda $u_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$, debido a la proposición anterior, podemos escribir,

$$\mathcal{E}_1(u_1, u_1) \geq \mathcal{E}_0(u_1|_{V_0}, u_1|_{V_0}),$$

donde $u_1|_{V_0}$ denota la restricción de u_1 a V_0 .

Introducimos también las energías renormalizadas de nivel $n = 2, 3, \dots$. Para $u_n : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ defina,

$$\mathcal{E}_n(u_n, u_n) = \left(\frac{5}{3}\right)^n \tilde{\mathcal{E}}_n(u_n, u_n). \quad (3-6)$$

Con la Proposición 3.3.1 estamos haciendo una asociación entre la energía del grafo V_n con la energía del grafo V_{n+1} , y lo hacemos con ayuda de una constante la cual es $\frac{3}{5}$. Esta constante, que se conoce como la constante de renormalización asociada al Laplaciano de un grafo con la forma de la energía.

Recordemos la definición de K del Capítulo 2, $K = \cup_{n=0}^{\infty} V_n$. Tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.3.2. *Para cualquier $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}_0$,*

$$\mathcal{E}_{n+1}(f, f) \geq \mathcal{E}_n(f, f)$$

donde \mathcal{E}_n está definida en (3-4).

Demostración: Vamos a usar una notación similar a la introducida en la Figura 3.2. En particular, dada $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ denotamos por $\{\alpha_\ell\}$ los valores de f en los nodos de V_n y por $\{\beta_k\}$ los valores de f en $V_{n+1} \setminus V_n$. Notemos que

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n+1}(f, f) = \sum_{x \sim_n y} (f(x) - f(y))^2 = \sum_{\tau} \sum_{i \neq j, x_i, y_j \in \tau} \left[(\alpha_i - \beta_j)^2 + \frac{1}{2}(\beta_i - \beta_j)^2 \right].$$

Si vértices x, y son adyacentes, decimos que $x \sim_n y$. La última suma es sobre todas las celdas del triángulo de Sierpinski (Ver Figura 3.3). Usando la Proposición 3.3.1 en cada uno de los triángulos tenemos que $\tilde{\mathcal{E}}_{n+1}(f, f) \geq \frac{5}{3} \tilde{\mathcal{E}}_n(f, f)$ lo cual prueba la proposición. \square

Tenemos el siguiente resultado de unicidad de extensión con mínima energía.

Proposición 3.3.3. *Para cualquier $f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ existe una única función $g : V_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = g|_{V_n}$ y*

$$\mathcal{E}_n(f, f) = \mathcal{E}_{n+1}(g, g).$$

Demostración: Sea τ uno de los triángulos de V_n y sea x_0, x_1 y x_2 los vértices de τ . Sea

$$y_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y_1 = \frac{1}{2}(x_2 + x_0), \quad y_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1),$$

los vértices en $V_{n+1} \setminus V_n$, contenidos en τ . Esto se cumple para todo punto en $V_{n+1} \setminus V_n$ de cualquier triángulo τ de V_n . Es suficiente con definir $g(x_i) = f(x_i)$ y $g(y_i) = \frac{2s-f(x_i)}{5}$ para $i = 0, 1, 2$, donde $s = f(x_0) + f(x_1) + f(x_2)$. \square

3.4. Forma matricial y constante de renormalización

Denote por $A_n = \Delta G_n$ donde $\{G_n(V_n, W_n)\}$ es la sucesión de grafos asociados a la aproximación de fractal autosimilar K .

Dado $u : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ podemos definir el vector $U = \{u(x_i)\}_{x_i \in V_n}$, y tenemos

$$U^T A_n U = \sum_{x \sim y} (u(x) - u(y))^2.$$

Considere $u : V_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ con la siguiente descomposición de coordenadas de U ,

$$U = [\{u(y_j)\}_{y_j \in V_{n+1} \setminus V_n}, \{u(x_j)\}_{x_j \in V_n}]$$

Denotemos $U = [\beta, \alpha]$ esta descomposición.

Esta partición de coordenadas en dos grupos genera una partición por bloques en la matriz A_{n+1} . De hecho

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+1,n+1} & F_{n+1,n} \\ F_{n+1,n}^T & F_{n,n} \end{pmatrix},$$

donde

$$\beta^T F_{n+1,n+1} \beta = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix}^t A_{n+1} \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\beta^T F_{n+1,n} \alpha = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix}^t A_{n+1} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

y

$$\alpha^T F_{n,n} \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}^t A_{n+1} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

Dado α , queremos encontrar β tal que la energía de $U = [\beta, \alpha]$ sea mínima.

Queremos minimizar

$$\begin{aligned} U^T A_{n+1} U &= \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}^t A_{n+1} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \\ &= \beta^T F_{n+1,n+1} \beta + 2\beta^T F_{n+1,n} \alpha + \alpha^T F_{n,n} \alpha. \end{aligned}$$

Derivando con respecto a β obtenemos

$$F_{n+1,n+1}\beta = -F_{n+1,n}\alpha.$$

Cuando $F_{n+1,n+1}$ es invertible (que de hecho lo es por ser una submatriz de A_{n+1} que es no negativa cuyo espacio nulo son funciones constantes) tenemos,

$$\beta = -F_{n+1,n+1}^{-1}F_{n+1,n}\alpha, \quad (3-7)$$

y obtenemos con (3-7)

$$\begin{aligned} U^T A_{n+1} U &= \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}^t A_{n+1} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \\ &= \alpha^T (F_{n,n} - F_{n+1,n}^T F_{n+1,n+1}^{-1} F_{n+1,n}) \alpha \\ &= \alpha^T s_n \alpha, \end{aligned}$$

donde $s_n = F_{n,n} - F_{n+1,n}^T F_{n+1,n+1}^{-1} F_{n+1,n}$. Queremos comparar esta energía mínima con la energía de α en el grado V_n , es decir, queremos calcular r_n tal que,

$$\alpha^T A_n \alpha \leq r_{n+1} \alpha^T s_n \alpha.$$

En otras palabras queremos calcular,

$$r_{n+1} = \max_{\alpha \neq 0} \frac{\alpha^T A_n \alpha}{\alpha^T s_n \alpha}.$$

Vemos que r_n es el mayor autovalor del problema de autovalores generalizados,

$$A_n \alpha = \lambda s_n \alpha.$$

Tenemos entonces que podemos renormalizar la energía como

$$\begin{aligned} L_1 &= r_1 \delta_{G1} \\ L_2 &= r_1 r_2 \delta_{G2} \\ &\vdots \\ L_n &= \left(\prod_{i=1}^n r_i \right) \delta_{Gn} \end{aligned}$$

En el caso del triángulo de Sierpinski vemos que $V_{n+1} \setminus V_n$ corresponden a triángulos disjuntos, y su construcción es la misma que hacemos para pasar de V_0 a V_1 . Por lo tanto podemos pensar que la extensión de mínima energía la calculamos en cada uno de estos triángulos, es por esto que $r_i = \frac{3}{5}$, para todo i , y la constante de renormalización es

$$r = \left(\frac{3}{5} \right)^n.$$

En el Anexo A podemos ver otro método para encontrar la constante de renormalización a partir de la teoría de redes eléctricas.

3.5. Propiedades de la energía sobre un grafo conexo

En la sección anterior construimos para el grafo $G_n(V_n, E_n)$ asociado al triángulo de Sierpinski una sucesión de energías *renormalizadas* $\{\mathcal{E}_n\}$ sobre G_n tal que para $u : K \rightarrow \mathbb{R}$ la sucesión $\mathcal{E}_m(u)$ es creciente. Podemos definir entonces

$$\mathcal{E}(u, u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(u, u).$$

Note que este límite puede ser ∞ . Note también que si $\mathcal{E}_n(u, u) = 0$ entonces u es constante. Esto se debe a que si

$$\sum_{x \sim_n y} (u(x) - u(y))^2 = 0$$

entonces tenemos que $u(x) - u(y) = 0$ para todo $x \sim_n y$ y como estamos asumiendo que V_n es conexo concluimos que u es constante.

Definimos el siguiente conjunto, $H^1 = \{u : K \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathcal{E}(u, u) < +\infty\}$. Si $u \in H^1$ entonces u es de energía finita.

También definimos el conjunto $H_*^1 = H^1 \setminus \{u \in H^1 \mid u \text{ es constante}\}$ el cual lo definimos como el espacio cociente entre H^1 y el espacio de funciones constantes.

En lo que queda de esta sección vamos a mostrar que si u tiene energía finita entonces es uniformemente continua sobre K , por lo tanto podemos determinar así una única extensión continua de K .

Teorema 3.5.1. *Si $u \in H^1$, entonces $\mathcal{E}(u, u)$ es uniformemente continua sobre el espacio V_n .*

Demostración Sea u una función de energía finita, vamos a tener en cuenta dos formas de ver que la energía es continua.

1. (Caso 1) Nótese que $\mathcal{E}_n(u) \leq \mathcal{E}(u)$. Si $x \sim_n y$ para $x, y \in V_n$ tenemos

$$r^{-n}(u(x) - u(y))^2 \leq \mathcal{E}_n(u) \leq \mathcal{E}(u).$$

Lo cual podemos reescribir así,

$$|u(x) - u(y)| \leq r^{n/2} \mathcal{E}(u)^{1/2}.$$

Ahora consideremos la cadena de puntos $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+j}, x_{n+j+1} \in V_{n+j}$, donde $x_{n+j} \sim_{n+j} x_{n+j+1}$, entonces tenemos,

$$\begin{aligned} |u(x_n) - u(x_{n+k})| &\leq |u(x_n) - u(x_{n+1})| + \dots + |u(x_{n+k-1}) - u(x_{n+k})| \\ &\leq (r^{n/2} + \dots + r^{(n+k)/2}) \mathcal{E}(u)^{1/2} \\ &\leq r^{n/2} (1 + r^{1/2} + \dots + r^{k/2}) \mathcal{E}(u)^{1/2} \\ &\leq \frac{r^{n/2}}{1 - r^{1/2}} \mathcal{E}(u)^{1/2}. \end{aligned}$$

2. (Caso 2) Por la geometría de K , pueden existir dos cadenas de la misma longitud (ver Figura 2) para llegar de uno al otro, así obtenemos:

$$|u(x_n) - u(x_{n+k})| \leq \frac{2r^{n/2}}{1 - r^{1/2}} \mathcal{E}(u)^{1/2}.$$

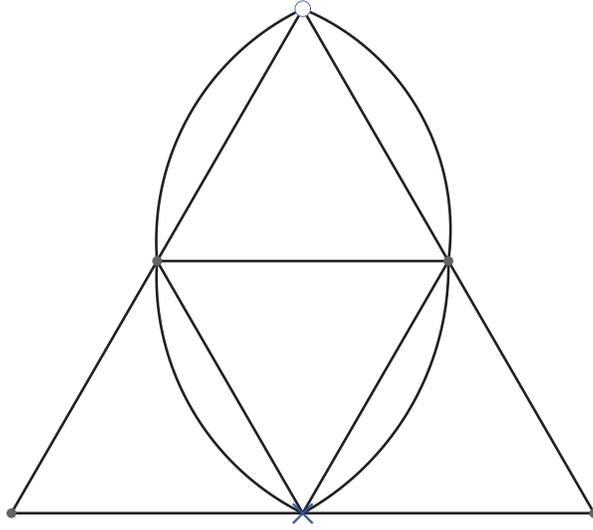


Figura 3-2.: Como podemos ver en el gráfico existen dos caminos mínimos desde el vértice representado por \times y el vértice representado por \circ .

De esta forma podemos decir que $\mathcal{E}(u, u)$ es continua. □

Ahora vamos a estudiar el espacio H_*^1 , el cual es el espacio cociente entre H^1 y las funciones constantes.

Lema 3.5.2. *Sea $u, v \in H_*^1$. Entonces,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(u, v) = \mathcal{E}(u, v)$$

existe y define un producto interno sobre el H_^1 .*

Demostración: Para probar la existencia del límite, vamos a utilizar la identidad de polarización

$$\mathcal{E}_n(u, v) = \frac{1}{4} (\mathcal{E}_n(u + v) - \mathcal{E}_n(u - v)).$$

Dado que los límites que están en el lado derecho existen, entonces el $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(u, v)$ existe. Para probar que es un producto interno, vamos a determinar que $\mathcal{E}(u, u) = 0$ implica que $u = 0$.

Si $\mathcal{E}(u) = 0$, entonces $\mathcal{E}_n(u) = 0$. Dado que $\mathcal{E}_m(u)$ es creciente, positiva y continua, entonces u debe ser constante sobre V_n para todo n , factorizando u obtenemos la propiedad deseada. \square

Con este lema, podemos determinar que el conjunto dado por la energía del grafo es un espacio de Hilbert.

Teorema 3.5.3. *El conjunto H_*^1 forma un espacio de Hilbert.*

Demostración: Vamos a demostrar que H_*^1 es completo, para eso lo asociaremos con el espacio $H_0^1 = \{u \in H^1 : u(q_0) = 0, q_0 \in V_0\}$.

Sea $\{U_n\}$ una sucesión en H_0^1 tal que $\mathcal{E}(u_n - u_{n'}) \rightarrow 0$, cuando $n, n' \rightarrow \infty$, entonces para un n fijo, $\mathcal{E}_n(u_m - u_{m'}) \rightarrow 0$, cuando $m, m' \rightarrow \infty$ dado que $\mathcal{E}(u_m - u_{m'}) \geq \mathcal{E}_n(u_m - u_{m'})$

Dado que estamos trabajando sobre un número finito de vértices, tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x) \text{ existe para cada } x \in V_n$$

luego para el índice n , obtenemos lo siguiente

$$\mathcal{E}_n(u_m - u) = \lim_{m' \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(u_m - u_{m'})$$

dado que este se cumple para los $m' \geq m$, entonces esto podemos hacer independiente del n en el cual estemos trabajando. \square

Como resultado de lo que hemos estudiado, ya sabemos que existen funciones no constantes $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{E}(f, f) < \infty$. La Proposición 3.3.3 nos dan herramientas para construir dichas funciones, en lo que sigue daremos la definición de función armónica sobre un grafo, para luego buscar aproximaciones a partir de un espacio de funciones continuas para así llegar al objetivo principal del trabajo.

Sea $f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que $g : V_m \rightarrow \mathbb{R}$ es una extensión armónica de f si:

1. $g(x) = f(x)$ para cualquier $x \in V_n$.
2. $\mathcal{E}_n(g, g) = \mathcal{E}_n(f, f)$.

En este caso diremos que g es una función armónica de f . En particular si $n = 0$ diremos que g es armónica en V_m .

Definición 3.5.4. *El espacio $S(H_0, V_n)$ de splines por partes de nivel n está definido sobre el espacio de funciones continuas tal que $u \circ F_w$ es armónico para todo $|w| = n$, donde F_w está dado en (2-7).*

Es facil ver que $S(H_0, V_n)$ está contenido en H^1 dado que sus elementos tienen las características de ser una función con el mínimo de energía y es finito dado que está determinado por los vértices en la iteración n .

Teorema 3.5.5. *Cualquier función $u \in C(K)$ la podemos aproximar uniformemente por una sucesión $u_n \in S(H_0, V_n)$, con $u_n|_{V_n} = u|_{V_n}$. Además, si $u \in H^1$ entonces u_n converge a u en el espacio H_*^1 .*

Demostración: Sea $\epsilon > 0$, tenemos por la continuidad de u que para cierto n , $|u(x) - u(F_w(q_0))| < \epsilon$, para todo w tal que $|w| = n$. Dado que $u_n|_{V_n} = u|_{V_n}$, también tenemos que $|u_m(x) - u(F_w(q_0))| < \epsilon$, de acá:

$$\begin{aligned} |u(x) - u_n(x)| &\leq |u(x) - u(F_w q_0)| + |u(F_w q_0) - u_n(F_w q_0)| + |u_n(F_w q_0) - u_n(x)| \\ &\leq \epsilon + 0 + \epsilon \\ &\leq 2\epsilon \text{ para } x \in F_w K \end{aligned}$$

así, $|u_m - u|_\infty \leq 2\epsilon$.

La siguiente suposición $u \in H^1$. Entonces $\mathcal{E}_n(u, u) = \mathcal{E}_n(u_m, u_m) \nearrow \mathcal{E}(u_m, u_m) = \mathcal{E}(u, u)$. También $\mathcal{E}(u, u_m) = \mathcal{E}(u \cdot u_m) = \mathcal{E}_n(u_m)$, así:

$$\mathcal{E}(u - u_m, u - u_m) = \mathcal{E}(u, u) - 2\mathcal{E}(u, u_m) + \mathcal{E}(u_m, u_m) = \mathcal{E}(u, u) - \mathcal{E}_n(u_m, u_m) \rightarrow 0$$

□

Con estos teoremas tenemos una idea principal del espacio de funciones sobre los vértices del grafo y como a partir del espacio spline podemos encontrar una aproximación a la función energía.

4. Forma débil de operadores diferenciales

En este capítulo presentaremos la formulación débil de operadores diferenciales. Para esto introduciremos la medida autosimilar y su relación con el operador Laplaciano mediante la fórmula de integración por partes.

4.1. Medida autosimilar

En esta sección introduciremos la noción de medida sobre un conjunto autosimilar, enfocándolo hacia el triángulo de Sierpinski. Los demás casos son similares.

Consideremos una medida de probabilidad μ sobre K introducido en la Sección 2.4.2. Se requiere que la medida de probabilidad μ cumpla las siguientes cuatro condiciones:

- (Positiva) Para cualquier celda C_j del triángulo de Sierpinski tenemos que $\mu(C_j) > 0$.
- (Aditividad) Si $C = \bigcup_{j=1}^N C_j$, donde cada C_j es una celda de K se tiene que

$$\mu(C) = \sum_{j=1}^N \mu(C_j).$$

- (Continuidad) Para todo subconjunto medible de K tenemos que $\mu(A) \rightarrow 0$ cuando $A \rightarrow \emptyset$.
- (Probabilidad) $\mu(K) = 1$.

En el triángulo de Sierpinski, cada celda de nivel n tiene medida positiva. Si la medida de todas las celdas es la misma obtenemos la medida estándar la cual es un caso especial de la medida autosimilar.

La medida autosimilar en triángulo de Sierpinski puede ser construida a partir conjunto de probabilidades asociadas a la aproximación inicial K_0 , digamos, $\{\mu_i\}_{i=0,1,2}$. Estos valores cumplen que

$$\sum_{i=0}^2 \mu_i = 1 \text{ para } \mu_i > 0.$$

La medida la generamos de la siguiente forma. Por la construcción del triángulo de Sierpinski, tenemos que, (ver (2-7))

$$K = \bigcup_{|w|=m} f_w(K) \quad \text{y que} \quad K = \bigcup_{j=0}^2 f_j(K).$$

Entonces podemos escribir que

$$f_w(K) = f_w \left(\bigcup_{j=0}^2 f_j(K) \right) = \bigcup_{j=0}^2 f_w(f_j(K)),$$

y por lo tanto obtenemos

$$\mu(f_w(K)) = \sum_{i=0}^2 \mu(f_w f_i(K)).$$

Dado que la medida estándar es igual en cada celda del triángulo de Sierpinski, entonces tenemos que $\mu_i = \frac{1}{3}$. La medida estándar, para la imagen de A por la función f_i está dada por

$$\mu(f_i(A)) = \mu_i \mu(A). \quad (4-1)$$

Para probar esto observe que A podemos reescribir como

$$A = \bigcup_{i=0}^2 (A \cap f_i(K))$$

y por tanto debemos tener que

$$\mu(A) = \sum_{i=0}^2 \mu(A \cap f_i(K)). \quad (4-2)$$

Teniendo en cuenta que

$$f_i^{-1}(A) = f_i^{-1}(A \cap f_i(K)) \quad \text{implica} \quad A \cap f_i(K) = f_i(f_i^{-1}(A \cap f_i(K))),$$

tenemos que

$$\mu(A \cap f_i(K)) = \mu_i \mu(f_i^{-1}(A \cap f_i(K))) = \mu_i \mu(f_i^{-1}(A)).$$

Reemplazando este valor en (4-2),

$$\mu(A) = \sum_{j=0}^2 \mu_j \mu(f_j^{-1}(A)).$$

Donde obtenemos el resultado en (4-1) dado que cuando $i \neq j$, los términos se hacen cero.

Ya definida la medida sobre triángulo de Sierpinski, podemos definir la integral de una función continua g ,

$$\int_K g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|w|=m} g(x_w) \mu(f_w(K)) \text{ para } x_w \in f_w(K).$$

Por el teorema del valor medio para integrales, $g(x_w)$ reemplazamos por el desarrollo de g sobre los puntos de la frontera de la celda,

$$\int_K g d\mu \approx \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \sum_{i=0}^2 \sum_{|w|=m} g(f_w(q_i)) \mu(f_w(K)).$$

Así, desarrollamos una integral discreta sobre las aristas de un grafo. Luego al grafo G le asignamos una probabilidad $\nu_n(x)$ a cada vértice x . Así obtenemos

$$\int_G g d\nu = \sum_{x \in V} g(x) \nu_n(x),$$

entonces podemos reescribir así la integral,

$$\int_K g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n} g d\nu_n,$$

teniendo en cuenta que G_n es el grafo en la n -ésima iteración y

$$\nu_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(\mu(f_w(K)) + \mu(f_{w'}(K))) & \text{si } x \in V_n \setminus V_0, \\ \frac{1}{3}\mu(f_w^n(K)) & \text{si } x \in V_0, \end{cases}$$

en el sentido que $x = f_w(q_i) = f_{w'}(q_j)$, para $i \neq j$. Notese que w y w' son las iteraciones que parte desde dos vértices distintos de V_0 y llegan al vértice x .

Dado que la medida estándar para el triángulo de Sierpinski es,

$$\mu(f_w(K)) = 1/3^n.$$

Se obtenemos el siguiente resultado,

$$\int_{G_n} g d\nu_n = 3^{-n} \left(\frac{2}{3} \sum_{x \in V_n \setminus V_0} g(x) + \frac{1}{3} \sum_{x \in V_0} g(x) \right). \quad (4-3)$$

4.2. Fórmula de la integración por partes

Usando la notación de la Sección 3.5. Para el triángulo de Sierpinski, obtuvimos que la energía para $f : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$, definimos para $n \in \mathbb{N}_0$ la forma de la energía como

$$\mathcal{E}_n(f, f) = \left(\frac{5}{3}\right)^n \sum_{x \sim_n y} (f(x) - f(y))^2.$$

Definimos también el operador de Laplace renormalizados

$$\Delta_n = 5^n \tilde{\Delta}_n. \quad (4-4)$$

Con un cambio de variable podemos mostrar que $\mathcal{E}_n(f, f) = - \int f \Delta_n f d\mu^n$, donde Δ_n es el Laplaciano renormalizado para el grafo en la n -ésima iteración (Ver 4-4).

A esta identidad la conocemos como la fórmula de integración por partes la cual dice que para toda función $f : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$, tenemos que

$$\mathcal{E}_n(f, f) = - \int f(x) \Delta_n f(x) \mu^n(dx). \quad (4-5)$$

Usando esta identidad podemos definir el Laplaciano en K por

$$- \int f(x) \Delta f(x) \mu(dx) = \mathcal{E}(f, f). \quad (4-6)$$

4.3. Formulaciones para el problema de Dirichlet

Dada $g : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar $u : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = g(x) & x \in V_\infty \setminus V_0, \\ u(x) = g(x) & x \in V_0, \end{cases} \quad (4-7)$$

donde $\Delta u(x)$ es definido en (4-6). Nos referiremos a esta formulación del problema de Dirichlet como formulación fuerte. De acuerdo a la fórmula de integración por partes tenemos

$$- \int \Delta u \cdot v d\mu = \mathcal{E}(u, v).$$

Así, deducimos que en la forma débil se busca $u \in H^1$ tal que

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u, v) = \int g v d\mu & \text{para todo } v \in H_0^1 \\ u(x) = g(x) & x \in V_0. \end{cases} \quad (4-8)$$

Recuerde que $H^1 = \{u : V_\infty \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathcal{E}(u, u) < +\infty\}$ y $H_0^1 = \{v \in H^1 \mid v(x) = 0, x \in V_0\}$.

5. Aproximaciones numéricas para el problema de Dirichlet

Consideramos el problema: Dada $g : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar $u : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = g(x) & x \in V_\infty \setminus V_0, \\ u(x) = h(x) & x \in V_0. \end{cases} \quad (5-1)$$

En este capítulo construimos aproximaciones numéricas para este problema de Dirichlet. En particular construiremos formulaciones discretas que pretenden aproximar la solución de este problema o que están relacionadas con la misma.

5.1. Método de diferencias finitas: aproximación por sucesión de Laplacianos renormalizados

Recordemos que la construcción del Laplaciano sobre V_∞ la hicimos por analogía con la aproximación de diferencias finitas en una malla regular del operador de Laplace clásico. Resulta entonces proponer la siguiente aproximación para (5-1).

Definimos también los operadores de Laplace renormalizados

$$\Delta_n = 5^n \tilde{\Delta}_n. \quad (5-2)$$

donde

$$\tilde{\Delta}_n = P_{G_n} - A_{G_n},$$

es la diferencia de las matrices de pesos y adyacencia asociadas al grafo $G_n = G_n(V_n, W_n)$. Aproximamos la solución de (5-1) por $u^{DF} : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ que es construida que está dada por, $U^{DF} = \{u_n^{DF}(x)\}_{x \in V_n}$ y considere la partición

$$U^{DF} = \{\{u_n^{DF}(x)\}_{x \in V_0}, \{u_n^{DF}(x)\}_{x \in V_n \setminus V_0}\} = [U_0, U_I].$$

Esta representación vale para cualquier función definida en V_n . Esta partición genera la siguiente partición por bloques

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} \Delta_{0,0} & \Delta_{0,I} \\ \Delta_{I,0} & \Delta_{I,I} \end{pmatrix}.$$

Entonces $U_0 = \{g(x)\}_{x \in V_0}$ y U_I satisface el sistema lineal

$$\Delta_{II}U_I = f_I - D_{I,0}U_0. \quad (5-3)$$

En resumen el problema discreto es: Calcular u^{DF} representado por $U = [U_0, U_I]$ con U_0 dado y U_I satisface (5-3).

Esta formulación tiene la ventaja de que su implementación es simple y esta soportada por el hecho de que es así como construimos el operador de Laplace en V_∞ , como límite de estas aproximaciones. En las siguientes secciones ilustraremos algunos experimentos numéricos.

Una de las desventajas de esta implementación es que necesita conocer de antemano la constante de renormalización para construir las matrices de Laplace renormalizadas.

Cabe notar que en términos de aproximación numérica la constante de renormalización puede ser vista como una escala adecuada para la acción del forzante $f(x)$ en cada uno de los grafos V_n . Por esto tiene sentido considerar también aproximaciones de elementos finitos que requieren el uso de formas débiles.

A continuación proponemos un procedimiento numérico para determinar una aproximación de la constante de renormalización a partir de los grafos sobre V_n .

5.1.1. Un procedimiento para aproximar la constante de renormalización

La idea es usar el problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 1 & x \in K, \\ u(x) = 0 & x \in V_0. \end{cases} \quad (5-4)$$

Supongamos que no conocemos el factor 5^n en (5-2). Coloquemos el factor de escala como siendo q_n . Podemos aproximar el problema (5-4) por

$$\begin{cases} q^n \tilde{\Delta}_n u_n(x) = 1 & x \in V_n \setminus V_0, \\ u_n(x) = 0 & x \in V_0. \end{cases}$$

Queremos aproximar el valor de la constante q . Observe que numéricamente podemos calcular la solución de

$$\begin{cases} \tilde{\Delta} z_n = 1 & x \in V_n \setminus V_0, \\ z_n(x) = 0 & x \in V_0. \end{cases}$$

Debemos tener que $z_n(x) = q^n u_n(x)$, $x \in V_n$, ya que $\tilde{\Delta}_n$ es invertible. Para V_{n+1} tendremos $z_{n+1} = q^{n+1} u_{n+1}$. Observe que z_n y z_{n+1} pueden ser calculados sin necesidad de conocer q .

$(n, n + 1)$	máx _x $q_{n,n+1}$	mean _x $q_{n,n+1}$
(3,4)	4.9370	4.8753
(4,5)	4.9872	4.9726
(5,6)	4.9974	4.9943
(6,7)	4.9995	4.9988
(7,8)	4.9999	4.9998

Tabla 5-1.: Valores calculados de $q_{n,n+1}$ definido en (5-7).

Para n lo suficientemente grande debemos tener

$$z_n = q^n u_n \quad \text{con} \quad u_n \approx u, \quad (5-5)$$

$$z_{n+1} = q^{n+1} u_{n+1} \quad \text{con} \quad u_{n+1} \approx u, \quad (5-6)$$

donde u es la solución exacta de (5-4). Podemos usar

$$q \approx q_{n,n+1} := \frac{q^{n+1} u_{n+1}(x)}{q^n u_n(x)} = \frac{z_{n+1}(x)}{z_n(x)}, \quad (5-7)$$

donde $x \in V_n \setminus V_0$. Usando este método podemos calcular la Tabla 5-1. Así, observe que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_{n,n+1} = 5$.

De forma análoga podemos aproximar la constante de renormalización. Sabemos que podemos aproximar este problema (5-4) por

$$\begin{cases} r^{-n} \tilde{\mathcal{E}}(u, v) = \int v d\mu_n & \text{para todo } v. \\ u_n(x) = 0 & x \in V_0. \end{cases}$$

Queremos aproximar la constante r .

Observe que numéricamente podemos calcular la solución de

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{E}}(z_n, v) = \int v d\mu_n & \text{para todo } v. \\ z_n(x) = 0 & x \in V_0. \end{cases}$$

Debemos tener que $z_n(x) = r^{-n} u_n(x)$, $x \in V_n$, ya que $\tilde{\Delta}_n$ es invertible. Para V_{n+1} tendremos $z_{n+1} = r^{-n-1} u_{n+1}$. Observe que z_n y z_{n+1} pueden ser calculados sin necesidad de conocer r .

Para n lo suficientemente grande debemos tener

$$z_n = r^{-n} u_n \quad \text{con} \quad u_n \approx u, \quad (5-8)$$

$$z_{n+1} = r^{-n-1} u_{n+1} \quad \text{con} \quad u_{n+1} \approx u, \quad (5-9)$$

donde u es a solución exacta de (5-4).

$(n, n + 1)$	máx _x $r_{n,n+1}$	mean _x $r_{n,n+1}$
(3,4)	1.39058	1.28790
(4,5)	1.4698	1.3635
(5,6)	1.5331	1.4349
(6,7)	1.5797	1.4970
(7,8)	1.6116	1.5472
(8,9)	1.6325	1.5854

Tabla 5-2.: Valores calculados de $r_{n,n+1}$ definido en (5-10).

Vemos entonces que para $x \in V_n \setminus V_0$ podemos aproximar

$$r = \frac{r^{-n}u_n(x)}{r^{-n-1}u_{n+1}(x)} \approx r_{n,n+1} = \frac{z_n(x)}{z_{n+1}(x)}. \quad (5-10)$$

De esta forma podemos calcular la Tabla 5-2.

En este caso la convergencia es mas lenta y podemos verificar usando argumentos de escala de las integrales calculadas antes que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_{n,n+1} = 1,666\dots = \frac{5}{3}$.

5.2. Método de elementos finitos

La idea del método de elementos finitos es aproximar la forma débil. La formulación discreta la construimos de la siguiente forma.

Definimos $P^n = \{u : u : V_n \rightarrow \mathbb{R}\}$. Usamos la formulación débil que busca $u \in H^1$ tal que

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u, v) = \int gvd\mu & \text{para todo } v \in H_0^1 \\ u(x) = g(x) & x \in V_0. \end{cases} \quad (5-11)$$

La idea es plantear este mismo problema en P^n en lugar de H^1 . En la formulación de Galerkin intentaremos encontrar $u \in P^n$ tal que

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u, v) = \int gvd\mu & \text{para todo } v \in P^n \cap H_0^1. \\ u(x) = g(x), & x \in V_0 \end{cases} \quad (5-12)$$

Note que tanto u como v están definidas sobre V_n y por tanto esta formulación es equivalente a

$$\begin{cases} \mathcal{E}_n(u, v) = \int gvd\mu & \text{para todo } v \in P^n \cap H_0^1. \\ u(x) = g(x), & x \in V_0. \end{cases} \quad (5-13)$$

Note que ahora calculamos la energía \mathcal{E}_n en lugar de \mathcal{E} . Queremos introducir una aproximación para lo ejemplos introducidos en el Capítulo 2. En este trabajo proponemos dos alternativas para implementar una aproximación de esta formulación.

5.2.1. Integrales a lo largo de las aristas

Recuerde que $\mathcal{E}_n(u, v) = -\int \Delta_n u \cdot v d\mu_n^1$ cuando $u, v : V_n \rightarrow \mathbb{R}$. Usando esta igualdad como motivación introducimos la siguiente forma bilineal

$$\mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = \sum_{x \sim_n y} \int_x^y u' v' d\nu_n^1 \quad (5-14)$$

donde por u' denotamos la derivada a lo largo del segmento $[x, y]$ de la interpolación lineal de los valores $u(x)$ y $u(y)$ en los extremos del intervalo. La medida ν_n^1 es definida como la medida de longitud a lo largo de las aristas de W_n . Proponemos el siguiente problema discreto,

$$\begin{cases} 2\mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = \int g v d\nu_n^1 \text{ para todo } v \in P^n \cap H_0^1. \\ u(x) = g(x), \quad x \in V_0. \end{cases} \quad (5-15)$$

Podemos escribir $u = u_I + u_G$ donde $u_G(x) = g(x)$, $x \in V_0$; $u_G(x) = 0$, en $x \in V_n \setminus V_0$ así, encontrar $u_I \in P^n$ tal que $u_I(x) = 0$ para $x \in V_0$ y tal que

$$\mathcal{E}_n^{(1)}(u_I, v) d\nu_n^1 = \int g v d\nu_n^1 - \mathcal{E}_n^{(1)}(u_G, v)$$

Observamos que está formulación es equivalente a

$$A_n^{(1)} u = b_n^{(1)}.$$

Denotemos $V_n \setminus V_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ el conjunto de vértices “interiores” según la terminología de elementos finitos, tenemos

$$a_{ij} = \sum_{x \sim_n y} \int_x^y \varphi'_{x_i} \varphi'_{x_j} d\nu_n^1$$

donde φ_{x_i} es la interpolación lineal de la función característica de $\{x_i\}$ en V_n . También tenemos que

$$b_i = \int g \cdot \varphi_j d\mu_n - \int u'_G \varphi'_j d\nu_n^1.$$

Queremos estudiar numéricamente las relación entre (5-18) y (5-13) para los ejemplos de conjuntos autosimilares estudiados en el Capítulo 2.

Recuerde que

$$\mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = \sum_{x \sim_n y} \int_x^y u'(t) v'(t) d\nu_n^1.$$

Integrando por partes en cada arista observamos que

$$\mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = \sum_{x \sim_n y} u'(t) v(t) \Big|_x^y - \int_x^y u''(t) v(t) d\nu_n^1.$$

Como u y v son funciones lineales, $u'' = 0$ en cada segmento. Obtenemos el siguiente resultado,

$$\mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = \sum_{x \sim_n y} u'(y)v(y) - u'(x)v(x).$$

Calculando las derivadas en términos de los valores extremos y teniendo en cuenta que la distancia entre vértices adyacentes en el triángulo de Sierpinski es de $1/2^n$, tenemos

$$\mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = \sum_{x \sim_n y} \frac{u(y) - u(x)}{1/2^n} v(y) - \frac{u(y) - u(x)}{1/2^n} v(x) = 2^n \sum_{x \sim_n y} (u(y) - u(x))(v(y) - v(x)).$$

De esta forma, llegamos a que

$$A_n^{(1)} = 2^n \cdot \tilde{\Delta}_n.$$

Para obtener la parte derecha de (5-13) vamos a aproximar g linealmente, quiere decir que vamos a tomar el conjunto de puntos $\{g(x)\}_{x \in V_n}$ y conectarlos con segmentos de recta. La conexión esta dado por las aristas del grafo G_n que representan el fractal, es decir que si $x \sim y$ entonces $f(x) \sim f(y)$.

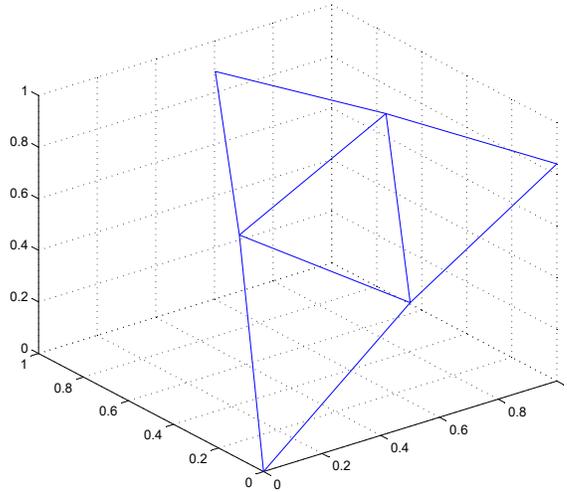


Figura 5-1.: Aproximación de la función $g(x, y) = \sin(x + y)$ a través de rectas que pasan por los puntos $\{g(x)\}_{x \in V_n}$ cuando $n = 1$.

Con está aproximación la cual nombraremos \hat{g} vamos a hacer la integración en (5-13). Así, tenemos lo siguiente

$$\int \hat{g} \varphi_j d\nu_n^1 = \sum_{a \sim_n b} \int_0^{2^{-n}} (2^n(g(b) - g(a))x - g(a)) \cdot \varphi_j(x) dx,$$

donde $2^n(g(b) - g(a))x - g(a)$ es la ecuación de la recta que une los puntos $(a, g(a))$ y $(b, g(b))$, $a, b \in V_n$ pasando esto al intervalo de la distancia entre dos vértices adyacentes del triángulo.

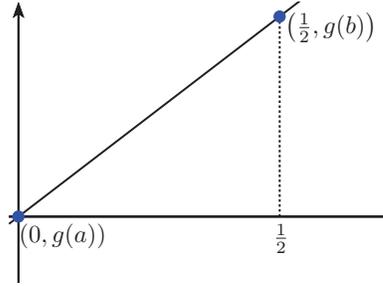


Figura 5-2.: Uno de los segmentos de recta para la función $g(x, y) = \sin(x + y)$ donde $a = (0, 0)$ y $b = (\frac{1}{2}, 0)$ en la iteración $n = 1$.

La formulación anterior debe ser reescalada con una constante de renormalización para obtener.

$$\begin{cases} (r^{(1)})^n \mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = \frac{1}{2} \int g v d\nu_n^{(1)} \text{ para todo } v \in P^n \cap H_0^1. \\ u(x) = g(x), \quad x \in V_0. \end{cases} \quad (5-16)$$

La constante $r^{(1)}$ puede ser aproximada usando un procedimiento análogo al descrito anteriormente.

El valor 2 se justifica ya que para cualquier n tenemos $\int f d\mu_n \approx \frac{1}{2} \int f d\nu_n^{(1)}$.

5.2.2. Integrales sobre triángulos

Introducimos la siguiente forma bilineal

$$\mathcal{E}_n^{(2)}(u, v) = \sum_{\tau \in K_n} \int_{\tau} \nabla u \nabla v d\nu_n^{(2)} \quad (5-17)$$

donde por ∇u denotamos el gradiente, en el triángulo τ de la interpolación lineal de los valores de u en los extremos del triángulo. La medida $\nu_n^{(2)}$ es definida como la medida de área restringida a K_n . Se propone el siguiente problema discreto,

$$\begin{cases} \mathcal{E}_n^{(2)}(u, v) = \int g v d\nu_n^{(2)} \text{ para todo } v \in P^n \cap H_0^1. \\ u(x) = g(x), \quad x \in V_0. \end{cases} \quad (5-18)$$

Procediendo como en la sección anterior obtenemos el sistema lineal

$$A_n^{(2)} u = b_n^{(2)}$$

donde

$$a_{i,j} = \int \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j d\nu_n^{(2)}$$

y

$$b_i = \int f \varphi_i d\nu_n^{(2)}.$$

Podemos calcular con mas detalle estas integrales.

$$\mathcal{E}_n^{(2)}(f, g) = \sum_{\tau \in K_n} \int_{\tau} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} d\nu_n^2$$

Para esto, sobre una celda del triángulo, construimos un plano el cual sea cero en dos vértices de la celda y uno en el que queda. Básicamente, vamos a tomar tres planos los cuales son

$$P_1(x, y) = 1 - x - y, \quad P_2(x, y) = x, \quad P_3(x, y) = y.$$

Estos planos están dados sobre un triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Con transformaciones básicas, podemos llegar a construir los planos sobre los vértices de una celda del triángulo de Sierpinski. Ahora, los planos, los podemos representar con la siguiente matriz.

$$V = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix},$$

la cual representa los vectores base del plano. Las derivadas parciales del plano, las vamos a obtener con la inversa de la matriz V

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial x} & \frac{\partial P_3}{\partial x} \\ \frac{\partial P_2}{\partial y} & \frac{\partial P_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(V)} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}.$$

Además por la forma de los planos tenemos que:

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = -\frac{\partial P_2}{\partial x} - \frac{\partial P_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial P_1}{\partial y} = -\frac{\partial P_2}{\partial y} - \frac{\partial P_3}{\partial y}.$$

Como el objetivo es obtener una constante que asocie la energía por áreas a la energía por grafos entonces vamos a utilizar la definición de área de un triángulo a partir del determinante, así tenemos,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial x} & \frac{\partial P_3}{\partial x} \\ \frac{\partial P_2}{\partial y} & \frac{\partial P_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}l} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

donde l es la longitud de los lados del triángulo. Si calculamos para las tres funciones

P_1, P_2, P_3 la forma bilineal $a_A(P_i, P_j)$ para $i, j = 1, 2, 3$ tenemos por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 a_A(P_1, P_1) &= \int \frac{\partial P_1^2}{\partial x} + \frac{\partial P_1^2}{\partial y} d\nu^{(2)} \\
 &= \frac{4}{3l^2} \int (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 d\nu^{(2)} \\
 &= \frac{4}{3} \int 1 d\nu^{(2)} \quad \text{dado que } (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 = l^2, \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{dado que el área del triángulo es } \frac{\sqrt{3}}{4}.
 \end{aligned}$$

Ahora para $a_A(P_1, P_2)$

$$\begin{aligned}
 a_A(P_1, P_2) &= \int \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial y} \frac{\partial P_2}{\partial y} d\nu^{(2)} \\
 &= -\frac{4}{3l^2} \int (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)(y_3 - y_1) + (x_2 - x_1)(x_1 - x_3) d\nu^{(2)} \\
 &= -\frac{4}{3l^2} \int 1 - \langle (x_2 - x_1, y_2 - y_1), (x_3 - x_1, y_3 - y_1) \rangle d\nu^{(2)} \\
 &= -\frac{4}{3} \int 1 - \cos(60^\circ) d\nu^{(2)} \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{6}
 \end{aligned}$$

de esa manera podemos construir los demás, y así generalizar:

$$A_n^2 = [a_{ij}] = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3} & \text{cuando } i = j. \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & \text{cuando } i \neq j. \end{cases} \quad (5-19)$$

Ahora como en los vértices interiores del triángulo de Sierpinski tiene el doble de aristas que en V_0 , podemos obtener el siguiente resultado

$$A_n^{(2)} = [a_{ij}] = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \begin{cases} p_{ii} & \text{cuando } i = j. \\ -1 & \text{cuando } i \sim_n j. \end{cases} \quad (5-20)$$

donde p_{ii} está dado por la Definición (3-2). Luego

$$A_n^{(2)} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \tilde{\Delta}_n.$$

La formulación anterior, de igual manera que hicimos con longitudes, debe ser reescalada con una constante de renormalización para obtener,

$$\begin{cases} (r^{(2)})^n \mathcal{E}_n^{(2)}(u, v) = \int g v d\nu_n^{(2)} \text{ para todo } v \in P^n \cap H_0^1. \\ u(x) = g(x), \quad x \in V_0. \end{cases} \quad (5-21)$$

Donde la constante $r^{(2)}$ puede ser aproximada usando un procedimiento análogo descrito en la sección 5.1.1.

5.3. Ilustraciones de los métodos numéricos

En esta sección comenzaremos a mostrar las soluciones numéricas de los distintos fractales vistos en el documento. En particular buscamos la solución de la ecuación de Poisson, haciendo uso de todos los conceptos estudiados en este documento.

Para dar la solución utilizamos el software Matlab, con el cual generamos los códigos.

5.3.1. El triángulo de Sierpinski

Como vimos en la sección anterior la solución sobre el triángulo de Sierpinski la podemos ver de tres formas, a partir del Laplaciano del grafo, por el MEF sobre los contornos o MEF sobre las áreas generadas por el fractal, la frontera de este grafo está dado por el conjunto $V_0 = \{a_0, a_1, a_2\}$ del grafo. Así, buscamos solucionar la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y) \\ u(a_0) = 1, \quad u(a_1) = 0, \quad u(a_2) = 0. \end{cases}$$

Luego la solución numérica dada por el método de la subsección 5.2.1 y por el método de la sección 5.2 va a estar dada por las Figuras **5-3** y **5-5**.

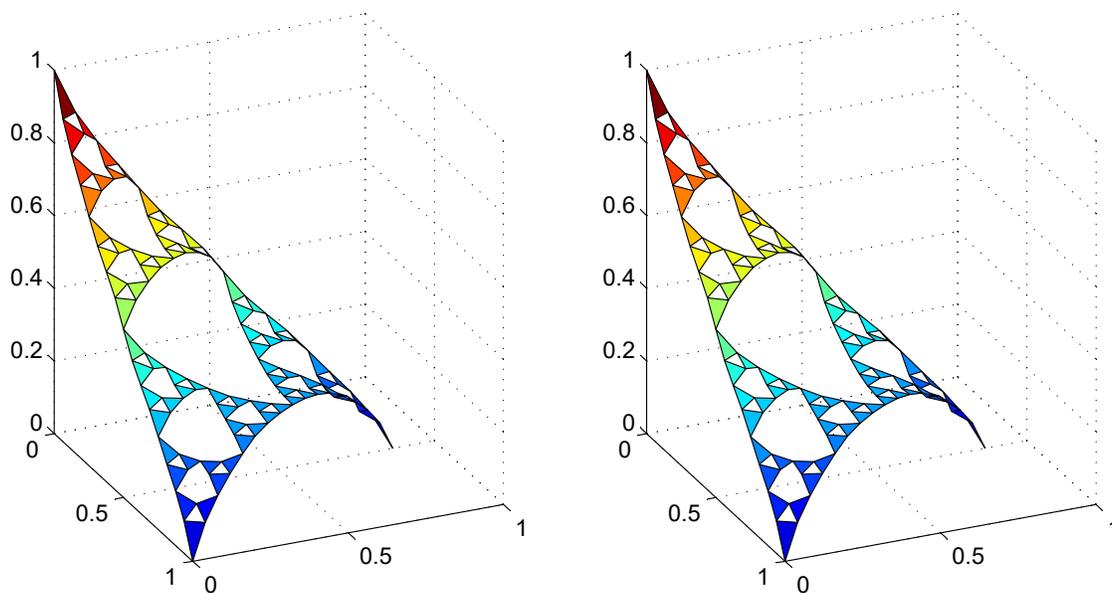


Figura 5-3.: Solución $u(x, y)$ de la ecuación de Poisson $5^n \widetilde{\Delta}_n u = g(x, y)$ (Izquierda) y $r^{(1)} \cdot \mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = \int g v d\nu_n^{(1)}$ (Derecha) cuando $g(x, y) = \sin(x + y)$, $u(a_0) = 1$ y $u(a_1) = u(a_2) = 0$ en el espacio V_4 del triángulo de Sierpinski.

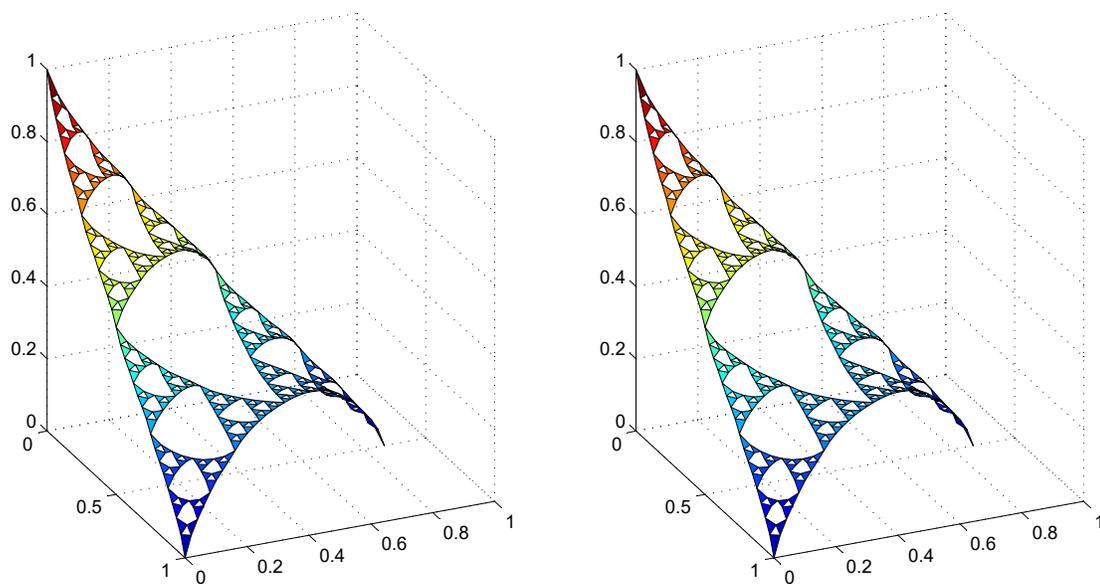


Figura 5-4.: Aproximación de $u(x,y)$ de la ecuación de Poisson $5^n \widetilde{\Delta}_n u = g(x,y)$ (Izquierda) y $k_n \cdot \mathcal{E}_n^{(2)}(u,v) = \int g v d\nu_n^{(2)}$ (Derecha) cuando $g(x,y) = \sin(x+y)$, $u(a_0) = 1$ y $u(a_1) = u(a_2) = 0$ en el espacio V_5 del triángulo de Sierpinski.

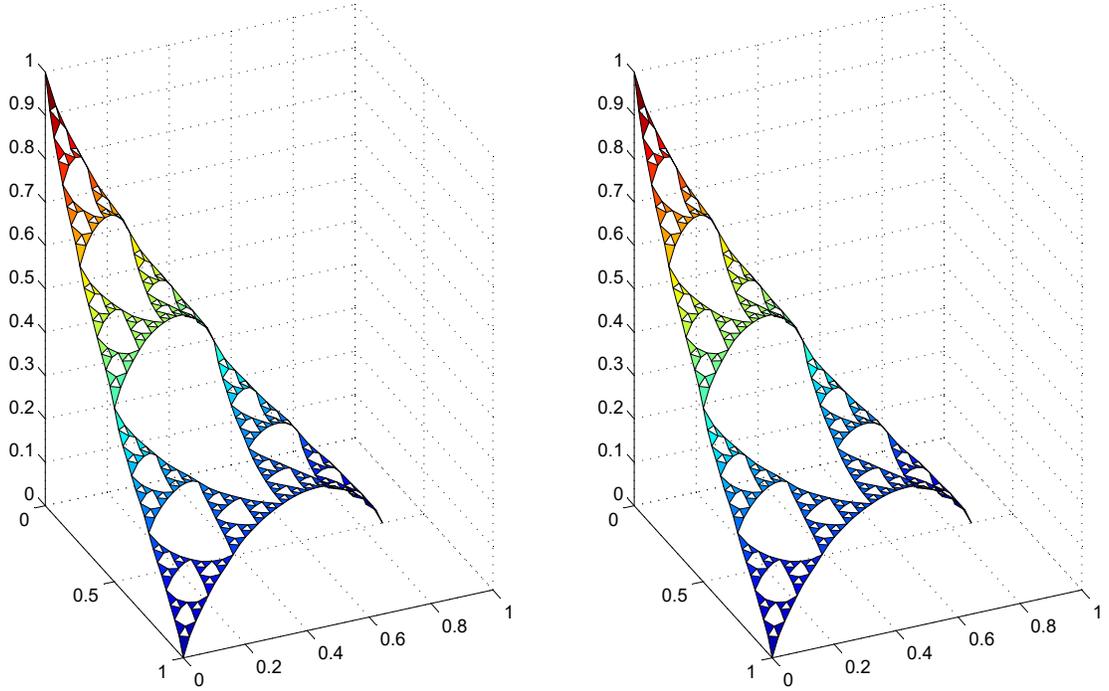


Figura 5-5.: Aproximación de $u(x, y)$ de la ecuación de Poisson $5^n \widetilde{\Delta}_n u = 0$ (Izquierda) y $r^{(1)} \cdot \mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = 0$ (Derecha) $u(a_0) = 1$ y $u(a_1) = 0$ en el espacio V_3 del árbol de Hata.

5.3.2. La curva de Kosh

En la curva de Kosh vamos a hacer la comparación entre el Laplaciano del grafo y la solución por el MEF, teniendo en cuenta lo que vimos en el Capítulo 2, para la curva de kosh tenemos, $V_0 = \{(0, 0), (1, 0)\}$. La ecuación que buscamos solucionar es

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = g(x, y) \\ u(a_0) = 1, \quad u(a_1) = 0. \end{cases}$$

Por el método descrito para el triángulo de Sierpinski, en la Subsección 5.2.1, al asociar el Laplaciano con la energía sobre contornos, así tenemos

$$\begin{cases} (r^{(1)})^n \mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = \int g v d\mu_n \text{ para todo } v \in P^n \cap H_0^1. \\ u(x) = g(x), \quad x \in V_0. \end{cases} \quad (5-22)$$

donde μ_n es la medida autosimilar para la curva de Kosh y la constante de renormalización está dado por $r^{(1)} = \frac{16}{9}$, la cual podemos hallar por método descrito en la sección 5.1.1.

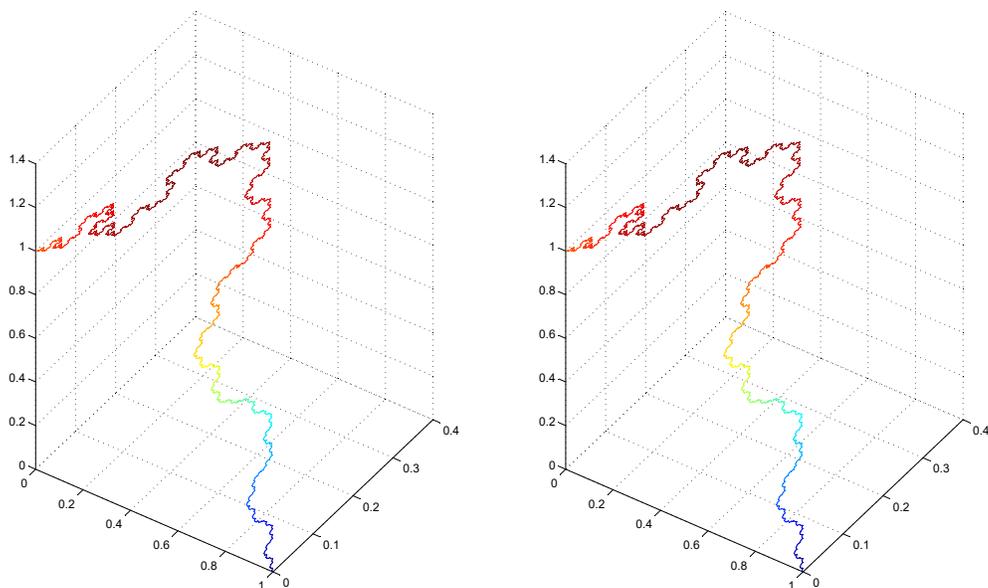


Figura 5-6.: Aproximación de $u(x, y)$ de la ecuación de Poisson $16^n \tilde{\Delta}_n u = g(x, y)$ (Izquierda) y $r^{(1)} \cdot \mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = \int g v d\nu_n^{(1)}$ (Derecha) cuando $g(x, y) = 10 \cdot \sin(x + y)$, $u(a_0) = 1$ y $u(a_1) = 0$ en el espacio V_5 de la curva de Kosh.

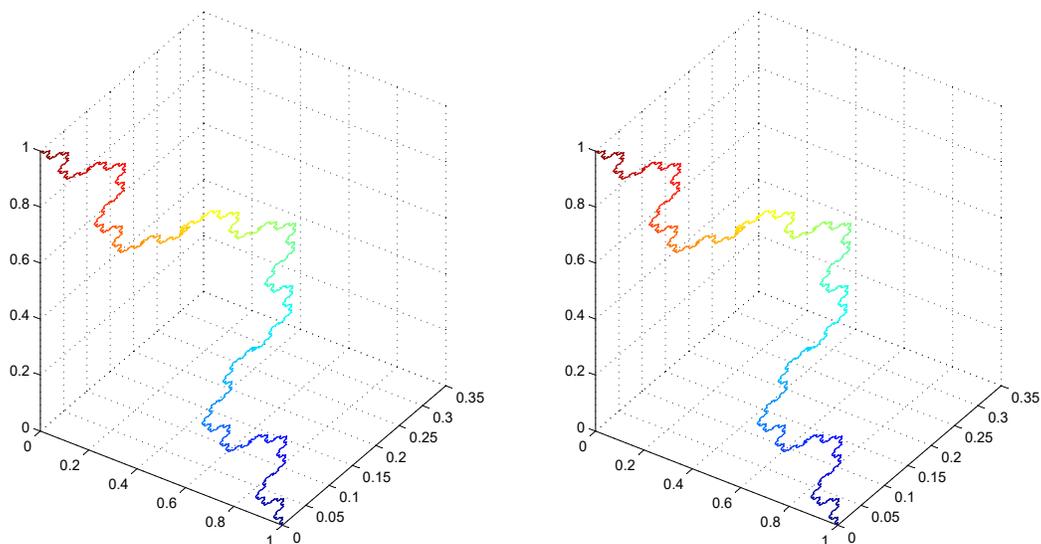


Figura 5-7.: Aproximación de $u(x, y)$ de la ecuación de Poisson $15^n \tilde{\Delta}_n u = 0$ (Izquierda) y $r^{(1)} \cdot \mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = 0$ (Derecha), $u(a_0) = 1$ y $u(a_1) = 0$ en el espacio V_3 de la curva de Kosh.

5.3.3. El árbol de Hata

El método para solucionar la siguiente ecuación, donde el dominio es el árbol de Hata es el mismo que para los fractales anteriores,

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y) \\ u(a_0) = 1, \quad u(a_1) = 0 \end{cases}$$

De la misma forma obtenemos

$$\begin{cases} (r^{(1)})^n \mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = \int g v d\mu_n \text{ para todo } v \in P^n \cap H_0^1. \\ u(x) = g(x), \quad x \in V_0. \end{cases} \quad (5-23)$$

donde μ_n es la medida autosimilar para el árbol de Hata y la constante de renormalización está dado por $r^{(1)} = \frac{15}{9}$, la cual podemos hallar por método descrito en la sección 5.1.1.

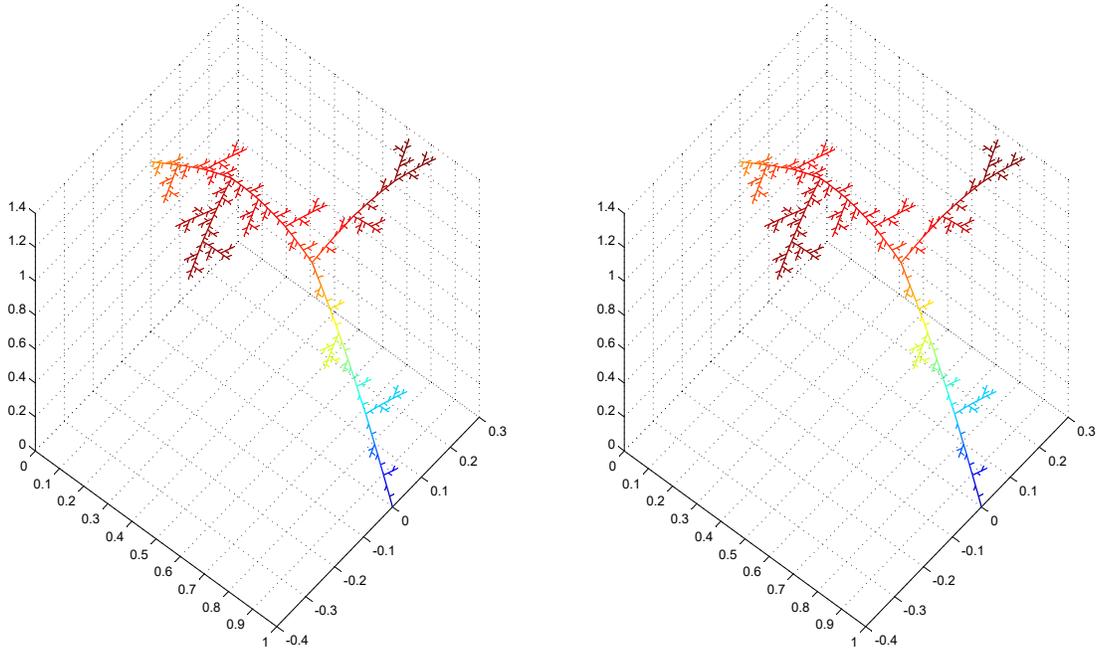


Figura 5-8.: Aproximación de $u(x, y)$ de la ecuación de Poisson $15^n \widetilde{\Delta}_n u = g(x, y)$ (Izquierda) y $r^{(1)} \cdot \mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = \int g v d\nu_n^{(1)}$ (Derecha) cuando $g(x, y) = 10 \cdot \sin(x + y)$, $u(a_0) = 1$ y $u(a_1) = 0$ en el espacio V_3 del árbol de Hata.

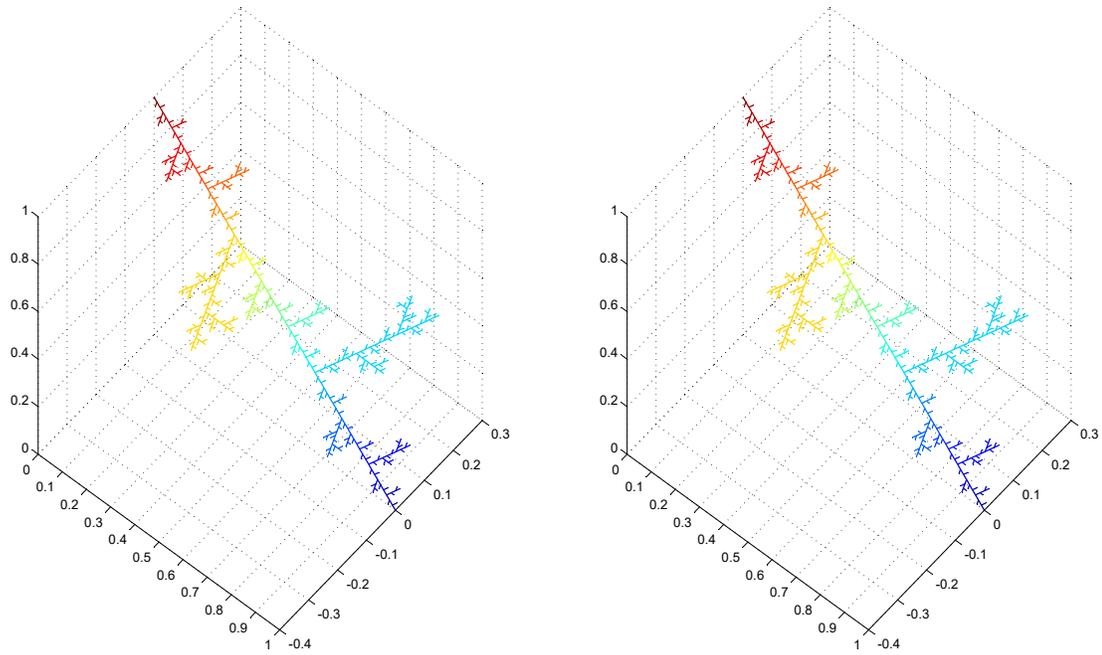


Figura 5-9.: Aproximación de $u(x, y)$ de la ecuación de Poisson $15^n \widetilde{\Delta}_n u = 0$ (Izquierda) y $r^{(1)} \cdot \mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = 0$ (Derecha), $u(a_0) = 1$ y $u(a_1) = 0$ en el espacio V_3 del árbol de Hata.

5.3.4. Árbol de Hata 3D

Para este fractal solo vamos a utilizar el método de diferencias finitas descrito en 5.1, acá la solución está descrita por los colores de las ramas.

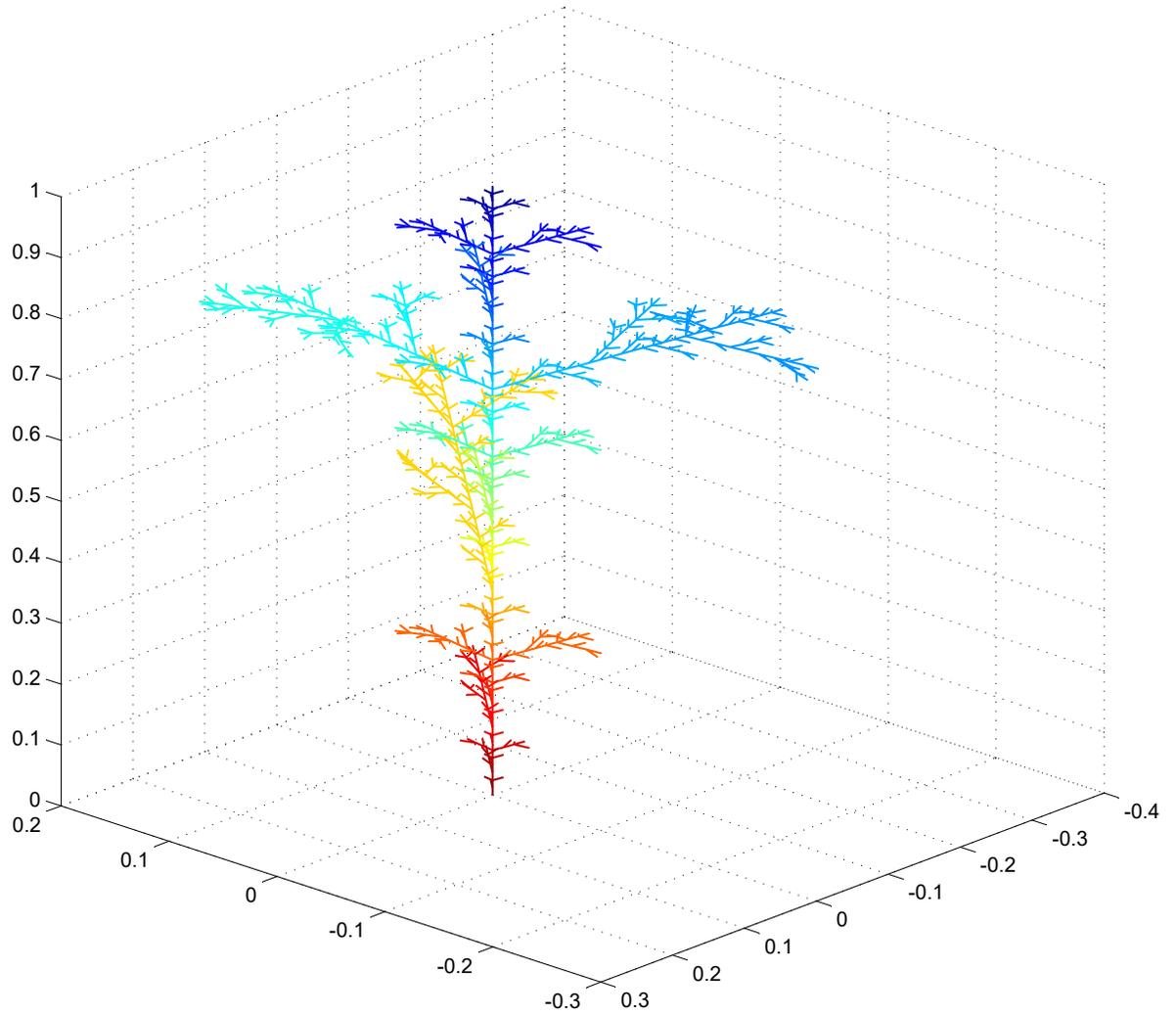


Figura 5-10.: Aproximación de $u(x,y)$ de la ecuación de Poisson $18^n \widetilde{\Delta}_n u = g(x,y)$ cuando $g(x,y) = 10 \cdot \sin(x+y)$, $u(a_0) = 0$ y $u(a_1) = 1$ en el espacio V_3 del árbol de Hata 3D.

6. Conclusiones y trabajo futuro

En trabajo se presentó la definición de conjunto autosimilar, se estudiaron sus propiedades y se dieron distintos ejemplos como el triángulo de Sierpinski, la curva de Koch y dos realizaciones diferentes del árbol de Hata. Usando el caso concreto del triángulo de Sierpinski, se desarrollaron minuciosamente algunos conceptos sobre operadores diferenciales en su forma fuerte y débil (energías y formas bilineales asociadas). En particular se planteó y aproximó numéricamente el problema de Dirichlet.

Para construir el operador diferencial se usaron operadores construidos en una sucesión de aproximaciones del fractal. Estas aproximaciones pueden ser pensadas como grafos. Al asociar cada aproximación a un grafo simétrico (donde no es necesario tener en cuenta la distancia entre los vértices) se puede trabajar de una forma algebraica solo con matrices de adyacencia y de pesos. En esta parte se busca que considerar el siguiente iterado de la aproximación, la energía sea mínima al extender funciones al siguiente nivel. Este paso se puede analizar con distintos métodos como mínimos sin restricción, circuitos eléctricos, o complemento de Schur. En todo caso, para el triángulo de Sierpinski y fractales similares obtenemos que solo basta con una constante de renormalización. De esta manera se obtiene un Laplaciano asociado a la sucesión de grafos (que se define con un proceso de límite de los operadores asociados a las aproximaciones). Se puede entonces plantear problemas de frontera. Con la medida autosimilar se deduce la forma débil de los problemas de frontera y a estos se les puede aplicar el método de elementos finitos para obtener aproximaciones. En este trabajo se implementó el método de diferencias finitas para calcular soluciones aproximadas en aproximaciones del fractal. La constante de renormalización es aproximada numéricamente.

También se propusieron métodos de elementos finitos. Se compararon las aproximaciones de elementos finitos con las aproximaciones de diferencias finitas construyendo el Laplaciano directamente de los grafos asociados a las aproximaciones del fractal (con el operador reescalado por la constante de renormalización calculada numéricamente). Por analogía con la formulación débil del problema de Dirichlet, las aproximaciones de elementos finitos incluyen:

- Aproximación del cálculo de “derivadas” en donde se usan derivadas clásicas de interpolaciones lineales por partes en dimensiones uno y dos
- Aproximación de la medida autosimilar. Se usan dos aproximaciones: 1) la medida de longitud restringida a las aristas de los triángulos de la aproximación del fractal y 2)

la medida de área restringida a los triángulos de la aproximación del fractal.

- Aproximación de la constante de renormalización usando soluciones numéricas calculadas sin la constante de renormalización.

El método de elementos finitos obtiene resultados similares a los obtenidos por medio de diferencias finitas. La aproximación por áreas en el triángulo de Sierpinski (5-21) se proponen dos aproximaciones: La primera combina derivadas clásicas a lo largo de las aristas con integración con respecto a la medida de longitud. La segunda combina derivadas parciales clásicas con integración en dos dimensiones sobre los triángulos de la aproximaciones al triángulo de Sierpinski.

En la curva de Koch y en el árbol de Hata el método es similar, tanto el cálculo de la constante de renormalización como el método de elementos finitos para solucionar la ecuación diferencial. En estos casos solo consideramos derivadas a lo largo de las aristas combinadas con integración de la medida de longitud.

Es importante mencionar también que la implementación de elementos finitos es simple y no tiene grandes cambios con respecto al método de elementos finitos para ecuaciones diferenciales en dominios abiertos. Se puede usar códigos de elementos finitos que trabajen sobre triangulaciones en general y solo debemos usar como dato de entrada para estos códigos la “triangulación” o grafo con que se aproxima el fractal.

Después de formular un método de elementos finitos para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales en dominios fractales se debe proceder a realizar un análisis de error el cual se propone como posible desarrollo futuro para este trabajo. El análisis de error requiere de una estimativa de error *a priori* el cual en general asume resultado de regularidad de la solución. Por último y para problemas prácticos debe discutirse resultados de error *a posteriori* para ecuaciones diferenciales en fractales heterogéneos.

Como último comentario importante observamos lo siguiente. Como muestran los resultados de las implementaciones de los métodos de elementos finitos para los fractales considerados en este trabajo, los procesos de difusión en estos fractales sí pueden ser aproximados por procesos de difusión clásicos (que envuelven derivadas clásicas) sobre aproximaciones del fractal donde estos deben ser re-escalados por el parámetro de escala. Este parámetro de escala puede ser pensado como una familia de coeficientes de conductividad para cada aproximación. Esta idea será también explorada en trabajos futuros.

A. Anexo: Constante de renormalización determinada por teoría de redes eléctricas

En este anexo se muestra otra forma de calcular la constante de renormalización a partir de la teoría de redes, particularmente con propiedades de las resistencias en redes eléctricas. Este método busca interpretar el grafo, asociado al fractal, como una red eléctrica donde cada arista es una resistencia, y con simplificación de redes se puede conseguir una constante tal que la energía sea mínima.

A.1. Interpretación a partir de redes eléctricas

En esta sección se considerara la noción de energía sobre un grafo finito G como se vio en la Sección 3.3. Sea c_{xy} una función positiva definida sobre las aristas del grafo. Entonces se considera

$$\mathcal{E}_e(u, u) = \sum_{x \sim y} c_{xy} (u(x) - u(y))^2,$$

como la asociación de la energía al grafo. Se va a interpretar a c_{xy} como la conductancia y su recíproco $r_{xy} = 1/c_{xy}$ como la resistencia. Cada vértice de G es un nodo de la red eléctrica y las aristas de G son las resistencias conectadas a los nodos. Un flujo de amperaje esta representado por $(u(x) - u(y))/r_{xy} = c_{xy}(u(x) - u(y))$ con el cual produce una energía $c_{xy}(u(x) - u(y))^2$ desde cada resistencia. Tenga en cuenta que $c_{xy} > 0$ y además si $c_{xy} = 0$ entonces la resistencia es infinita, lo cual quiere decir que no puede haber flujo de energía entre x y y .

Sea G un grafo, el cual representa una red eléctrica, con unos subgrafos V' , y $V'' = G - V'$. Lo que se va a hacer es suministrarle un voltaje $u(x)$ a todos los vértices del grafo, y entre estos valores, de acuerdo a la teoría de redes, minimizar la energía.

Por ejemplo, suponga que se tiene una red con tres nodos x, y, z y dos aristas $x \sim y$ y $y \sim z$. Si se tiene el conjunto de voltajes $u(x)$ y $u(z)$ en los extremos de los nodos, entonces lo que se busca es un valor para $u(y)$ tal que la energía sea mínima. Recordando la forma de la energía en este caso se tiene,

$$c_{xy}(u(x) - u(y))^2 + c_{yz}(u(x) - u(y))^2.$$

Como se busca minimizar la energía, por el método de mínimos si restricción, para la variable $u(y)$ obtenemos,

$$u(y) = \frac{c_{xy}u(x) + c_{yz}u(z)}{c_{xy} + c_{yz}}. \quad (\text{A-1})$$

Reemplazando en la energía y reescribiendo la conductancia a partir de resistencias tenemos

$$\left(\frac{c_{xy}c_{yz}}{c_{xy} + c_{yz}} \right) (u(x) - u(z))^2 = \left(\frac{\frac{1}{r_{xy}} \frac{1}{r_{yz}}}{\frac{1}{r_{xy}} + \frac{1}{r_{yz}}} \right) (u(x) - u(z))^2 = \frac{1}{r_{xy} + r_{yz}} (u(x) - u(z))^2.$$

Nótese que la resistencia total de la red, es la suma de las resistencias $r_{xy} + r_{yz}$, esto dado que las resistencias están en serie.

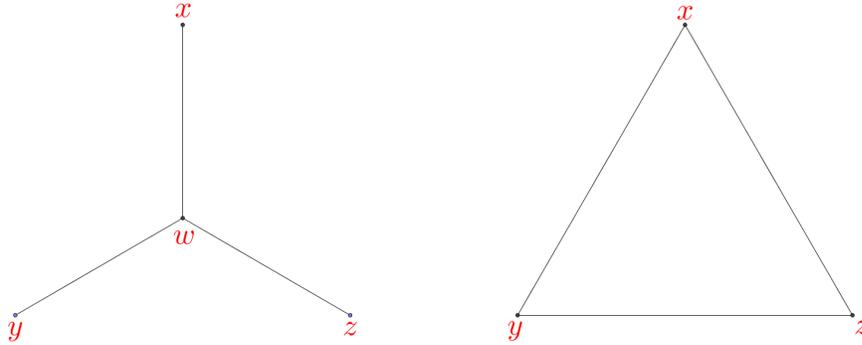


Figura A-1.: Red eléctrica tipo Y (izquierda) y red eléctrica tipo Δ (derecha).

En el siguiente lema se da una asociación entre dos redes, una tipo Y y otra tipo Δ . Con esto nos dará un procedimiento para poder calcular la constante de renormalización para el triángulo de Sierpinski.

Lema A.1.1. *Considere una red tipo Y (Figura A-1) con nodos x, y, z, w y aristas que conectan a x, y, z a w y las resistencias r_{xw}, r_{yw}, r_{zw} . Entonces la resistencia equivalente tipo Δ para $\{x, y, z\}$ con resistencias r_{xy}, r_{yz}, r_{zx} esta determinado por:*

$$r_{xw} = \frac{r_{xy}r_{zx}}{R}, \quad r_{yw} = \frac{r_{xy}r_{yz}}{R}, \quad r_{zw} = \frac{r_{yz}r_{zx}}{R}, \quad (\text{A-2})$$

donde $R = r_{xy} + r_{yz} + r_{zx}$. Además, el valor de la energía minimizante en w es:

$$u(w) = \frac{c_{xw}u(x) + c_{yw}u(y) + c_{zw}u(z)}{c_{xw} + c_{yw} + c_{zw}}. \quad (\text{A-3})$$

En particular $r_{xy} = r_{yz} = r_{zx} = a$ entonces $r_{xw} = r_{yw} = r_{zw} = a/3$, y $u(w) = \frac{1}{3}(u(x) + u(y) + u(z))$

Demostración: Sea una red en Y como está descrita en la hipótesis del lema, así la forma de la energía sobre la red esta dada por:

$$c_{xw}(u(x) - u(w))^2 + c_{yw}(u(y) - u(w))^2 + c_{zw}(u(z) - u(w))^2. \quad (\text{A-4})$$

Ahora como se busca minimizar la energía, para esto se utiliza el método de la primera donde la variable de derivación es $u(w)$,

$$\frac{\partial}{\partial u(w)} c_{xw}(u(x) - u(w))^2 + c_{yw}(u(y) - u(w))^2 + c_{zw}(u(z) - u(w))^2 = 0.$$

al despejar $u(w)$ se obtiene (A-3).

Ahora, se busca es la asociación entre la red tipo Y y red tipo Δ , para esto se va a reemplazar (A-3) en (A-4),

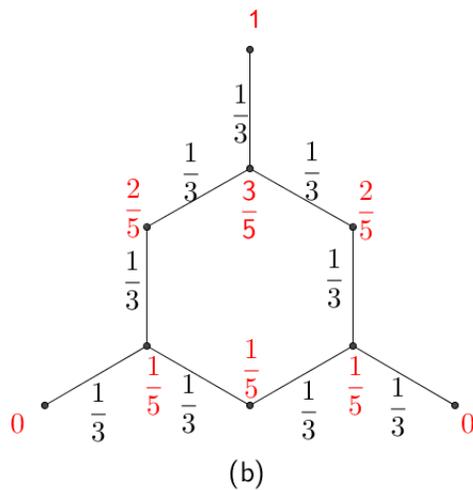
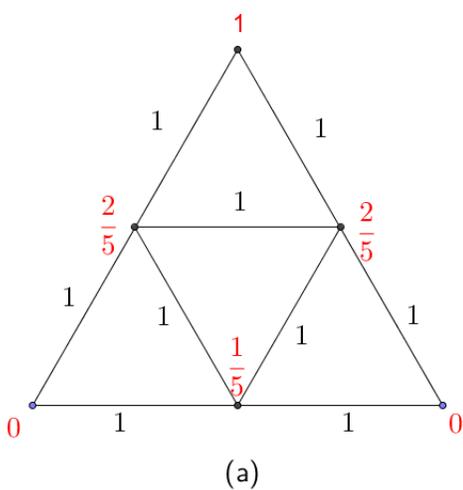
$$c_{xw} \left(u(x) - \frac{c_{xw}u(x) + c_{yw}u(y) + c_{zw}u(z)}{c_{xw} + c_{yw} + c_{zw}} \right)^2 + c_{yw} \left(u(y) - \frac{c_{xw}u(x) + c_{yw}u(y) + c_{zw}u(z)}{c_{xw} + c_{yw} + c_{zw}} \right)^2 + c_{zw} \left(u(z) - \frac{c_{xw}u(x) + c_{yw}u(y) + c_{zw}u(z)}{c_{xw} + c_{yw} + c_{zw}} \right)^2.$$

Simplificando la expresión anterior se obtiene,

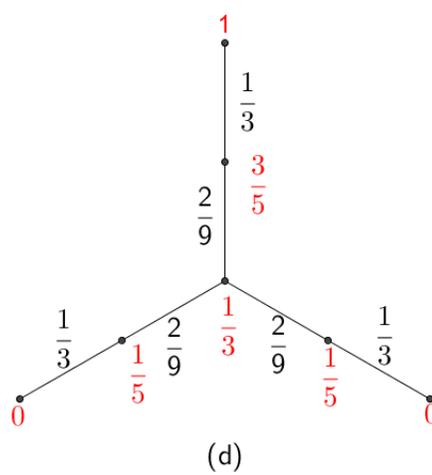
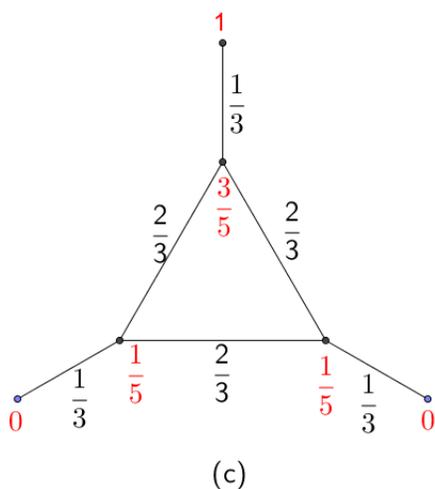
$$\frac{c_{xw}c_{yw}}{c_{xw} + c_{yw} + c_{zw}} (u(x) - u(y))^2 + \frac{c_{xw}c_{zw}}{c_{xw} + c_{yw} + c_{zw}} (u(x) - u(z))^2 + \frac{c_{yw}c_{zw}}{c_{xw} + c_{yw} + c_{zw}} (u(y) - u(z))^2,$$

la cual es la forma de la energía para la red tipo Δ , donde los coeficientes cumplen A-2. \square

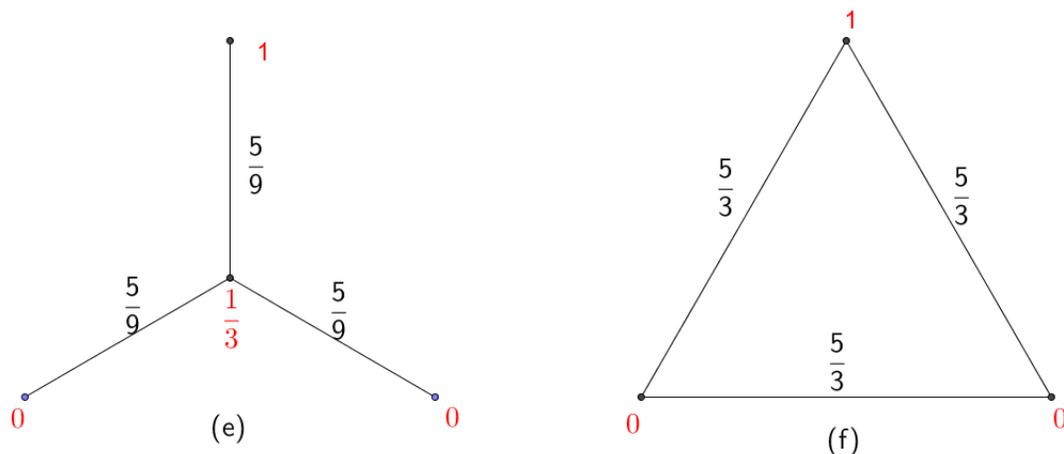
Se calculara la forma de la energía minimizante en el triángulo de Sierpinski, con ayuda del lema A.1.1 y teniendo como condición inicial es que en los vértices del conjunto V_0 se tiene un voltaje de 1 en uno de los vértices y cero en los otros dos. Todas las resistencia van a tener un valor 1, es decir que en las aristas del triángulo, su valor es de uno.



Como se puede ver el valor de las aristas en el grafo V_1 va a ser de 1, lo primero que se va a hacer es estudiar la forma de la resistencia para que sea mínima, luego por A.1.1 se puede hacer un cambio de red de $Y \rightarrow \Delta$.



Dado que hay unas resistencias en series, su resistencia equivalente esta dada por la suma de sus resistencias, así se obtiene (c). Para (d) se vuelve a aplicar A.1.1.



Finalmente, pasando de $Y \rightarrow \Delta$ se obtiene que $r = \frac{5}{3}$ en todas las aristas de V_0 .

Como se pudo ver se asocio G_1 con G_0 , buscando resistencias equivalentes. Para determinar la forma de la energía que sea mínima al pasar de V_0 a V_1 , se comenzara al contrario, es decir de (f) a (a). Para esto se utilizó (A-3) para determinar el voltaje de los nodos que se van creando.

Por ejemplo para pasar de (f) a (e), se hizo lo siguiente,

$$u(w) = \frac{\frac{3}{5}1 + \frac{3}{5}0 + \frac{3}{5}0}{\frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5}} = \frac{1}{3}.$$

B. Anexo: Formulación variacional para ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales

En este anexo se muestra el procedimiento básico del Método de elementos finitos, visto desde una forma unidimensional y en el espacio.

B.1. Formulación variacional para ecuaciones diferenciales ordinarias

Se va a considerar un problema con valores en la frontera sobre un espacio de Hilbert $L_2 = L_2(\Omega)$, el cual tiene condiciones homogéneas, es decir:

$$A_u = -(au')' + bu' + cu = f, \text{ en } \Omega = (0, 1), \text{ con } u(0) = u(1) = 0$$

Se va a asumir que los coeficientes a , b y c tienen derivadas continuas, y además

$$a(x) \geq a_0 > 0, \quad \frac{c(x) - b'(x)}{2} \leq 0, \text{ para } x \in \bar{\Omega},$$

multiplicando la ecuación diferencial por una función $v \in C_0^1 = C_0^1(\Omega)$, e integrando sobre el intervalo Ω , se obtiene:

$$\int_0^1 (-(au')' + bu' + cu)v dx = \int_0^1 f v dx.$$

A esto se le conoce como formulación variacional débil. Introduciendo la forma bilineal

$$a(v, w) = \int_0^1 (av'w' + bv'w + cvw) dx,$$

el funcional lineal

$$L(w) = (f, w) = \int_0^1 f w dx$$

y usando el hecho de que C_0^1 es denso en $H_0^1 = H_0^1(\Omega)$, se puede escribir la ecuación diferencial como

$$a(u, \phi) = L(\phi) \quad \forall \phi \in H_0^1.$$

B.2. Formulación variacional para la ecuación diferencial de Poisson

Se considera el siguiente problema con valores en la frontera,

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ en } \Omega \\ u &= 0 \text{ en } \Gamma, \end{aligned} \tag{B-1}$$

donde Ω es un dominio abierto y acotado en el plano \mathbb{R}^2 con frontera Γ , f una función y

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

A este problema se le conoce como la ecuación de Poisson, la cual modela muchos problemas de física y mecánica, como por ejemplo la dispersión de la temperatura en una lámina, el potencial de electromagnetismo o el estiramiento de una membrana elástica por una transversal de carga fija f , donde su frontera es fija.

Antes de continuar es importante recordar la fórmula de Green la cual es de vital importancia para el desarrollo de esta sección. Se comenzara recordando el teorema de divergencia en dos dimensiones.

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (A) d\Omega = \int_{\Gamma} A \cdot n d\Gamma,$$

donde $A = (A_1, A_2)$ es un vector función definido sobre Ω ,

$$\nabla \cdot (A) = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2}$$

y $n = (n_1, n_2)$ es un vector unitario normal que apunta hacia el exterior de Γ . Se le va a aplicar el teorema de divergencia al vector $A = (uw, 0)$ y $A = (0, vw)$, luego

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial vw}{\partial x_i} d\Omega &= \int_{\Gamma} vw \cdot n_i d\Gamma \\ \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} w + v \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega &= \int_{\Gamma} vw \cdot n_i d\Gamma, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$. Se denota a ∇v como el gradiente de v , es decir $\nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \right)$. Así,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla v \nabla w d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) d\Omega \\
&= \int_{\Gamma} v \frac{\partial w}{\partial x_1} n_1 + v \frac{\partial w}{\partial x_2} n_2 d\Gamma - \int_{\Omega} v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) d\Omega \\
&= \int_{\Gamma} v \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega} v \Delta w d\Omega
\end{aligned}$$

donde $\frac{\partial w}{\partial n} = v \frac{\partial w}{\partial x_1} n_1 + v \frac{\partial w}{\partial x_2} n_2$ se le conoce como la derivada normal, es decir, la derivada con dirección al vector normal exterior a la frontera Γ .

Así, se tiene la siguiente igualdad,

$$\int_{\Omega} v \Delta w d\Omega = \int_{\Gamma} v \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla v \nabla w d\Omega \quad (\text{B-2})$$

Ahora para solucionar la ecuación de Poisson B-1 se va a hacer un trato muy parecido al que se hizo con la ecuación diferencial ordinaria. Para esto se multiplicara a B-1 por una función v y por B-2 se obtiene la forma bilineal,

$$a(u, v) = - \int_{\Omega} \Delta u \cdot v d\Omega = - \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega,$$

con el producto interior

$$\langle f, v \rangle$$

donde

$$v \in V = \left\{ v : v \text{ es continua sobre } \Omega, \frac{\partial v}{\partial x_1} \text{ y } \frac{\partial v}{\partial x_2} \text{ son continuas sobre } \Omega \text{ y } v = 0 \text{ en } \Gamma \right\}.$$

Así, la ecuación B-1 se puede reescribir de la siguiente forma,

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \text{para todo } v \in V.$$

Bibliografía

- [1] Jara Milton. 2013. *Análise em fractais*, coloquio Brasileiro de matemáticas, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Impa), Brasil.
- [2] Kigami Jun. 2001. *Analysis on fractal*, Volumen 143. Cambridge University.
- [3] Strichartz Robert. 2006. *Differential equations on fractal, a tutorial*, Princeton university.
- [4] Strichartz Robert. 1999. *Analysis on Fractals*, Notices of the AMS, Princeton university, 46(10), 1199-1208.
- [5] Jane C. 2006. *Reaction and Diffusion on the Sierpinski Gasket*, Tesis de doctorado en Filosofía, Universidad de Manchester, Inglaterra.
- [6] Fan Chung Graham. 1997. *Spectral Graph Theory*, CBMS Lecture Series Number 92, AMS Publications, xii+207 pp.
- [7] Davey K., Prosser R. 2012. *Analytical solutions for heat on fractal and pre-fractal domains*, Applied Mathematical Modelling.
- [8] Natá Machado. 2013. *Teoria espectral de grafos*, Universidade federal de Santa Catarina, Brasil.
- [9] Yves Achdou. 2006. Christophe Sabot, Nicoletta Tchou, *Diffusion and Propagation Problem in Some Ramified Domains with a fractal Boundary*.
- [10] Lancia Maria Rosaria. *Second order transmission Problem Across a Fractal Surface*, 2003.
- [11] P. Bagnerini, A. Buffa, E. Vacca. 2006. *Finite elements for prefactal transmission problem*.
- [12] Stig Larsson. 2009. *Partial Differential Equations with Numerical Methods*.
- [13] Antonio-Mihail Nuica. 2010. *Renormalization of generalized "abc" Gaskets*.
- [14] Antonio-Mihail Nuica. 2010. *Renormalization of a generalized Gaskets and Lindstrom's Snowflake*.
- [15] Gibbon M., Raj A., Strichartz R. 2001. *The Finite Element Method on the Sierpinski Gasket*, Constructive approximation, Springer-Verlag New York.