



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Análisis de la Dinámica No Lineal Bajo Variación de Parámetros de un Modelo de Desarrollo Sostenible para el Departamento de Sucre

José Alberto Canchila Medina

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas
Manizales - Caldas, Colombia
2016



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Analysis of Nonlinear Dynamics Under variation of parameters of a Model for Sustainable Development for the Department of Sucre

José Alberto Canchila Medina

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas
Manizales - Caldas, Colombia
2016

Análisis de la Dinámica No Lineal Bajo Variación de Parámetros de un Modelo de Desarrollo Sostenible para el Departamento de Sucre

José Alberto Canchila Medina

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias - Matemática Aplicada

Director:

Dr. Héctor Andrés Granada Díaz
Universidad del Tolima
xxxxxxx

Codirector:

Dr. Simeón Casanova Trujillo
Grupo de Investigación:
xxxxxxx
scasanovat@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas
Manizales - Caldas, Colombia
2016

Dedicatoria

A la memoria de mis padres Manuel Antonio y Emerita de Jesús, a mi esposa Mileidis, a mis hijas Yiceth y Andrea, a todos mis hermanos (as), familiares y amigos, por el apoyo y fortaleza brindada para que este trabajo se culminara exitosamente.

Agradecimientos

Agradezco especialmente a Dios por haberme dado la inteligencia, la sabiduría y la salud para seguir adelante sin decaer. Por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo de felicidad

A mi Director de tesis Doctor Héctor Andrés Granada Díaz por su paciencia, su humildad y su invaluable dedicación. Por impulsar el deseo de lucha y perseverancia en alcanzar las metas trazadas en la vida, por estar ahí en el momento oportuno, infinitas gracias

A la **Universidad Nacional de Colombia sede Manizales** y a la **Universidad de Sucre** por ofrecer esta oportunidad tan valiosa, en la capacitación de docentes contribuyendo con ello a la cualificación de la educación y por ende al desarrollo de la región.

Gracias a todos mis compañeros de estudio, por ese intercambio de ideas, su amable y valiosa colaboración en los momentos difíciles de esta etapa tan valiosa.

Infinitas gracias a todos aquellos que de una u otra manera hicieron posible la culminación exitosa de este trabajo de grado.

Resumen

En el siguiente trabajo se presenta un análisis de la dinámica no lineal bajo la variación de parámetros de un modelo de desarrollo sostenible para el departamento de Sucre, el cual es ajustado del modelo propuesto en [14], donde se planteó un modelo de interacción dinámica entre las dimensiones ambiental, económica y social, más precisamente entre la población urbana y rural, acervo de capital y tasa de contaminación. Teniendo este modelo como base, se implementó para el departamento de Sucre, haciendo la calibración con datos reales del departamento, suministrados por las series estadísticas del DANE y con ello se estimaron los parámetros del modelo para el departamento de Sucre, se estimó la serie de capital urbano y de la tasa de contaminación, también se determinó una configuración de parámetros para alcanzar sostenibilidad en el departamento de Sucre y además se aplicó el análisis no lineal para conseguir esquemas sostenible, es decir, se caracterizaron puntos de equilibrio, se hizo el análisis de estabilidad de estos puntos de equilibrio, se hizo el análisis de sensibilidad bajo la variación de un parámetro, determinando así zonas de sostenibilidad para la región.

Palabras Claves: Desarrollo sostenible, Puntos de equilibrio, Población rural, Población urbana, Acervo de capital, Contaminación ambiental, Bifurcaciones.

Abstract

This research shows an analysis of a nonlinear dynamic under variation of parameters of a sustainable development model for the department of Sucre, which fits with a proposal model in [14] and it suggests and dynamic interaction model among environmental, economic and social dimensions, exactly between the urban and rural population, capital acqui and contamination rate. With this base model, it was implemented to the department of Sucre, doing calibration with the real data of the departmen provided by DANE and with this the parameters of the model for the department of Sucre were estimated, the urban capital series and the pollution rate were estimated, a configuration of parameters was also determined to achieve sustainability in the department of Sucre, and also applied non linear analysis to achieve sustainable schemes, in others words, we characterized equilibrium points, The stability analysis of these equilibrium points was made, the sensitivity analysis was done under the variation of a parameter, Thus determining areas of sustainability for the region.

Keywords: Sustainable development, Balance points, Rural population, Urban population, Capital stock, Environmental pollution, Bifurcations

Índice general

Lista de figuras	XI
Lista de tablas	XIII
Lista de símbolos	XV
1. Introducción	3
1.1. Objetivos	4
1.1.1. Objetivo general.	4
1.1.2. Objetivos específicos.	4
2. Análisis de existencia y unicidad de las soluciones	7
2.1. Ecuaciones del modelo	8
2.1.1. Ecuaciones dinámicas del modelo	10
2.2. Análisis de las ecuaciones dinámicas del modelo	12
3. Calibración del modelo con información del departamento de Sucre	15
3.1. Método empleado para la estimación de parámetros	16
3.2. Estimación de las tasas de ocupación total s y urbana s_u	16
3.3. Estimación de la serie de acervo de capital urbano	19
3.3.1. Estimación de los parámetros A , δ , a_u y α de la función de producción urbana.	20
3.4. Estimación de los parámetros H , r y h_e	21
3.5. Estimación de los parámetros c_r , c_u , a_r , e_r , e_u , c_{sr} , c_{su} , δ_{pr} , δ_{pu} , δ_{yr} , δ_{yu} , δ_{cr} , δ_{cu} , η_{pr} , η_{pu} , η_{yr} , η_{yu} , η_{cr} y η_{cu}	22
3.6. Estimación de los parámetros R , l , m_e , ρ_r , ρ_u , ρ_k y ρ_c	26
3.6.1. Resumen de la calibración de los parámetros	26
3.7. Discusiones sobre la validación del modelo para el departamento de Sucre	29
4. Estado estacionario del sistema	31
4.1. Punto de equilibrio del sistema	33
4.2. Desarrollo sostenible en la región.	33
4.2.1. Políticas de desarrollo y estrategias para definir zonas de sustentabilidad	34
4.3. Punto de equilibrio en la zona de sostenibilidad	35
4.4. Análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio y curvas de continuación de equilibrios	37

4.4.1. Cálculo de atractores del sistema	38
4.4.2. Curva de continuación de equilibrio mediante la variación de los parámetros R y m_e	40
5. Principales aportes del trabajo de investigación, trabajos futuros	45
5.1. Principales aportes	45
5.2. Trabajos futuros	46
5.3. Resultados divulgativos	46
A. Ecuaciones Auxiliares del modelo	47

Índice de figuras

2.1. Región de existencia y unicidad de soluciones	11
3.1. Total ocupados en Colombia	17
3.2. Población y total ocupados en Sucre	18
3.3. Estimación del total de ocupados	19
3.4. PIB del Departamento de Sucre	20
3.5. Estimación del PIB y acervo de capital urbano	21
3.6. Estimación del PIB rural de Sucre	22
3.7. Nacimientos y tasa de nacimientos en Sucre	23
3.8. Defunciones y tasa de defunciones en Sucre	24
3.9. Estimación tasa de defunción en Sucre	25
3.10. Estimación tasa de nacimiento en Sucre	26
3.11. Calibración de la población	27
3.12. Calibración del acervo de capital y de la tasa de contaminación	28
3.13. Regresión lineal de la población rural vs población general	29
4.1. Desarrollo sostenible	32
4.2. Punto de equilibrio - colapso	33
4.3. Zona de sostenibilidad	35
4.4. Punto de equilibrio en el interior de la zona de sostenibilidad	36
4.5. Punto de equilibrio en el interior de la zona de sostenibilidad variando el parámetro R	36
4.6. Punto de equilibrio en el interior de la zona de sostenibilidad variando el parámetro l	37
4.7. Cuenca de atracción del punto de equilibrio	39
4.8. Curva de continuación de equilibrio mediante la variación del parámetro R	40
4.9. Curva de continuación de equilibrio variando el parametro R	42
4.10. Curva de continuación de equilibrio mediante la variación del parámetro m_e	42
4.11. Curva de continuación de equilibrio variando el parametro m_e	43

Índice de cuadros

- 3.1. Valores iniciales de los parámetros $c, a_r, e_r, e_u, c_{sr}, c_{su}, \delta_{pr}, \delta_{pu}, \delta_{yr}, \delta_{yu}, \delta_{cr}, \delta_{cu}, \eta_{pr}, \eta_{pu}, \eta_{yr}, \eta_{yu}, \eta_{cr}$ y η_{cu} 24
- 3.2. Valores optimizados de los parámetros $c, a_r, e_r, e_u, c_{sr}, c_{su}, \delta_{pr}, \delta_{pu}, \delta_{yr}, \delta_{yu}, \delta_{cr}, \delta_{cu}, \eta_{pr}, \eta_{pu}, \eta_{yr}, \eta_{yu}, \eta_{cr}$ y η_{cu} 25
- 3.3. Valores iniciales de los parámetros $R, l, m_e, \rho_r, \rho_u, \rho_k$ y ρ_c 26
- 3.4. Valores de los parámetros calibrados 27

Lista de símbolos

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
A	Progreso técnico o productividad total de los factores (PTF) en la función de producción.	1	Ec.A.8, 3.12
a_i	Tasa de ahorro del sector i .	1	Pág.10
c	Tasa de contaminación en la región.	1	Ec. 2.4
c_i	Tasa de contribución del PIB del sector i para mejorar el medio ambiente.	1	Ec. 2.6, 3.23
c_{py}	Tasa de contaminación ambiental ocasionada por la población y la producción en la región.	1	Ec.A.17, 4.6
c_{si}	Tasa de cubrimiento en salud en el sector i .	1	Ec.A.3, A.4, A.6
d_i	Tasa de defunción para el sector i .	1	Ec. A.7, A.8
e_i	Tasa de educación en el sector i .	1	Ec.A.3, A.4, A.6
g_i	Tasa de consumo en el sector i .	1	Ec.A.18, A.19
H	Área de la región.	ha	Ec. 2.6, 3.18
h	Tasa de impacto medio ambiental o tasa de reducción de la contaminación medio ambiental.	1	Ec.A.15
K_m	Máxima acumulación de capital en la región.	COP	Ec.A.10
K_u	Acervo de capital urbano.	COP	Ec.3.10,3.14
l	Tasa de producción no contaminante en la región.	1	Ec.A.15,A.17
L_i	Población que conforma la fuerza laboral en el sector i .	hab	Ec.2.2, 2.3
m	Saldo migracional rural - urbano.	hab	Ec.A.5
m_e	Tasa de migración externa, es decir hacia otras regiones.	1	Ec.3.7, 4.6
n_i	Tasa de natalidad en el sector i .	1	Ec.A.3, A.4
P_i	Población en el sector i .	hab	Ec.3.7
P_m	Capacidad máxima de habitantes de una región.	hab	Ec.2.6, 2.5
P_{imax}	Capacidad máxima de población en el sector i .	hab	Ec. 2.5, A.2
P_{imin}	Capacidad mínima de población en el sector i .	hab	Ec.A.1
R	Parámetro referente a la probabilidad de encontrar trabajo en lo urbano o de llenar las expectativas de la migración.	1	Pág. 38

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
r	Tasa de intercambio económico entre los sectores rural y urbano.	1	Ec. 3.19
s	Tasa de ocupación (fuerza laboral) de la región.	1	Ec. 3.9, 3.5
s_i	Tasa de ocupación en el sector i .	1	Ec.3.7
w	Tasa de contribución del PIB total destinado para el medio ambiente.	1	Ec.A.16
Y_i	Producto Interno Bruto (PIB) en el sector i .	COP	Ec.A.11
Y_{imax}	Producción máxima en el sector i .	COP	Ec. A.9, A.12
Y_T	Producción total de la región	COP	Ec.A.13

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
α	Coefficiente de elasticidad del capital para la función de producción.	1	Ec. A.8
δ	Tasa de depreciación del capital.	1	Ec. 3.13
δ_{ci}	Coefficiente de elasticidad de contaminación para la función de la defunción en el sector i .	1	Pág.36
δ_{pi}	Coefficiente de elasticidad de la población para la función de la defunción en el sector i .	1	Ec. 3.12
δ_{yi}	Coefficiente de elasticidad de producción para la función de la defunción en el sector i .	1	Ec. 3.12
η_{ci}	Coefficiente de elasticidad de contaminación para la función de la tasa de natalidad en el sector i .	1	Pág.36
η_{pi}	Coefficiente de elasticidad de la población para la función de la tasa de natalidad en el sector i .	1	Pág.36
η_{yi}	Coefficiente de elasticidad de producción para la función de la tasa de natalidad en el sector i .	1	Pág.36
ρ_c	Parámetro de proporcionalidad de la contaminación en la región.	1	Ec.2.4
ρ_i	Parámetro de proporcionalidad de la población del sector i .	1	Ec.2.3
ρ_k	Parámetro de proporcionalidad del acervo de capital urbano.	1	Ec.2.2, 2.1

Subíndices

Subíndice	Término
<i>cr</i>	Contaminación rural
<i>cu</i>	Contaminación urbana
<i>pr</i>	Población rural
<i>pu</i>	Población urbana
<i>r</i>	Rural
<i>T</i>	Total (Población de la región)
<i>u</i>	Urbano
<i>yr</i>	Producción rural
<i>yu</i>	Producción urbana

Capítulo 1

Introducción

Este capítulo comprende los objetivos del trabajo, la metodología a utilizar y una breve descripción de cada una de las secciones del trabajo.

En [14], se planteó un modelo matemático donde se estudia la dinámica no lineal de un sistema complejo demográfico, económico y ambiental de desarrollo sostenible, donde se estudió la interacción dinámica de esas tres dimensiones, más precisamente, la población rural y urbana, acervo de capital y tasa de contaminación para una región. Al tener como base este modelo, se empleó para hacer la calibración y el análisis no lineal clasificando los puntos de equilibrio para determinar los rangos de los parámetros para los cuales se alcanza un desarrollo sostenible en el departamento de Sucre. Encontrándose los siguiente resultados:

Con los valores obtenidos de los parámetros, no fue posible realizar la validación del modelo, puesto que bajo las condiciones del año 2011 la evolución del sistema no sigue la tendencia de la información estadística que proporciona el DANE, debido a la incoherencia de los datos estadísticos sobre todo en lo referente a la población rural donde se nota una gran diferencia entre la información estadística y lo calculado a través de las ecuaciones diferenciales del modelo. Lo cual condujo a realizar predicciones a un modelo aproximado mediante la utilización de Matcont. Con ello se hicieron variaciones de varios parámetros que permitieron obtener puntos de equilibrio en la zona de sostenibilidad, como también se definieron estrategias para alcanzar el desarrollo sostenible, se obtuvieron rangos de sostenibilidad baja la variación de un parámetro, se hallaron curvas de continuación de equilibrios donde se hizo el análisis de sensibilidad bajo la variación de uno y dos parámetros y la caracterización de bifurcaciones de codimensión uno y dos del sistema.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo general.

Aplicar técnicas del análisis no lineal en un modelo de interacción dinámica entre la demografía, la economía y la contaminación para conseguir esquemas de desarrollo sostenible en el departamento de Sucre

1.1.2. Objetivos específicos.

- Estimar los parámetros del modelo para el departamento de Sucre.
- Estimar la serie de capital urbano y de la tasa de contaminación.
- Determinar una configuración de parámetros para alcanzar sostenibilidad en el departamento de Sucre.
- Aplicar el análisis no lineal para conseguir esquemas sostenible

Para alcanzar los objetivos anteriormente planteados se utilizan datos reales del departamento de Sucre, para ello se toman las series estadísticas del DANE, se hace una calibración de los valores de los parámetros que complementan el modelo, se hacen estimaciones con medias geométricas para determinar algunas de las tasas y se emplea el método de mínimos cuadrados utilizando el software de Matlab, bajo la función `Isqcurvefit` tal como se explica en la ecuación 3.1, para obtener valores aproximados que permitan completar la calibración y así estudiar la relación entre las dimensiones que conforman el modelo. El trabajo esta estructurado de la siguiente manera:

En el capítulo dos, se hace un estudio minucioso de las ecuaciones dinámicas del modelo como también de las ecuaciones auxiliares que lo complementan, en ellas se analiza en qué puntos el campo vectorial no es continuo, es decir, se analiza aquellos puntos donde la función no es continua y por lo tanto no existen sus derivadas parciales. Esto garantiza que las ecuaciones sean de clase C^1 y así el problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(x)$$

$$x(0) = x_0$$

tiene solución única definida en un intervalo que contiene a x_0 . En el capítulo tres se hace la calibración del modelo con datos del departamento de Sucre, para ello se toman las series del DANE y se estiman los valores de los parámetros y se ajustan de tal manera que se obtenga un mínimo de error, es decir que los valores estimados sean lo más próximo posible a los valores reales. Al final del capítulo se hace un resumen de los valores de los parámetros calibrados.

El capítulo cuatro contiene el estado estacionario del sistema, en él se determinan los puntos de equilibrio del sistema en la zona de sostenibilidad, se definen las políticas y estrategias para definir zonas de sustentabilidad, se hace el análisis de estabilidad de los puntos de

equilibrio y curvas de continuación de equilibrios, se aplica el análisis no lineal para conseguir esquemas sostenible y también se determina la cuenca de atracción del sistema.

El capítulo cinco contiene los principales aportes del trabajo, resultados divulgativos y trabajos futuros.

En el apéndice A se encuentran las ecuaciones auxiliares del modelo.

Capítulo 2

Análisis de existencia y unicidad de las soluciones

Para la realización de este trabajo se toma como referencia el modelo matemático presentado en [14], el cual se refiere a un modelo matemático gobernado por un sistema complejo de ecuaciones diferenciales ordinarias que permiten estudiar la interacción dinámica entre las dimensiones social, ambiental y económica de una región, con el fin de establecer políticas que permitan alcanzar un desarrollo sostenible al emplear técnicas del análisis no lineal. En él se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- Se planteó de forma general el modelo matemático de la interacción dinámica entre las poblaciones rural y urbana, la contaminación y la economía, bajo la hipótesis en que las variables de estado del modelo estén acotadas. Lo cual permite que el modelo pueda ser calibrado para distintas regiones que satisfagan dichas hipótesis.
- El modelo permitió realizar predicciones de estados futuros de varias componentes de las dimensiones social, económica y ambiental, tales como proyecciones de poblaciones rural y urbana, defunciones, nacimientos, empleo, cubrimiento en salud, intercambio económico, migraciones internas y externas, urbanismo, PIB, ahorro, consumo, depreciación de capital, acervo de capital urbano, impacto ambiental por los aportes del PIB, contaminación medio ambiental, entre otras que se pueden obtener por las proyecciones anteriores.
- La normalización del sistema ofreció una mayor facilidad en la interpretación de los resultados obtenidos.
- Se presentó una clasificación de la estabilidad de los puntos de equilibrios que permiten interpretar el cambio que se obtiene respecto a los valores propios a medida que varía el parámetro seleccionado.

- El modelo necesita de un Feedback para la calibración de los parámetros, a medida que se obtengan nuevos datos de las series.
- Se implementó una metodología para medir el acervo de capital empleando la discretización de la ecuación dinámica de Solow.
- Se definieron políticas para alcanzar el desarrollo sostenible de una región, bajo una zona de sostenibilidad definida por el estado transitorio y estable del sistema.
- Se definieron estrategias para alcanzar el desarrollo sostenible, como la obtención de rangos de sostenibilidad bajo la variación de un parámetro, curvas de continuación de equilibrios donde el análisis de la estabilidad es una herramienta que ayuda a determinar la sostenibilidad.
- La bifurcación de Hopf supercrítica permitió obtener ciclos límites atractores que al estar contenidos en la zona de sostenibilidad hacen que bajo condiciones suficientemente cercanas a dichas órbitas estables se alcance la sostenibilidad del sistema.
- Las órbitas inestables en caso de una bifurcación de Hopf subcrítica también permiten determinar condiciones iniciales para las cuales se alcance la sostenibilidad del sistema.
- Las variaciones de varios parámetros permitieron obtener puntos de equilibrios internos en la zona de sostenibilidad.
- El sistema es altamente no lineal y rico en dinámica no lineal, ya que presentó diversas bifurcaciones de codimensión 2 como la Bogdanov - Takens, Hopf -Hopf y la Generalized Hopf.
- La tesis doctoral deja un amplio camino de investigación en modelación matemática, predicción y sobre todo en desarrollo sostenible.

2.1. Ecuaciones del modelo

El modelo planteado en [14], es implementado en este trabajo para realizar el Análisis de la Dinámica no Lineal Bajo la Variación de Parámetros con datos del departamento de Sucre. Para esto, se tiene en cuenta las ecuaciones dinámicas que constituyen el modelo, como también las ecuaciones auxiliares.

Se hace un estudio de cada ecuación sobre aquellos puntos en los cuales el campo vectorial no es continuo; para ello se analiza cada uno de los factores que conforman las ecuaciones dinámicas, teniendo en cuenta las ecuaciones auxiliares. Este análisis permite determinar que las funciones sean de clase C^1 , en la región Ω , ver Figura 2.1, es decir, que las funciones sean continuas, que sus derivadas parciales existan y que a la vez estas derivadas sean continuas, y así poder garantizar la existencia y unicidad de la solución de dichas ecuaciones, haciendo uso del teorema Fundamental de Existencia y Unicidad y del teorema de Dependencia de Parámetros. Esto permite encontrar puntos de equilibrios en la zona de sostenibilidad y con

ello realizar el análisis no lineal y determinar los rangos de los parámetros en los cuales se alcanza un desarrollo sostenible en el departamento de Sucre.

Teorema 1. Teorema Fundamental de Existencia y Unicidad. *Sea E un subconjunto abierto de R^n que contiene a x_0 y asumiendo que $f \in C^1(E)$, entonces existe un $a > 0$ tal que el problema de valor inicial*

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{con } x(0) = x_0$$

tiene una solución única $x(t)$ en el intervalo $[-a, a]$.

Ver demostración en [18], página 74.

Además del teorema de existencia y unicidad de las soluciones también hacemos uso del Teorema Dependencia de los Parámetros, puesto que el modelo está constituido por cuatro variables de estado representadas en las cuatro ecuaciones dinámicas y una serie de parámetros que complementan el modelo.

Teorema 2. Dependencia de Parámetros *Sea E un subconjunto abierto de R^{n+m} , que contiene al punto (x_0, μ_0) donde $x_0 \in R^n$ y $\mu_0 \in R^m$ y asumiendo que $f \in C^1(E)$, de esto se deduce que existe un $a > 0$, y un $\delta > 0$, tal que para todo $y \in N_\delta(x_0)$ y $\mu \in N_\delta(\mu_0)$, el problema de valor inicial*

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

$$x(0) = y$$

tiene una solución única $u(t, y, \mu)$ con $u \in C^1(G)$, donde $G = [-a, a] \times N_\delta(x_0) \times N_\delta(\mu_0)$

[18], página 84.

El modelo está basado en tres dimensiones: la dimensión económica que encierra elementos como servicios, crecimiento industrial, crecimiento agrícola, necesidades de los hogares, uso eficiente de la mano de obra, producción de capital, empleo, entre otros; la dimensión social que involucra elementos como: población, educación, equidad, participación, autodefinición, movilidad social, preservación de la cultura, etc, y la dimensión ambiental que tiene en cuenta elementos como: diversidad biológica, recursos naturales, capacidad máxima permisible, integridad de los ecosistemas, aire y agua limpia, etc. [27].

Según la Comisión Mundial sobre Medio Ambiente y Desarrollo (World Commission on Environment and Development (WCED)) [26], define el desarrollo sostenible como “ el modelo de desarrollo que satisface las necesidades de la generación actual, sin poner en riesgo la satisfacción de las necesidades de las generaciones futuras”; es decir, cuando existe una

armonía entre las tres dimensiones. Por tal motivo, el modelo a implementar está constituido por cuatro ecuaciones dinámicas que relacionan las tres dimensiones anotadas anteriormente y una serie de ecuaciones auxiliares que complementan dicho modelo.

La población está constituida por la población rural (P_r) y la población urbana (P_u); la población rural se refiere a las personas que viven en zonas rurales según la definición de la oficina nacional de estadísticas [4]; su actividad económica está basada en actividades económicas del sector primario, es decir, a las actividades dedicadas al sector agrario, la pesca y la minería. Esta población se calcula como la diferencia entre la población total y la población urbana. La población urbana (P_u), se refiere a todos los habitantes de la cabecera municipal y tiene como actividad económica todas las demás actividades necesarias para satisfacer las necesidades de la población tales como: Industria, manufactura, construcción, electricidad, agua, gas, comercio, restaurante y hoteles, transporte, almacenaje y telecomunicaciones, servicios financieros, inmobiliarios y de alquiler, entre otros. Por lo tanto, en este trabajo se supone que la población urbana P_u es mayor que la población rural P_r , es decir, $P_u \geq P_r$ como se expresa en [14].

2.1.1. Ecuaciones dinámicas del modelo

El modelo a implementar en este trabajo está constituido por cuatro (4) ecuaciones dinámicas que corresponden a las variables de estado del modelo, y una serie de ecuaciones auxiliares que se pueden ver en el Anexo A. Las ecuaciones dinámicas son:

Ecuación dinámica de la **Población Rural**

$$\frac{dP_r}{dt} = \rho_r \left(1 - \frac{P_r}{P_{rmax}} \right) ((n_r - d_r)P_r - m) \quad (2.1)$$

Ecuación dinámica de la **Población Urbana**

$$\frac{dP_u}{dt} = \rho_u \left(1 - \frac{P_u}{P_{umax}} \right) \left(\frac{P_u}{P_{umin}} - 1 \right) ((n_u - d_u - m_e)P_u + m) \quad (2.2)$$

Ecuación dinámica para **El Acervo de Capital Urbano**

$$\frac{dK_u}{dt} = \rho_k \left(1 - \frac{K_u}{K_m} \right) (a_u Y_u - \delta K_u) \quad (2.3)$$

Ecuación dinámica de la **Contaminación Ambiental**

$$\frac{dc}{dt} = \rho_c c(1 - c)(c_{py} - h) \quad (2.4)$$

donde: ρ_r , ρ_u , ρ_k y ρ_c son parámetros de proporcionalidad.

P_{rmax} , es la población rural máxima, la cual permite acotar a la población urbana, según lo definido en [14] y se determina mediante la expresión 2.5.

$$P_{rmax} = P_u - \frac{P_u^2}{P_m} \quad (2.5)$$

P_m es **La Capacidad Máxima de Habitantes de la Región** y se calcula mediante la expresión 2.6.

$$P_m = \frac{H}{sh_e} \quad (2.6)$$

H : Representa la cantidad de hectáreas de la región o departamento; s : es la tasa de ocupación o la fuerza laboral de la región y el parámetro h_e que hace referencia a la cantidad de área en hectáreas mínimas que necesita un habitante que conforma la fuerza laboral para producir, como se explica en [14]. De ahí que se hace necesario definir una función que permita estudiar el comportamiento de la población en la región Ω representada en la Figura 2.1, donde la variable P_r queda acotada entre $0 \leq P_r \leq P_{rmax}$, siendo P_{rmax} una función suave definida por la ecuación 2.5, la cual representa el campo vectorial a tener en cuenta en este trabajo.

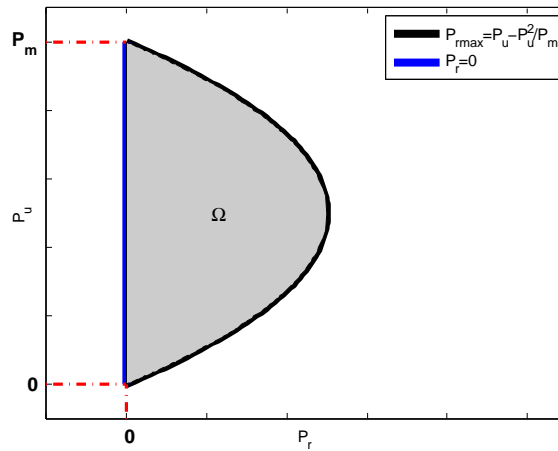


Figura 2.1: Región de existencia y unicidad de soluciones

n_r : Es la tasa de natalidad en el sector rural; según el DANE consolida, valida y procesa la información de nacimientos a partir de los Certificados de Nacido Vivo diligenciados en medio físico o digital, por médicos, personal de salud autorizado (enfermeras, auxiliar de enfermería y promotores de salud) y funcionarios de Registro Civil (DANE: demografía y población, nacimientos y defunciones: opción, nacimientos). Esta tasa se determina mediante la expresión A.3.

d_r : Es la tasa de defunciones rurales; para esto, según el DANE, se tiene en cuenta las defunciones fetales y no fetales registrados con certificados de defunción diligenciados en medio físico o digital, por médicos y personal de salud autorizado (enfermeras, auxiliares de enfermería y promotores de salud), (DANE: demografía y población. Nacimientos y defunciones: defunciones fetales y no fetales). Ver ecuación A.6

m : Representa la tasa de migración. La migración, tanto interna como externa es uno de los tres componentes demográficos que determinan el volumen, estructura y distribución de la población en un territorio (DANE: demografía y población: Movilidad y migración). Ver la ecuación A.5.

P_{umax} : Es la población urbana máxima que puede tener una región o territorio. Ver ecuación A.2

n_u : Se refiere a los nacimientos urbanos; d_u a las defunciones urbanas.

m_e : Es la tasa de migración externa, es decir la migración que se produce desde el casco urbano del departamento hacia otras regiones, o departamentos del país.

K_u : Es el acervo de capital urbano. K_m es la máxima acumulación de capital que se puede obtener de los sectores rurales y urbanos.

a_u : Representa la tasa de ahorro urbano, esta tasa se encuentra en el intervalo $a_u \in (0, 1]$.

Y_u : Es el PIB urbano.

δ : Es la depreciación del capital.

c : Hace referencia a la tasa de contaminación ambiental, así, $0 \leq c \leq 1$.

c_{py} : Es la tasa de contaminación ambiental de la región, y

h : Es la tasa de reducción de la contaminación medio ambiental o tasa de recuperación del medio ambiente, como se expresa en la ecuación A.15.

2.2. Análisis de las ecuaciones dinámicas del modelo

En esta sección se estudia detalladamente cada ecuación para determinar aquellos puntos en los cuales el campo vectorial no es continuo; así se tiene que en la ecuación 2.1, es decir,

$$\frac{dP_r}{dt} = \rho_r \left(1 - \frac{P_r}{P_{rmax}} \right) ((n_r - d_r)P_r - m)$$

- El primer factor se tiene que P_{rmax} debe ser distinto de cero, pero si $P_{rmax} = 0$, la función no es continua; entonces al remplazar en la ecuación 2.5 obtenemos que $P_u = P_m$ y $P_u = 0$. En el segundo factor se tiene que analizar la ecuación A.3 y la ecuación A.6, es decir,

$$n_r = g_r \left(1 - \frac{Y_r}{Y_{rmax}} \right)^{\frac{1}{\eta_{yr}}} \left(\frac{P_r}{P_{rmax}} \right)^{\frac{1}{\eta_{pr}}} (1 - c)^{\eta_{cr}} (1 - e_r) c_{sr}$$

obteniéndose que:

- Si $Y_{rmax} = 0$, remplazando en la ecuación A.12 se tiene que $rY_{umax} = 0$, de donde $r = 0$ ó $Y_{umax} = 0$.
- Si $Y_{umax} = 0$ y remplazando en la ecuación A.14 se tiene que $Y_{Tmax} = 0$.
- Ahora si $r = 0$, al remplazarla en la ecuación A.11, obtenemos que $Y_r = 0$, pero si $Y_r = 0$ y remplazándola en la ecuación A.13, se tiene que $Y_T = Y_u$

Pero si $Y_{Tmax} = 0$, al remplazarlo en la ecuación A.14, se tiene que $r = -1$. Además si $Y_T = Y_u$, al remplazarla en la ecuación A.13, entonces $Y_r = 0$.

En el tercer y cuarto factor de la ecuación A.3, se tiene que si $(1 - c)^{\eta_{cr}} = 0$, entonces $c = 1$ y si $(1 - e_r) c_{sr} = 0$, entonces $1 - e_r = 0$ ó $c_{sr} = 0$, de donde se tiene que $e_r = 1$ y si $c_{sr} = 0$, entonces $n_r = 0$.

Analicemos ahora la ecuación A.6, es decir

$$d_r = \left(1 - g_r \frac{Y_r}{Y_{rmax}} \right)^{\frac{1}{\delta_{yr}}} \left(\frac{P_r}{P_{rmax}} \right)^{\frac{1}{\delta_{pr}}} c^{\delta_{cr}} (1 - e_r) (1 - c_{sr})$$

Los términos de esta ecuación están incluidos en el análisis anterior.

Analizando ahora la ecuación A.5

$$m = R \frac{P_r P_u}{P_r + P_u} \left(\frac{g_u P_{rmax} - g_r P_u r \left(1 - \frac{Y_u}{Y_{umax}}\right)}{g_u P_{rmax} + g_r P_u r \left(1 - \frac{Y_u}{Y_{umax}}\right)} \right)$$

Tenemos que el campo no existe si $P_r = -P_u$ y si $Y_{umax} = 0$.

Ahora si $P_r = -P_u$, replazando en la ecuación A.17 se tiene que $C_{py} = 0$. Si esto se dá, entonces $l = 1$ y $Y_r = -Y_u$.

Analizando la ecuación 2.2

$$\frac{dP_u}{dt} = \rho_u \left(1 - \frac{P_u}{P_{umax}}\right) \left(\frac{P_u}{P_{umin}} - 1\right) ((n_u - d_u - m_e)P_u + m)$$

esta función no es contínua si:

- si $P_{umax} = 0$, $P_r = 0$. De igual manera sucede si $P_{umin} = 0$

Analizando el tercer factor; es decir la ecuación A.4

$$n_u = g_u \left(1 - \frac{Y_u}{Y_{umax}}\right)^{\frac{1}{\eta_{yu}}} \left(\frac{P_u}{P_{umax}}\right)^{\frac{1}{\eta_{pu}}} (1 - c)^{\eta_{cu}} (1 - e_u) c_{su}$$

se tiene que no existe continuidad cuando

- Si $Y_{umax} = 0$, replazando en la ecuación A.14, se tiene que $Y_{Tmax} = 0$. Ahora sí $P_{umax} = 0$, entonces $P_r = 0$.

Analizando la ecuación A.7

$$d_u = \left(1 - g_u \frac{Y_u}{Y_{umax}}\right)^{\frac{1}{\delta_{yu}}} \left(\frac{P_u}{P_{umax}}\right)^{\frac{1}{\delta_{pu}}} c^{\delta_{cu}} (1 - e_u) (1 - c_{su})$$

se tiene:

Si $Y_{umax} = 0$, entonces replazando en la ecuación A.9 tenemos que $\delta = 0$ ó $K_m = 0$. Si $K_m = 0$, entonces replazando en la ecuación A.10 se tiene que $A = 0$ ó $a_u = 0$, pero sí $A = 0$, replazando en la ecuación A.8, entonces $Y_u = 0$. Por otro lado, si $a_u = 0$, entonces por la ecuación A.19 se tiene que $g_u = 1 - c_u$.

En la ecuación 2.4 solo se analiza el término c_{py} que corresponde a la tasa de contaminación ambiental

$$c_{py} = \left(\frac{(1 - l)(Y_r + Y_u)}{Y_{Tmax}}\right) \left(\frac{P_r + P_u}{P_m}\right)$$

de donde se tiene que la discontinuidad de este término y por consiguiente de la ecuación 2.4, se presenta si

- $Y_{Tmax} = 0$, reemplando en la ecuación A.14, obtenemos que $r = -1$ ó $Y_{umax} = 0$, de donde se tiene que $\delta = 0$ ó $K_m = 0$.

Tenemos que el campo vectorial no es continuo y no existen las derivadas parciales si ocurre que:

Si $P_{rmax} = 0$, implica que $P_u = P_m$ y $P_u = 0$.

Si $Y_{rmax} = 0$, entonces $r = 0$, así $Y_r = 0$ ó $Y_T = Y_u$ ó $Y_{umax} = 0$, entonces $Y_{Tmax} = 0$, pero si esto se dá, entonces $r = -1$ y si $Y_T = Y_u$, entonces $Y_r = 0$. Además $c = e_r = 1$ y $c_{sr} = 0$. Por otro lado sí $P_r = -P_u$, entonces $C_{py} = 0$ de donde $l = 1$ y $Y_r = -Y_u$. Ahora si $P_{umax} = 0$, $P_r = 0$ y $P_{umin} = 0$. Si $Y_{umax} = 0$, entonces $\delta = 0$ ó $K_m = 0$ y si $A = 0$, se tiene que $Y_u = 0$ y $a_u = 0$.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, se tiene que el campo vectorial Ω es continuo para los siguientes rangos de los parámetros $(\alpha, r, R, \delta) = (0, 1) \times (0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Además sus derivadas parciales existen y son continuas excepto en los puntos mencionados anteriormente; lo cual indica que las funciones son de clase C^1 , por lo tanto aplicando el teorema fundamental de existencia y unicidad [18], página 74, se tiene que el problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(x)$$

$$x(0) = x_0$$

tiene una única solución definida en un intervalo que contiene a x_0 . Luego se aplican las propiedades básicas de las funciones diferenciables.

Capítulo 3

Calibración del modelo con información del departamento de Sucre

Este capítulo consiste en estimar los valores de los parámetros. Para esto, se toman las series del DANE y así obtener estimaciones del modelo con datos aproximados a los del departamento de Sucre. Debido a la gran dificultad para conseguir la información estadística que permita obtener una calibración ideal del modelo, se proponen algunos valores de los parámetros como los anotados en [14], se hacen estimaciones con medias geométricas para determinar algunas de las tasas y se emplea el método de mínimos cuadrados del software **MATLAB**, bajo la función **lsqcurvefit**, explicado por la ecuación 3.1 para obtener los valores aproximados que permitan completar la calibración del modelo y así poder estudiar la interacción dinámica entre las poblaciones rural y urbana, como su economía y la contaminación ambiental de la región.

El proceso de calibración comienza en la fase de conceptualización del problema al determinar cuáles son los parámetros de entrada que afectan al modelo [19], para ello se deben ajustar los valores de los parámetros, de tal manera que se obtenga un mínimo de error y así tener una calibración óptima, es decir, lo más próxima ajustada a los valores reales de los parámetros.

En el DANE se encuentran las series de la tasa de ocupación rural y urbana para Colombia, como también la tasa de ocupación para el departamento de Sucre. Con estos datos se obtienen a través de una media geométrica proporcional, la tasa de la fuerza laboral urbana para el sector urbano s_u . Las series de acervo de capital urbano no se lograron obtener, por lo que se discretiza la ecuación dinámica de **Solow** [2], para lograr una fórmula del acervo de capital urbano en cualquier tiempo. De estas fórmulas y del acervo del PIB rural y urbano, del DANE como de las series de población entre los años [2000, 2010], se estiman los parámetros del modelo como se hizo en [14].

Por otra parte, en el DANE [6], en el ítem de cuentas ambientales se encuentran la tasa

de contribución del PIB de Colombia para el medio ambiente; de aquí, se dan unos valores aproximados a las tasas de contribución al medio ambiente c_r y c_u del PIB rural y urbano respectivamente. Para dicha estimación se fijó la variable de estado de la tasa de contaminación c como un parámetro, y así se estima también un valor aproximado de la tasa de contaminación constante entre los años 2000 a 2007.

Por último, al obtener el valor de c , se emplea como condición inicial en las ecuaciones diferenciales 2.4 y las condiciones iniciales de P_r , P_u y K_u en el año 2000, para estimar los parámetros restantes del conjunto de ecuaciones diferenciales del modelo.

3.1. Método empleado para la estimación de parámetros

Para estimar la mayoría de los valores de los parámetros se utiliza el método de mínimos cuadrados haciendo uso del método empleado en [21], el cual está implementado en el software MATLAB, donde dada una ecuación $y = F(p, x)$ siendo p un vector de parámetros desconocidos, x una matriz o un vector de datos, y un vector de datos, se calcula una estimación de los valores de los parámetros del vector p que mejor se ajusten a la ecuación 3.1

$$\min_p \|F(p, x) - y\|_2^2 = \min_p \sum_i (F(p_i, x_i) - y_i)^2 \quad (3.1)$$

con una condición inicial p_0 .

A continuación se estiman los valores de algunas tasas y de los parámetros utilizados en este trabajo, con datos del departamento de Sucre.

3.2. Estimación de las tasas de ocupación total s y urbana

s_u .

En el DANE [9], se encuentra la serie de población ocupada (**TO**), para el resto (**rural**) y cabecera (**urbana**) de Colombia entre los años 2002 - 2009 como se muestra en la Figura 3.1 donde se observa que la población ocupada urbana tiene un comportamiento casi proporcional al total de personas ocupadas en Colombia, de donde la tasa de proporcionalidad t_u se puede expresar por el cociente entre el total ocupados TO_u del sector urbano sobre el total de ocupados de Colombia TO como se define en la ecuación 3.2

$$t_u = \frac{TO_u}{TO} \quad (3.2)$$

y calculando la media geométrica para la serie anterior se tiene que:

$$t_u = 0,7600. \quad (3.3)$$

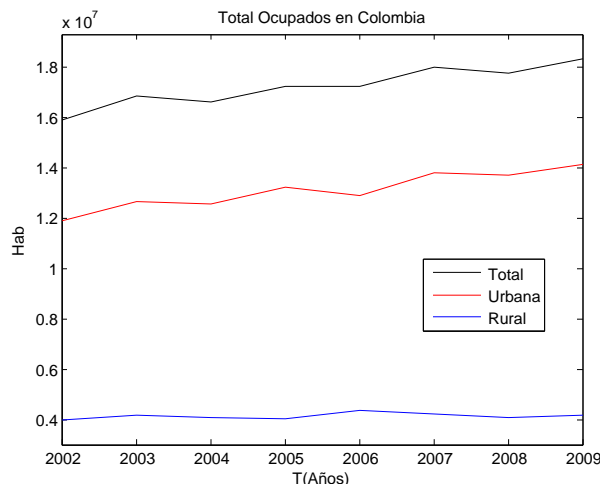


Figura 3.1: Total ocupados en Colombia

En la Figura 3.1, se observa que la población ocupada urbana es aproximadamente las tres cuartas partes del total nacional, y la población ocupada rural es aproximadamente un cuarto del total nacional y un tercio de la urbana.

Ahora, suponiendo que la proporción entre la población ocupada urbana y la población total en Colombia se mantiene para el departamento de Sucre; es decir, que el total de ocupados en el sector urbano es proporcional al total de habitantes del departamento se tiene que:

$$t_u = \frac{TO_u}{TO} = \frac{s_u P_u}{TO}. \quad (3.4)$$

de donde la tasa de ocupación s_u para Sucre está expresada mediante la ecuación 3.5.

$$s_u = \frac{t_u TO}{P_u}. \quad (3.5)$$

Las series de la población rural y urbana de Sucre entre los años [1985, 2015] se obtienen del DANE [11] como se observa en la Figura 3.2(a); en ella se aprecia que la población urbana tiene una tendencia a crecer a medida que trascuren los años, mientras que la población rural, tiende a mantenerse casi que constante en el tiempo.

También se encuentra el total de ocupados en el departamento de Sucre entre los años [2002, 2009], como lo indica la Figura 3.2(b), donde se observa que el total de ocupados en el departamento de Sucre, tiene un aumento considerable entre los años [2002 a 2003] y entre [2008 y 2009] con unos pequeños descensos entre los años [2003 y 2004] y entre [2007 y 2008], debido tal vez al problema de violencia vivido en la región por estos años.

Teniendo en cuenta la información suministrada en las Figuras 3.1, 3.2(a), 3.2(b), y las ecuaciones 3.3 y 3.5, se estima la tasa de ocupación urbana para el departamento de Sucre dada en la ecuación 3.6

$$s_u = 0,4153. \quad (3.6)$$

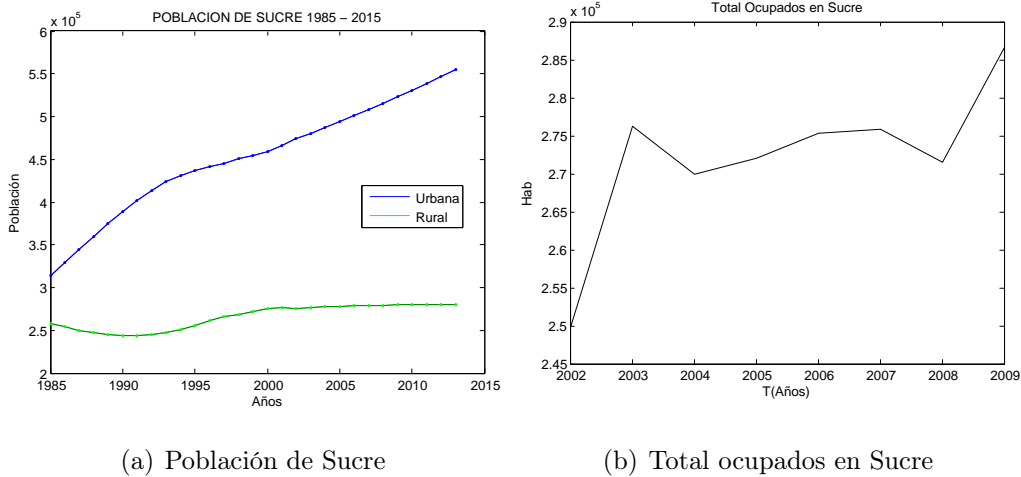


Figura 3.2: Población y total ocupados en Sucre

Lo cual indica que el 41,53 % de la población urbana conforman la fuerza laboral urbana para el departamento.

La Figura 3.3(a) muestra el total de ocupados en cada sector, donde la serie de la fuerza laboral rural PEA_r se obtuvo como la diferencia entre el total de ocupados del departamento de Sucre y el total calculado urbano. Al obtener la serie de la fuerza laboral rural, se estima la tasa de empleo rural como se muestra en la ecuación 3.7

$$s_r = \frac{PEA_r}{P_r}. \quad (3.7)$$

Ahora se determina la tasa de empleo rural s_r , para el departamento de Sucre, para esto, se toma la media geométrica de los datos obtenidos en la ecuación 3.7; obteniendo así la igualdad 3.8

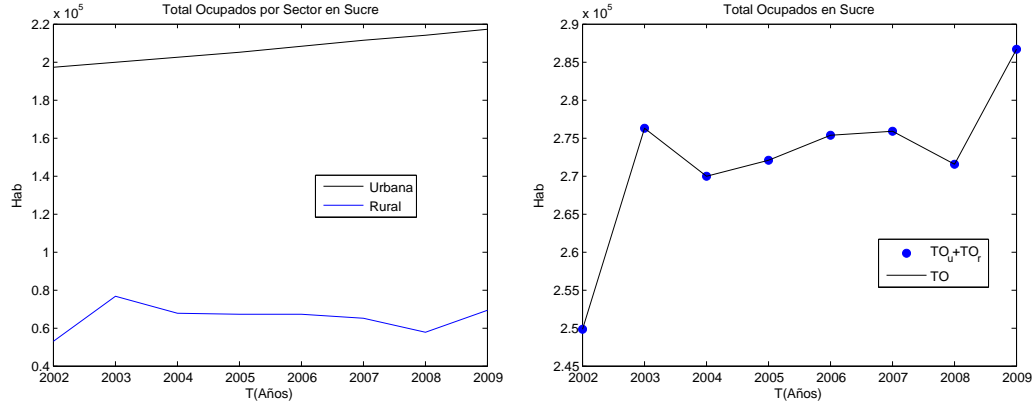
$$s_r = 0,2338. \quad (3.8)$$

En la Figura 3.3(b), se tiene que la tasa de ocupación urbana sumada con la rural sigue la tendencia de la serie del DANE, lo cual establece una relación entre los datos calculados y la serie de la tasa de ocupación; así mismo, la estimación del total de ocupados por sector, sigue la tendencia que representa la población de cada sector como lo indican las Figuras 3.3(a) y 3.3(b).

Para determinar el valor de la fuerza laboral para Sucre, se calcula la media geométrica de los datos obtenidos mediante la expresión 3.9

$$s = \frac{TO}{P_T} = \frac{TO}{P_r + P_u} = 0,3506 \quad (3.9)$$

que es un porcentaje bastante bajo, comparado con la tasa nacional que siempre está por encima del 50 %, y sin embargo el desempleo en Colombia se ha ubicado superando el 10 ó 12 % según el DANE que es un porcentaje alto de desempleo.



(a) Estimación del total ocupados por sector rural y urbano en Sucre (b) Comparación del total de ocupados en Sucre

Figura 3.3: Estimación del total de ocupados

3.3. Estimación de la serie de acervo de capital urbano

En el DANE [7], se encuentran las series del PIB rural y urbano entre los años [2000, 2011] a precios corrientes teniendo en cuenta que, para el sector rural se incluye solo lo producido en el sector agrario, pesca y minero, y para el sector urbano el resto de las ramas de actividad económicas como se aprecia en la Figura 3.4

Asumiendo que el capital inicial en el año $t_1 = 2000$ es proporcional al PIB de ese año, como se indica en [14], se tiene la ecuación 3.10

$$K_{u,1} = \gamma Y_{u,1}. \quad (3.10)$$

Pero $Y_u = AK_u^\alpha (s_u P_u)^{1-\alpha}$, ver ecuación A.8; así sustituyendo $K_{u,1}$, se tiene la ecuación 3.11

$$Y_{u,1} = A(\gamma Y_{u,1})^\alpha (s_u P_{u,1})^{(1-\alpha)}. \quad (3.11)$$

y despejando γ se tiene la ecuación 3.12.

$$\gamma = \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{Y_{u,1}}{s_u P_{u,1}}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}. \quad (3.12)$$

Aproximando la derivada de la ecuación dinámica para el acervo de capital urbano 2.3 en diferencias a espacio de un año, como se indica en [14], se tiene la ecuación 3.13

$$K_{u,i+1} = a_u Y_{u,i} + (1 - \delta) K_{u,i} \quad (3.13)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones 3.13 y 3.10 y conociendo la tasa de ahorro a_u y la depreciación de capital δ , entonces el acervo de capital urbano se puede calcular por la ecuación 3.14.

$$K_{u,n} = a_u \sum_{k=1}^{n-1} (1 - \delta)^{n-1-k} Y_{u,k} + \gamma (1 - \delta)^{n-1} Y_{u,1} \quad (3.14)$$

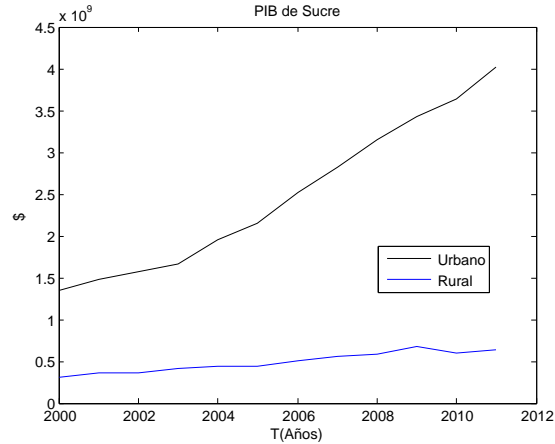


Figura 3.4: PIB del Departamento de Sucre

3.3.1. Estimación de los parámetros A , δ , a_u y α de la función de producción urbana.

Para optimizar los valores de estos parámetros, tenemos en cuenta el PIB urbano de Sucre, Figura 3.4, la tasa de la fuerza laboral urbana s_u ecuación 3.6, el acervo de capital urbano representado en las ecuaciones 3.12 y 3.14, los valores iniciales de los parámetros ecuación 3.15 y utilizando el método de mínimos cuadrados; además, sabiendo que estos parámetros se mueven entre los siguientes intervalos, $A > 0$, $0 < \alpha < 1$, $0 < a_u \leq 1$ y $0 \leq \delta \leq 1$, se tienen en la ecuación 3.16 los valores optimizados para los mismos.

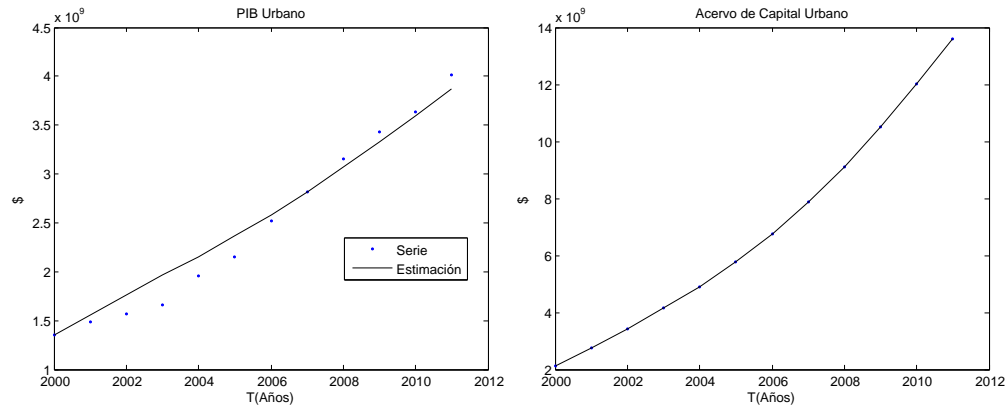
$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= 0,5 \\
 A_0 &= 1 \\
 a_{u0} &= 0,5 \\
 \delta_0 &= 0,05
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

y mediante mínimos cuadrados se obtuvo la siguiente estimación

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 0,5253 \\
 A &= 53,000 \\
 a_u &= 0,5000 \\
 \delta &= 0,0200
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

La Figura 3.5(a) muestra la estimación del PIB urbano para Sucre, con un error relativo a la norma de la serie como se expresa en la igualdad 3.17, el cual es un error un poco alto.

$$E_{Y_u} = 5,64\% \tag{3.17}$$



(a) Estimación del PIB Urbano

(b) Serie de Acervo de capital urbano

Figura 3.5: Estimación del PIB y acervo de capital urbano

Con la ecuación 3.14, los valores de los parámetros A , a_u , δ , α , s_u , la serie del PIB urbano y la población urbana se calcula la serie del acervo de capital urbano para Sucre representada en la Figura 3.5(b), donde se observa que siempre es creciente.

3.4. Estimación de los parámetros H , r y h_e

La extensión del departamento de Sucre es de $10917Km^2$ que expresado en hectáreas h_a equivale a la igualdad 3.18.

$$H = 1091700h_a \quad (3.18)$$

Ahora, de las Figuras 3.4, series del PIB rural y urbano de Sucre y 3.2(a), series de población, del valor de H (ecuación 3.18) y del valor de los parámetros A , δ , a_u y α , se estima por mínimos cuadrados ver ecuación 3.1, el valor de los parámetros r y h_e ; además haciendo uso de las ecuaciones 2.6, 2.5, producción máxima urbana A.9, acumulación máxima de capital A.10 y la producción rural A.11, y teniendo como condición inicial $r_0 = 0,225$ y $h_{e0} = 1,3$, se obtiene la estimación de los parámetros:

$$\begin{aligned} r &= 0,2862 \\ h &= 1,2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

La estimación del PIB rural se muestra en la Figura 3.6, con un error relativo a la norma de la serie dada por la ecuación 3.20

$$E_{Y_r} = 10,68\% \quad (3.20)$$

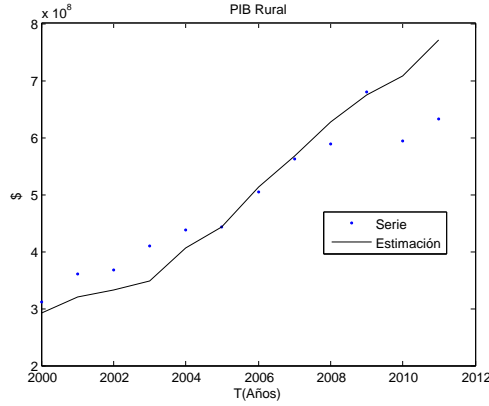


Figura 3.6: Estimación del PIB rural de Sucre

Al observar la Figura 3.6 y el error calculado en la ecuación 3.20 se tiene que la estimación no es la más efectiva debido a que las series suministradas por el DANE no se ajustan a la realidad, y tampoco se aproximan a la función propuesta en la ecuación A.11.

Con los valores de los parámetros ya calculados se determinan los valores de los parámetros representados en la ecuación 3.21

$$\begin{aligned}
 P_m &= 2594837 \\
 K_m &= 4083042341776 \\
 Y_{umax} &= 163321693671 \\
 Y_{rmax} &= 11686362765 \\
 Y_{Tmax} &= 236002671351
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

3.5. Estimación de los parámetros $c_r, c_u, a_r, e_r, e_u, c_{sr}, c_{su},$

$$\delta_{pr}, \delta_{pu}, \delta_{yr}, \delta_{yu}, \delta_{cr}, \delta_{cu}, \eta_{pr}, \eta_{pu}, \eta_{yr}, \eta_{yu}, \eta_{cr} \text{ Y } \eta_{cu}$$

Ahora, para determinar el valor de estos parámetros, se tiene en cuenta que, en el ítem **Ambientales -Cuentas ambientales** del DANE, en la sección cuentas de actividades ambientales (Gobierno) en el año 2000, se encuentra la tasa del PIB destinado para la protección del medio ambiente como se muestra en la igualdad 3.22

$$c_{ma} = 0,0040 \tag{3.22}$$

Suponiendo que las tasas de contribución del PIB rural y urbano son próximas al valor de la ecuación 3.22, se propone para el sector urbano una tasa mayor que el sector rural, puesto que la contribución del PIB urbano es mayor, lo que genera más contaminación, por lo tanto, se asumen las tasas de contribución rural y urbano mediante las expresiones 3.23 y 3.24 respectivamente.

$$c_r = 0,0038 \tag{3.23}$$

$$c_u = 0,0041 \tag{3.24}$$

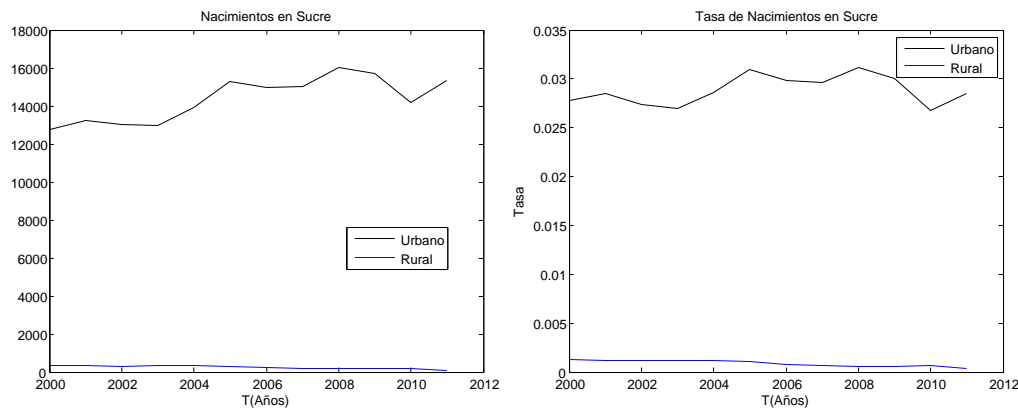
3.5. ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS $C_R, C_U, A_R, E_R, E_U, C_{SR}, C_{SU}, \delta_{PR}, \delta_{PU}, \delta_{YR}, \delta_{YU}, \delta_{CR}, \delta_{CU},$

Por otra parte, para estimar la tasa de nacimientos en sucre, se tiene en cuenta la información que suministra el DANE, ver [10], ahí se encuentran las series de los nacimientos desde 1998 al 2013, pero solo se tomó la información desde el año 2000 hasta el 2011, utilizando la primera metodología, es decir, **nacimientos por área y sexo, según departamento de ocurrencia. Cuadro 1**, ver Figura 3.7(a).

Asumiendo que los nacimientos N_i son proporcionales a la población P_i como se indica en [14], en cada año i para cada sector, se tiene entonces la ecuación 3.25

$$N_i = n_i P_i \quad (3.25)$$

Ahora, haciendo uso de esta ecuación se calculan las tasas de natalidad n_i para cada año, utilizando la metodología propuesta anteriormente, obteniéndose la Figura 3.7(b).



(a) Nacimientos en Sucre

(b) Tasa de nacimientos en Sucre

Figura 3.7: Nacimientos y tasa de nacimientos en Sucre

Al comparar la información del DANE con la Figura 3.7(a) y la tasa de nacimientos 3.7(b), se tiene que a medida que transcurre el tiempo entre los años 2000 a 2012, los nacimientos urbanos cada vez son mayores, mientras que los nacimientos rurales son mas reducidos, lo cual indica por lógica que la población rural debe ser cada vez menor.

De igual manera, del DANE [8] se obtienen las series de las defunciones rurales y urbanas para Sucre. Al observar los datos del DANE se nota que las defunciones rurales tienden a disminuir y las defunciones urbanas tienen una tendencia a aumentar a medida que transcurren los años, tal como se ilustra en la Figura 3.8(a); lo cual coincide con la estimación de las tasas de defunción como se puede ver reflejado en los graficos de la Figura 3.8(b). Con las series de nacimientos y defunciones, estimamos la tasa de defunción y de natalidad para Sucre, como se observa en las Figuras 3.9 y 3.10.

Así como se procedió para calcular la tasa de los nacimientos, similarmente se hace para determinar la tasa de defunción, es decir, se supone que las defunciones D_i son proporcionales

a la población P_i para cada año i , de cada sector, así como lo indica la ecuación 3.26

$$D_i = d_i P_i \tag{3.26}$$

Con esta ecuación se calculan las tasas de defunción d_i para cada año obteniéndose la Figura 3.8(b).

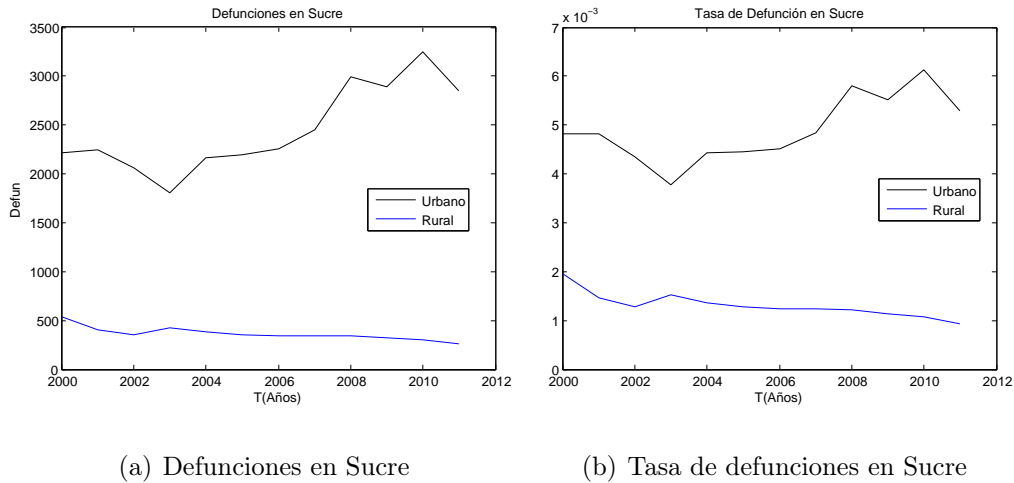


Figura 3.8: Defunciones y tasa de defunciones en Sucre

Con la estimación de las series de las tasas de natalidad y de defunción para sucre, como lo indican las figuras 3.8(a) y 3.8(b), se estiman los valores de los parámetros que involucran las ecuaciones relacionadas con las tasas de natalidad y defunciones rurales y urbanas, es decir, las ecuaciones A.3, A.4, A.6, y A.7.

Para optimizar los valores de los parámetros, se dan como condición inicial los valores de la Tabla 3.1; lo cual produce las estimaciones para los parámetros comprendidos en este periodo [2001, 2009], como se puede ver en la Tabla 3.2

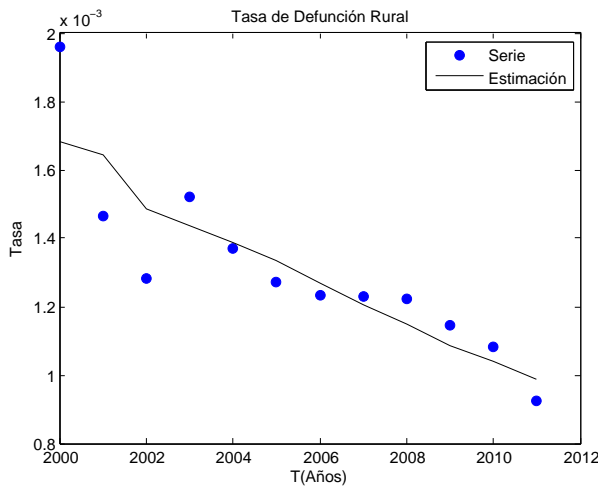
Tabla 3.1: Valores iniciales de los parámetros c , a_r , e_r , e_u , c_{sr} , c_{su} , δ_{pr} , δ_{pu} , δ_{yr} , δ_{yu} , δ_{cr} , δ_{cu} , η_{pr} , η_{pu} , η_{yr} , η_{yu} , η_{cr} y η_{cu}

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
c_0	0,0196	a_{r0}	0,4	e_{r0}	0,4
e_{u0}	0,6905	c_{sr0}	0,2	c_{su0}	0,676
η_{pr0}	0,1356	η_{pu0}	0,99	η_{yr0}	0,1309
η_{yu0}	0,1309	η_{cr0}	0,99	η_{cu0}	0,4951
δ_{pr0}	0,5788	δ_{pu0}	0,999	δ_{yr0}	0,99
δ_{yu0}	0,147	δ_{cr0}	0,99	δ_{cu0}	0,3347

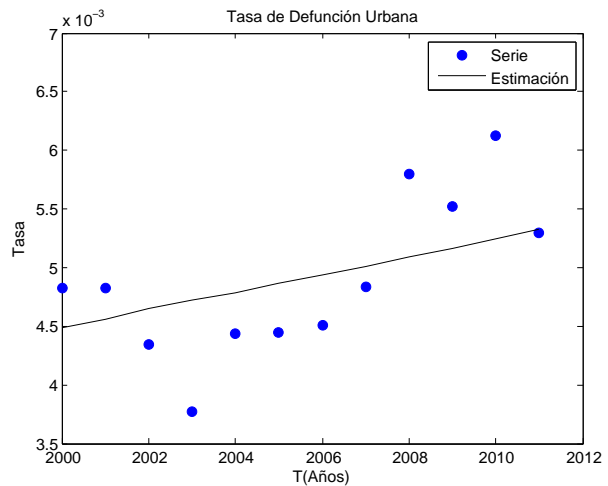
3.5. ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS $C_R, C_U, A_R, E_R, E_U, C_{SR}, C_{SU}, \delta_{PR}, \delta_{PU}, \delta_{YR}, \delta_{YU}, \delta_{CR}, \delta_{CU},$

Tabla 3.2: Valores optimizados de los parámetros $c, a_r, e_r, e_u, c_{sr}, c_{su}, \delta_{pr}, \delta_{pu}, \delta_{yr}, \delta_{yu}, \delta_{cr}, \delta_{cu}, \eta_{pr}, \eta_{pu}, \eta_{yr}, \eta_{yu}, \eta_{cr}$ y η_{cu}

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
c	0,016	a_r	0,45	e_r	0,4
e_u	0,6	c_{sr}	0,1016	c_{su}	0,7
η_{pr}	0,105	η_{pu}	1	η_{yr}	0,2764
η_{yu}	0,3024	η_{cr}	0,9998	η_{cu}	0,48
δ_{pr}	0,197	δ_{pu}	0,9	δ_{yr}	1
δ_{yu}	1	δ_{cr}	1	δ_{cu}	0,363



(a) Rural



(b) Urbana

Figura 3.9: Estimación tasa de defunción en Sucre

Los errores cometidos respecto a la norma de las series obtenidas por el DANE son: para la tasa de defunción rural del 9,15 % y del 38,14 % para la urbana, para la tasa de nacimiento rural se tiene el 5,10 % y del 12,42 % para la urbana; estas estimaciones son representadas en las Figuras 3.9(a), 3.9(b), 3.10(a) y 3.10(b). Teniendo en cuenta estos errores y las Figuras de las tasas estimadas se observa que no es posible aproximar a través del modelo las tasas dadas en las series bajo las ecuaciones A.3, A.4, A.6, y A.7 para los valores de los parámetros obtenidos en la Tabla 3.2

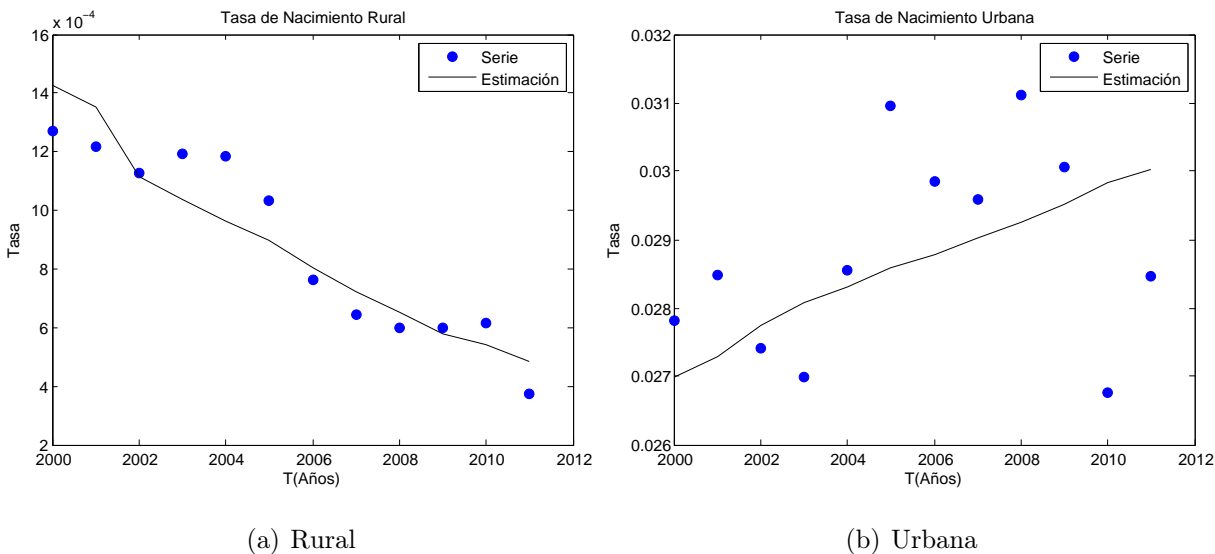


Figura 3.10: Estimación tasa de nacimiento en Sucre

3.6. Estimación de los parámetros R , l , m_e , ρ_r , ρ_u , ρ_k y ρ_c

Para la estimación de los parámetros R , l , m_e , ρ_r , ρ_u , ρ_k y ρ_c que complementan las ecuaciones dinámicas 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 se tiene en cuenta el valor Tab3 para obtener la estimación de la Tabla ??.

Tabla 3.3: Valores iniciales de los parámetros R , l , m_e , ρ_r , ρ_u , ρ_k y ρ_c

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
R_0	0,011	l_0	0,18	m_{e0}	0,018
ρ_{r0}	0,95	ρ_{u0}	0,95	ρ_{k0}	0,95
ρ_{c0}	0,01				

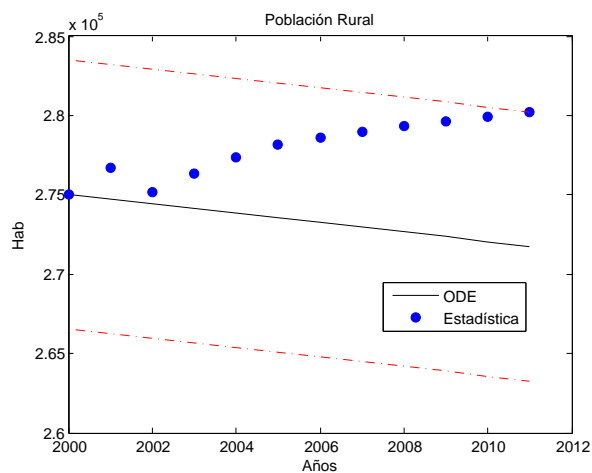
3.6.1. Resumen de la calibración de los parámetros

En la Tabla 3.4 se presentan los valores de los parámetros obtenidos en la calibración.

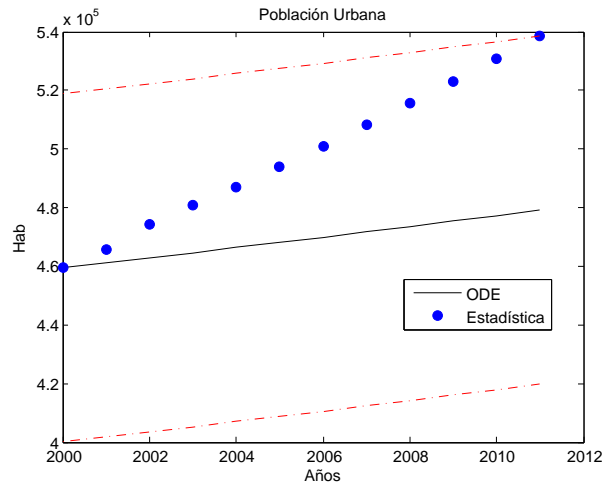
Tabla 3.4: Valores de los parámetros calibrados

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
s_u	0.4153	s_r	0.2338	s	0.3506
α	0.5253	A	53.000	a_u	0.5000
δ	0.025	H	1091700	r	0.2862
h_e	1.2	c_r	0.0038	c_u	0.0041
a_r	0,45	e_r	0,4	e_u	0,6
c_{sr}	0,1016	c_{su}	0,7	η_{pr}	0,105
η_{pu}	1	η_{yr}	0,2764	η_{yu}	0,3024
η_{cr}	0,9998	η_{cu}	0,48	δ_{pr}	0,197
δ_{pu}	0,9	δ_{yr}	1	δ_{yu}	1
δ_{cr}	1	δ_{cu}	0,363	R	0,012
l	0,15	m_e	0,015	ρ_r	1
ρ_u	1	ρ_k	0,9245	ρ_c	0,02

Las Figuras 3.11(a), 3.11(b), 3.12(a) y 3.12(b) muestran las Figuras de las series de población rural y urbana, acervo de capital urbano y tasa de contaminación; los errores relativos respecto a estas series se ilustran en la ecuación 3.27.



(a) Rural



(b) Urbana

Figura 3.11: Calibración de la población

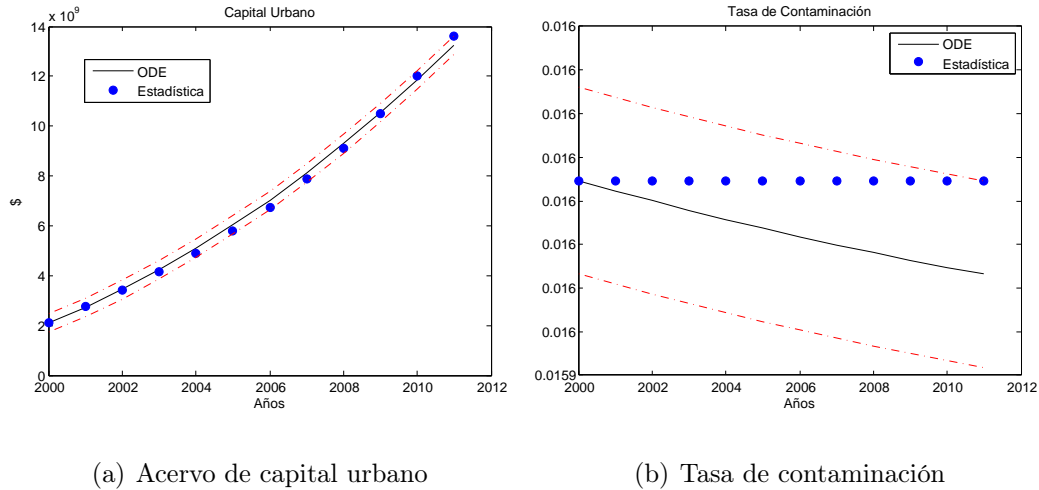


Figura 3.12: Calibración del acervo de capital y de la tasa de contaminación

$$\begin{aligned}
 E_{Pr} &= 1,81 \% \\
 E_{Pu} &= 7,80 \% \\
 E_{Ku} &= 3,61 \% \\
 E_c &= 0,052 \%
 \end{aligned}
 \tag{3.27}$$

En la Figura 3.11(a), se observa que, según el DANE, la población rural **augmenta** a medida que pasan los años, pero en las Figuras 3.9(a) y 3.10(a) correspondientes a las tasas de defunción y natalidad de la población rural respectivamente, se observa que la tasa de defunción siempre es mayor que la tasa de natalidad, lo que implica que el crecimiento natural de la población es negativo e implicando que la serie de la población decrezca respecto al tiempo, caso contrario a lo que se da en las series estadísticas del DANE (ver Figura 3.2(a)). Cabe anotar que estamos suponiendo la migración interna como constante y es por este motivo que es despreciada en este análisis.

Se aprecia que en Sucre las personas migran del campo a la ciudad debido a múltiples factores, dentro de ellos el desplazamiento forzado por la violencia, las malas condiciones de vida rural por la falta de satisfacción de necesidades básicas, falta de la presencia estatal, falta de vías de acceso, falta de oportunidades para mejorar las condiciones de vida familiar, entre otros.

Además, el conflicto armado desplazó brutalmente a más de 140,000 personas (el 14 % de la población), con todas las consecuencias adversas asociadas al desarraigo: pérdida de bienes productivos, abandono de fuentes seguras de empleo, renuncia al entorno y vida comunitaria, lo anterior en el afán de ponerse a salvo de las amenazas y los crímenes, muy recurrentes por cierto, obligándolas a cambiar de costumbres, ritmos de vida y espacio geográficos, sumergiéndolas aún más en la pobreza en [3] y teniendo en cuenta que los nacimientos rurales son

menores que las defunciones en t años, (ver 3.7(b) y 3.8(b) respectivamente), con mucha más razón se contradice la información del DANE representada en la Figura 3.11(a) (estadística). Ahora, si a esto le anexamos los datos de migración en la cual se tiene que según el censo del 2005 [5], el 16,7% de la población de Sucre que cambió de residencia en los últimos cinco (5) años, lo hizo por dificultades para conseguir trabajo, el 54,8% por razones familiares, el 10,8% por otra razón y el 8,3% por amenaza para su vida, tenemos muchos más elementos para argumentar que los datos del DANE, son errados.

Por otra parte al analizar la pendiente de la grafica representada en la Figura 3.13, la cual representa la regresión lineal de la población rural vs la población general, se observa que esta pendiente es negativa, indicando así que la población rural disminuye a medida que aumenta la población general o a medida que transcurre el tiempo contradiciendo aún más la información del DANE con respecto al crecimiento de la población rural.

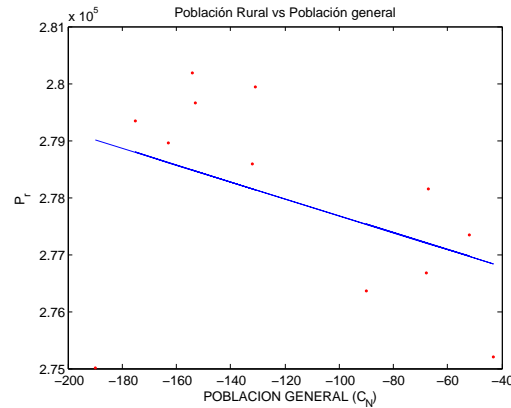


Figura 3.13: Regresión lineal de la población rural vs población general

Las líneas punteadas de color rojo que se muestran en las Figuras 3.11(a), 3.11(b), 3.12(a) y 3.12(b), representan los radios ϵ_i que cubren los datos estadísticos. Estos radios se ilustran en la ecuación 3.28

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{Pr} &= 8478 \\
 \epsilon_{Pu} &= 59348 \\
 \epsilon_{Ku} &= 370549326 \\
 \epsilon_c &= 2,14 \times 10^{-5}
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

3.7. Discusiones sobre la validación del modelo para el departamento de Sucre

Para la validación de este modelo se tiene en cuenta las siguientes observaciones:

- La metodología empleada para la calibración es la misma realizada para el departamento de Caldas como se indica en [14], donde se obtienen errores bajos garantizando

la tendencia de la trayectoria respecto a la información estadística, obteniéndose así una calibración óptima.

- En las Figuras 3.11(a), 3.11(b) y 3.12(b) se puede observar que las trayectorias no siguen la tendencia de la información estadística, puesto que, mientras que la grafica de la información estadística tiende a aumentar, la trayectoria tiende a disminuir.
- Al examinar la dinámica poblacional, como lo indica Forrester en Dinámica Urbana (Forrester, 1969) y en Dinámica Mundial (Forrester, 1971), se puede observar que la ecuación dinámica de una población se ve afectada por la tasa de natalidad, la tasa de defunción y la migración, tal como se aprecia en las ecuaciones 2.1 y 2.2

$$\frac{dP_r}{dt} = \rho_r \left(1 - \frac{P_r}{P_{rmax}} \right) ((n_r - d_r)P_r - m)$$

$$\frac{dP_u}{dt} = \rho_u \left(1 - \frac{P_u}{P_{umax}} \right) \left(\frac{P_u}{P_{umin}} - 1 \right) ((n_u - d_u - m_e)P_u + m)$$

- Ahora, teniendo en cuenta los errores relativos mostrados en 3.27, los máximos errores representados en la ecuación 3.28 y las explicaciones hechas anteriormente con respecto a las Figuras 3.11(a), 3.11(b), 3.12(a) y 3.12(b) y teniendo presente que este modelo está basado en estudios hechos sobre dinámica poblacional (Forrester, 1969 y 1971), se puede concluir que el modelo presentado en el capítulo 2, no es posible validarlo para el departamento de Sucre - Colombia, puesto que la evolución del sistema bajo las condiciones del año 2011 no sigue la tendencia de la información estadística que proporciona el DANE, debido a la incoherencia de datos estadísticos, sobre todo en lo referente a la población, donde se nota una gran diferencia entre la información estadística y lo calculado a través de las ecuaciones diferenciales. Por tal motivo se proponen dos alternativas:
 - i. Realizar predicciones a un modelo aproximado mediante la utilización de **Matcont**.
 - ii. A partir de un punto de equilibrio interior que garantice la existencia y unicidad de las soluciones, hacer el análisis bajo la variación de parámetros del sistema.

Capítulo 4

Estado estacionario del sistema

Según [17], un sistema dinámico autónomo a tiempo continuo es un sistema conformado por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas o no forzada de la forma, como indica la ecuación 4.1

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.1}$$

y por lo tanto invariantes en el tiempo, las cuales representan las leyes de la evolución del sistema. El hecho de ser autónomas significa que estas leyes no varían con el tiempo y al tener su estado inicial, la evolución del sistema dinámico supone un cambio de estado en un tiempo $t \in R$, lo que hace que sea un sistema continuo, como se indica en [14], permitiendo así predecir cualquier estado futuro bajo una condición inicial.

Por otra parte, se define el concepto de desarrollo sostenible el cual fue introducido en la agenda internacional por la Comisión Mundial sobre el Medio Ambiente y el desarrollo (WCED) en 1987 [26], como aquel desarrollo que satisface las necesidades del presente sin comprometer las necesidades de las generaciones futuras, dicho desarrollo es alcanzado cuando se logra una armonía entre las dimensiones económica, social y ambiental como lo indica la Figura 4.1, es decir, cuando se adoptan economías basadas en la protección de los recursos naturales y cambios culturales que permiten un balance dinámico hacia la sostenibilidad y la transformación.

Esto es alcanzado, cuando se toman decisiones políticas que apunten hacia ese bienestar; por lo tanto, todo gobernante de un ente territorial tiene como objetivo alcanzar un desarrollo y luchar para que ese desarrollo se sostenga, con el objeto de brindarle un bienestar a sus habitantes. Así, la gobernación de Sucre no es ajena a este desarrollo y menos aún si ocupamos el penúltimo lugar entre los departamentos más atrasados de Colombia. Por todo lo anterior, la gobernación de Sucre en su plan de desarrollo tiene como visión “en el marco de su autonomía constitucional y legal, administrar los asuntos seccionales y planificar el desarrollo económico y social, ejerciendo funciones administrativas de coordinación y complementariedad de la acción municipal, de intermediación entre la Nación y los municipios de su jurisdicción y de prestación de los servicios de su competencia, participando en las rentas nacionales, accediendo a fuentes de financiamiento públicas y privadas regionales, nacionales e

internacionales, bajo un crecimiento sostenible en sus finanzas, contribuyendo enfáticamente a mejorar las condiciones de vida de la población, de acuerdo con los fundamentos jurídicos, programáticos, sociales y económicos estructurales; los principios institucionales, el modelo y los enfoques de desarrollo, identificados y definidos en este Plan” [24], (Plan de desarrollo departamental de Sucre 2011 - 2015, Visión).

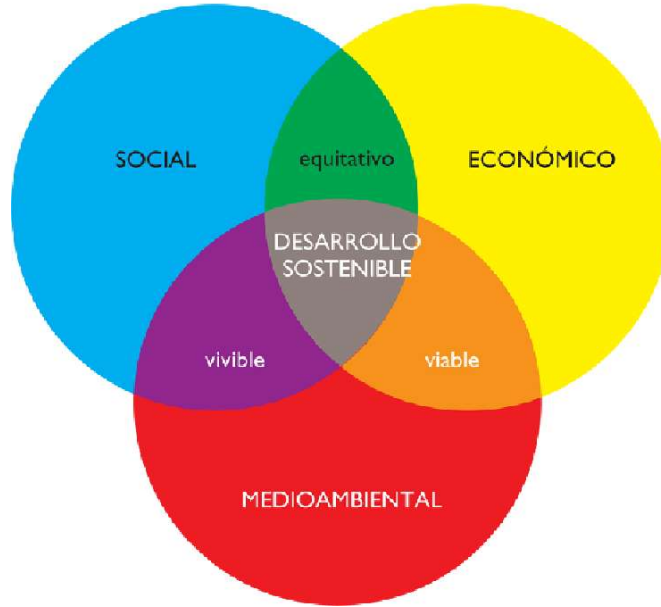


Figura 4.1: Desarrollo sostenible

Para definir el concepto de desarrollo sostenible en este trabajo, se tiene primero el estado estacionario del sistema bajo la condición inicial del año 2011.

Según [17], un sistema dinámico autónomo a tiempo continuo es un sistema conformado por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas o no forzada de la forma como se indica en la ecuación 4.2

$$\dot{x} = F(\mu, x) \quad (4.2)$$

y por lo tanto invariantes en el tiempo; las cuales representan las leyes de la evolución del sistema. Cuando el sistema conformado por las ecuaciones diferenciales representados en la ecuación 4.2, se iguala a cero, el sistema alcanza el estado estacionario, es decir,

$$\dot{x} = F(\mu, x) = 0 \quad (4.3)$$

Las soluciones de esta ecuación (4.3) se llaman puntos de equilibrios del sistema.

4.1. Punto de equilibrio del sistema

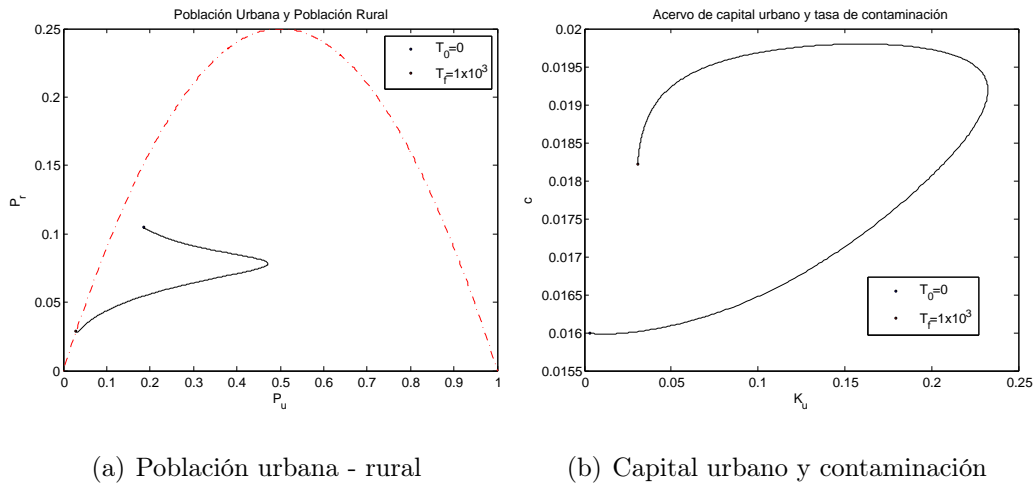


Figura 4.2: Punto de equilibrio - colapso

Para mirar el estado estacionario del sistema implementado en este trabajo bajo la condición inicial del año 2011, se hace la evolución temporal del sistema normalizado en el intervalo de tiempo de 1000 años, es decir, $[0, 1000]$, o entre los años $[2011, 3011]$ y teniendo presente que el sistema es un sistema autónomo, es decir, no depende del tiempo si no de la condición inicial x_0 . Entonces, bajo ésta condición inicial y los valores de los parámetros de la Tabla 3.4, se obtiene la Figura 4.2, donde se observa que el sistema alcanza un punto de equilibrio $x_f = x^*$ con coordenadas representadas en la ecuación 4.4

$$\begin{aligned}
 P_r^* &= 0,03049 \\
 P_u^* &= 0,02956 \\
 K_u^* &= 0,03078 \\
 c^* &= 0,01824
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

el cual muestra que el sistema colapsa debido a que algunos puntos de la trayectoria no están contenidos en el interior de la zona de sostenibilidad, si no en la frontera tal como lo indica la Figura 4.2(a), interceptando la parábola correspondiente a la capacidad máxima de población rural, por tal motivo el sistema no es sostenible. Esta situación nos abre el camino para definir las políticas que permitan obtener un desarrollo sostenible en la región.

4.2. Desarrollo sostenible en la región.

Para definir el desarrollo sostenible en la región es importante establecer algunas políticas y pautas en el modelo que permitan lograr este desarrollo, y se deben satisfacer en el estado estacionario.

4.2.1. Políticas de desarrollo y estrategias para definir zonas de sustentabilidad

Definición de las políticas de desarrollo sostenible. Según lo establecido en [14], para alcanzar un desarrollo y que este sea sostenible en el departamento de Sucre se debe implementar en el modelo lo siguiente:

- $c \leq c_{max}$: lo cual indica que la tasa de contaminación c no puede ser superior a la tasa máxima c_{max} .
- $P_0 \leq P_r \leq P_u$: indica que la población rural P_r debe estar por encima del mínimo de la población permitida P_0 ; de lo contrario el sistema colapsa.
- Los parámetros del sistema deben estar en unos rangos permitidos, de tal forma que se alcance el desarrollo sostenible.

Estrategías para definir zonas de sustentabilidad

La sustentabilidad es la acción del hombre en relación a su entorno, es decir, el desarrollo sustentable solo se ocupa de la preservación de los recursos naturales y garantizar que las futuras generaciones también puedan contar con ese tipo de recursos para la satisfacción de sus necesidades. En cambio, el desarrollo sostenible tiene en cuenta además las condiciones sociales, políticas y económicas del conjunto social, por lo cual incorpora la visión humana, de que el humano se desarrolle y satisfaga sus necesidades, y en ese desarrollo sus acciones sean en pro del cuidado del medio ambiente y el entorno en el cual vive [28]. Por lo tanto, las políticas que alcancen ese desarrollo sostenible deben ser definidas por expertos en economía, políticas ambientales y sociales, permitiendo así definir zonas de sostenibilidad, lo cual indica que las trayectorias del sistema en su estado transitorio queden dentro de la región Ω , ilustradas en la Figura 4.3 las cuales muestra la zona de sostenibilidad donde se cumplen las políticas definidas en la ecuación 4.5. A continuación, a manera de ejemplo, se han definido algunas políticas que se supone marcarán el desarrollo sostenible en la región.

$$\begin{aligned} P_r &\geq 0,003 \\ c &\leq 0,05 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Seguidamente definimos las estrategias que logren alcanzar dicho desarrollo. Éstas permiten establecer zonas de estabilidad para los valores de los parámetros calibrados, una vez cumplidas las políticas establecidas anteriormente. Dentro de estas estrategias tenemos las siguientes:

- Cálculo de puntos de equilibrio.
- Estabilidad de los puntos de equilibrio y curvas de continuación de equilibrios.
- Cálculo de atractores del sistema.
- Análisis de sensibilidad bajo la variación de un parámetro.

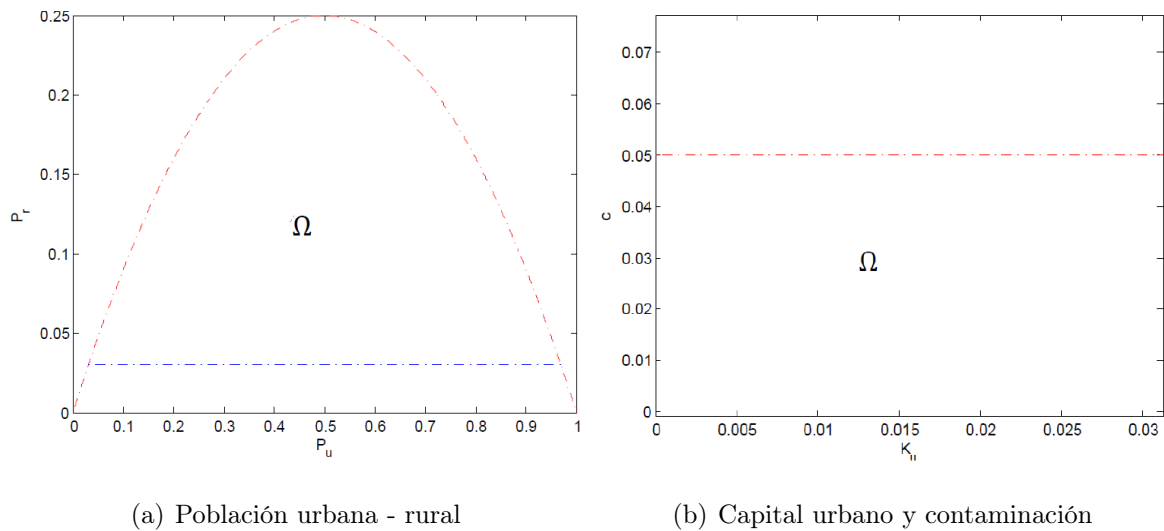


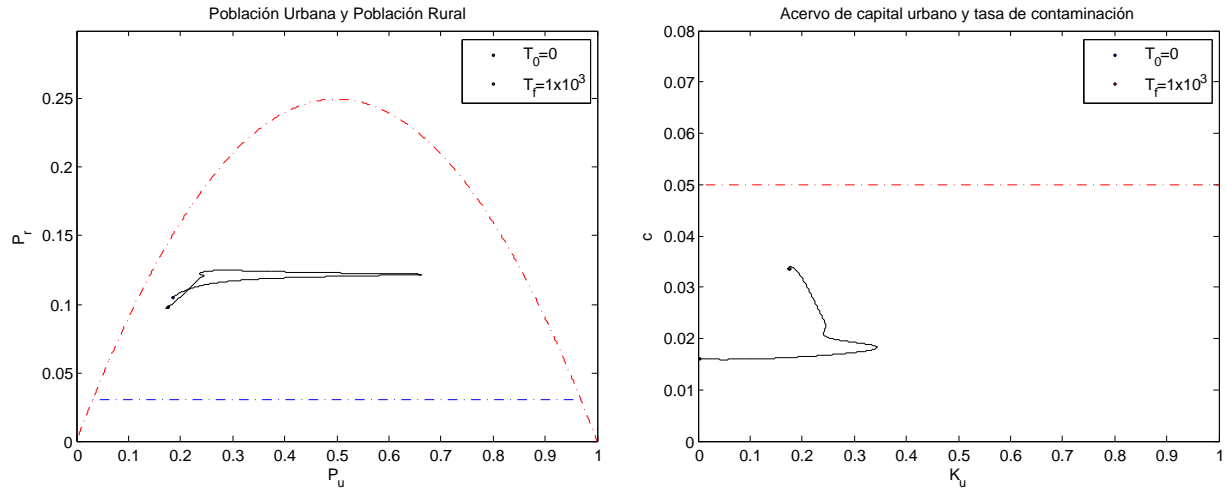
Figura 4.3: Zona de sostenibilidad

4.3. Punto de equilibrio en la zona de sostenibilidad

Al evolucionar el sistema con los parámetros iniciales, se nota que el sistema colapsa, como lo indica la Figura 4.2, ahora con esta misma condición inicial y variando el valor de algunos parámetros, como se puede ver en la ecuación 4.6 por ejemplo, para:

$$\begin{aligned}
 r &= 0,062 \\
 \eta_{pr} &= 0,4 \\
 R &= 0,0001 \\
 m_e &= 0,009
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

se tiene que el sistema cambia, obteniéndose un punto de equilibrio en el interior de la región Ω como se observa en la Figura 4.4

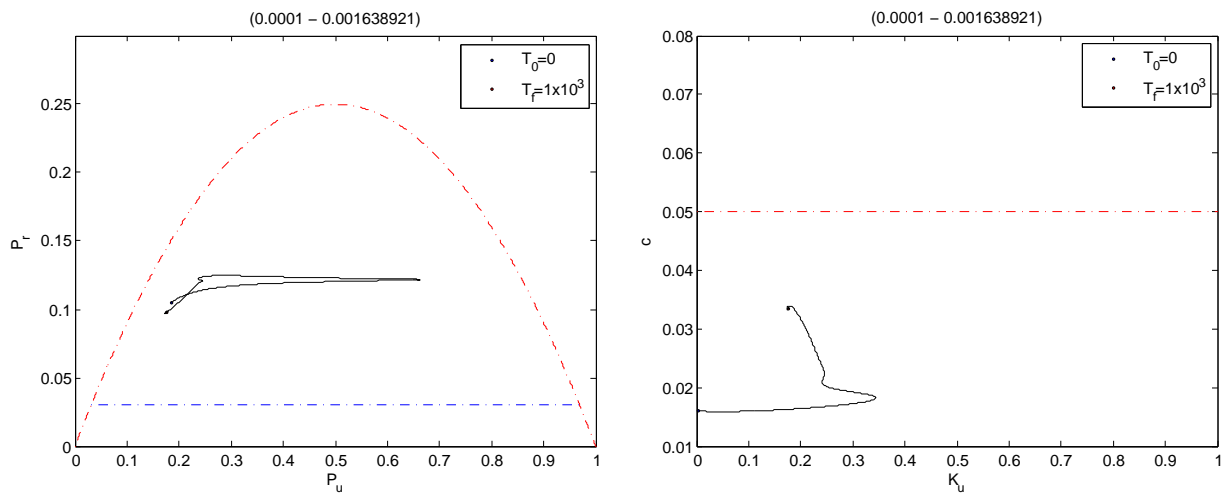


(a) Población urbana - rural

(b) Capital urbano y contaminación

Figura 4.4: Punto de equilibrio en el interior de la zona de sostenibilidad

Ahora, bajo la variación de algunos parámetros como: $R \in [0,0001 - 0,001638921]$, $l \in [0,15 - 0,599999999]$, $r \in [0,020 - 0,068]$, $he \in [0,7 - 2,75]$, $me \in [0,009 - 0,00966]$, entre otros, se tiene que bajo la misma condición inicial las evoluciones de las trayectorias están contenidas en la región Ω , como se puede apreciar en las Figuras 4.5 y 4.6 respectivamente, indicando así que con estas condiciones se alcanza el desarrollo sostenible en el departamento de Sucre.



(a) Población urbana - rural

(b) Capital urbano y contaminación

Figura 4.5: Punto de equilibrio en el interior de la zona de sostenibilidad variando el parámetro R

4.4. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO Y CURVAS DE CONTINUACIÓ

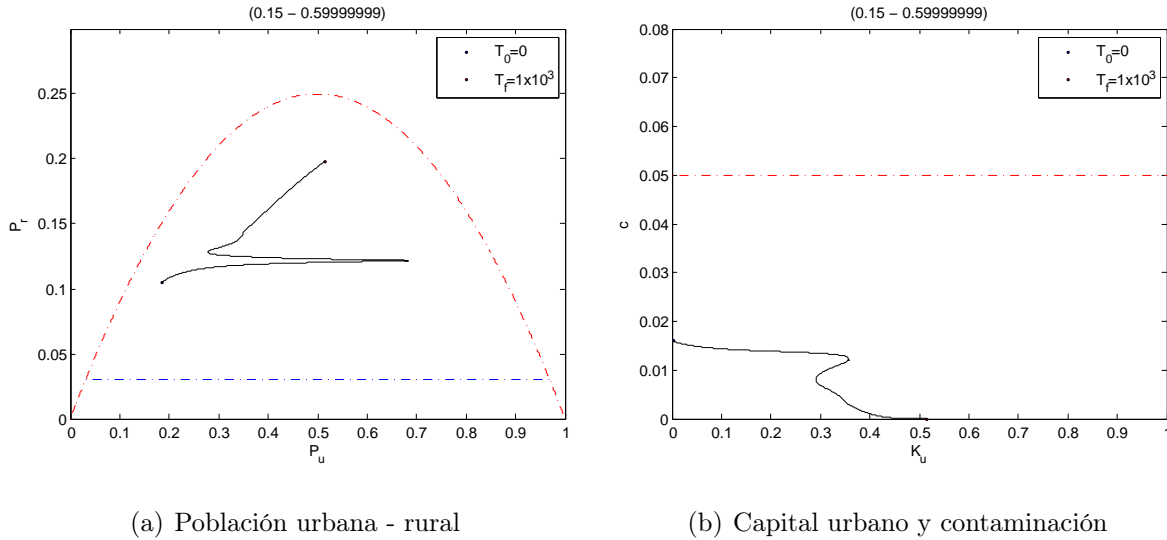


Figura 4.6: Punto de equilibrio en el interior de la zona de sostenibilidad variando el parámetro l

4.4. Análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio y curvas de continuación de equilibrios

Conocer la estabilidad de los puntos de equilibrio nos permite identificar bajo qué condiciones iniciales se alcanza el desarrollo sostenible del sistema, puesto que, en el caso de tener un punto de equilibrio estable dentro de la zona de sostenibilidad Ω , se garantiza que toda condición inicial lo suficientemente cercana al punto de equilibrio haga que la trayectoria converja a dicho punto, permitiendo así alcanzar la sostenibilidad del sistema. Así mismo, en el caso de tener un punto de equilibrio inestable, bajo condiciones iniciales próximas a éste hace que la trayectoria se aleje de él, de la cual la trayectoria puede mostrar que el sistema sea insostenible si esta converge a un atractor por fuera de la región de sostenibilidad Ω , o también puede indicar el desarrollo sostenible en el caso que converja a un atractor que esté contenido en la región de sostenibilidad. [14].

En lo que sigue, hacemos uso del análisis no lineal para conseguir esquemas sostenibles y hacer el análisis sobre la estabilidad del punto de equilibrio, para lo cual nos apoyamos en el siguiente teorema:

Teorema 3. *Considere el siguiente sistema dinámico autónomo*

$$\dot{x} = f(x), \quad (4.7)$$

Supongase que todos los valores propios de la matriz jacobiana $Df(\bar{x})$ tiene parte real negativa.

Entonces la solución de equilibrio $x = \bar{x}$ del sistema no lineal 4.7 es asintóticamente estable. [30]

Las coordenadas del punto de equilibrio representado en la figura anterior (Figura 4.4) se muestran en la ecuación 4.8

$$\begin{aligned} P_r &= 0,062342591 \\ P_u &= 0,1923406 \\ c &= 0,14440954 \\ K_u &= 0,1923406 \end{aligned} \tag{4.8}$$

y con valores propios representados en la ecuación 4.9

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0,004420367280348 \\ \lambda_2 &= -0,003501019436118 \\ \lambda_3 &= -0,000196164802318 + 0,000688044349751i \\ \lambda_4 &= -0,000196164802318 - 0,000688044349751i \end{aligned} \tag{4.9}$$

Como es de observar, todos los valores propios del punto de equilibrio tienen parte real negativa; según el teorema tres (3), esto indica que este punto de equilibrio es asintóticamente estable, lo cual significa que cualquier condición inicial lo suficientemente cercana al punto de equilibrio hace que la trayectoria converja a dicho punto garantizando así sostenibilidad en la región.

4.4.1. Cálculo de atractores del sistema

Determinemos ahora la cuenca de atracción del punto de equilibrio, en el caso que un punto de equilibrio sea estable y se encuentre en la zona de sostenibilidad, podemos calcular la cuenca de atracción de ese punto, para garantizar el conjunto de condiciones iniciales que convergen a dicho punto garantizando la sostenibilidad del sistema.

Considere el sistema no lineal autónomo

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.10}$$

donde $f \in C^1(U)$, U es un abierto de $x_0 \in R^n$. Sea $x \in U$, la solución de 4.10 que pase por x $\varphi(\cdot, x) : R \rightarrow U$ se denomina trayectoria u órbita que pasa por x . Denotada también por $x(t)$, es decir que $x(t)$ es la trayectoria de la solución x del sistema 4.10.

Definición 1. Se dice que K es un atractor si existe un entorno N de K , tal que $K \subset N \subset X$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), K) = 0, \forall x \in N$. El mayor de los N se denomina cuenca de atracción de K .

Un subconjunto cerrado $A \subset U$ se denomina conjunto atractor de 4.10 si existe un entorno E de A tal que $\forall x \in E, \varphi_t(x) \in E, \forall t \geq 0$ y $\forall t \geq 0, d(\varphi_t(x), A) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. [1]

4.4. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO Y CURVAS DE CONTINUACIÓN

Así se tiene que la cuenca de atracción de un punto de equilibrio, es la mayor vecindad o entorno que se puede construir alrededor de dicho punto.

La determinación de la cuenca de atracción es muy importante en el análisis de sensibilidad del punto de equilibrio, pues esta región define la zona de operación segura. Si el sistema se sale de ella, no podrá volver al punto de operación deseado, de esta manera se tienen garantías de que si el sistema comienza en esta región, evolucionará o tenderá hacia el punto de equilibrio deseado, tal como lo muestra la Figura 4.7

Para construir la cuenca de atracción del sistema, se tiene en cuenta que nuestro sistema está conformado por cuatro ecuaciones diferenciales no lineales, cada una identifica una variable de estado, entonces se dejan fijas dos variables, población rural (P_r) y contaminación ambiental (c), mientras varían las otras dos, población urbana (P_u) y capital urbano (K_u), obteniéndose así la Figura 4.7 que representa la cuenca de atracción del punto de equilibrio de nuestro sistema.

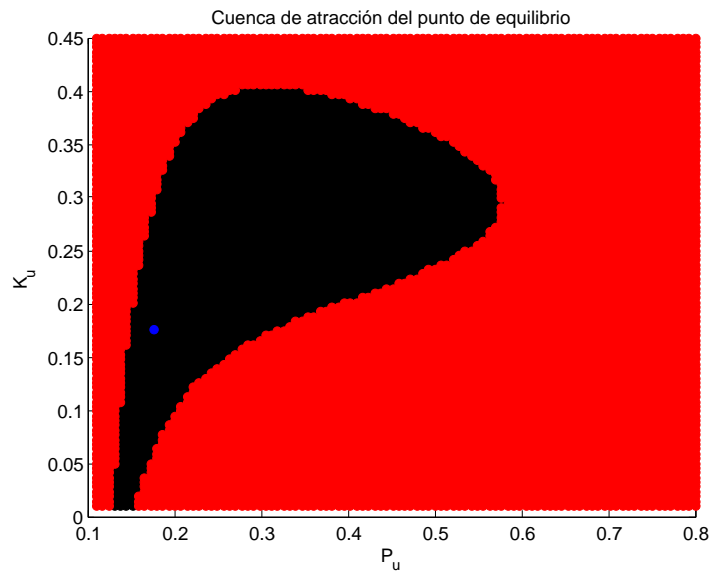


Figura 4.7: Cuenca de atracción del punto de equilibrio

La Figura 4.7, muestra que fijando dos componentes de las condiciones iniciales, la población rural $P_r = 0,098102163768595$, y $c = 0,033513660966137$ y al variar $(P_u, K_u) \in [0,1, 0,8] \times [0, 0,45] = \tau$, se observa la cuenca de atracción en negro formado por el conjunto de condiciones iniciales de τ que convergen al punto de equilibrio estable (Azul), mientras las condiciones iniciales de Rojo no convergen a este punto de equilibrio.

4.4.2. Curva de continuación de equilibrio mediante la variación de los parámetros R y m_e .

Mostraremos algunas bifurcaciones de codimensión uno, que servirán desde el punto de vista de sostenibilidad definido en este capítulo para caracterizar los puntos de equilibrio y ciclos límites que se encuentran contenidos en la zona de sostenibilidad definida en la sección 4.2.1 y en la Figura 4.3.

Bajo la variación de un parámetro, un punto de equilibrio del sistema puede cambiar su estabilidad, donde se pueden presentar bifurcaciones como puntos límites (LP) o bifurcación Fold o bifurcación silla-nodo, puntos de Hopf, y Branch point (BP) o Punto de ramificación entre otros. Estas bifurcaciones son de codimensión uno (1), por que se obtienen al variar un parámetro del sistema.

La bifurcación asociada con la aparición de un valor propio con parte real igual a cero, es decir, $\lambda_1 = 0$ se llama una bifurcación de Fold (o tangente). Este tipo de bifurcación (Fold), ocurre cuando hay dos puntos de equilibrio, uno estable y otro inestable, entonces a medida que varía el parámetro, los dos puntos de equilibrio se mueven el uno hacia el otro, de tal manera que colisionan y desaparecen formándose la bifurcación.

Así mismo la bifurcación correspondiente a la presencia de dos valores propios complejos conjugados, es decir, $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, se llama una bifurcación de Hopf (o Andronov-Hopf) [17].

Se procede a mostrar algunas bifurcaciones clásicas de codimensión uno calculadas con el Toolbox Matcont del software Matlab.

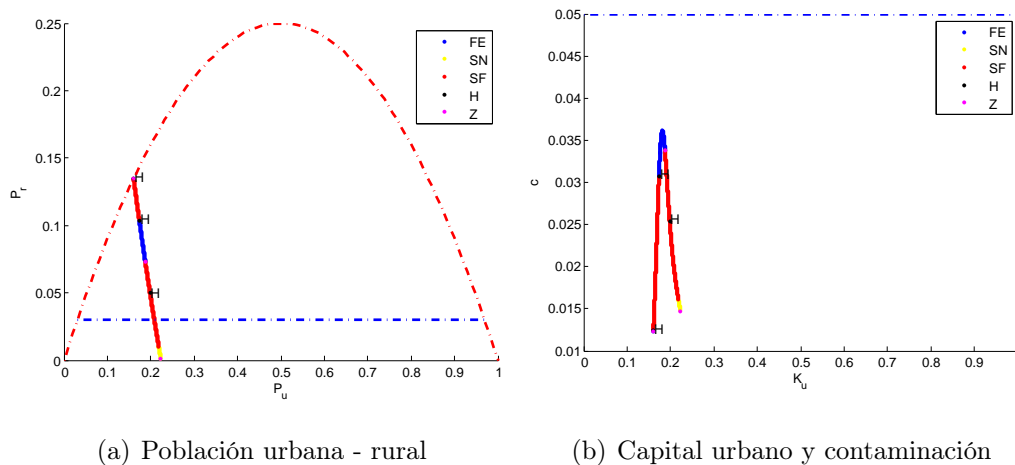


Figura 4.8: Curva de continuación de equilibrio mediante la variación del parámetro R

En la primera Figura (a) se observa que existen unos puntos de equilibrio estables los que están incluidos en el interior de la región Ω marcados con el color azul y otros inestables

4.4. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO Y CURVAS DE CONTINUACIÓN

marcados con el color rojo, para los cuales se establece la siguiente clasificación de los criterios de estabilidad. estos mismo criterios se tienen en cuenta en las Figuras

- **NE:** Nodo Estable, indica que todos los valores propios son reales negativos.
- **NI:** Nodo Inestable, todos los valores propios son reales positivos.
- **FE:** Foco Estable, todos los valores propios son complejos con parte real y compleja no nula y además la parte real de todos los valores propios son negativos.
- **FI:** Foco Inestable, todos los valores propios son complejos con parte real y compleja no nula y además la parte real de todos los valores propios son positivos.
- **SF:** Silla Foco, indica que la variedad inestable y estable están conformadas por valores propios complejos y / o reales.
- **SN:** Punto de Silla, todos los valores propios son reales, donde la variedad estable está conformada por todos los valores propios negativos y la variedad inestable por todos los valores propios positivos.
- **H:** Punto de Hopf, tiene un par de valores propios complejos puros conjugados.
- **HH:** Punto de Hopf-Hopf, tiene dos pares de valores propios complejos puros conjugados.
- **Z:** Punto no Hiperbólico, significa que al menos un valor propio tiene parte real igual a cero

Variando el parámetro R , el cual se refiere al parámetro correspondiente a la posibilidad de encontrar trabajo en el sector urbano, es decir, parámetro que llena las expectativas de la migración, Para lo cual se tienen las siguientes condiciones:

- Si $R > 0$ se tienen entonces que se cumple el objetivo de la migración, es decir, el inmigrante encontró trabajo y se adaptó en el sector urbano.
- Si $R \leq 0$, entonces el inmigrante no encontró trabajo ni tampoco se adaptó en el sector urbano y se regresó al sector rural.

En la Figura 4.8, se muestran los puntos encontrados en la continuación de la curva de equilibrio con respecto a la variación del parámetro R y en la Figura 4.9 se muestra la variación del parámetro R con respecto a la población rural (P_r), donde se tiene lo siguiente: en la parte positiva ($R > 0$) se tienen unos puntos de equilibrio estables parte de color azul, un punto no hiperbólico, parte de color fucsia, lo cual significa que al menos un valor propio tiene parte real igual a cero (0), y otros puntos de equilibrio inestables (puntos de color rojo). La parte de la curva que está en el lado negativo de R no tiene interpretación física, puesto que la probabilidad al menos es cero y nunca negativa.

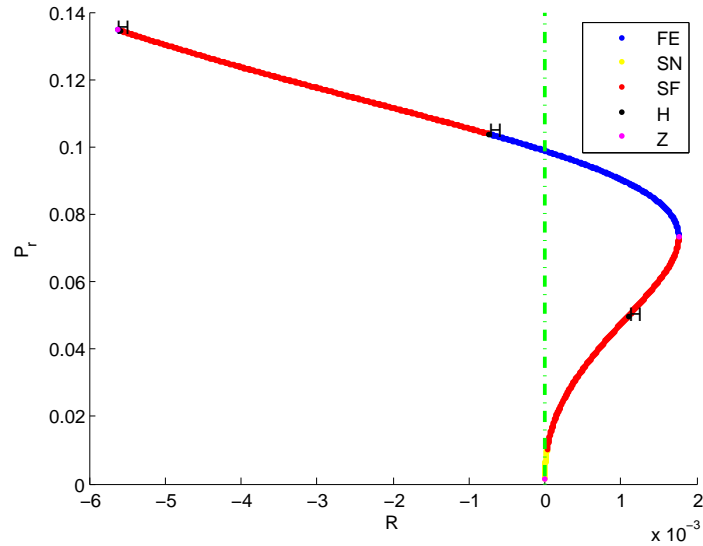
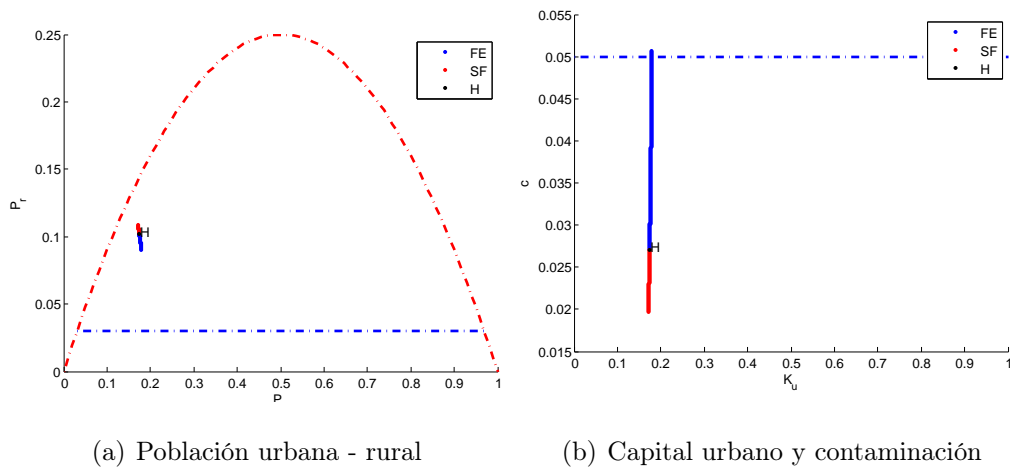


Figura 4.9: Curva de continuación de equilibrio variando el parámetro R

En la Figura 4.10 se muestra la curva de continuación de equilibrio mediante la variación del parámetro m_e , el cual se refiere a la migración externa, es decir, la migración hacia otras regiones, donde se tiene una bifurcación de Hopf. En la Figura 4.11 se tiene la variación del parámetro m_e con respecto a la población Rural.



(a) Población urbana - rural

(b) Capital urbano y contaminación

Figura 4.10: Curva de continuación de equilibrio mediante la variación del parámetro m_e

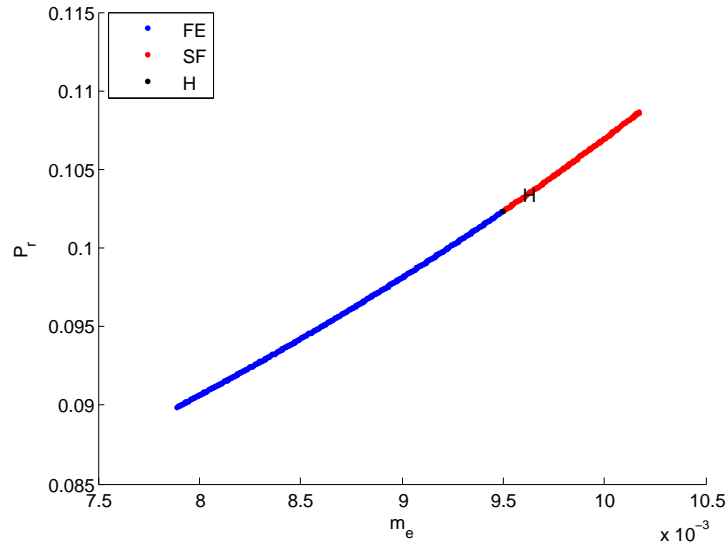


Figura 4.11: Curva de continuación de equilibrio variando el parametro m_e

Ahora anunciamos el Teorema de la bifurcación de Hopf.

Teorema 4. *Las condiciones que especifican sistemas genéricos que demuestran esta bifurcación son las siguientes:*

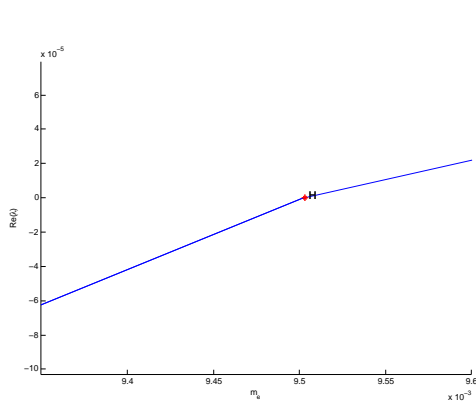
$$(H,1) \frac{d}{d\alpha} R_e(\lambda_{1,2}(\alpha))|_{\alpha=0} \neq 0. \quad (4.11)$$

$$(H,2) l_1 \neq 0$$

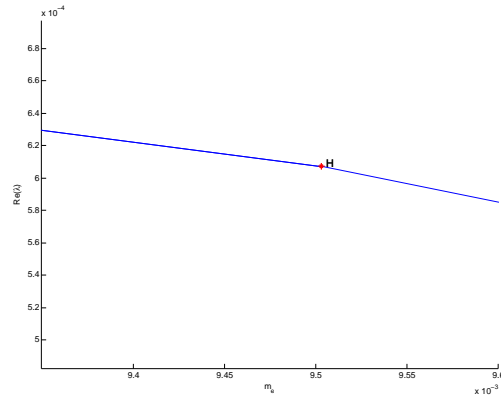
La primera condición (transversalidad) significa que un par de valores propios complejos conjugados $\lambda_{1,2}(\alpha)$ cruzan el eje imaginario con una velocidad distinta de cero. La segunda condición (de no degeneramiento) implica que una cierta combinación de coeficientes de Taylor incluyendo los coeficientes de tercer orden no se desvanecen.

La condición de no degeneramiento indica que el primer coeficiente de Lyapunov es distinto de cero. Si este primer coeficiente de Lyapunov es positivo, entonces, hay una bifurcación de Hopf subcrítica, lo que significa que un ciclo límite inestable existe antes que el parámetro alcance el valor de bifurcación, luego se reduce hasta que desaparece a través de la colisión con un punto de equilibrio estable en la bifurcación. Después de la bifurcación, el punto de equilibrio se torna inestable. La bifurcación de Hopf subcrítica indica que antes de suceder la bifurcación hay un punto de equilibrio inestable, al momento de la bifurcación el punto de equilibrio inestable se convierte en estable [22]. Si el primer coeficiente es negativo como en nuestro caso, vea los resultados de Matlab, entonces hay una bifurcación de Hopf supercrítica, donde se garantiza la existencia de un ciclo limite estable.

Prueba de transversalidad en la bifurcación de Hopf bajo la variación de m_e



(a) Parte real



(b) Parte imaginaria

En estos gráficos se puede observar que la derivada de la parte real del valor propio respecto al parámetro es positiva puesto que la función es creciente y justo en el valor del parámetro la parte real es cero. La otra grafica (imaginaria) nos muestra que para el valor de m_e en la bifurcación de Hopf en la parte imaginaria no es cero, lo que garantiza valores propios puros imaginarios de la forma $\pm iw_o$.

Los resultados de matlab se muestran a continuación.

elapsed time = 1072.1 secs

npoints curve = 3

first point found

tangent vector to first point found

label = H , x = (0.102354 0.174182 0.174182 0.027062 0.009503)

First Lyapunov coefficient = -1.076831e-001

Capítulo 5

Principales aportes del trabajo de investigación, trabajos futuros y resultados divulgativos

En este capítulo se presenta un resumen de los resultados más importantes obtenidos en este trabajo de investigación, los trabajos futuros y trabajos divulgativos.

5.1. Principales aportes

Dentro de los resultados más importantes obtenidos en este trabajo de investigación se tienen los siguientes:

- Se implementó el modelo planteado en [14], para el departamento de Sucre.
- No fue posible realizar la validación del modelo con los valores obtenidos de los parámetros, puesto que la evolución del sistema bajo las condiciones del año 2011 no sigue la tendencia de la información estadística que proporciona el DANE, debido a la incoherencia de los datos estadísticos sobre todo en lo referente a la población rural, donde se nota una gran diferencia entre la información estadística y lo calculado a través de las ecuaciones diferenciales del modelo. Por lo tanto se realizaron predicciones a un modelo aproximado mediante la utilización de Matcont.
- Las variaciones de varios parámetros permitieron obtener puntos de equilibrio en la zona de sostenibilidad.
- Se establecieron políticas y estrategias que permitieron establecer zonas de sostenibilidad definidas por el estado transitorio y estable del sistema.

- El modelo necesita de un Feedback para la calibración de los parámetros a medida que se obtengan nuevos datos de series estadísticas.
- Se definieron estrategias para alcanzar el desarrollo sostenible, como la obtención de rangos de sostenibilidad bajo la variación de un parámetro, curvas de continuación de equilibrios y el análisis de la estabilidad el cual ayuda a determinar zonas de sostenibilidad.
- Se determinó la cuenca de atracción del punto de equilibrio del sistema.

5.2. Trabajos futuros

Con los resultados obtenidos en este trabajo se pueden realizar los siguientes trabajos futuros:

- Analizar las predicciones del modelo suave a tramos como también la caracterización de bifurcaciones.
- Obtener varios intervalos de sostenibilidad bajo la variación de un parámetro.
- Realizar control sobre diversas bifurcaciones como también en el sistema, de tal forma que los puntos de equilibrio del sistema estén contenidos dentro de la zona de sostenibilidad.

5.3. Resultados divulgativos

Difusión de resultados

- IV Encuentro Nacional de Matemáticas y Estadística, Ibagué 7, 8 y 9 de mayo del 2014. Mejor poster en matemáticas titulado: Análisis de la Dinámica No Lineal Bajo Variación de Parámetros de un Modelo de Desarrollo Sostenible para el Departamento de Sucre.
- Artículo. Bifurcación de Hopf en un modelo de desarrollo sostenible, sometido a la Revista Ciencia en Desarrollo de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Tunja Boyacá. por: H.A. Granada D. a,* M.A. Ángel G. b,* D.K. Moreno O. c,* y J.A. Canchila M. d,

Apéndice A

Ecuaciones Auxiliares del modelo

Cotas de la Población Urbana

$$P_{umin} = \frac{P_m - \sqrt{P_m^2 - 4P_m P_r}}{2} \quad (\text{A.1})$$

$$P_{umax} = \frac{P_m + \sqrt{P_m^2 - 4P_m P_r}}{2} \quad (\text{A.2})$$

Tasa de Natalidad Rural

$$n_r = g_r \left(1 - \frac{Y_r}{Y_{rmax}}\right)^{\frac{1}{\eta_{yr}}} \left(\frac{P_r}{P_{rmax}}\right)^{\frac{1}{\eta_{pr}}} (1 - c)^{\eta_{cr}} (1 - e_r) c_{sr} \quad (\text{A.3})$$

Tasa de Natalidad Urbana

$$n_u = g_u \left(1 - \frac{Y_u}{Y_{umax}}\right)^{\frac{1}{\eta_{yu}}} \left(\frac{P_u}{P_{umax}}\right)^{\frac{1}{\eta_{pu}}} (1 - c)^{\eta_{cu}} (1 - e_u) c_{su} \quad (\text{A.4})$$

Tasa de Migración

$$m = R \frac{P_r P_u}{P_r + P_u} \left(\frac{g_u P_{rmax} - g_r P_u r \left(1 - \frac{Y_u}{Y_{umax}}\right)}{g_u P_{rmax} + g_r P_u r \left(1 - \frac{Y_u}{Y_{umax}}\right)} \right) \quad (\text{A.5})$$

Tasa de Defunción Rural

$$d_r = \left(1 - g_r \frac{Y_r}{Y_{rmax}}\right)^{\frac{1}{\delta_{yr}}} \left(\frac{P_r}{P_{rmax}}\right)^{\frac{1}{\delta_{pr}}} c^{\delta_{cr}} (1 - e_r) (1 - c_{sr}) \quad (\text{A.6})$$

Tasa de Defunción Urbana

$$d_u = \left(1 - g_u \frac{Y_u}{Y_{umax}}\right)^{\frac{1}{\delta_{yu}}} \left(\frac{P_u}{P_{umax}}\right)^{\frac{1}{\delta_{pu}}} c^{\delta_{cu}} (1 - e_u) (1 - c_{su}) \quad (\text{A.7})$$

Producto Interno Bruto PIB Urbano

$$Y_u = AK_u^\alpha(L_u)^{1-\alpha} \quad (\text{A.8})$$

Producción Máxima Urbana

$$Y_{umax} = \frac{\delta K_m}{a_u} \quad (\text{A.9})$$

Acumulación Máxima de Capital

$$K_m = \left(\frac{Aa_u}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} s_u P_m \quad (\text{A.10})$$

Producción Rural

$$Y_r = rY_u \left(1 - \frac{Y_u}{Y_{umax}} \right) \frac{P_r}{P_{rmax}} \quad (\text{A.11})$$

Producción Rural Máxima

$$Y_{rmax} = r \frac{Y_{umax}}{4} \quad (\text{A.12})$$

Producción Total de la Región

$$Y_T = Y_r + Y_u \quad (\text{A.13})$$

Producción Total Máxima

$$Y_{Tmax} = \frac{(1+r)^2 Y_{umax}}{4r} \quad (\text{A.14})$$

Contaminación Ambiental de la Región

$$h = w^{1-l} \quad (\text{A.15})$$

Tasa de Impacto Ambiental de la Región

$$w = \frac{c_r r \left(1 - \frac{Y_u}{Y_{umax}} \right) \frac{P_r}{P_{rmax}} + c_u}{r \left(1 - \frac{Y_u}{Y_{umax}} \right) \frac{P_r}{P_{rmax}} + 1} \quad (\text{A.16})$$

Tasa de Contaminación Ambiental

$$c_{py} = \left(\frac{(1-l)(Y_r + Y_u)}{Y_{Tmax}} \right) \left(\frac{P_r + P_u}{P_m} \right) \quad (\text{A.17})$$

Tasa de Consumo Rural

$$g_r = 1 - a_r - c_r \quad (\text{A.18})$$

Tasa de Consumo Urbano

$$g_u = 1 - a_u - c_u \quad (\text{A.19})$$

Bibliografía

- [1] ARACIL SANTONJA, JAVIER ; SALAS GÓMEZ, FRANCISCO AND GORDILLO ALVAREZ, FRANCISCO. *Análisis de sistemas no Lineals. Departamento de ingeniería de sistemas y automática. Universidad de Sevilla. 25 de septiembre del 2007.*
- [2] BARRO, ROBERT J AND I MARTIN, XAVIER SALA . *Crecimiento económico. Reverté. 2009.*
- [3] CUELLAR BAENA, ANDRÉS FELIPE; VIDAL ZUÑIGA, JOSÉ ROBEIDO AND OLAYA CUESTA, HERBERT . *Identificación de las entidades de cooperación internacional y sus metodologías para la financiación de proyectos. Ingenierías. 2015.*
- [4] CUTILLAS ORGILÉS, ERNESTO . *El bienestar social en el medio rural. Geografía Social y del Bienestar. 2011.*
- [5] DANE. *Censo General 2005: Perfiles del censo general del 2005 departamento de Sucre. <http://www.dane.gov.co/index.php/poblacion-y-demografia/censos> [En Línea]. Consultado 15 de agosto 2014.*
- [6] DANE. *Cuentas ambientales: Cuenta de actividades ambientales 2000 - 2012. Gobierno: <https://www.dane.gov.co/index.php/medio-ambiente/cuentas-ambientales>. 2014.*
- [7] DANE. *Cuentas Nacionales departamentales: PIB por ramas de actividad 2000 - 2012. Provisional. [http://www.dane.gov.co/index.php/cuentas-economicas/cuentas-departamentales/PIB por departamentos/2000- 2012 a precios corrientes por miles de millones de pesos](http://www.dane.gov.co/index.php/cuentas-economicas/cuentas-departamentales/PIB%20por%20departamentos/2000-2012%20a%20precios%20corrientes%20por%20miles%20de%20millones%20de%20pesos) [En Línea]. Consultado agosto 2013.*
- [8] DANE. *Estadísticas vitales: Defunciones: Defunciones por grupo de edad y sexo, según departamento, municipio y área de ocurrencia. Cuadro 3. <http://www.dane.gov.co/index.php/es/poblacion-y-demografia/nacimientos-y-defunciones/118-demograficas/estadisticas-vitales/2868-defunciones> [En Línea]. Consultado 23 de abril 2013*
- [9] DANE. *Población ocupada: https://www.dane.gov.co/files/investigaciones/boletines/ech/ech/Empalme_ech_eih_numa.pdf. 2013*
- [10] DANE. *Estadísticas vitales: Nacimientos: Nacimientos por área y sexo, según departamento de ocurrencia. <http://www.dane.gov.co/index.php/es/poblacion-y->*

- demografia/nacimientos-y-defunciones/118-demograficas/estadisticas-vitales/2894-nacimientos [En Linea]. Consultado 23 de abril 2013.*
- [11] DANE. *Series de Población de Sucre.* <http://www.dane.gov.co/index.php/poblacion-y-demografia/proyecciones-de-poblacion>. Consultado agosto 2013.
- [12] DANE. *Libro Censo general 2005.* <http://www.dane.gov.co/index.php/poblacion-y-demografia/censos> [En Linea]. Consultado 16 de noviembre 2014.
- [13] DHOOGHE, A; GOVAERTS, W; KUZNETSOV, YU A; MESTROM, W; RIET, AM AND SAUTOIS, B. *MATCONT and CL MATCONT: Continuation toolboxes in matlab.* Utrecht University, The Netherlands. 2006.
- [14] GRANADA DÍAZ, HÉCTOR ANDRÉS AND OTHERS . *Dinámica No Lineal de un Sistema Complejo Demográfico, Económico y Ambiental de Desarrollo Sostenible.* Universidad Nacional de Colombia-Sede Manizales. 2014.
- [15] IGLESIAS, CARLOS . *documentación de referencia sobre funcion de cobb douglas.*
- [16] KUZNETSOV, Y A. *tutorial iv: Two-parameter bifurcation analysis of equilibria and limit cycles with matcont.* Department of Mathematics Utrecht University Budapestlaan 63508 TA, Utrecht. Septiembre 20 de 2011.
- [17] KUZNETSOV, YURI A. *Elements of Applied Bifurcation Theory.* second edition. Springer. Verlag New York. 1998.
- [18] PERKO LAWRENCE. *Differential Equations and Dynamical Systems.* Springer
- [19] LÓPEZ JIMÉNEZ, P. AMPARO; ESPERT ALEMANY, VICENT; ALBEROLA MAR, CARLOS AND MARTÍNEZ SOLANO, F. JAVIER. *Metodología para la Calibración de modelos de calidad de agua. Artículo. Ingeniería del Agua Vol. 10 · N° 4 diciembre 2003. Artículo. Ingeniería del Agua Vol. 10. N° 4 diciembre 2003.*
- [20] KUZNETSOV, YU A. *Tutorial ii: One-parameter bifurcation analysis of equilibria with matcont.* September 20, 2011.
- [21] MATHWORKS, DOCUMENTATION CENTER. *Solve nonlinear curve - fitting (data - fitting) problems in last - squares sense - Matlab lsqcurvefit.* [online]. Octubre 2014.
- [22] PÉREZ LONDOÑO, SANDRA MILENA; OLIVAR TOST, GERARD AND ANGULO GARCÍA, FABIOLA . *Análisis de bifurcaciones: Estudio comparativo sobre un sistema generador aislado-barraje infinito.* Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia- N 59, pag 108-121. 2011.
- [23] SOLOW, ROBERT M. *A contribution to the theory of economic growth.* The quarterly journal of economics-JSTOR- 1956- oag 65-94.
- [24] GOBERNACIÓN DE SUCRE. *Plan de desarrollo departamental Sucre 2012 - 2015.*

- [25] WANG ,X; G, LIANG AND WANG, F.Z . *The competitive dynamics of populations subsubj to an Allee efect. En Ecological Modelling 44 (1999), p; 130 - 168. 1999.*
- [26] WCED. *Nuestro futuro común: conferencia mundial sobre el medio ambiente y el Desarrollo. 1987.*
- [27] WWW.VIRTUAL.UNAL.EDU.CO/CURSOS/IDEA. *Definición de desarrollo sostenible. www.virtual.unal.edu.co/cursos/IDEA/.../03-desarrollosostenible.htm. 2014*
- [28] DEFINICION.MX. *Definición de sustentabilidad y sostenibilidad. Definición.mx/sustentabilidad. 2014*
- [29] WWW.BDIGITAL.UNAL.EDU.CO/2115/1/GLORIAMERCEDESVALENCIATORRES.2009.PDF. *Análisis de estabilidad de tensión de un modelo básico de un sistema de potencia utilizando teoría de bifurcaciones. junio 2016*
- [30] Wiggins Stephen. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. springer. second Edition.*