

ESTUDIO DEL PAPEL DEL AHORRO EN LAS DISTRIBUCIONES DE DINERO Y RIQUEZA MEDIANTE HERRAMIENTAS DE LA FÍSICA TEÓRICA

ALEXANDER SANTOS NIÑO



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
BOGOTÁ, COLOMBIA

ESTUDIO DEL PAPEL DEL AHORRO EN LAS DISTRIBUCIONES DE DINERO Y RIQUEZA MEDIANTE HERRAMIENTAS DE LA FÍSICA TEÓRICA

ALEXANDER SANTOS NIÑO

TESIS DE MAESTRÍA SOMETIDO COMO
REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS - FÍSICA

DIRECTOR
CARLOS JOSE QUIMBAY

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
BOGOTÁ, COLOMBIA

NOTA DE ACEPTACIÓN

Los abajo firmantes certifican que han leído y aprueban el trabajo de grado titulado **ESTUDIO DEL PAPEL DEL AHORRO EN LAS DISTRIBUCIONES DE DINERO Y RIQUEZA MEDIANTE HERRAMIENTAS DE LA FÍSICA TEÓRICA**, presentado por **Alexander Santos Niño** como requisito parcial para optar al grado de **Magíster en Ciencias - Física**.

Fecha: _____

Director:

Carlos Jose Quimbay

Jurados:

A mi madre, que sea bendecida por todo lo que luchó por nosotros...

TABLA DE CONTENIDO

Índice de figuras	VII
Resumen	VIII
1. Mecánica estadística de sistemas complejos	6
1.1. Sistema aislado	7
1.2. Sistema abierto	11
2. Modelos cinéticos de distribución de dinero	16
2.1. La desigualdad en el marco de la teoría del superávit de la estratificación social	18
2.2. Modelo Dragulescu-Yakovenko	20
2.2.1. Intercambio de una unidad	21
2.2.2. Intercambio de una fracción aleatoria del promedio \bar{m}	22
2.2.3. Intercambio de una fracción aleatoria del promedio de la cantidad m de los dos agentes	23
2.2.4. Análisis de la desigualdad en los modelos de Dragulesku-Yakovenko	24
2.3. Modelo Kusmartsev	25
2.3.1. Análisis de la entropía en el modelo de Kusmartsev	27
2.3.2. Análisis de la desigualdad en los modelos de Kusmartsev	28
2.4. Modelo Chakraborti-Chakrabarti	28
2.4.1. Análisis de la entropía en el modelo de Chakrabarti-Chakraborti	30
2.4.2. Análisis de la desigualdad en los modelos de Chakrabarti-Chakraborti	30
2.5. Modelo cinético de distribución de dinero considerando flujo de agentes en el sistema y con ahorro diferenciado.	32
2.6. Un nuevo modelo de distribución	34
3. Modelo cinético de distribución de riqueza	37
3.1. Simulación y modelos basados en agentes.	37
3.2. Modelo de distribución de riqueza	38
3.3. Resultados y análisis	40
4. Modelo operatorial de distribución de bienes activos	43
4.1. Descripción del modelo	45
4.2. Solución de la ecuación de Heisenberg	47
4.3. Cálculo del valor esperado de los bienes de un sistema compuesto por dos agentes	52

5. Aproximación operatorial de la distribución de riqueza para muchos agentes	56
5.1. Las preferencias en un sistema económico	56
5.2. Algoritmo para el modelo de muchos agentes	57
5.3. Detalles de la simulación para dos agentes	59
5.4. Detalles de la simulación para un sistema de muchos agentes	61
5.5. Resultados y análisis	63
6. Análisis de resultados y conclusiones	67
7. Apéndice 1. Cálculo de la distribución de probabilidad de partes de U	70
8. Apéndice 2. Derivación de la relación entre el número de estados y la entropía	72
9. Apéndice 3: Ensamble gran-canónico	73
Bibliografía	76

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Disposición de los agentes en un sistema complejo	8
2.1. Evolución en el tiempo de la entropía, Curva superior: Intercambio de una cantidad constante $\Delta m = 0.1$. Curva media: Intercambio de una cantidad constante $\Delta m = 0.2$. Curva inferior: Intercambio de una cantidad constante $\Delta m = 0.5$	22
2.2. Histograma y puntos: Distribución estacionaria de dinero para un intercambio fijo de $\Delta m = 0.5$ Curva continua: Ajuste a una distribución exponencial.	23
2.3. Puntos: Distribución estacionaria de dinero para un intercambio fijo de $\Delta m = 0.1$. Curva continua: Ajuste a una distribución exponencial.	24
2.4. Evolución en el tiempo de la entropía, Curva negra: Intercambio de una fracción aleatoria del promedio del dinero del sistema $\Delta m = \nu \frac{M}{N}$. Curva roja: Intercambio de una fracción aleatoria del dinero promedio de los agentes implicados en la transacción $\Delta m = \nu \frac{m_i + m_j}{2}$	25
2.5. Curva de Lorenz para una distribución de Boltzmann-Gibbs.	26
2.6. Crecimiento de la entropía para los modelos cinéticos de Kusmartsev.	27
2.7. Curva de Lorenz para los modelos cinéticos de Kusmartsev.	28
2.8. Coeficiente de Gini para diferentes parámetros de intercambio para los modelos cinéticos de Kusmartsev.	29
2.9. Distribuciones de dinero para los modelos cinéticos de Chakrabarti-Chakraborti	30
2.10. Crecimiento de la entropía para el modelo cinético de Chakrabarti-Chakraborti [1].	31
2.11. Curva de Lorenz en el modelo cinético de Chakrabarti-Chakraborti.[1]	32
2.12. Relación de la entre el índice de Gini y el ahorro en los modelos cinéticos de Chakrabarti-Chakraborti [1]	32
2.13. Distribución de dinero para un sistema abierto.	33
2.14. Distribución de dinero de los cinco grupos con diferente parámetro de propensión al ahorro.	35
3.1. Distribuciones de riqueza, bienes y dinero para el modelo cinético de intercambio de bienes.	41
3.2. Relación entre el coeficiente de Pareto y el superávit para el modelo cinético de intercambio de bienes	42
4.1. Valor esperado del número de acciones para un sistema de dos agentes.1	55
5.1. Valor esperado del número de acciones para un sistema de diez agentes	64
5.2. Relación de amplitudes de oscilación para un sistema de 99 agentes	65
5.3. Tasa de crecimiento de la amplitud para sistemas de muchos agentes.	66
5.4. Amplitud máxima de oscilación para sistemas de muchos agentes	66

RESUMEN

El principal objetivo de esta tesis de maestría es modelar y caracterizar un sistema económico cerrado constituido por N agentes que interactúan entre pares vía el intercambio de dinero y bienes activos a través del uso de conceptos y herramientas de la física teórica. Esto se realiza metodológicamente en dos partes. En la primera parte, usando herramientas de la mecánica estadística, se realiza una modelación cinética del sistema económico al asumir que los agentes del sistema se comportan análogamente a como lo hacen las partículas de un gas ideal, lo cual permite establecer, para los casos de propensión al ahorro constante y discriminada, la manera en que las distribuciones de dinero y de riqueza dependen de la propensión, determinando el grado de desigualdad de las respectivas distribuciones mediante el cálculo del índice de Gini. En la segunda parte, usando herramientas de la mecánica cuántica y describiendo al sistema a través de un operador hamiltoniano que se escribe en términos de operadores creación y destrucción, se modela al sistema de forma análoga a un gas de bosones interactuantes, lo cual permite solucionar de forma analítica a la ecuación de Heisenberg del sistema para el caso de dos agentes y de forma numérica para el caso de un número grande de agentes. Para este último caso, se encuentra que las amplitudes que aparecen en las soluciones oscilatorias de la ecuación de Heisenberg y que dan cuenta de las variaciones periódicas del número de bienes activos que posee cada uno de los agentes considerados, satisfacen cierta relación específica que puede ser considerada como una propiedad emergente del sistema.

INTRODUCCIÓN

Un mercado económico puede ser considerado como un sistema complejo, debido a que está constituido por muchos agentes económicos que tienen diferentes características o que cumplen diferentes roles, que adaptan sus comportamientos para mejorar sus resultados a medida que el sistema pasa por diferentes estados y que, producto de las acciones individuales de los agentes y de sus interacciones emergen ciertas propiedades que dan información estructural sobre el sistema como un todo [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Cuando se realiza la modelación de un sistema complejo, lo que se hace es diseñar una simplificación matemática que solo tiene en cuenta las características más relevantes del sistema y que permite explicar algún comportamiento específico del sistema como un todo. En este contexto, ciertas propiedades de algunos sistemas económicos en y fuera de equilibrio pueden ser descritas mediante modelos en los que un intercambio de cierta cantidad económica (energía) entre dos agentes se toma como equivalente a una colisión entre dos partículas de un gas, en la que la energía cinética antes y después de la colisión se conserva (la cantidad económica antes y después de la transacción se conserva). Como propiedad emergente en estos modelos se observa que la cantidad económica considerada se distribuye como una ley de tipo exponencial o como una ley de potencia [9, 10, 1, 11]. Estos modelos, en los que el sistema económico se simplifica de forma análoga a un gas ideal, son conocidos como modelos cinéticos de distribución. La validez e importancia de estos modelos radica en el hecho de que a partir de considerar algunas pocas propiedades microscópicas del sistema, es decir realizando una modelación idealizada es posible describir ciertas propiedades macroscópicas emergentes del sistema como un todo, de forma consistente con lo observado empíricamente en el sistema [12, 13, 14].

Algunas propiedades observadas en las distribuciones empíricas de riqueza y de ingreso pueden ser descritas consistentemente mediante los modelos cinéticos de distribución. Estas propiedades, que han sido establecidas a partir del análisis de datos empíricos de diferentes países en diferentes momentos históricos, son robustas, estables e independientes de los casos específicos estudiados, a pesar de que puedan depender de la época, del tipo de sociedad y del tipo de estructura económica considerada [15, 16, 17, 18, 19]. Por ejemplo, es bien conocido que las distribuciones empíricas de riqueza y de ingreso, asociadas con la población económicamente activa de los diferentes países del mundo, permiten identificar dos patrones de distribución universales [20]. Para la población con valores bajos y medios de riqueza o de ingreso, los patrones de distribución de probabilidad son siempre de tipo exponencial (Boltzmann-Gibbs, Gamma o Log-normal) [21, 22], mientras que para la población con valores altos de riqueza o de ingreso (población de Pareto), los patrones de distribución de probabilidad son siempre de tipo ley de potencia (ley de Pareto) [22, 23].

La mecánica estadística es una rama de la física teórica que estudia el comportamiento macroscópico

de sistemas termodinámicos, enfocándose especialmente en el surgimiento de las variables termodinámicas y en cómo ellas se relacionan entre sí, partiendo del comportamiento mecánico microscópico de las partículas que constituyen al sistema y realizando un acercamiento estadístico al problema mediante el uso de ensambles estadísticos [24, 25, 26]. Desde el punto de vista de la econofísica, los patrones observados en las distribuciones empíricas de riqueza y de ingreso son descritos a través del uso de conceptos y herramientas de la mecánica estadística. Para realizar lo anterior en econofísica, desde una perspectiva analítica, lo que se hace es considerar al sistema económico como un sistema cerrado constituido por un número fijo de N agentes que compiten por partes de una cantidad U que es constante en el sistema. Teniendo en cuenta que N y U son dos cantidades que se conservan y que el número de estados accesibles se maximiza cuando el sistema alcanza el equilibrio, a través del uso del método de los multiplicadores de Lagrange se encuentra que la cantidad conservada U se distribuye entre los agentes conforme al ensamble estadístico canónico [14]. También se podría considerar al sistema económico como un sistema abierto, donde las cantidades que se conservarían no serían N y U sino el promedio de estas cantidades, de tal forma que la distribución de la cantidad económica entre los agentes estaría descrita mediante un ensamble estadístico grancanónico.

Los modelos cinéticos de distribución se han implementado numéricamente a través de simulaciones basadas en agentes, es decir simulaciones de sistemas constituidos por individuos que interactúan entre sí mediante reglas de interacción entre pares, encontrándose que después de cierto tiempo el sistema alcanza el estado de equilibrio, lo cual puede ser visto como una auto-organización del sistema [27, 28, 9, 10, 1, 29, 30]. Los resultados de las simulaciones muestran que lo que determina el patrón de distribución de probabilidad es la regla de intercambio entre pares de agentes que haya sido implementada en la simulación [31]. Un aspecto relevante asociado con las distribuciones de riqueza y de ingreso, y en general con distribución para cualquier tipo de cantidad, es conocer cuál es el grado de desigualdad asociada a estas distribuciones. Lo anterior se puede realizar mediante la evaluación de diferentes índices de desigualdad, que miden qué tan igualitaria o desigual es la distribución [12]. Un ejemplo de este tipo de índices es el índice de Gini (G) que puede tomar valores en el intervalo $[0, 1]$, de tal forma que la igualdad máxima se tiene para $G = 0$ (todos los agentes tienen la misma riqueza o ingreso), mientras que la desigualdad máxima se tiene para $G = 1$ (un sólo agente tiene toda la riqueza o ingreso). Un detalle muy importante que se tiene en cuenta en las simulaciones realizadas en los modelos cinéticos de distribución es que la forma que adopta la distribución de probabilidad se estabiliza cuando el sistema alcanza el estado de equilibrio. Cuando sucede lo anterior, el número de estados accesibles del sistema se maximiza y como consecuencia la entropía también se maximiza. En este tipo de sistemas, conocer la entropía del sistema es de interés desde el punto de vista de la teoría de la información, debido a que en este contexto la entropía es entendida como la cantidad de información promedio que hace falta conocer sobre el sistema para saber en qué estado se encuentra [32].

Al implementar la simulación de un sistema económico cerrado constituido por N agentes que compiten por porciones del dinero total del sistema M y en el que se ha definido cierta regla de intercambio de dinero entre pares de agentes, se obtiene que cuando el sistema alcanza el estado de equilibrio, el dinero entre los agentes se distribuye como una distribución exponencial decreciente (o de Maxwell-Boltzmann) [10, 1]. En este sistema, la temperatura económica corresponde al dinero promedio por agente M/N y el índice de Gini es $G = 0.5$, valor correspondiente al obtenido para la distribución exponencial decreciente.

Si en el mismo sistema económico se tiene en cuenta el hecho de que los agentes no siempre están dispuestos a intercambiar todo el dinero que ellos poseen, sino que solamente intercambian una fracción de lo que tienen, entonces la regla de intercambio entre pares de agentes ahora incluye a un parámetro de propensión al ahorro de dinero (λ), que se toma igual para todos los agentes y al cual se le asigna un valor constante en el intervalo $[0, 1)$ [1]. Después de implementar la simulación, se encuentra que la distribución de probabilidad de dinero es una distribución gamma [1, 29], de tal forma que cuando se toma el caso $\lambda = 0$ (es decir, los agentes no tienen propensión a ahorrar dinero en los intercambios entre pares) se obtiene como caso particular la distribución exponencial decreciente [10, 1]. Sin embargo, hasta donde se conoce, el estudio de cuál es el papel que tiene la propensión al ahorro λ en la distribución de dinero no se ha realizado para el caso en el que no todos los agentes tienen el mismo valor λ (es decir, para el caso de propensión al ahorro discriminada) y tampoco se ha estudiado la dependencia del índice de Gini de la distribución de dinero con respecto al valor de λ .

Así como ha sucedido con las distribuciones de dinero, el estudio de las distribuciones de riqueza en el contexto de los modelos cinéticos de distribución ha sido también motivo de interés en econofísica [33, 34]. El modelo más simple de distribución de riqueza estudiado en econofísica considera un sistema económico cerrado constituido por N agentes que poseen una cantidad total de dinero M y un número total B de bienes activos (por ejemplo, acciones) de un mismo tipo, de tal forma que los agentes entre pares intercambian dinero por bienes [33, 34]. Dado que un bien activo tiene un precio dado, en este modelo la riqueza de un agente corresponde al dinero más el valor de los bienes activos que el agente tenga [33, 34]. En este tipo de modelos, la riqueza se puede conservar o no. Por ejemplo, si el precio de los bienes no cambia en las transacciones, la riqueza al igual que el dinero se conserva local y globalmente. Por el contrario, si el precio del bien activo cambia en cada transacción, la riqueza local y globalmente no se conserva. Sin embargo, en los modelos cinéticos de distribución de riqueza no se ha incorporado el hecho de que los precios de los bienes activos cambien de forma estocástica durante las transacciones, ni tampoco se ha tenido en cuenta que los agentes puedan ser propensos a ahorrar dinero durante las transacciones.

Por otra parte, también para el sistema económico cerrado constituido por N agentes que compran y venden bienes activos (acciones) a través del intercambio de dinero, algunas propiedades de este sistema han sido estudiadas usando conceptos y herramientas de la mecánica cuántica [35, 36, 37]. En particular, en un primer trabajo desarrollado por Bagarello en esta dirección [35], se propone que un mercado de acciones (el cual es un sistema equivalente al sistema económico previamente mencionado) puede ser modelado como un gas de bosones interactuantes. En el modelo propuesto en la referencia [35], a partir de considerar la existencia de cantidades conservadas, el sistema puede ser descrito a través de un operador hamiltoniano, el cual tiene una forma análoga al que describe a un gas de bosones interactuantes y que es escrito tanto en términos de operadores de creación y de destrucción de acciones (bienes activos), como también en términos de otro tipo de operadores creación y destrucción que cumplen el papel de subir y bajar el precio de las acciones en un valor fijo [35, 36, 37]. La evolución en el tiempo de este sistema se puede conocer a partir de solucionar la ecuación de Heisenberg, cuya solución analítica conduce a funciones periódicas para el caso en el que el sistema esté constituido por dos agentes [35, 36]. A pesar de que en este modelo la ecuación de Heisenberg se puede solucionar analíticamente para un sistema con dos agentes, los

resultados obtenidos no describen ningún comportamiento económico conocido. Una posible razón para que suceda lo anterior es que el sistema constituido por sólo dos agentes está lejos de ser un sistema complejo, lo cual trae como consecuencia que no se tengan comportamientos emergentes. Por lo anterior, una posible alternativa que se tendría en este modelo, para que sea posible abordar sistemas complejos y por lo tanto para que pueda describir propiedades emergentes, sería que la ecuación de Heisenberg se pudiera solucionar numéricamente para el caso en el que el sistema estuviera constituido por número grande de agentes.

El principal objetivo de esta tesis de maestría es modelar y caracterizar un sistema económico cerrado, constituido por N agentes que interactúan entre pares vía la compra y venta de un tipo particular de bienes activos (acciones) mediante el intercambio de dinero, a través del uso de conceptos y herramientas de la física teórica, lo cual por razones metodológicas se realiza en dos partes. En la primera parte, usando conceptos y herramientas de la mecánica estadística, se plantea un modelo cinemático del sistema económico al asumir que los agentes del sistema se comportan de forma análoga a como lo hacen las partículas de un gas ideal. En la segunda parte, a través del uso de conceptos y herramientas de la mecánica cuántica y describiendo al sistema a través de un operador hamiltoniano que se escribe en términos de operadores creación y destrucción, se modela al sistema de forma análoga a un gas de bosones interactuantes. Concretamente, en la primera parte de esta tesis se presenta un formalismo analítico que permite modelar sistemas cerrados o abiertos constituidos por muchos agentes (en los que existen cantidades que se conservan) y que establece un marco conceptual que fundamenta los resultados numéricos que se presentan posteriormente en esta parte de la tesis. A continuación, definiendo la riqueza de un agente como la suma del dinero y del valor de los bienes activos que posee el respectivo agente, se estudia la manera en que las distribuciones de dinero y de riqueza cambian de acuerdo al valor constante que tome el parámetro de propensión al ahorro. Tanto para el caso de considerar que todos los agentes del sistema poseen la misma propensión al ahorro, como para el caso de considerar una situación un poco más realista en el sentido de discriminar la propensión al ahorro de los agentes en cinco grupos con valores diferentes, se cuantifica el grado de desigualdad de las distribuciones de dinero y de riqueza a través de la estimación del índice de Gini. Cabe mencionar que en esta tesis, el índice de Gini se considerado como una propiedad macroscópica emergente que depende de la dinámica microscópica del sistema. Por otra parte, en la segunda parte de esta tesis, inicialmente se asume que el sistema está constituido por dos agentes y se resuelve analíticamente la ecuación de Heisenberg, obteniendo que la evolución en el tiempo del número de acciones que posee cada uno de los dos agentes varía de manera periódica, de tal forma que para todo instante de tiempo el número de acciones permanece constante. Posteriormente, se asume que el sistema está constituido por un número grande de agentes, y mediante la implementación de un algoritmo que permite solucionar numéricamente la ecuación de Heisenberg es posible conocer la variación en el tiempo del número de acciones que posee cada agente. Cabe mencionar que, debido a que las ecuaciones que describen el sistema son acopladas, la solución implica calcular los valores y vectores propios que deben ser evaluados numéricamente, lo cual se realiza mediante la implementación de un programa que permite calcularlos. Con lo anterior se encuentra que las amplitudes de oscilación que aparecen en las soluciones y que dan cuenta de la variación periódica del número de acciones que posee cada uno de los agentes considerados satisfacen una relación específica que puede ser considerada como una propiedad emergente del sistema.

La estructura de presentación de esta tesis es la siguiente. En el capítulo 1 se presenta un formalismo analítico novedoso que permite realizar un modelo cinético de sistemas complejos constituidos por muchos agentes (en los que existen cantidades conservadas) y que permite dar una fundamentación conceptual a los resultados numéricos obtenidos en el siguiente capítulo. En el capítulo 2 se estudia la condición de equilibrio en los modelos cinéticos de distribución de dinero a partir de la maximización de la entropía, estimando el índice de Gini de las distribuciones de dinero obtenidas para los casos de considerar propensión al ahorro constante y discriminada. En el capítulo 3 se construye un modelo cinético de distribución de riqueza considerando que los agentes presentan propensión al ahorro y que el precio del bien activo cambia de forma estocástica en las transacciones, obteniéndose que la distribución de riqueza sigue una ley de potencia, y se estima el grado de desigualdad de esta distribución mediante el índice de Pareto. En el capítulo 4 se modela el sistema económico de intercambio de bienes activos por dinero de forma similar a un gas de bosones interactuantes, y se soluciona analíticamente la ecuación de Heisenberg resultante para el caso en que el sistema esté constituido por dos agentes. En el capítulo 5 se presenta un algoritmo que permite solucionar numéricamente las ecuaciones de Heisenberg para el caso en que el sistema esté constituido por un número grande de agentes, y los resultados obtenidos se relacionan con las preferencias que tienen los agentes a tener una mayor o menor cantidad de bienes activos. Finalmente, en el capítulo 6 se hace una discusión sobre los modelos estudiados en esta tesis y se realiza un análisis de los resultados obtenidos desde una perspectiva econofísica y económica, además de establecer el rango de validez de los modelos estudiados y de proponer algunas posibles mejoras futuras a estos modelos.

Las diferentes aplicaciones que tiene la mecánica estadística al análisis de sistemas complejos en física, biología o sistemas sociales hace necesario el planteamiento de un formalismo general que pueda modelar y caracterizar a estos sistemas a partir de los elementos que lo componen y de sus interacciones. En este capítulo se presenta un formalismo analítico que permite describir sistemas constituidos por un número grande de agentes y en los que existen cantidades conservadas. En primer lugar, describimos un sistema aislado en el que los agentes compiten por porciones de una cantidad conservada. En segundo lugar, consideramos el caso de un sistema complejo abierto, de tal forma que las cantidades que antes se conservaban pueden variar, con lo que ahora se pueden definir cantidades análogas a potenciales termodinámicos.

CAPÍTULO 1

MECÁNICA ESTADÍSTICA DE SISTEMAS COMPLEJOS

Un sistema complejo se caracteriza por estar compuesto de una colección de agentes o subsistemas interactuantes que exhiben un comportamiento global o emergente, que no es manipulado por agentes particulares. Para encontrar este comportamiento emergente se pueden usar métodos analíticos o computacionales, en donde la clave está en modelar solamente unas pocas características relevantes que jueguen un rol esencial en la descripción del fenómeno [3]. Los sistemas complejos están presentes en diferentes áreas del conocimiento. Por ejemplo, en física se han analizado desde la mecánica estadística y la materia condensada [38], en biología se encuentran al considerar los ecosistemas, las epidemias, las adaptaciones y la genética del sistema inmune humano [2, 39] y en sistemas sociales de naturaleza económica al considerar, por ejemplo, la dinámica de los mercados de acciones [30].

Un sistema económico tiene un comportamiento complejo debido a que para entenderlo no es suficiente con conocer a los agentes que conforman el sistema, sino también cómo éstos se relacionan (interactúan). La dinámica de sus interacciones genera efectos a gran escala, tales como la desigualdad, la pobreza, o preferencias sobre acciones, que no se pueden describir a partir del conocimiento individual que se tenga sobre los agentes [40]. Así, es posible modelar ciertos comportamientos complejos de dos formas: una analítica, donde usualmente se utiliza a la mecánica estadística para describir algunas propiedades de los sistemas, y una computacional (numérica), donde se utilizan métodos de simulación basados en agentes, autómatas celulares o sistemas dinámicos, entre otros [2, 41].

En particular, se ha estudiado la mecánica estadística de las distribuciones de dinero, ingreso y riqueza por medio de lo que se conoce como teoría de ensambles [10, 42, 43]. En la mecánica estadística, a partir del conocimiento de los comportamientos microscópicos, es posible conocer las propiedades macroscópicas de un sistema termodinámico, donde la evolución del sistema conduce a distribuciones de energía que son estables cuando se maximiza la entropía, lo cual sucede cuando el sistema se encuentra en el estado de equilibrio [24, 25, 38]. Las simulaciones de estos sistemas son estudiadas mediante los llamados modelos

cinéticos de distribución, donde un agente intercambia cierta cantidad (por ejemplo dinero) aleatoriamente con los otros agentes del sistema, de forma análoga al intercambio de energía cinética entre las partículas de un gas ideal [10, 1, 9, 15].

Los resultados de las simulaciones de los modelos cinéticos de distribución de dinero muestran que la forma de la distribución depende del tipo de intercambio de dinero que esté definido entre los pares de agentes. Por ejemplo, cuando los pares de agentes intercambian una cantidad de su dinero (ya sea en una unidad o en una cantidad aleatoria de su dinero), la distribución que se obtiene es exponencial decreciente [10]. Si se incluye el hecho de que los agentes no siempre están dispuestos a intercambiar todo el dinero que tienen, sino solamente una parte, entonces la cantidad de dinero a intercambiar entre los pares de agentes ahora incorpora a un parámetro de propensión al ahorro, lo cual trae como resultado (para el caso en que el parámetro de propensión al ahorro sea constante e igual para todos los agentes) que el dinero se distribuya mediante una función Gamma [29], o para el caso en que el parámetro de propensión al ahorro sea aleatorio, el dinero se distribuye vía una de ley de potencias [11], la cual es conocida como ley de Pareto[44]. Si se considera que la cantidad de dinero a intercambiar por uno de los agentes es proporcional al dinero del agente, la forma de la distribución es tipo Bose-Einstein [43, 45]. Las anteriores distribuciones de dinero, obtenidas a través de modelos cinéticos de distribución de dinero, se han comparado con las obtenidas a partir de datos empíricos de diferentes países y en distintas épocas, encontrándose una buena consistencia [16, 17, 18, 19].

Por lo anterior existen dos maneras de modelar un sistema complejo a partir de la teoría cinética de gases. La primera usa herramientas analíticas, mientras que la segunda usa herramientas computacionales. En este capítulo, se introduce un formalismo analítico novedoso que permite describir algunas propiedades de sistemas complejos, al considerar a este tipo de sistemas de forma análoga a un gas ideal. Lo anterior se realiza considerando que el sistema puede ser aislado o abierto, y en donde los agentes que constituyen al sistema compiten por porciones de una cantidad U .

1.1. Sistema aislado

En física, los sistemas complejos son abordados mediante la mecánica estadística. Para el caso de sistemas físicos en equilibrio se usa la teoría de ensambles, cuya característica reside en considerar inicialmente un sistema cerrado y aislado, en donde las variables termodinámicas son fijas (ensamble microcanónico), y posteriormente enfocarse en sistemas abiertos donde las variables termodinámicas cambian dependiendo de las propiedades del sistema (ensambles canónico y gran canónico) [38, 25, 24]. Inicialmente vamos a considerar un sistema aislado en equilibrio, constituido por N agentes y en el que existe una cantidad conservada U que se distribuye entre en los N agentes debido a que estos compiten por porciones de U , en cantidades que se ubican en rangos o valores discretos.

$$u_1, u_2, u_3, \dots \tag{1}$$

Cada rango define un posible estado del agente, de modo que los agentes están caracterizados por poseer porciones de U con valores u_1, u_2, u_3, \dots . De esta forma, un agente puede poseer una porción de

la cantidad U con un valor en el rango (o nivel) definido por u_i . Existen n_i agentes que tienen un valor de la cantidad U en el rango u_i , de tal forma que los diferentes rangos u_1, u_2, u_3, \dots tienen asociados los siguientes números de ocupación

$$n_1, n_2, n_3, \dots \quad (2)$$

Lo anterior significa que un estado macroscópico del sistema de los N agentes queda definido a partir de fijar los valores de los números de ocupación, es decir a partir de conocer los estados microscópicos de cada uno de los N agentes del sistema. El estado microscópico i de un agente queda caracterizado por el valor u_i .

La porción de la cantidad U que puede poseer un agente del sistema se puede encontrar en cualquiera

u_1 n_1	u_2 n_2	u_3 n_3

Figura 1.1: Disposición de los agentes en un sistema complejo

de los rangos u_i , es decir el valor de esta característica puede diferir entre los agentes del sistema. Dado que el número total de agentes es una cantidad conservada en el sistema, entonces este número se puede escribir como la suma de los números de ocupación n_i de los diferentes estados microscópicos i , tal como se muestra en la figura 1.1. Por lo anterior, el número total de agentes del sistema se escribe como

$$N = \sum_i n_i = cte. \quad (3)$$

Como se mencionó, para este sistema la cantidad total U es conservada, es decir no hay flujo de partes de la cantidad U desde o hacia el exterior. Además, como las partes de U se distribuyen entre los agentes del sistema, entonces la suma de los productos de los números de ocupación n_i por los valores de los rangos u_i es igual a la cantidad total U , es decir

$$U = \sum_i u_i n_i = cte. \quad (4)$$

Las dos anteriores condiciones de conservación o ligaduras en el sistema no son las únicas que se pueden considerar. Por ejemplo, Kustmartsev considera un sistema económico compuesto por agentes

caracterizados por tener cierta cantidad de dinero, riqueza y deuda [43], de tal forma que el total de cada una de estas cantidades en el sistema se representa por una ligadura. Desde esta perspectiva, las ligaduras mostradas en las ecuaciones 4 y 3 son las cantidades relevantes que caracterizan el sistema complejo y son las conservadas en el sistema.

En un sistema complejo es casi imposible predecir la dinámica macroscópica a partir del conocimiento de cada uno de los elementos constitutivos sin embargo es posible asociar a cada configuración el mismo peso sobre el ensamble, es decir el cociente entre el número de agentes en un estado i y el número total de agentes en el sistema es interpretado como el peso del microestado i en el ensamble, o probabilidad de encontrar un agente i en el sistema con una cantidad u_i . Teniendo en cuenta lo anterior, la cantidad promedio de la cantidad U por agente en el sistema es

$$\bar{u} = \frac{U}{N} = \frac{\sum_i u_i n_i}{N} = \sum_i u_i \frac{n_i}{N} = \sum_i u_i p_i. \quad (5)$$

El número total de configuraciones de los N agentes corresponde a la combinación de ellos en los subconjuntos n_i , de tal forma que existen exactamente $N!$ formas distintas de enumerar el sistema, pero cada intercambio de agentes que pertenezcan al mismo microestado no produce un nuevo caso, es decir se debe dividir entre $n_i!$ [24]. Para derivar la distribución mas probable, se tiene en cuenta que el estado de equilibrio se alcanza cuando el número de configuraciones es máxima, es decir cuando se tiene la mayor incertidumbre en el sistema

$$W_{\max} = \left[\frac{N!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_i!} \right]_{\max} \quad (6)$$

A partir de este número de configuraciones y usando las ligaduras del sistema, se encuentra que la distribución de probabilidad de la cantidad u_i es (la deducción se muestra en el Apéndice 1):

$$p_i = \frac{n_i}{N} = \frac{e^{-\beta u_i}}{\sum_i e^{-\beta u_i}}, \quad (7)$$

Y definiendo la cantidad

$$Q(1, \bar{u}) = \sum_i e^{-\beta u_i}, \quad (8)$$

como la suma de los factores $e^{-\beta u_i}$ sobre todos los microestados que pueda tener un agente en el sistema (es decir el número de rangos en que se ha dividido la cantidad U). La cantidad $Q(1, \bar{u})$ representa a la función de partición canónica de un agente para sistemas complejos. Por lo anterior, la probabilidad de encontrar en el sistema a un agente i teniendo una porción u_i de la cantidad total U es

$$p_i = \frac{e^{-\beta u_i}}{Q(1, \bar{u})}. \quad (9)$$

La versión en el continuo de la anterior probabilidad se obtiene al tener en cuenta que la diferencia Δu entre dos rangos sucesivos u_i debe ser mucho mayor al promedio por agente de la cantidad en el sistema \bar{u} , es decir

$$\Delta u = u_{i+1} - u_i \gg \bar{u}. \quad (10)$$

Si se cumple esta condición, la expresión de la probabilidad pasa del discreto al continuo, es decir

$$p_i = p_i(u_i) \longrightarrow p(u) = C e^{-\beta u}. \quad (11)$$

Las constantes C y β se pueden encontrar a partir de las condiciones de normalización de la probabilidad y de la cantidad promedio \bar{u} , de la siguiente forma

$$\sum_i p_i = 1 \longrightarrow \int_0^\infty p(u) du = \frac{C}{\beta} = 1, \quad (12)$$

$$\sum_i u_i p_i = \bar{u} \longrightarrow \int_0^\infty u p(u) du = \frac{C}{\beta^2} = \bar{u}. \quad (13)$$

De la primera condición se obtiene que $C = \beta$, mientras que la segunda indica que $\beta = \frac{1}{\bar{u}}$. En analogía con un sistema físico, la cantidad \bar{u} se asocia con la "temperatura" del sistema de forma que la probabilidad queda expresada como

$$p(u) = \frac{1}{\bar{u}} e^{-\frac{u}{\bar{u}}} \quad (14)$$

Esta distribución exponencial decreciente es conocida como la distribución de Boltzmann-Gibbs. Una vez que se ha conocido cuál es la probabilidad de encontrar un agente en el estado microscópico i , puede resultar útil conocer de qué depende un cambio en la distribución de probabilidad. Para esto recordamos que en física las variables termodinámicas (de naturaleza macroscópica) son promedios de variables microscópicas y que la conexión entre ellas la dicta el conocido principio de Boltzmann. Mediante este principio, una cantidad macroscópica como la entropía se conecta con una propiedad microscópica como lo es el número de estados a través de

$$S = k \log W, \quad (15)$$

donde k es una constante de proporcionalidad llamada constante de Boltzmann. Dado que la probabilidad de que un agente tenga una parte de U con valor u_i está dada por 7, entonces se puede encontrar la siguiente relación entre ésta probabilidad y el logaritmo del número de estados (el procedimiento desarrollado para encontrar esta relación se describe en el Apéndice 2):

$$S = \log W_{\max} = -N \sum_i p_i \log p_i. \quad (16)$$

Siguiendo un procedimiento similar al de Rawlings et. al. en [42] y teniendo en cuenta que la probabilidad otorga un peso a cada uno de los microestados, se parte de la expresión del valor esperado de u dada por

$$\bar{u} = \sum_i u_i p_i, \quad (17)$$

se toma el diferencial total $d\bar{u}$, teniendo en cuenta que \bar{u} es una cantidad conservada, por lo tanto

$$d\bar{u} = \sum_i u_i dp_i + \sum_i p_i du_i = 0. \quad (18)$$

Dado que una expresión para u_i se encuentra a partir de 9, entonces

$$d\bar{u} = \sum_i \frac{1}{\bar{u}} [\log p_i + \log Q(1, \bar{u})] dp_i + \sum_i p_i du_i, \quad (19)$$

la cual se puede escribir de forma equivalente como

$$d\bar{u} = \sum_i \frac{1}{\bar{u}} d[-p_i \log p_i] + \sum_i p_i du_i. \quad (20)$$

El término dentro del paréntesis cuadrado es la entropía promedio por agente. Dado que cuando el sistema se encuentra en el estado de equilibrio el número de estados es máximo, entonces el segundo término se hace cero, de modo que

$$ds = \bar{u} d\bar{u}, \quad (21)$$

resultado que es equivalente a una "segunda ley de la termodinámica" para sistemas complejos, pero en este caso la temperatura está representada por el valor promedio de la cantidad U , es decir $T = \frac{1}{\bar{u}}$ y la energía transferida en forma de calor está representada por el cambio en la cantidad u . Una restricción que tiene este resultado es que el sistema que se está considerando es un sistema cerrado y aislado. Lo anterior significa que para poder estudiar un sistema mas incluyente es necesario considerar sistemas abiertos, lo cual se realiza en la siguiente sección.

1.2. Sistema abierto

Ahora el objetivo es desarrollar un procedimiento similar al de la sección anterior para describir un sistema abierto e interpretar el multiplicador de Lagrange que se deriva cuando el promedio de la cantidad total U del sistema se conserva. Para este caso, también se considera que los N agentes en el sistema abierto compiten por alguna parte de la cantidad U_j que no es fija, cuando el sistema se encuentra en el macroestado j . Cada agente posee una cantidad u_i , con $i = 1, 2, 3, \dots, N$, e intercambian partes de U_j con el medio (entorno), de tal forma que en promedio la cantidad U es una cantidad conservada ($\langle U \rangle = \text{cte}$). El intercambio de la cantidad U con el entorno es la causa para que el sistema pase aleatoriamente por los diferentes estados de N agentes, cada uno en principio caracterizado por un valor diferentes de la cantidad total U . Para encontrar la probabilidad p_j de encontrar el sistema en cierto macroestado j , caracterizado por tener asociado una cantidad total U_j que se reparte entre los N agentes del sistema, consideramos que el sistema abierto se define como la suma del sistema de interés mas un sistema que hace las veces de entorno. Si la cantidad U está repartida entre los dos sistemas, es decir una parte asociada al sistema de interés U_S y otra parte asociada al entorno U_E , entonces se tiene que

$$U = U_S + U_E. \quad (22)$$

Dado que la cantidad U_E del entorno es mucho mayor que la cantidad U_S del sistema de interés, entonces al dividir la anterior expresión por la cantidad U

$$\frac{U_S}{U} = \left(1 - \frac{U_E}{U}\right) \ll 1, \quad (23)$$

se concluye lo siguiente. Puesto que la cantidad U_S no es fija, pero la cantidad promedio $\langle U \rangle$ si lo es, entonces el sistema puede pasar por todos los posibles microestados j (estados del sistema de N agentes), cada uno caracterizado por una cantidad total U_j y cada uno teniendo una probabilidad diferente, descrita por cierta densidad de probabilidad. Como la cantidad total U es mucho mayor que la cantidad en el sistema de interés U_S , se espera que los microestados con una cantidad U_S muy grande sean poco probables.

La probabilidad de encontrar al sistema en cierto macroestado j es proporcional al número de microestados $\Omega_E(U_E)$ que sean compatibles con la cantidad U_E . Ya que el sistema pasa por todos los microestados caracterizados por una cantidad total U_j dada, el número de estos microestados es proporcional a la cantidad del entorno $U - U_j$, con lo cual se puede expandir el logaritmo del número de microestados en la forma

$$\ln \Omega(U - U_j) \approx \ln \Omega_E(U) - \frac{\partial}{\partial U} (\ln \Omega_E(U)) U_j + \dots \quad (24)$$

La derivada parcial en el segundo término corresponde a $\frac{1}{\bar{u}}$, en analogía con la temperatura de un sistema físico. Además, la probabilidad p_j es proporcional al número de microestados, por lo cual

$$p_j \propto \Omega(U - U_j). \quad (25)$$

Agrupando $\Omega(U - U_j)$ en la ecuación 24, se tiene que

$$p_j \propto \Omega_E(U) e^{-\frac{U_j}{\bar{u}}}. \quad (26)$$

Para poder igualar las dos anteriores expresiones, se tiene en cuenta la condición de normalización

$$p_j = \frac{e^{-U_j/\bar{u}}}{Q(N, \bar{u})}, \quad (27)$$

donde $Q(N, \bar{u})$ representa la función de partición canónica de N agentes, la cual se define como

$$Q(N, \bar{u}) = \sum_j e^{-\beta U_j}. \quad (28)$$

Con la anterior distribución de probabilidad, se tiene que el valor esperado de la cantidad total U es

$$\langle U \rangle = \sum_j U_j p_j = \frac{\sum_j U_j e^{-U_j/\bar{u}}}{\sum_j e^{-U_j/\bar{u}}} = \left(\frac{\partial \log Q(N, \bar{u})}{\partial \bar{u}} \right)_N. \quad (29)$$

Desde el punto de vista estadístico, la cantidad U es un valor promedio debido a que el sistema puede pasar por un gran número de diferentes macroestados. Lo anterior implica que la cantidad U se puede expresar como

$$U = \sum_j U_j p_j, \quad (30)$$

de tal forma que la diferencial total dU es

$$dU = \sum_j U_j dp_j + \sum_j p_j dU_j. \quad (31)$$

La diferencial dU esta relacionada con el cambio en la cantidad U y con el cambio en la densidad de probabilidad. El primer término del lado derecho de la anterior expresión representa el cambio en U debido al trabajo realizado sobre el sistema, mientras que el segundo término corresponde al cambio en U cuando no se realiza trabajo. Sin embargo, dado que la variación en el trabajo neto es cero el segundo término se hace es cero. Ahora, teniendo en cuenta que se cumple

$$d \left(\sum_j p_j \log p_j \right) = \sum_j \log p_j dp_j, \quad (32)$$

entonces al remplazar 27 en 32, se tiene

$$d \left(\sum_j p_j \log p_j \right) = \sum_j \left(-\frac{U_j}{\bar{u}} - \log Q(N, \bar{u}) \right) dp_j. \quad (33)$$

Al reescribir el lado derecho de la anterior expresión en dos partes

$$d \left(\sum_j p_j \log p_j \right) = -\frac{1}{\bar{u}} \sum_j U_j dp_j - \log \sum_j dp_j, \quad (34)$$

y teniendo en cuenta que las variaciones de la probabilidad son iguales a cero, se encuentra que

$$d \left(\sum_j p_j \log p_j \right) = -\frac{1}{\bar{u}} \sum_j U_j dp_j. \quad (35)$$

Remplazando esta última expresión en 31, se obtiene

$$dU = -\bar{u} d \left(\sum_j p_j \log p_j \right) = \bar{u} d \left(-\sum_j p_j \log p_j \right). \quad (36)$$

Dado que la entropía del sistema de N agentes se define como

$$S = -\sum_j p_j \log p_j, \quad (37)$$

y si el sistema es aislado, se tiene que la probabilidad p_j es

$$p_j = \frac{1}{W_{max}}, \quad (38)$$

con lo cual la entropía es igual a

$$S = -\sum_j \frac{1}{W_{max}} \log \frac{1}{W_{max}}, \quad (39)$$

obteniéndose que el principio de Boltzmann para sistemas complejos se escribe como

$$S = \log W_{max}. \quad (40)$$

Teniendo en cuenta que en termodinámica se definen varios potenciales que pueden ser usados para describir el comportamiento y la estabilidad de un sistema, los cuales dependen de las ligaduras impuestas

sobre el sistema, entonces para el caso que estamos tratando también definimos un potencial $F(N, \bar{u})$, que llamamos energía libre de Helmholtz, a través de la siguiente relación directa con la función de partición de N agentes

$$Q(N, \bar{u}) = e^{-F(N, \bar{u})/\bar{u}}. \quad (41)$$

La escogencia de esta relación se basa en que la función de partición de N agentes contiene información sobre las ligaduras del sistema. Por lo anterior, ahora el objetivo es relacionar directamente la energía libre de Helmholtz con ciertas variables macroscópicas. Para realizar lo anterior, primero se reescribe la expresión 41 como

$$F(N, \bar{u}) = -\bar{u} \log Q(N, \bar{u}). \quad (42)$$

Con el propósito de encontrar un término que dependa de la entropía del sistema, en el lado derecho de la anterior expresión se multiplica por la unidad, escrita como la condición de normalización, es decir

$$F(N, \bar{u}) = -\bar{u} \log Q(N, \bar{u}) \sum_j p_j. \quad (43)$$

Dado que el factor $\bar{u} \log Q(N, \bar{u})$ es una cantidad constante con respecto a la suma sobre los macroestados, entonces la anterior expresión se puede escribir como

$$F(N, \bar{u}) = -\sum_j \bar{u} \log Q(N, \bar{u}) p_j. \quad (44)$$

Si queremos trasladar la definición de la energía libre de Helmholtz al estudio de sistemas complejos, ésta debe depender de la cantidad promedio de U en el sistema. Para incluirlo, simplemente en la anterior expresión se suma y se resta la cantidad $U_j p_j$ dentro de la sumatoria, con lo cual

$$F(N, \bar{u}) = \sum_j U_j p_j - U_j p_j - \bar{u} \log Q(N, \bar{u}) p_j, \quad (45)$$

de tal forma que al ordenar los términos en la sumatoria el resultado es

$$F(N, \bar{u}) = \sum_j (U_j - U_j - \bar{u} \log Q(N, \bar{u})) p_j. \quad (46)$$

Se observa que los dos últimos términos del lado derecho de la anterior expresión corresponden a los encontrados en 41, por lo tanto usando 46 se obtiene

$$F(N, \bar{u}) = \sum_j (U_j + \bar{u} \log p_j) p_j, \quad (47)$$

lo cual implica que la energía libre de Helmholtz incluye un término asociado con la entropía del sistema $S = -\sum_j p_j \log p_j$ y otro que está definido a partir del valor esperado de la cantidad U en el sistema, es decir

$$F(N, \bar{u}) = \sum_j U_j p_j - \bar{u} S. \quad (48)$$

Este último resultado quiere decir que para realizar un adecuado tratamiento estadístico de un sistema complejo se requiere que cada una de las mencionadas cantidades macroscópicas estén definidas.

Ahora, si se tiene en cuenta que cuando el sistema se encuentra en el macroestado j , caracterizado por U_j , esta cantidad se distribuye entre los N agentes, es decir cada agente posee una parte de la cantidad U_j con valores en los rangos u_i^j , de forma que

$$U_j = u_1^j n_1 + u_2^j n_2 + \dots = \sum_l u_l^j n_l = u_{n_1}^j + u_{n_2}^j + \dots + u_{n_l}^j, \quad (49)$$

por lo tanto la función de partición se modifica de la siguiente manera

$$Q(N, \bar{u}) = \sum_j e^{-U_j/\bar{u}} = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N} e^{-(u_{n_1}^j + u_{n_2}^j + \dots + u_{n_N}^j)/\bar{u}}. \quad (50)$$

Separando cada una de las sumas

$$Q(N, \bar{u}) = \sum_{n_1} e^{-u_{n_1}/\bar{u}} \sum_{n_2} e^{-u_{n_2}/\bar{u}} \dots \sum_{n_N} e^{-u_{n_N}/\bar{u}}, \quad (51)$$

resulta evidente que la función de partición del sistema completo es el producto de las funciones de partición individuales, es decir

$$Q(N, \bar{u}) = \prod_i Q(n_i, \bar{u}). \quad (52)$$

La importancia de conocer la función de partición es que puede ser usada para simplificar los cálculos, además de que si se mantienen constantes algunas variables en el sistema, ésta puede dar información sobre otras variables de interés. Por ejemplo, el potencial químico $\mu(N, \bar{u})$ se define como el cambio que tiene la energía libre de Helmholtz cuando un agente es introducido en el sistema

$$\mu(N, \bar{u}) = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{\bar{u}} = F(N, \bar{u}) - F(N - 1, \bar{u}), \quad (53)$$

pero dado que este cambio puede expresarse por medio de la función de partición como

$$\mu(N, \bar{u}) = -\bar{u} \log Q(N, \bar{u}) + \bar{u} \log Q(N - 1, \bar{u}), \quad (54)$$

o de forma equivalente al usar propiedades de logaritmo

$$\mu(N, \bar{u}) = -\bar{u} \log \frac{Q(N - 1, \bar{u})}{Q(N, \bar{u})}, \quad (55)$$

donde \bar{u} es la temperatura del sistema. Este resultado indica que el potencial químico está relacionado con el cambio de la función de partición cuando se le agrega al sistema un agente. Un caso mas general, en donde los agentes pueden migrar al entorno manteniendo la cantidad promedio de agentes fija, es estudiado a partir de un ensamble gran canónico a través de un procedimiento similar descrito en el Apéndice 2, lo cual muestra que en el estado de equilibrio la cantidad U se distribuye entre los N agentes vía una distribución tipo Bose-Einstein (ver Apéndice 3).

Un sistema económico por sus características se considera un sistema complejo. A través de la función de distribución del dinero es posible obtener propiedades del sistema como un todo. Cuando agentes intercambian dinero en el sistema, se producen efectos a gran escala como la desigualdad, debido a que en el proceso los agentes migran entre clases económicas haciendo que la información necesaria para conocer su estado se maximice. En este capítulo se calculan los índices de desigualdad y la cantidad de información que generan los modelos cinéticos de distribución de dinero conocidos. Además se presenta un modelo donde los agentes tienen una propensión al ahorro diferenciada y se muestra que la distribución de cada grupo caracterizado por un parámetro de ahorro común es independiente de su entorno. Finalmente se construye un modelo que caracteriza el flujo de agentes entre diferentes sistemas.

CAPÍTULO 2

MODELOS CINÉTICOS DE DISTRIBUCIÓN DE DINERO

Cuando observamos la regularidad en algunos fenómenos económicos, vemos que la economía es una manifestación de un sistema social complejo debido a que las interacciones locales entre sus miembros conducen a comportamientos emergentes que no son programados por un ente de control [3, 4]. Modelar este sistema implica diseñar una simplificación matemática que solo tenga en cuenta unas pocas características relevantes. Construido el sistema, se crea un procedimiento estadístico basado en inferencia estadística de los datos con el fin de obtener parámetros promedio de esas cantidades relevantes que caracterizan al sistema.

Un sistema económico en su conjunto es un sistema de agentes (pueden ser empresas, unidades familiares o instituciones) que interactúan por medio de intercambios de dinero, acciones, bienes, bonos, etc.[46]. Para estudiar el mecanismo de distribución de recursos, podemos modelar el sistema considerando un conjunto de agentes que interactúan por medio de transacciones, y cuya dinámica permite encontrar comportamientos emergentes, tales como la forma de la distribución de dinero, ingreso y riqueza. El primero que observó la forma real de distribuciones de ingreso en sistemas económicos fue Vilfredo Pareto [44], quien concluyó que “la estructura de la distribución es relativamente constante en diferentes países y épocas”[46], con una forma funcional para individuos de alto ingreso que se ajusta a una ley de potencias.

En el contexto de la econofísica, se han desarrollado modelos de sistemas económicos aplicando métodos propios de la física, la mayoría de ellos soportados en la mecánica estadística, mientras que otros, en menor proporción, estudiados desde la termodinámica [22, 47] y la física cuántica [48, 49]. Uno de los modelos más notables son los llamados modelos cinéticos de distribución de dinero, que considera una analogía entre la dinámica en un sistema económico y la teoría cinética de los gases ideales, apoyándose en la idea de intercambio entre pares de agentes, lo cual permite obtener una distribución de equilibrio que es estable.

Como se mencionó en el capítulo anterior, el trabajo pionero que simula un sistema económico usando modelos cinéticos de distribución de dinero fue desarrollado por Dragulesku y Yakovenko [10], quienes establecieron una similitud entre un sistema económico y un gas ideal, dado que los agentes del sistema interactúan por medio de transacciones entre pares de agentes de forma similar a la interacción de las partículas de un gas mediante colisiones elásticas entre pares de partículas. En este contexto, la mecánica estadística se convierte en una herramienta de análisis ya que facilita el estudio de grandes ensamblajes desde átomos hasta agentes. Con el trabajo de Dragulesku y Yakovenko se dio un primer paso para modelar un sistema económico con la mínima cantidad de ingredientes, que envuelve procesos de intercambio y que produce distribuciones similares a las encontradas en diferentes países.

Tal como lo plantea Dragulesku y Yakovenko, en un mercado económico cada agente intercambia su dinero de una forma impredecible, lo que sugiere que el mercado tiene una naturaleza estocástica. En los sistemas físicos, el intercambio de energía entre moléculas durante las colisiones, que es también de naturaleza estocástica, conduce a la ley de equipartición de la energía y a distribuciones de equilibrio. Aquí la entropía que corresponde al número de bits requerido para describir la variable aleatoria de interés, se maximiza [38]. En las distribuciones de ingreso y riqueza, una de las variables aleatorias es el dinero y cada distribución tiene una entropía característica que, contrario a lo que ocurre con la forma de la distribución, depende incluso de las condiciones iniciales del sistema. Actualmente no se conocen estudios enfocados a describir la cantidad de información presente en los modelos cinéticos de distribución de dinero, lo que motivó a mostrar algunos de los cálculos en este capítulo.

Además, hasta ahora no se ha realizado un estudio de la desigualdad que arroja cada uno de los tres modelos cinéticos de distribución de dinero que se estudian en este capítulo. Una de las formas de hacerlo es a partir del cálculo del índice de Gini, medición numérica que corresponde a la razón entre el área de una curva llamada "curva de Lorenz" y una línea de equidad perfecta [50]. La curva de Lorenz se construye a partir de la relación entre el porcentaje acumulado de la población en el eje x y el porcentaje acumulado de ingreso de cada una de las fracciones de población en el eje y [50, 51]. Generalmente estas fracciones se toman como quintiles, es decir se divide la población en cinco partes y se calcula el porcentaje de ingresos que tiene cada grupo sobre el total de los ingresos.

En este capítulo se estudia la entropía y la desigualdad en los principales modelos cinéticos de distribución de dinero. Además se presentan modelos donde el número de agentes no es una cantidad conservada y donde los agentes se dividen en clases caracterizadas por tener un parámetro de propensión al ahorro diferenciado. En primer lugar, se muestran los trabajos pioneros desde perspectivas económicas. Posteriormente, se analiza el ya mencionado modelo Dragulesku-Yakovenko [10] donde se consideran intercambios de dinero entre pares de agentes sin posibilidad de ahorro. En la sección 3, se estudia un modelo diferente de ahorro propuesto por Kusmartsev [43, 45], que describe economías con cualquier valor de desigualdad, a pesar de que los parámetros obtenidos en las distribuciones no presentan relación con el parámetro de ahorro. Adicionalmente, en la sección 4, se analiza el modelo que más se ha estudiado bajo esta perspectiva: el modelo de Chakrabarti y Chakraborti [1], donde se considera un parámetro de propensión al ahorro constante e igual para todos los agentes del sistema. Finalmente, se presentan dos de los principales aportes de este trabajo: el planteamiento de un primer modelo en donde se permite el flujo de agentes, y un segundo modelo en donde existen subgrupos de agentes caracterizados por tener parámetros de propensión

al ahorro diferenciados.

2.1. La desigualdad en el marco de la teoría del superávit de la estratificación social

Los modelos cinéticos de distribución de dinero se fundamentan en el trabajo hecho por Jhon Angle en 1986, quien intentó enlazar algunos trabajos de estratificación social con teorías de distribuciones estadísticas en la conocida teoría del superávit de la estratificación social. La motivación para estudiar la forma de la distribución de riqueza es que la función a la que se ajustan las distribuciones nos puede dar información de los procesos estocásticos asociados y así entender el proceso que genera la desigualdad. El proceso estocástico asociado en la teoría del superávit se hace a partir de tres observaciones:

1. “Los encuentros donde la riqueza cambia de manos relativamente rápido pueden ser modelados por dos ecuaciones, una para cada parte implicada en la transacción. Así la teoría no se ocupa de la creación o destrucción de riqueza sino solo de su distribución, de tal forma que en los encuentros la parte que uno gana la pierde el otro”.
2. “La tendencia de la riqueza es a fluir”.
3. “El superávit debe ser visto como una serie de capas socio-económicas donde las más altas pierden mas fácilmente superávit que las capas bajas, cercanas al nivel de subsistencia”.

Estas observaciones hacen pensar en puntos claves de un proceso en un contexto muy diferente: la teoría cinética de los gases ideales. La imposibilidad de producir riqueza es análogo a la ley de conservación de la energía, la tendencia de fluir es análogo a lo que sucede en las colisiones en un gas ideal en donde en cada encuentro las partículas intercambian energía, y la tendencia a perder superávit de las capas mas altas de ingreso es similar a lo que sucede cuando una partícula en un gas tiene una energía cinética grande y es mas propensa a generar choques que reduzcan su energía. Así, se pueden construir modelos donde las colisiones elásticas entre partículas en un gas ideal representen transacciones de dinero entre agentes en un sistema económico. A partir de esta idea se desarrollaron los modelos cinéticos de distribución de dinero, ingreso y riqueza.

Originalmente Angle mostró que el tamaño de las distribuciones de riqueza en las sociedades con diferentes niveles de tecnología pueden ser ajustadas a una familia de distribuciones gamma. La forma a la que se ajustan las distribuciones son de dos parámetros.

$$P_x(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}. \quad (1)$$

El sesgo positivo, característico de esta distribución, ha sido observado en estudios de distribución de dinero, ingreso y riqueza en diferentes países [19, 16, 17, 18]. Sin embargo al analizar la distribución de riqueza de individuos en las capas superiores, es decir con un alto ingreso, la forma de la distribución cambia y se convierte en una ley de potencias llamada distribución de Pareto

$$P_x(x) = ax^{-\nu}, \quad (2)$$

con valores de ν cercanos a 1.5.

El modelo de Angle consiste en considerar transacciones entre pares de agentes donde la riqueza se conserva en cada encuentro, lo que sugiere que la teoría se enfoca en la distribución de la riqueza y no en su creación o destrucción. Las ecuaciones que describen este comportamiento son

$$X_{mt} = X_{m(t-1)} + dUX_{n(t-1)} - (1-d)UX_{m(t-1)}, \quad (3)$$

$$X_{nt} = X_{n(t-1)} + (1-d)UX_{m(t-1)} - dUX_{n(t-1)}, \quad (4)$$

donde X_{mt} es el valor del superávit después del encuentro con el agente n , $X_{m(t-1)}$ es el superávit de riqueza antes del encuentro con n y U es una variable aleatoria que se distribuye uniformemente entre 0 y 1. La variable d puede tomar dos valores cero o uno, estableciendo quién gana y quién pierde en la transacción.

Los procesos de simulación estiman que las distribuciones se ajustan a funciones gamma, es decir tal como es observado en las diferentes distribuciones empíricas, los procesos de desigualdad generan una asimetría positiva de la distribución en donde los estados de menor riqueza tienen un mayor número de ocupación que el resto de estados, resultado que abre la puerta al uso de métodos estadísticos usados en física para el análisis de la distribución de dinero. El primero en analizar este método en el marco de la física estadística fue Ispolatov et. al. [8], quienes introducen un modelo de distribución de riqueza basado en agentes interactuantes donde los esquemas de intercambio están fundamentados en el modelo de Angle, pero desde una descripción basada en la teoría de campo medio.

Los trabajos de Dragulescu-Yakovenko y Chakrabarti-Chakraborti fundan los llamados modelos cinéticos de distribución de dinero y hacen énfasis en la relación entre un sistema económico, donde un agente intercambia dinero en cada transacción, tal como sucede en un gas de partículas, donde la energía es intercambiada y conservada en procesos de dispersión. Las transacciones en el modelo de Chakrabarti y Chakraborti introducen un parámetro de propensión al ahorro λ , que es una porción fija de dinero que no es intercambiada en las transacciones. Respecto a los modelos cinéticos de distribución de dinero, tal vez el punto más criticado por Angle [52] es el significado del ahorro, argumentando que no es un término adecuado para describir estos procesos de desigualdad. La razón que él presenta es que la parte ahorrada no está en riesgo de pérdida en una sola transacción y que por lo tanto la dinámica hace que esta parte cambie después de cada encuentro. En esta tesis no se discute acerca del significado real de esta cantidad, que por ahora vamos a seguir denominándola parámetro de propensión al ahorro. En las siguientes secciones se analizarán los modelos cinéticos de distribución de dinero desde una perspectiva física y económica: a través del cálculo de la entropía y del índice de Gini. El primer aporte original presentado en este capítulo corresponde a un modelo en el que se consideran cinco parámetros de propensión al ahorro diferenciados. El segundo aporte, corresponde a un modelo que describe un sistema abierto, donde el sistema de interés no esté compuesto por un número fijo de agentes. El tercer aporte corresponde a un modelo de distribución de dinero que describe economías con índices de Gini mayores a 0.5.

2.2. Modelo Dragulescu-Yakovenko

Este modelo considera un sistema económico cerrado basado en $N \gg 1$ agentes que intercambian una o más unidades monetarias entre sí [10]. Es decir, cada agente i en el sistema puede intercambiar su dinero m_i con otro agente del sistema, dando como resultado la ganancia o pérdida de una parte de su dinero. Con este propósito, se elige aleatoriamente al perdedor y al ganador entre los dos agentes i y j , los cuales antes del intercambio tienen una cantidad de dinero m_i y m_j . El intercambio consiste en que un agente perdedor cede una cantidad Δm al ganador, es decir si el ganador es el agente m_j , éste quedará con dinero $m_j + \Delta m$ y el agente i quedará con dinero $m_i - \Delta m$. Esquemáticamente este intercambio se reduce a [10]

$$[m_i, m_j] \rightarrow [m'_i, m'_j] = [m_i - \Delta m, m_j + \Delta m]. \quad (5)$$

Una transacción de este tipo indica que la cantidad de dinero antes y después de la interacción es la misma, conservándose el dinero localmente de la forma [10]

$$m_i + m_j = m'_i + m'_j. \quad (6)$$

El sistema entonces consiste de N agentes que compiten por porciones del dinero total del sistema M , cantidad que es conservada. Inicialmente todos los agentes tienen la misma cantidad de dinero y por lo tanto la forma de la distribución corresponde a una función delta

$$P(m) = \delta\left(m - \frac{M}{N}\right). \quad (7)$$

Luego de haber definido el tipo de transacción en el sistema, se eligen dos agentes de manera aleatoria (un ganador y un perdedor), y el dinero $\Delta m \geq 0$ es transferido del uno a otro, siempre que la cantidad a intercambiar sea menor al dinero del perdedor. En el caso contrario, la transacción no se desarrolla y se procede a escoger otro par de agentes. Si se realiza este procedimiento muchas veces, el sistema pasa por diferentes distribuciones hasta llegar a la distribución de equilibrio. Así mismo, la entropía en el sistema se incrementa en el tiempo hasta llegar a un punto de saturación. El procedimiento utilizado para simular un sistema de agentes compitiendo por porciones de M se puede sintetizar en los siguientes pasos [10]:

- 1 Se toma un sistema con $N \gg 1$ agentes, con una cantidad total M . La cantidad promedio por agente es $\bar{m} = \frac{M}{N}$
- 2 Sin pérdida de generalidad (no es restrictiva) en el tiempo inicial se le asigna a cada uno de los N agentes la misma cantidad de dinero igual a \bar{m} . Es decir el sistema comienza con todos los agentes teniendo la misma cantidad \bar{m} por lo tanto la entropía promedio por agente s_a es cero.
- 3 Se selecciona aleatoriamente entre los N agentes dos agentes rotulados con i y j .
- 4 Se considera un intercambio entre dos agentes de la forma

$$[m_i, m_j] \longrightarrow [m'_i, m'_j] = [m_i - \Delta m, m_j + \Delta m], \quad (8)$$

donde en cada intercambio la cantidad de dinero es conservada

$$m_i + m_j = m'_i + m'_j, \quad (9)$$

y la cantidad a intercambiar Δm depende del tipo de intercambio.

5 En la simulación se usa un criterio para decidir quien gana y quien pierde en la transacción. Por ejemplo, se puede lanzar un número aleatorio α y si $\alpha \leq 0.5$ u_i gana y si $0.5 \leq \alpha \leq 1$ u_j gana.

6 Se repiten los pasos 3 a 5 muchas veces usando la condición de frontera

$$p(m < 0) = 0 \tag{10}$$

indicando que en sistema no es permitido tener dinero negativo o deuda.

En este modelo se usa tres reglas de intercambio [10]: En la primera, donde la entropía crece lentamente, se intercambia una cantidad fija de dinero; en la segunda se intercambia una fracción aleatoria del dinero promedio del par de agentes implicados en la transacción, y en la tercera los agentes intercambian una cantidad aleatoria del dinero promedio del sistema. Los resultados de estas simulaciones se muestran a continuación.

2.2.1. Intercambio de una unidad

En este modelo se intercambia una cantidad fija de dinero e inicialmente todos los agentes tienen el mismo dinero, es decir todos los agentes se distribuyen en una función delta [10]. Cuando comienzan a intercambiar dinero con la condición de frontera de no permitir deuda, es decir dinero negativo, la distribución se vuelve asimétrica y alcanza en el equilibrio su máxima entropía, es decir el sistema evoluciona hasta que la información que se requiere para conocer la cantidad de dinero que tiene un agente en el sistema es máxima. En lo anterior, tenemos en cuenta el punto de vista de la teoría de la información, donde la entropía es la medida de la incertidumbre de una variable aleatoria, en este caso el dinero. Los resultados muestran que la entropía crece dependiendo del tipo de intercambio que se realice. En este caso analizamos un sistema que esta compuesto por $N = 500$ agentes en un sistema con una cantidad total de dinero igual a $M = 500$ para diferentes cantidades intercambiadas. El número de intercambios en este modelo fue de 10^6 y se repitieron las simulaciones 10^3 veces.

En la gráfica 2.2.1 vemos el crecimiento de la entropía tres diferentes intercambios. Para hacer este análisis, el ancho de cada uno de los intervalos en los histogramas se mantuvo constante y su tamaño dependiente del número de agentes en el sistema. La explicación de la diferencia en estas curvas se debe a que cuando se intercambia una cantidad grande con respecto al dinero promedio, por ejemplo $\Delta m = 0.5$, los agentes se ubican en puntos discretos de dinero como se puede ver en la gráfica 2.2.1. Lo interesante es que aún con este intercambio la distribución en el equilibrio sigue siendo una exponencial con parámetro de ajuste Chi-cuadrado igual a 0.426. Si hacemos el cálculo de la entropía, ésta crece hasta un valor $S = 1.93$, lo que indica que la cantidad de información para conocer el sistema no es muy alta y podemos encontrar los agentes en grupos discretos debido a que el dinero cambia en saltos de 0.5. Al disminuir la cantidad a intercambiar a $\Delta m = 0.1$ y calcular la entropía en cada paso de tiempo con las mismas condiciones de la anterior simulación, la distribución a la que tiende el sistema es una exponencial con parámetro de ajuste Chi-cuadrado igual a 0.395 como se muestra en la gráfica 2.2.1, la entropía crece más que en caso anterior debido a que los agentes se pueden ubicar en un mas estados y por lo tanto la cantidad de información

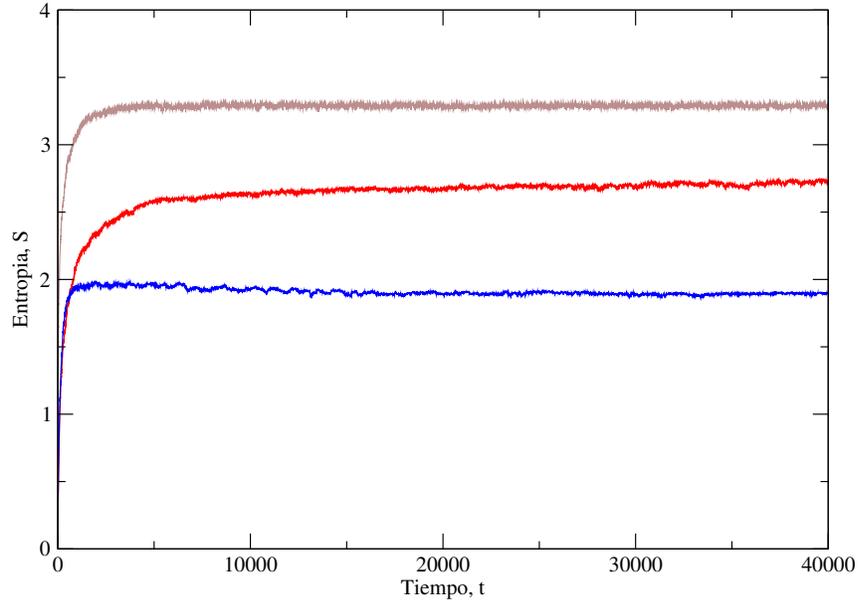


Figura 2.1: Evolución en el tiempo de la entropía, Curva superior: Intercambio de una cantidad constante $\Delta m = 0.1$. Curva media: Intercambio de una cantidad constante $\Delta m = 0.2$. Curva inferior: Intercambio de una cantidad constante $\Delta m = 0.5$.

para conocer este sistema es mayor. En este caso la entropía crece hasta $S = 3.28$ y en los histogramas las barras de error son menores que el punto. En resumen, la cantidad de información que se requiere para conocer las distribuciones en este intercambio depende de la cantidad a intercambiar, de tal forma que si es muy pequeña y hace que los agentes se distribuyan en un número reducido de grupos, la entropía es menor y crece al aumentar la fracción a intercambiar. De hecho, la distribución tiende a ser continua si se cumple la condición

$$\bar{m} \gg \Delta m. \quad (11)$$

Para intercambios muy pequeños, es decir $\Delta m \rightarrow 0$, los grupos a los que pueden acceder los agentes no se alejan muy rápido del dinero promedio, así que se requiere una mayor cantidad de tiempo para que el sistema alcance su máximo de entropía.

2.2.2. Intercambio de una fracción aleatoria del promedio \bar{m}

Es posible encontrar la misma distribución para un intercambio distinto, en este caso se considera el intercambio de una cantidad aleatoria del dinero promedio \bar{m} , en donde tomamos la misma cantidad de dinero M y agentes N que en el sistema anterior conservando las condiciones iniciales, de tal forma que el intercambio se puede modelar como [10]

$$\Delta m = \epsilon \bar{m}. \quad (12)$$

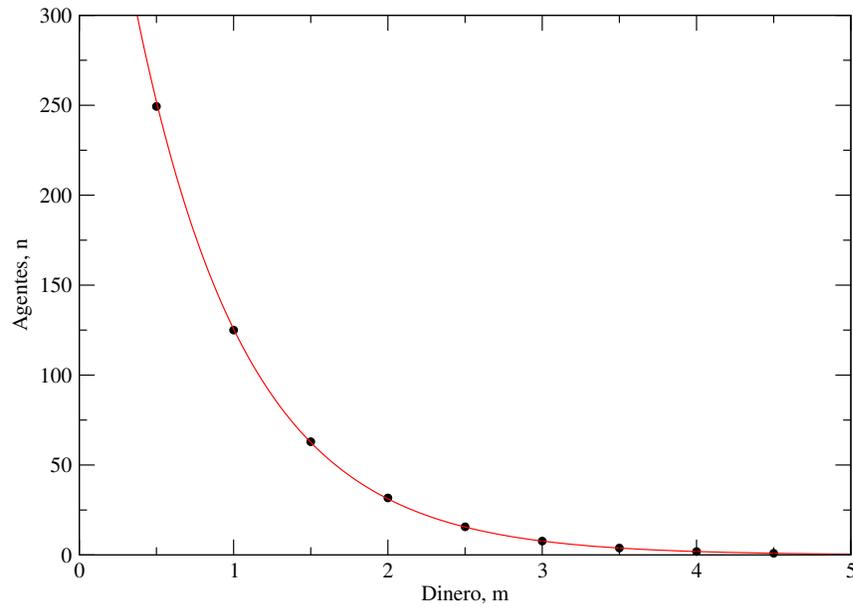


Figura 2.2: Histograma y puntos: Distribución estacionaria de dinero para un intercambio fijo de $\Delta m = 0.5$. Curva continua: Ajuste a una distribución exponencial.

La distribución en el punto de equilibrio es la misma de los sistemas anteriores solo que en éste los agentes están distribuidos en más estados. El parámetro Chi-cuadrado de ajuste de esta distribución es de 0.36 y la entropía, que indica información requerida para conocer el sistema, es mayor incluso que los sistemas anteriores como se muestra en la gráfica 2.2.2. Además el hecho de incluir una variable aleatoria en el intercambio hace que esta cantidad crezca hasta $S = 3.90$.

2.2.3. Intercambio de una fracción aleatoria del promedio del la cantidad m de los dos agentes

Otro intercambio considerado por Draguleku y Yakovenko examina el intercambio de una cantidad aleatoria del dinero promedio de los dos agentes que están implicados en la transacción conservando con las mismas condiciones anteriores. En este caso la fracción a intercambiar está dada por [10]

$$\Delta m = \epsilon \frac{m_i + m_j}{2}. \quad (13)$$

Los resultados mostrados en la figura 2.5, donde el parámetro de ajuste está en 0.445 indican que la entropía crece en la misma proporción del caso anterior. La razón se debe a que los agentes están distribuidos en todos los niveles. Adicionalmente la porción a intercambiar contiene un número aleatorio que hace que la cantidad de información presente en sistema sea mayor. En este caso la entropía crece hasta $S = 3.87$.

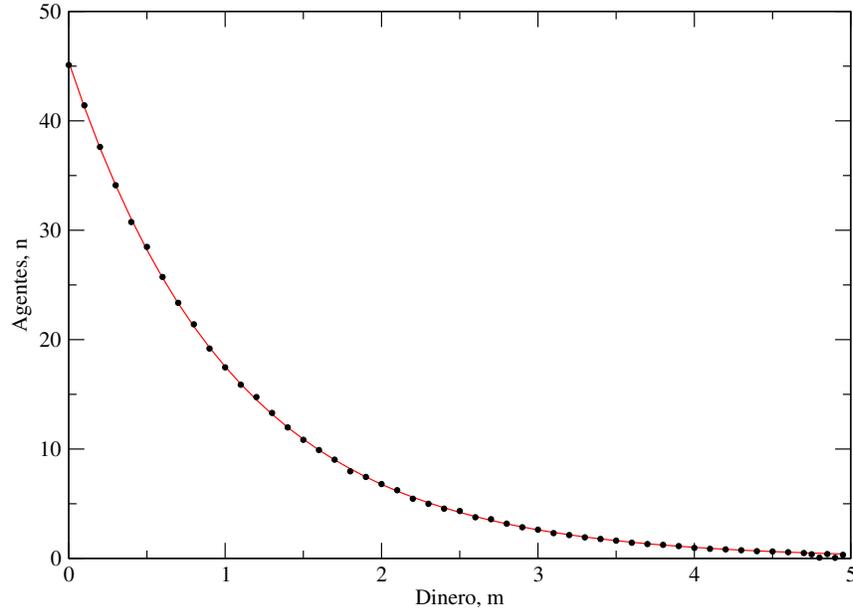


Figura 2.3: Puntos: Distribución estacionaria de dinero para un intercambio fijo de $\Delta m = 0.1$. Curva continua: Ajuste a una distribución exponencial.

2.2.4. Análisis de la desigualdad en los modelos de Dragulesku-Yakovenko

Para cada una de las simulaciones es posible calcular el índice de Gini mediante la curva de Lorenz. El índice de Gini se define como la relación entre la fracción acumulada de población con un ingreso por debajo de r ($x(r)$) y la fracción acumulada de ingreso de esta población $y(r)$. De forma integral, se define a partir de la densidad de probabilidad como

$$x(r) = \int_0^r P(m)dm, \quad (14)$$

$$y(r) = \frac{\int_0^r mP(m)dm}{\int_0^\infty mP(m)dm}. \quad (15)$$

Para la distribución de Boltzmann Gibbs, donde convenientemente se toma el dinero promedio como una unidad, las ecuaciones paramétricas corresponden a:

$$x(r) = 1 - e^{-r}, \quad (16)$$

$$y(r) = 1 - e^{-r}(r + 1), \quad (17)$$

de la cuál podemos derivar la ecuación explícita de la curva de Lorenz.

$$y(x) = x + (1 - x) \ln(1 - x). \quad (18)$$

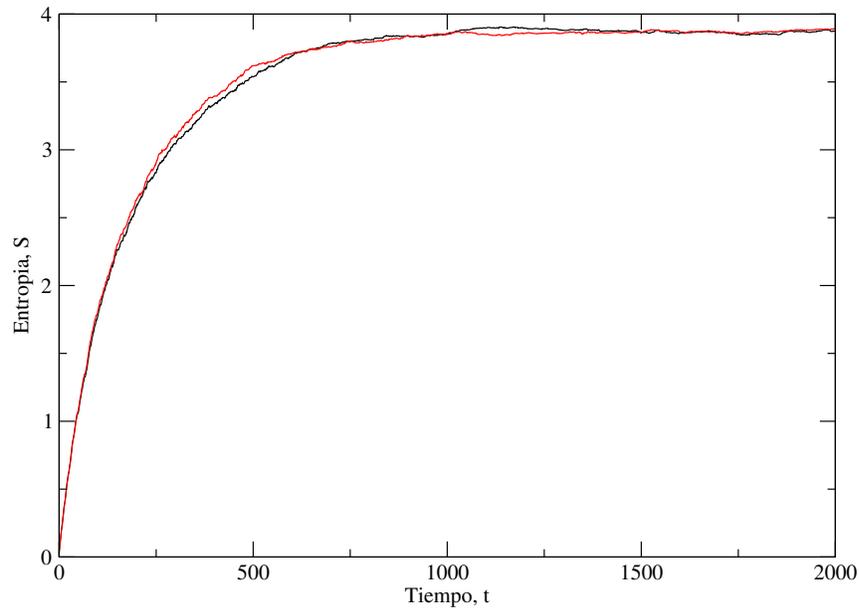


Figura 2.4: Evolución en el tiempo de la entropía, Curva negra: Intercambio de una fracción aleatoria del promedio del dinero del sistema $\Delta m = \nu \frac{M}{N}$. Curva roja: Intercambio de una fracción aleatoria del dinero promedio de los agentes implicados en la transacción $\Delta m = \nu \frac{m_i + m_j}{2}$.

A partir de la curva de Lorenz se calcula el coeficiente de Gini G por medio de la integral

$$G = 1 - \int_0^1 y(x) dx = 1 - \int_0^1 [x + (1-x) \ln(1-x)] dx = \frac{1}{2}, \quad (19)$$

lo que indica que la distribución de Boltzmann-Gibbs solo reproduce un índice de Gini igual a $\frac{1}{2}$, y por lo tanto el modelo no es útil para describir economías con índices distintos. De la misma forma, calculamos numéricamente (a partir de las simulaciones) la curva de Lorenz y el coeficiente de Gini, el resultado de la curva de Lorenz es mostrado en la gráfica 2.2.4 El índice de Gini es 0.50288, lo que indica un error de 0.6 % para las simulaciones.

2.3. Modelo Kusmartsev

Este modelo fue desarrollado por Kusmartsev [43] con la misma idea de sistema económico: varias unidades o agentes que interactúan hasta alcanzar el equilibrio. Como en los casos anteriores, en cada transacción se conserva el dinero. Sin embargo, no solo considera el dinero como una variable característica del agente sino que incluye la deuda y la riqueza que le generan los demás bienes que no se consideran. De este modo, usa métodos estadísticos para probar que en el equilibrio la distribución a la que tiende el sistema es de Bose-Einstein. Este cálculo es confirmado por datos empíricos de distribución de ingreso de

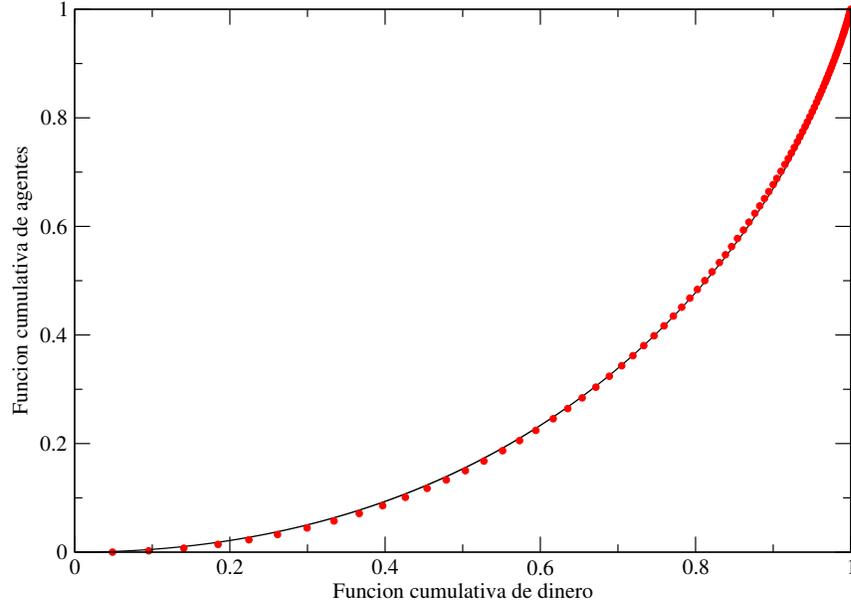


Figura 2.5: Curva de Lorenz para una distribución de Boltzmann-Gibbs.

Estados Unidos, donde la parte de bajos y medios ingresos se ajusta a una distribución de Bose-Einstein y la de altos ingresos a una distribución de Pareto.

Un segundo trabajo en esta misma dirección [45], construye simulaciones numéricas con un interacción diferente en donde se intercambia una fracción fija de dinero de solo un agente implicado en la transacción. El modelo analiza distribuciones de dinero donde el intercambio es proporcional al dinero que tiene un agente, ya que en un sistema económico una transacción es proporcional a los fondos de los agentes que realizan una compra. El parámetro no indica de ninguna forma ahorro y es equivalente al modelo analizado por Angle [27]. Las distribuciones a las que ajustan son Gamma para parámetros pequeños y distribuciones de Bose-Einstein para parámetros mayores a 0.5, descritas por el número de ocupación $n(m)$ como

$$n(m) = \frac{g_m}{\exp \frac{m-\mu}{T} - 1}, \quad (20)$$

donde g_m es un factor de degeneración del estado o una capa de agentes con el mismo dinero m . Así esta función cuenta con dos parámetros: la fugacidad μ y la temperatura T . Como se asume en la simulación que la transacción es proporcional al dinero que tiene el comprador, de tal manera que el intercambio está dado por

$$\Delta m = pm_i, \quad (21)$$

donde p es una constante entre 0 y 1 que indica la proporción que el agente i está dispuesto a intercambiar, de forma que el intercambio se esquematiza como

$$[m_i, m_j] \rightarrow [m'_i, m'_j] = [m_i(t) - pm_i(t), m_j(t) + pm_i(t)]. \quad (22)$$

Los resultados muestran que las distribuciones a la que tienden estos intercambios para parámetros entre 0 y 0.5 son funciones Gamma, con ajustes Chi-cuadrado entre 3.79 y 24.26 que son inadecuados. Lo mismo ocurre para fracciones altas del parámetro de intercambio, la distribución es tipo Bose-Einstein, sin embargo para las simulaciones que se hicieron el coeficiente Chi-cuadrado no indica un buen ajuste a estas distribuciones. En resumen, se tiene que los ajustes a distribuciones de Bose-Einstein son apropiadas solo para las fracciones p más altas de dinero y los parámetros, incluida la degeneración, no tienen una forma funcional clara. Por esto, este modelo no es robusto y no es adecuado para análisis posteriores, sin embargo en este trabajo calculamos la cantidad de información y la desigualdad.

2.3.1. Análisis de la entropía en el modelo de Kuznetsov

De la misma forma que se hizo en los modelos anteriores, se hace el cálculo de la entropía para cada tiempo en la simulación, en este caso solo se hace una simulación debido a que el cálculo es costoso para el modelo. Las relaciones se muestran en la figura 2.6. Hay algo curioso en las dos que tienen la mayor fracción p de intercambio: La entropía deja de ser una función monótona. Vemos que para fracciones p hasta el 50%, que son las que no ajustan a distribuciones de Bose-Einstein, la entropía crece hasta un número límite que es el mismo para todas las simulaciones. No obstante, para fracciones de 50%, 60% y 70%, la entropía en el equilibrio es menor, es mas, para 80% y 90% la entropía disminuye lo que es un comportamiento atípico. Así la cantidad de información en las simulaciones parece tener dos

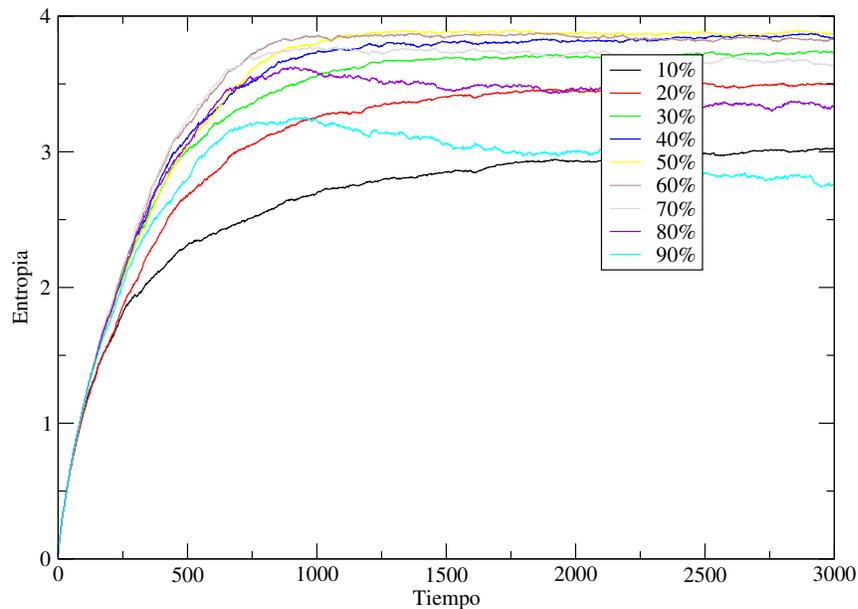


Figura 2.6: Crecimiento de la entropía para los modelos cinéticos de Kuznetsov.

comportamientos distintos, el primero para fracciones pequeñas de p del 10% al 60% y otro para fracciones grandes de p (70% en adelante). En las simulaciones de 10% a 60% la entropía se estabiliza, los índices mas bajos en un tiempo de simulación mucho mayor a 3000, pero para índices mayores a 70% hay un crecimiento hasta un punto en donde la entropía decrece, esto indica que las distribuciones a las que tiende el modelo no son de equilibrio y no tiene sentido analizarlas como se hizo en la anterior sección.

2.3.2. Análisis de la desigualdad en los modelos de Kusmartsev

A pesar de que la curva de Lorenz tiene una forma dada por ecuaciones paramétricas, el hecho de que no existan formas funcionales que relacionen las fracciones de dinero intercambiadas con los parámetros de la distribución hace que no sea posible encontrar una relación para la curva de Lorenz. Sin embargo, como se ve en la gráfica, ésta distribución reproduce índices de Gini tanto para economías con índices de alta desigualdad como para economías con baja desigualdad. Si se hace la relación entre la fracción p

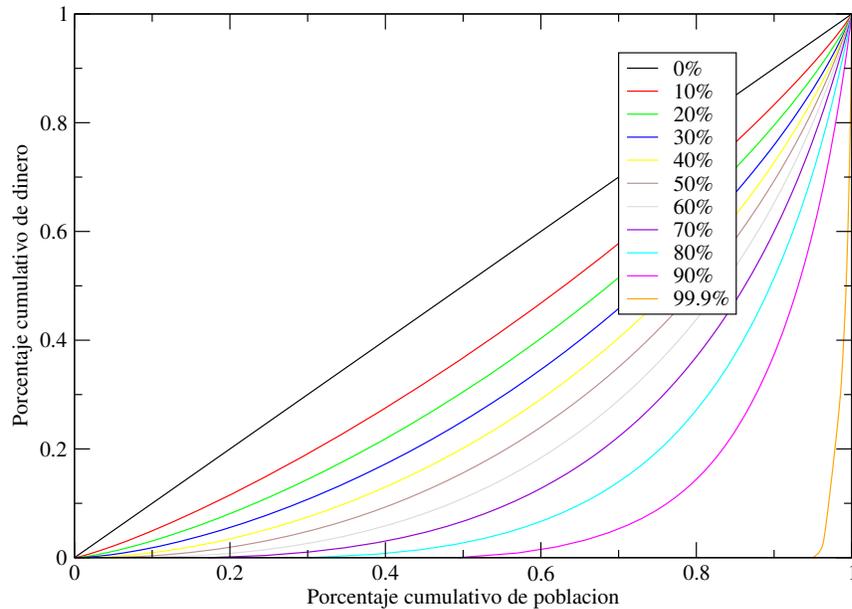


Figura 2.7: Curva de Lorenz para los modelos cinéticos de Kusmartsev.

intercambiada con el índice de Gini, la función es monótona. Cuando aumenta la fracción a intercambiar, también aumenta el índice de desigualdad.

2.4. Modelo Chakraborti-Chakrabarti

Este modelo es el más robusto para investigar el efecto de la propensión al ahorro de agentes en la distribución de equilibrio [1]. Para este estudio se hacen las mismas consideraciones de los modelos anteriores, es decir que se tiene un sistema compuesto por N agentes económicos que intercambian dinero de forma análoga a como las partículas en un gas intercambian energía. Si la propensión al ahorro de los agentes en el sistema es cero, la distribución en el equilibrio toma la forma de Boltzmann Gibbs, es decir se obtienen los resultados del modelo Dragulesku-Yakovenko. En el caso de propensión al ahorro diferente de cero, la dinámica se vuelve cooperativa y la asimetría de la distribución disminuye.

Aquí se considera un modelo de economía cerrada donde el dinero total M es conservado y el número de agentes económicos es fijo. Cada agente económico posee cierta cantidad de dinero. Un agente económico puede intercambiar dinero con otro agente a través de una transacción manteniendo el dinero total de ambos constante. Se asume que cada agente económico ahorra una fracción λ de dinero antes de la

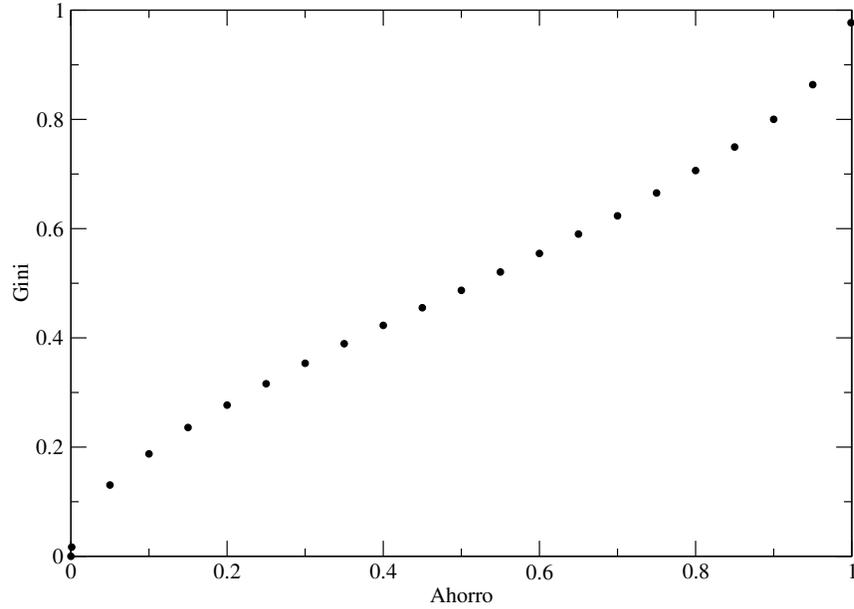


Figura 2.8: Coeficiente de Gini para diferentes parámetros de intercambio para los modelos cinéticos de Kusmartsev.

transacción y el dinero de un agente debe ser siempre positivo, es decir, la deuda no está permitida.

En este modelo la interacción se puede expresar de la siguiente forma [1]

$$[m_i, m_j] \rightarrow [m'_i, m'_j] = [\lambda m_i + \epsilon(1 - \lambda)(m_i + m_j), \lambda m_j + (1 - \epsilon)(1 - \lambda)(m_i + m_j)], \quad (23)$$

que al ser expresada en forma de intercambio [1]

$$[m_i, m_j] \rightarrow [m'_i, m'_j] = [m_i + \Delta m, m_j - \Delta m] \quad (24)$$

se tiene que [1]

$$\Delta m = (1 - \lambda)[\epsilon m_i - (1 - \epsilon)m_j]. \quad (25)$$

Donde ϵ es una variable aleatoria uniformemente distribuida entre 0 y 1 y λ es la fracción de ahorro fijo en el sistema. Los resultados de la simulación ajustan a distribuciones Gamma con un parámetro de ajuste Chi-cuadrado menor a 1 para todos los índices de ahorro excepto los que tienen una propensión de ahorro entre 0.1 y 0.3 que tienen índice Chi-cuadrado entre 2 y 5. Los resultados se muestran en la siguiente figura.

Las distribuciones tienen la forma [29]

$$P_n(m) = a_n m^{n-1} \exp\left[-\frac{nm}{\langle m \rangle}\right], \quad (26)$$

donde los coeficientes están dados por [29]

$$a_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{n}{\langle x \rangle}\right),$$

$$n(\lambda) = 1 + \frac{3\lambda}{1 - \lambda}.$$

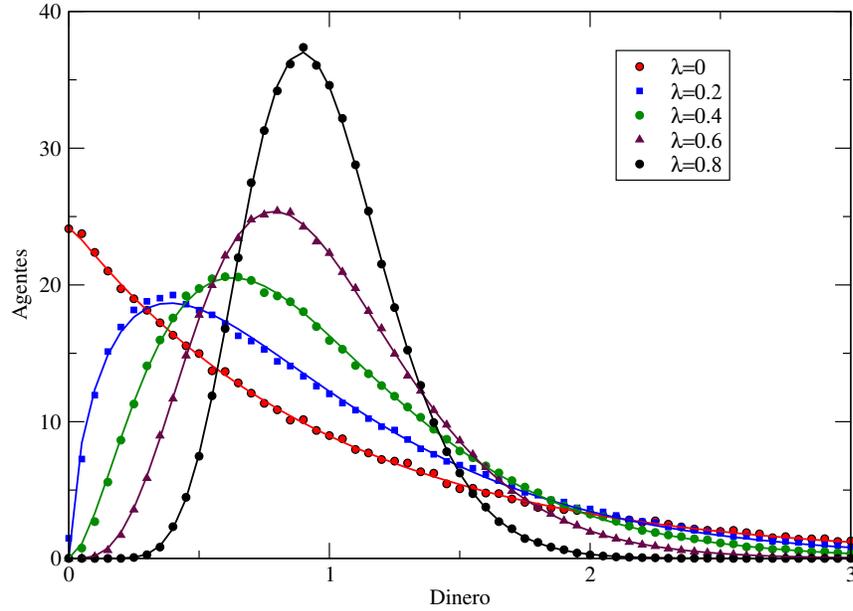


Figura 2.9: Distribuciones de dinero para los modelos cinéticos de Chakrabarti-Chakrabarti

2.4.1. Análisis de la entropía en el modelo de Chakrabarti-Chakrabarti

Al hacer un análisis del crecimiento de la entropía para estas simulaciones se encuentra que para todos los parámetros de propensión al ahorro que la entropía crece hasta el mismo punto, es mas si se calcula la entropía en cada paso de tiempo en el proceso que genera la desigualdad el crecimiento es mas pronunciado para índices de ahorro bajos. Esto quiere decir que la cantidad de información presente en el sistema en equilibrio es independiente del parámetro de propensión al ahorro con el que se haya implementados la simulación, no obstante los sistemas con menor ahorro tienden a llegar mas rápido al equilibrio como muestra la siguiente figura.

2.4.2. Análisis de la desigualdad en los modelos de Chakrabarti-Chakrabarti

Para encontrar la curva de Lorenz reemplazamos 26 en 14 y 15, de forma que las ecuaciones paramétricas para este modelo están dadas por

$$x(r) = \left[\frac{n}{\langle m \rangle} \right]^{1-n} \left[1 - \frac{\Gamma(n, \frac{nr}{\langle m \rangle})}{\Gamma(n)} \right], \quad (27)$$

$$y(r) = \frac{r^n \left[-r E_{-n}(\frac{nr}{\langle m \rangle}) + \langle m \rangle \left(\frac{nr}{\langle m \rangle} \right)^{-n} \Gamma(n) \right]}{\left(\frac{n}{\langle m \rangle} \right)^{-n} \langle m \rangle \Gamma(n)}, \quad (28)$$

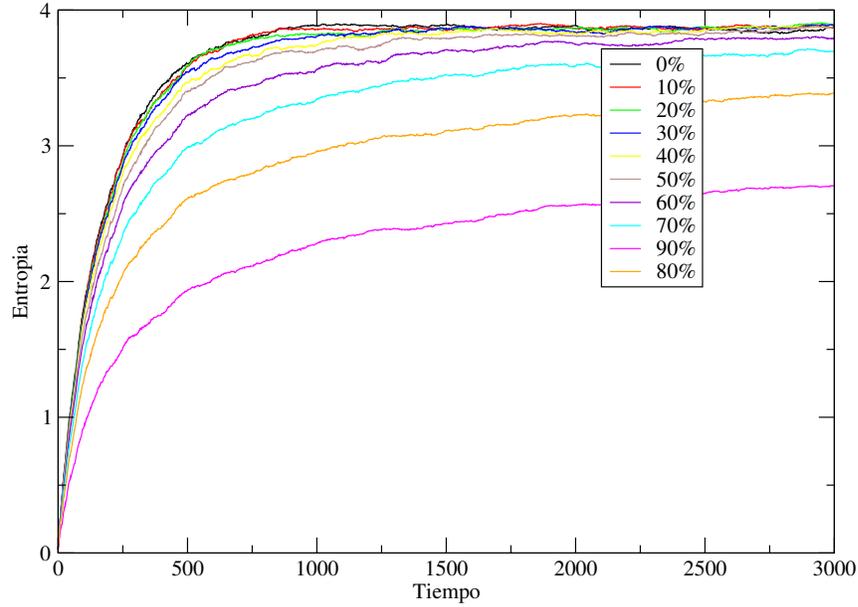


Figura 2.10: Crecimiento de la entropía para el modelo cinético de Chakrabarti-Chakraborti [1].

donde las función Gamma ($\Gamma(x)$), Gamma truncada ($\Gamma(x, a)$) y Exponencial integral ($E_n(x)$) están dadas por

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^{\infty} t^{x-1} \exp[-t] dt, \\ \Gamma(x, a) &= \int_a^{\infty} t^{x-1} \exp[-t] dt, \\ E_n(x) &= \int_1^{\infty} \frac{\exp[-xt]}{t^n} dt.\end{aligned}$$

Si tomamos el promedio de dinero como $\langle m \rangle = 1$ y el parámetro de propensión al ahorro $\lambda = 0$, es decir $n(\lambda) = 1$ y lo reemplazamos en las ecuaciones paramétricas 27 y 28, tenemos

$$x(r) = \left[1 - \frac{\Gamma(1, r)}{\Gamma(1)} \right], \quad (29)$$

$$y(r) = \frac{r [-rE_{-1}(r) + r^{-1}\Gamma(1)]}{\Gamma(1)}. \quad (30)$$

Si se realizan las siguientes sustituciones

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= 1, \\ \Gamma(1, r) &= \exp[-r], \\ E_{-1}(r) &= \frac{\exp[-r](1-r)}{r^2},\end{aligned}$$

Se llega a las ecuaciones para distribuciones exponenciales descritas por las ecuaciones 16 y 17. Los resultados numéricos muestran claramente un área en las que no pueden estar las curvas de Lorenz para diferentes porcentajes de ahorro, ésta área corresponde a coeficientes de Gini menores a 0.5. La relación entre el índice de Gini y el ahorro se muestra en la siguiente gráfica. Los resultados muestran que existe una relación monótona que cambia desde 0.5 para ahorro 0, hasta 0 si la propensión al ahorro es del 100 %.

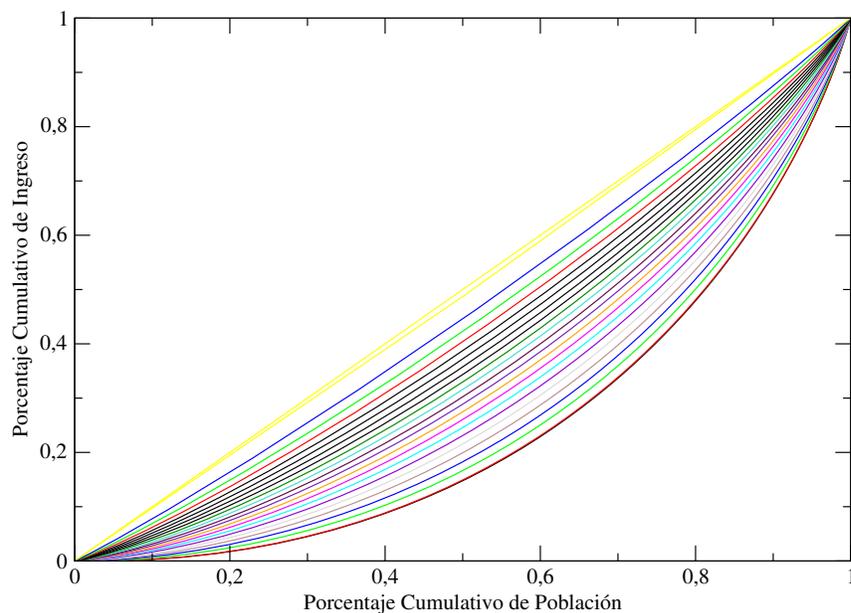


Figura 2.11: Curva de Lorenz en el modelo cinético de Chakrabarti-Chakraborti.[1]

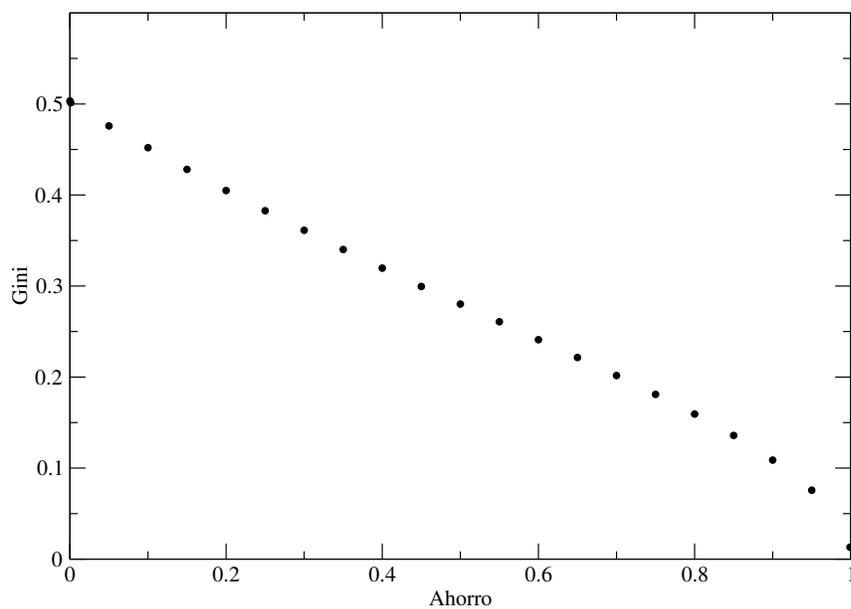


Figura 2.12: Relación de la entre el índice de Gini y el ahorro en los modelos cinéticos de Chakrabarti-Chakraborti [1]

2.5. Modelo cinético de distribución de dinero considerando flujo de agentes en el sistema y con ahorro diferenciado.

Todos los modelos cinéticos de distribución de dinero que han mostrado en las anteriores secciones consideran una economía cerrada, es decir el número de agentes que la conforman es fijo y no hay flujo desde ni hacia el sistema de interés. Sin embargo la cantidad de agentes presentes en un sistema económico

puede variar y se deben estudiar sistemas donde no se conserve el número de agentes usando los modelos cinéticos de distribución de dinero. La mejor herramienta para analizar este tipo de sistemas es la hipótesis ergódica, la cual considera que “el promedio en el tiempo y el promedio sobre el ensamble para un sistema a una energía determinada es idéntico si durante la trayectoria en el espacio de fase el sistema pasa a través de cada punto en la superficie de energía un número igual de veces” [24]. Trasladada esta hipótesis a los sistemas complejos, si queremos analizar distribuciones de dinero donde exista flujo de agentes dentro y fuera del sistema a través del tiempo, al ser la distribución un promedio estadístico, estudiar el promedio en el tiempo es equivalente a estudiar el promedio sobre un ensamble que pase por los diferentes estados. Es decir, si queremos estudiar el flujo de agentes debemos considerar un ensamble de distribuciones de dinero que se caractericen por tener un número diferente de agentes, los resultados se promedian para encontrar la distribución de un sistema caracterizado por el flujo de agentes en el tiempo, es decir un sistema abierto.

Para la simulación se fija el número máximo de agentes que tiene el sistema N , el tiempo de cada simulación t y el número de veces que se repite la simulación T . Luego se escoge aleatoriamente el número de agentes en el sistema y se le asigna una cantidad de dinero. Con el sistema así construido, se eligen dos agentes al azar que intercambian dinero según una regla de transacción y se repite este proceso t veces. Luego se clasifican los agentes en intervalos de acuerdo al dinero que tengan al finalizar las transacciones. El proceso se repite T veces con una cantidad diferente de agentes y se clasifican de la misma forma en los mismos intervalos. Al finalizar la simulación se promedia el número de elementos en cada intervalo de los histogramas y se muestra la distribución.

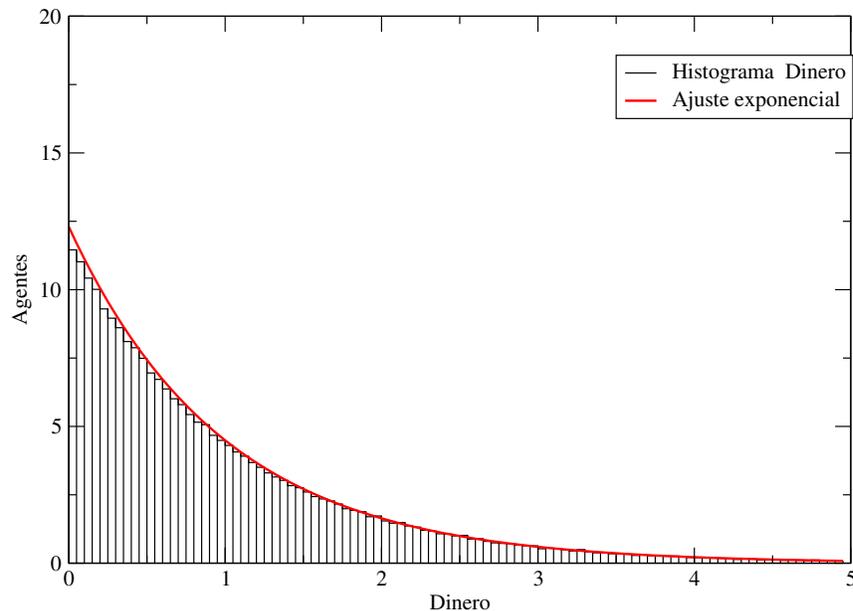


Figura 2.13: Distribución de dinero para un sistema abierto.

El resultado es lo esperado, la distribución en el equilibrio corresponde a una función exponencial como se presenta en el capítulo 8 de la Mecánica Estadística de Greiner [24], donde estudian sistemas abiertos en los que las partículas y la energía son intercambiada con el entorno. Este resultado indica

que los modelos cinéticos de distribución de dinero sin ahorro producen distribuciones semejantes, si se considera el sistema cerrado o el sistema abierto.

Estudiados los sistemas donde el número de agentes es variable queda por analizar cómo en la propensión al ahorro diferenciada afecta la distribución. Aquí consideramos 5 grupos de agentes, cada uno con una propensión al ahorro diferente y los ponemos a interactuar hasta que alcanzan una distribución estacionaria. El objetivo es verificar si la forma de las distribuciones cambia con un entorno donde otros agentes tienen un índice de ahorro diferente, o si por el contrario el hecho que los interactúen con otros con diferente parámetro de propensión al ahorro no cambia su distribución.

La simulación considera un sistema de 5000 agentes que compiten por 5000 unidades de dinero, de tal forma que este conjunto de agentes se dividen en cinco grupos, los cuales poseen diferentes parámetros de propensión al ahorro. Se escogen las condiciones iniciales de tal forma que los agentes tengan todos el mismo dinero, de modo que la función de distribución sea un delta de Dirac ubicado en $m = 1$. En cada paso de tiempo se escoge aleatoriamente dos agentes con dinero m_i y m_j caracterizados por tener una propensión al ahorro λ_i y λ_j respectivamente. La regla de intercambio está dada por el siguiente diagrama:

$$[m_i, m_j] \longrightarrow [m'_i, m'_j] = [m_i - \epsilon(1 - \lambda_i)m_i, m_j + \epsilon(1 - \lambda_i)m_i], \quad (31)$$

donde m'_i y m'_j representan el dinero con el que quedan los agentes i y j después de la transacción. Para implementar este algoritmo se coloca una matriz de 1000×5 , donde cada posición representa el dinero de un agente en el sistema. Cada una de las 5 columnas representan un grupo caracterizado por un diferente parámetro de propensión al ahorro. Luego, se escogen aleatoriamente dos agentes, se intercambia una parte del dinero que no ahorran y se repite este procedimiento hasta llegar a una distribución de equilibrio. Verificamos la consistencia de la simulación asignando el mismo parámetro de propensión al ahorro a todos los agentes y obteniendo los resultados ya presentados del modelo de Chakrabarti-Chakraborti. Luego se procede a asignar diferentes valores al parámetro de propensión al ahorro de cada grupo económico. La simulación se hace con grupos que tienen los siguientes valores del parámetro de propensión al ahorro: 0%, 20%, 40%, 60% y 80% los resultados se muestran en la siguiente gráfica.

En esta gráfica vemos cómo, a pesar de la interacción que tienen los entre diferentes grupos económicos, las distribuciones de dinero son dependiente del parámetro de propensión al ahorro asignado. Lo que indica esto es que los agentes en un sistema económico se comportan de acuerdo al porcentaje del dinero ahorrado y no cambian su distribución por el hecho de intercambiar con agentes externos. Sin embargo si comparamos los índices de desigualdad con los índices de ahorro de grupos económicos en países como Estados Unidos, China, Filipinas, México, Colombia o Alemania no se tiene correlación. La razón es que la definición de ahorro en estos modelos de distribución de dinero no es la mismo que el ahorro en economía.

2.6. Un nuevo modelo de distribución

Uno de los principales problemas en los modelos cinéticos de distribución de dinero es que no existe modelos robustos que generen índices de Gini mayores a 0.5 y ajuste a una sola distribución. Así, se

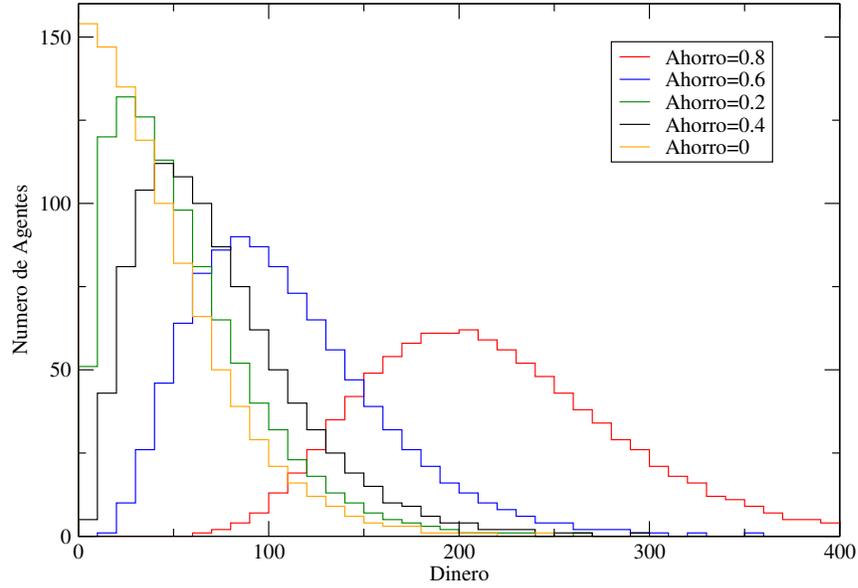


Figura 2.14: Distribución de dinero de los cinco grupos con diferente parámetro de propensión al ahorro.

propone un modelo donde los agentes se juegan una fracción p fija del dinero de ambos es decir

$$[m_i, m_j] \rightarrow [m'_i, m'_j] = \left[\frac{p(m_i + m_j)}{2}, (2-p)\frac{(m_i + m_j)}{2} \right],$$

donde la fracción p está entre cero y uno. Si expresamos el transacción en términos de una fracción intercambiada $[m_i, m_j] \rightarrow [m'_i, m'_j] = [m_i + \Delta m, m_j - \Delta m]$, tenemos

$$\Delta m = \left[\frac{pm_i}{2} - (2-p)\frac{m_j}{2} \right].$$

Para este modelo, las distribuciones de equilibrio son cercanas a distribuciones Log-normales. Sin embargo para parámetros cercanos a 1 se pierde la forma Log-normal y no se ajusta a ninguna distribución conocida. Los resultados se muestran en la siguiente gráfica. Si se hace un análisis de las curvas de Lorenz para este modelo se observa que no restringe el dominio del coeficiente de Gini, con lo cual se soluciona el principal problema que tienen las distribuciones con propensión al ahorro, y específicamente cuando se hace un análisis de los efectos de los impuestos en la distribución de dinero [53]. En la siguiente tabla se relaciona el índice de Gini con los diferentes valores del parámetro p y con los valores de ajuste a una distribución Log-normal.

A pesar de poder describir economías con índices de Gini mas grandes que 0.5, no se encontró la relación entre el parámetro p de este modelo y algún índice de economía, objetivo que sí logran los modelos previamente mostrados. Además, los ajustes a distribuciones Log-normales no son buenos para todos los valores del parámetro p . Es más, se pierde la forma de esta distribución para algunos valores de p . Para acercarnos mas a la realidad, debemos construir un modelo de distribución de riqueza que no solo tenga en cuenta intercambios de dinero sino intercambios de algún bien activo. Este modelo se presenta en el siguiente capítulo.

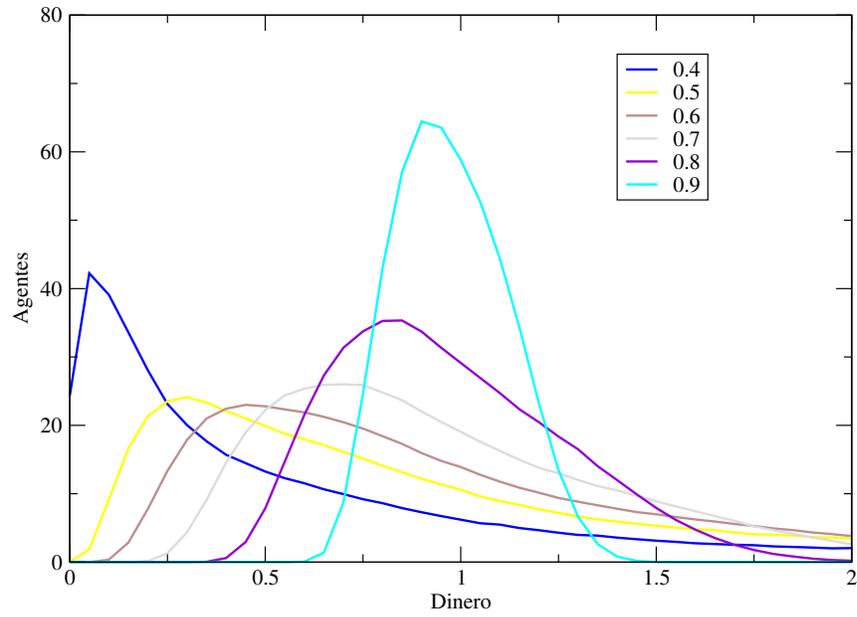


Tabla 2.1: Relación de índice de Gini y parametros Chi-cuadrado para los ajustes a las distribuciones Log-Normal.

Parámetro p	Chi-Cuadrado	Índice de Gini
0.1	7.69	0.7761
0.20	11.71	0.6724
0.30	9.16	0.5891
0.40	7.03	0.5106
0.50	11.25	0.4273
0.60	19.23	0.3389
0.70	30.51	0.2517
0.80	51.56	0.1667
0.90	107.45	0.0830

Los modelos cinéticos de distribución de dinero se limitan a distribuir una cantidad conservada (dinero) en el sistema entre los agentes que los constituyen y que interactúan por medio de intercambios. Así, a pesar de los resultados, estos modelos son restringidos y resulta necesario diseñar modelos que describan otros aspectos de la realidad. En este capítulo se estudia un modelo cinético de distribución de riqueza, donde los agentes intercambian dinero por bienes activos en cada paso de tiempo. En estas simulaciones se observa que las distribuciones de dinero, bienes y riqueza siguen una ley de potencias en la parte derecha de la distribución y por esta razón la desigualdad puede ser medida mediante el coeficiente de Pareto.

CAPÍTULO 3

MODELO CINÉTICO DE DISTRIBUCIÓN DE RIQUEZA

Estudiados los modelos de intercambio de dinero, se puede considerar un sistema que describa otros aspectos de la realidad, teniendo en cuenta además de los intercambios de dinero también intercambios de bienes activos. Estos modelos ya han sido estudiados en el marco de los modelos cinéticos de distribución, uno de ellos considerando un precio fijo para una mercancía [34] y otro que considera únicamente intercambio de un tipo de bien y que incluye impuestos en cada transacción. Sin embargo, ninguno de los anteriores modelos ha considerado el cambio que sufre el precio de un bien por la oferta o demanda de éste, ni tampoco ha resaltado la relación que hay entre las distribuciones de dinero, bienes y riqueza.

Así el objetivo de esta parte del trabajo es diseñar un modelo económico donde los agentes intercambien con su dinero un tipo de bien activo y en donde, a diferencia de los casos anteriores, el precio del bien cambie de acuerdo a las características del mercado y los agentes. Para esto necesitamos apoyarnos en métodos que modelen sistemas sociales, en particular modelos donde los agentes interactúen con otros agentes del sistema y adapten sus comportamientos para adaptarse al entorno. La herramienta que se usarán para este trabajo son los llamados modelos basados en agentes, que son descritos a continuación.

3.1. Simulación y modelos basados en agentes.

Como se dijo anteriormente, el modelado de sistemas basados en agentes es una herramienta relativamente nueva usada para modelar sistemas complejos compuestos de agentes que interactúan y adaptan sus comportamientos a los requisitos del sistema. En estos modelos las reglas e interacciones influyen en el comportamiento de los agentes y conducen a que el sistema se auto-organice, es decir que del sistema emerjan patrones, estructuras y comportamientos que no son explícitamente programados. Se puede tomar como ejemplos a los modelos cinéticos de distribución de dinero estudiados en el capítulo anterior, donde los comportamientos emergentes son índices de desigualdad y la entropía. Para construir estos modelos se deben tener tres elementos: Un conjunto de agentes con sus atributos y comportamientos, un conjunto de

relaciones o métodos de interacción y un entorno con el que el agente interactúe [30]. Así, usaremos esta herramienta para modelar un sistema complejo donde los agentes poseen, además de dinero, bienes que pueden intercambiar con otros agentes del sistema. Esta interacción hace que el agente se relacione con el sistema de muchas formas, una de las que vamos a usar aquí está relacionada con la oferta y demanda que genera cambios en el precio de la mercancía.

En este sistema, las decisiones que toma un agente debe ser acordes a sus características. De esta forma sus atributos e interacciones deben estar relacionadas con la situación del agente respecto al sistema. Los comportamientos de estos agentes serán modelados por medio de implicaciones (reglas if-then). Sin embargo, puede extenderse este modelo si se consideran algunos componentes adaptativos propios de un sistema económico, donde los agentes son capaces de aprender y cambiar su entorno en respuesta a sus experiencias. Además, en este modelo se considerarán dos tipo de atributos: los estáticos como la propensión al ahorro, que en los anteriores modelos no cambia con el tiempo, y dinámicos como el dinero y la cantidad de bienes, los cuales cambian con el tiempo de acuerdo a reglas establecidas.

Como se ha visto anteriormente, las interacciones entre agentes del sistema tienen reglas bien definidas: intercambios de una fracción aleatoria del dinero del sistema, intercambio de una fracción fija de dinero, intercambio con ahorro, etc. Sin embargo, se puede tener en cuenta aspectos adicionales, por ejemplo en una economía se intercambian bienes, además de servicios. Esto hace que los modelos anteriores sólo tengan en cuenta el intercambio de dinero por servicios y no el intercambio de bienes activos por dinero, que a la final hace parte de la riqueza de un agente económico. Así debemos plantear otros protocolos de interacción, como intercambios de bienes o cambios en el precio del bien para estudiar la forma de la distribución de riqueza.

Las anteriores consideraciones permiten que un sistema económico modelado por medio de una simulación basada en agentes sea visto como el estudio de un sistema complejo donde existen componentes autónomos interactuantes: Los agentes. El hecho que existan variaciones de precio de los bienes activos, o que la compra del bien dependa del dinero disponible por el agente, hace que éste sea un sistema complejo adaptativo, es decir los agentes se adecúen al estado del sistema. De esta manera, el objetivo de esta parte del trabajo será modelar un sistema donde se distribuya la riqueza y se identifiquen fenómenos emergentes o de auto-organización del sistema.

3.2. Modelo de distribución de riqueza

Los estudios mostrados de distribución de dinero se apoyan en la teoría cinética de gases y desarrollan el modelo a partir de esta analogía. Sin embargo muchas veces estos modelos consideran agentes homogéneos que no se adaptan ni siguen las reglas de cambio en un sistema económico. Muchas veces estas reglas hacen que la riqueza en una economía no sea una cantidad conservada y dependa del valor actual de los bienes que posee el agente económico y del mismo valor del dinero. De hecho, los modelos no han tenido en cuenta el flujo real de dinero en una economía donde existen intercambios de bienes y servicios, y producto de esos intercambios el índice de precios de bienes cambia aleatoriamente.

En este modelo consideramos un sistema económico cerrado que consiste en $N \gg 1$ agentes que intercambian con su dinero un solo tipo de bien activo, de tal forma que en cada paso de tiempo al agente,

dependiendo del dinero que tenga y de la propensión al ahorro, le sea posible intercambiar bienes con otros individuos del sistema. Así, los agentes se caracterizan por tener riqueza w_i que es igual a la suma de el dinero que tiene el agente mas lo que representa en dinero la cantidad de bienes que tiene, es decir

$$w_i = m_i + p(t)s_i, \quad (1)$$

donde m_i es el dinero del agente i , $p(t)$ es el precio del bien activo en el tiempo t y s_i es el número de bienes activos que tiene el i -ésimo agente.

Para el intercambio se escoge aleatoriamente en el sistema dos agentes i y j con riqueza w_i y w_j respectivamente y se elige aleatoriamente un vendedor y un comprador del bien. En este intercambio, el agente i al reconocer la cantidad de bienes que tiene el agente j , adapta su comportamiento al entorno y por medio de una regla if-then, el agente i compra una cantidad de bienes al agente j que es proporcional al dinero que no esté ahorrando e inversamente proporcional al precio que se ha fijado en el mercado, es decir que entre más dinero esté dispuesto a intercambiar los agentes económicos tienden a comprar más bienes y entre mayor sea el precio del bien el agente tiende a comprar menos bienes. Estos comportamiento se pueden modelar matemáticamente considerando tres atributos para los agentes del sistema: El ahorro que es estático; el dinero y la cantidad de bienes activos, que son dinámicos.

Si la cantidad de bienes a intercambiar está dada por Δs y el precio del bien en el mercado es $p(t)$ se pueden esquematizar los intercambios de la siguiente forma

$$[m_i, m_j] \rightarrow [m'_i, m'_j] = [m_i - p(t)\Delta s, m_j + p(t)\Delta s], \quad (2)$$

$$[s_i, s_j] \rightarrow [s'_i, s'_j] = [s_i + \Delta s, s_j - \Delta s], \quad (3)$$

de manera que estos intercambios son las reglas que describen la venta de un producto del agente j al agente i . Una transacción de este tipo indica que la cantidad de dinero antes y después no es conservada localmente, ya que el precio cambia aleatoriamente. Las variables que sí se conservan son la cantidad total de dinero y el número de bienes activos en el sistema. El intercambio se realiza solo con la condición que el agente i tenga suficiente dinero para comprar bienes activos (por ejemplo, acciones) al agente j . De hecho, el agente i establece la cantidad de bienes activos que quiere intercambiar. Si el agente j no tiene la suficiente cantidad de bienes no se realiza la transacción. El procedimiento utilizado para simular este sistema se puede sintetizar en los siguientes pasos:

- 1 Se toma un sistema complejo con $N \gg 1$ agentes, con una cantidad total de dinero M . La cantidad promedio por agente es $\bar{m} = \frac{M}{N}$ y una cantidad S de mercancía con $\bar{s} = \frac{S}{N}$.
- 2 Sin pérdida de generalidad (no es restrictiva) en el tiempo inicial se le asigna a cada uno de los N agentes la misma cantidad de dinero igual a \bar{m} y la misma cantidad de bienes \bar{s} , es decir el sistema complejo comienza con todos los agentes teniendo la misma cantidad de dinero y de bienes.
- 3 Se selecciona aleatoriamente entre los N agentes dos agentes rotulados con i y j .

4 Se establece la cantidad de dinero que el agente i está dispuesta a intercambiar $\Delta m = (1 - \lambda)(m_i - \epsilon(m_i + m_j))$, donde λ es el parámetro de propensión al ahorro constante y que es igual para todos los agentes, y ϵ una variable aleatoria entre 0 y 1.

5 Se establece la cantidad de bienes activos a intercambiar igual al valor entero de la relación entre la cantidad de dinero dispuesta a intercambiar y el precio de los bienes activos, es decir

$$\Delta s = \text{Int} \left\lfloor \left(\frac{\Delta m}{p(t)} \right) \right\rfloor. \quad (4)$$

6 Se evalúan las condiciones para el intercambio: El dinero $m_i \geq \Delta m$ y $s_j \geq \Delta s$

7 Si se cumplen las anteriores condiciones entonces se intercambia dinero por bienes activos de la forma (reglas if-then):

$$[m_i, m_j] \rightarrow [m'_i, m'_j] = [m_i - p(t)\Delta s, m_j + p(t)\Delta s], \quad (5)$$

$$[s_i, s_j] \rightarrow [s'_i, s'_j] = [s_i + \Delta s, s_j - \Delta s].. \quad (6)$$

8 Producto de la transacción, para todas las simulaciones, el precio del bien activo cambia siguiendo una distribución normal con media 0 y desviación 0.0001.

9 Se repiten los pasos 3 a 8 muchas veces usando las condiciones de frontera

$$p(m < 0) = 0; p(s < 0) = 0 \quad (7)$$

indicando que en sistema no es permitido tener dinero negativo, ni un número de bienes negativo.

De esta forma se hace una simulación de un sistema donde se intercambia un solo tipo de bien activo y en donde el estado de los agentes depende de dos variables: el dinero y la cantidad de bienes activos. Los resultados de esta simulación se muestran a continuación.

3.3. Resultados y análisis

Se implementó esta simulación en el programa $C++$. El sistema consta de 2000 agentes que interactúan aleatoriamente entre pares 1×10^6 veces. En cada simulación, se toman datos de dinero y bienes de cada agente y del precio final del bien activo. Las simulaciones se repiten 1×10^3 veces para suavizar las distribuciones finales. Respecto a las condiciones iniciales, todos los agentes comienzan la simulación con un dinero igual a 0.5 unidades monetarias y una cantidad de 500 bienes activos. El precio inicial del bien activo se fijó en 0.0001 y cambia en cada transacción de acuerdo a una distribución normal. Se hicieron simulaciones para diferentes índices de ahorro.

Los resultados muestran distribuciones de ley de potencia (Pareto) para individuos con número de bienes y riqueza altos, de tal forma que la distribución tiene la forma

$$f(x) \propto x^{-1-\alpha}. \quad (8)$$

Las distribuciones de bienes y riqueza muestran una tendencia a seguir esta ley de potencias, sin embargo el dinero no muestra esta distribución para todos los índices de ahorro. La gráfica que muestra estas distribuciones se muestra en la figura 3.3. En las gráficas se pueden ver las distribuciones de dinero, bienes

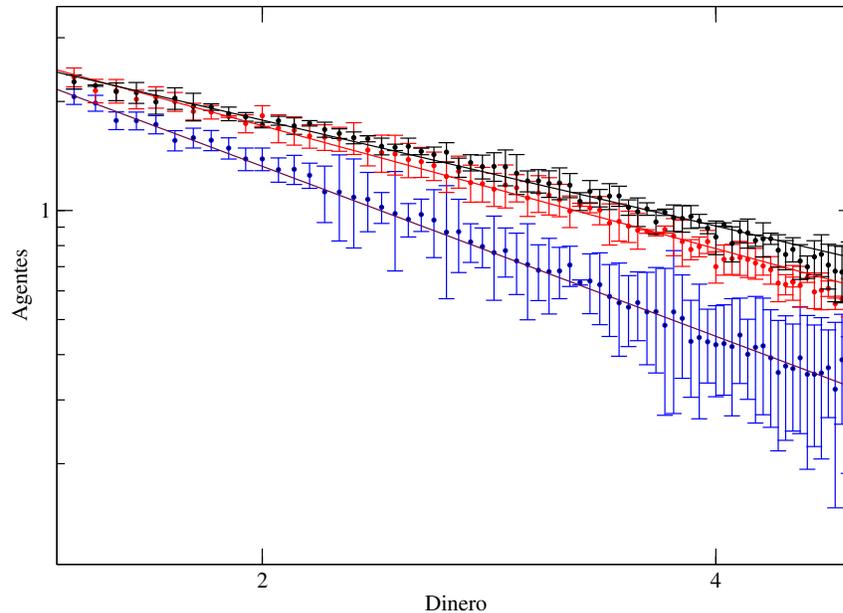


Figura 3.1: Distribuciones de riqueza, bienes y dinero para el modelo cinético de intercambio de bienes.

activos y riqueza calculadas desde la simulación para una propensión al ahorro de 40 %. Las distribuciones de riqueza y bienes se ajustan adecuadamente para todos los valores de ahorro. Sin embargo, se pierde el comportamiento de ley de potencias para ahorros mayores a 40 %. Si el ahorro aumenta, el exponente α de Pareto disminuye, siendo éste el comportamiento esperado, ya que se está usando el mismo intercambio de dinero que tienen el modelo de Chakraborti-Chakrabarti y, al ser la distribución más simétrica, entre más ahorro se tenga, la función de distribución disminuye más rápido. De esta forma podemos observar en la siguiente gráfica la dependencia del exponente de Pareto para los diferentes parámetros de propensión al ahorro. Esta gráfica muestra que la relación entre el parámetro de propensión al ahorro y el coeficiente de Pareto es inversa, lo cual se debe a que las distribuciones tienen un sesgo menor para parámetros de propensión al ahorro grandes, como lo evidencia el trabajo de Chakraborti-Chakrabarti. Este resultado parece no estar relacionado con las distribuciones de dinero, sin embargo no solo está relacionado sino se evidencia claramente que el coeficiente de Pareto es un índice del grado de concentración de ingreso que tiene el comportamiento inverso del coeficiente de Gini, “si el coeficiente es alto la estructura de la distribución será menos desigual y si el coeficiente es bajo las desigualdades serán más acentuadas” [46]. El anterior resultado es nuevo para los modelos cinéticos de distribución de riqueza.

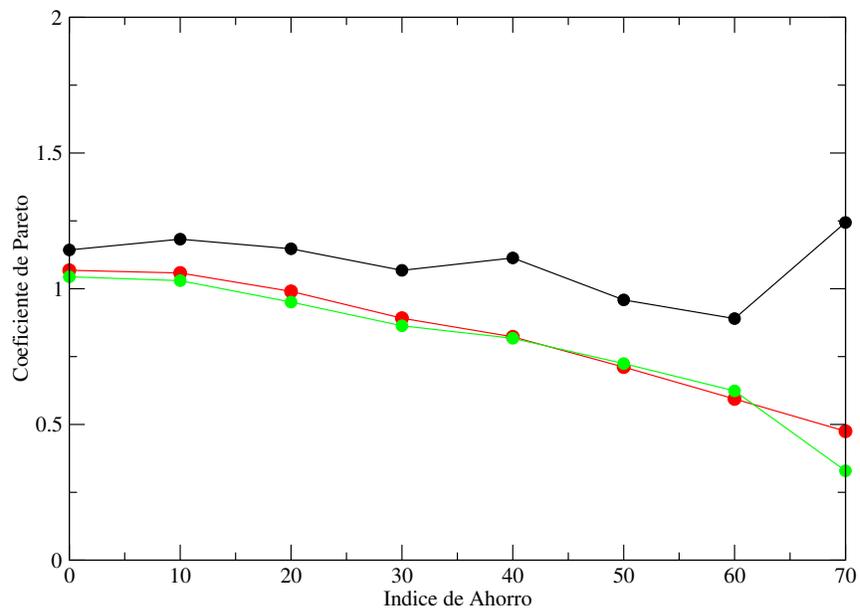


Figura 3.2: Relación entre el coeficiente de Pareto y el superávit para el modelo cinético de intercambio de bienes

Todos los modelos que describen sistemas complejos están fundamentados en el estudio de la interacción entre los elementos constituyentes. La solución al oscilador mecánico cuántico inspiró un modelo de juguete que usa los operadores creación y destrucción para aproximarse al comportamiento del mercado de acciones. En este capítulo adaptamos el modelo de acciones a la economía y desarrollamos en detalle una aproximación basada en operadores creación y destrucción de un mercado económico donde dos agentes intercambian dinero por bienes activos.

CAPÍTULO 4

MODELO OPERATORIAL DE DISTRIBUCIÓN DE BIENES ACTIVOS

Recientes desarrollos en la física teórica se han encaminado al análisis de sistemas complejos (económicos, financieros y sociales) utilizando herramientas propias de la mecánica cuántica, la mecánica estadística y la termodinámica. Una gran parte de los trabajos en economía han sido enfocados al estudio de las distribuciones de riqueza, mientras que los estudios de sistemas financieros han sido dirigidos a la descripción del comportamiento temporal de los mercados de acciones usando métodos estadísticos [54]. El éxito que han tenido las contribuciones de estos trabajos ha dado como resultado una nueva rama propia de la física llamada econofísica [39]. Actualmente, para analizar sistemas complejos se ha adoptado una estrategia inspirada en la naturaleza de muchos cuerpos del mercado de acciones, lo que sugiere el uso de herramientas de la mecánica cuántica y aproximaciones operatoriales como las inspiradas en el modelo del oscilador armónico mecánico-cuántico[35, 36].

En física, la mecánica cuántica se encarga de estudiar los sistemas microscópicos con pocos grados de libertad, y en un grado más complejo modela sistemas de muchos grados de libertad ayudado por métodos computacionales o estadísticos. La mecánica clásica es determinista y el estado de un sistema se encuentra aplicando la Segunda Ley de Newton. En cambio, en mecánica cuántica el estado de un sistema está representado por la función de onda que se encuentra resolviendo la ecuación de Schrödinger asociada y nos indica la probabilidad de encontrar una partícula en cierto estado de velocidad, posición, energía, etc [55]. Por ejemplo, en el oscilador armónico clásico, al aplicar la Segunda Ley de Newton, donde la energía potencial es proporcional al cuadrado de la distancia al punto de equilibrio, las funciones de estado para la posición de la partícula son combinaciones lineales de senos y cosenos, mientras que en mecánica cuántica, usando esa misma forma de potencial, el estado del sistema o funciones propias del sistema se encuentran definiendo operadores creación y destrucción. Estos operadores cumplen con ciertas reglas de conmutación canónicas que ayudan a encontrar los vectores y valores propios de energía usando un procedimiento algebraico. El Hamiltoniano de este sistema puede ser escrito como la suma de la energía

cinética y un potencial que depende del cuadrado de la posición. En unidades convenientes tenemos

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2). \quad (1)$$

La naturaleza cuántica del sistema es reflejada en el hecho que p no conmuta con x , lo cual indica que estos observables representados como operadores satisfacen la regla de conmutación

$$[x, p] = xp - px = iI. \quad (2)$$

Donde I es la matriz identidad. Definiendo respectivamente los operadores creación y destrucción

$$a := \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip), \quad (3)$$

y su adjunto

$$a^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}(x - ip), \quad (4)$$

de tal forma que se define N como

$$N := a^\dagger a, \quad (5)$$

y podemos reescribir el Hamiltoniano como

$$H = N + \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Estos operadores a^\dagger y a suben y bajan en un cuanto el estado de energía del oscilador armónico, pero al aplicar el operador bajada o operador destrucción repetidamente, eventualmente alcanzará una energía menor a cero que no existe. Esto implica que existe un estado base φ_0 , que es un vector de H aniquilado por el operador a , es decir

$$a\varphi_0 = 0, \quad (7)$$

de tal forma que para generar los llamados estados excitados se aplica sucesivamente el operador creación al estado base

$$\varphi_n := \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n \varphi_0, \text{ con } n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Con lo anterior, la ecuación de Schrödinger es expresada de una forma mucho mas amable

$$H\varphi_n = (n + 1/2)\varphi_n. \quad (9)$$

En lo anterior, la clave está en la regla de conmutación entre los operadores, que se deduce fácilmente a partir de la definición

$$[a, a^\dagger] = I. \quad (10)$$

Ahora, si tiene un oscilador con mas dimensiones, las reglas de conmutación canónicas cambian

$$[a_l, a_n^\dagger] = I\delta_{l,n}, \text{ } l, n = 1, 2, 3, \dots, L, \quad (11)$$

y se tienen L modos independientes. Es evidente que en muchos problemas de física clásica y cuántica son usados los osciladores L dimensionales mediante esquemas perturbativos. Sin embargo, en física hay que considerar dos tipo de partículas, que obedecen a reglas de conmutación diferentes: bosones y fermiones. Los bosones son partículas con espín entero como los fotones. Los fermiones son partículas con espín semientero, tal como los electrones. La diferencia se refleja en el tipo de funciones de onda, ya que puede ser simétrica (la de los bosones) o antisimétrica (la de los fermiones) bajo el intercambio de un par de partículas. La consecuencia más importante de este hecho es que los fermiones deben cumplir el principio de exclusión de Pauli, es decir no pueden existir dos fermiones con exactamente los mismos números cuánticos.

Así, los fermiones deben satisfacer reglas diferentes pero análogas a las anteriores. Estas reglas se llaman relaciones de anti-conmutación y establecen que los fermiones son aniquilados y creados por operadores similares b_k y b_k^\dagger , que satisfacen reglas diferentes.

$$\{b_l, b_k^\dagger\} = b_l b_k^\dagger + b_k^\dagger b_l = I\delta_{l,k} \quad (12)$$

$$\{b_l, b_k\} = \{b_l^\dagger, b_k^\dagger\} = 0, l, k = 1, 2, 3, \dots L. \quad (13)$$

Con lo anterior, se puede lograr que actúe mas de una vez el operador a_l o a_l^\dagger , mientras que solo puede actuar una vez los operadores b_l y b_l^\dagger .

Estas ideas sirven para modelar sistemas que tengan comportamientos parecidos a los que describen los operadores creación y aniquilación. Por ejemplo sistemas financieros donde el precio de las acciones sube y baja dependiendo del estado del mercado. Esta aproximación es válida, ya que el precio de una acción no cambia continuamente, sino que lo hace en múltiplos enteros de una unidad monetaria que se puede definir como un cuanto de dinero [35]. Bagarello desarrolla, bajo este marco, un modelo de juguete inspirado en un gas de bosones interactuantes. A pesar de que este modelo es financiero y considera acciones y dinero en los intercambios, el método se puede extender a sistemas económicos en donde se intercambien bienes y dinero en el sistema.

En este capítulo desarrollaremos en detalle el modelo financiero más simple de Bagarello, pero enfocado a sistemas económicos, ya que los resultados obtenidos están relacionados con las preferencias que tiene un agente a adquirir un bien. Primero se establecen las principales suposiciones del modelo, luego se construye el Hamiltoniano definiendo los operadores creación y destrucción, y finalmente se encuentran los valores y vectores propios de la ecuación de Heisenberg para un sistema compuesto por dos agentes que intercambian un solo tipo de bien.

4.1. Descripción del modelo

Vamos a considerar un sistema económico que consiste de L agentes que intercambian un solo tipo de bien con los otros agentes del sistema. En esta aproximación se adopta una descripción de bosones interactuantes, ya que más de un agente puede tener la misma cantidad de bienes y la misma cantidad de dinero. El modelo es de naturaleza discreta, ya que los bienes se intercambian en un múltiplo entero de una mínima cantidad llamada quantum de dinero. Además, el sistema es cerrado, es decir el número de bienes y dinero total del sistema es fijo. De esta forma usamos ideas de la mecánica cuántica para

construir un modelo de juguete que simule el comportamiento de una economía de intercambio de bienes. En este modelo, por simplicidad solo un tipo de bien es intercambiado y el número total de bienes en el sistema no cambia con el tiempo. Como ocurre en los modelos anteriores, el sistema es análogo a un gas de partículas que interactúan conservando su energía, de hecho existe una mínima cantidad de dinero llamada la unidad monetaria.

Este modelo de economía simplificada va a estar soportado en las siguientes suposiciones:

- i. El mercado consiste en L agentes intercambiando un solo tipo de bien.
- ii. El todo el sistema, el número total de bienes es fijo en el tiempo.
- iii. Un agente puede intercambiar bienes solo con otro agente, es decir los agentes sienten una interacción de dos cuerpos.
- iv. Los agentes solo pueden comprar o vender un bien en una transacción.
- iv. Existe un único precio del bien fijado por el mercado.
- v. El precio del bien cambia en pasos discretos múltiplo de una unidad monetaria dada.
- vi. Cada agente tiene una gran cantidad de dinero que puede utilizar para comprar bienes.

Con respecto a las suposiciones, como en los anteriores modelos la primera considera un sistema compuesto de agentes que intercambian bienes. La segunda indica que la cantidad de bienes es una cantidad conservada en el sistema. La tercera es una suposición que viene de la física y es una simplificación típica de en la teoría de muchos cuerpos. La cuarta y la quinta son dos suposiciones que simplifican el modelo y parecerían ser las mas restrictivas, sin embargo podemos ver propiedades interesantes al suponer que la economía solo se compone de un tipo de bien.

Para describir el comportamiento de este sistema vamos a definir el operador Hamiltoniano y describir la evolución en el tiempo del modelo debido a la interacción entre los agentes. Para esto se va a usar la representación de Heisenberg, en la cual la evolución temporal del observable $X \in \mathfrak{A}$ está dado por

$$X(t) = e^{iHt} X e^{-iHt}, \quad (14)$$

o equivalente, si se soluciona la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [e^{iHt} X e^{-iHt}] \quad (15)$$

$$= iH e^{iHt} X e^{-iHt} - i e^{iHt} X H e^{-iHt} = i e^{iHt} H X e^{-iHt} - i e^{iHt} X H e^{-iHt} \quad (16)$$

$$= i e^{iHt} [H, X] e^{-iHt} = i [H, X(t)]. \quad (17)$$

Entonces, a partir de esta ecuación podemos tomar el número de bienes de un agente como un observable y calcular su evolución en el tiempo. Sin embargo, debemos encontrar un Hamiltoniano apropiado que dé cuenta de las interacciones en el sistema y así usar la ecuación de Heisenberg. Lo anterior se realiza en la siguiente sección.

4.2. Solución de la ecuación de Heisenberg

Ahora la tarea es solucionar la ecuación de Heisenberg. El primer paso es definir el Hamiltoniano del sistema, de tal forma que debe integrar el número de bienes que tiene cada agente, la interacción que hay entre los dos agentes y el precio del bien. Así, la primera parte del Hamiltoniano cuenta el número de bienes que tiene cada agente, la segunda indica las interacciones entre agentes y la tercera define el precio del bien. Por lo anterior, el Hamiltoniano que describe la evolución temporal en este modelo es

$$H = H_0 + H_{\text{precio}}, \quad (18)$$

$$H_0 = \sum_{l=1}^L \alpha_l a_l^\dagger a_l + \sum_{i,j=1}^L p_{ij} a_i a_j^\dagger, \quad (19)$$

$$H_{\text{precio}} = \epsilon p^\dagger p. \quad (20)$$

Las reglas de conmutación de los operadores son las siguientes

$$[a_l, a_n^\dagger] = \delta_{ln} \mathbf{I}, \quad (21)$$

$$[p, p^\dagger] = \mathbf{I}, \quad (22)$$

siendo todos los demás conmutadores cero. Ahora, la tarea que cumplen los operadores a_l y a_l^\dagger es bastante clara, pues estos deben destruir y crear respectivamente un bien en el agente l , mientras que los operadores p y p^\dagger modifican el precio del bien haciendo que se incremente una cantidad fija ϵ o disminuya respectivamente la misma cantidad. Con respecto a los coeficientes p_{ij} , solo toman valores de 0 o 1 dependiendo si los comerciantes i y j interactúan o no. Bajo esta perspectiva, se asume que no hay interacción con si mismo, es decir $p_{ii} = 0$ para todo i . El operador $a_i a_j^\dagger$ de la parte derecha del Hamiltoniano de interacción destruye un bien del agente i y crea un bien en el portafolio del agente j , en otras palabras el agente i le vende un bien al agente j . Las interacciones entre agentes son bidireccionadas, es decir el agente 1 puede venderle bienes al agente 2 y viceversa, de esta manera el Hamiltoniano es auto-adjunto, cumpliéndose que si $p_{ij} = 1$ entonces $p_{ji} = 1$. Los valores de α_i en el Hamiltoniano libre se interpretan como la habilidad que tiene el agente para comprar o vender bienes e incrementar el valor de su riqueza.

Los observables a los que se les presta una especial atención son el precio de los bienes y el número de bienes de cada agente, es decir por ahora no nos ocuparemos del dinero de cada agente, como en los anteriores modelos. Entonces podemos definir el operador precio del bien activo como

$$P = \epsilon p^\dagger p, \quad (23)$$

mientras que, sabiendo que el operador $a_j^\dagger a_j$ cuenta los bienes del agente j , definimos el operador número de acciones del agente j como

$$\hat{n}_j = a_j^\dagger a_j. \quad (24)$$

Así un observable en el sistema es el número total de bienes, al que se le asigna el operador

$$\hat{N} = \sum_{j=1}^L \hat{n}_j = \sum_{j=1}^L a_j^\dagger a_j. \quad (25)$$

Como el número de acciones en el sistema es una cantidad conservada, $\hat{N}(t) = \hat{N}$ para todo tiempo, es decir reemplazando en la ecuación 15 se tiene que el operador número de bienes y el Hamiltoniano conmutan $[H, \hat{N}] = 0$. El siguiente paso es verificar si el operador número de bienes por cada agente conmuta con el Hamiltoniano del sistema. Para esto se introduce el Hamiltoniano y usamos las reglas de conmutación de la forma

$$[H, \hat{n}_k] = [H_0 + H_{\text{precio}}, \hat{n}_k] \quad (26)$$

$$= [H_0, \hat{n}_k] = \left[\sum_{l=1}^L \alpha_l a_l^\dagger a_l + \sum_{i,j=1}^L p_{ij} a_i a_j^\dagger, a_k^\dagger a_k \right] \quad (27)$$

$$= \sum_{l=1}^L \alpha_l [a_l^\dagger a_l, a_k^\dagger a_k] + \sum_{i,j=1}^L p_{ij} [a_i a_j^\dagger, a_k^\dagger a_k] \quad (28)$$

$$= \sum_{l=1}^L \alpha_l \left\{ a_k^\dagger [a_l^\dagger a_l, a_k] + [a_l^\dagger a_l, a_k^\dagger] a_k \right\} + \sum_{i,j=1}^L p_{ij} \left\{ a_k^\dagger [a_i a_j^\dagger, a_k] + [a_i a_j^\dagger, a_k^\dagger] a_k \right\} \quad (29)$$

$$= \sum_{l=1}^L \alpha_l \left\{ a_k^\dagger \left\{ a_l^\dagger [a_l, a_k] + [a_l^\dagger, a_k] a_l \right\} + \left\{ a_l^\dagger [a_l, a_k^\dagger] + [a_l^\dagger, a_k^\dagger] a_l \right\} a_k \right\} + \quad (30)$$

$$+ \sum_{i,j=1}^L p_{ij} \left\{ a_k^\dagger \left\{ a_i [a_j^\dagger, a_k] + [a_i, a_k] a_j^\dagger \right\} + \left\{ a_i [a_j^\dagger, a_k^\dagger] + [a_i, a_k^\dagger] a_j^\dagger \right\} a_k \right\} \quad (31)$$

$$= \sum_{l=1}^L \alpha_l \left\{ -a_k^\dagger \delta_{lk} a_l + a_l^\dagger \delta_{lk} a_k \right\} + \sum_{i,j=1}^L p_{ij} \left\{ -a_k^\dagger a_i \delta_{jk} + \delta_{ik} a_j^\dagger a_k \right\} \quad (32)$$

$$= \alpha_k \left\{ -a_k^\dagger a_k + a_k^\dagger a_k \right\} + \sum_{i,j=1}^L p_{ij} \left\{ -a_j^\dagger a_i + a_j^\dagger a_i \right\} \quad (33)$$

$$= 0. \quad (34)$$

Como este operador \hat{n} conmuta con el Hamiltoniano del sistema, el sistema es estacionario es decir la densidad de probabilidad no varía con el tiempo. Con respecto al operador precio definido como

$$\hat{P} = \epsilon p^\dagger p, \quad (35)$$

en este trabajo por simplicidad se considerará que es una constante de movimiento, es decir que el conmutador $[H, \hat{P}] = 0$. Esta no es una suposición real, sin embargo en un modelo mas general se puede introducir fácilmente.

El interés se centra ahora en describir el estado del sistema. En el ejemplo del oscilador armónico cuántico descrito en la ecuación 8, se usa el operador creación aplicado sucesivamente al estado base para generar los llamados estados excitados. El estado base se obtiene cuando todos los agentes no tienen ningún bien y los estados excitados se construyen al aplicar el operador creación de bienes en el estado l , tantas veces como bienes tenga el agente l . Por ejemplo, si el agente 4 tiene dos bienes se debe aplicar

el operador $(a_4^\dagger)^2$ sobre el estado base φ_0 . De esta forma, en el estado inicial $t = 0$ podemos considerar que el primer agente tiene n_1 acciones, el segundo agente tiene n_2 acciones y así sucesivamente. Además el precio del bien es $P = M\epsilon$. Adicionalmente, se impone que el sistema se encuentra en el estado inicial $\omega_{n_1, n_2, \dots, n_L; M}$ definido por el vector

$$\varphi_{n_1, n_2, \dots, n_L; M} := \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_L! M!}} \left(a_1^\dagger\right)^{n_1} \left(a_2^\dagger\right)^{n_2} \dots \left(a_L^\dagger\right)^{n_L} (p^\dagger)^M \varphi_0. \quad (36)$$

Análogo al oscilador armónico, φ_0 se define como el vacío del sistema de forma que el operador aniquilación actuando sobre este estado es cero $a_j \varphi_0 = p \varphi_0 = 0$, para todo $j = 1, 2, \dots, L$.

Ahora estamos en posición de resolver las ecuaciones de Heisenberg para los operadores creación y aniquilación. El primer paso es desarrollar el conmutador del Hamiltoniano e introducirlo en la ecuación de Heisenberg. Así, el operador a_k lo introducimos en la ecuación 15 de la forma

$$\frac{da_k(t)}{dt} = ie^{iHt} [H, a_k] e^{-iHt}. \quad (37)$$

Si nos enfocamos en el conmutador de la parte derecha de la ecuación, tenemos

$$[H, a_k] = \left[\sum_{l=1}^L \alpha_l a_l^\dagger a_l + \sum_{i,j=1}^L p_{ij} a_i a_j^\dagger + \epsilon p^\dagger p, a_k \right] \quad (38)$$

$$= \sum_{l=1}^L \alpha_l [a_l^\dagger a_l, a_k] + \sum_{i,j=1}^L p_{ij} [a_i a_j^\dagger, a_k] \quad (39)$$

$$= \sum_{l=1}^L \alpha_l \left\{ a_l^\dagger [a_l, a_k] + [a_l^\dagger, a_k] a_l \right\} + \sum_{i,j=1}^L p_{ij} \left\{ a_i [a_j^\dagger, a_k] + [a_i, a_k] a_j^\dagger \right\} \quad (40)$$

$$= -\sum_{l=1}^L \alpha_l \delta_{lk} a_l - \sum_{i,j=1}^L p_{ij} a_i \delta_{jk} \quad (41)$$

$$= -\alpha_k a_k - \sum_i^L p_{ik} a_i, \quad (42)$$

insertando este resultado en la ecuación diferencial 37 y teniendo en cuenta que por definición $a_k(t) = e^{iHt} a_k e^{-iHt}$, obtenemos

$$\frac{da_k(t)}{dt} = ie^{iHt} \left[-\alpha_k a_k - \sum_i^L p_{ik} a_i \right] e^{-iHt} \quad (43)$$

$$= i \left[-\alpha_k e^{iHt} a_k e^{-iHt} - \sum_i^L p_{ik} e^{iHt} a_i e^{-iHt} \right] \quad (44)$$

$$= -i\alpha_k a_k(t) - i \sum_i^L p_{ik} a_i(t). \quad (45)$$

A primera vista, esta ecuación no es fácil de analizar, sin embargo podemos generalizar este resultado a partir del estudio de un sistema de dos agentes. Entonces, un sistema de dos ecuaciones de la siguiente forma $a_k(t) = e^{iHt} a_k e^{-iHt}$ obtenemos

$$i \frac{da_1(t)}{dt} = \alpha_1 a_1(t) + p_{21} a_2(t), \quad (46)$$

$$i \frac{da_2(t)}{dt} = p_{12} a_1(t) + \alpha_2 a_2(t), \quad (47)$$

de tal forma que este resultado corresponde a una operación entre matrices

$$\begin{pmatrix} i\dot{a}_1(t) \\ i\dot{a}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & p_{21} \\ p_{12} & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Si queremos generalizar este resultado para L agentes introducimos el vector $a(t)$

$$a(t) \equiv \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{L-1}(t) \\ a_L(t) \end{pmatrix}, \quad (49)$$

y el operador X

$$X \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 & p_{21} & p_{31} & \cdots & p_{L-11} & p_{L1} \\ p_{12} & \alpha_2 & p_{32} & \cdots & p_{L-12} & p_{L2} \\ p_{13} & p_{23} & \alpha_3 & \cdots & p_{L-13} & p_{L3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{1L-1} & p_{2L-1} & p_{3L-1} & \cdots & \alpha_L - 1 & p_{LL-1} \\ p_{1L} & p_{2L} & p_{3L} & \cdots & p_{L-1L} & \alpha_L \end{pmatrix} \quad (50)$$

con lo cual, se puede expresar la ecuación diferencial en 45, así

$$i\dot{a}(t) = Xa(t). \quad (51)$$

Debido a la forma de los subíndices p_{ij} y ya que todos los índices α son reales, la matriz X es auto-adjunta. Esta ecuación se soluciona de la siguiente forma: tomamos una matriz V que diagonalize la matriz X , es decir

$$V^\dagger X V = \text{diag}\{x_1, x_2, \dots, x_L\} =: X_d, \quad (52)$$

donde x_j son sus valores propios $j = 1, 2, \dots, L$. Para solucionar estas ecuaciones diferenciales acopladas hacemos una sustitución $a(t) = Vb(t)$, donde V es el vector que diagonaliza la matriz X

$$i\dot{a}(t) = Xa(t) \quad (53)$$

$$iV\dot{b}(t) = XVb(t) \quad (54)$$

$$iV^\dagger V\dot{b}(t) = V^\dagger XVb(t) \quad (55)$$

$$i\dot{b}(t) = X_d b(t). \quad (56)$$

Por lo anterior, debido a que la matriz X_d es una matriz diagonal, conduce a desacoplar las ecuaciones diferenciales, siendo posible obtener una ecuación para cada agente de la forma

$$i\dot{b}_k(t) = x_k b_k(t). \quad (57)$$

$$(58)$$

Para solucionar esta ecuación diferencial, se suponen soluciones de la forma

$$b_k(t) = \alpha e^{-i\lambda t} + \alpha e^{i\lambda t}. \quad (59)$$

Dado que las soluciones de esta ecuación son funciones propias que deben ser normalizables, entonces la segunda parte de la solución debe ser cero

$$b_k(t) = \alpha e^{-i\lambda t}, \quad (60)$$

y así la ecuación diferencial queda expresada como

$$i\dot{b}_k(t) = x_k b_k(t) \quad (61)$$

$$i\alpha(-i\lambda)e^{-i\lambda t} = x_k \alpha e^{-i\lambda t} \quad (62)$$

$$\lambda = x_k. \quad (63)$$

Es decir, los valores propios son los elementos de la matriz diagonal. Si consideramos las condiciones iniciales tenemos

$$b_k(t) = e^{ix_k t} b_k(0), \quad (64)$$

con lo cual se puede expresar la solución general de la forma

$$b(t) = U(t)b(0), \quad (65)$$

donde $U(t)$ es

$$U(t) \equiv \begin{pmatrix} e^{ix_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{ix_2 t} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ix_3 t} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{ix_{L-1} t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{ix_L t} \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Se tiene una solución de la forma

$$b(t) = U(t)b(0) \quad (67)$$

$$V^\dagger a(t) = U(t)V^\dagger a(0) \quad (68)$$

$$a(t) = VU(t)V^\dagger a(0). \quad (69)$$

De esta forma es suficiente calcular los vectores y valores propios de X para encontrar el vector creación de bienes. Por otro lado, si queremos encontrar el operador creación debemos introducir el adjunto al vector $a(t)$ haciendo el conjugado de la transpuesta de $a(t)$. Así, $a^\dagger(t)$ es el vector fila $a^\dagger(t) = (a_1^\dagger(t), a_2^\dagger(t), \dots, a_{L-1}^\dagger(t), a_L^\dagger(t))$, el cual corresponde en notación matricial a

$$a^\dagger(t) = a^\dagger(0)VU^\dagger(t)V^\dagger, \quad (70)$$

siendo posible comprobar explícitamente que \hat{N} es una constante de movimiento

$$\hat{N}(t) = a_1^\dagger(t)a_1(t) + a_2^\dagger(t)a_2(t) + \dots + a_L^\dagger(t)a_L(t) = a^\dagger(t)a(t) \quad (71)$$

$$= (a^\dagger(0)VU^\dagger(t)V^\dagger) (VU(t)V^\dagger a(0)) \quad (72)$$

$$= a^\dagger(0)a(0). \quad (73)$$

Con las expresiones para los operadores creación y destrucción, se puede encontrar los valores esperados de observables en el sistema. Por ejemplo, encontrar el valor esperado del número de bienes de cada agente es la tarea a desarrollar en la siguiente sección.

4.3. Cálculo del valor esperado de los bienes de un sistema compuesto por dos agentes

Ahora el objetivo es calcular una expresión analítica para el número de acciones como función del tiempo de un sistema compuesto por dos agentes. Para esto, lo primero que se hace es calcular los valores propios de la matriz

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 & p_{12} \\ p_{21} & \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (74)$$

Estos valores propios derivarán en una matriz que diagonalice X . Formalmente para encontrar los valores propios se debe solucionar la ecuación $\det(X - \lambda I) = 0$, es decir

$$\det(X - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 - \lambda & p \\ p & \alpha_2 - \lambda \end{pmatrix} = (\alpha_1 - \lambda)(\alpha_2 - \lambda) - p^2, \quad (75)$$

de modo que nos queda la ecuación cuadrática

$$\lambda^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)\lambda + (\alpha_1\alpha_2 - p^2) = 0, \quad (76)$$

cuya solución se simplifica al definir las variables $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, $\Omega^2 = \alpha^2 + 4p^2$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \pm \Omega}{2}, \quad (77)$$

siendo estas cantidades los valores propios de X , y este resultado nos sirve para definir la matriz U . El siguiente paso es resolver el sistema homogéneo $(X - \lambda_i I)V = 0$, donde V es el vector propio de cada uno de los valores propios, y así encontrar los vectores propios, es decir

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \pm \Omega}{2} & p \\ p & \alpha_2 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \pm \Omega}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha \pm \Omega}{2} & p \\ p & -\frac{\alpha \pm \Omega}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (78)$$

Este sistema tiene infinitas soluciones, sin embargo Bagarello [35] toma una solución particular que diagonaliza la matriz X , que está dada por uno de los vectores propios que es solución del anterior sistema homogéneo, siendo

$$V = \begin{pmatrix} 2p & 2p \\ \alpha - \Omega & \alpha + \Omega \end{pmatrix} \quad (79)$$

Y su inversa:

$$V^\dagger = \frac{1}{4p\Omega} \begin{pmatrix} \alpha + \Omega & -2p \\ \alpha - \Omega & 2p \end{pmatrix} \quad (80)$$

Con estos vectores, junto al vector U que depende de los valores propios que se encontraron anteriormente, es posible expresar los vectores bajada como

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{4p\Omega} \begin{pmatrix} 2p & 2p \\ \alpha - \Omega & \alpha + \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha + \Omega & -2p \\ \alpha - \Omega & 2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4p\Omega} \begin{pmatrix} 2p & 2p \\ \alpha - \Omega & \alpha + \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha + \Omega)e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} & -2pe^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} \\ (\alpha - \Omega)e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} & 2pe^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4p\Omega} \left(\begin{array}{cc} 2p(\alpha + \Omega)e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} + 2p(\alpha - \Omega)e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} & -4p^2e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} + 4p^2e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} \\ (\alpha^2 - \Omega^2)e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} - (\alpha^2 - \Omega^2)e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} & -2p(\alpha - \Omega)e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} + 2p(\alpha + \Omega)e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} \end{array} \right) \begin{pmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4p\Omega} \left(\begin{array}{cc} 2p(\alpha + \Omega)e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t}a_1(0) + 2p(\alpha - \Omega)e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t}a_1(0) - 4p^2e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t}a_2(0) + 4p^2e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t}a_2(0) \\ (\alpha^2 - \Omega^2)e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t}a_1(0) - (\alpha^2 - \Omega^2)e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t}a_1(0) - 2p(\alpha - \Omega)e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t}a_2(0) + 2p(\alpha + \Omega)e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t}a_2(0) \end{array} \right)
\end{aligned}$$

De la misma forma, es posible calcular el vector fila para el correspondiente operador de bajada

$$\begin{aligned}
(a_1^\dagger(t) \quad a_2^\dagger(t)) &= \frac{1}{4p\Omega} (a_1^\dagger(0) \quad a_2^\dagger(0)) \begin{pmatrix} 2p & 2p \\ \alpha - \Omega & \alpha + \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha + \Omega & -2p \\ \alpha - \Omega & 2p \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4p\Omega} (a_1^\dagger(0) \quad a_2^\dagger(0)) \begin{pmatrix} 2p & 2p \\ \alpha - \Omega & \alpha + \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha + \Omega)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} & -2pe^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} \\ (\alpha - \Omega)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} & 2pe^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4p\Omega} (a_1^\dagger(0) \quad a_2^\dagger(0)) \begin{pmatrix} 2p(\alpha + \Omega)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} + 2p(\Omega - \alpha)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} & -4p^2e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} + 4p^2e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} \\ (\alpha^2 - \Omega^2)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} - (\alpha^2 - \Omega^2)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} & -2p(\alpha - \Omega)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} + 2p(\alpha + \Omega)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4p\Omega} (2p(\alpha + \Omega)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t}a_1^\dagger(0) + 2p(\Omega - \alpha)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t}a_1^\dagger(0) + (\alpha^2 - \Omega^2)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t}a_2^\dagger(0) - (\alpha^2 - \Omega^2)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t}a_2^\dagger(0); \\
&\quad -4p^2e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t}a_1^\dagger(0) + 4p^2e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t}a_1^\dagger(0) - 2p(\alpha - \Omega)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t}a_2^\dagger(0) + 2p(\alpha + \Omega)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t}a_2^\dagger(0)).
\end{aligned}$$

Teniendo las expresiones para los operadores creación y destrucción de bienes de cada agente, el objetivo es ahora calcular el valor esperado del número de acciones de cada agente, es decir se realiza el cálculo de

$$\langle \varphi_{n_1, n_2} | n_1(t) | \varphi_{n_1, n_2} \rangle = \langle \varphi_{n_1, n_2} | a_1^\dagger a_1 | \varphi_{n_1, n_2} \rangle. \quad (81)$$

Los estados son ortonormales y para encontrar los términos que sobreviven a la operación se debe multiplicar las dos expresiones así

$$\begin{aligned}
&\langle \varphi_{n_1, n_2} | \left[2p(\alpha + \Omega)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t}a_1^\dagger(0) + 2p(\Omega - \alpha)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t}a_1^\dagger(0) + (\alpha^2 - \Omega^2)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t}a_2^\dagger(0) - (\alpha^2 - \Omega^2)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t}a_2^\dagger(0) \right] \\
&\quad \left[2p(\alpha + \Omega)e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t}a_1(0) + 2p(\alpha - \Omega)e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t}a_1(0) - 4p^2e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t}a_2(0) + 4p^2e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t}a_2(0) \right] \frac{1}{16p^2\Omega^2} | \varphi_{n_1, n_2} \rangle \\
&= \frac{1}{16p^2\Omega^2} \langle \varphi_{n_1, n_2} | 4p^2(\alpha + \Omega)^2e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t}e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t}a_1^\dagger(0)a_1(0) + 4p^2(\Omega^2 - \alpha^2)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t}e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t}a_1^\dagger(0)a_1(0) \\
&\quad + 4p^2(\alpha^2 - \Omega^2)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t}e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t}a_1^\dagger(0)a_1(0) + 4p^2(\Omega - \alpha)^2e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t}e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t}a_1^\dagger(0)a_1(0) \\
&\quad - 4p^2(\alpha^2 - \Omega^2)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t}e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t}a_2^\dagger(0)a_2(0) + 4p^2(\alpha^2 - \Omega^2)e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t}e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t}a_2^\dagger(0)a_2(0) \\
&\quad + 4p^2(\alpha^2 - \Omega^2)e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t}e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t}a_2^\dagger(0)a_2(0) - 4p^2(\alpha^2 - \Omega^2)e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t}e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t}a_2^\dagger(0)a_2(0) | \varphi_{n_1, n_2} \rangle.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\langle \varphi_{n_1, n_2} | n_1(0) | \varphi_{n_1, n_2} \rangle = \langle \varphi_{n_1, n_2} | a_1^\dagger(0)a_1(0) | \varphi_{n_1, n_2} \rangle$, se obtiene

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\Omega^2} \langle \varphi_{n_1, n_2} | (\alpha + \Omega)^2n_1(0) + (\Omega^2 - \alpha^2)e^{-i\Omega t}n_1(0) + (\alpha^2 - \Omega^2)e^{i\Omega t}n_1(0) + (\Omega - \alpha)^2n_1(0) \\
&\quad - (\alpha^2 - \Omega^2)n_2(0) + (\alpha^2 - \Omega^2)e^{-i\Omega t}n_2(0) + (\alpha^2 - \Omega^2)e^{i\Omega t}n_2(0) - (\alpha^2 - \Omega^2)n_2(0) | \varphi_{n_1, n_2} \rangle.
\end{aligned}$$

Agrupando términos

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\Omega^2} \langle \varphi_{n_1, n_2} | (2\alpha^2 + 2\Omega^2)n_1(0) + (\Omega^2 - \alpha^2) [e^{-i\Omega t} + e^{i\Omega t}] n_1(0) + (-2\alpha^2 - 2\Omega^2)n_2(0) \\
&\quad + (\alpha^2 - \Omega^2) [e^{-i\Omega t} + e^{i\Omega t}] n_2(0) | \varphi_{n_1, n_2} \rangle,
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta las relaciones de Euler $2 \cos \theta = e^{-\theta i} + e^{\theta i}$, se tiene

$$= \frac{1}{2\Omega^2} \langle \varphi_{n_1, n_2} | (\alpha^2 + \Omega^2)n_1(0) + (\Omega^2 - \alpha^2) \cos(\Omega t)n_1(0) + (-\alpha^2 - \Omega^2)n_2(0) + (\alpha^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t)n_2(0) | \varphi_{n_1, n_2} \rangle.$$

Agrupando términos, se obtiene

$$n_1(t) = a_1^\dagger(t)a_1(t) = \frac{1}{\Omega^2} (n_1 (\alpha^2 + 2p^2 (1 + \cos \Omega t)) + 2p^2 n_2 (1 - \cos \Omega t)), \quad (82)$$

resultado que es mostrado por Bagarello [35]. Ahora, para calcular el valor esperado del número de bienes n_2 se tiene en cuenta que

$$\langle \varphi_{n_1, n_2} | n_2(t) | \varphi_{n_1, n_2} \rangle = \langle \varphi_{n_1, n_2} | a_2^\dagger a_2 | \varphi_{n_1, n_2} \rangle, \quad (83)$$

desarrollando

$$= \frac{1}{16p^2\Omega^2} \langle \varphi_{n_1, n_2} | \left[-4p^2 e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} a_1^\dagger(0) + 4p^2 e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} a_1^\dagger(0) - 2p(\alpha - \Omega) e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} a_2^\dagger(0) + 2p(\alpha + \Omega) e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} a_2^\dagger(0) \right] \left[(\alpha^2 - \Omega^2) e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} a_1(0) - (\alpha^2 - \Omega^2) e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} a_1(0) - 2p(\alpha - \Omega) e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} a_2(0) + 2p(\alpha + \Omega) e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} a_2(0) \right] | \varphi_{n_1, n_2} \rangle,$$

operando

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{16p^2\Omega^2} \langle \varphi_{n_1, n_2} | -4p^2(\alpha^2 - \Omega^2) e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} a_1^\dagger(0)a_1(0) + 4p^2(\alpha^2 - \Omega^2) e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} a_1^\dagger(0)a_1(0) \\ &+ 4p^2(\alpha^2 - \Omega^2) e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} a_1^\dagger(0)a_1(0) - 4p^2(\alpha^2 - \Omega^2) e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} a_1^\dagger(0)a_1(0) \\ &+ 4p^2(\alpha - \Omega)^2 e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} a_2^\dagger(0)a_2(0) - 4p^2(\alpha^2 - \Omega^2) e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} a_2^\dagger(0)a_2(0) \\ &- 4p^2(\alpha^2 + \Omega^2) e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \Omega}{2}t} a_2^\dagger(0)a_2(0) + 4p^2(\alpha + \Omega)^2 e^{-i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} e^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \Omega}{2}t} a_2^\dagger(0)a_2(0) | \varphi_{n_1, n_2} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{16p^2\Omega^2} \langle \varphi_{n_1, n_2} | -4p^2(\alpha^2 - \Omega^2)n_1(0) + 4p^2(\alpha^2 - \Omega^2)e^{-i\Omega t}n_1(0) + 4p^2(\alpha^2 - \Omega^2)e^{i\Omega t}n_1(0) - 4p^2(\alpha^2 - \Omega^2)n_1(0) \\ &+ 4p^2(\alpha - \Omega)^2n_2(0) - 4p^2(\alpha^2 - \Omega^2)e^{-i\Omega t}n_2(0) - 4p^2(\alpha^2 + \Omega^2)e^{i\Omega t}n_2(0) + 4p^2(\alpha + \Omega)^2n_2(0) | \varphi_{n_1, n_2} \rangle, \end{aligned}$$

eliminando y agrupando términos, se obtiene

$$= \langle \varphi_{n_1, n_2} | \frac{p^2}{\Omega^2} \{2n_1(0) - [e^{-i\Omega t} + e^{i\Omega t}] n_1(0)\} + \frac{p^2}{\Omega^2} \{(2\alpha^2 + 2\Omega^2)n_2(0) - (\alpha^2 - \Omega^2) [e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}] n_2(0)\} | \varphi_{n_1, n_2} \rangle.$$

Teniendo en cuenta las relaciones de Euler $2 \cos \theta = e^{-\theta i} + e^{\theta i}$, tenemos

$$= \langle \varphi_{n_1, n_2} | \frac{p^2}{\Omega^2} \{2n_1(0) - \cos(\Omega t)n_1(0)\} + \frac{p^2}{\Omega^2} \{(2\alpha^2 + 2\Omega^2)n_2(0) - (\alpha^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t)n_2(0)\} | \varphi_{n_1, n_2} \rangle,$$

agrupando, se obtiene

$$n_2(t) = a_2^\dagger(t)a_2(t) = \frac{2p^2 n_1}{\Omega^2} (1 + \cos \Omega t) + n_2 \left(1 + \frac{2p^2}{\Omega^2} (\cos \Omega t - 1) \right). \quad (84)$$

En resumen, los valores esperados del número de acciones de los dos agentes están dados por las expresiones.

$$n_1(t) = a_1^\dagger(t)a_1(t) = \frac{1}{\Omega^2} (n_1 (\alpha^2 + 2p^2 (1 + \cos \Omega t)) + 2p^2 n_2 (1 - \cos \Omega t)) \quad (85)$$

$$n_2(t) = a_2^\dagger(t)a_2(t) = \frac{2p^2 n_1}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega t) + n_2 \left(1 + \frac{2p^2}{\Omega^2} (\cos \Omega t - 1) \right). \quad (86)$$

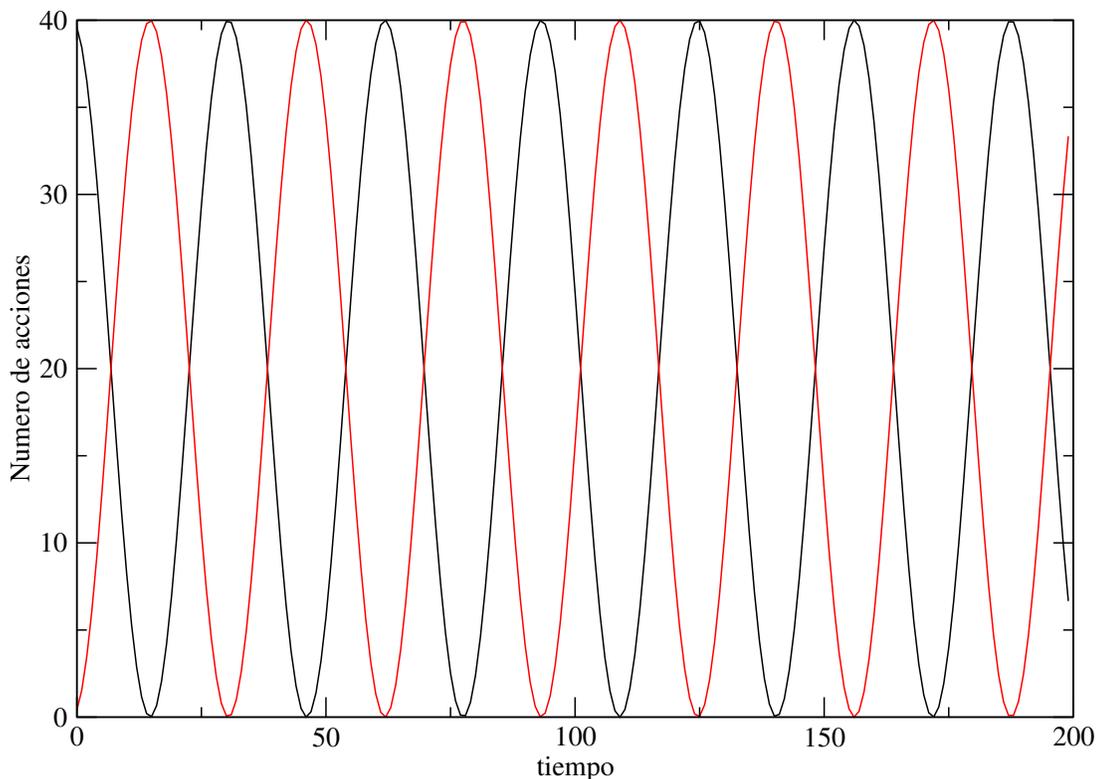


Figura 4.1: Valor esperado del número de acciones para un sistema de dos agentes.1

Lo interesante de este modelo es analizar las consecuencias para la interacción entre los dos agentes con las mismas habilidades. Es claro que si ambos agentes tienen la misma cantidad de acciones inicialmente, el sistema no se mueve y siguen con la misma cantidad de bienes todo el tiempo. Sin embargo, si tienen un número inicial de bienes distinto, la solución es periódica, como se muestra en la siguiente figura. Para este resultado, el número de bienes iniciales del agente 1 son 40 mientras que el número de bienes del agente 2 es cero, por lo tanto las expresiones para el valor esperado del número de agentes son

$$n_1(t) = 20 + 20 \cos 2t, \quad (87)$$

$$n_2(t) = 20 - 20 \cos 2t, \quad (88)$$

que corresponden a las funciones mostradas en la anterior figura.

El desfase entre los dos valores esperados muestra las conductas del agente ante la escases o abundancia de un bien. El primer agente 1 tiene el número máximo de bienes en el sistema entrando en una situación de saciedad, así que decide entregar bienes al agente 2 que inicialmente no tiene ningún bien. Las funciones para el valor esperado del número de bienes para ambos agentes están desfasadas, es decir uno entra en saciedad o máxima felicidad cuando posee todas los bienes disponibles en el sistema. Esta es una conducta típica de los consumidores respecto a las preferencias de los bienes en un sistema económico. Sin embargo, este sistema de dos agentes es muy restrictivo. La solución que se plantea es obtener el espectro de número de bienes para un sistema compuesto por muchos agentes que compitan por el mismo bien y que inicialmente tienen una cantidad diferente de bienes. La modificación del programa y los resultados se muestran en el siguiente capítulo. Mediante este modelo, ha sido posible dar cuenta de la dinámica de la riqueza de un agente a partir de un Hamiltoniano que describe los agentes económicos y sus interacciones.

Desarrollar un modelo analíticamente en detalle permite construir un algoritmo que extienda el modelo para aproximarse sucesivamente a la realidad. En este capítulo desarrollamos el modelo operatorial de una economía constituida por muchos agentes. Primero mostramos el programa con el que resolvimos las ecuaciones de Heisenberg y luego analizamos los resultados para un sistema económico donde todos los agentes interactúan teniendo la misma habilidad y un número diferente de bienes activos. Los valores esperados del número de acciones se relacionan con las preferencias del bien que tiene un agente económico.

CAPÍTULO 5

APROXIMACIÓN OPERATORIAL DE LA DISTRIBUCIÓN DE RIQUEZA PARA MUCHOS AGENTES

En econofísica, gran parte de los trabajos en mercados económicos y financieros han sido estudiados a la luz de modelos mecánico estadísticos. Sin ir mas allá, la distribución de dinero, ingreso y riqueza se ha estudiado en el marco de la teoría cinética de gases, que usa la estadística para encontrar las distribuciones de energía en un sistema. Sin embargo, Bagarello propone un modelo financiero en donde se hace uso de los operadores creación y destrucción para construir un sistema en donde los agentes intercambian bienes activos a través del tiempo [35]. De esta forma, Bagarello logra construir un modelo que imita el comportamiento del mercado de acciones usando conceptos y herramientas de la mecánica cuántica. En este trabajo, el modelo de mercado financiero de Bagarello se traslada a un mercado económico, donde los agentes intercambian un solo tipo de bien cuyo número no cambian con el tiempo. A pesar de ser un modelo cuántico, el sistema nuevamente se comporta como un gas de bosones interactuantes, sin que la energía total del sistema cambie por efecto de las interacciones. Como se estudió en el anterior capítulo, los resultados del modelo más sencillo estudiado por Bagarello parecen estar relacionados con conceptos microeconómicos de preferencia de un bien. De esta forma, en este capítulo se describe brevemente y desde una mirada microeconómica las conductas que tiene un agente económico o consumidor ante la abundancia o escasez de un bien. Ya teniendo una base teórica, se describen los pasos de la simulación y se muestra el código con el que es posible modelar un sistema de muchos agentes. Finalmente, se muestran los resultados, que son analizados en el marco de la microeconomía.

5.1. Las preferencias en un sistema económico

A pesar de no estudiar los mismos fenómenos, la física y la economía usan un método de estudio común: la primera se preocupa por construir modelos que describan la naturaleza física, mientras que la segunda se enfoca en construir modelos que expliquen fenómenos económicos [56]. De hecho, en ambas ramas un modelo simple puede ser útil. Por ejemplo, en física el paradigma del oscilador armónico es base para describir muchos fenómenos, mientras que en la economía es pertinente construir modelos simples de equilibrios de mercado, lo que explica las fluctuaciones en los precios de los bienes. Lo importante en ambos casos es considerar solo algunos sucesos relevantes y a partir de ellos describir rasgos de la realidad en un sistema físico o en una sistema económico. A pesar de que este trabajo no se enfoca en ver las fluctuaciones en los precios debido a la oferta y demanda de los bienes en un mercado económico, sino sólo en la cantidad de bienes que posee un agente, los resultados se pueden interpretar a la luz de diferentes

fenómenos económico.

Todos los bienes que puede un individuo adquirir en una economía se denomina cesta de bienes, con lo cual en el modelo que estamos considerando, la cesta de consumo consiste en un solo tipo de bien. Nuevamente parece algo restrictivo debido a que en un plano más general no sólo necesitamos de una lista completa de los bienes que puede adquirir un agente, sino también el lugar y las circunstancias en las que el agente los obtiene. Sin embargo el hecho de solo considerar un bien puede dar cuenta del comportamiento de este tipo de bien en economía. Por otro lado, en general las preferencias se basan en la existencia de varias cestas de consumo, pero existen fenómenos asociados a la abundancia o escasez de un solo bien en un sistema económico.

Exploremos por ejemplo dos fenómenos extremos relacionados con el número de bienes en un sistema económico: el primero es un agente que está ante una situación de máxima felicidad es decir, el número de bienes es tan alto que el agente siente que su bienestar no puede mejorar más; el segundo es un agente que está en una situación de mínima felicidad porque el agente tiene una cantidad muy pequeña de ese bien. Ambos casos son extremos y se convierten en males, es decir pasa a ser una mercancía que no gusta le gusta al agente (consumidor). Lo anterior indica que una situación de abundancia de un bien puede hacer que el agente considere la idea de traspasar algunos bienes para mejorar su bienestar, y en el caso contrario de escasez, el agente adquiere bienes para aumentar su bienestar. Entonces hay un punto de saciedad o de equilibrio, donde el individuo se siente a gusto con la cantidad de bienes que tiene y no desea aumentar ni disminuir su riqueza.

El modelo que estamos usando es perfecto para el análisis de las anteriores ideas, debido a que solo se considera un bien y los agentes en el sistema pueden competir por él. En lo que resta de este capítulo, vamos a enfocarnos en construir un modelo en donde muchos agentes, con diferentes números de bienes iniciales, compiten por poseer la mayor cantidad de bien activo. Para esto, inicialmente se describe la simulación con la cual se realiza el modelo de este sistema, para posteriormente mostrar el código con el que simulamos el sistema de muchos agentes. Finalmente, se presentan los resultados y se analizan en el marco de la microeconomía.

5.2. Algoritmo para el modelo de muchos agentes

El algoritmo se enfoca en obtener el valor esperado del número de bienes de un agente económico que intercambia un solo tipo de bien con el sistema. El modelo imita un mercado económico cuyo comportamiento puede ser descrito por un operador llamado el Hamiltoniano. Se puede decir que el Hamiltoniano describe la evolución libre del sistema, mas los efectos de interacción. El Hamiltoniano entonces se puede construir con tres partes: la primera cuenta la cantidad de bienes en el sistema, la segunda relaciona la interacción entre pares de agentes y la tercera está vinculada al precio del bien. Así, como se indicó en el capítulo anterior, se expresa el Hamiltoniano de la siguiente forma

$$H = H_0 + H_{\text{precio}}, \quad (1)$$

donde

$$H_0 = \sum_{l=1}^L \alpha_l a_l^\dagger a_l + \sum_{i,j=1}^L p_{ij} a_i a_j^\dagger, \quad (2)$$

$$H_{\text{precio}} = \epsilon p^\dagger p. \quad (3)$$

Con lo anterior, ya se puede calcular el valor de cualquier observable del sistema, en especial el valor esperado del número de acciones. Lo anterior es posible si se soluciona la ecuación de Heisenberg dada por

$$\frac{dX(t)}{dt} = i[H, X(t)]. \quad (4)$$

Para esto se construye un algoritmo que permita solucionar numéricamente esta ecuación, la cual incluye los operadores creación y destrucción de bienes. Además, teniendo en cuenta que los estados forman un conjunto ortonormal, se calculan los valores esperados del número de acciones para cada agente del sistema. De esta forma, se considera un sistema compuesto de muchos agentes con los misma habilidad α_i , siendo posible para cada agente interactuar con todos los demás agentes del sistema. Inicialmente todos los agentes tienen una cantidad de bienes diferente, de tal forma que se pueda establecer los siguientes pasos para la simulación

1. Elegimos el número de agentes en el sistema y le asignamos a cada uno un número de bienes iniciales para que lo intercambie con el sistema. Tanto el número total de agentes L , como la cantidad total de bienes N van a ser cantidades conservadas en el sistema.
2. Establecemos el tiempo y el número de pasos con los que se va a ejecutar la simulación. Ya que la el número de bienes es una variable discreta, se puede definir tiempos τ tal que esta condición se cumpla. Por simplicidad en los resultados de este trabajo no vamos a mostrar esta condición.
3. Definimos la matriz X donde todos los valores X_{ij} con $j \neq i$ son iguales a 1, es decir existe una interacción entre todos los agentes del sistema. La habilidad de cada agente es la misma, por ejemplo podemos establecer 2 como la habilidad de cada agente, con lo cual

$$X \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 & p_{21} & p_{31} & \cdots & p_{L-11} & p_{L1} \\ p_{12} & \alpha_2 & p_{32} & \cdots & p_{L-12} & p_{L2} \\ p_{13} & p_{23} & \alpha_3 & \cdots & p_{L-13} & p_{L3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{1L-1} & p_{2L-1} & p_{3L-1} & \cdots & \alpha_L - 1 & p_{LL-1} \\ p_{1L} & p_{2L} & p_{3L} & \cdots & p_{L-1L} & \alpha_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

4. Definida la matriz X se hace el cálculo de los valores y vectores propios. El número de valores propios es el mismo número de agentes en el sistema, mientras que la dimensión de la matriz de vectores propios es la misma que la dimensión de X . Así los valores propios son x_1, x_2, x_3, x_l y la matriz de vectores propios que diagonaliza a X está dado por

$$X \equiv \begin{pmatrix} V_{11} & V_{21} & V_{31} & \cdots & V_{L-1,1} & V_{L,1} \\ V_{12} & V_{22} & V_{32} & \cdots & V_{L-1,2} & V_{L,2} \\ V_{13} & V_{23} & V_{33} & \cdots & V_{L-1,3} & V_{L,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_{1,L-1} & V_{2,L-1} & V_{3,L-1} & \cdots & V_{L-1,L-1} & V_{L,L-1} \\ V_{1,L} & V_{2,L} & V_{3,L} & \cdots & V_{L-1,L} & V_{L,L} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

donde cada columna de esta matriz tiene la misma dimensión del número de agentes del sistema y cada columna representa un vector propio.

5. Ya conocidos los valores propios, se construye la matriz diagonal U como

$$U(t) \equiv \begin{pmatrix} e^{ix_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{ix_2 t} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ix_3 t} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{ix_{L-1} t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{ix_L t} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

Es posible que debido a que los valores de esta matriz sean imaginarios, se use la relación de Euler para senos y cosenos.

6. Como los operadores creación y destrucción están dados por las expresiones

$$a(t) = VU(t)V^\dagger a(0) \quad (8)$$

$$a^\dagger(t) = a^\dagger(0)VU^\dagger(t)V^\dagger, \quad (9)$$

entonces se definen dos nuevas matrices D y C , que ayudan a construir los operadores creación y destrucción

$$D = VUV^\dagger, \quad (10)$$

$$C = VU^\dagger V^\dagger, \quad (11)$$

de tal forma que el cálculo de los vectores creación y aniquilación van a estar dados por

$$a(t) = Da(0), \quad (12)$$

$$a^\dagger(t) = a^\dagger(0)C. \quad (13)$$

7. Debido a que el estado del sistema es ortonormal, es decir

$$\langle \varphi_{n_1, n_2} | \varphi_{n'_1, n'_2} \rangle = \delta_{n_1, n'_1} \delta_{n_2, n'_2}, \quad (14)$$

solamente algunos términos sobreviven en la operación

$$\langle \varphi_{n_1, n_2} | n_1(t) | \varphi_{n_1, n_2} \rangle = \langle \varphi_{n_1, n_2} | a_1^\dagger a_1 | \varphi_{n_1, n_2} \rangle, \quad (15)$$

$$\langle \varphi_{n_1, n_2} | n_2(t) | \varphi_{n_1, n_2} \rangle = \langle \varphi_{n_1, n_2} | a_2^\dagger a_2 | \varphi_{n_1, n_2} \rangle. \quad (16)$$

Esta relación hace que se eliminen algunos términos en el cálculo del valor esperado del número de bienes, de tal forma que el número de bienes del agente i está dado por

$$n_i = \sum_{j=1}^L D_{ij} C_{ji} n_j. \quad (17)$$

8. Al final se repiten los anteriores pasos para un tiempo mayor, con el fin de tener el espectro de valores esperados del número de bienes.

5.3. Detalles de la simulación para dos agentes

El anterior algoritmo se implementó en el programa Scilab debido a que este puede calcular fácilmente valores y vectores propios. En primer lugar se valida el programa dando solución del valor esperado del número de acciones de la simulación con dos agentes y comparando los valores con los teóricos descritos en el anterior capítulo. Luego al programa se añaden gradualmente agentes al sistema y se estudia su comportamiento. Para el desarrollo de la primera simulación, la de dos agentes, se define la función $Matriz(n10, n20, t)$, donde las variables de entrada son el número inicial de bienes del agente 1, el número inicial de bienes del agente 2 y el tiempo. El resultado de esta función es el valor esperado del número de acciones de cada agente, es decir la función es

```
function [n1,n2]=Matriz(n10,n20,t).
```

Ya establecida la función, se definen las variables iniciales. La primera es la matriz X , donde la diagonal indica la habilidad de cada agente. En este caso, todos los agentes van a tener la misma habilidad, que se toma igual a 2. Las posiciones fuera de la diagonal indican si hay o no interacción entre agentes, en este caso se toma el valor 1 para indicar que ambos agentes interactúan uno con el otro

```
function [n1,n2]=Matriz(n10,n20,t)
    X=[2,1;1,2]; //el vector X
```

Ahora se calculan los valores y vectores propios de esta matriz. La tarea la hace una función en el programa llamada *spec*. La función genera una matriz diagonal D , con los valores propios de X y una matriz V con los vectores propios que diagonaliza a X .

```
function [n1,n2]=Matriz(n10,n20,t)
    X=[2,1;1,2]; //el vector X
    [V D]=spec(X); // D diagonal valores propios V vectores propios
```

Ahora, con los valores propios de la matriz D se construye la matriz U . Los valores propios de X están en la diagonal de la matriz D , de modo cada una de las posiciones en esta diagonal se colocan junto a una función exponencial compleja que depende del tiempo en la matriz U . La matriz se construye de la forma

```
function [n1,n2]=Matriz(n10,n20,t)
    X=[2,1;1,2]; //el vector X
    [V D]=spec(X); // D diagonal valores propios V vectores propios
    U=[exp(D(1,1)*t*i),0;0,exp(D(2,2)*t*i)]; //Matriz U de valores propios
```

Para encontrar los operadores creación y aniquilación, es necesario calcular $VU^\dagger(t)V^\dagger$ y $VU(t)V^\dagger$, respectivamente. Llamando a la primera matriz $C2$ y a la segunda $C1$, el código queda expresado como

```
function [n1,n2]=Matriz(n10,n20,t)
    X=[2,1;1,2]; //el vector X
    [V D]=spec(X); // D diagonal valores propios V vectores propios
    U=[exp(D(1,1)*t*i),0;0,exp(D(2,2)*t*i)]; //Matriz U de valores propios
    C1=V*U*V^(-1); // Matriz para destruccion 2x2
    C2=V*U^(-1)*V^(-1); // Matriz creacion 2x2
```

Finalmente se calcula el valor esperado del operador número de acciones para cada agente, de modo que para $n_1(t)$ y para $n_2(t)$ solo sobreviven los valores que cumplen con la ortogonalidad

```
function [n1,n2]=Matriz(n10,n20,t)
    X=[2,1;1,2]; //el vector X
    [V D]=spec(X); // D diagonal valores propios V vectores propios
    U=[exp(D(1,1)*t*i),0;0,exp(D(2,2)*t*i)]; //Matriz U de valores propios
    C1=V*U*V^(-1); // Matriz para destruccion 2x2
    C2=V*U^(-1)*V^(-1); // Matriz creacion 2x2
    n1=real(C1(1,1)*C2(1,1)*n10+C1(1,2)*C2(2,1)*n20); // Numero de acciones n1
    n2=real(C1(2,1)*C2(1,2)*n10+C1(2,2)*C2(2,2)*n20); // Numero de acciones n2
endfunction
```

Luego de esto, si queremos ver el espectro de valores esperados lo hacemos para cada tiempo y observamos los resultados. Se compara el resultado de la simulación con los valores teóricos dados en el anterior capítulo de tal modo que se puede validar y pasar a simular un sistema de muchos agentes.

5.4. Detalles de la simulación para un sistema de muchos agentes

Ahora la tarea es extender el anterior programa para el caso de muchos agentes, de tal forma sea posible observar algunas propiedades que no son evidentes cuando se estudia un sistema simple. En este caso, nos interesa que el programa obtenga un vector con los valores esperados del número de acciones de cada agente dependiendo del tiempo. Por lo anterior, las variables de entrada son el tiempo t y el número de agentes Ag , mientras que la salida es el vector de acciones de cada agente n .

```
function n=MatrizN(Ag,t)
```

Lo primero que se hace en el programa es construir un vector con los valores iniciales del número de acciones del sistema. Para esto armamos un vector de longitud Ag con la función *zeros*, y asignamos valores al número de acciones inicial de cada agente. En este caso, y para efectos de este estudio, a cada agente le damos un número de bienes activos igual a la posición que ocupa, es decir

```
function n=MatrizN(Ag,t)
    n0=zeros(1,Ag);
    for i=1:Ag
        n0(1,i)=i
    end
```

Ahora debemos construir la matriz X , para realizarlo primero se define la longitud de la matriz y luego se definen los valores de las posiciones fuera de la diagonal. Estos valores indican cual es el agente interactúa con otro dado, y los valores de la diagonal indican las habilidades de cada agente. En este caso, todos los agentes interactúan de la misma forma, y todos tienen la misma habilidad para conseguir bienes activos. Esta parte la integramos como

```
function n=MatrizN(Ag,t)
    n0=zeros(1,Ag);
    for i=1:Ag
        n0(1,i)=i
    end
    X=zeros(Ag,Ag);
    for i=1:Ag
        X(i,:)=1;
        X(i,i)=50; //todos con la misma habilidad
    end
    //el vector X
```

De la misma forma que en el caso anterior, se calculan los los valores y vectores propios de esta matriz por medio de la función *spec*, generando una matriz diagonal D con los valores propios de X y una matriz V que diagonaliza a X .

```
function n=MatrizN(Ag,t)
    n0=zeros(1,Ag);
    for i=1:Ag
        n0(1,i)=i
    end
    X=zeros(Ag,Ag);
    for i=1:Ag
        X(i,:)=1;
        X(i,i)=50; //todos con la misma habilidad
    end
    //el vector X
    [V D]=spec(X);
    // D diagonal valores propios V vectores propios
```

Ahora se debe construir la matriz U con los valores propios de X . La forma de construirla es colocar la exponencial en los elementos de la diagonal en la forma

```
function n=MatrizN(Ag,t)
    n0=zeros(1,Ag);
    for i=1:Ag
        n0(1,i)=i
    end
    X=zeros(Ag,Ag);
    for i=1:Ag
        X(i,:)=1;
        X(i,i)=50; //todos con la misma habilidad
    end //el vector X
    [V D]=spec(X); // D diagonal valores propios V vectores propios
    U=zeros(Ag,Ag);
    for i=1:Ag
        U(i,i)=exp(D(i,i)*t*%i);
    end //Matriz U de valores propios
```

Igual que en el caso anterior, llamamos $C1$ y $C2$ a las matrices que nos permiten calcular los valores de los operadores creación y aniquilación.

```
function n=MatrizN(Ag,t)
    n0=zeros(1,Ag);
    for i=1:Ag
        n0(1,i)=i
    end
    X=zeros(Ag,Ag);
    for i=1:Ag
        X(i,:)=1;
        X(i,i)=50; //todos con la misma habilidad
    end //el vector X
    [V D]=spec(X); // D diagonal valores propios V vectores propios
    U=zeros(Ag,Ag);
    for i=1:Ag
        U(i,i)=exp(D(i,i)*t*%i);
    end //Matriz U de valores propios
    C1=V*U*V^(-1); // Matriz para destruccion 2x2
    C2=V*U^(-1)*V^(-1); // Matriz creacion 2x2
```

Ahora el cálculo de los valores esperados del número de acciones se hace por medio de la sumatoria que indica el número de acciones de cada agente que se muestra en la ecuación 17. Esta ecuación se implementa de la siguiente forma:

```
function n=MatrizN(Ag,t)
    n0=zeros(1,Ag);
    for i=1:Ag
        n0(1,i)=i
    end
    X=zeros(Ag,Ag);
    for i=1:Ag
        X(i,:)=1;
        X(i,i)=50; //todos con la misma habilidad
    end //el vector X
```

```

[V D]=spec(X); // D diagonal valores propios V vectores propios
// V=[1,0;0,3];
// D=[2,2;-2,2];
U=zeros(Ag,Ag);
for i=1:Ag
U(i,i)=exp(D(i,i)*t*%i);
end //Matriz U de valores propios
C1=V*U*V^(-1); // Matriz para destruccion 2x2
C2=V*U^(-1)*V^(-1); // Matriz creacion 2x2

n=zeros(1,Ag);

for i=1:Ag
for j=1:Ag
n(1,i)=n(1,i)+C1(i,j)*C2(j,i)*n0(1,j);
end
end

for i=1:Ag
n(1,i)=real(n(1,i));
end

endfunction

```

Ahora, con el anterior código es posible determinar el número de bienes que posee cada agente. Los resultados obtenidos se presentan en la siguiente sección.

5.5. Resultados y análisis

Para ver el comportamiento del valor esperado del número de bienes de cada agente con la misma habilidad, se toman diferentes valores iniciales de número de bienes. En el resultado es curioso ver que si dibujamos estas funciones son periódicas y su amplitud de oscilación depende de la relación que tiene el número de bienes de cada agente con el número de bienes promedio del sistema. Por ejemplo, en la simulación para 10 agentes cada uno con un número de bienes inicial $n_1 = 1, n_2 = 2, \dots, n_{10} = 10$ podemos observar las relaciones entre las funciones propias de número de bienes para los agentes que conforman el sistema: Este resultado era el esperado e indica que si un individuo tiene un número grande de bienes está lejos del bienestar, puesto que teniendo mas bienes su bienestar no puede mejorar mas. Lo anterior implica que estos agentes, teniendo un número de bienes alejado del número promedio de bienes, tiendan a intercambiar más bienes que los que están mas cerca del promedio. En el caso contrario, para el agente que posee pocos bienes, éste tiende a cambiar la cantidad de bienes para aumentar su bienestar. Así que igual que en el caso anterior, los cambios en el valor esperado del número de bienes son grandes.

Por otro lado, en la gráfica vemos como las amplitudes de oscilación son simétricas respecto al promedio de bienes del sistema. Para este caso, el promedio de número de bienes entre los agentes es 5.5 y además tienen el mismo desfase, lo que indica que un aumento en el número de bienes de agentes que tienen un bienestar alto está acompañado necesariamente de una disminución en el número de bienes de agentes que tienen un bienestar bajo. Este comportamiento es análogo a lo que se observa en un sistema económico donde los agentes están satisfechos con un número promedio de bienes y no aumentan su bienestar por el hecho de obtener mas o menos bienes.

Estas observaciones son confirmadas por un análisis mas detallado, advirtiendo que la amplitud de oscilación es la misma para agentes que están a la misma distancia del número de bienes promedio. Para este caso, el agente que tiene la mayor cantidad de bienes iniciales tiene el mismo tamaño de oscilación que

Oscilaciones para 10 Agentes

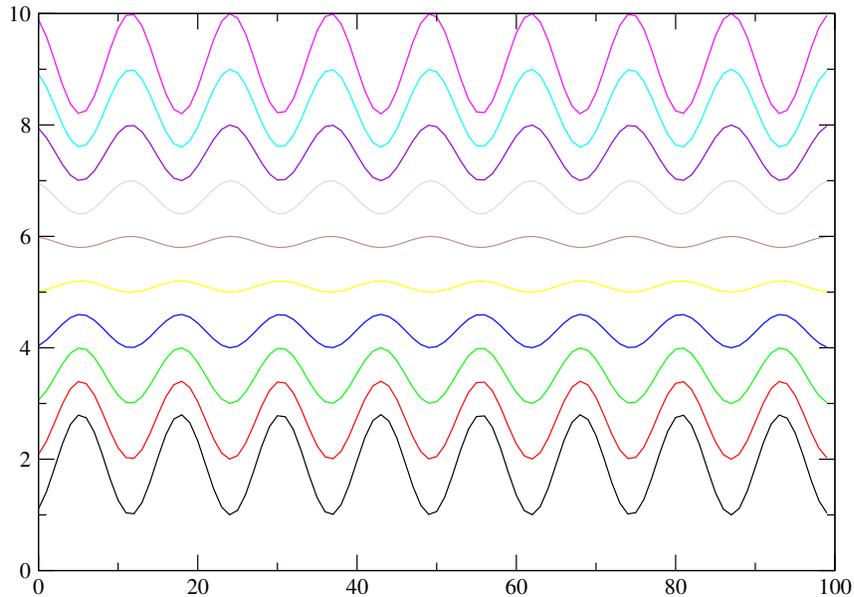


Figura 5.1: Valor esperado del número de acciones para un sistema de diez agentes

el que tiene la menor cantidad de bienes. El tamaño de ambas es igual a 1.8173. Además, la gráfica permite ver que las amplitudes crecen a medida que el número de bienes de los agentes se aleja del promedio. Ahora, surge la siguiente pregunta ¿Qué tipo de comportamiento tiene asociado este crecimiento? Para responderla, realiza una gráfica para un sistema compuesto por 99 agentes, cada uno con una cantidad inicial $n_1 = 1, n_2 = 2, \dots, n_{99} = 99$ de bienes y se calcula su amplitud de oscilación. Los resultados se muestran en la siguiente gráfica. Se observa que la amplitud de oscilación crece linealmente respecto a el promedio de bienes de los agentes en el sistema. La gráfica muestra la interacción de 99 agentes, sin embargo este comportamiento es independiente del número de agentes en el sistema, puesto que todas las amplitudes crecen linealmente. Sin embargo la pendiente de la gráfica, es decir la tasa de crecimiento de las fluctuaciones, si depende del número de agentes en el sistema. Se observa que entre mas agentes tenga el sistema, la tasa de crecimiento es menor. El anterior resultado muestra que las fluctuaciones en el número de bienes de los agentes que tienen mas bienestar siempre es la misma para un sistema con muchos agentes. Para observar detalladamente este comportamiento, se estudia la pendiente de esta curva para sistemas con diferente número de agentes. El resultado de este estudio se muestra a continuación en la Figura 3. Sabemos que las fluctuaciones dependen de que tan conforme se siente el agente con el número de bienes que tiene, sin embargo si el número de agentes en el sistema aumenta, se llega a una situación donde la preferencia hacia ese bien no puede aumentar mas y por lo tanto la amplitud aproximadamente sigue siendo la misma. Otra relación que se observa es que el cambio de las oscilaciones con respecto al número de agentes es menor si el número de agentes se hace grande. De hecho este cambio tiende a cero cuando el número de agentes tiende a infinito, es decir las diferencias entre los cambios esperados en el número de bienes de los agentes son mas pequeños en tanto el sistema sea mas grande. Podemos así advertir que si el número de agentes en el sistema tiende a infinito las amplitudes no pueden crecer también a infinito. Para comprobar lo anterior, se gráfica la amplitud máxima de cada sistema como función del número de agentes. La anterior gráfica permite observar que la amplitud tiende a ser la misma para un sistema de muchos agentes, es decir se tiene una especie de equilibrio donde se alcanza un punto máximo y deja de crecer.

En resumen, este modelo nos permite ver el comportamiento de un tipo de bien en un sistema

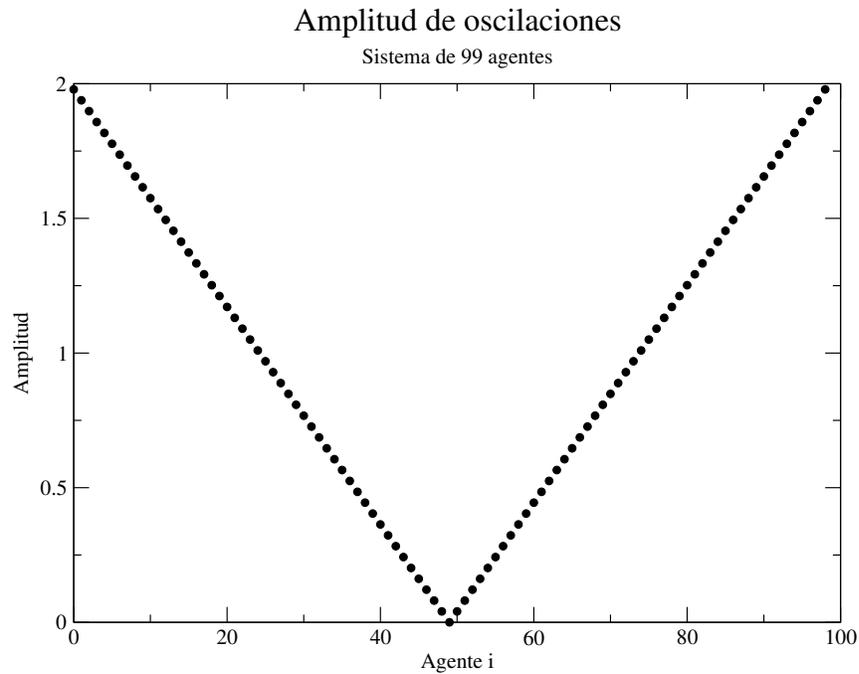


Figura 5.2: Relación de amplitudes de oscilación para un sistema de 99 agentes

económico y cómo éste comportamiento es análogo a las preferencias que tiene un agente dependiente de la cantidad de bienes que tenga. Se concluye que si el número de bienes que tiene el agente es alto, entonces el agente no puede aumentar mucho su bienestar dado que en tal caso el agente tiene una mayor disposición a intercambiar ese bien en relación con lo que sucede con otro agente que tenga una cantidad menor de bienes (cercana al promedio de bienes) y que por lo tanto se encuentra en una situación de máxima felicidad. Si el número de bienes que tiene el agente es bajo, dicho agente busca la forma de intercambiar ese bien para aumentar su bienestar. Por lo anterior, si el sistema está compuesto por un número grande de agentes, no se espera que los agentes que tienen una gran cantidad de bienes estén dispuestos a perder una gran cantidad de su riqueza. Igualmente, si el agente tiene un número pequeño de bienes y pretende aumentar su bienestar, se espera que el cambio en el número de bienes no sea grande. Desde esta perspectiva, el modelo basado en operadores parece estar en desacuerdo con el modelo cinético de distribución de riqueza previamente presentado, sin embargo en el próximo capítulo se discutirán los resultados obtenidos en esta tesis y se presentarán algunas conclusiones.

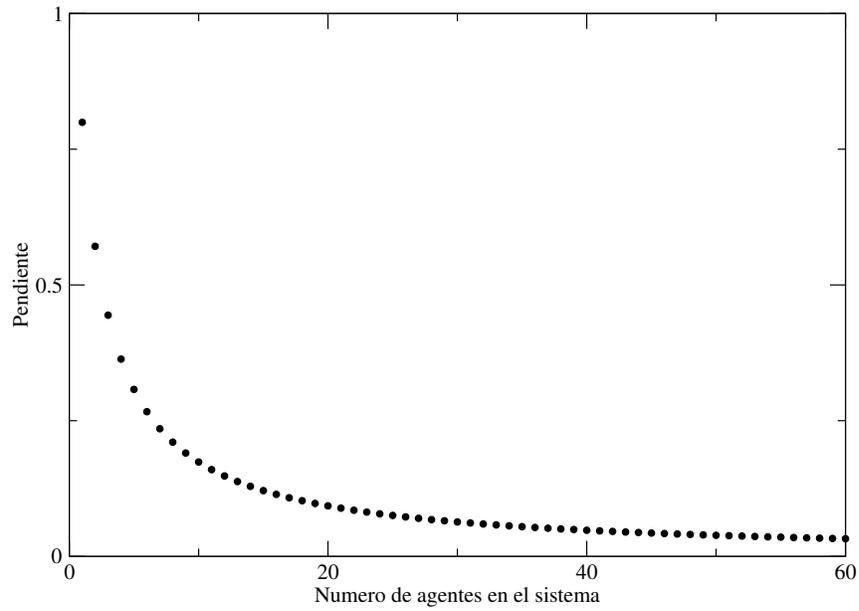


Figura 5.3: Tasa de crecimiento de la amplitud para sistemas de muchos agentes.

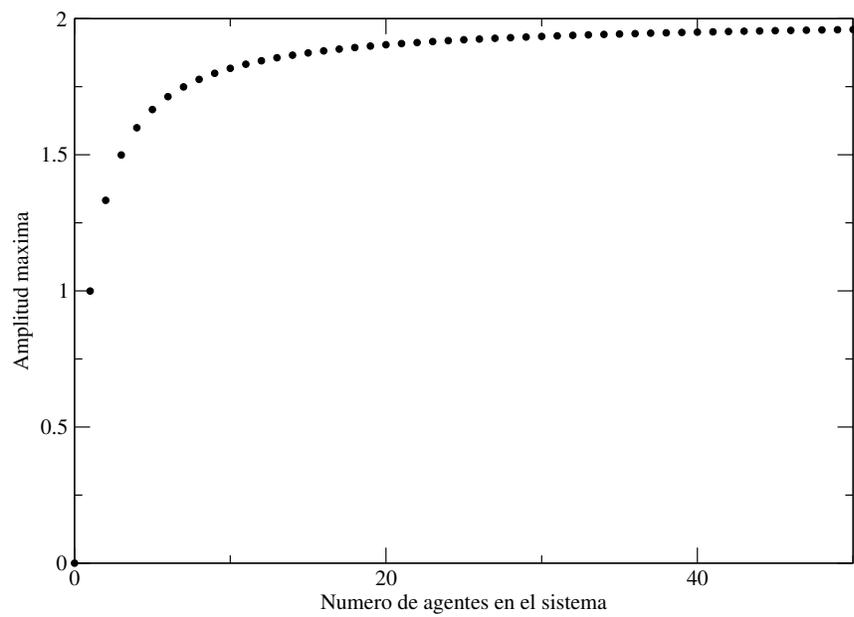


Figura 5.4: Amplitud máxima de oscilación para sistemas de muchos agentes

En este trabajo se usaron conceptos y herramientas de la mecánica estadística y de la mecánica cuántica para modelar y caracterizar un sistema económico en el que los agentes interactúan entre pares intercambiando bienes activos por dinero. En este capítulo se hace una discusión de los alcances de cada uno de los modelos desarrollados, enfocándose en las implicaciones de los resultados obtenidos tanto desde el punto de vista de la econofísica como de la economía.

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En esta tesis se modeló y caracterizó un sistema económico cerrado, en el que los agentes que constituyen al sistema intercambian bienes activos por dinero, haciendo uso de conceptos y herramientas de la física teórica. Las propiedades emergentes y las mismas características de este sistema complejo fueron examinadas a través de modelos basados en mecánica estadística y mecánica cuántica. En primer lugar, se estudiaron desde la perspectiva de la mecánica estadística algunos modelos cinéticos de distribución, tanto de dinero como de riqueza, considerando que los agentes presentan propensión al ahorro, que interactúan entre pares y que se adaptan a las propiedades del sistema. Producto de esta dinámica, se obtuvieron los respectivos patrones de distribución, estimando el nivel de desigualdad de las distribuciones obtenidas. En segundo lugar, desde un enfoque basado en operadores de creación y destrucción, se realizó un modelo mecánico-cuántico del mismo sistema al asumir que este sistema se comporta de forma análoga a un gas de bosones interactuantes, solucionando las ecuaciones de Heisenberg analíticamente para el caso en que el sistema está constituido por dos agentes y numéricamente para el caso en que el sistema está constituido por muchos agentes, de manera que en este último caso surgen comportamientos emergentes relacionados con la escasez o abundancia de los bienes activos que posee cada uno de los agentes del sistema.

Inicialmente se muestra un modelo cinético de sistemas complejos estándar desde una perspectiva analítica. Para esto se considera un sistema cuyas variables termodinámicas son fijas y está conformado por N agentes que compiten por partes de una cantidad U que es conservada en el sistema. Cuando se alcanza el equilibrio, los agentes se ordenan en rangos definidos por la porción de la cantidad U que poseen, obteniéndose la respectiva función de distribución de probabilidad cuando el sistema se encuentra en el estado de equilibrio.

Posteriormente se realizó un modelo cinético de un sistema constituido por N agentes que intercambian dinero y bienes activos entre pares desde una perspectiva numérica. Para esto se implementó una simulación donde los agentes interactúan compitiendo por porciones de las cantidades conservadas en el sistema. Aunque estos modelos cinéticos de distribución de dinero y riqueza pueden ser basados en una teoría de estratificación social, los procesos que generan la desigualdad son descritos en las simulaciones computacionales a través de transacciones entre pares de agentes, de una forma análoga al intercambio de energía entre pares de partículas de un gas ideal. El sistema evoluciona debido a que la cantidad de información requerida para conocerlo se hace cada vez mas grande hasta llegar a un punto de saturación llamado “estado de equilibrio”. Por otro lado, el grado de desigualdad de estas distribuciones se midió estimando el índice de Gini, que también se considera como una propiedad emergente.

Los resultados obtenidos con las simulaciones mostraron que la cantidad de información presente en los modelos cinéticos depende en gran medida de la cantidad intercambiada por los agentes en el sistema. En el modelo de Dragulescu-Yakovenko la forma de la distribución exponencial decreciente permanece inalterada, sin embargo la entropía no es la misma para diferentes cantidades intercambiadas. Contrario

es el caso para el modelo de Chakraborti-Chakrabarti que incorpora un parámetro de propensión al ahorro fijo, en el cual la entropía en el estado de equilibrio para diferentes valores de este parámetro toma el mismo valor, pero la forma de la distribución son funciones Gamma con diferentes parámetros de ajuste. Respecto a las medidas de desigualdad, que son dependientes de la forma de la distribución, se evidenció que para el modelo de Dragulescu-Yakovenko el índice de Gini toma el valor $G = 0.5$, mientras que para el modelo de Chakraborti-Chakrabarti el índice de Gini toma un valor $G < 0.5$. En esta tesis se desarrolló un nuevo modelo de distribución de dinero que tiene la ventaja de que el índice de Gini toma valores en el rango $0 < G < 0.5$, pero para el cual la forma de la distribución no es estable y cambia de acuerdo al valor que tenga el parámetro p , el cual se introdujo en el intercambio de dinero entre los agentes.

Los anteriores modelos de distribución de dinero son en gran medida restrictivos, ya que se enfocan en estudiar únicamente los intercambios de dinero en sistemas compuestos por muchos agentes. Sin embargo, la riqueza de un agente no depende solo de su dinero sino, entre otras variables, del dinero que represente la cantidad de bienes activos que el agente tenga. En esta tesis se desarrolló un modelo cinético de distribución de riqueza que incorpora un parámetro de propensión al ahorro de dinero constante y que también incluye cambios estocásticos en el valor del bien activo entre transacciones. Como producto de la dinámica considerada en este modelo, se encontró que cuando el sistema llega al estado de equilibrio la riqueza se distribuye en forma de ley de potencia (ley de Pareto), de tal forma que el índice de Pareto, que mide el nivel de desigualdad de esta distribución, depende inversamente del parámetro de propensión al ahorro.

Por otra parte, el sistema cerrado compuesto por agentes que intercambian bienes activos por dinero también se modeló desde una perspectiva mecánico-cuántica de forma análoga a un gas de bosones interactuantes. Lo anterior se realizó a partir de la definición de operadores que actúan sobre los estados de los agentes cambiando la cantidad que tiene de dinero o bienes. El sistema se describió a través de un operador Hamiltoniano que depende de operadores creación y destrucción de bienes activos, así como también de otro tipo de operadores creación y destrucción que cumplen el papel de subir y bajar el precio de los bienes activos en un valor fijo. Para el caso de un sistema constituido por dos agentes se soluciona analíticamente la ecuación de Heisenberg, mientras que para el caso de un sistema constituido por un número grande de agentes se soluciona numéricamente a través de una simulación computacional que se implementa en el programa *scilab*. El algoritmo que indica los pasos para encontrar el valor esperado del número de bienes que tiene cada agente en el sistema se simplifica al tener en cuenta que los estados de los agentes son ortonormales y por lo tanto muchos términos en el cálculo son iguales a cero, esto hace que se reduzca notablemente el tiempo de simulación. Los resultados indican que los agentes que tienen la mayor cantidad de bienes se comportan de forma parecida a los que tienen una cantidad muy limitada de bienes, en el sentido de que se espera que ambos cambien la misma cantidad de bienes y por lo tanto tengan la misma amplitud en sus fluctuaciones. Particularmente en un sistema donde los agentes tienen una cantidad diferente de bienes las fluctuaciones dependen de la relación entre la cantidad de bienes de el agente y la cantidad de bienes promedio. De hecho si el número de agentes en el sistema se hace cada vez mas grande el tamaño de las fluctuaciones para el agente con el mayor número de bienes tiende a ser el mismo.

En cuanto a las distribuciones de riqueza, con el modelo cinético se obtienen los mejores resultados, dado que cuando se maximiza la entropía, las distribuciones de riqueza son leyes de potencia. En cambio el modelo tipo gas de bosones interactuantes no logra explicar la distribución de riqueza, pero sí logra caracterizar la distribución del bien entre los agentes. El resultado de este trabajo se refleja más en el sentido microeconómico, es decir en la preferencia de un bien ante la su escasez o abundancia. Ambos modelos son capaces de caracterizar sistemas complejos, ya que es claro que exhiben un comportamiento que no es impuesto por un control central y la dinámica, dictada por el intercambio aleatorio o por la ecuación de evolución de Heisenberg, genera comportamientos emergentes que no son evidentes al analizar agentes en particular. Además, ambos modelos describen el comportamiento complejo de un sistema económico en términos de sus constituyentes básicos: los agentes y sus características.

Tanto el modelo cinético como el modelo operacional son resultado de simplificar el comportamiento de la economía describiendo unas pocas características relevantes del sistema. Una de los puntos criticados por los economistas es que estos modelos aún no pueden evaluar decisiones políticas, ya que en cierta medida

se aceptaría que el modelo simplificado es adecuado. Sin embargo, es tarea de trabajos posteriores incluir elementos que matematicen proposiciones propias de la economía para acercarse aún más a la descripción del comportamiento de un sistema económico real, tal como lo hizo originalmente Angle en la teoría del superávit de la estratificación social. Además, se propone, como problema abierto, la conexión entre los dos modelos presentados, seguramente relacionados a través de matrices estocásticas de interacción que se integren al modelo operacional.

CAPÍTULO 7

APÉNDICE 1. CÁLCULO DE LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE PARTES DE U

La condición de normalización de la probabilidad es

$$1 = \sum_i \frac{n_i}{N} = \sum_i p_i. \quad (1)$$

La cantidad U promedio por agente es

$$\bar{u} = \frac{U}{N} = \frac{\sum_i u_i n_i}{N} = \sum_i u_i \frac{n_i}{N} = \sum_i u_i p_i. \quad (2)$$

El número de configuraciones posibles de los N agentes distribuidos por números de ocupación n_1, n_2, n_3, \dots es

$$W = \frac{N!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_i!}. \quad (3)$$

La configuración mas probable del sistema de los N agentes es aquella para la cual el número de configuraciones es máximo

$$W \rightarrow W_{\max}, \quad (4)$$

por lo tanto

$$W_{\max} = \left[\frac{N!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_i!} \right]_{\max}. \quad (5)$$

Al tomar el logaritmo se tiene

$$\log W_{\max} = \log N! - \log [n_1! n_2! n_3! \dots n_i!], \quad (6)$$

lo cual es equivalente a

$$\log W_{\max} = \log N! - \sum_i \log n_i!. \quad (7)$$

Dado W_{\max} , entonces de 7 se tiene que

$$\Delta \log W_{\max} = \Delta \log N! - \Delta \sum_i \log n_i!. \quad (8)$$

Como tenemos que N es constante, diferenciando el primer término del lado derecho de la ecuación 8 se cumple que

$$\Delta \log N! = 0, \quad (9)$$

mientras que el segundo término

$$\Delta \sum_i \log n_i! = \sum_i \Delta \log n_i! \approx \sum_i \Delta n_i \log n_i. \quad (10)$$

Tomando 4, tenemos

$$\Delta U = \sum_i u_i \Delta n_i = 0. \quad (11)$$

De igual forma, tomando 3 tenemos

$$\Delta N = \sum_i \Delta n_i = 0. \quad (12)$$

Para que la anterior expresión se cumpla, se requiere que

$$\sum_i \Delta n_i + \alpha \sum_i \Delta n_i + \beta \sum_i u_i \Delta n_i = 0, \quad (13)$$

ecuación que se reescribe como

$$\sum_i \Delta n_i + \alpha + \beta u_i = 0, \quad (14)$$

lo cual implica que

$$\log n_i + \alpha + \beta u_i = 0. \quad (15)$$

De esta forma se obtiene

$$n_i = e^{-\alpha - \beta u_i}, \quad (16)$$

pero teniendo en cuenta 3, se encuentra

$$\sum_i n_i = e^{-\alpha} \sum_i e^{-\beta u_i} = N, \quad (17)$$

de donde se concluye que

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{\sum_i e^{-\beta u_i}}, \quad (18)$$

por lo que el número de ocupación del microestado i es

$$n_i = N \frac{e^{-\beta u_i}}{\sum_i e^{-\beta u_i}}, \quad (19)$$

y de esta forma la probabilidad de encontrar un agente en el sistema en el microestado i , teniendo una cantidad u_i , es

$$p_i = \frac{n_i}{N} = \frac{e^{-\beta u_i}}{\sum_i e^{-\beta u_i}}. \quad (20)$$

APÉNDICE 2. DERIVACIÓN DE LA RELACIÓN ENTRE EL NÚMERO DE ESTADOS Y LA ENTROPÍA

Partiendo de

$$\log W_{\max} = \log N! - \sum_i \log n_i!, \quad (1)$$

al considerar la aproximación de Stirling, se cumple que

$$\log W_{\max} = N \log N - N - \sum_i (n_i \log n_i - n_i). \quad (2)$$

Al tener en cuenta la ligadura 3, entonces

$$\log W_{\max} = N \log N - \sum_i (n_i \log n_i) \quad (3)$$

A partir de la expresión 7, se tiene que

$$n_i = N p_i, \quad (4)$$

y reemplazando 4 en 3, se obtiene

$$\log W_{\max} = N \log N - \sum_i (N p_i \log N p_i), \quad (5)$$

expresión que se reescribe como

$$\log W_{\max} = N \log N - \sum_i (N p_i (\log N + \log p_i)), \quad (6)$$

de donde finalmente se obtiene que

$$\log W_{\max} = -N \sum_i p_i \log p_i. \quad (7)$$

CAPÍTULO 9

APÉNDICE 3: ENSAMBLE GRAN-CANÓNICO

Supongamos que tenemos dos sistemas S y S' , de tal forma que el primero es nuestro sistema de interés y el segundo representa el mundo exterior. El sistema S está caracterizado por las variables N , x e y , mientras que el sistema S' está caracterizado por las variables N_p , x_p e y_p , donde N es el número de agentes del sistema de interés, N_p es el número de agentes del sistema compuesto, x e y son cantidades de interés en el sistema S , x_p e y_p son cantidades de interés en el sistema S' . Por lo anterior, el sistema compuesto tiene una cantidad de agentes N_c igual a la suma de los agentes de cada sistema S y S' , es decir $N_c = N + N_p$, y la cantidad x es extensiva, con lo cual $x_c = x + x_p$.

Para el sistema compuesto, la función de partición se construye como

$$Q(N_c, \bar{u}, x_c) = Q(N, \bar{u}, x)Q(N_p, \bar{u}, x_p). \quad (1)$$

La probabilidad de encontrar el sistema de interés en el estado j -ésimo con N agentes en un instante de tiempo es

$$p_{N,j} = \frac{e^{-U_j/\bar{u}}}{Q(N, \bar{u}, x)}. \quad (2)$$

Multiplicando y dividiendo por la función de partición del sistema exterior

$$p_{N,j} = \frac{e^{-U_j/\bar{u}}}{Q(N, \bar{u}, x)} \frac{Q(N_p, \bar{u}, x_p)}{Q(N_p, \bar{u}, x_p)}, \quad (3)$$

la cual se puede reescribir como

$$p_{N,j} = \frac{e^{-U_j/\bar{u}}Q(N_p, \bar{u}, x_p)}{Q(N_c, \bar{u}, x_c)}. \quad (4)$$

Esta última expresión escrita en términos del número de partículas del sistema compuesto y del sistema de interés es igual a

$$p_{N,j} = \frac{e^{-U_j/\bar{u}}Q(N_c - N, \bar{u}, x_c - x)}{Q(N_c, \bar{u}, x_c)}. \quad (5)$$

Asumiendo que existe la ecuación de Maxwell

$$Y = \bar{u} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_u, \quad (6)$$

y ya que $S = U/\bar{u} + \bar{u} \log Q(N, \bar{u}, x)$, entonces se tiene

$$\frac{1}{\bar{u}} Y = \left(\frac{\partial \log Q(N, \bar{u}, x)}{\partial x} \right)_{\bar{u}, N}. \quad (7)$$

Tomando $N_c \gg N$ y $x_c \gg x$, se cumple que

$$\log Y(N_c - N, \bar{u}, x_c - x) = \log Q(N_c - N, \bar{u}, V_c) - xy/\bar{u}, \quad (8)$$

donde se tiene que $x_c \gg x$, entonces Y no cambia entre $\{x_c - x, x_c\}$ de forma que

$$e^{\log Q(N_c - N, \bar{u}, x_c - x)} = e^{\log Q(N_c - N, \bar{u}, x_c - x) - xy/\bar{u}}, \quad (9)$$

con lo cual

$$Q(N_c - N, \bar{u}, x_c - x) = Q(N_c - N, \bar{u}, x_c - x) e^{-xy/\bar{u}}. \quad (10)$$

De esta manera, la probabilidad se escribe como

$$p_{N,j} = \frac{e^{U_j/\bar{u}} Q(N_c - N, \bar{u}, x_c) e^{-xy/\bar{u}}}{Q(N_c, \bar{u}, x_c)}, \quad (11)$$

de tal forma que si operamos sobre los exponenciales, se obtiene

$$p_{N,j} = \frac{e^{(U_j - xy)/\bar{u}} Q_{N_c - N}}{Q_{N_c}}. \quad (12)$$

Si se multiplica el anterior resultado por N_c unos de la forma

$$p_{N,j} = e^{(U_j - xy)/\bar{u}} \frac{Q_{N_c - 1}}{Q_{N_c}} \frac{Q_{N_c - 2}}{Q_{N_c - 1}} \frac{Q_{N_c - 3}}{Q_{N_c - 2}} \dots \frac{Q_{N_c - N}}{Q_{N_c - (N - 1)}}, \quad (13)$$

y teniendo en cuenta que el potencial químico corresponde a

$$\mu = \bar{u} \log \frac{Q_{N - 1}}{Q_N}, \quad (14)$$

entonces, la probabilidad escrita en en términos del potencial químico es

$$p_{N,j} = e^{(U_j - xy)/\bar{u}} e^{N\mu/\bar{u}}, \quad (15)$$

la cual escrita en términos de la función de partición es

$$p_{N,j} = \frac{1}{Z} e^{N\mu/\bar{u} - U_j/\bar{u}}. \quad (16)$$

de donde se obtiene que la función de partición es

$$Z = e^{xy/\bar{u}} = \sum_N \sum_j e^{(-N\mu + U_j)/\bar{u}}. \quad (17)$$

Si el sistema se divide en M subsistemas

$$N\mu = \sum_{i=1}^M \mu_i N_i = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 + \mu_3 N_3 + \dots + \mu_i N_i, \quad (18)$$

y se define la cantidad λ como

$$\lambda = e^{\mu N}, \quad (19)$$

entonces la función de partición de N agentes queda escrita como

$$Z(N, \bar{u}) = \sum_N \lambda^N Q(N, \bar{u}). \quad (20)$$

Pero dado que la función de partición de N agentes corresponde con la función de un agente elevada a la N potencia, entonces

$$Z(N, \bar{u}) = \sum_N \lambda^N Q(1, \bar{u})^N, \quad (21)$$

o de forma equivalente

$$Z(N, \bar{u}) = \sum_N (\lambda Q(1, \bar{u}))^N, \quad (22)$$

por lo que la probabilidad queda expresada como

$$p_{N,j} = \frac{1}{Z(N, \bar{u})} e^{N\mu/\bar{u} - U_j/\bar{u}}, \quad (23)$$

y de esta forma se puede obtener la distribución tipo Bose-Einstein

$$n_{BE} = \frac{1}{e^{N\mu/\bar{u} - U_j/\bar{u}} - 1}. \quad (24)$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Anirban Chakraborti and Bikas K Chakrabarti. Statistical mechanics of money: how saving propensity affects its distribution. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* **17** (2000):167–170.
- [2] MEJ Newman. Complex systems: A survey. *arXiv preprint arXiv:1112.1440* (2011).
- [3] Nino Boccara. *Modeling complex systems*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [4] Robert A Meyers. *Complex systems in finance and econometrics*. Springer Science+ Business Media, LLC, 2011.
- [5] Yuji Aruka. *Complexities of production and interacting human behaviour*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [6] Hideaki Aoyama, Yoshi Fujiwara, Yuichi Ikeda, Hiroshi Iyetomi, and Wataru Souma. Econophysics and companies. *Cambridge Books* (2010).
- [7] Akira Namatame, Taisei Kaizouji, and Yuuji Aruka. The complex networks of economic interactions. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* **567** (2006).
- [8] Slava Ispolatov, PL Krapivsky, and Sidney Redner. Wealth distributions in asset exchange models. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* **2** (1998):267–276.
- [9] Marco Patriarca, Els Heinsalu, and Anirban Chakraborti. Basic kinetic wealth-exchange models: common features and open problems. *The European Physical Journal B* **73** (2010):145–153.
- [10] Adrian Dragulescu and Victor M Yakovenko. Statistical mechanics of money. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* **17** (2000):723–729.
- [11] Arnab Chatterjee, Bikas K Chakrabarti, and SS Manna. Pareto law in a kinetic model of market with random saving propensity. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **335** (2004):155–163.
- [12] Els Heinsalu and Marco Patriarca. Uni-vs. bi-directional kinetic exchange models. *International Journal of Computational Economics and Econometrics* **5** (2015):213–219.
- [13] Marco Patriarca, Els Heinsalu, and Anirban Chakraborti. Basic kinetic wealth-exchange models: common features and open problems. *The European Physical Journal B* **73** (2010):145–153.
- [14] Arnab Chatterjee and Bikas K Chakrabarti. Kinetic exchange models for income and wealth distributions. *European Physical Journal B* **60** (2007):135–149.
- [15] Marco Patriarca, Els Heinsalu, and Anirban Chakraborti. Basic kinetic wealth-exchange models: common features and open problems. *The European Physical Journal B* **73** (2010):145–153.
- [16] A Drăgulescu and Victor M Yakovenko. Evidence for the exponential distribution of income in the USA. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* **20** (2001):585–589.

- [17] Adrian Drăgulescu and Victor M Yakovenko. Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the United Kingdom and the United States. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **299** (2001):213–221.
- [18] Adel Y Abul-Magd. Wealth distribution in an ancient Egyptian society. *Physical Review E* **66** (2002):057104.
- [19] Anand Banerjee, Victor M Yakovenko, and T Di Matteo. A study of the personal income distribution in Australia. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **370** (2006):54–59.
- [20] Bikas K Chakrabarti, Anirban Chakraborti, and Arnab Chatterjee. *Econophysics and sociophysics: trends and perspectives*. John Wiley & Sons, 2007.
- [21] Arnab Das and Sudhakar Yarlagadda. Analytic treatment of a trading market model. *Physica Scripta* **2003** (2003):39.
- [22] Arnab Chatterjee, Sudhakar Yarlagadda, and Bikas K Chakrabarti. *Econophysics of wealth distributions: Econophys-Kolkata I*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [23] Arnab Das and Sudhakar Yarlagadda. An analytic treatment of the Gibbs–Pareto behavior in wealth distribution. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **353** (2005):529–538.
- [24] Walter Greiner, Ludwig Neise, and Horst Stöcker. *Thermodynamics and statistical mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [25] Linda E Reichl and Ilya Prigogine. *A modern course in statistical physics*, volume 71. University of Texas press Austin, 1980.
- [26] Franz Schwabl. *Statistical Mechanics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [27] John Angle. The macro model of the inequality process and the surging relative frequency of large wage incomes. In *of Markets and Business Networks*, pages 185–213. Springer, 2007.
- [28] John Angle. The surplus theory of social stratification and the size distribution of personal wealth. *Social Forces* (1986):293–326.
- [29] Marco Patriarca, Anirban Chakraborti, and Kimmo Kaski. Statistical model with a standard Γ distribution. *Physical Review E* **70** (2004):016104.
- [30] Charles M Macal and Michael J North. Tutorial on agent-based modelling and simulation. *Journal of simulation* **4** (2010):151–162.
- [31] Sanchari Goswami and Anirban Chakraborti. Kinetic exchange models in economics and sociology. In *Nonlinear Maps and their Applications*, pages 69–88. Springer, 2015.
- [32] Karim PY Thebault, Seamus Bradley, and Alexander Reutlinger. *Modelling Inequality* (2015).
- [33] Marcel Ausloos, Andrzej Pe, et al. Model of wealth and goods dynamics in a closed market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **373** (2007):560–568.
- [34] Arnab Chatterjee and Bikas K Chakrabarti. Kinetic market models with single commodity having price fluctuations. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* **54** (2006):399–404.
- [35] FABIO Bagarello. An operatorial approach to stock markets. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **39** (2006):6823.
- [36] FABIO Bagarello. Stock markets and quantum dynamics: a second quantized description. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **386** (2007):283–302.

- [37] Fabio Bagarello. A quantum statistical approach to simplified stock markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **388** (2009):4397–4406.
- [38] James P Sethna. Entropy, order parameters, and complexity. *Statistical Mechanics, Laboratory of Atomic and Solid State Physics, Cornell University, Ithaca, NY* (2006):14853–2501.
- [39] H Eugene Stanley, Viktor Afanasyev, LAN Amaral, SV Buldyrev, AL Goldberger, S Havlin, H Leschhorn, P Maass, Rosario Nunzio Mantegna, C-K Peng, et al. Anomalous fluctuations in the dynamics of complex systems: from DNA and physiology to econophysics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **224** (1996):302–321.
- [40] Johannes Voit. *The statistical mechanics of financial markets*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [41] Leigh Tesfatsion and Kenneth L Judd. *Handbook of computational economics: agent-based computational economics*, volume 2. Elsevier, 2006.
- [42] Philip K Rawlings, David Reguera, and Howard Reiss. Entropic basis of the Pareto law. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **343** (2004):643–652.
- [43] FV Kusmartsev. Statistical mechanics of economics I. *Physics Letters A* **375** (2011):966–973.
- [44] Vilfredo Pareto. *Cours d'économie politique*. Librairie Droz, 1964.
- [45] KE Kürten and FV Kusmartsev. Bose-Einstein distribution of money in a free-market economy. II. *EPL* **93** (2011):28003.
- [46] José Paschoal Rossetti, Mario Rojas, and Mauricio Ordoñez. *Introducción a la Economía*, volume 7. Harla, 1994.
- [47] JR Iglesias and RMC De Almeida. Entropy and equilibrium state of free market models. *The European Physical Journal B* **85** (2012):1–10.
- [48] Vladimir Saptsin and Vladimir Soloviev. Relativistic quantum econophysics-new paradigms in complex systems modelling. *arXiv preprint arXiv:0907.1142* (2009).
- [49] Victor Pavlovich Maslov. Econophysics and quantum statistics. *Mathematical Notes* **72** (2002):811–818.
- [50] John B Taylor and Akila Weerapana. *Principles of microeconomics*, 1995.
- [51] Michael Parkin. *Statistical Mechanics*. Addison-Wesley, 2014.
- [52] John Angle. The Inequality Process vs. The Saved Wealth Model. Two Particle Systems of Income Distribution; Which Does Better Empirically? (2010).
- [53] M Diniz and FM Mendes. Effects of taxation on money distribution. *International Review of Financial Analysis* **23** (2012):81–85.
- [54] Rosario N Mantegna and H Eugene Stanley. *Introduction to econophysics: correlations and complexity in finance*. Cambridge university press, 1999.
- [55] David Jeffery Griffiths. *Introduction to quantum mechanics*. Pearson Education India, 2005.
- [56] H.R. Varian. *Microeconomía Intermedia*. Antoni Bosch, 1999.
- [57] ABZ Salem and TD Mount. A convenient descriptive model of income distribution: the gamma density. *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1974):1115–1127.
- [58] Marco Raberto, Silvano Cincotti, Sergio M Focardi, and Michele Marchesi. Agent-based simulation of a financial market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **299** (2001):319–327.

- [59] Arnab Chatterjee, Bikas K Chakrabarti, and SS Manna. Money in gas-like markets: Gibbs and Pareto laws. *Physica Scripta* **2003** (2003):36.
- [60] Anirban Chakraborti, Srutarshi Pradhan, and Bikas K Chakrabarti. A self-organising model of market with single commodity. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **297** (2001):253–259.
- [61] Gholam Reza Mohtashami Borzadaran. Maximum entropy and the entropy of mixing for income distributions. *Journal of Income Distribution* **18** (2009):179–186.
- [62] Anand Banerjee and Victor M Yakovenko. Universal patterns of inequality. *New Journal of Physics* **12** (2010):075032.
- [63] Marco Patriarca, Anirban Chakraborti, and Guido Germano. Influence of saving propensity on the power-law tail of the wealth distribution. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **369** (2006):723–736.
- [64] Daniel Matthes and Giuseppe Toscani. On steady distributions of kinetic models of conservative economies. *Journal of Statistical Physics* **130** (2008):1087–1117.
- [65] Victor M Yakovenko and J Barkley Rosser Jr. Colloquium: Statistical mechanics of money, wealth, and income. *Reviews of Modern Physics* **81** (2009):1703.
- [66] Els Heinsalu and Marco Patriarca. The common patterns of nature. *Journal of evolutionary biology* **22** (2009):1563–1585.
- [67] N Gregory Mankiw. *Principios de economía*. Cengage Learning Editores, 2012.
- [68] Fabio Bagarello. *Quantum dynamics for classical systems: with applications of the Number operator*. John Wiley & Sons, 2012.