



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Tesis de Maestría

***Termodinámica de Agujeros Negros
de Kerr en la aproximación
Euclidiana de Gibbons-Hawking***

Juan Camilo Serna Bedoya

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Observatorio Astronómico Nacional

Bogotá, Colombia

2016

Termodinámica de Agujeros Negros de Kerr en la aproximación Euclidiana de Gibbons-Hawking

Juan Camilo Serna Bedoya

Tesis o trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias Astronomía

Director:

Ph.D José Robel Arenas Salazar

Línea de Investigación:

Gravedad Cuántica

Grupo de Investigación:

Termodinámica de Agujeros Negros

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Observatorio Astronómico Nacional

Bogotá, Colombia

2016

Resumen

En el año de 1972, Hawking demostró de una forma rigurosa que el área del horizonte de eventos no puede decrecer, teniendo esto cierta similitud con la segunda ley de la termodinámica. Al año siguiente, Bardeen, Carter y Hawking publicaron el artículo "Four Laws of Black Hole Mechanics", en el cual comparan las cuatro leyes de la termodinámica con las cuatro leyes que rigen la mecánica de agujeros negros. El objetivo principal de este trabajo es encontrar las relaciones de la Periodicidad, y la Entropía Bekenstein-Hawking para el Agujero Negro de Kerr por medio de la aproximación euclidiana de Gibbons-Hawking, con base en los cálculos realizados para la el Agujero Negro de Schwarzschild.

Palabras clave: Agujero Negro de Schwarzschild, Agujero Negro de Kerr, Entropía Bekenstein-Hawking, Aproximación Euclidiana de Gibbons Hawking.

Abstract

In the year 1972, Hawking rigorously demonstrated that the area of the event horizon can not decrease, having this a certain similarity with the second law of thermodynamics. The next year, Bardeen, Carter and Hawking published the article "The Four Laws of Black Hole Mechanics" in which they compare the four laws of thermodynamics with the four laws that govern the mechanics of black holes. The main objective of this work is to find the relations of the Periodicity and the Bekenstein-Hawking Entropy for the Kerr Black Hole by means of the Gibbons-Hawking Euclidean approximation, based on the calculations made for the Schwarzschild Black Hole.

Keywords: Schwarzschild Black Hole, Kerr Black Hole, Bekenstein-Hawking Entropy, Gibbons Hawking Euclidean Approximation.

Universidad Nacional de Colombia.

Estudiante: Juan Camilo Serna Bedoya

Director de tesis: Profesor Robel Arenas .

E-mail address: `jcsernab@unal.edu.co`

RESUMEN.

Índice general

Agradecimientos	v
Capítulo 1. Introducción.	vii
Parte 1. Preliminares	1
Capítulo 2. Aproximación Euclidiana de Gibbons-Hawking	3
1. Modelo Fundamental	3
2. Función de Partición de Gibbons-Hawking	4
Capítulo 3. Agujero Negro de Schwarzschild	7
1. Métrica Euclidiana de Schwarzschild	7
2. Entropía Euclidiana de Gibbons-Hawking	10
Parte 2. El Espacio-Tiempo de Kerr	19
Capítulo 4. Espacio-tiempo de Kerr	21
1. Métrica de Kerr	21
2. Métrica Euclidiana de Kerr	24
3. Entropía del Agujero Negro de Kerr	27
Capítulo 5. Conclusiones	37
Bibliografía	39

Agradecimientos

Agradezco a todos los profesores del Observatorio Astronómico Nacional, y a los profesores de departamento de Física de la Universidad Nacional de Colombia por todas las enseñanzas, especialmente al Profesor José Robel Arenas director de la tesis, sin cuya ayuda no hubiese sido posible culminar con éxito este proyecto.

CAPÍTULO 1

Introducción.

Desde la formulación de la Relatividad General en 1915 por Albert Einstein, se sabía incluso de la solución de Schwarzschild que los Agujeros Negros eran objetos que no dejaban escapar nada. Ni siquiera la luz podía escapar al influjo gravitacional generado por el agujero negro. Debido a esto, se pensó por mucho tiempo que si nada podía escapar del agujero negro, éste no podía emitir radiación, y por lo tanto no era posible asociarle temperatura u otras variables termodinámicas.

En el año de 1972, Hawking demostró de una forma rigurosa que el área del horizonte de eventos no puede decrecer[14], teniendo esto cierta similitud con la segunda ley de la termodinámica. Al año siguiente, Bardeen, Carter y Hawking publicaron el artículo "Four Laws of Black Hole Mechanics"[7], en el cual exponen las cuatro leyes que rigen la mecánica de agujeros negros. La parte más importante a resaltar, es la gran similitud que tienen estas cuatro leyes con las leyes de la termodinámica[7].

Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros:

Ley Cero: La gravedad superficial κ es constante sobre el horizonte de eventos.

Primera Ley: Para dos agujeros negros estacionarios que sólo difieren en pequeñas variaciones de los parámetros de la masa M , el momento angular J , y la carga Q , se tiene que

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A_{Hor} + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q$$

donde Ω_H y Φ_H son la velocidad angular y el potencial eléctrico en el horizonte respectivamente.

Segunda Ley: El área del horizonte de eventos de un agujero negro nunca decrece.

$$\delta A_{Hor} \geq 0$$

Tercera Ley: Es imposible reducir la gravedad superficial κ a cero en un proceso, en un número finito de pasos.

Leyes de la Termodinámica:

Ley Cero: La temperatura T es la misma para un sistema en equilibrio térmico.

Primera Ley: Para un sistema en equilibrio térmico

$$\delta E = T\delta S + P\delta V$$

donde T es la temperatura, S la entropía, P la presión y V el volumen.

Segunda Ley: La entropía nunca decrece

$$\delta S \geq 0$$

Tercera Ley: Es imposible reducir la temperatura a cero en un proceso, en un número finito de pasos.

Comparando la primera ley en los dos casos, podrían relacionarse los términos

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{8\pi} \delta A_{Hor} &\sim T \delta S \\ \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right) \frac{1}{4} \delta A_{Hor} &\sim T \delta S, \end{aligned}$$

donde se puede ver claramente que

$$(I.1) \quad T = \frac{\kappa}{2\pi}$$

y

$$(I.2) \quad S = \frac{1}{4} A_{Hor}$$

Con los dos resultados anteriores, parecería cierto que los agujeros negros poseen temperatura, y que su entropía depende de un cuarto del área del horizonte de eventos. Como se mencionó anteriormente, esta similitud entre las leyes de la mecánica de agujeros negros y las leyes de la termodinámica es solo aparente, pues clásicamente no está definido como un agujero negro pueda tener temperatura. El paradigma cambia unos años más tarde, cuando Hawking[27] utilizando un formalismo semi-clásico, logra reproducir las relaciones (I.1) e (I.2). A partir de este resultado, las leyes de los agujeros negros fueron consideradas leyes termodinámicas.

El objetivo principal de este trabajo es encontrar las relaciones (I.1) e (I.2) por medio de la aproximación euclidiana de Gibbons-Hawking aplicada a la métrica de Kerr y el correspondiente análisis termodinámico.

La estructura de la tesis es la siguiente:

La primera parte llamada *Preliminares*, se divide en dos capítulos. En el primer capítulo, que se denomina *Aproximación Euclidiana de Gibbons-Hawking*, se presenta una introducción al formalismo utilizando el método de las integrales de camino de Feynman como aproximación a la cuantización de la gravedad. En el segundo capítulo llamado *Entropía Euclidiana de Schwarzschild*, se hace una breve revisión de la aplicación del modelo a la solución más sencilla de las ecuaciones de campo de Einstein, esto es la solución de Schwarzschild, en donde se deriva la periodicidad debida a la geometría, para luego calcular la entropía.

En la segunda parte, *Entropía Euclidiana de Kerr* se aplica el formalismo de Gibbons-Hawking a la métrica de Kerr. Primero se realiza una breve introducción a la métrica de Kerr, luego se hace la derivación de la periodicidad debida a la geometría, y por último, se calcula la entropía correspondiente a este tipo de solución.

Parte 1

Preliminares

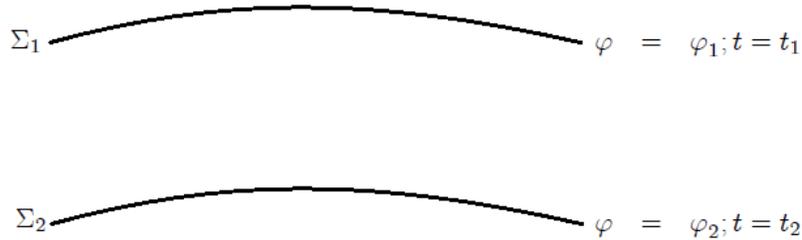
CAPÍTULO 2

Aproximación Euclidiana de Gibbons-Hawking

La aproximación Euclidiana de Gibbons-Hawking es una derivación mecánico-cuántica-estadística de la Entropía Bekenstein-Hawking S_{B-H} a orden cero (zero loop order), a partir de una aproximación de integrales de camino a la gravedad cuántica [2, 22]. Para realizar una introducción al formalismo, se hace necesario primero explicar el modelo fundamental.

1. Modelo Fundamental

Sea la configuración de campos escalares φ sobre el espacio-tiempo de Minkowski [2, 22].



Configuración del Campo.

donde Σ_1 y Σ_2 son las hipersuperficies donde se desarrollan los campos φ_1 y φ_2 en los tiempos t_1 y t_2 respectivamente. La probabilidad de transición entre las dos configuraciones del campo estará expresada por los elementos de matriz de $e^{i\hat{H}(t_2-t_1)}$. Sin embargo, también se puede representar esta amplitud de probabilidad como una suma de integrales de camino sobre todos los campos φ entre los tiempos t_1 y t_2 que coinciden con los campos dados φ_1 y φ_2 sobre las dos hipersuperficies Σ_1 y Σ_2 en la forma [2]:

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad {}_H \langle \varphi_2, t_2 | \varphi_1, t_1 \rangle_H &= {}_S \langle \varphi_2 | e^{-i\hat{H}(t_2-t_1)} | \varphi_1 \rangle_S \\
 &= \int D[\varphi] \exp(iS[\varphi])
 \end{aligned}$$

donde el subíndice H se refiere al cuadro de Heisenberg, y el subíndice S al cuadro de Schrödinger, y $S[\varphi]$ es la acción del campo.

Para sistemas físicos que se sabe que **son térmicos**, se impone un período de Matsubara β sobre el tiempo Euclidiano, y se usa la continuación analítica del sector Euclidiano [22], es decir, se escoge la separación temporal $(t_2 - t_1)$ imaginaria pura e igual a β .

$$(1.2) \quad \tau = t_2 - t_1 = -i\beta$$

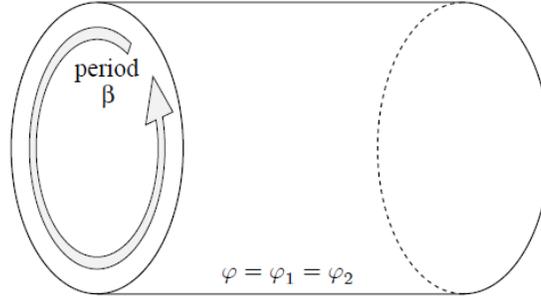
donde β es el inverso de la temperatura T .

$$(1.3) \quad \beta = \frac{1}{T}$$

También, se puede escoger la configuración inicial del campo φ_1 igual a la configuración final del campo φ_2 , y sumar sobre una base completa de estados φ_n [2]. A la izquierda de (1.1) se tiene el valor esperado de $e^{-\beta\hat{H}}$ sumado sobre todos los estados, que es justamente la función de partición termodinámica Z a temperatura $T = \frac{1}{\beta}$. A la derecha, se tiene una integral de camino sobre todos los campos φ en un espacio-tiempo que ha sido identificado periódicamente en la dirección de tiempo imaginaria con período β . Por lo tanto, la función de partición Z para el campo φ a una temperatura T está dada por una integral sobre todas las trayectorias en el espacio-tiempo euclidiano, que es periódico en la dirección del tiempo imaginario τ con período $\beta = \frac{1}{T}$ [2].

$$(1.4) \quad \begin{aligned} Z &= \sum \langle \varphi_n | e^{-\beta\hat{H}} | \varphi_n \rangle \\ &= \int D[\varphi] \exp(-iS_E[\varphi]) \end{aligned}$$

donde el subíndice E significa euclidiano(ver figura¹).



Periodicidad del Campo.

2. Función de Partición de Gibbons-Hawking

Como en el caso anterior, se puede extender el formalismo para incluir al campo gravitacional mismo. Por lo tanto, la amplitud de probabilidad puede ser expresada como[22]:

$$(2.1) \quad \langle g_2, \varphi_2, \Sigma_2 | g_1, \varphi_1, \Sigma_1 \rangle == \int D[g] D[\varphi] \exp(iS[g, \varphi])$$

Donde ahora, la suma se hace sobre todas las posibles métricas que cumplan las condiciones de frontera adecuadas. Se puede expandir la acción S en una serie

¹Esta gráfica fue tomada de la referencia: <http://arxiv.org/abs/hep-th/9409195v1>

de potencias de la métrica alrededor de la solución clásica $g_{ab}^{classical}$ e integrar sobre las fluctuaciones de esta solución[21].

$$(2.2) \quad \left. \frac{\delta S}{\delta g_{ab}} \right|_{g_{ab}^{classical}} = 0$$

Por lo tanto[2]

$$(2.3) \quad S[g] = S[g_{ab}^{classical}] + S_2(\delta g)^2 + S_3(\delta g)^3 + \dots$$

El término lineal se anula debido a la relación (2.2), el término cuadrático puede ser descrito como la interacción entre los gravitones con el fondo(background), y el término cúbico y los demás términos superiores describen la interacción entre gravitones. Analizando el término a orden cero, esto es, la solución clásica, la acción puede escribirse como[16]:

$$(2.4) \quad S_G[g] = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R$$

En consecuencia, a orden cero la función de partición se expresa como[22]:

$$(2.5) \quad Z \approx e^0 \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_R = e^{iS_E}$$

Una de las razones en utilizar la aproximación de integrales de camino para la cuantización, es que si se hace la continuación analítica al tiempo imaginario, la signatura lorentziana de la métrica se reemplaza por una signatura euclidiana. Con esto, la acción euclidiana es un múltiplo positivo de i , y la integral $\exp(iS)$ se convierte en una exponencial decreciente, cuyo máximo valor ocurre en los mínimos de la acción euclidiana. Las configuraciones clásicas en el espacio euclidiano que minimizan la acción, sujeta a condiciones de frontera adecuadas se denominan *Instantones*, que para este caso, serán las soluciones clásicas de la relatividad general[18].

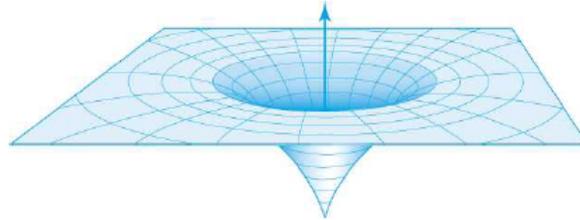
Agujero Negro de Schwarzschild

1. Métrica Euclidiana de Schwarzschild

Después de la formulación final de la Teoría de la Relatividad General en 1915, la primera solución a las ecuaciones de campo de Einstein no se hizo esperar. En el año de 1916, Karl Schwarzschild derivó la solución esféricamente simétrica en el vacío[25]. En forma general, partiendo de la condición que la variedad del espacio-tiempo es esféricamente simétrica, es decir, que ésta es invariante bajo la acción del grupo $SO(3)$, además de que la acción del grupo es ortogonalmente transitiva, el espacio-tiempo localmente tendrá la forma de un producto directo de una 2-esfera con cierto 2-espacio de tipo tiempo[10, 13]. Como se supone un espacio-tiempo estacionario, se puede introducir una coordenada temporal t en el 2-espacio de tipo tiempo, además de las coordenadas angulares usuales θ y ϕ en las 2-esferas que pueden ser extendidas a toda la variedad. Finalmente, se puede escoger el radio r como una coordenada bien definida en el 2-espacio de tipo tiempo, con la condición que ésta coordenada sea ortogonal a la coordenada temporal t , para que esta última pueda ser fijada unívocamente[10, 13]. Debido a todo lo anteriormente descrito, la solución esféricamente simétrica en el vacío de las ecuaciones de campo de Einstein(Solución de Schwarzschild) en coordenadas esféricas puede ser expresada como[13, 25, 16]:

$$(1.1) \quad ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$ (Ver figura¹).



Espacio-Tiempo de Schwarzschild.

Debido a la simetría esférica, la parte angular se puede compactificar en cada punto, por lo tanto sólo es necesario analizar los dos primeros términos, es decir

¹Esta gráfica fue tomada de la referencia:
P.C. van der Wijk .*The Kerr-Metric: describing Rotating Black Holes and Geodesics*. Bachelor Thesis. Rijksuniversiteit Groningen.

$$(1.2) \quad ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2$$

Si se desea buscar si la geometría genera algún efecto termodinámico, se debe buscar una periodicidad β asociada al tiempo[22]. Para pasar al sector Euclidiano se hace el cambio de variable $t = i\tau$ [1, 2]. Por lo tanto, se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{dt}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \tau}$$

donde

$$\frac{dt}{d\tau} = i$$

Con esto, resulta que

$$\begin{aligned} dt^2 &= i^2 d\tau^2 \\ dt^2 &= -d\tau^2 \end{aligned}$$

o

$$(1.3) \quad -dt^2 = d\tau^2$$

Debido a lo anterior, la métrica de Schwarzschild puede ser escrita como

$$(1.4) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tau^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2$$

donde claramente la métrica quedó definida positiva (Métrica Euclidiana).

La métrica de Schwarzschild tiene dos tipos de singularidades. Calculando el escalar de Kretschmann[26]

$$K = R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48M^2}{r^6}$$

se puede ver que en $r = 0$ existe una singularidad esencial. Cuando $r \rightarrow 2M$, existe una singularidad coordenada, por lo tanto se puede realizar un cambio de coordenadas para remover este tipo de singularidad. Definiendo una nueva coordenada[3, 22]:

$$(1.5) \quad \chi := 4M \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

se tiene que

$$(1.6) \quad d\chi = \frac{4M^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} dr$$

o en forma equivalente

$$(1.7) \quad dr = \frac{r^2}{4M^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} d\chi$$

Por otra parte,

$$(1.8) \quad \chi^2 = (4M)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

Juntando los resultados (1.7) y (1.8), la métrica euclidiana de Schwarzschild se puede escribir como:

$$(1.9) \quad ds^2 = \frac{\chi^2}{(4M)^2} d\tau^2 + \left(\frac{r}{2M}\right)^2 d\chi^2$$

Cuando se hace $r = 2M$, o sea exactamente en el horizonte de eventos, la métrica toma la forma:

$$(1.10) \quad ds^2 = \chi^2 \left(\frac{d\tau}{4M}\right)^2 + d\chi^2$$

Si se compara la métrica anterior con la métrica en dos dimensiones en coordenadas polares

$$(1.11) \quad ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2$$

se puede ver que el horizonte de eventos quedó reducido a un punto (ver figura), además de que la variable $\frac{d\tau}{4M}$ tiene una periodicidad que puede hallarse en analogía con las coordenadas polares

$$(1.12) \quad d\theta = \frac{d\tau}{4M}$$

Para que no exista una singularidad cónica, a la coordenada τ se le debe asociar una periodicidad β , por lo tanto:

$$(1.13) \quad \int_0^{2\pi} d\theta = \int_0^{\beta} \frac{d\tau}{4M}$$

de donde

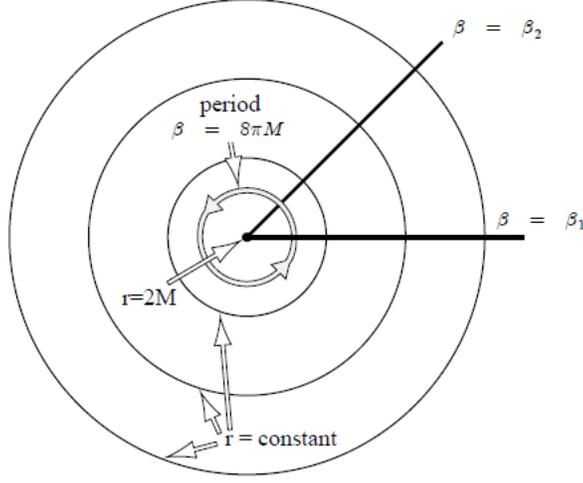
$$(1.14) \quad 2\pi = \frac{\beta}{4M}$$

Finalmente se obtiene la periodicidad

$$(1.15) \quad \beta = 8\pi M$$

2

²Esta gráfica fue tomada de la referencia: <http://arxiv.org/abs/hep-th/9409195v1>



Periodicidad Métrica Euclidiana de Schwarzschild

El resultado anterior es de suma importancia, ya que se pudo comprobar que la periodicidad proviene de la geometría.

2. Entropía Euclidiana de Gibbons-Hawking

Para poder encontrar la entropía euclidiana de Gibbons-Hawking, se debe hallar la función de partición de la relación[22]:

$$(2.1) \quad Z \approx e^{-iS_E} = e^{iS_E}$$

donde $S_E = [S_G]_E$ es la acción euclidiana de la relatividad general.

La acción de la relatividad general, es³ [2, 20]

$$(2.2) \quad S_G[g] = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} L_m$$

donde R es el escalar de curvatura, g es el determinante de la métrica y L_m es el lagrangiano de los campos de materia.

Se puede demostrar que bajo variaciones de la métrica que se hagan cero en la frontera, la acción no es un extremal; si se permite además de esto, que la derivada normal de la métrica no se haga cero en la frontera[2], aparecerá un término adicional que debe ser cancelado, para que la acción se haga un extremal. Debido a esto, el lagrangiano completo de la relatividad general en ausencia de campos de materia puede ser escrito como[1, 20]

$$(2.3) \quad S_G[g] = \frac{1}{16\pi} (I_{E-H}[g] + I_B[g] - I_0)$$

³Hasta que se diga lo contrario, para este capítulo, y los posteriores se hará uso de las unidades naturales $c = \hbar = k = G = 1$

donde

$$(2.4) \quad I_{E-H}[g] = \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} R$$

es la acción de Einstein-Hilbert,

$$(2.5) \quad I_B[g] = 2 \oint_{\partial \mathcal{V}} d\Sigma \sqrt{|h|} K$$

es el término de frontera que depende de la curvatura extrínseca K y el determinante de la métrica inducida h , y

$$(2.6) \quad I_0 = 2 \oint_{\partial \mathcal{V}} d\Sigma \sqrt{|h|} K_0$$

es un término adicional que elimina la divergencia de la acción gravitacional en el límite asintóticamente plano, pero que no afecta las ecuaciones de movimiento; es decir, sólo afecta el valor numérico de la acción.

En forma general, la acción de la relatividad general puede ser escrita finalmente como[2]:

$$(2.7) \quad S_G[g] = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} R + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial \mathcal{V}} d\Sigma K - \frac{1}{8\pi} \int_{\partial \mathcal{V}} d\Sigma K_0$$

Cuando se euclideaniza la métrica, resulta:

$$(2.8) \quad iS_E = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{g_E} R + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial \mathcal{V}} d\Sigma K - \frac{1}{8\pi} \int_{\partial \mathcal{V}} d\Sigma K_0$$

donde la métrica quedó definida positiva.

Ahora, para el caso particular de la solución de Schwarzschild, al ser esféricamente simétrica, puede ser escrita como:

$$(2.9) \quad ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2\theta d\phi^2$$

donde

$$(2.10) \quad f(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

De la métrica se puede ver la topología $T = \mathbb{R}^2 \times S^2$

$$-f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2 \longrightarrow S^2$$

Para euclideanizar la métrica se hace nuevamente

$$(2.11) \quad t = i\tau$$

por lo tanto

$$(2.12) \quad -dt^2 = d\tau^2$$

Con esto, la métrica euclidiana de Schwarzschild queda:

$$(2.13) \quad ds_E^2 = f(r)d\tau^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2$$

Donde ahora, la topología que resulta es $T = \mathbb{R} \times S \times S^2$.

Ahora, como el escalar de curvatura para la métrica de Schwarzschild es cero, $R = 0$, para calcular la acción sólo son necesarios los dos últimos términos de la relación (2.8). Para calcular la contribución del primer término

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\partial V} d\Sigma K$$

se debe calcular la curvatura extrínseca K . Para esto, se debe obtener el vector normal en la dirección de la coordenada r . Primero, se toma como hipersuperficie todas las hipersuperficies con $r = \text{constante}$, por lo tanto, el vector normal puede ser hallado como el gradiente en la dirección de crecimiento de la coordenada radial r . Por simplicidad se define la función escalar

$$(2.14) \quad \Phi = r - 2M$$

Un vector normal a esta hipersuperficie debe tener la forma:

$$(2.15) \quad u_\alpha = \nabla_\alpha \Phi = \partial_\alpha \Phi$$

donde en la segunda igualdad se ha tenido en cuenta que la derivada covariante de una función escalar es la misma derivada parcial. Con esto, se tiene que:

$$(2.16) \quad u_\alpha = \partial_\alpha (r - 2M) = \delta_\alpha^r$$

Para obtener el vector normal unitario, se divide por la norma

$$(2.17) \quad \begin{aligned} g(u, u) &= g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta \\ &= g^{\alpha\beta} \delta_\alpha^r \delta_\beta^r \\ &= f(r) \end{aligned}$$

donde

$$(g(u, u))^{\frac{1}{2}} = f^{\frac{1}{2}}$$

Por lo tanto, el vector normal unitario n_α a las hipersuperficies $\Phi = r - 2M$ se puede expresar como:

$$(2.18) \quad n_\alpha = (g(u, u))^{-\frac{1}{2}} \delta^r_\alpha = (f)^{-\frac{1}{2}} \delta^r_\alpha$$

Para calcular la curvatura extrínseca K , se hace uso de la relación[20]

$$(2.19) \quad K = g_E^{(3) \alpha\beta} K_{\alpha\beta}$$

Donde $K_{\alpha\beta}$ se puede calcular como la derivada covariante del vector normal n_α en la forma[20]:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} K_{\alpha\beta} &= \nabla_\alpha n_\beta = \nabla_\alpha \left(f^{-\frac{1}{2}} \partial_\beta \Phi \right) \\ &= \nabla_\alpha \left(f^{-\frac{1}{2}} \right) (\partial_\beta \Phi) + f^{-\frac{1}{2}} \nabla_\alpha (\partial_\beta \Phi) \\ &= \partial_\alpha \left(f^{-\frac{1}{2}} \right) (\partial_\beta \Phi) + f^{-\frac{1}{2}} \left(\partial_\alpha \partial_\beta \Phi - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma \Phi \right) \\ &= \left[f^{\frac{1}{2}} \partial_\alpha \left(f^{-\frac{1}{2}} \right) \right] n_\beta + f^{-\frac{1}{2}} \left(\partial_\alpha \partial_\beta \Phi - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma \Phi \right) \end{aligned}$$

Como

$$(2.21) \quad \partial_\alpha \partial_\beta \Phi = \partial_\alpha \partial_\beta (r - 2M) = 0$$

Finalmente se tiene que:

$$(2.22) \quad K_{\alpha\beta} = \left[f^{\frac{1}{2}} \partial_\alpha \left(f^{-\frac{1}{2}} \right) \right] n_\beta - f^{-\frac{1}{2}} \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma \Phi \right)$$

Ahora, por la definición de la métrica inducida

$$(2.23) \quad g_E^{(3) \alpha\beta} = \frac{\partial x^a}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^b}{\partial y^\beta} g_E^{ab} = \delta_\alpha^a \delta_\beta^b g_E^{ab} = g_E^{\alpha\beta}$$

$$(2.24) \quad g_E^{(3) \alpha\beta} = \begin{pmatrix} f(r) & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{pmatrix}$$

y su inversa

$$(2.25) \quad g_E^{(3) \alpha\beta} = \begin{pmatrix} f(r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \end{pmatrix}$$

Resulta

$$(2.26) \quad \begin{aligned} K &= g_E^{(3) \alpha\beta} K_{\alpha\beta} \\ &= g_E^{(3) \alpha\beta} \left\{ \left[f^{\frac{1}{2}} \partial_\alpha \left(f^{-\frac{1}{2}} \right) \right] n_\beta - f^{-\frac{1}{2}} \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma \Phi \right) \right\} \end{aligned}$$

El primer término del corchete es cero, debido a que la proyección del vector normal sobre la hipersuperficie es nula. Recordando que $g_E^{(3) \alpha\beta} = g_E^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta$ [20], se tiene que

$$\begin{aligned}
g_E^{(3)\alpha\beta} \left\{ \left[f^{\frac{1}{2}} \partial_\alpha \left(f^{-\frac{1}{2}} \right) \right] n_\beta \right\} &= \left(g_E^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta \right) \left\{ \left[f^{\frac{1}{2}} \partial_\alpha \left(f^{-\frac{1}{2}} \right) \right] n_\beta \right\} \\
&= g_E^{\alpha\beta} \left[f^{\frac{1}{2}} \partial_\alpha \left(f^{-\frac{1}{2}} \right) \right] n_\beta - \\
(2.27) \quad & n^\alpha n^\beta \left[f^{\frac{1}{2}} \partial_\alpha \left(f^{-\frac{1}{2}} \right) \right] n_\beta \\
&= \left[f^{\frac{1}{2}} \partial_\alpha \left(f^{-\frac{1}{2}} \right) \right] n^\alpha - \left[f^{\frac{1}{2}} \partial_\alpha \left(f^{-\frac{1}{2}} \right) \right] n^\alpha \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(2.28) \quad K = g_E^{(3)\alpha\beta} \left[-f^{-\frac{1}{2}} \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma \Phi \right) \right]$$

Teniendo en cuenta que $\partial_\gamma \Phi = \delta_\alpha^r$, la relación anterior puede ser expresada como:

$$\begin{aligned}
(2.29) \quad K &= g_E^{(3)\alpha\beta} \left[-f^{-\frac{1}{2}} \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \delta_\alpha^r \right) \right] \\
&= g_E^{(3)\alpha\beta} \left[-f^{-\frac{1}{2}} \left(\Gamma_{\alpha\beta}^r \right) \right] \\
&= g_E^{(3)\tau\tau} \left(-f^{-\frac{1}{2}} \Gamma_{\tau\tau}^r \right) + g_E^{(3)\theta\theta} \left(-f^{-\frac{1}{2}} \Gamma_{\theta\theta}^r \right) \\
(2.30) \quad &+ g_E^{(3)\phi\phi} \left(-f^{-\frac{1}{2}} \Gamma_{\phi\phi}^r \right)
\end{aligned}$$

Para calcular los símbolos de Christoffel se hace uso de la definición[23]

$$(2.31) \quad \Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} [g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}]$$

Por lo tanto, haciendo uso de las relaciones (2.24) y (2.25), se obtiene para

$$\begin{aligned}
(2.32) \quad \Gamma_{\tau\tau}^r &= \frac{1}{2} g_E^{(3)r\rho} \left[g_E^{(3)\rho\tau,\tau} + g_E^{(3)\rho\tau,\tau} - g_E^{(3)\tau\tau,\rho} \right] \\
&= \frac{1}{2} g_E^{(3)rr} \left[g_E^{(3)r\tau,\tau} + g_E^{(3)r\tau,\tau} - g_E^{(3)\tau\tau,r} \right] \\
&= \frac{1}{2} g_E^{(3)rr} \left(-g_E^{(3)\tau\tau,r} \right) = -\frac{1}{2} f (\partial_r f) = -\frac{1}{2} f f'
\end{aligned}$$

Donde la prima denota derivada con respecto a r , $f' = \partial_r f$.

En forma análoga, se puede comprobar que

$$(2.33) \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r f$$

y

$$(2.34) \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -r f \operatorname{sen}^2 \theta$$

Con todo lo anterior, la curvatura extrínseca puede ser finalmente calculada.

$$\begin{aligned}
K &= \left(-f^{-\frac{1}{2}}\right) \left[f^{-1} \left(-\frac{1}{2} f f'\right) + \left(\frac{1}{r^2}\right) (-r f) + \left(\frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta}\right) (-r f \text{sen}^2 \theta) \right] \\
&= \left(-f^{-\frac{1}{2}}\right) \left[\frac{1}{2} f' + \frac{1}{r} f + \frac{1}{r} f \right] = \left(-f^{-\frac{1}{2}}\right) \left[\frac{1}{2} f' + \frac{2}{r} f \right] \\
(2.35) &= f^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} \frac{f'}{f} + \frac{2}{r} \right]
\end{aligned}$$

Por otra parte, el determinante de la métrica inducida es:

$$\begin{aligned}
(2.36) \quad g_E^{(3)} &= \begin{vmatrix} f(r) & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2 \theta \end{vmatrix} \\
&= f(r) r^4 \text{sen}^2 \theta
\end{aligned}$$

y

$$(2.37) \quad \sqrt{g_E^{(3)}} = f^{\frac{1}{2}}(r) r^2 \text{sen} \theta$$

Por lo tanto[22],

$$\begin{aligned}
(2.38) \quad d\Sigma &= \sqrt{g_E^{(3)}} d\tau d\theta d\phi \\
&= f^{\frac{1}{2}} r^2 \text{sen} \theta d\tau d\theta d\phi
\end{aligned}$$

Con todo lo anterior, resulta :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8\pi} \int_{\partial \mathcal{V}} d\Sigma K \Big|_{r=cte} &= \frac{1}{8\pi} \int_0^\beta \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(f^{\frac{1}{2}} r^2 \text{sen} \theta \right) f^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} \frac{f'}{f} + \frac{2}{r} \right] d\tau d\theta d\phi \Big|_{r=cte} \\
&= \frac{1}{8\pi} \int_0^\beta d\tau \int_0^\pi d\theta \text{sen} \theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 f \left[\frac{1}{2} \frac{f'}{f} + \frac{2}{r} \right] \Big|_{r=cte} \\
&= \frac{1}{8\pi} (\beta)(2)(2\pi) \left[2fr + \frac{1}{2} f' r^2 \right] \\
(2.39) &= \frac{1}{8\pi} \beta 4\pi r^2 \left[\frac{2f}{r} + \frac{1}{2} f' \right]
\end{aligned}$$

Para calcular la contribución del segundo término

$$-\frac{1}{8\pi} \int_{\partial \mathcal{V}} d\Sigma K_0$$

se tiene en cuenta que para métrica de Minkowski $\eta_E^{(3)}$, $f = 1$ y por lo tanto $f' = 0$. Con esto, el vector normal a las hipersuperficies se puede expresar como:

$$(2.40) \quad n_\alpha = \delta^r_\alpha$$

Ahora, en el caso del límite asintóticamente plano, las componentes de la métrica son:

$$(2.41) \quad \eta_E^{(3)}{}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}$$

y su inversa

$$(2.42) \quad \eta_E^{(3)}{}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \text{sen}^2\theta} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la curvatura extrínseca es

$$(2.43) \quad \begin{aligned} K_0 &= \eta_E^{(3)}{}^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} \\ &= \frac{2}{r} \end{aligned}$$

También se tiene que[22]:

$$(2.44) \quad \begin{aligned} \eta_E^{(3)} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2\theta \end{vmatrix} \\ &= r^4 \text{sen}^2\theta \end{aligned}$$

Con esto,

$$(2.45) \quad \sqrt{\eta_E^{(3)}} = r^2 \text{sen}\theta$$

y

$$(2.46) \quad \begin{aligned} d\Sigma &= \sqrt{g_E^{(3)}} d\tau d\theta d\phi \\ &= f^{\frac{1}{2}} r^2 \text{sen}\theta d\tau d\theta d\phi \end{aligned}$$

De donde resulta que finalmente la integral puede ser expresada como:

$$(2.47) \quad \begin{aligned} -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial V} d\Sigma K_0 \Big|_{r=cte} &= -\frac{1}{8\pi} \int_0^\beta \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (f^{\frac{1}{2}} r^2 \text{sen}\theta) \left(\frac{2}{r}\right) d\tau d\theta d\phi \Big|_{r=cte} \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int_0^\beta d\tau \int_0^\pi d\theta \text{sen}\theta \int_0^{2\pi} d\phi f^{\frac{1}{2}} r^2 \left(\frac{2}{r}\right) \Big|_{r=cte} \\ &= -\frac{1}{8\pi} (\beta)(2)(2\pi) f^{\frac{1}{2}} r^2 \left(\frac{2}{r}\right) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las expresiones (2.40) y (2.48), la acción euclidiana de la gravitación queda:

$$\begin{aligned}
(2.48) \quad S_E &= \frac{1}{8\pi}\beta 4\pi r^2 \left[\frac{2f}{r} + \frac{1}{2}f' \right] - \frac{1}{8\pi}\beta 4\pi \left[f^{\frac{1}{2}} r^2 \frac{2}{r} \right] \\
&= \frac{1}{8\pi}\beta 4\pi r^2 \left[\frac{2}{r} f^{\frac{1}{2}} (f^{\frac{1}{2}} - 1) + \frac{1}{2}f' \right]
\end{aligned}$$

A orden cero

$$(2.49) \quad \ln Z|_{r=cte} \approx \frac{1}{8\pi}\beta 4\pi r^2 \left[\frac{2}{r} f^{\frac{1}{2}} (f^{\frac{1}{2}} - 1) + \frac{1}{2}f' \right]$$

Como la única frontera que existe se debe colocar en el infinito, es decir, en $r \rightarrow \infty$, se puede hacer la aproximación[2, 22]:

$$(2.50) \quad f^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2M}{r} \right) = 1 - \frac{M}{r}$$

Por otro lado,

$$(2.51) \quad \frac{1}{2}f' = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) = \frac{M}{r^2}$$

Con todo esto, se tiene que

$$\begin{aligned}
(2.52) \quad \left[\frac{2}{r} f^{\frac{1}{2}} (f^{\frac{1}{2}} - 1) + \frac{1}{2}f' \right] &= \frac{2}{r} \left(1 - \frac{M}{r} \right) \left(-\frac{M}{r} \right) + \frac{M}{r^2} \\
&= -\frac{M}{r^2} + \frac{2M^2}{r^3}
\end{aligned}$$

Ahora, tomando el límite $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
(2.53) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \ln Z &\approx \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi}\beta 4\pi r^2 \left[\frac{2}{r} f^{\frac{1}{2}} (f^{\frac{1}{2}} - 1) + \frac{1}{2}f' \right] \\
&\approx \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi}\beta 4\pi r^2 \left[-\frac{M}{r^2} + \frac{2M^2}{r^3} \right] \\
&\approx -\frac{M\beta}{2}
\end{aligned}$$

Como

$$(2.54) \quad \beta = 8\pi M$$

por lo tanto,

$$(2.55) \quad M = \frac{\beta}{8\pi}$$

Insertando este resultado en (2.54), se llega a

$$(2.56) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \ln Z \approx -\frac{\beta^2}{16\pi}$$

Según las definiciones de energía y entropía para un sistema en equilibrio termodinámico[22]

$$(2.57) \quad E = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{\beta}{8\pi}$$

y

$$(2.58) \quad S = \ln Z + \beta E$$

Se puede calcular la entropía Bekenstein-Hawking como:

$$(2.59) \quad S_{B-H} = -\frac{\beta^2}{16\pi} + \frac{\beta^2}{8\pi} = \frac{\beta^2}{16\pi}$$

Teniendo en cuenta la relación de la periodicidad β , se llega a

$$(2.60) \quad S_{B-H} = \frac{(8\pi M)^2}{16\pi} = 4\pi M^2$$

Por último, como el área del horizonte de eventos del agujero negro de Schwarzschild puede ser expresado como[**20**, **2**, **22**]:

$$(2.61) \quad A_H = 4\pi r^2 = 4\pi(2M)^2 = 16\pi M^2$$

La entropía Bekenstein-Hawking queda

$$(2.62) \quad S_{B-H} = \frac{16\pi M^2}{4} = \frac{A_H}{4}$$

Que es el resultado esperado.

Parte 2

El Espacio-Tiempo de Kerr

Espacio-tiempo de Kerr

1. Métrica de Kerr

La métrica de Kerr describe un agujero negro rotante, con simetría axial[17, 26]. En coordenadas de Boyer-Lindquist, la métrica de Kerr toma la forma[24, 8, ?]:

$$(1.1) \quad ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{\rho^2} dt^2 - \left(\frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\rho^2} \right) 2a \operatorname{sen}^2 \theta dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{\rho^2} \right] \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2$$

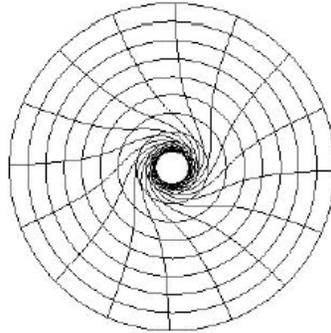
donde

$$(1.2) \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

y

$$(1.3) \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

En forma análoga con la métrica de Schwarzschild, el parámetro M puede ser interpretado como la masa del agujero negro, y $a = \frac{J}{M}$ como el momento angular por unidad de masa(ver figura¹).



Espacio-Tiempo de Kerr.

La métrica de Kerr tiene las siguientes características[26]:

¹Esta gráfica fue tomada de la referencia:
P.C. van der Wijk .*The Kerr-Metric: describing Rotating Black Holes and Geodesics*. Bachelor Thesis. Rijksuniversiteit Groningen.

1. Es **Estacionaria**. La métrica no depende explícitamente del tiempo (No depende explícitamente de la coordenada t).
2. Tiene **Simetría Axial**. La métrica no depende explícitamente de la coordenada ϕ .
3. La métrica **no es Estática**. No es invariante ante transformaciones de reversión temporal $t \rightarrow -t$.
4. La métrica es invariante ante transformaciones simultáneas de reversión en el tiempo $t \rightarrow -t$ y reversión en la coordenada angular $\phi \rightarrow -\phi$.
5. En el límite $r \rightarrow \infty$, la métrica de Kerr se reduce a la métrica de Minkowski en coordenadas polares. (**El Espacio-Tiempo de Kerr es asintóticamente plano**).
6. En el límite $a \rightarrow 0$ ($M \neq 0$), la métrica de Kerr se reduce a la métrica de Schwarzschild.

La métrica de Kerr tiene dos tipos de singularidades. Observando el escalar de Kretschmann[20]

$$(1.4) \quad \begin{aligned} K &= R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= \frac{48M^2 (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) (\rho^4 - 16a^2 r^2 \cos^2 \theta)}{\rho^{12}} \end{aligned}$$

Se puede ver claramente que la métrica de Kerr tiene una singularidad esencial en $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$, es decir, cuando $r = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$. Por otra parte, la métrica tiene una singularidad coordenada que corresponde a los horizontes de eventos, esto es cuando.

$$(1.5) \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 = 0$$

La relación anterior tiene dos raíces:

$$(1.6) \quad \Delta = (r - r_+) (r - r_-) = 0$$

Por lo tanto, los horizontes de eventos quedan ubicados en

$$(1.7) \quad r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$$

Donde

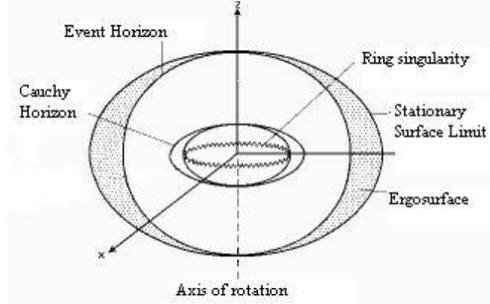
$$(1.8) \quad \begin{aligned} r_+ &= M + \sqrt{M^2 - a^2} && \text{Horizonte externo} \\ r_- &= M - \sqrt{M^2 - a^2} && \text{Horizonte interno} \end{aligned}$$

Como se puede ver en [13, 11], la única parte relevante para el estudio de los agujeros negros en términos de la causalidad, es el *Dominio de Comunicación Exterior* (Partes de la variedad que pueden ser conectadas a otras en el límite asintóticamente plano por líneas tipo tiempo dirigidas hacia el pasado o el futuro). Esto debido a que el dominio de comunicación exterior realmente representa el posible estado de equilibrio asintótico de un agujero negro[13]. Por lo tanto, para el caso del espacio-tiempo de Kerr que posee dos horizontes de eventos, sólo se tendrá en cuenta el horizonte externo $r = r_+$, ya que el dominio de comunicación exterior consiste estrictamente en la región $r > r_+$.

De la métrica de Kerr (1.1), los coeficientes no dependen explícitamente de las coordenadas t y ϕ , por lo tanto existen dos campos vectoriales de Killing asociados con estas simetrías.

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow \partial_t \\ \phi &\longrightarrow \partial_\phi \end{aligned}$$

En el proceso de euclideanización $t = i\tau$, se deben cerrar las órbitas del campo vectorial de Killing ∂_τ en forma similar a como se hizo en el caso de la métrica de Schwarzschild, y encontrar la periodicidad debida a la geometría. Debido a que el espacio-tiempo de Kerr no es esféricamente simétrico, el horizonte de Killing del campo vectorial de Killing ∂_τ se sitúa fuera del horizonte de eventos $r = r_+$, en una región llamada la ergosfera (Ver figura²).



Ergosfera.

Debido a lo anterior, se debe encontrar un campo vectorial de Killing que satisfaga la condición deseada, esto es, que su norma se haga cero exactamente en el horizonte de eventos $r = r_+$. Según al teorema de estaticidad de Hawking (Staticity Theorem) [14, 15], el único campo vectorial de Killing K que cumple la propiedad de tener norma cero exactamente en el horizonte de eventos $r = r_+$ y que es de tipo tiempo en la región $r > r_+$ es la combinación de los campos vectoriales de Killing [14, 15, 12]:

$$\begin{aligned} (1.9) \quad K &= \partial_t + \frac{a}{r^2 + a^2} \partial_\phi \\ &= \partial_t + \Omega_H \partial_\phi \end{aligned}$$

donde $\Omega_H = \frac{a}{r^2 + a^2}$ es la velocidad angular del horizonte de eventos.

Es posible demostrar también que debido a la simetría axial del espacio-tiempo de Kerr, existe un campo vectorial de Killing \tilde{K} asociado a la simetría rotacional que cumple la condición de ser de tipo-tiempo en toda la variedad, excepto en el eje de rotación donde tiene norma cero, el cual puede ser expresado como [6, 17]:

$$(1.10) \quad \tilde{K} = a \sin^2 \theta \partial_t + \partial_\phi$$

En resumen, los campos vectoriales de Killing K y \tilde{K} cumplen la propiedad:

²Esta gráfica fue tomada de la referencia:
P.C. van der Wijk . *The Kerr-Metric: describing Rotating Black Holes and Geodesics*. Bachelor Thesis. Rijksuniversiteit Groningen.

$$(1.11) \quad \begin{aligned} K^2|_{r=r_+} &= 0 \\ \tilde{K}^2|_{\text{eje de rotaci3n}} &= 0 \end{aligned}$$

Generalmente a este par de campos vectoriales de Killing se les conoce como los *Campos Vectoriales de Killing Can3nicos* de la m3trica de Kerr. Dual a los campos vectoriales de Killing can3nicos K y \tilde{K} existen dos formas asociadas ω y $\tilde{\omega}$ [6],

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \omega &= \frac{r^2 + a^2}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi) \\ \tilde{\omega} &= \frac{r^2 + a^2}{\rho^2} \left(d\phi - \frac{a}{r^2 + a^2} dt \right) \end{aligned}$$

que satisfacen la relaci3n

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \omega[K] &= \tilde{\omega}(\tilde{K}) = 1 \\ \omega[\tilde{K}] &= \tilde{\omega}(K) = 0 \end{aligned}$$

La importancia de los campos vectoriales de Killing K y \tilde{K} y sus respectivas formas asociadas ω y $\tilde{\omega}$ radica en el hecho que, a partir de estas dos formas duales se puede reescribir la m3trica de Kerr(1.1) en la forma diagonal[6]:

$$(1.14) \quad ds_E^2 = \frac{\Delta \rho^2}{(r^2 - a^2)} \omega^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \tilde{\omega}^2)$$

Adem3s de poder escribir la m3trica en una forma m3s sencilla, los campos vectoriales de Killing K y \tilde{K} y sus respectivas formas duales asociadas ω y $\tilde{\omega}$ permitir3n hacer expl3citas las simetr3as de la m3trica de Kerr, y por lo tanto, en t3rminos de ellas se podr3 aplicar de una forma m3s eficaz el formalismo de Gibbons-Hawking.

2. M3trica Euclidiana de Kerr

Para realizar el proceso de euclideanizaci3n, se debe tener en cuenta que debido a la simetr3a axial, las variables a las que se le debe hacer la continuaci3n al sector complejo son el tiempo t y el momento angular por unidad de masa a [1]. En consecuencia, despu3s de hacer la euclideanizaci3n $t = i\tau$ y $a = i\hat{a}$, la m3trica de Kerr (1.14), y las relaciones (1.2), (1.3), y (1.7) se pueden expresar ahora como[6]:

$$(2.1) \quad ds_E^2 = \frac{\hat{\Delta} \hat{\rho}^2}{(r^2 - \hat{a}^2)} \omega^2 + \frac{\hat{\rho}^2}{\hat{\Delta}} dr^2 + \hat{\rho}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \tilde{\omega}^2)$$

donde

$$(2.2) \quad \hat{\Delta} = r^2 - 2Mr - \hat{a}^2$$

,

$$(2.3) \quad \hat{\rho}^2 = r^2 - \hat{a}^2 \cos^2 \theta$$

y

$$(2.4) \quad \hat{r}_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 + \hat{a}^2}$$

Después del proceso de euclideanización, los los campos vectoriales de Killing K y \tilde{K} y sus respectivas formas asociadas ω y $\tilde{\omega}$ toman la forma:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} K &= \partial_{\tau} - \frac{\hat{a}}{r^2 - \hat{a}^2} \partial_{\phi} \\ \tilde{K} &= \hat{a} \sin^2 \theta \partial_{\tau} + \partial_{\phi} \end{aligned}$$

y

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \omega &= \frac{r^2 - \hat{a}^2}{\hat{\rho}^2} (d\tau - \hat{a} \sin^2 \theta d\phi) \\ \tilde{\omega} &= \frac{r^2 - \hat{a}^2}{\hat{\rho}^2} \left(d\phi + \frac{\hat{a}}{r^2 - \hat{a}^2} d\tau \right) \end{aligned}$$

Debido a que la coordenada τ asociada con el campo vectorial de Killing ∂_{τ} (cuya norma no es cero en el horizonte externo $r = \hat{r}_{+}$) no es una buena coordenada para calcular la periodicidad, es posible encontrar otra forma dual que respete la simetría rotacional además de ayudar a calcular la periodicidad. Esta forma dual es por supuesto ω , la forma dual al campo vectorial de Killing K que si cumple la condición de tener norma cero exactamente en el horizonte externo $r = \hat{r}_{+}$.

Considere la métrica euclidiana de Kerr cerca del horizonte externo $r = \hat{r}_{+}$. En analogía a como se hizo en el caso de la métrica de Schwarzschild, es posible definir una nueva variable radial x tal que la expresión[6]³:

$$\hat{\Delta} = (r - \hat{r}_{+})(r - \hat{r}_{-})$$

cerca del horizonte, haciendo las definiciones

$$(2.7) \quad (\hat{r}_{+} - \hat{r}_{-}) = 2\sqrt{M^2 + \hat{a}^2} \equiv \gamma$$

y

$$(2.8) \quad (r - \hat{r}_{+}) \equiv \frac{\gamma x^2}{4}$$

puede ser expresada como[6]:

$$(2.9) \quad \hat{\Delta} = \frac{\gamma^2 x^2}{4}$$

De la relación (2.8), se deduce que:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} dr &= \frac{\gamma x}{2} dx \\ dr^2 &= \frac{\gamma^2 x^2}{4} dx^2 \end{aligned}$$

³La definición de esta nueva variable radial x , que será de gran utilidad para calcular la periodicidad, se define en la referencia [6], por lo tanto el análisis que se sigue para calcular la periodicidad β debida a la geometría tiene el mismo espíritu que la referencia[6]

Por lo tanto, la métrica euclidiana de Kerr cerca del horizonte puede ser escrita en la forma[6]:

$$(2.11) \quad ds_E^2 = ds_\Sigma^2 + \hat{\rho}_+^2 ds_{C_2}^2$$

donde

$$(2.12) \quad ds_\Sigma^2 = \hat{\rho}_+^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \tilde{\omega}^2)$$

y

$$(2.13) \quad ds_{C_2}^2 = dx^2 + \frac{\gamma^2 x^2}{4(r_+^2 - \hat{a}^2)^2} \omega^2$$

$$(2.14) \quad = dx^2 + x^2 \left(\frac{\gamma}{2(r_+^2 - \hat{a}^2)} \omega \right)^2$$

Como en el caso de Schwarzschild, debido a la simetría, se puede analizar solo la parte $ds_{C_2}^2$ de la métrica total. Para evitar una singularidad cónica[1], y comparando con la métrica en dos dimensiones en coordenadas polares

$$(2.15) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

se puede asociar

$$(2.16) \quad d\theta = \frac{\gamma}{2(r_+^2 - \hat{a}^2)} \omega$$

Integrando sobre el período estándar para la variable angular θ , se puede ver que a la coordenada asociada a la forma ω se le debe asociar un período β .

$$(2.17) \quad \int_0^{2\pi} d\theta = \int_0^\beta \frac{\gamma}{2(r_+^2 - \hat{a}^2)} \omega$$

Finalmente

$$(2.18) \quad 2\pi = \frac{\gamma\beta}{2(r_+^2 - \hat{a}^2)}$$

El período β es⁴:

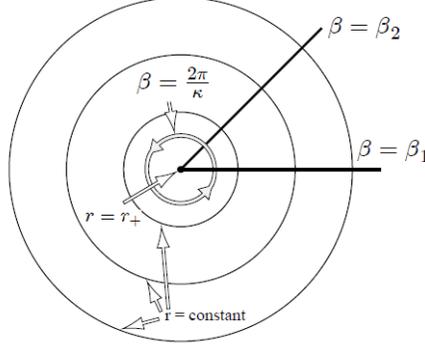
$$(2.19) \quad \begin{aligned} \beta &= 2\pi \left(\frac{2(r_+^2 - \hat{a}^2)}{\gamma} \right) \\ \beta &= \frac{2\pi}{\kappa} \end{aligned}$$

⁴Habiendo finalmente derivado la periodicidad β debida a la geometría, se podría asociar con esta periodicidad una temperatura en la forma usual $T = \frac{1}{\beta}$.

donde:

$$(2.20) \quad \kappa = \frac{\gamma}{2(r_+^2 - \hat{a}^2)} = \frac{\sqrt{M^2 + \hat{a}^2}}{(r_+^2 - \hat{a}^2)}$$

es la *Gravedad Superficial* del Agujero Negro de Kerr en el horizonte[20](Ver figura⁵).



Periodicidad métrica de Kerr.

3. Entropía del Agujero Negro de Kerr

Habiendo derivado la periodicidad de la geometría, se está ahora en posición para calcular la entropía. De la simetría generada por el campo vectorial de Killing K , se puede definir una nueva coordenada angular ψ que no es afectada por el flujo de este campo vectorial, y tiene la periodicidad 2π estándar[13]⁶.

$$(3.1) \quad \psi \equiv \phi + \frac{\hat{a}}{r^2 - \hat{a}^2} d\tau$$

Con esta definición, se tiene

$$(3.2) \quad \hat{\rho}^2 \sin^2 \theta \hat{\omega}^2 = \frac{\sin^2 \theta (r^2 - \hat{a}^2)^2}{\hat{\rho}^2} d\psi^2$$

En consecuencia, la métrica euclidiana de Kerr puede ser expresada como:

$$(3.3) \quad ds_E^2 = \frac{\hat{\Delta} \hat{\rho}^2}{(r^2 - \hat{a}^2)} \omega^2 + \frac{\hat{\rho}^2}{\hat{\Delta}} dr^2 + \hat{\rho}^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta (r^2 - \hat{a}^2)^2}{\hat{\rho}^2} d\psi^2$$

O en la forma:

$$(3.4) \quad ds_E^2 = F(r, \theta) \omega^2 + G(r, \theta) dr^2 + H(r, \theta) d\theta^2 + I(r, \theta) d\psi^2$$

donde

⁵Esta gráfica es una extensión a la métrica de Kerr de la gráfica de la referencia: <http://arxiv.org/abs/hep-th/9409195v1>

⁶Para una excelente descripción del espacio-tiempo de Kerr, y en particular un análisis en término de las simetrías de este tipo de solución, se recomienda la referencia [13].

$$\begin{aligned}
(3.5) \quad F(r, \theta) &= \frac{\hat{\Delta} \hat{\rho}^2}{(r^2 - \hat{a}^2)} \\
G(r, \theta) &= \frac{\hat{\rho}^2}{\hat{\Delta}} \\
H(r, \theta) &= \hat{\rho}^2 \\
I(r, \theta) &= \frac{\sin^2 \theta (r^2 - \hat{a}^2)^2}{\hat{\rho}^2}
\end{aligned}$$

Debido a que la métrica se pudo expresar en la forma diagonal (3.4), los coeficientes de la métrica y la métrica inversa son entonces:

$$(3.6) \quad g_{E \alpha\beta} = \begin{pmatrix} F(r, \theta) & & & \\ & G(r, \theta) & & \\ & & H(r, \theta) & \\ & & & I(r, \theta) \end{pmatrix}$$

$$(3.7) \quad g_E^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} F^{-1}(r, \theta) & & & \\ & G^{-1}(r, \theta) & & \\ & & H^{-1}(r, \theta) & \\ & & & I^{-1}(r, \theta) \end{pmatrix}$$

Para derivar la entropía, se debe primero calcular la acción gravitacional

$$\begin{aligned}
(3.8) \quad iS_E &= \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{g_E} R + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{V}} d\Sigma K \\
&\quad - \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{V}} d\Sigma K_0
\end{aligned}$$

En el espacio-tiempo de Kerr $R = 0$, por lo tanto la contribución a la acción solo puede provenir del segundo y tercer término. Así como se hizo para el Agujero negro de Schwarzschild, para calcular la contribución del primer término

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{V}} d\Sigma K$$

se debe calcular la curvatura extrínseca K . Para esto, se debe obtener el vector normal en la dirección de la coordenada r . Para esto, toma como hipersuperficie todas las hipersuperficies con $r = \text{constante}$, por lo tanto, el vector normal puede ser hallado como el gradiente en la dirección de crecimiento de la coordenada radial r . Se define la función escalar:

$$(3.9) \quad \Phi = r - \hat{r}_+$$

Para calcular el vector normal, se hace uso de la relación:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} u_\alpha &= \nabla_\alpha \Phi = \partial_\alpha \Phi \\ &= \partial_\alpha (r - \hat{r}_+) \end{aligned}$$

Si se desea obtener un vector normal, se puede dividir el vector u_α entre su norma $g(u, u)^{\frac{1}{2}}$. Para esto, primero se calcula

$$(3.11) \quad \begin{aligned} g(u, u) &= g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta \\ &= g^{\alpha\beta} \delta_\alpha^r \delta_\beta^r \\ &= g^{rr} = G^{-1}(r, \theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(3.12) \quad (g(u, u))^{-\frac{1}{2}} = G^{\frac{1}{2}}(r, \theta)$$

El vector normal unitario a las hipersuperficies $\Phi = r - \hat{r}_+$ es entonces:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} n_\alpha &= (g(u, u))^{-\frac{1}{2}} \partial_\alpha \Phi = G^{\frac{1}{2}}(r, \theta) \partial_\alpha \Phi \\ &= G^{\frac{1}{2}}(r, \theta) \delta_\alpha^r \end{aligned}$$

Para calcular la curvatura extrínseca K^7 , se hace uso de la relación:

$$(3.14) \quad K = g_E^{(3)\alpha\beta} K_{\alpha\beta}$$

$K_{\alpha\beta}$ se puede calcular como la derivada covariante del vector normal n_α en la forma[20]:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} K_{\alpha\beta} &= \nabla_\alpha n_\beta = \nabla_\alpha \left(G^{\frac{1}{2}} \partial_\beta \Phi \right) \\ &= \nabla_\alpha \left(G^{\frac{1}{2}} \right) (\partial_\beta \Phi) + G^{\frac{1}{2}} \nabla_\alpha (\partial_\beta \Phi) \\ &= \partial_\alpha \left(G^{\frac{1}{2}} \right) (\partial_\beta \Phi) + G^{\frac{1}{2}} \left(\partial_\alpha \partial_\beta \Phi - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma \Phi \right) \\ &= \left[G^{-\frac{1}{2}} \partial_\alpha \left(G^{\frac{1}{2}} \right) \right] n_\beta + G^{\frac{1}{2}} \left(\partial_\alpha \partial_\beta \Phi - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma \Phi \right) \end{aligned}$$

Como:

$$(3.16) \quad \partial_\alpha \partial_\beta \Phi = \partial_\alpha \partial_\beta (r - \hat{r}_+) = 0$$

Resulta

$$(3.17) \quad \begin{aligned} K &= g_E^{(3)\alpha\beta} K_{\alpha\beta} \\ &= g_E^{(3)\alpha\beta} \left\{ \left[G^{-\frac{1}{2}} \partial_\alpha \left(G^{\frac{1}{2}} \right) \right] n_\beta + G^{\frac{1}{2}} \left(\partial_\alpha \partial_\beta \Phi - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma \Phi \right) \right\} \end{aligned}$$

Ahora, el primer término es cero debido a que la proyección que se hace con la métrica inducida $g_E^{(3)\alpha\beta} = g_E^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta$.

⁷En este punto no se debe confundir la curvatura extrínseca K , del campo vectorial de Killing K .

$$(3.18) \quad g_E^{(3)}{}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^a}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^b}{\partial y^\beta} g_E{}^{ab} = \delta_\alpha^a \delta_\beta^b g_E{}^{ab} = g_E{}^{\alpha\beta}$$

$$(3.19) \quad g_E^{(3)}{}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} F(r, \theta) & 0 & 0 \\ 0 & H(r, \theta) & 0 \\ 0 & 0 & I(r, \theta) \end{pmatrix}$$

y su inversa

$$(3.20) \quad g_E^{(3)\alpha\beta} = \begin{pmatrix} F^{-1}(r, \theta) & 0 & 0 \\ 0 & H^{-1}(r, \theta) & 0 \\ 0 & 0 & I^{-1}(r, \theta) \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$(3.21) \quad g_E^{(3)\alpha\beta} \left\{ \left[G^{-\frac{1}{2}} \partial_\alpha \left(G^{\frac{1}{2}} \right) \right] n_\beta \right\} = \begin{aligned} & \left(g_E^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta \right) \\ & \left\{ \left[G^{-\frac{1}{2}} \partial_\alpha \left(G^{\frac{1}{2}} \right) \right] n_\beta \right\} \\ & = g_E^{\alpha\beta} \left[G^{-\frac{1}{2}} \partial_\alpha \left(G^{\frac{1}{2}} \right) \right] n_\beta \\ & \quad - n^\alpha n^\beta \left[G^{-\frac{1}{2}} \partial_\alpha \left(G^{\frac{1}{2}} \right) \right] n_\beta \\ & = \left[G^{-\frac{1}{2}} \partial_\alpha \left(G^{\frac{1}{2}} \right) \right] n^\alpha \\ & \quad - \left[G^{-\frac{1}{2}} \partial_\alpha \left(G^{\frac{1}{2}} \right) \right] n^\alpha \\ & = 0 \end{aligned}$$

Con esto, se tiene

$$(3.22) \quad K = g_E^{(3)\alpha\beta} \left[-G^{\frac{1}{2}} \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma \Phi \right) \right]$$

Pero $\partial_\gamma \Phi = \delta_\alpha^r$, en consecuencia la curvatura extrínseca se puede expresar como:

$$(3.23) \quad \begin{aligned} K &= g_E^{(3)\alpha\beta} \left[-G^{\frac{1}{2}} \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \delta_\alpha^r \right) \right] \\ &= g_E^{(3)\alpha\beta} \left[-G^{\frac{1}{2}} \left(\Gamma_{\alpha\beta}^r \right) \right] \\ &= g_E^{(3)\omega\omega} \left(-G^{\frac{1}{2}} \Gamma_{\omega\omega}^r \right) + g_E^{(3)\theta\theta} \left(-G^{\frac{1}{2}} \Gamma_{\theta\theta}^r \right) + g_E^{(3)\psi\psi} \left(-G^{\frac{1}{2}} \Gamma_{\psi\psi}^r \right) \end{aligned}$$

Para calcular los símbolos de Christoffel se hace uso de la relación[23]:

$$(3.24) \quad \Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} [g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}]$$

De lo anterior se sigue que:

$$\begin{aligned}
(3.25) \quad \Gamma_{\omega\omega}^r &= \frac{1}{2} g_E^{(3) r\rho} \left[g_E^{(3) \rho\omega,\omega} + g_E^{(3) \rho\omega,\omega} - g_E^{(3) \omega\omega,\rho} \right] \\
&= \frac{1}{2} g_E^{(3) rr} \left[g_E^{(3) r\omega,\omega} + g_E^{(3) r\omega,\omega} - g_E^{(3) \omega\omega,r} \right] \\
&= \frac{1}{2} g_E^{(3) rr} \left(-g_E^{(3) \omega\omega,r} \right) = -\frac{1}{2} G^{-1} (\partial_r F) = -\frac{1}{2} G^{-1} F'
\end{aligned}$$

donde

$$(3.26) \quad F' = \partial_r F$$

En forma similar

$$\begin{aligned}
(3.27) \quad \Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{1}{2} g_E^{(3) rr} \left(-g_E^{(3) \theta\theta,r} \right) \\
&= -r G^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.28) \quad \Gamma_{\psi\psi}^r &= \frac{1}{2} g_E^{(3) rr} \left(-g_E^{(3) \psi\psi,r} \right) \\
&= [-r \sin^2 \theta G^{-1}] \left[\frac{2(r^2 - \hat{a}^2)}{\hat{\rho}^2} - \frac{(r^2 - \hat{a}^2)^2}{\hat{\rho}^4} \right]
\end{aligned}$$

Finalmente, de (3.23) resulta

$$\begin{aligned}
(3.29) \quad K &= \left(-G^{\frac{1}{2}} \right) \left\{ F \left[-\frac{1}{2} G^{-1} F' \right] + \frac{1}{\hat{\rho}^2} [-r G^{-1}] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\hat{\rho}^2}{\text{sen}^2 \theta (r^2 - \hat{a}^2)} (-r \text{sen}^2 \theta) \left[\frac{2(r^2 - \hat{a}^2)}{\hat{\rho}^2} - \frac{(r^2 - \hat{a}^2)^2}{\hat{\rho}^4} \right] \right\} \\
&= \left(-G^{\frac{1}{2}} \right) \left[-\frac{1}{2} \frac{\hat{\Delta}^2}{(r^2 - \hat{a}^2)} F' - \frac{r \hat{\Delta}}{\hat{\rho}^4} - \frac{2r \hat{\Delta}}{(r^2 - \hat{a}^2) \hat{\rho}^2} + \frac{r \hat{\Delta}}{\hat{\rho}^4} \right] \\
&= \left(G^{\frac{1}{2}} \right) \left[\frac{\hat{\Delta}^2 F'}{2(r^2 - \hat{a}^2)} + \frac{2r \hat{\Delta}}{(r^2 - \hat{a}^2) \hat{\rho}^2} \right]
\end{aligned}$$

Por otra parte, el determinante de la métrica inducida es:

$$\begin{aligned}
(3.30) \quad g_E^{(3)} &= \begin{vmatrix} F(r, \theta) & 0 & 0 \\ 0 & H(r, \theta) & 0 \\ 0 & 0 & I(r, \theta) \end{vmatrix} \\
&= \hat{\Delta} \hat{\rho}^2 \text{sen}^2 \theta
\end{aligned}$$

$$(3.31) \quad \sqrt{g_E^{(3)}} = \sqrt{\hat{\Delta} \hat{\rho}^2 \text{sen}^2 \theta}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(3.32) \quad d\Sigma &= \sqrt{g_E^{(3)}} \omega d\theta d\psi \\
&= \sqrt{\hat{\Delta} \hat{\rho}^2 \text{sen}^2 \theta} \omega d\theta d\psi
\end{aligned}$$

Con todo lo anterior, resulta :

$$(3.33) \quad \frac{1}{8\pi} \int_{\partial \mathcal{V}} d\Sigma K = \frac{1}{8\pi} \int_0^\beta \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\frac{\hat{\Delta}^2 F'}{2(r^2 - \hat{a}^2)^2} + \frac{2r\hat{\Delta}}{\hat{\rho}^2 (r^2 - \hat{a}^2)} \right] \hat{\rho}^2 \text{sen} \theta \omega d\theta d\psi$$

Para calcular la contribución del segundo término

$$-\frac{1}{8\pi} \int_{\partial \mathcal{V}} d\Sigma K_0$$

se tiene en cuenta que :

$$(3.34) \quad n_\alpha = \delta_\alpha^r$$

Ahora, en forma análoga a como se hizo con la métrica inducida para la métrica de Schwarzschild, en el caso del límite asintóticamente plano, las componentes de la métrica inducida son:

$$(3.35) \quad \eta_E^{(3)}{}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}$$

y su inversa

$$(3.36) \quad \eta_E^{(3)}{}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la curvatura extrínseca es

$$\begin{aligned}
(3.37) \quad K_0 &= \eta_E^{(3)}{}^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} \\
&= \frac{2}{r}
\end{aligned}$$

Con todo esto, la contribución a la acción es

$$(3.38) \quad -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial \mathcal{V}} d\Sigma K_0 = -\frac{1}{8\pi} \int_0^\beta \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{r} \right) \hat{\rho} \sqrt{\hat{\Delta}} \text{sen} \theta \omega d\theta d\psi$$

Haciendo la suma de las dos contribuciones a la acción, y realizando las integrales sobre ω y $d\psi$ se obtiene finalmente

$$(3.39) \quad \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{V}} d\Sigma (K - K_0) = \frac{1}{8\pi} (\beta) (2\pi) \int_0^\pi \left[\frac{\hat{\rho}^2 \hat{\Delta}^2 F'}{2(r^2 - \hat{a}^2)^2} + \frac{2r\hat{\Delta}}{(r^2 - \hat{a}^2)} - \frac{2\hat{\rho}\sqrt{\hat{\Delta}}}{r} \right]$$

Como

$$(3.40) \quad F(r, \theta) = \frac{\hat{\Delta}\hat{\rho}^2}{(r^2 - \hat{a}^2)^2}$$

Haciendo la derivada con respecto a r resulta:

$$(3.41) \quad F'(r, \theta) = \frac{(r^2 - \hat{a}^2)^2 \partial_r (\hat{\Delta}\hat{\rho}^2) - (\hat{\Delta}\hat{\rho}^2) \partial_r [(r^2 - \hat{a}^2)^2]}{(r^2 - \hat{a}^2)^4}$$

pero

$$(3.42) \quad \partial_r (\hat{\Delta}\hat{\rho}^2) = 2r\hat{\Delta} + 2\hat{\rho}^2(r - m)$$

y

$$(3.43) \quad \partial_r [(r^2 - \hat{a}^2)^2] = 4r(r^2 - \hat{a}^2)$$

Haciendo algunos cálculos algebraicos, la expresión (3.41) queda

$$(3.44) \quad F'(r, \theta) = \frac{2r\hat{\Delta}}{(r^2 - \hat{a}^2)^2} + \frac{2\hat{\rho}^2(r - m)}{(r^2 - \hat{a}^2)^2} - \frac{4r\hat{\Delta}\hat{\rho}^2}{(r^2 - \hat{a}^2)^3}$$

Con lo anterior, el primer término de la integral se reduce a:

$$(3.45) \quad \frac{\hat{\rho}^2 \hat{\Delta}^2 F'}{2(r^2 - \hat{a}^2)^2} = \frac{r\hat{\Delta}^2 \hat{\rho}^2}{(r^2 - \hat{a}^2)^4} + \frac{(r - m)\hat{\rho}^4 \hat{\Delta}^2}{(r^2 - \hat{a}^2)^4} - \frac{2r\hat{\rho}^4 \hat{\Delta}^3}{(r^2 - \hat{a}^2)^5}$$

Como la única frontera $\partial\mathcal{V}$ que existe se debe colocar en el infinito, es decir, en $r \rightarrow \infty$, se pueden hacer las aproximaciones :

$$(3.46) \quad \hat{\Delta} = r^2 \left(1 - \frac{\hat{a}^2}{r^2} - \frac{2M}{r} \right)$$

$$\begin{aligned}
(3.47) \quad \hat{\Delta}^2 &= \left[r^2 \left(1 - \frac{\hat{a}^2}{r^2} - \frac{2M}{r} \right) \right]^2 \\
&= r^4 \left(1 - \frac{\hat{a}^2}{r^2} - \frac{2M}{r} \right)^2 \\
&\approx r^4 \left(1 - \frac{2\hat{a}^2}{r^2} - \frac{4M}{r} \right)
\end{aligned}$$

En forma análoga

$$(3.48) \quad \hat{\Delta}^3 \approx r^6 \left(1 - \frac{3\hat{a}^2}{r^2} - \frac{6M}{r} \right)$$

además de

$$\begin{aligned}
(3.49) \quad \sqrt{\hat{\Delta}} &= \hat{\Delta}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[r^2 \left(1 - \frac{\hat{a}^2}{r^2} - \frac{2M}{r} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\approx r \left(1 - \frac{\hat{a}^2}{2r^2} - \frac{M}{r} \right)
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$(3.50) \quad \hat{\rho}^2 = r^2 \left(1 - \frac{\hat{a}^2 \cos^2 \theta}{r^2} \right)$$

$$(3.51) \quad \hat{\rho}^4 \approx r^4 \left(1 - \frac{2\hat{a}^2 \cos^2 \theta}{r^2} \right)$$

$$(3.52) \quad \hat{\rho} \approx r \left(1 - \frac{\hat{a}^2 \cos^2 \theta}{2r^2} \right)$$

Finalmente

$$(3.53) \quad (r^2 - \hat{a}^2)^4 \approx r^8 \left(1 - \frac{4\hat{a}^2}{r^2} \right)$$

$$(3.54) \quad (r^2 - \hat{a}^2)^5 \approx r^{10} \left(1 - \frac{5\hat{a}^2}{r^2} \right)$$

Juntando los resultados de las aproximaciones anteriores, haciendo algunos cálculos algebraicos despreciando los términos de orden superior a $O(\frac{1}{r})$, y tomando el límite cuando $r \rightarrow \infty$, la acción se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
(3.55) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \ln Z &= \frac{1}{8\pi} (\beta) (2\pi) (2) (-M) \\
&= -\frac{\beta M}{2}
\end{aligned}$$

De la fórmula de periodicidad

$$(3.56) \quad \beta = \frac{2\pi (r_+^2 - \hat{a}^2)}{\sqrt{M^2 + \hat{a}^2}}$$

y del radio del horizonte externo

$$(3.57) \quad \hat{r}_+ = M + \sqrt{M^2 + \hat{a}^2}$$

la masa puede ser expresada como

$$(3.58) \quad M = \hat{r}_+ - \frac{2\pi (r_+^2 - \hat{a}^2)}{\beta}$$

Ahora, en analogía con el caso del Agujero Negro de Schwatzschild

$$(3.59) \quad \ln Z \approx -\frac{\beta}{2} \left[\hat{r}_+ - \frac{2\pi (r_+^2 - \hat{a}^2)}{\beta} \right]$$

La energía puede se deriva de la fórmula:

$$(3.60) \quad E = -\frac{\partial \ln Z}{\beta} = \frac{\hat{r}_+}{2}$$

Por lo tanto la entropía puede finalmente ser calculada, y es

$$(3.61) \quad \begin{aligned} S &= \ln Z + \beta E \\ &= -\frac{\beta}{2} \hat{r}_+ + \pi (r_+^2 - \hat{a}^2) + \frac{\beta}{2} \hat{r}_+ \end{aligned}$$

$$(3.62) \quad \begin{aligned} S &= \pi (r_+^2 - \hat{a}^2) \\ &= \frac{A_H}{4} \end{aligned}$$

donde A_H es el área del horizonte externo[20].Este resultado, de suma importancia, indica que de la misma forma como el Agujero Negro de Schwarzschild tiene una entropía proporcional al área con constante de proporcionalidad igual a $\frac{1}{4}$, el Agujero Negro de Kerr también tiene una entropía asociada, y una temperatura como es reportado en la literatura[28][1].

Conclusiones

1) Utilizando el formalismo de Gibbons-Hawking, se reprodujeron las fórmulas de Entropía $S = \frac{1}{4}A_H$ y Periodicidad $\beta = \frac{2\pi}{\kappa}$ para la solución de Schwarzschild derivada en los artículos originales[1, 2, 3].

2) La principal contribución de este trabajo ha sido desarrollar la completez de los cálculos de periodicidad y entropía para los Agujeros Negros de Kerr con base en una extensión de los correspondientes cálculos para la solución de Schwarzschild, utilizando el formalismo de las integrales de camino de Gibbons-Hawking, cuyos detalles no están reportados en la literatura.

2.1) Se demuestra de forma rigurosa que la periodicidad debida a la geometría en el Espacio-Tiempo de Kerr es $\beta = \frac{2\pi}{\kappa}$, donde κ es la gravedad superficial del horizonte de eventos y es igual a:

$$\kappa = \frac{\sqrt{M^2 + a^2}}{(r_+^2 - a^2)}$$

2.2) Se demuestra que la entropía del agujero negro de Kerr es igual a un cuarto del área del horizonte de eventos:

$$S = \frac{1}{4}A_H$$

3) Se demuestra también que la entropía del agujero negro de Kerr puede ser expresada como[5, 4]

$$S = \sum_{bolts} \frac{1}{4}A_n,$$

donde el "bolt" se define como el punto donde el campo vectorial de Killing generador del grupo de isometrías $K = K^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ se hace cero, es decir $K = 0$ (locus of fixed points). Estos puntos fijos corresponden a la superficie de bifurcación del horizonte en el agujero negro[4].

3.1) En el Caso del Agujero negro de Schwarzschild, cuando se está en el sector euclidiano, el bolt corresponde a los puntos en los que se cumple $K = 0$, esto es $K = \frac{\partial}{\partial \tau} = 0$ en la superficie $r = 2M$.

3.2) Para el Agujero negro de Kerr, en el sector euclidiano, el bolt corresponde a los puntos donde $K = 0$, esto es, $K = \frac{\partial}{\partial \tau} + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ en la superficie $r = r_+$, donde Ω es la velocidad angular del horizonte de eventos, y r_+ es el horizonte de eventos externo.

Bibliografía

- [1] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. *Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity*. Phys. Rev. D **15**, 2752 (1977).
- [2] S. W. Hawking. *The Path-Integral Approach to Quantum Gravity*. General Relativity: An Einstein Centenary Survey, eds. S. W. Hawking. and W. Israel, (Cambridge University Press, 1979).
- [3] S. W. Hawking. *Euclidean Quantum Gravity*. Recent Developments in Gravitation Cargese Lectures, eds. M. Levy and S. Deser, (Plenum ,1978).
- [4] S. W. Hawking. *Gravitational Instantons*. Phys. Lett. **60A**, 81 (1977).
- [5] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. *Classification of Gravitational Instanton Symmetries*. Commun. Math. Phys. **66**, 291-310 (1979).
- [6] R. B. Mann and S. N. Solodukhin. *Conical Geometry and Quantum Entropy of a Charged Kerr Black Hole*.
- [7] J.M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking. *The Four Laws of Black Hole Mechanics*. Commun. Math. Phys. **31**, 161 (1973).
- [8] B. Carter. *Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields*. Phys. Rev. **174**, 1559 (1968).
- [9] B. Carter. *Axisymmetric Black Holes Has Only Two Degrees of Freedom*. Phys. Rev. Lett. **26**, 331 (1971).
- [10] B. Carter. *Killing Horizons and Orthogonally Transitive Groups in Space-Time*. J. Math. Phys. **10**, 70 (1969).
- [11] B. Carter. *Domains of Stationary Communications in Space-Time*. General Relativity and Gravitation **9**, 437 (1978).
- [12] B. Carter. *Rigidity of a Black Hole*. Nature Physical Science **238**, 71 (1972).
- [13] B. Carter. in *Black Holes*. Les Houches, 1972, edited by B. V. and C. De. Witt (Gordon and Breach, New York, 1973).
- [14] S. W. Hawking. in *Black Holes*. Les Houches, 1972, edited by B. V. and C. De. Witt (Gordon and Breach, New York, 1973).
- [15] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. (Cambridge Univ Press, Cambridge, England, 1973).
- [16] R. M. Wald. *General Relativity*.(University of Chicago Press, Chicago).
- [17] B. O'Neill. *The Geometry of Kerr Black Holes*. (A K Peters Wellesley, Massachusetts, 1995).
- [18] M. F. Atiyah. *Geometry of Yang-Mills Fields*. (Lezioni Fermiane, Pisa, 1979).
- [19] T. Ortín. *Gravity and Strings*. (Cambridge Univ Press, Cambridge, England, 2004).
- [20] E. Poisson. *Relativistic Toolkit. The Mathematics of Black Hole Mechanics*. (Cambridge Univ Press, Cambridge, England, 2007).
- [21] A. S. Lapides. *Black Hole Uniqueness Theorems in Euclidean Quantum Gravity*. Phys. Rev. D **22**, 1837 (1980).
- [22] R. Arenas. *Notas de Clase curso Agujeros Negros Cuánticos*. Universidad Nacional de Colombia.
- [23] M. Blau. *Lecture Notes on General Relativity*. Albert Einstein Center for Fundamental Physics.
- [24] J. Griffiths and J. Podolsky. *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. (Cambridge Univ Press, Cambridge, England, 2009).
- [25] K. Schwarzschild. *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*. Sitzber. Deut. Wiss. Berlin, Kl. Math-Phys. Tech., 189-196.
- [26] L. Gualtieri and V. Ferrari. *Black Holes in General Relativity*. Course Notes. Dipartimento di Fisica, Università degli studi di Roma . 2011.

- [27] S. W. Hawking. *Particle Creation by Black Holes*. Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [28] L. huaifan, W. Shengli, W. Yueqin, Z. Lichun and Z. Ren. *Hawking radiation of Kerr-Newman-de Sitter black hole*. <http://arxiv.org/abs/0906.3680v1>