UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

La proporcionalidad en la solución de problemas de medición, variación y aleatoriedad

James Ariel Motta Trujillo

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Maestría en Enseñanza de las Ciencas Exactas
Manizales - Caldas, Colombia
2017

Proportionality in solving problems of measurement, variation and randomness

James Ariel Motta Trujillo

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Maestría en Enseñanza de las Ciencas Exactas
Manizales - Caldas, Colombia
2017

La proporcionalidad en la solución de problemas de medición, variación y aleatoriedad

James Ariel Motta Trujillo

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Enseñanza de las Ciencas Exactas

Director:
M.Sc. Jaider Albeiro Figueroa Flórez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Maestría en Enseñanza de las Ciencas Exactas
Manizales - Caldas, Colombia
2017

Dedicatoria

El presente trabajo está dedicado a mis padres, quienes siempre han estado a mi lado de manera incondicional (los amo Rubí y Motta) y a Dios, por todas las bendiciones que siempre derrama sobre mí aun cuando siento que en ocasiones me alejo de Él...

Agradecimientos

A Dios, por la oportunidad y protección a lo largo de ésta maestría. A mis padres, quienes siempre me apoyaron en todo este proceso. A la Universidad Nacional - Sede Manizales y a mis profesores, en especial al magíster Jaider Figueroa (profe esto no habría sido posible sin sus orientaciones. Muchas gracias). A mis compañeros de la maestría, sobre todo a Macedonio y Federico (encalambrados, ustedes hacían el viaje y el estudio más ameno). Al magíster Humberto Barrios Peña, gran amigo que me impulsó y animó a hacer ésta maestría. A las directivas, administrativos, compañeros y amigos docentes de la I.E. Ismael Perdomo Borrero, en especial al rector Orlando Salas Macias y Silvia Perdomo (estoy agradecido con ustedes por su amistad, comprensión y colaboración incondicional en mi formación académica, profesional y humana). A los niños y niñas de 601 quienes con su arduo trabajo permitieron hacer realidad éste trabajo. A ti Mónica, porque siempre estás brindándome ánimo y amor cuando lo he necesitado, tú sabes lo mucho que significas para mí... Y finalmente a todos quienes me acompañan en mí día a día... Gracias Totales...

Índice general

Resumen

Se realiza un estudio sobre el razonamiento proporcional y la proporcionalidad directa con estudiantes del grado sexto de la Institución Educativa Ismael Perdomo Borrero del municipio de Gigante - Huila, con el objeto de utilizar la noción de proporcionalidad en sus diversas representaciones e interpretaciones, como una estrategia que permita al estudiante la solución de situaciones problemas en los contextos de medición, variación y aleatoriedad. Con los cuatro pasos para la solución de problemas propuestos por Polya, se analizan los procedimientos y estrategias con las que los estudiantes dieron solución a las situaciones problemas que se les planteaba. Se llevaron a cabo talleres de transposición didáctica, afianzamiento y profundización con los cuales los estudiantes asimilaron el concepto de proporcionalidad directa empleando el mismo en la solución de problemas que implicaban repartos proporcionales, porcentajes, razones de cambio y probabilidades; además se logró que los estudiantes pasaran de un razonamiento aditivo al de tipo multiplicativo.

Palabras Claves: Razonamiento proporcional, comprensión. pensamiento métrico, pensamiento variacional, pensamiento aleatorio, contexto, procesos cognitivos.

Abstract

A study on proportional reasoning and direct proportionality was carried out with sixth grade students from the Ismael Perdomo Borrero Educational Institution in the municipality of Gigante - Huila, in order to use the notion of proportionality in its various representations and interpretations, as a strategy that allows the student to solve problem situations in the contexts of measurement, variation and randomness. With the four steps for problem solving proposed by Polya, we analyze the procedures and strategies with which the students solved the problem situations before them. The the proportionality concept was assmimilated through different didactic, reinforcement and deepening workshops which allowed students to apply the concept in solving problems where proportional distributions, percentage, change reason and probabilities exercises were established; in addition, students were able to move from an additive reasoning to a multiplicative one.

Keywords: Proportional reasoning, comprehension, metric thinking, variational thinking, random thinking, context, cognitive processes.

Introducción

El razonamiento proporcional es de suma importancia en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ya que éste permite que los estudiantes comprendan y modelen situaciones en diferentes ámbitos como por ejemplo las ciencias y la economía, mediante el empleo de conceptos de razón y proporción. Junto a esto, es de mencionar también que con este tipo de razonamiento, el ser humano puede abordar problemas cotidianos que pueden resolverse con técnicas relacionadas con la proporcionalidad. Por lo anterior, el razonamiento proporcional se hace presente en temáticas tales como la proporcionalidad directa, el cual se contempla dentro de los estándares emanados por el MEN, en las diferentes programaciones académicas de las instituciones educativas y en libros de educación matemática.

Sin embargo, a la hora de abordar la proporcionalidad directa se hace énfasis especialmente en el concepto de que al comparar dos magnitudes cualesquiera, si una de ellas aumenta sucederá lo mismo con la otra magnitud o en sentido contrario (si una disminuye, la otra tendrá el mismo comportamiento); lo que puede traer consigo que los estudiantes realicen una interpretación inadecuada de este concepto y desarrollen razonamientos de tipo aditivo mas no multiplicativos, éste último fundamental para la consolidación del razonamiento proporcional. Junto a esto, temas cotidianos como el porcentaje son abordados desde el concepto de la regla de tres, lo cual se convierte en limitante para que niños y jóvenes potencialicen el razonamiento proporcional a través de situaciones sencillas.

En este trabajo se aborda la proporcionalidad en la solución de problemas de variación, presentado a los estudiantes situaciones problemas con temas tales como la probabilidad, porcentaje, repartos proporcionales y razones de cambio. Además se analizará cómo ellos, los estudiantes, desarrollan y dan respuesta a dichos problemas, a través de los cuatro pasos postulados por Polya para resolver problemas los cuales son: entender un problema, configurar un plan, ejecutar el plan y finalmente mirar hacia atrás.

En este orden de ideas, son muchas las razones por las cuales se decide trabajar con el razonamiento proporcional y específicamente la proporcionalidad directa, de las cuales destacamos:

- Buscar que el estudiante comprenda el concepto de proporcionalidad directa.

- Presentar alternativas a la regla de tres para el manejo de situaciones que impliquen porcentajes, probabilidad, razones de cambio y repartos proporcionales.

- Hacer que el estudiante analice y dé sentido a las estrategias y operaciones que emplea para dar solución a situaciones que se le plantean.

A continuación se presentan algunas de las teorías más importantes que hacen alusión al razonamiento proporcional y la solución de problemas. Seguidamente, en el Capítulo 3 se menciona la metodología con la cual se desarrolló el presente trabajo, así como las fuentes de información e instrumentos metodológicos. En el Capítulo 4 se hace referencia a los resultados obtenidos en la aplicación de los instrumentos metodológicos. Finalmente el Capítulo 5 refiere a las conclusiones obtenidas a partir del desarrollo de los talleres y las recomendaciones que se pueden entregar con base en los resultados mencionados.

Capítulo 1

Horizonte del Trabajo

1.1. Descripción del Problema

En matemáticas la proporcionalidad es una de las temáticas que más se relacionan con los tópicos abordados en la gran mayoría de grados escolares desde primaria hasta bachillerato, lo cual la hace esencial a la hora de comprender otras ciencias como la física, biología y las mismas matemáticas, en conceptos como velocidad, porcentajes, probabilidad, mezclas, razones de cambio e incluso en la solución de situaciones de la vida cotidiana. Sin embargo, el concepto de proporcionalidad es en la gran mayoría de casos mal abordado por el docente y en ocasiones mal comprendido por el estudiante, debido a múltiples razones, entre ellas:

- No se encamina al estudiante en el razonamiento y comprensión del concepto de proporcionalidad.

- La enseñanza se hace de forma mecánica, pues se encasilla y se limita a la aplicación de la regla de tres.

- Se limita al estudiante a tener como única estrategia de solución a los problemas a la regla de tres (directa e inversa).

- Las situaciones son limitadas solamente solo al pensamiento numérico y en ocasiones al variacional, desconociendo su influencia en campos como el aleatorio y espacial, que favorecen la solución de problemas de probabilidad y razones de cambio.

- A la hora de resolver problemas, el hecho de tener como única estrategia la regla de tres, limita al estudiante a realizar operaciones sin un previo análisis de la información que se le presenta, sin la configuración y ejecución de un plan de resolución y la posterior comprobación e interpretación de la respuesta obtenida.

Por lo anterior, es de suma importancia pensar en una propuesta de trabajo que posibilite al estudiante emplear la noción de proporcionalidad en sus diversas representaciones e interpretaciones, como una estrategia que le permita solucionar situaciones problemas en los contextos de medición, variación y aleatoriedad y que además, le permita contar con diversas estrategias de solución a la hora de enfrentarse a problemas en los contextos matemáticos y no matemáticos.

1.2. Justificación

En la actualidad la enseñanza de las matemáticas en el aula de clase busca que el estudiante además de trascender en el ámbito de operaciones (sumas, restas, multiplicaciones, etc.), desarrolle pensamientos, habilidades y competencias que lo hagan idóneo a la hora de solucionar situaciones problemas. Por lo cual, se espera que el educando sea preparado para aplicar desde una buena comprensión de la información del problema, hasta una adecuada planificación de la estrategia o plan que conlleve a una resolución acertada a la hora de enfrentar situaciones problemas planteadas.

En este sentido, la propuesta de trabajo **La proporcionalidad en la solución de problemas de variación** cobra gran relevancia por cuanto se espera que a lo largo de su ejecución el estudiante:

- Utilice e interprete los números racionales y las fracciones, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.
- Modele situaciones de dependencia mediante la proporcionalidad directa.
- Justifique el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa.
- Conjeture acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.
- Cuente con múltiples estrategias de solución de problemas basadas en la técnica propuesta por Polya quien contempla que al abordar un problema se debe: entender el problema, configurar un plan, ejecutar dicho plan y mirar hacia atrás una vez se ha obtenido una respuesta.

Ésta propuesta de trabajo es pertinente por cuanto se enmarca dentro de las directrices emanadas por el Ministerio de Educación Nacional, a través de los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencias y los Derechos Básicos De Aprendizaje.

En consecuencia el presente trabajo se desarrolla en la Institución Educativa Ismael Perdomo Borrero del municipio de Gigante - Huila dado que se tiene el aval y acompañamiento de las directivas del establecimiento educativo. Junto a esto se cuenta con los recursos idóneos tanto en el orden material como humano y el poco coste económico que conlleva el desarrollo de dicha actividad.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Usar el concepto de proporcionalidad en sus diversas representaciones e interpretaciones, como una estrategia que permita al estudiante solucionar situaciones problemas en los contextos de medición, variación y aleatoriedad.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Desarrollar talleres de transposición didáctica para posibilitar en el estudiante la comprensión del concepto de proporcionalidad.
- Implementar talleres de afianzamiento y profundización con situaciones problemas, que involucren mediciones, probabilidad, razón de cambio y repartos proporcionales.
- Evaluar los avances y dificultades en cuanto al desarrollo de procesos cognitivos, competencias y uso de estrategias para solucionar problemas propuestos en los talleres de afianzamiento y profundización.

Capítulo 2

Marco Referencial

2.1. Marco Contextual

El presente trabajo se realizará en la institución educativa Ismael Perdomo Borrero del municipio de Gigante – Huila. A continuación se hará una breve descripción de la ubicación de la institución, así como de la institución educativa y del grupo con el cual se llevará a cabo el presente plan.

Gigante es un municipio ubicado en la zona centro del departamento del Huila y que dista 84 km de su capital Neiva. Limita por el norte con los municipios de Hobo y Algeciras, por el sur con el municipio de Garzón, al oriente con el municipio de Algeciras y el departamento del Caquetá y al occidente con los municipios de El Agrado, Paicol, Tesalia y Yaguará. La capital cacaotera del Huila (como es conocido el municipio) fue fundado el 17 de septiembre de 1782 y actualmente cuenta con aproximadamente 33000 habitantes, de los cuales casi el 50 % pertenece a la zona urbana.

El renglón económico del municipio que más destaca es el agrícola, principalmente en el cultivo de productos como el café y el cacao. Otros productos agrícolas son la granadilla, el maracuyá, el tomate, el plátano, la yuca y la panela. En menor medida, se hace presente la ganadería de especies como cebú criollo y ganado lechero. Otro sector de producción es el minero, del que destaca la explotación de dos yacimientos petroleros.

En noviembre de 2010 se inicia la construcción del Proyecto Hidroeléctrico El Quimbo, cuya área de influencia abarca los municipios de Gigante, Garzón, El Agrado, Altamira, Paicol y Tesalia. Sin duda alguna el desarrollo de dicho megaproyecto ha traído consigo impactos significativos a nivel ambiental, toda vez que se ha inundado terrenos cacaoteros y talado zonas boscosas que eran hábitat de especies propias de la región; a nivel económico, ya que impulsó la contratación de mano de obra calificada y no calificada de la región así como el desarrollo comercial de la región; y a nivel social, dado que se incrementaron los casos de drogadicción, alcoholismo, prostitución, inseguridad, vandalismo y costos de vida (arriendos y alimentos) que han impactado de manera significativa a los habitantes y en especial a la juventud de la región.

En el mes de febrero de 1972 se crea el Colegio Nacional Ismael Perdomo Borrero en el municipio de Gigante, el cual se encuentra ubicado en la carrera 7 No. 1-11 de dicha localidad. Inicialmente dicha institución prestaba los servicios de educación en jornada completa y ofrecía los grados de sexto a once de bachillerato. El 15 de octubre de 2002 bajo el decreto 1177, el gobierno departamental crea la Institución Educativa Ismael Perdomo Borrero del municipio de Gigante. Dicho decreto contempló la fusión con la Institución Educativa Simón Bolívar, convirtiéndose esta última en la sede primaria de la institución. El reconocimiento 2012 de abril 13 de 2016 estipula que la institución educativa se acoge a la jornada única con media técnica en sistemas computacionales. Actualmente el colegio cuenta 42 docentes tanto en básica primaria como en secundaria y media técnica, 1 rector, 2 coordinadoras y 850 estudiantes de preescolar a grado once, de los estratos 1 y 2 tanto de la zona urbana como rural. La mayoría de los estudiantes proceden de hogares conformados por padre, madre y hermanos; sin embargo existen casos en los cuales el núcleo familiar está conformado por abuelos, tíos u otros familiares quienes se han visto en la necesidad de asumir la responsabilidad de dichos estudiantes. El ambiente escolar es agradable, ya que la institución cuenta con aulas amplias, laboratorios de inglés, física, biología, tecnología, auditorio, sala audiovisual, biblioteca, restaurante escolar y zonas de recreación (cancha de microfútbol y baloncesto).

El grado 601 de la Institución Educativa Ismael Perdomo Borrero del municipio de Gigante – Huila, el cual será el grupo con el que se llevará a cabo el presente trabajo, está conformado por 24 niños y 18 niñas para un total de 42 estudiantes cuyas edades oscilan entre los 11 y 13 años.

2.2. Marco de Antecedentes

Son innumerables las investigaciones que se han realizado en el área de la matemática en relación a las nociones y la enseñanza de la proporcionalidad, dado que este concepto se considera sumamente importante para el desarrollo del pensamiento formal. El resultado de la mayoría de estas investigaciones muestra que la conceptualización que logran los estudiantes es buena, aunque en la mayoría de los casos es bastante lenta, e incluso se habla de pruebas de que un gran porcentaje de estudiantes nunca logran su plena asimilación, o de que los estudiantes al hacer alusión a la proporcionalidad se remiten inmediatamente y de forma exclusiva al concepto de regla de tres.

A continuación se hace un recuento rápido de algunas investigaciones llevadas a cabo con el tema de la proporcionalidad, los objetivos y metodologías planteadas y resultados obtenidos por éstas, así como sus conclusiones y contribuciones para mejorar la enseñanza de este concepto tan importante en las matemáticas.

- **La proporcionalidad: el mejor sendero para llegar a construir el concepto de "Razones trigonométricas". Estudio de caso por medio de experiencias de aula en estudiantes del grado 10º de la I.E. Fe y Alegría Popular 1**

(YEPES MONTOYA, NATALIA. 2012): En este escrito la autora presenta una experiencia de aula taller para generar aprendizaje significativo de Razones trigonométricas, por medio de discusiones en equipo y la manipulación de material concreto entre otras, tomando los conceptos de razón y proporción. Tuvo como objetivo el "Utilizar la proporcionalidad como un sendero para llegar a construir el concepto de "Razones trigonométricas" por medio de experiencias de aula en 40 estudiantes del grado 10º de la I.E. Fe y Alegría Popular 1" La autora refiere entre otras cosas que: "al desarrollar este trabajo, los estudiantes comprendieron el concepto de razón como la comparación entre dos magnitudes; la planificación de actividades bien estructuradas y con preguntas orientadoras hace que cada estudiante se convierta en responsable de su propio aprendizaje; después de un trabajo en equipos, es muy importante la retroalimentación general para hacer puestas en común y compartir ideas o discutir puntos divergentes; los conceptos matemáticos son aprendidos con más facilidad cuando se relacionan con situaciones reales, donde intervenga material concreto y cuando existe la experimentación y la verificación de teorías".

- **Enseñanza del concepto de proporcionalidad en el grado 5° de primaria (ORTIZ LEMOS, JEFERSON. 2012)**: El autor de este escrito tiene por objetivos: "Caracterizar las actividades de enseñanza de la proporcionalidad en el grado 5° de la I.E. INEM José Félix de R. Teniendo en cuenta el proceso de planificación de los docentes y el diseñar e implementar una propuesta metodológica para enseñar el concepto de proporción, en los grados quintos de primaria de la institución educativa INEM José Félix de Restrepo de la ciudad de Medellín". Refiere que la metodología empleada es: "de tipo deductivo ya que parte de una hipótesis a partir de hechos observado acomodándose a los instrumentos que se examinaran; y que el tipo de estudio empleado para la realización de dicha propuesta es de tipo descriptivo, puesto que, en el informe de esta propuesta se señalan los datos obtenidos y la naturaleza exacta de la población de donde fueron extraídos". Concluye el autor que una vez revisado los diarios de campo, planes de área y realizado las entrevistas y seguimientos a la bibliografía empleadas en su institución, se caracterizó las actividades metodológicas para enseñar de una manera estructurada el concepto de proporcionalidad en el grado 5°, teniendo en cuenta: "Actividad práctica donde se de una iniciación al concepto de proporcionalidad, en la cual el estudiante identifique de manera práctica las variables, así como la relación; uso de las tic, mediante el manejo de sitios web, aples, donde ellos interactúan y modelan diversos tipos de problemas que involucran el concepto de proporcionalidad" entre otras.

- **Una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad en el grado octavo de la Institución Educativa María Josefa Marulanda del municipio de La Ceja (CEBALLOS ESPINOSA, EDGAR. 2012)**: Hace referencia a la construcción y aplicación de una unidad de enseñanza potencialmente significativa como estrategia para facilitar el aprendizaje significativo del concepto de proporcionalidad, así como la aplicación de test de conocimientos previos, pasando por la presentación del concepto de proporcionalidad y finalmente la evaluación de los aprendizajes. De esta manera, el autor busca responder a sus objetivos que son: "Desarrollar el pensamiento proporcional utilizando como principio la multiplicación y con ello mejorar los niveles de competencia en el área de matemáticas de los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa María Josefa Marulanda del municipio de La Ceja y Diseñar una unidad de enseñanza potencialmente significativa." entre otros. Producto de este trabajo el autor refiere que: "La unidad de enseñanza potencialmente significativa (UEPS) mostro resultados positivos evidenciados en las tareas de clase y en el test final, donde las estudiantes resuelven satisfactoriamente situaciones problema utilizando relaciones multiplicativas escalares y además funcionales, y como ésta última no fue comprobada en el test diagnóstico, constituye un alcance como consecuencia de la propuesta didáctica. Otro de los logros fue la identificación de propiedades estructurales en las relaciones proporcionales no de forma intuitiva, sino con significado, permitiéndoles discernir cuando una situación se puede modelar como una relación proporcional y cuando no".

- **Una propuesta didáctica que permita abordar y potencializar la aprehensión del concepto de proporcionalidad en estudiantes de la educación básica secundaria. (GUTIÉRREZ JIMÉNEZ, OVÍMER. 2013)**: El autor traza por objetivo el: "Proponer una estrategia didáctica que permita abordar y potencializar la aprehensión del concepto de Proporcionalidad en Estudiantes de la Educación Básica Secundaria". Para tal fin, se llevó a cabo la implementación de un pre-test inicial como herramienta diagnóstica, seguido de la implementación de una unidad didáctica y finaliza con la aplicación de pos-test en aras de medir los resultados obtenidos de la implementación de dicha unidad didáctica. Finalmente, el escritor hace referencia a las conclusiones y resultados obtenidos en dicho trabajo, entre los cuales cabe resaltar que: "La aplicación de las unidades didácticas permitieron que los estudiantes estructuraran los conceptos entorno a la proporcionalidad, y desarrollaran estrategias que permitieron la adhesión del concepto de proporcionalidad. La metodología fue positiva ya que, en resumen, se partió de un diagnóstico enmarcado en un pre-test, de una intervención que recogió los resultados del pre-test como punto de partida para la elaboración y aplicación de las unidades didácticas y de los resultados del post-test que de alguna manera validan la propuesta presentada.".

- **Diseño de una Unidad de Enseñanza Potencialmente Significativa que movilice el Aprendizaje de la proporcionalidad directa e inversa a través de las TIC en el grado Séptimo la Institución Educativa el Pedregal del Municipio de Medellín. (LOPERA ZAPATA, CÉSAR A. 2014)**: Este trabajo tiene por objetivo: "Diseñar una unidad de enseñanza potencialmente significativa, apoyada en TIC que movilice el aprendizaje en la resolución de problemas de proporcionalidad directa e inversa en estudiantes del grado séptimo de la educación básica de la Institución Educativa el Pedregal.". Para dicho fin el autor desarrolló su propuesta en cuatro momentos en los cuales inicialmente llevó a cabo el diagnostico de los conocimientos previos que poseen los estudiantes por medio de 20 preguntas a manera de test; posterior a ello, se realizó el análisis de los resultados obtenidos en dicha prueba; a continuación se diseñaron y aplicaron estrategias y actividades enmarcadas en la unidad de enseñanza potencialmente significativa (UEPS) y se concluyó con el análisis de resultados obtenidos en las actividades llevadas a cabo y la aplicación de un test final. Concluye el autor que: "En la ejecución de las actividades se pudo evidenciar que no todos los estudiantes comprenden los conceptos al mismo ritmo y se requerirá de la presencia de un docente para solucionar dificultades, pues todos los estudiantes no poseen la misma habilidad para el manejo de las herramientas tecnológicas y no todos alcanzan el mismo nivel de razonamiento"; "Al confrontar el test inicial con el test final en el pensamiento numérico y variacional se logra una mejoría representativa para reconocer qué es una proporción, qué es una magnitud, una razón y la proporcionalidad inversa de la directa. Frente a la solución de problemas, la equivalencia entre fracciones, los métodos para resolver problemas de proporcionalidad como comparación, fracciones, factor de cambio frente al pre-test, se nota una leve mejoría..." así como también: "Aunque los resultados no fueron los más óptimos se reconocen muchas debilidades de parte del estudiante y el docente. Uno de las dificultades que se presentan en el estudiante es por el tipo de problemas que se proponen, ya sea porque las magnitudes que intervienen son diferentes, por la no limitación de los diferentes conjuntos numéricos en la que un alumno puede encontrarse, por no identificar la constante de proporcionalidad o porque el alumno no ha logrado un grado de madurez cognitivo.".

- **Razonamiento Proporcional (HOLGUÍN ORTEGA, CARLOS ERNESTO. 2012)**: En este escrito el autor "hace un análisis del razonamiento proporcional, su significado e importancia tanto en la matemática como en otras áreas del conocimiento y se finaliza con una propuesta didáctica que pretende afianzar el desarrollo de dicho razonamiento en los estudiantes del grado séptimo de Educación Básica Secundaria.". El autor refiere que: "Para el desarrollo de la propuesta didáctica se hace uso del razonamiento inductivo, con el ánimo de que los estudiantes refuercen actividades comunes al razonamiento proporcional, como lo son la exploración de patrones, relaciones entre magnitudes y sus respectivos referentes numéricos. Con lo anterior se pretende contribuir a un aprendizaje más significativo para los estudiantes".

- **La Proporcionalidad y el Desarrollo del Pensamiento Matemático (JARAMILLO VÉLEZ, LINA MARÍA. 2012)**: La autora manifiesta que el trabajo "es una práctica docente en la que se desarrolló una experiencia de aula centrada en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de proporcionalidad por parte de un grupo de alumnas de la educación media.". Manifiesta que la metodología empleada fue la de "Aula Taller caracterizada por el uso y diseño de guías de trabajo conjuntamente con material concreto y didáctico para la exploración de situaciones de la vida diaria, que conlleve al desarrollo de un pensamiento matemático y científico, que sirva para la formación de personas del siglo XXI.". Tuvo por objetivo el "Proponer y realizar algunas actividades usando estrategias metodológicas que permitan consolidar el significado del concepto de proporcionalidad en un grupo de 40 estudiantes del grado 11 del CEFA (Institución educativa Centro Formativo de Antioquia).."

- **Proporcionalidad simple: Estrategias utilizadas por estudiantes de octavo grado (PRIETO MARTÍNEZ, LUZ JHOANNA. 2009)**: La autora expresa que su trabajo "muestra que las estrategias de resolución utilizadas por los estudiantes están dadas por el uso de operadores escalares, la regla de tres simple, los repartos proporcionales, la regla de tres compuesta y el método de reducción a la unidad.”. El objetivo de este escrito fue el de “Analizar las estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas de proporcionalidad, para así caracterizarlas teniendo en cuenta las diversas formas de asumir la proporcionalidad.”. La metodología empleada fue la de aplicar “dos test diagnósticos sobre proporcionalidad a 400 estudiantes, de los cuales se tomó una muestra de 20 para analizarlos cualitativamente”. Finalmente refiere que “el trabajo realiza aportes en la enseñanza que debe impartir el profesor en cuanto a la proporcionalidad pues permite identificar cuáles son las dificultades que se presentan cuando se encamina a los estudiantes a utilizar estrategias que solo conllevan a la mecanización y que por el contrario no permiten encontrar las relaciones entre magnitudes”.

- **Propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad en el grado séptimo (MARÍN HENAO, NELSON VIDAL y POSADA VELÁSQUEZ, LUIS FERNANDO. 2015)**: Los autores refieren que su trabajo “tiene como propuesta la implementación de una unidad didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad, la cual pretende favorecer el aprendizaje significativo de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad.”. El objetivo de este escrito fue el de “Implementar una unidad didáctica para favorecer un aprendizaje significativo de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad, mediante un vínculo entre las relaciones proporcionales cualitativas y cuantitativas, en los estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Braulio Mejía del municipio de Sonsón.”. Se refieren a la metodología empleada como: “Las actividades fueron diseñadas teniendo en cuenta las tres fases del aprendizaje significativo, de tal manera que permitieran un vínculo entre las relaciones proporcionales cualitativas y cuantitativas. La implementación y análisis de la unidad didáctica se desarrolló mediante una perspectiva cualitativa a través de un estudio de casos, su aplicación permitió analizar el impacto que tuvo ésta, para favorecer el aprendizaje significativo en los tres estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Braulio Mejía del municipio de Sonsón.”.

2.3. Marco Teórico

El MEN ha contemplado en sus Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas la generación en los estudiantes de competencias en los entornos de aprendizaje, en donde debe tener gran relevancia la presentación de situaciones problemas comprensibles y de significado por medio de los cuales el educando potenciará la generación de dichas competencias. En este orden de ideas, se le ha apostado a la educación matemática por medio de la formulación, planteamiento y resolución de problemas cotidianos, lo cual implica que el estudiante analice las situaciones que el docente le presenta en el aula de clase para luego hacer uso de reglas, técnicas, conceptos y expresiones matemáticas y no matemáticas para dar solución a dichas situaciones. Lo anterior trae consigo el proceso de razonamiento por cuanto se desea que el estudiante argumente y justifique los procedimientos que él ha implementado, así como también valide o no las respuestas que obtiene en el desarrollo de dichos procesos.

Paralelo a esto, en los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) el Ministerio de Educación Nacional contempla que el estudiante en grado quinto "resuelve problemas de proporcionalidad directa" y en grado sexto "soluciona problemas que involucran proporción directa y puede representarla de distintas formas", así como también "usa razones (con cantidades y unidades) para solucionar problemas de proporcionalidad" poniendo en evidencia la formulación y resolución de problemas, así como también la importancia de que los estudiantes desarrollen y potencien el razonamiento proporcional.

A continuación se hace referencia a algunas de las teorías pedagógicas, didácticas entre otras que dan fundamento al desarrollo del presente trabajo de investigación.

2.3.1. El niño como centro de aprendizaje (Piaget & Vigostky)

Las formas como el estudiante lleva a cabo procesos de aprendizaje son el resultado de una simbiosis de procesos internos llevados a cabo por el sujeto aprendiente y de las condiciones sociales en las que se halle sumergido dicho sujeto. Junto a lo mencionado con anterioridad, un tercer factor que influye en el aprendizaje del ser humano es aquel que conjuga la relación del aprendiz con un objeto o tarea previamente establecida. Ello implica prestar atención a los procesos, estrategias y herramientas con los cuales el niño o niña se vale en una situación de enseñanza aprendizaje.

En este orden de ideas, Piaget planteó que el proceso de aprendizaje está ligado al nivel de desarrollo de la persona (De la lógica del niño a la lógica del adolescente, 1955, con B. Inhelder), es decir que las capacidades que tenga un sujeto para aprender dependen del desarrollo cognitivo del mismo. Así pues, el aprendizaje puede entenderse como un proceso en el cual se pasa de un estado de menor conocimiento a uno de mayor conocimiento, estos estados fueron llamados sensoriomotor (el sujeto adquiere control motor y conocimiento de los objetos físicos que le rodean), preoperacional (adquiere habilidades verbales y designa símbolos de los objetos que ya puede nombrar), operaciones concretas (el sujeto es capaz de manejar conceptos abstractos como los números y de establecer relaciones, estadio que se caracteriza por un pensamiento lógico) y finalmente operaciones formales (operación lógica y sistemática con símbolos abstractos).

También afirmó Piaget que la escuela debería ser un entorno en el que se estimulen y favorezcan los procesos de aprendizaje a través de la autoconstrucción; así pues el maestro es un mediador entre el sujeto aprendiente y los conocimientos que va a adquirir enfocándose principalmente en el saber y el saber hacer. Aquí es importante que el niño no solo construya conocimiento a partir de la observación, hay que estimularlo, que experimente y manipule, acciones necesarias para la construcción del conocimiento.

Por otro lado, para Vygotsky (Pensamiento y lenguaje, 1962) las actividades llevadas a cabo bajo el acompañamiento de un adulto permiten los aprendizajes del niño; de esta forma el sujeto progresa por apropiación de la cultura a través de las interacciones sociales. El autor considera que el lenguaje es fundamental para el aprendizaje, ya que inicialmente surge a raíz de las diversas comunicaciones iniciales que realiza el sujeto con su ambiente cercano. Este lenguaje que es perfeccionado en la medida que el niño interactúa con los demás, va siendo paulatinamente interiorizado (lenguaje egocéntrico) y convertido en instrumento intelectual a través del cual se planifican y regulan las actividades mentales.

Vygotsky plantea que puede existir un espacio potencial el cual junto con las condiciones adecuadas (por ejemplo la interacción social) trae consigo el progreso significativo en las capacidades individuales del sujeto; a esto lo denominó Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), la cual puede definirse como La distancia entre el nivel de desarrollo, determinado por la capacidad del sujeto para resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema, bajo la guía de un adulto o en la colaboración con otro compañero más capaz (Vigotsky, 1988: 133). La ZDP es de vital importancia para el desarrollo intelectual ya que prevé y dispone lo que el niño en un futuro cercano podrá hacer por sí solo. En este orden de ideas, la relación entre el docente y el estudiante es el centro de la pedagogía en las aulas de clase, pues hace que el primero busque en el segundo una actitud de autonomía, ya que paulatinamente se pasa de una conducción externa por parte del docente a la autoconducción por parte del estudiante. Para ello, el docente debe pensar en contenidos acordes a las potencialidades del estudiante más que en las capacidades actuales que posea el mismo.

De las propuestas y teorías hechas por estos dos autores (Piaget y Vygotsky) surgen múltiples teorías en el campo de la pedagogía y la didáctica que analizan los modos con que el estudiante lleva a cabo su proceso de aprendizaje. Entre estas, cabe resaltar:

- Situaciones didácticas: fue desarrollada por Brousseau (1986), quien propuso que el saber es una mezcla entre buenas preguntas y buenas respuestas. Las buenas preguntas deben ser elaboradas de tal manera que se conviertan en las causales de conflictos cognitivos (entiendanse estos como el hecho de que el sujeto hace conciencia de la existencia de respuestas diferentes a las que él ha obtenido en el desarrollo de determinada situación, lo que origina cierto nerviosismo a nivel cognitivo) que conllevarán al aprendizaje.

- Cognición situada: tiene sus bases en los escritos de Vygotsky y de autores como Leontiev (1978), Luria (1987) y más recientemente, los trabajos de Rogoff (1993), Lave (1997) entre otros. Los estudios hechos en este campo postulan que el proceso de enseñanza - aprendizaje siempre están enmarcados dentro del contexto del sujeto aprendiente y por consiguiente, dicho proceso no está aislado del contexto sociocultural en el cual se está inmerso. Hacen referencia también a cómo factores sociales y lingüísticos son claves para comprender los procesos de aprendizaje. Se hace una fuerte crítica a los aprendizajes descontextualizados, conocimientos inertes, poco útiles y escasamente motivantes, de relevancia social limitada (Díaz Barriga y Hernández, 2002).

- Trabajo cooperativo y en grupo: ésta teoría propone que son escasas las acciones individuales. Los individuos elaboran de común acuerdo estrategias de tipo colaborativas para abordar las situaciones que se les plantea. Este tipo de trabajo trae buenos resultados en especial en aquellos niños que presenten dificultades, pues la interacción con pares que no posean dificultades puede traer el mejoramiento en aquellos que si evidencian problemas de aprendizaje. En este contexto se puede hacer referencia a grupos de base cooperativo (Johnson, Johnson y Holubec,1992; Johnson, Johnson y Smith, 1991) en los cuales los estudiantes establecen relaciones responsables y duraderas que los motivan a esforzarse en sus tareas, cumplir obligaciones escolares y a tener un buen desarrollo cognitivo y social.

- Conflicto sociocognitivo: pone de manifiesto que el proceso de aprendizaje hecho por el ser humano, es producto de la confrontación de acciones o ideas entre las personas. Dicha confrontación implica que los participantes deben presentar diferentes aportes y puntos de vista las cuales enriquecen la interacción con los otros, y por otra parte, determinar una respuesta común. Los aprendizajes producto de esta interacción son posteriormente interiorizados por cada uno de los individuos. Perret-Clermont (1996) ha demostrado mediante estudios experimentales que para lograr en los estudiantes progresos a nivel cognitivo, las interacciones sociales que estos tengan, deben dar origen al conflicto sociocognitivo.

- Aprendizaje significativo: fue propuesta por el psicólogo y pedagogo estadounidense David Ausubel (1963). Esta teoría hace alusión a que el aprendizaje se logra en la medida que el estudiante articula y relaciona los conocimientos que está adquiriendo con aquellos que ha obtenido previamente. Para que este aprendizaje sea efectivo, es importante tener en cuenta la motivación y actitud que tenga el sujeto para aprender, también, los materiales y contenidos los cuales deben contribuir a dar un sentido lógico a los procesos de enseñanza - aprendizaje.

- Interacciones sociocognitivas simétricas: ésta definición hace referencia a las situaciones cognitivas en donde los roles y estatus de los participantes se conciben de manera equitativa. Entre ellas están la cooperación y el aprendizaje en grupo. Para que se de el aprendizaje cooperativo es necesario que exista una interacción directa çara a cara", la enseñanza de competencias sociales para la interacción grupal, el seguimiento constante de la actividad desarrollada y una evaluación individual y grupal (Johnson, Johnson and Holubec, 1994).

- Interacciones sociocognitivas asimétricas: son circunstancias cognitivas en las cuales se pone de manifiesto la imitación o la guía que reproduce una situación maestro y aprendiz. Se puede mencionar aquí a la interacción tutorial, en la cual se hace transferencia y adquisición del saber y del saber hacer.

Finalmente es de mencionar que el aprendizaje se puede entender como un proceso producto de la estrecha relación en el sujeto de ámbitos individuales y sociales. A nivel educativo se debe generar espacios de articulación entre las situaciones individuales con las interacciones sociales y culturales que busquen ofrecer las condiciones más adecuadas para de aprendizaje.

2.3.2. Resolución de Problemas - Heurística

La Heurística se ha considerado como el conjunto de estrategias y métodos empleados para resolver problemas razón por la cual a lo largo de la historia se haya brindado gran importancia al estudio de dichos métodos.

En este recorrido histórico cabe mencionar a Pappus de Alejandría (S. III - IV) quien en su obra Colección Matemática realiza reflexiones en cuanto a procesos de razonamiento que se pueden llevar a cabo para la solución de problemas. Además explica el método de análisis - síntesis haciendo énfasis en que no hay un análisis al que no le suceda una síntesis y toda síntesis surge de un previo análisis. También diferenció el análisis teórico (encaminado a la búsqueda de la verdad) del análisis problemático (orientado a encontrar lo que se ha dicho que se debe encontrar). Más adelante Bernardo Bolzano (1781-1848), realiza aportes de manera clara en cuanto a las reglas que se deben seguir dentro de la investigación.

En 1888 Jhon Dewey (filósofo, pedagogo y psicólogo) plantea un modelo para la resolución de problemas, el cual constaba de las siguientes fases:

- Identificación de la situación problema.
- Definición precisa del problema.
- Análisis medios - fines. Plan de solución.
- Ejecución del plan.
- Asunción de las consecuencias.
- Evaluación de la solución. Supervisión. Generalización.

Graham Wallas (1858 - 1932) en su obra The Art of Thought (1926) propone y describe un modelo para la resolución de problemas que constaba de cuatro pasos:

- Preparación: aquí se hace la recolección de información y se llevan a cabo los primeros intentos por dar solución al problema.
- Incubación: se deja a un lado el problema para descansar o realizar otras actividades.
- Iluminación: en esta etapa del modelo, aparece la idea clave que va a dar solución al problema.
- Verificación: finalmente, tras la etapa de Iluminación, la persona comprueba la solución que ha obtenido.

2.3.3. “How to solve it” (Cómo plantear y resolver problemas) - George Polya

George Polya (1887 – 1985) fue un matemático húngaro que en el año de 1945 escribió el libro “How to solve it” (Cómo plantear y resolver problemas). Dicha obra se convierte en el punto de inflexión de la heurística, por cuanto plantea que la persona al resolver problemas, sigue un camino lineal desde el enunciado hasta la solución. Polya afirmó que esta obra “trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular “las operaciones típicamente útiles" en este proceso".

Polya aseguraba que la persona (el estudiante) bajo la correcta asesoría de otro (el maestro), puede hacer propias las técnicas de resolución que se consideran efectivas, de tal manera que puede convertirse en un buen "resolutor de problemas"; ante esto, el autor aseveró: "El profesor que desee desarrollar en sus alumnos la aptitud para resolver problemas, debe hacerles interesarse en ellos y darles el mayor número posible de ocasiones de imitación y práctica". En aras de lograr la plena asimilación de dichas técnicas, la persona debe tener claro que para la resolución de problemas se debe llevar a cabo cuatro etapas que son:

- Entender el problema: inicialmente, a la persona se le plantean preguntas como por ejemplo: ¿entiendes todo lo que dice?, ¿puedes replantear el problema en tus propias palabras?, ¿distingues cuáles son los datos?, ¿sabes a qué quieres llegar? y ¿es este problema similar a algún otro que hayas resuelto antes? Entre otras. Polya diría lo siguiente: "el alumno debe comprender el problema. Pero no sólo debe comprenderlo, sino que también debe desear resolverlo. Si hay falta de comprensión o de interés por parte del alumno, no siempre es su culpa; el problema debe escogerse adecuadamente, ni muy difícil ni muy fácil, y debe dedicarse un cierto tiempo a exponerlo de un modo natural e interesante".

- Configurar un plan: en esta etapa la persona busca la estrategia con la cual pueda dar solución a la situación problema que se le ha planteado. Entre estas estrategias se pueden sugerir: ensayo y error (conjeturar y probar la conjetura), buscar un patrón, hacer una lista, resolver un problema similar más simple, hacer un diagrama, usar las propiedades de los números, usar un modelo, entre otras. Para esta etapa, el autor afirma que: "lo mejor que puede hacer el maestro por su alumno es conducirle a esa idea brillante ayudándole, pero sin imponérsele".

- Ejecutar el plan: aquí se espera que la persona implemente la estrategia que ha seleccionado en la etapa anterior hasta encontrar la solución que él considere. En caso de no obtener resultados la persona puede solicitar una sugerencia o simplemente dejar a un lado el problema y, de ser necesario, la persona puede reiniciar la solución del problema planteado. Polya advirtió que esta etapa de la resolución es crucial y puede tener debilidades por cuanto "[...] el estudiante olvide su plan, lo que puede ocurrir fácilmente si lo ha recibido del exterior y lo ha aceptado por provenir de su maestro".

- Mirar hacia atrás: finalmente, al obtener la solución al problema que se le ha planteado, la persona debe reflexionar sobre dicha solución. Para ello se sugiere responder preguntas tales como: ¿es tu solución correcta?, ¿tu respuesta satisface lo establecido en el problema? y ¿adviertes una solución más sencilla? Para Polya: "una de las primeras y principales obligaciones del maestro es no dar a sus alumnos la impresión de que los problemas de matemáticas no tienen ninguna relación entre sí, ni con el mundo físico".

Paralelo a esto, para Polya el estudiante logra aprender a través de la imitación y la continua práctica, ante lo cual dijo: "al tratar de resolver problemas, hay que observar e imitar lo que otras personas hacen en casos semejantes, y así aprendemos problemas ejercitándolos al resolverlos".

Finalmente, dado que los problemas son entregados en palabras, se recomienda que a la hora de resolverlo dichas palabras sean llevadas a un lenguaje matemático (símbolos y expresiones propias del área), para así resolverlo e interpretarlo de acuerdo al contexto en que se enmarca dicho problema. En cuanto a esto, Polya dijo: "el empleo de símbolos matemáticos es análogo al de palabras. La notación matemática aparece como una especie de lenguaje, une langue bien faite, un lenguaje perfectamente adaptado a su propósito, conciso y preciso, con reglas que no sufran excepciones [...] Una notación apropiada podrá contribuir de modo primordial a la comprensión del problema".

2.4. Marco Conceptual

2.4.1. Razonamiento Proporcional

El concepto de proporcionalidad está presente en la vida escolar y el entorno en el cual están inmersos los estudiantes y en general el ser humano; por ejemplo, la proporcionalidad se hace presente en química y física en conceptos tales como aceleración, presión y velocidad entre otros; en sociales a la hora de analizar y manejar escalas, maquetas o mapas y en las mismas matemáticas cuando el estudiante trata temas relacionados con semejanza de triángulos, porcentajes o repartos proporcionales entre otros. Sin embargo el hecho de que los estudiantes estén inmersos en estas situaciones no es prenda de garantía de que efectivamente comprendan y den un tratamiento acertado a dichas situaciones dado que en muchos casos, ellos, los estudiantes, no han sido expuestos a procesos encaminados a desarrollar y fortalecer su razonamiento proporcional el cual es prenda de garantía a la hora de dar manejo a la proporcionalidad.

Pero, ¿qué implica el concepto de razonamiento proporcional? Se entiende por razonar como la capacidad del ser humano por la cual procesa y organiza la información en nuevas estructuras; en este orden de ideas, el razonar matemáticamente conlleva a que el estudiante esté en la capacidad de explicar el por qué y el cómo, así como también el encontrar ejemplos y relaciones en pro de formular hipótesis y hacer predicciones; Montenegro (2003). De allí que el razonamiento proporcional implica emplear relaciones matemáticas completas a fin de poder encontrar una segunda relación también matemática. Desafortunadamente, en muchos casos, en las aulas de clase se ha brindado mayor relevancia al hecho de que el estudiante adquiera la mecánica operatoria que permita aplicar correctamente la ecuación a una solución de un problema (como es el caso de la regla de tres o algoritmos operacionales), más que en el proceso de comprensión de la noción de proporcionalidad aplicada a diferentes ámbitos y por ende el desarrollo y fortalecimiento del razonamiento proporcional.

Vergnaud, en sus trabajos postuló el concepto de campo conceptual definiéndolo como un conjunto de problemas y situaciones cuyo tratamiento implica necesariamente utilizar conceptos, procedimientos y representaciones de diferente tipo estrechamente interconectados (Vergnaud, 1983), a fin de organizar las situaciones con estructura aditiva y multiplicativa, vistas como un conjunto de problemas que implican operaciones aditivas (adición, substracción, traslación), o multiplicativas (multiplicación, división, fracción, razón, similitud).

Este mismo autor, reconoce problemas multiplicativos clasificándolos en:

- Isomorfismo de medidas, los cuales son problemas en cuya estructura se identifica una proporción entre dos espacios de medidas M1 y M2. En estos se identifican medidas existentes entre una relación entre cuatro cantidades. En esta categoría se pueden distinguir cuatro tipos de problemas (Vergnaud, 1997; 1983): multiplicación, división partitiva, división medida y problemas de reglas de tres (estos últimos no serán objeto de estudio en el presente trabajo).

- Un solo espacio de medidas, en los que se establece una correspondencia entre dos cantidades y un operador escalar designado por la palabra veces.

- Producto de medidas, caracterizados por la composición cartesiana de dos espacios de medidas M1 y M2 en un tercero, M3. Vergnaud (1997).

Por otro lado, para autores como Inhelder y Piaget (1958), el razonamiento proporcional es clave en el desarrollo de las ideas matemáticas del estudiante ya que según ellos, este razonamiento revela un progreso al nivel de las operaciones formales del individuo. Esta forma de razonamiento marca el cambio desde el estadio de las operaciones concretas hacia las operaciones formales. Según Piaget (La génesis de las estructuras lógicas elementales, 1959): "la comprensión de la proporción se caracteriza por dos aspectos, uno lógico (en donde la proporción es un esquema que establece relaciones entre relaciones (una razón es una relación entre dos variables, y la proporción una relación de equivalencia entre dos razones) e implica el recurso a una lógica de segundo orden) y otro matemático (en el cual las compensaciones cuantitativas asumen la forma de esquemas proposicionales de equivalencia (coordinación de los procesos de covariación entre variables y sus respectivas compensaciones) que permiten garantizar que en el proceso de variación se conserve invariante un cociente o un producto (si $\frac{x}{y} = \frac{X}{Y}$, entonces $x \times Y = X \times y$))".

Autores como Lesh y otros (1998, 2003) han hecho propuestas en relación al proceso de construcción del razonamiento proporcional describiéndolas en etapas que son:

- Etapa 1: el estudiante, ante una situación problema, centra su atención en una parte de la información relevante del problema, es decir, solo considera una variable a la vez, y por lo tanto, su análisis de la situación es parcial.

- Etapa 2: se identifican las variables del problema, y su correlación, pero ésta se establece de manera cualitativa, de tal forma que situaciones que impliquen tratamientos numéricos quedan por fuera del alcance de las posibilidades de solución. Este tipo de análisis son importantes pues dan herramientas de control sobre los procesos cuantitativos propios de la siguiente fase.

- Etapa 3: esta fase se caracteriza por el uso de estrategias centradas en el reconocimiento de patrones de correlación entre las cantidades, pero desde una perspectiva aditiva, más que multiplicativa. En esta fase se utilizan reglas que permiten comparar, incrementar, decrecer, o hacer relaciones parte todo.

- Etapa 4: en esta fase se reconocen estructuras y relaciones que coordinan la variación de dos cantidades, fundamentalmente a partir de estrategias de reconocimiento de coordinación e regularidades crecientes y decrecientes (fundamentalmente se trata de análisis escalares).
- Etapa 5: esta fase se fundamenta en la comprensión de la relación de proporcionalidad propiamente dicha a partir del establecimiento de la constante de proporcionalidad como una razón que relaciona cualquier par de valores correspondientes a cada una de las cantidades que se comparan.

El papel del profesor en el tema de razonamiento proporcional, como el nombre del tema lo indica, es enseñar las diferentes formas de razonamiento que se pueden aplicar en situaciones de este tipo y diferenciarlo de contextos no proporcionales. Así, la enseñanza de la regla de tres como única estrategia para resolver problemas de proporcionalidad resultaría insuficiente para que el alumno pueda desarrollar de manera completa una concepción sobre las ideas fundamentales de la proporcionalidad y sus diferentes enfoques, y saber cuándo aplicar correctamente esta regla.

Inicialmente los estudiantes aprenden el concepto de la multiplicación como la operación que resume la suma de sumandos iguales, tal es el ejemplo de 5×4 en donde se explica que dicha operación hace alusión a cinco veces cuatro lo cual es equivalente a decir $4+4+4+4+4$, posterior a ello se hace ejercitación de las famosas tablas de multiplicar para finalmente entregar las propiedades de la multiplicación. Lo que se quiere ahora, es que los niños no solamente asocien a la multiplicación con la operación que resume una suma sino que además, la comprendan como la relación de cuatro términos a la hora de abordar situaciones problemas que implican razonamiento proporcional y solución de problemas relacionados a proporcionalidad directa. En este orden de ideas, al presentarse al estudiante situaciones como: un pantalón cuesta 55000, ¿cuánto cuestan 10 pantalones? El estudiante pueda establecer la relación existente entre la unidad (un pantalón) y el costo de la unidad, pasando previamente por el análisis de que 1 pantalón vale 55000, 10 pantalones cuestan determinada cantidad.

2.4.2. La Metodología Cualitativa

Son múltiples las definiciones y estudios hechos a lo largo de la historia referentes a la investigación cualitativa en las que se menciona su fundamento en la epistemología pos - positivista. Es de mencionar que la investigación cualitativa: "Es aquélla que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable". (Taylor y Bogdan, 1986, 20).

Cuando se hace alusión a la investigación cualitativa, hay que tener en cuenta que se trata de interpretar la realidad en su contexto natural (Rodríguez y otros, 1996), por lo cual al llevar a cabo este tipo de investigaciones se debe tener en cuenta todas sus características, entre las cuales cabe mencionar las siguientes:

- Es inductiva.
- Ve al escenario y a las personas desde una perspectiva holística; las personas, los escenarios o los grupos no son reducidos a variables, sino considerados como un todo.
- Desde los materiales obtenidos, recalca temas y expresiones mantenidos en su formato original para el estudio.
- Las palabras son el principal medio para analizar. Con la finalidad de realizar por parte de quien investiga contrastes, comparaciones y análisis, las puede agrupar o cortar en segmentos semióticos.
- Explicar las formas en que las personas comprenden, narran y actúan en determinadas situaciones.

Los métodos más empleados para llevar a cabo investigación cualitativa son:

- Fenomenología: es el estudio de lo cotidiano, de la experiencia vital, del intento por mostrar las revelaciones internas de la vida. (Rodríguez y otros, 1996).
- Etnografía: por medio de éste método, el investigador conoce y aprende las costumbres y modos de vida de determinado grupo social.
- Teoría fundamentada: “La teoría fundamentada es una metodología general para desarrollar teoría que está fundamentada en una recogida y análisis sistemáticos de datos. La teoría se desarrolla durante la investigación, y esto se realiza a través de una continua interpelación entre el análisis y la recogida de datos”. (Strauss y Corbin, 1994, 273).
- Investigación - acción: “La investigación –acción es una forma de búsqueda autorreflexiva, llevada a cabo por participantes en situaciones sociales (incluyendo las educativas), para perfeccionar la lógica y la equidad de a) las propias prácticas sociales o educativas en las que efectúan estas prácticas, b) compresión de estas prácticas, y c) las situaciones en las que se efectúan estas prácticas” (Kemmis, 1988, 42).

Independientemente del método con el cual se lleva a cabo la investigación cualitativa, se debe tener en cuenta que en general no se puede partir de certezas previamente establecidas ni mucho menos prever los resultados a obtener. Finalmente cabe recordar que las etapas o fases con los cuales se lleva a cabo un proceso de investigación cualitativa son:

- Preparatoria: aquí se hace reflexión, diseño y elaboración del proyecto de investigación.
- Trabajo de campo: en esta etapa, el investigador lleva a cabo el proceso de recolección de la información.
- Analítica: como su nombre lo indica, aquí se realiza análisis de la información recolectada, de los resultados obtenidos y las conclusiones pertinentes.
- Informativa: se presenta resumen de los hallazgos y resultados con los cuales se sustentan las conclusiones obtenidas.

2.4.3. Pensamiento Métrico, Aleatorio y Variacional

La palabra pensamiento indiscutiblemente hace referencia a actividades intelectuales propias del ser humano tales como el análisis, generalización, comparación, síntesis entre otras. De manera puntual el pensamiento matemático se puede definir como la actividad intelectual consistente en la sistematización y contextualización del conocimiento de las matemáticas. Éste pensamiento implica el desarrollo de otros tipos de pensamiento, entre los que cabe mencionar:

- Pensamiento Métrico: con este pensamiento la persona comprende de manera general aquellos procedimientos y conceptos relacionados con magnitudes y cantidades, la medición y uso de las mismas en diversas situaciones. Este pensamiento permite que el ser humano estime medidas de cantidades y los rangos en los que se pueden ubicar dichas medidas.

- Pensamiento Aleatorio: este pensamiento se enmarca en el mundo de las probabilidades. En este pensamiento, el ser humano encuentra una poderosa herramienta que lo ayuda en la toma de decisiones en diversas situaciones (por ejemplo el azar); junto a esto, aporta al desarrollo de la capacidad de tomar conciencia de lo impredecibles que pueden llegar ciertos eventos, lo que conlleva la realización de estimaciones referentes a las posibilidades de ocurrencia de los mismos.

- Pensamiento Variacional: este pensamiento es fundamental a la hora de solucionar problemas, ya que por medio de este, el ser humano puede reconocer y caracterizar la variación (de allí su nombre) que se presenta en diferentes contextos, como también la modelación y representación de los mismos por medio de símbolos.

2.4.4. Comprensión y Contexto en Matemáticas

La comprensión puede ser entendida como la capacidad del ser humano para realizar actividades que implican el pensamiento en relación a un tema cualquiera; esto quiere decir que cuando una persona comprende, puede ejecutar acciones tales como ejemplificar, encontrar y mostrar evidencias, generalizar, hacer analogías y representar de una manera nueva.

La palabra "contexto" que literalmente se puede tomar como la expresión "tejido con", hace mención al ambiente o la situación, en la que se genera, ocurre, puede ser estudiado y comprendido cualquier sujeto - objeto o grupo social. En este orden de ideas, se puede entender al contexto como todo lo co-presente, es decir lo que acompaña, rodea e influencia. Bajo este punto de vista, existe una relación entre sujeto-objeto y contexto.

Es claro que el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas no es ajeno a los conceptos comprensión y contexto Ello conlleva a reconocer factores tales como: características cognitivas, psicológicas y afectivas de los estudiantes; los conocimientos, motivaciones y actitudes de los mismos; las condiciones de tipo cultural, social y económico que inciden en dicho proceso.

De allí que en las instituciones educativas se debe tener en cuenta que la planeación curricular debe enfocarse en que los estudiantes reconozcan y aprendan a utilizar a las matemáticas como una herramienta para resolver situaciones problemas de su contexto; es decir enseñar matemáticas en contexto, enseñanza que debe ser abordada desde la solución de situaciones problemas en donde el estudiante articule los conocimientos previamente adquiridos con aquellos que está adquiriendo, escuche las respuestas de sus compañeros a fin de comparar estas con las posibles respuestas obtenidas por él mismo. Todo esto tendrá como efecto el hecho de que los estudiantes empezarán a dar sentido al porqué de los conocimientos que adquieren, toda vez que encuentran en ellos una herramienta practica para situaciones de la vida cotidiana.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Tipo de Trabajo

En el presente trabajo se pretende hacer seguimiento de cómo los estudiantes desarrollan y potencian el pensamiento variacional y aleatorio, y los avances en la comprensión del concepto de proporcionalidad.

En este orden de ideas, se desarrollará un trabajo de tipo cualitativo, que evidencie los avances y dificultades que presenten los estudiantes a la hora de abordar situaciones problemas relacionados con probabilidad, razón de cambio y repartos proporcionales; haciendo identificación y análisis de las estrategias que ellos emplean cuando están desarrollando este tipo de situaciones y describiendo en forma particular las técnicas para la solución de problemas propuestas por George Polya tales como:

- Entender el problema.
- Configurar un plan.
- Ejecutar el plan.
- Mirar hacia atrás.

3.2. Instrumentos Metodológicos

Durante la ejecución de éste trabajo se desarrollarán de tres tipos de talleres los cuales son:

1. **Talleres de Transposición Didáctica**: con éste tipo de talleres se pretende que el docente reflexione inicialmente sobre el cómo hacer para que sus estudiantes comprendan el concepto de proporción en su relación directa e inversa, asociado a situaciones problemas relacionadas con *Probabilidad, Porcentajes, Razones de Cambio y Repartos Proporcionales.*

2. **Talleres de Afianzamiento**: el propósito fundamental de estos talleres es presentar al estudiante actividades que tienen por objetivo el consolidar los conocimientos previamente adquiridos en los talleres de transposición didáctica e implementarlos en la solución de problemas planteados por el docente. En este momento se da el acompañamiento del docente el cual intervendrá de ser necesario, en la aclaración de dudas que puedan presentar los estudiantes en el transcurso de dichas actividades.

3. **Talleres de Profundización**: en estos talleres se pretende entregar a los estudiantes situaciones problemas más complejos los cuales deberán desarrollar. En esta etapa la intervención del docente es poca, por cuanto se pretende que el educando sea capaz de resolver por sí solo los problemas y socializarlos ante sus compañeros de clase.

3.3. Fuentes de Información

La fuente de información serán los talleres de transposición didáctica, de afianzamiento y profundización desarrollados por cada estudiante, la observación directa del docente hacia el trabajo que se realicen de los mismos y las preguntas e inquietudes que cada uno de ellos generen durante el desarrollo de dichos talleres.

3.4. Análisis e Interpretación de los Resultados

Se realizará descripción por cada taller que los estudiantes desarrollen haciendo énfasis en el análisis de los avances o dificultades que se evidencien en los procesos de pensamiento proporcional y de manera particular en las posibles fortalezas y debilidades de los estudiantes a la hora de implementar los 4 pasos establecidos por Polya para abordar situaciones problemas. De igual manera, se analizarán los avances que los estudiantes muestren en la apropiación del concepto de proporcionalidad a la hora de solucionar problemas de tipo probabilístico, variacional y repartos proporcionales; teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

- **Entender el problema**: en este primer paso, el estudiante analiza el problema en componentes más básicos, explora y busca las relaciones entre los diferentes elementos. El alumno lleva a cabo acciones como: leer, releer, seleccionar datos, anotar datos del enunciado, representar datos del enunciado, replantea el problema con sus propias palabras y si es necesario hace gráficos y tablas; y se le pregunta si entiende la información que se le proporciona.

- **Configurar un plan**: el estudiante organiza el proceso que va a seguir para la resolución del problema. Se espera que realice acciones como: seleccionar la estrategia general de resolución del problema; buscar posibles acciones para resolver el problema; y organizar los datos o las acciones que realizará para resolver el problema. Cabe resaltar que en esta parte del proceso, se espera que el estudiante implemente como estrategia la multiplicación o división y no la regla de tres.

- **Ejecutar el plan**: una vez que el estudiante tiene seleccionado el plan, se espera que lleve a cabo dicho procedimiento. Se hará especial observación a como aborda el proceso multiplicativo para lograr obtener la solución al problema planteado.

- **Mirar hacia atrás**: en esta etapa final el estudiante debe haber resuelto el problema, puede revisar el procedimiento que ha seguido y las operaciones que ha hecho. Se espera que él mismo verifique si la solución que ha obtenido es la correcta buscando los posibles errores que haya tenido y sobre todo que asimile la resolución de problemas de proporcionalidad a través de la multiplicación o división (si es el caso).

Capítulo 4

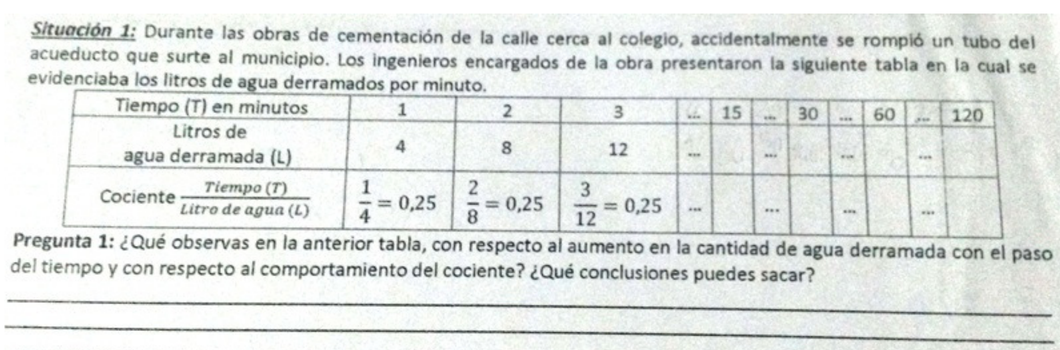
Resultados y Discusión

4.1. Experiencia en el Taller de Transposición Didáctica

Experiencia en la Situación 1

Este taller consta de dos situaciones problemas, con las cuales se pretendía que el estudiante tuviese inicialmente un acercamiento con los conceptos de razón y proporción, a la par que el docente pudiese obtener información preliminar en cuanto a las ideas y el manejo que tienen los estudiantes sobre estos temas.

El desarrollo de dicha situación permite caracterizar a los estudiantes por grupos: en el primero se encuentran los estudiantes que no dan respuesta a dichas preguntas, lo cual se traduce en el poco conocimiento que poseen en torno a las razones y proporciones y por ende la no solución de la situación planteada. Al ser indagados sobre por qué no solucionaron dicho planteamiento coindicen en aducir el "no entender lo que está allí escrito". Sin embargo, junto a esta respuesta dada por los estudiantes, se evidencia que ellos no tienen claro el concepto de razón (evidenciado en la tercera fila de la tabla) (Ver Figura 4.1).



Situación 1: Durante las obras de cementación de la calle cerca al colegio, accidentalmente se rompió un tubo del acueducto que surte al municipio. Los ingenieros encargados de la obra presentaron la siguiente tabla en la cual se evidenciaba los litros de agua derramados por minuto.

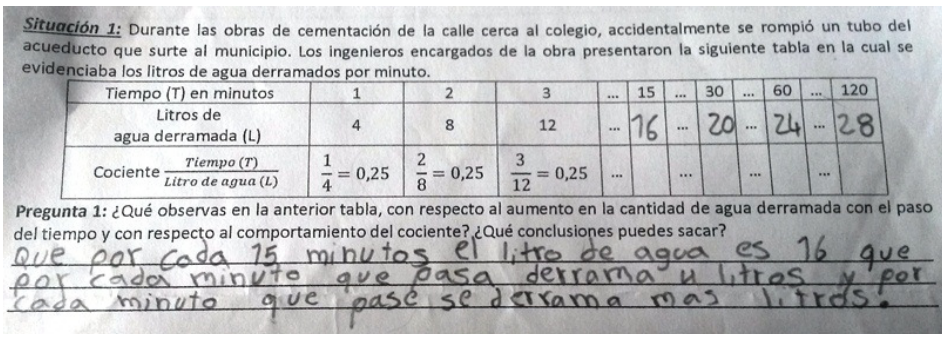
Tiempo (T) en minutos	1	2	3	...	15	...	30	...	60	...	120
Litros de agua derramada (L)	4	8	12	...		...		...		...	
Cociente $\frac{Tiempo\ (T)}{Litro\ de\ agua\ (L)}$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{2}{8} = 0{,}25$	$\frac{3}{12} = 0{,}25$	...		...		...		...	

Pregunta 1: ¿Qué observas en la anterior tabla, con respecto al aumento en la cantidad de agua derramada con el paso del tiempo y con respecto al comportamiento del cociente? ¿Qué conclusiones puedes sacar?

Figura 4.1: Ejemplo de estudiantes que no dan respuesta a la situación planteada

Un segundo grupo de estudiantes al contestar la Pregunta 1 demuestran comprender que a medida que una de las magnitudes (tiempo) va en aumento la otra magnitud (litros de agua) también hace lo mismo, sin embargo no comprenden que la razón $\frac{\text{Tiempo (T)}}{\text{Litros de agua (L)}}$ es constante (0,25), evidencia de que aunque tienen una idea de variación, no asocian esta con el concepto de proporcionalidad toda vez que no identifican dicho cociente como constante de proporcionalidad.

Lo que hay que resaltar en este grupo de estudiantes es que a la hora de completar la tabla de la Situación 1, la información que plasman es la muestra de que ellos asocian la proporcionalidad con razonamientos de tipo aditivo y no multiplicativo. Al preguntárseles el proceso que realizaron para escribir dichos resultados, estos estudiantes manifiestan que observan que los litros de agua van aumentando de 4 en 4 y que por ello, para las columnas correspondientes a 15, 30, 60 y 120 minutos, responden que se han derramado 16, 20, 24 y 28 litros de agua respectivamente. (Ver Figura 4.2).


Situación 1: Durante las obras de cementación de la calle cerca al colegio, accidentalmente se rompió un tubo del acueducto que surte al municipio. Los ingenieros encargados de la obra presentaron la siguiente tabla en la cual se evidenciaba los litros de agua derramados por minuto.

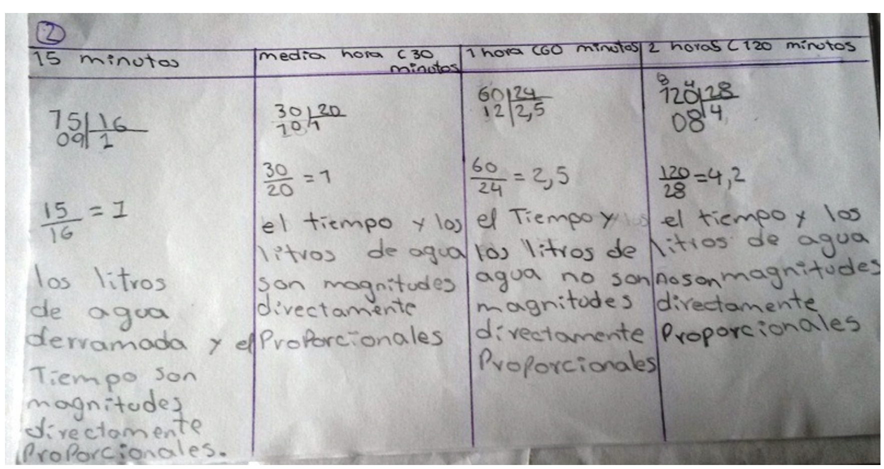
Tiempo (T) en minutos	1	2	3	...	15	...	30	...	60	...	120
Litros de agua derramada (L)	4	8	12	...	16	...	20	...	24	...	28
Cociente $\frac{Tiempo\ (T)}{Litro\ de\ agua\ (L)}$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{2}{8} = 0{,}25$	$\frac{3}{12} = 0{,}25$	...		...		...		...	

Pregunta 1: ¿Qué observas en la anterior tabla, con respecto al aumento en la cantidad de agua derramada con el paso del tiempo y con respecto al comportamiento del cociente? ¿Qué conclusiones puedes sacar?

Que por cada 15 minutos el litro de agua es 16 que por cada minuto que pasa derrama 4 litros y por cada minuto que pasé se derrama mas litros.

Figura 4.2: Ejemplo de estudiantes que emplean razonamiento de tipo aditivo en la fila Litros de agua derramada (L).

A la hora de contestar la segunda pregunta, este grupo de estudiantes establece la razón entre el tiempo y los litros de agua derramado y posterior a ello concuerdan en concluir que las magnitudes son directamente proporcionales. Los estudiantes manifiestan que esta conclusión la obtienen dado que las divisiones que realizan arrojan resultados como 1, 1,30 y 1,50 lo cual en sus palabras "es igual o se acerca a 1". Sin embargo, al cuestionárseles sobre: "¿por qué no toman en cuenta que $\frac{120}{28}$ es aproximadamente 4?" (Ver Figura 4.3) responden que no tiene que ver, porque en las otras divisiones realizadas el resultado se aproxima a 1, lo cual los lleva a concluir que esas magnitudes son directamente proporcionales.

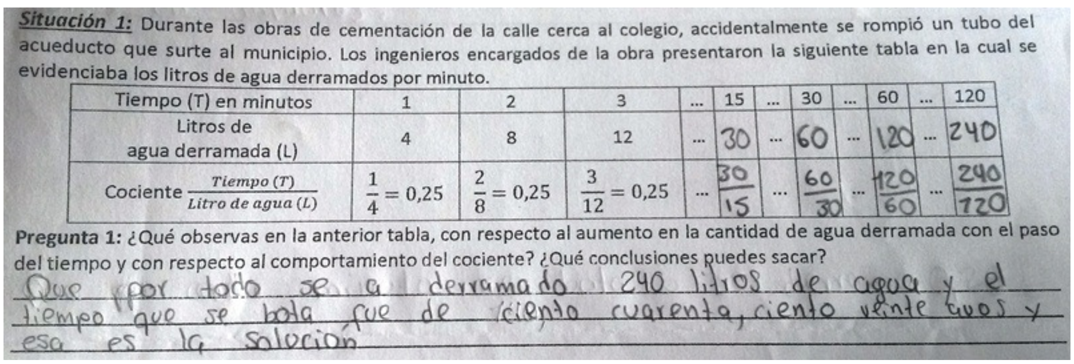

2

15 minutos	media hora (30 minutos)	1 hora (60 minutos)	2 horas (120 minutos)
$\frac{15}{16} = 1$ los litros de agua derramada y el Tiempo son magnitudes directamente Proporcionales.	$\frac{30}{20} = 1$ el tiempo y los litros de agua son magnitudes directamente Proporcionales	$\frac{60}{24} = 2{,}5$ el Tiempo y los litros de agua no son magnitudes directamente Proporcionales	$\frac{120}{28} = 4{,}2$ el tiempo y los litros de agua no son magnitudes directamente Proporcionales

Figura 4.3: Ejemplo de distintos estudiantes que emplean razones y cocientes.

Además, estos niños evidencian que aunque establecen razones, no realizan adecuadamente los cocientes que ellas significan, lo cual se traduce en dificultades para realizar divisiones. Junto a esto, es marcada la tendencia en estos estudiantes de dar solución a problemas de variación asociadas con proporcionalidad, mediante la implementación de estrategias aditivas y no multiplicativas, lo que supone el poco desarrollo que poseen en cuanto al razonamiento proporcional.

Un tercer grupo de estudiantes establecen razones, sin embargo éstas no las comparan con las que previamente están estipuladas en la tabla, lo cual lleva a suponer que no asocian las mismas con el concepto de proporcionalidad. Por otro lado, en este grupo se hace evidente un razonamiento de tipo multiplicativo (aunque errado para la situación que se les ha presentado), (Ver Figura 4.4) ya que presumen que como el tiempo se determina al multiplicar por dos: $(15 \times 2 = 30, 30 \times 2 = 60 \cdots)$ entonces los litros de agua también se determinan bajo ese mismo parámetro: $(30 \times 2 = 60, 60 \times 2 = 120 \cdots)$.


Situación 1: Durante las obras de cementación de la calle cerca al colegio, accidentalmente se rompió un tubo del acueducto que surte al municipio. Los ingenieros encargados de la obra presentaron la siguiente tabla en la cual se evidenciaba los litros de agua derramados por minuto.

Tiempo (T) en minutos	1	2	3	...	15	...	30	...	60	...	120
Litros de agua derramada (L)	4	8	12	...	30	...	60	...	120	...	240
Cociente $\frac{Tiempo\ (T)}{Litro\ de\ agua\ (L)}$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{2}{8} = 0{,}25$	$\frac{3}{12} = 0{,}25$	...	$\frac{30}{15}$	...	$\frac{60}{30}$	...	$\frac{120}{60}$	...	$\frac{240}{120}$

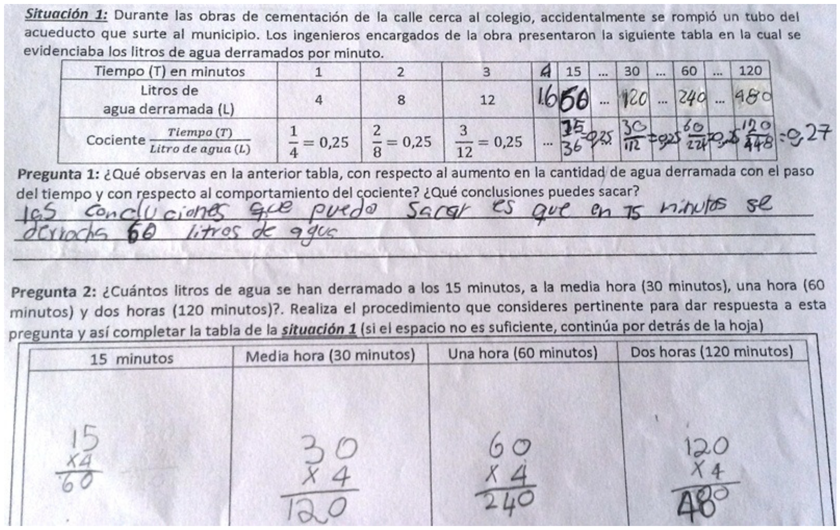
Pregunta 1: ¿Qué observas en la anterior tabla, con respecto al aumento en la cantidad de agua derramada con el paso del tiempo y con respecto al comportamiento del cociente? ¿Qué conclusiones puedes sacar?

Que por todo se a derramado 240 litros de agua y el tiempo que se bota fue de ciento cuarenta, ciento vente tuos y esa es la solución

Figura 4.4: Estudiantes que emplean razonamiento de tipo multiplicativo

Finalmente, algunos estudiantes demuestran implementar las razones como estrategia para dar respuesta a dicha situación. Al ser cuestionados sobre la manera como obtuvieron los resultados de la tabla, aseguran que: "multiplicaban el tiempo por 4, (Ver Figura 4.5) ya que en un minuto se botaban 4 litros de agua". Además afirman que: "en la segunda pregunta, como ya tenían la información en la tabla, entonces lo que hicieron fue comprobar que las divisiones dieran lo mismo". Sin embargo, algunos de los estudiantes dentro de este grupo en el espacio asignado para contestar la Pregunta 2, se limitaron a contestar explícitamente la pregunta sin evidenciar el proceso matemático, mientras que solo un estudiante plasmó las multiplicaciones que realizó. (Ver Figura 4.6).

El hecho de manifestar la realización de la multiplicación de tiempo por una constante (4) diferente a la que se le entrega en la tabla, permite suponer que este grupo de estudiantes, replanteó a su conveniencia el cociente $\frac{\text{Tiempo (T)}}{\text{Litros de agua (L)}}$ por el de $\frac{\text{Litros de agua (L)}}{\text{Tiempo (T)}}$ para de esta forma obtener una constante entera (4) y tratar de evitar así operaciones que impliquen números decimales. Sin embargo algunos estudiantes decidieron plasmar las razones $\frac{\text{Tiempo (T)}}{\text{Litros de agua (L)}}$ e incluso uno de ellos de forma indirecta identifica en su respuesta la constante de proporcionalidad ya que en sus palabras: "aunque los litros de agua en cada minuto se derrama más o menos da el mismo resultado". (Ver Figura 4.7).



Situación 1: Durante las obras de cementación de la calle cerca al colegio, accidentalmente se rompió un tubo del acueducto que surte al municipio. Los ingenieros encargados de la obra presentaron la siguiente tabla en la cual se evidenciaba los litros de agua derramados por minuto.

Tiempo (T) en minutos	1	2	3	4	15	...	30	...	60	...	120
Litros de agua derramada (L)	4	8	12	16	60	...	120	...	240	...	480
Cociente $\frac{Tiempo\ (T)}{Litro\ de\ agua\ (L)}$	$\frac{1}{4}=0,25$	$\frac{2}{8}=0,25$	$\frac{3}{12}=0,25$	...	$\frac{15}{36}$ =0,25		$\frac{30}{12}$ =0,25		$\frac{60}{24}$ =0,25		$\frac{120}{448}$ =0,27

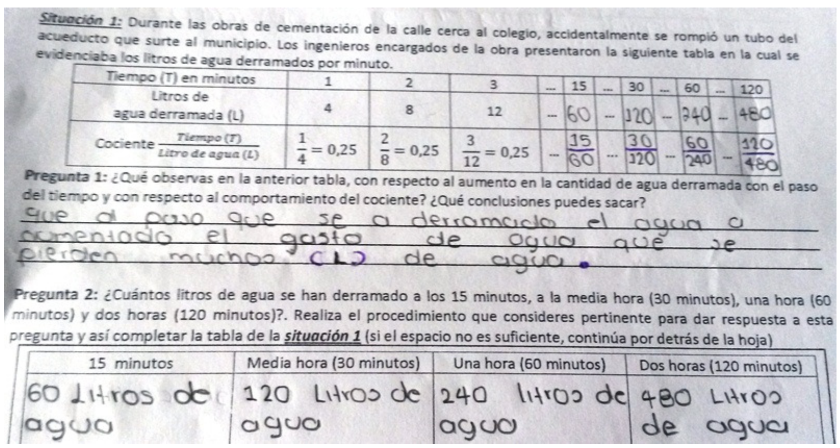
Pregunta 1: ¿Qué observas en la anterior tabla, con respecto al aumento en la cantidad de agua derramada con el paso del tiempo y con respecto al comportamiento del cociente? ¿Qué conclusiones puedes sacar?

los conclusiones que puedo sacar es que en 15 minutos se derrochs 60 litros de agua

Pregunta 2: ¿Cuántos litros de agua se han derramado a los 15 minutos, a la media hora (30 minutos), una hora (60 minutos) y dos horas (120 minutos)?. Realiza el procedimiento que consideres pertinente para dar respuesta a esta pregunta y así completar la tabla de la ***situación 1*** (si el espacio no es suficiente, continúa por detrás de la hoja)

15 minutos	Media hora (30 minutos)	Una hora (60 minutos)	Dos horas (120 minutos)
15 x4 = 60	30 x 4 = 120	60 x 4 = 240	120 x 4 = 480

Figura 4.5: Ejemplo de estudiante que multiplica por factor 4



Situación 1: Durante las obras de cementación de la calle cerca al colegio, accidentalmente se rompió un tubo del acueducto que surte al municipio. Los ingenieros encargados de la obra presentaron la siguiente tabla en la cual se evidenciaba los litros de agua derramados por minuto.

Tiempo (T) en minutos	1	2	3	...	15	...	30	...	60	...	120
Litros de agua derramada (L)	4	8	12	...	60	...	120	...	240	...	480
Cociente $\frac{Tiempo\ (T)}{Litro\ de\ agua\ (L)}$	$\frac{1}{4}=0,25$	$\frac{2}{8}=0,25$	$\frac{3}{12}=0,25$	...	$\frac{15}{60}$	...	$\frac{30}{120}$	...	$\frac{60}{240}$	...	$\frac{120}{480}$

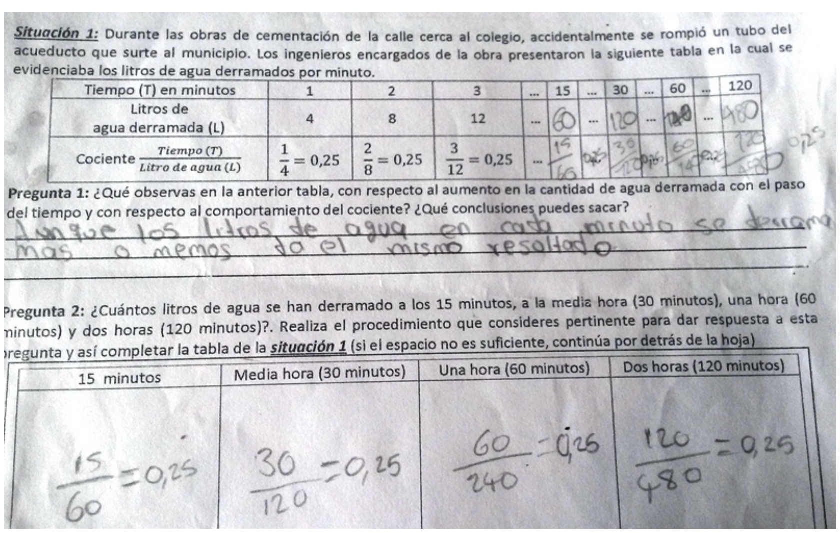
Pregunta 1: ¿Qué observas en la anterior tabla, con respecto al aumento en la cantidad de agua derramada con el paso del tiempo y con respecto al comportamiento del cociente? ¿Qué conclusiones puedes sacar?

que al paso que se a derramado el agua a aumentado el gasto de agua que se pierden muchos CLS de agua.

Pregunta 2: ¿Cuántos litros de agua se han derramado a los 15 minutos, a la media hora (30 minutos), una hora (60 minutos) y dos horas (120 minutos)?. Realiza el procedimiento que consideres pertinente para dar respuesta a esta pregunta y así completar la tabla de la ***situación 1*** (si el espacio no es suficiente, continúa por detrás de la hoja)

15 minutos	Media hora (30 minutos)	Una hora (60 minutos)	Dos horas (120 minutos)
60 Litros de agua	120 Litros de agua	240 litros de agua	480 Litros de agua

Figura 4.6: Estudiantes que entregan respuesta de manera explicita sin procedimiento



Situación 1: Durante las obras de cementación de la calle cerca al colegio, accidentalmente se rompió un tubo del acueducto que surte al municipio. Los ingenieros encargados de la obra presentaron la siguiente tabla en la cual se evidenciaba los litros de agua derramados por minuto.

Tiempo (T) en minutos	1	2	3	...	15	...	30	...	60	...	120
Litros de agua derramada (L)	4	8	12	...	60	...	120	...	240	...	480
Cociente $\frac{Tiempo\ (T)}{Litro\ de\ agua\ (L)}$	$\frac{1}{4}=0,25$	$\frac{2}{8}=0,25$	$\frac{3}{12}=0,25$	...	$\frac{15}{60}$	0,25	$\frac{30}{120}$	0,25	$\frac{60}{240}$	0,25	$\frac{120}{480}$ 0,25

Pregunta 1: ¿Qué observas en la anterior tabla, con respecto al aumento en la cantidad de agua derramada con el paso del tiempo y con respecto al comportamiento del cociente? ¿Qué conclusiones puedes sacar?

Aunque los litros de agua en cada minuto se derrama mas o menos da el mismo resultado

Pregunta 2: ¿Cuántos litros de agua se han derramado a los 15 minutos, a la media hora (30 minutos), una hora (60 minutos) y dos horas (120 minutos)?. Realiza el procedimiento que consideres pertinente para dar respuesta a esta pregunta y así completar la tabla de la ***situación 1*** (si el espacio no es suficiente, continúa por detrás de la hoja)

15 minutos	Media hora (30 minutos)	Una hora (60 minutos)	Dos horas (120 minutos)
$\frac{15}{60}=0,25$	$\frac{30}{120}=0,25$	$\frac{60}{240}=0,25$	$\frac{120}{480}=0,25$

Figura 4.7: Ejemplo de estudiantes que emplean la razón $\frac{\text{Tiempo (T)}}{\text{Litros de agua (L)}}$

Experiencia en la Situación 2

En la situación 2, inicialmente están los estudiantes que no completaron la tabla planteada. Esto, junto con lo evidenciado en la Situación 1 permite reforzar la idea de que en el grupo hay estudiantes con pocos conocimientos en el tema de las razones y las proporciones.(Ver Figura 4.8).

Tiempo (T) en minutos	0	1	2	3	...	15	...	30	...	60	...	120
Temperatura en grados centígrados (C)	2	4	6	8	...		...		...		...	
Cociente $\frac{Tiempo\ (T)}{Temperatura\ (C)}$	$\frac{0}{2}=0$	$\frac{1}{4}=0{,}25$	$\frac{2}{6}=0{,}\overline{3}$	$\frac{3}{8}=0{,}375$	...		...		...		...	

Figura 4.8: Ejemplo de estudiantes que no entregan respuesta

El segundo grupo de estudiantes establece razonamientos de tipo aditivo, esto evidenciado en el hecho de que ellos al observar que en la fila correspondiente a tiempo las magnitudes aumentan de 2 en 2, deciden seguir este patrón, consignando en la tabla valores como 10, 12, 14 y 16. Además, estos estudiantes elaboran razones entre las magnitudes halladas y las ya dadas en la tabla. (Ver Figura 4.9).

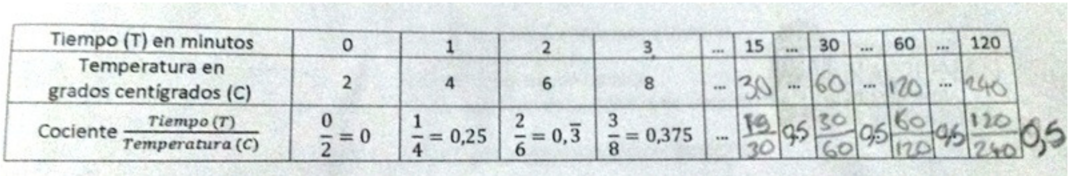
Tiempo (T) en minutos	0	1	2	3	...	15	...	30	...	60	...	120
Temperatura en grados centígrados (C)	2	4	6	8	...	10	...	12	...	14	...	16
Cociente $\frac{Tiempo\ (T)}{Temperatura\ (C)}$	$\frac{0}{2}=0$	$\frac{1}{4}=0{,}25$	$\frac{2}{6}=0{,}\overline{3}$	$\frac{3}{8}=0{,}375$	...	$\frac{15}{10}$	...	$\frac{30}{12}$	...	$\frac{60}{14}$	...	$\frac{120}{16}$

Tiempo (T) en minutos	0	1	2	3	...	15	...	30	...	60	...	120
Temperatura en grados centígrados (C)	2	4	6	8	...	10	...	12	...	14	...	16
Cociente $\frac{Tiempo\ (T)}{Temperatura\ (C)}$	$\frac{0}{2}=0$	$\frac{1}{4}=0{,}25$	$\frac{2}{6}=0{,}\overline{3}$	$\frac{3}{8}=0{,}375$	...	$\frac{15}{10}$	...	$\frac{12}{30}$	...	$\frac{14}{60}$	...	$\frac{120}{10}$

Figura 4.9: Ejemplos de estudiantes que emplean razonamiento de tipo aditivo en la fila Temperatura en grados centígrados (C)

El tercer grupo de estudiantes manifiesta emplear razonamiento de tipo multiplicativo (Ver Figura 4.10) ya que multiplican las magnitudes de tiempo consignadas en la tabla por el factor 2 y así obtienen los datos que hacen falta.

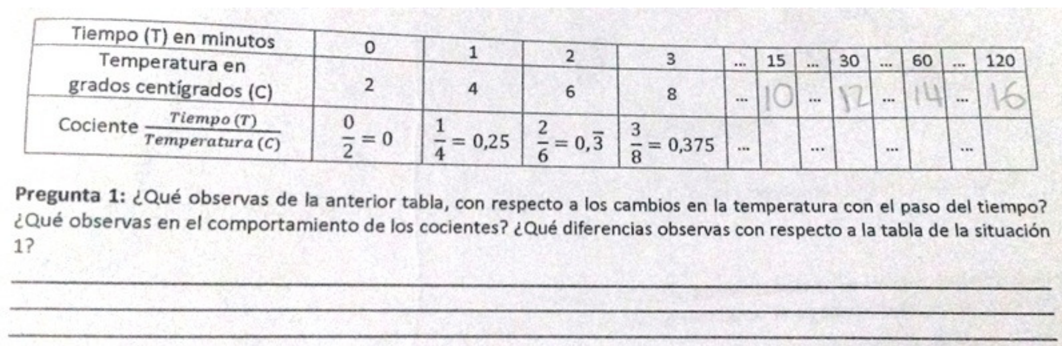
Tiempo (T) en minutos	0	1	2	3	...	15	...	30	...	60	...	120
Temperatura en grados centígrados (C)	2	4	6	8	...	30	...	60	...	120	...	240
Cociente $\frac{Tiempo\ (T)}{Temperatura\ (C)}$	$\frac{0}{2}=0$	$\frac{1}{4}=0{,}25$	$\frac{2}{6}=0{,}\overline{3}$	$\frac{3}{8}=0{,}375$	...		...		...		...	



Tiempo (T) en minutos	0	1	2	3	...	15	...	30	...	60	...	120
Temperatura en grados centígrados (C)	2	4	6	8	...	30	...	60	...	120	...	240
Cociente $\frac{Tiempo\ (T)}{Temperatura\ (C)}$	$\frac{0}{2} = 0$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{2}{6} = 0{,}\overline{3}$	$\frac{3}{8} = 0{,}375$	...	$\frac{15}{30}$	0,5	$\frac{30}{60}$	0,5	$\frac{60}{120}$	0,5	$\frac{120}{240}$ 0,5

Figura 4.10: Ejemplos de estudiantes que usan razonamiento de tipo multiplicativo

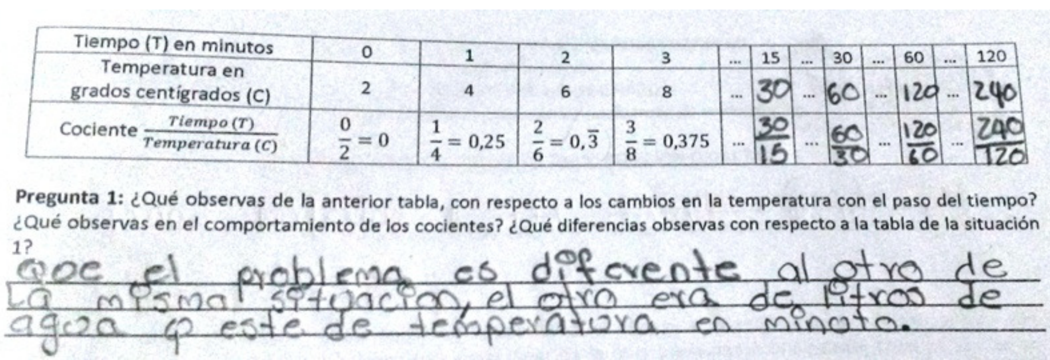
Como es evidente en las anteriores líneas, a la hora de abordar la situación 2 los estudiantes se enfocaron principalmente en completar la información faltante en la tabla planteada (Ver Figura 4.11). Además, las respuestas aportadas por ellos tienen escasa relación a las dos preguntas propuestas en dicha situación o simplemente no respondieron. (Ver Figura 4.12).



Tiempo (T) en minutos	0	1	2	3	...	15	...	30	...	60	...	120
Temperatura en grados centígrados (C)	2	4	6	8	...	10	...	12	...	14	...	16
Cociente $\frac{Tiempo\ (T)}{Temperatura\ (C)}$	$\frac{0}{2} = 0$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{2}{6} = 0{,}\overline{3}$	$\frac{3}{8} = 0{,}375$	...		...		...		...	

Pregunta 1: ¿Qué observas de la anterior tabla, con respecto a los cambios en la temperatura con el paso del tiempo? ¿Qué observas en el comportamiento de los cocientes? ¿Qué diferencias observas con respecto a la tabla de la situación 1?

Figura 4.11: Un ejemplo de estudiantes que solamente completan la tabla



Tiempo (T) en minutos	0	1	2	3	...	15	...	30	...	60	...	120
Temperatura en grados centígrados (C)	2	4	6	8	...	30	...	60	...	120	...	240
Cociente $\frac{Tiempo\ (T)}{Temperatura\ (C)}$	$\frac{0}{2} = 0$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{2}{6} = 0{,}\overline{3}$	$\frac{3}{8} = 0{,}375$	...	$\frac{30}{15}$	...	$\frac{60}{30}$	...	$\frac{120}{60}$	...	$\frac{240}{120}$

Pregunta 1: ¿Qué observas de la anterior tabla, con respecto a los cambios en la temperatura con el paso del tiempo? ¿Qué observas en el comportamiento de los cocientes? ¿Qué diferencias observas con respecto a la tabla de la situación 1?

Qoe el problema es diferente al otro de La misma situacion, el otro era de litros de agua q este de temperatura en minuto.

Figura 4.12: Ejemplo de estudiantes que completan tabla y entregan respuesta con excasa relación a las preguntas planteadas

4.2. Experiencia en los Talleres de Afianzamiento

Experiencia en Situaciones de Medición

Entender un Problema

Tras la lectura de las situaciones problemas la mayoría de los estudiantes entienden lo que se les plantea, junto a esto, reconocen la información entregada, también consideran que la información plasmada es suficiente y tienen claro a lo que quieren llegar (completar los datos faltantes en la tabla). Pese a esto, se percibe que un grupo de estudiantes no comprende las situaciones problema que se les presentan y por consiguiente no realizan un desarrollo ni dan respuesta a las mismas.

Configurar un Plan

Cuando los estudiantes se enfrentaban a situaciones en las que debían determinar el valor de magnitudes, como por ejemplo en el Taller de Afianzamiento 1 Situación 2 (Ver Anexos) los estudiantes optaban por establecer un modelo que implique proporcionalidades. Con la información suministrada, infieren el precio de un solo dulce; éste hecho es de resaltar ya que se convierte en el punto de partida para el establecimiento de dichas proporcionalidades, bien sea para determinar la cantidad de dulces dado determinado precio, o el precio de cierta cantidad de dulces.

Una estrategia observada es la de elaborar razones y a partir de estas establecer proporcionalidades entre la información facilitada y la que se desean encontrar. Junto a esto, se pueden observar estudiantes que elaboran un diagrama (tabla) en la cual plasman la información suministrada y a la vez designan con una variable el valor que quieren encontrar. (Ver Figura 4.13).

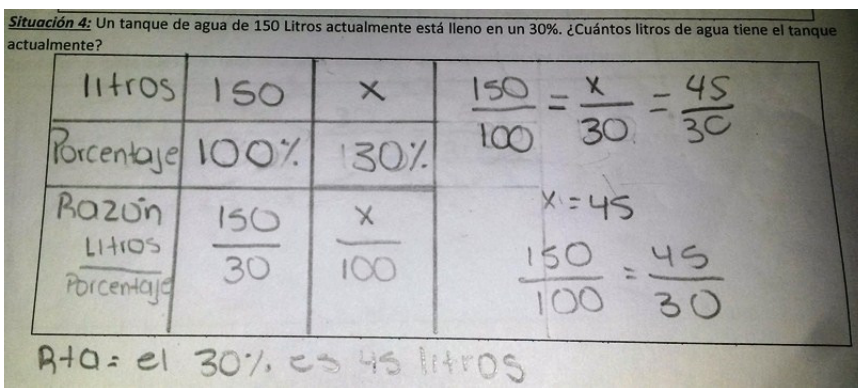


Figura 4.13: Ejemplo de la estrategia seleccionada por los estudiantes

Se pudo percibir que los estudiantes para abordar situaciones con porcentajes, optaban en general por el establecimiento de proporcionalidades; tal es el caso de la Situación 1 en el Taller de Afianzamiento 2 (Ver Anexos) en donde los estudiantes establecen una razón entre el precio real del bolso (sin el descuento) con el 100 %, para acto seguido encontrar el 1 % del precio del bolso. Realizada esta proporcionalidad, establecen una nueva, junto con el descuento hecho y el porcentaje que este representa.

Para poder desarrollar la Situación 1 del Taller de Afianzamiento 3 (Ver Anexos) a los estudiantes se les suministró lana, cintas métricas y elementos con formas circulares (vasos, platos, ruedas en madera, etc.) con los cuales realizarían las mediciones de los diámetros y longitudes de circunferencias. Se les permitió a los estudiantes que realizaran en parejas la recolección de datos (diámetros y longitudes de circunferencias) utilizando la lana y cintas métricas dispuestas en el salón. Dada la pregunta, los estudiantes infieren que se debe establecer si las magnitudes Diámetro de la circunferencia y Longitud de la circunferencia son directamente proporcionales.

Otra estrategia detectada en los estudiantes fue la de comprobar la validez de algunas afirmaciones presentes en los enunciados; es el caso de la Situación 3 del Taller de Afianzamiento 1 (Ver Anexos, Taller de Afianzamiento 1 Situación 3), aquí los estudiantes buscan comprobar la validez de la pregunta que se les plantea (¿Es posible afirmar que el colegio LA ALEGRA DEL SABER tiene actualmente 150 estudiantes? ¿Por qué?), para ello, los estudiantes establecen proporcionalidades entre las razones generadas a partir de la cantidad de estudiantes y el porcentaje que representa dicha cantidad.

Ejecutar el Plan

Algunos estudiantes en el Taller de Afianzamiento 1 Situación 2 parten de la razón de que un dulce cuesta \$50 y la contrastan con la información suministrada en la tabla (el precio de 3 dulces es de \$150) (Ver Figura 4.14). Esto les permite a los estudiantes corroborar que a partir de la inferencia realizada (el precio de un solo dulce), pueden determinar mediante el razonamiento proporcional (en este caso, la multiplicación de la razón $\frac{1}{50}$ por una constante) el precio o la cantidad de dulces que se les solicita. Otros estudiantes prefieren multiplicar directamente la razón $\frac{1}{50}$ o $\frac{3}{150}$ por las constantes que les permiten hallar las respuestas que desean (Ver Figura 4.15).

A pesar de emplear esta estrategia algunos estudiantes fallan a la hora de realizar el producto, lo cual pone de manifiesto la dificultad de ellos en el uso de operaciones básicas (Ver Figura 4.16).

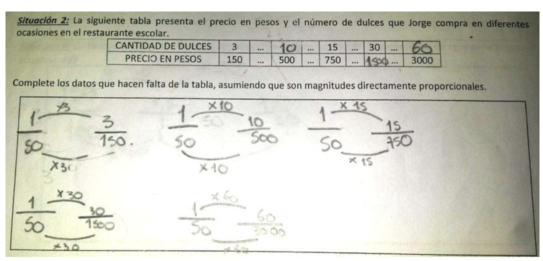


Figura 4.14: Estudiantes que establecen la proporcionalidad $\frac{1}{50} = \frac{3}{150}$

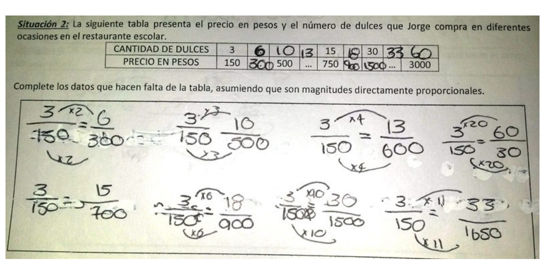


Figura 4.15: Estudiantes que emplean las razones $\frac{1}{50}$ y $\frac{3}{150}$ para completar la tabla

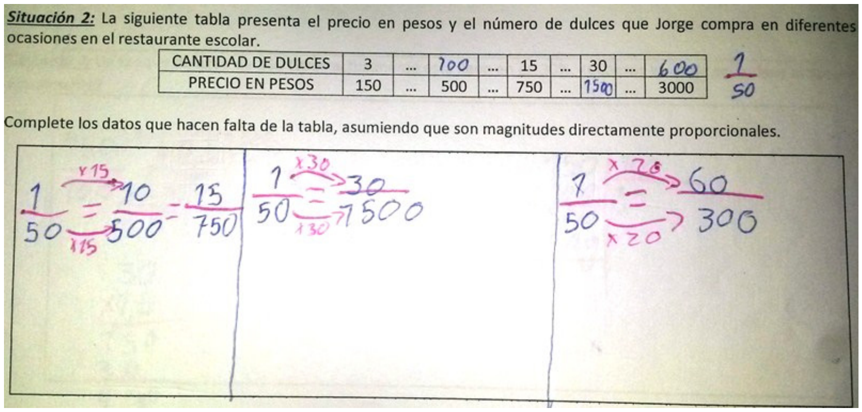


Figura 4.16: Ejemplo de estudiantes que desarrollaron de forma errada la estrategia seleccionada

Para el desarrollo de la Situación 4 del Taller de Afianzamiento 1, los estudiantes establecen una razón entre la cantidad de litros dada en el enunciado y el porcentaje que representa ($\frac{150}{100}$) lo cual evidencia que reconocen la totalidad de cierta cantidad como el 100 %. Posterior a ello, proceden a dividir por una constante (100) en aras de determinar el uno por ciento de la capacidad del tanque ($\frac{1{,}5}{1}$). Finalmente, multiplican ésta razón por un factor 30, (pues en el enunciado se expresa que el tanque está lleno en un 30 %) y así obtener la cantidad de litros que posee el tanque en ese momento (Ver Figura 4.17). Hubo algunos estudiantes que realizaron este mismo procedimiento, que sin embargo llevaron a cabo mal las operaciones (multiplicación y división) (Ver Figura 4.18).

Debido a que en el enunciado del Taller de Afianzamiento 2 Situación 1 no se les entrega el precio que se descuenta, los estudiantes realizan la diferencia entre el precio real del bolso y el precio con el descuento. Hecha esta diferencia proceden a establecer la proporcionalidad mencionada en la elaboración del plan para así determinar el porcentaje de descuento que se le hizo al objeto (Ver Figura 4.19). En cambio otros estudiantes deciden directamente establecer las proporcionalidades mencionadas con anterioridad y así realizar los cálculos pertinentes para encontrar la respuesta solicitada (Ver Figura 4.20).

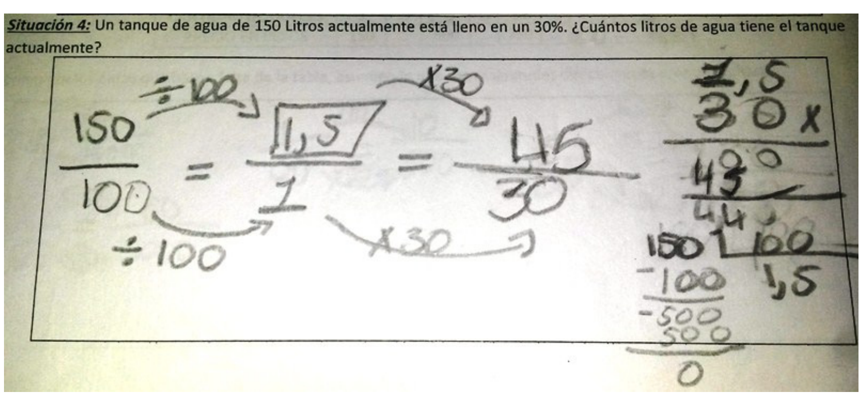


Figura 4.17

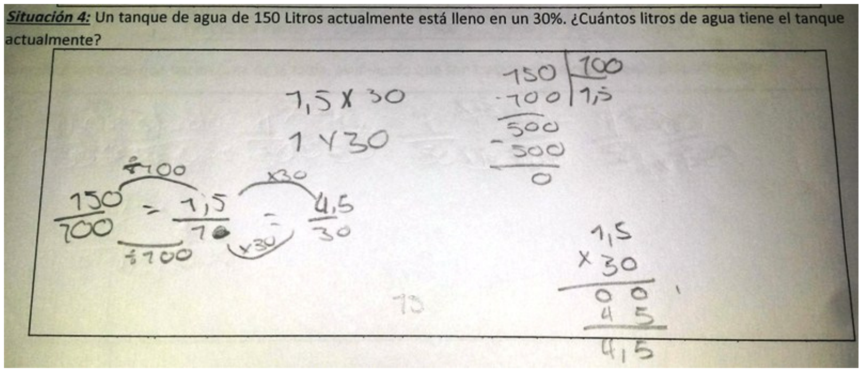


Figura 4.18

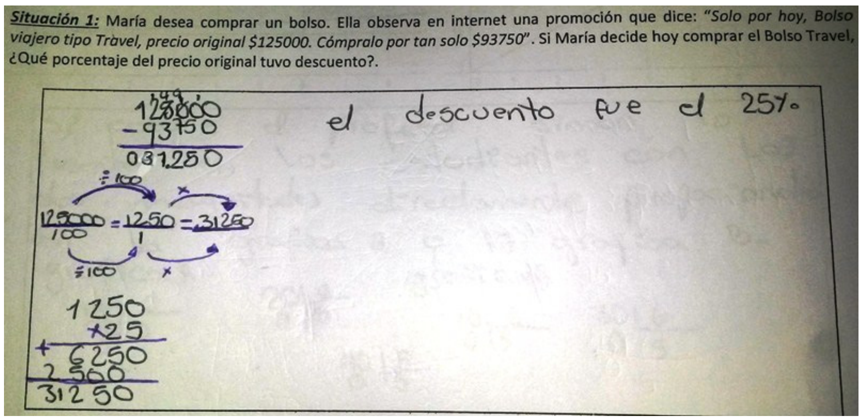


Figura 4.19: Un ejemplo de estudiantes que realizan diferencia y posterior a ello establecen proporcionalidades

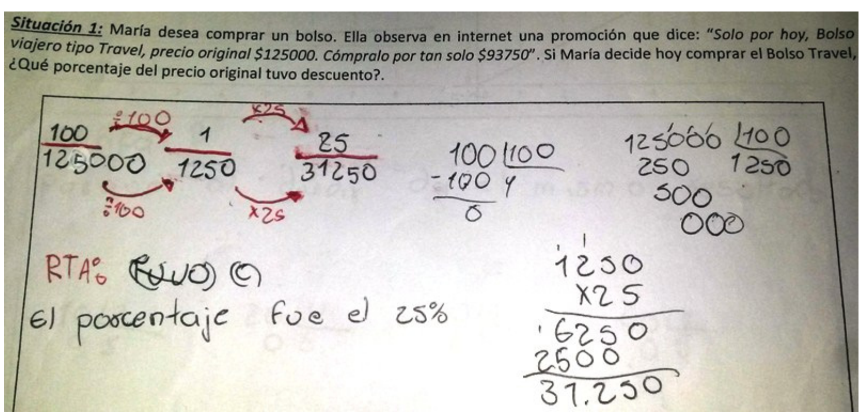
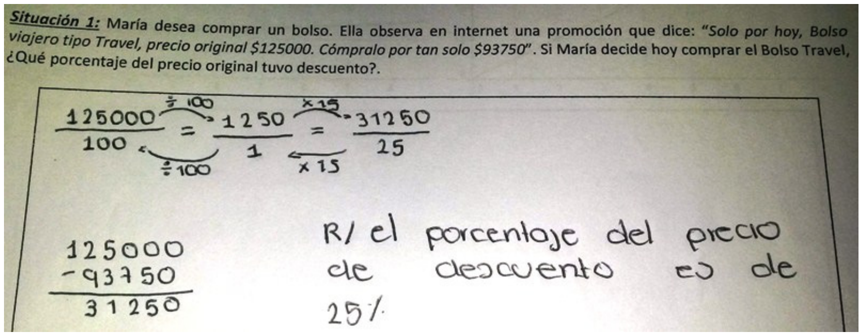


Figura 4.20: Ejemplo de estudiantes que proceden a establecer directamente proporcionalidades

Aunque la mayoría de los estudiantes toman ésta estrategia, no todos la llevan a cabo de manera correcta, ya que algunos de ellos fallan a la hora de realizar operaciones básicas o indicar los procesos que están llevando a cabo (Ver Figura 4.21).



Situación 1: María desea comprar un bolso. Ella observa en internet una promoción que dice: *"Solo por hoy, Bolso viajero tipo Travel, precio original $125000. Cómpralo por tan solo $93750"*. Si María decide hoy comprar el Bolso Travel, ¿Qué porcentaje del precio original tuvo descuento?.

$$\frac{125000}{100} \underset{\div 100}{\overset{\div 100}{=}} \frac{1250}{1} \underset{\times 15}{\overset{\times 15}{=}} \frac{31250}{25}$$

$$\begin{array}{r} 125000 \\ -93750 \\ \hline 31250 \end{array}$$

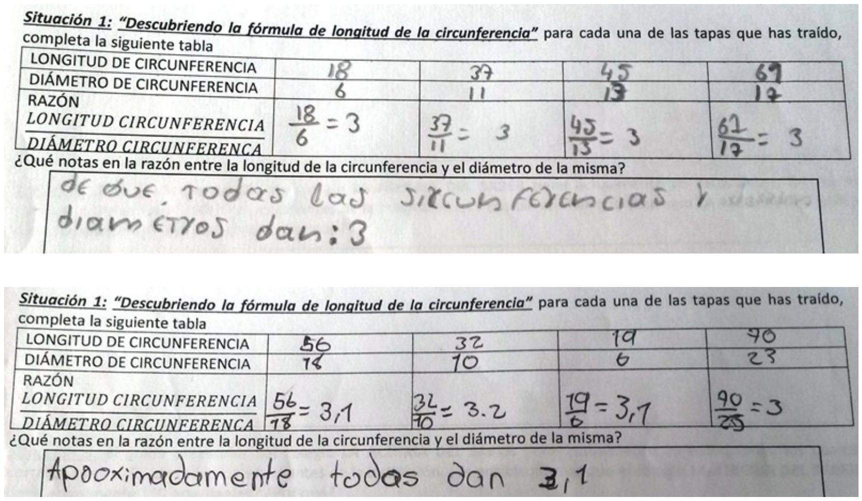
R/ el porcentaje del precio de descuento es de 25%

Figura 4.21: Estudiante que indica de manera errada la constante de multiplicación

Para el desarrollo del Taller de Afianzamiento 3 Situación 1, los estudiantes inician el desarrollo de esta actividad con la recolección de datos (diámetros y longitudes de circunferencias) con las herramientas suministradas por el docente a fin de completar la tabla con dicha información (Ver Figura 4.22).

Una vez completada la tabla con la información que ellos recolectan, proceden a establecer las razones entre las dos magnitudes y acto seguido realizan los respectivos cocientes a fin de determinar una constante de proporcionalidad (Ver Figura 4.23).

Figura 4.22: Estudiantes recolectando información con elementos de su vida cotidiana


Situación 1: ***"Descubriendo la fórmula de longitud de la circunferencia"*** para cada una de las tapas que has traído, completa la siguiente tabla

LONGITUD DE CIRCUNFERENCIA	18	37	45	61
DIÁMETRO DE CIRCUNFERENCIA	6	11	13	17
RAZÓN *LONGITUD CIRCUNFERENCIA / DIÁMETRO CIRCUNFERENCIA*	$\frac{18}{6}=3$	$\frac{37}{11}=3$	$\frac{45}{13}=3$	$\frac{61}{17}=3$

¿Qué notas en la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro de la misma?

de que todas las sircunferencias y diametros dan: 3

Situación 1: ***"Descubriendo la fórmula de longitud de la circunferencia"*** para cada una de las tapas que has traído, completa la siguiente tabla

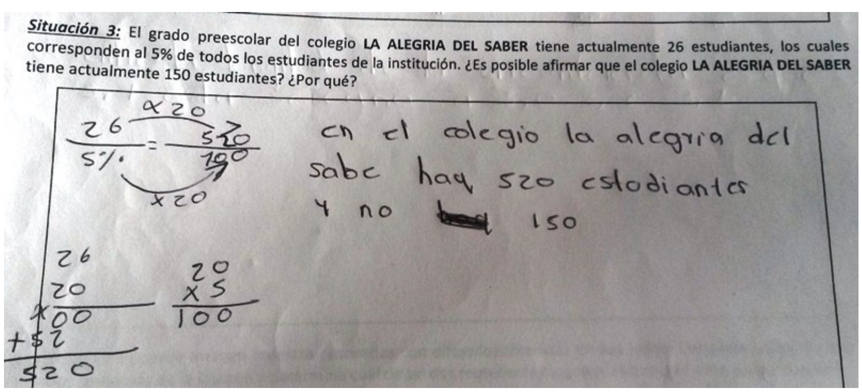
LONGITUD DE CIRCUNFERENCIA	56	32	19	90
DIÁMETRO DE CIRCUNFERENCIA	18	10	6	23
RAZÓN *LONGITUD CIRCUNFERENCIA / DIÁMETRO CIRCUNFERENCIA*	$\frac{56}{18}=3{,}1$	$\frac{32}{10}=3.2$	$\frac{19}{6}=3{,}1$	$\frac{90}{23}=3$

¿Qué notas en la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro de la misma?

Apooximadamente todas dan 3,1

Figura 4.23: Éstos son dos ejemplos de razones establecidas por estudiantes a partir de la información recolectada

En el desarrollo del Taller de Afianzamiento 3 Situación 3, se observó que en general los estudiantes deciden establecer la razón $\frac{26}{5}$ ya que en el enunciado se expresa que 26 estudiantes representan el 5 % del total de todos los estudiantes. A continuación establecen la proporcionalidad $\frac{26}{5} = \frac{520}{100}$. Ésta proporcionalidad la establecen pues realizan el producto 5×20 a fin de establecer la constante por la cual se debe realizar la multiplicación para obtener el 100 %. Así mismo, multiplican 26×20 para así encontrar la totalidad de estudiantes de la institución educativa (Ver Figura 4.24).


Situación 3: El grado preescolar del colegio **LA ALEGRIA DEL SABER** tiene actualmente 26 estudiantes, los cuales corresponden al 5% de todos los estudiantes de la institución. ¿Es posible afirmar que el colegio **LA ALEGRIA DEL SABER** tiene actualmente 150 estudiantes? ¿Por qué?

$\frac{26}{5\%} = \frac{520}{100}$ (x 20)

en el colegio la alegria del sabe hay 520 estodiantes y no 150

26 × 20 = 520

20 × 5 = 100

Figura 4.24: Éste es un ejemplo de como los estudiantes emplean razones y proporciones

Uno de los estudiantes opta por realizar los cocientes $5 \div 5$ y $26 \div 5$ para determinar el 1 %. Después de esto realiza los productos 1×100 y $5{,}2 \times 100$ a fin de establecer la cantidad total de estudiantes. Esto evidencia que el estudiante no se percató de la estrategia empleada por la mayoría y que consistió como se mencionó con anterioridad, en multiplicar las dos magnitudes por el factor 20 (Ver Figura 4.25). Sin embargo algunos estudiantes ejecutaron de forma errada la estrategia, debido a que no realizaron las multiplicaciones de forma adecuada, lo que trajo consigo una respuesta equivocada (Ver Figura 4.26).

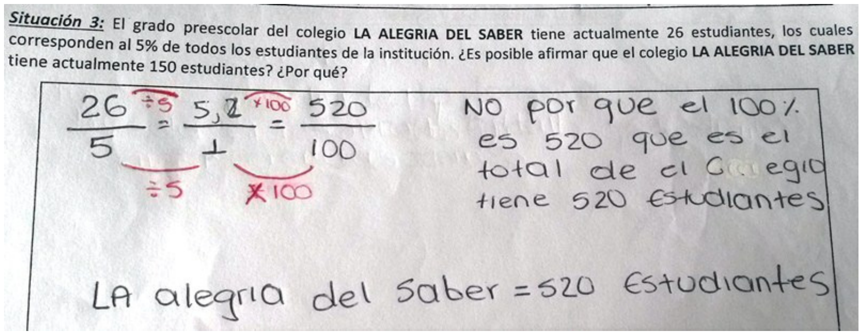


Figura 4.25: Ejemplo de estudiantes que emplea razones y proporciones

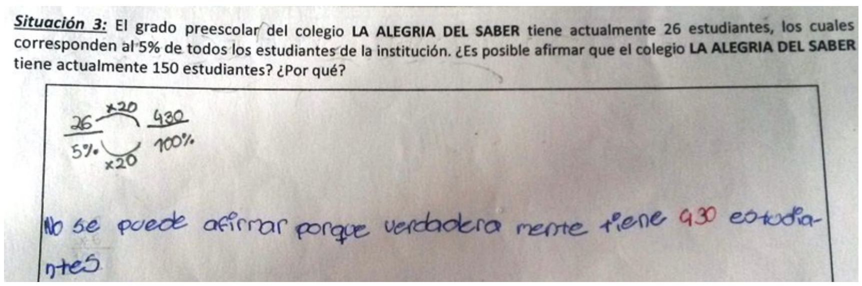


Figura 4.26: Ejemplo de estudiantes que presentan errores en operaciones básicas

Mirar hacia atrás

El hecho de que la mayoría de los estudiantes emplearan como estrategia el establecer proporcionalidades, hizo que sus respuestas fueran acertadas; sumado a esto los estudiantes contrastan sus respuestas con la información ya suministrada en los enunciados (Ver Figura 4,27).

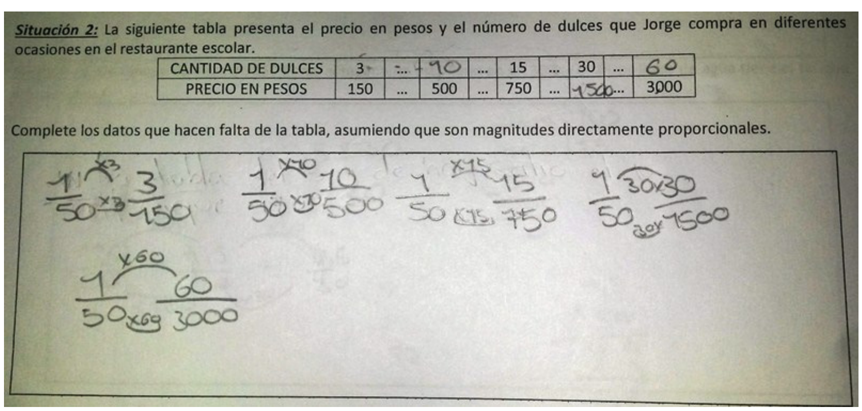


Figura 4.27: Éste es un ejemplo de estudiantes que verifican el procedimiento con información suministrada en la tabla

Se pudo percibir que una vez llevado a cabo el establecimiento de razones, proporciones y operaciones básicas algunos estudiantes entregan una respuesta puntual a la pregunta que se ha planteado. Hubo algunos estudiantes que realizaron procedimientos errados debido a que no hacían adecuadamente las operaciones (multiplicación y división) (Ver Figura 4.28). Caso contrario al de otros estudiantes quienes simplemente optan por dejar plasmados los procesos mencionados (Ver Figura 4.29).

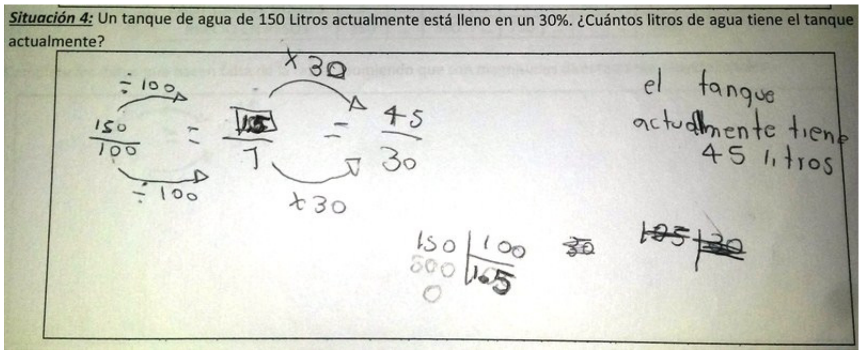


Figura 4.28: Ejemplo de respuesta dada por estudiantes

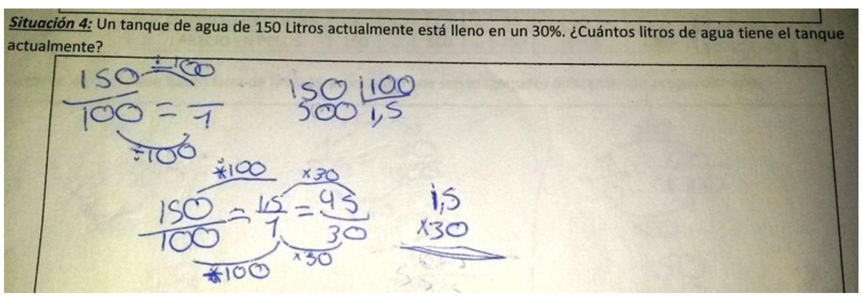


Figura 4.29: Ejemplo de estudiantes que no especifican respuestas

La mayoría de los estudiantes aciertan al entregar respuesta y la escriben de manera puntual y explicita (Ver Figura 4.30). Otros estudiantes solamente hacen mención al porcentaje de descuento realizado; mientras que un grupo de estudiantes solamente plasman las operaciones realizadas y no entregan una respuesta.

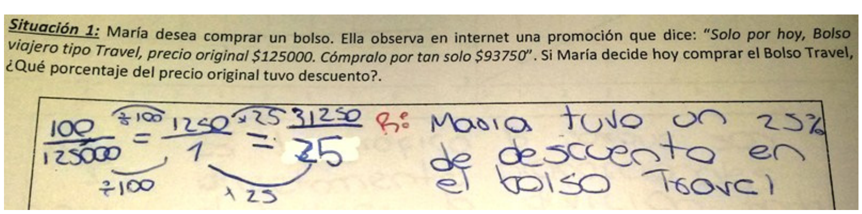
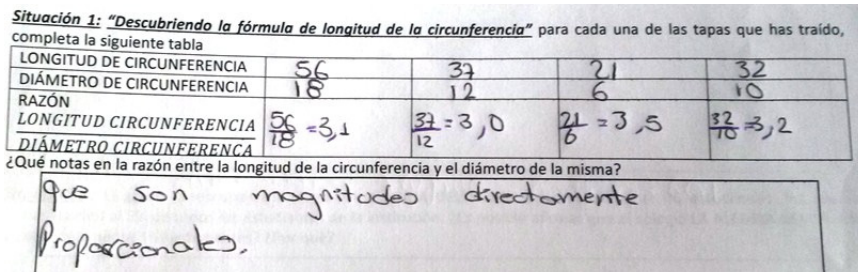


Figura 4.30: Ejemplo de estudiantes que entregan respuesta puntual y explicita

Otra forma de dar respuesta es la de escribir conclusiones de acuerdo a la información encontrada por los estudiantes escriben diferentes conclusiones. (Ver Figuras 4.31 y 4.32).

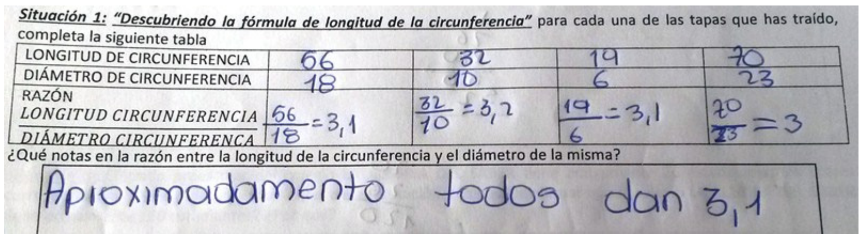

Situación 1: "Descubriendo la fórmula de longitud de la circunferencia" para cada una de las tapas que has traído, completa la siguiente tabla

LONGITUD DE CIRCUNFERENCIA	56	37	21	32
DIÁMETRO DE CIRCUNFERENCIA	18	12	6	10
RAZÓN $\frac{\text{LONGITUD CIRCUNFERENCIA}}{\text{DIÁMETRO CIRCUNFERENCA}}$	$\frac{56}{18}=3,1$	$\frac{37}{12}=3,0$	$\frac{21}{6}=3,5$	$\frac{32}{10}=3,2$

¿Qué notas en la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro de la misma?

que son magnitudes directamente Proporcionales.

Figura 4.31: Ejemplo de estudiantes que afirman la existencia de proporcionalidad


Situación 1: "Descubriendo la fórmula de longitud de la circunferencia" para cada una de las tapas que has traído, completa la siguiente tabla

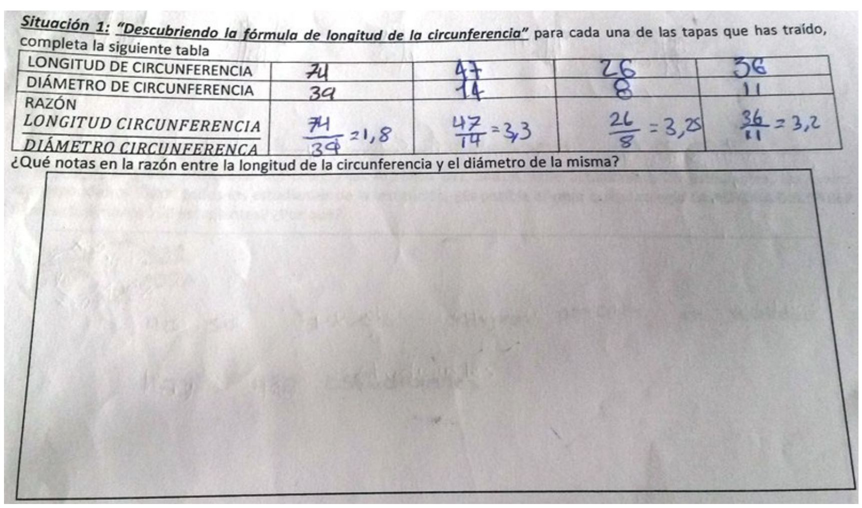
LONGITUD DE CIRCUNFERENCIA	66	32	19	70
DIÁMETRO DE CIRCUNFERENCIA	18	10	6	23
RAZÓN $\frac{\text{LONGITUD CIRCUNFERENCIA}}{\text{DIÁMETRO CIRCUNFERENCA}}$	$\frac{56}{18}=3,1$	$\frac{32}{10}=3,2$	$\frac{19}{6}=3,1$	$\frac{70}{23}=3$

¿Qué notas en la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro de la misma?

Aproximadamento todos dan 3,1

Figura 4.32: Éste es un ejemplo de estudiantes que entregan respuesta sin asocio con proporcionalidades

En algunos casos, los estudiantes no escriben ninguna conclusión pese a que realizan las razones que ellos mismos establecen (Ver Figura 4.33).


Situación 1: "Descubriendo la fórmula de longitud de la circunferencia" para cada una de las tapas que has traído, completa la siguiente tabla

LONGITUD DE CIRCUNFERENCIA	74	47	26	36
DIÁMETRO DE CIRCUNFERENCIA	39	14	8	11
RAZÓN $\frac{\text{LONGITUD CIRCUNFERENCIA}}{\text{DIÁMETRO CIRCUNFERENCA}}$	$\frac{74}{39}=1,8$	$\frac{47}{14}=3,3$	$\frac{26}{8}=3,25$	$\frac{36}{11}=3,2$

¿Qué notas en la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro de la misma?

Figura 4.33: Ejemplo de estudiante que solo escribe razones sin análisis

La mayoría de los estudiantes no realizan procesos de verificación de los resultados obtenidos. Paralelo a esto, aunque manifestaron que debían establecer proporcionalidades, se percibió que éstas no son plasmadas de manera directa y en algunos casos son empleadas de manera indirecta como medio para deducir que las magnitudes son directamente proporcionales.

Experiencia en Situaciones de Variación

Entender un Problema

Los estudiantes comprenden lo que se les plantea, además identifican la información suministrada, también consideran que la información plasmada es suficiente y tienen claro a lo que quieren llegar. Sin embargo se aprecia que hay algunos estudiantes que no comprenden las situaciones problema y por ende no hacen ningún planteamiento y solución del mismo.

En el caso del Taller de Afianzamiento 2 Situación 3 (Ver Anexos, Taller de Afianzamiento 2 Situación 3) los estudiantes inicialmente presentaron dificultades para abordar esta situación problema, puesto que aunque comprendían que debían determinar cuál de las dos gráficas representaba magnitudes directamente proporcionales, no sabían distinguir los datos con los cuales hacer dicho análisis. Además algunos estudiantes manifestaron no comprender los gráficos, pues no tenían pleno conocimiento o en su defecto no recordaban lo que es un plano cartesiano.

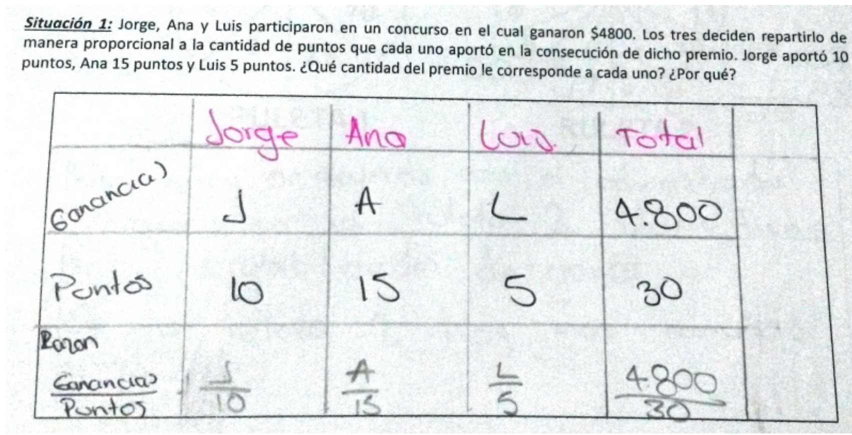
En vista de esto, se realiza una explicación rápida aclarando a los estudiantes las dudas que presentaban en cuanto a un plano cartesiano abordando temas como ejes, parejas ordenadas etc. (Ver Figura 4.34).

Figura 4.34: Momentos en los cuales se realiza explicación y aclaración de dudas a estudiantes

Una vez realizada la explicación se les pregunta a los estudiantes si comprenden la información con la cual deben abordar la situación problema obteniéndose una respuesta afirmativa y proceden a la elaboración del plan.

Configurar un Plan

Para situaciones referentes a repartos proporcionales, por ejemplo la Situación 1 del Taller de Afianzamiento 1, la estrategia que abordan la mayoría de los estudiantes es la de elaborar un diagrama (cuadro) en el cual consignan la información que se suministra; asimismo emplean variables para identificar la información que se debe encontrar y junto a esto realizan un razonamiento directo (Ver Figura 4.35), ya que establecen razones y proporciones entre las magnitudes que aparecen en dichas situaciones.


Situación 1: Jorge, Ana y Luis participaron en un concurso en el cual ganaron $4800. Los tres deciden repartirlo de manera proporcional a la cantidad de puntos que cada uno aportó en la consecución de dicho premio. Jorge aportó 10 puntos, Ana 15 puntos y Luis 5 puntos. ¿Qué cantidad del premio le corresponde a cada uno? ¿Por qué?

	Jorge	Ana	Luis	Total
Ganancia	J	A	L	4.800
Puntos	10	15	5	30
Razon $\frac{\text{Ganancia}}{\text{Puntos}}$	$\frac{J}{10}$	$\frac{A}{15}$	$\frac{L}{5}$	$\frac{4.800}{30}$

Figura 4.35: Un ejemplo del cuadro elaborado por los estudiantes como estrategia para solucionar la situación problema

En las situaciones referentes a razones de cambio por ejemplo la Situación 3 del Taller de Afianzamiento 2 (Ver Anexos) los estudiantes toman como punto de partida el encontrar una constante de proporcionalidad entre las magnitudes, en este caso los valores en el eje Y y los valores en el eje X de acuerdo a las parejas ordenadas que pueden identificar en cada uno de los gráficos. La mayoría de los estudiantes manifiestan que dichas parejas ordenadas se pueden establecer en el Gráfico B ya que según ellos "la línea pasa por las esquinas de algunas de las cuadriculas y dichas esquinas son parejas ordenadas, mientras que en el Gráfico A esto no se ve".

Algo similar se pudo observar en el Taller de Afianzamiento 3 Situación 2 (Ver Anexos). Debido a que se pone de manifiesto la solicitud de determinar cuál de las dos tablas representan magnitudes directamente proporcionales, los estudiantes en su mayoría optan inicialmente por consignar en las tablas la información relacionada con longitud de lados, perímetro y áreas de los cuadrados. Acto seguido, recurren a la estrategia implementada en talleres anteriores la cual consiste en realizar razones (cocientes) a fin de encontrar una constante. De esta manera, los estudiantes podrían determinar cuáles magnitudes son directamente proporcionales.

Ejecutar el Plan

Una vez realizado el cuadro con la información por parte de los estudiantes (por ejemplo la Situación 1 del Taller de Afianzamiento 1), la mayoría procede a establecer las proporciones de manera adecuada para encontrar la parte del premio que le corresponde a cada uno (Jorge, Ana y Luis) (Ver Figura 4.36). Para ello, los estudiantes se valen del razonamiento proporcional ya que parten del hecho de que en las proporciones, si una magnitud se divide por un número, éste procedimiento se debe hacer con la otra magnitud. Esto produjo que los estudiantes encontraran las respuestas acertadas (Ver Figura 4.37).

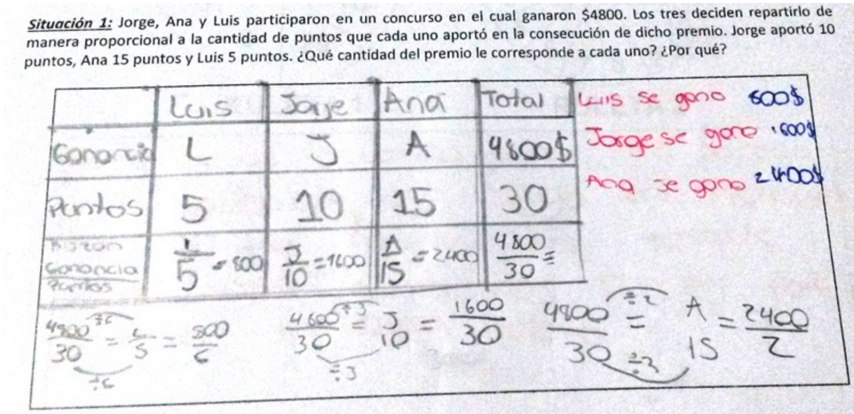


Figura 4.36: Un ejemplo de cómo los estudiantes establecen proporciones

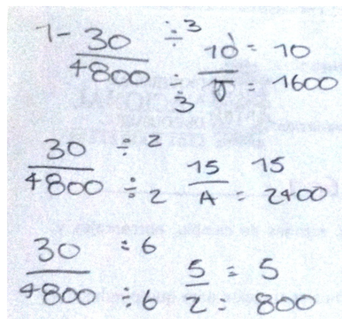


Figura 4.37: Ejemplo de operaciones realizadas con estudiantes (en éste caso, división de magnitudes por una constante)

Ejecutar el Plan

Posterior a la elaboración del cuadro, la mayoría de los estudiantes procede a establecer las proporciones de manera adecuada para encontrar la ganancia que le corresponde a cada uno (Andrea y Felipe). Los estudiantes emplearon razonamiento proporcional ya que dividen y multiplican por constantes (Ver Figura 4.38). Algunos estudiantes fallan a la hora de plantear las constantes por las cuales deben hacer las divisiones y multiplicaciones. (Ver Figura 4.39).

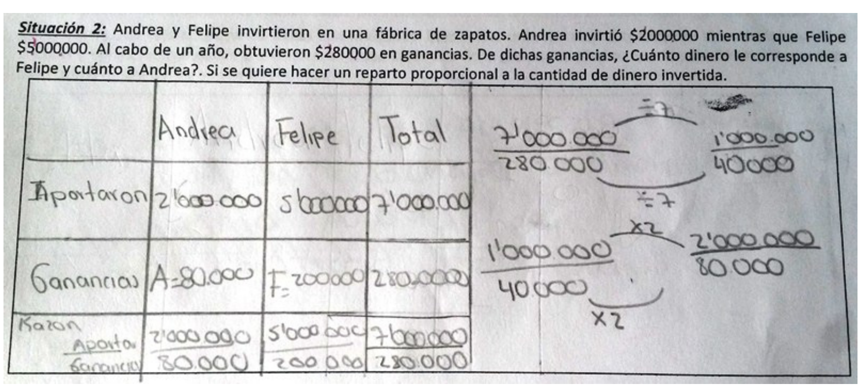


Figura 4.38: Ejemplo del empleo de constantes por parte de los estudiantes al dividir y multiplicar

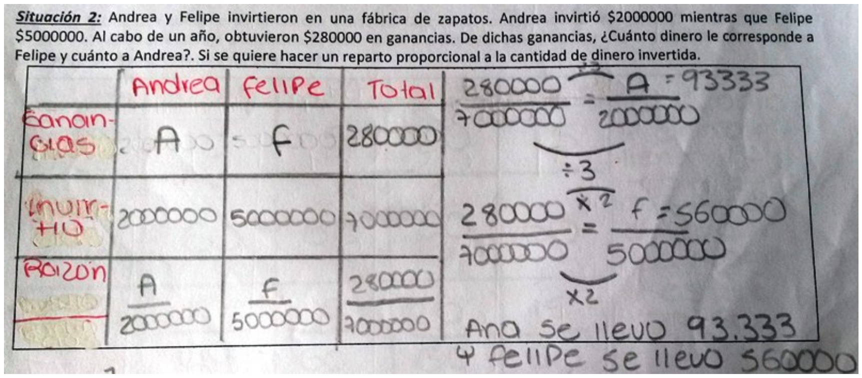


Figura 4.39: Ejemplo de estudiantes que fallan al realizar divisiones y multiplicaciones

Otros estudiantes optan por realizar divisiones y multiplicaciones sin escribir previamente las proporcionalidades, tal es el caso que se pudo observar en el Taller de Afianzamiento 2 Situación 2 (Ver Anexos, Taller de Afianzamiento 2 Situación 2) lo cual evidenciaría que estos estudiantes realizan un razonamiento indirecto en cuanto al manejo de las mismas. (Ver Figura 4.40).

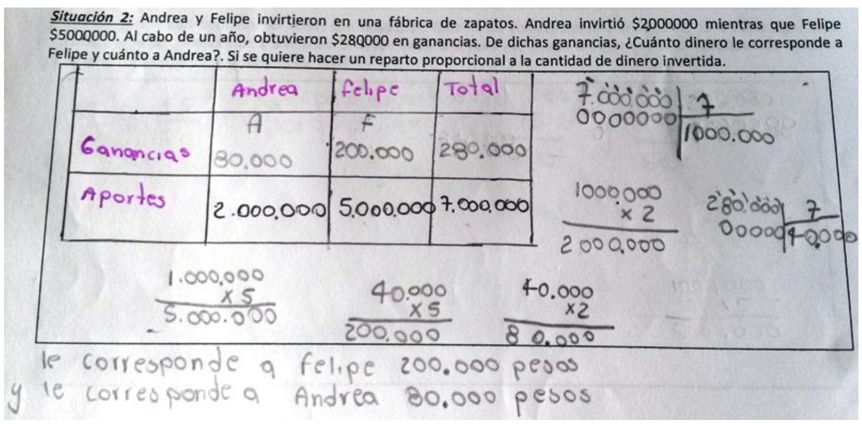


Figura 4.40: Ejemplo de estudiantes que realizan cocientes y productos, pero no plasman razones

En la Situación 3 del Taller de Afianzamiento 2, los estudiantes realizan divisiones a fin de encontrar una constante. La mayoría opta realizar el cociente $\frac{Y}{X}$ como estrategia para evitar que los resultados obtenidos fuesen números decimales (Ver Figura 4.41).

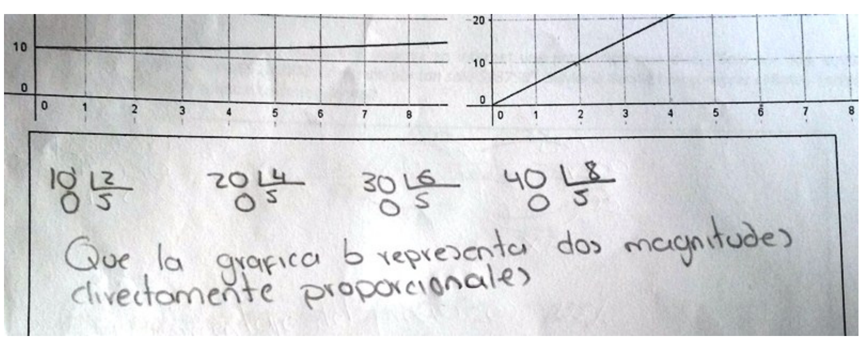


Figura 4.41: Éste es un ejemplo de el cociente que hacen los estudiantes

Se apreció que algunos estudiantes trataron de realizar divisiones con valores de la Gráfica A, sin embargo dichos cocientes no son los más acertados debido a la dificultad para establecer parejas ordenadas en este gráfico. Aun así, estos estudiantes manifestaron que los resultados obtenidos "no eran iguales" y por consiguiente la Gráfica B representa magnitudes directamente proporcionales (Ver Figura 4.42).

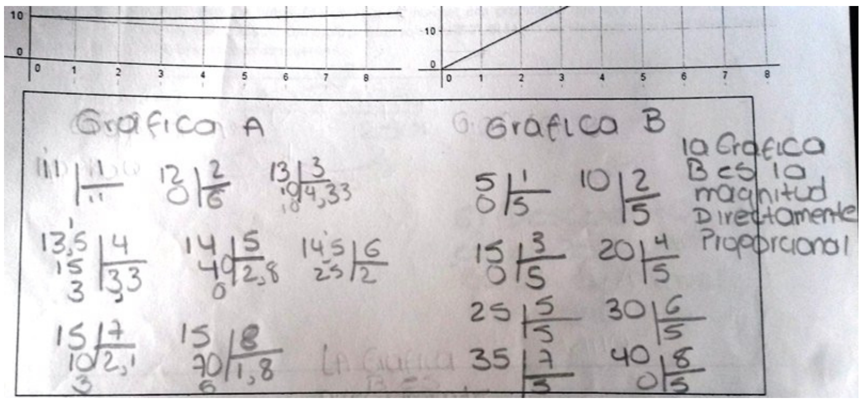


Figura 4.42: Éste es un ejemplo de estudiantes que realizan cocientes con datos de las dos gráficas

En el Taller de Afianzamiento 3 Situación 4 (Ver Anexos) se pudo observar que los estudiantes procedieron a realizar los cocientes entre área del cuadrado y longitud del lado, así como también el cociente entre perímetro del cuadrado y longitud del lado; lo realizan de ésta forma para evitar en palabras de ellos "el uso de números decimales" (Ver Figura 4.43). En el caso de algunos estudiantes esta estrategia falló debido a que ellos no realizaban adecuadamente los cocientes que planteaban. (Ver Figura 4.44).

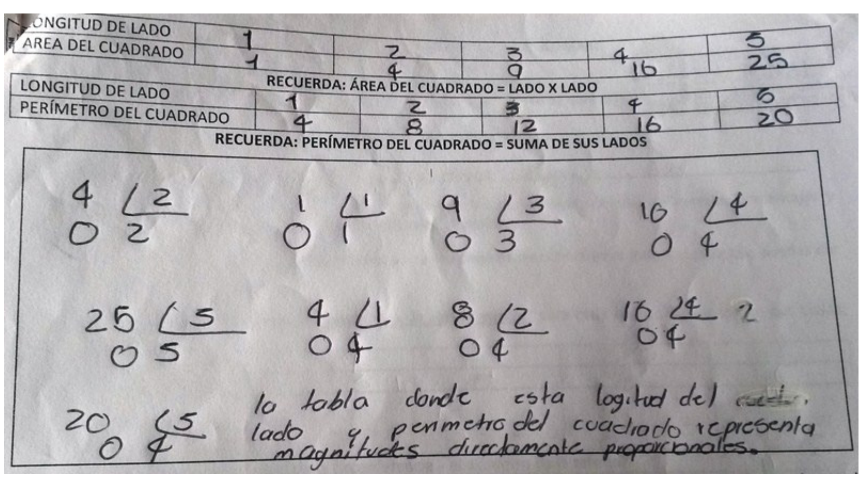


Figura 4.43: Ejemplo de cocientes realizados por los estudiantes

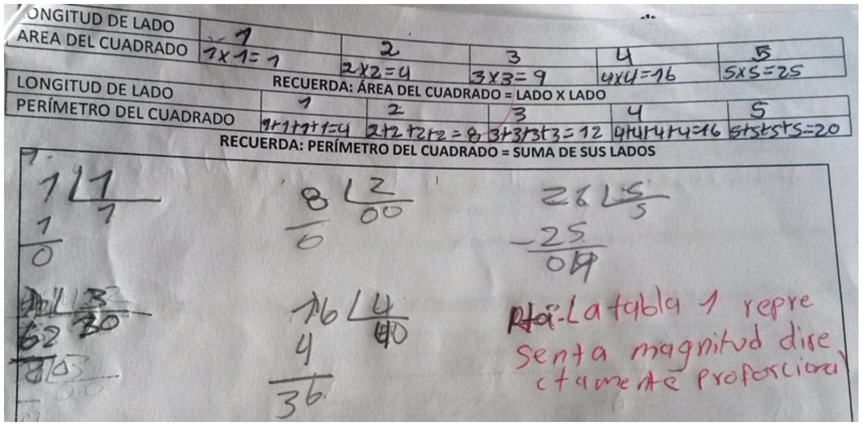


Figura 4.44: Ejemplo del cociente realizados de manera errada por estudiantes

Mirar hacia atrás

Para situaciones en las que se trabajaba repartos proporcionales, tras ejecutar el plan, algunos de los estudiantes optan por entregar una respuesta de manera directa y explícita (Ver Figura 4.45). En cambio, otros prefieren consignar las respuestas en el mismo cuadro que elaboraron (Ver Figura 4.46).

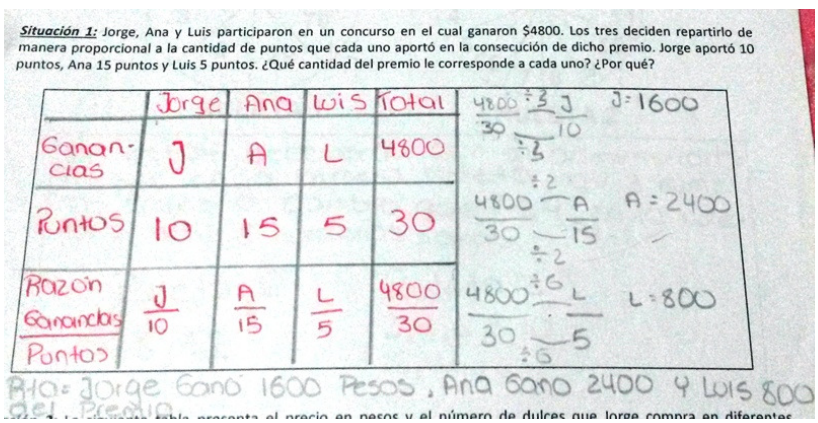


Figura 4.45: Ejemplo de estudiantes que entregan respuesta explicita

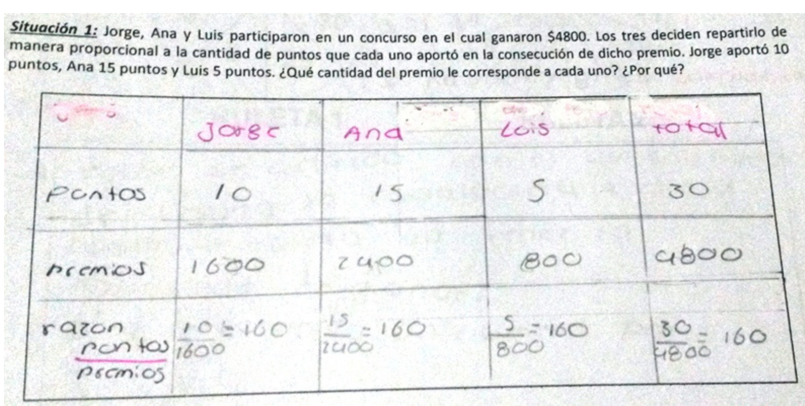


Figura 4.46: Ejemplo de estudiantes que entregan respuestas directamente en el cuadro elaborado

No obstante, ninguno de los estudiantes en el momento de desarrollar dicha situación se detuvo a analizar si la respuesta era la correcta o si existe alguna forma más sencilla de obtener dicho resultado. Claro está, que a la hora de socialización y corrección por parte del docente, algunos estudiantes manifestaron expresiones tales como: “obvio profe, no ve que al sumar todos los premios, el resultado es 4800” o “profe, como Jorge hizo el doble de puntos que Luis y como él recibe 800, por eso Jorge recibe 1600”.

En las situaciones que implican razones de cambio, los estudiantes en mayoría al finalizar los cocientes escriben la conclusión referente a cuál de las gráficas o tablas representa magnitudes directamente proporcionales. Unos estudiantes en cambio, asocian la conclusión mencionada con anterioridad con el hecho de que al realizar las divisiones se está obteniendo una constante, lo cual es indicador de que dichas gráficas o tablas representan magnitudes directamente proporcionales (Ver Figura 4.47 y 4.48).

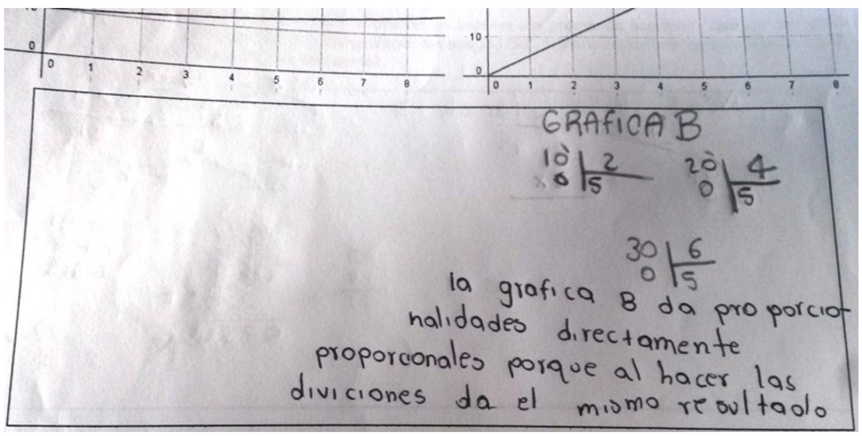


Figura 4.47: Ejemplo de estudiantes que asocian de manera indirecta el resultado como constante de proporcionalidad

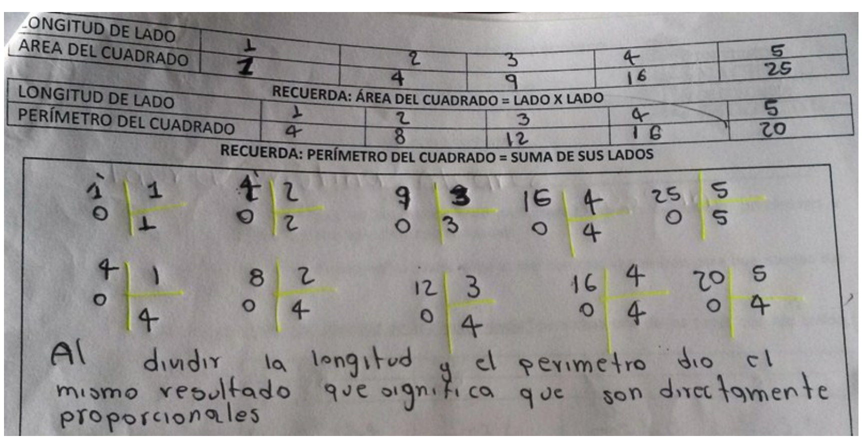


Figura 4.48: Ejemplo de respuesta en donde se asocia el resultado de los cocientes con proporcionalidad directa

Experiencia en Situaciones de Aleatoriedad

Entender un Problema

La mayoría de los estudiantes comprenden que el planteamiento de la situación está relacionado con probabilidades, al tiempo que deben analizar para después validar el argumento que hace el administrador del juego. No obstante se pudo observar que algunos estudiantes no comprenden la situación expuesta y por ende no realizan el desarrollo de la misma.

Configurar un Plan

Debido a que en los enunciados se solicita a los estudiantes validar o rechazar lo expuesto, ellos deciden en su mayoría tomar ésta conjetura como punto de partida para dar respuesta a las situaciones problemas.

En el caso de la Situación 4 del Taller de Afianzamiento 2 (Ver Anexos), los estudiantes notan que en el enunciado se entrega la totalidad de imágenes en la caja y la cantidad de cada uno a excepción de las correspondientes a los animales; para dar solución a esto, suman las cantidades que se les entrega inicialmente (10 triángulos, 15 cuadrados y 20 círculos) para luego restarlo de 60 y así encontrar la cantidad de imágenes de animales. Posterior a ello, unos deciden elaborar un diagrama a fin de consignar la información que se suministra en el enunciado. Otros prefieren establecer razones entre la cantidad de objetos y el total de los mismos a fin de poder encontrar proporcionalidades y así determinar si existe la misma probabilidad o no.

En el Taller de Afianzamiento 3 Situación 4 (Ver Anexos) en general, los estudiantes deciden implementar la estrategia de verificar la veracidad de la frase “Esteban afirma que como su dado tiene más caras, al lanzarlo tendrá más opciones que Ana de obtener un número par”.

Ejecutar el Plan

En el caso del Taller de Afianzamiento 1 Situación 3 (Ver Anexos), una vez escogida la estrategia de resolución de la situación, la mayoría de los estudiantes deciden probar la conjetura mediante la argumentación, es decir, en sus propias palabras redactan el por qué están de acuerdo o no con lo expuesto con el administrador del juego. En general los estudiantes argumentan no estar de acuerdo con lo expresado por el administrador del juego, ya que para ellos en la ruleta 2 hay más cantidad de números pares que en la ruleta 1, lo que significa mayor probabilidad de obtener un número par. (Ver Figura 4.49). Solo un estudiante emplea de forma indirecta razonamiento proporcional, ya que en su escrito manifiesta estar de acuerdo con lo dicho por el administrador del juego, pues no importa la ruleta que se escoja, la mitad de cada una de ellas posee números pares. (Ver Figura 4.50).

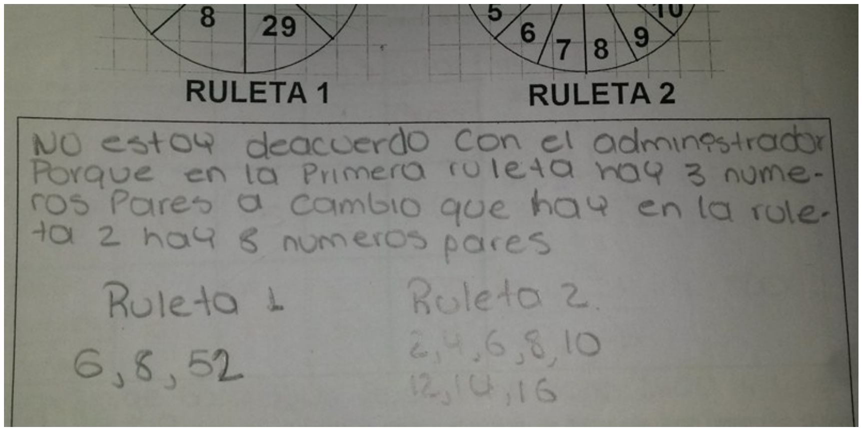


Figura 4.49: Ejemplo de cómo los estudiantes argumentaban las respuestas entregadas

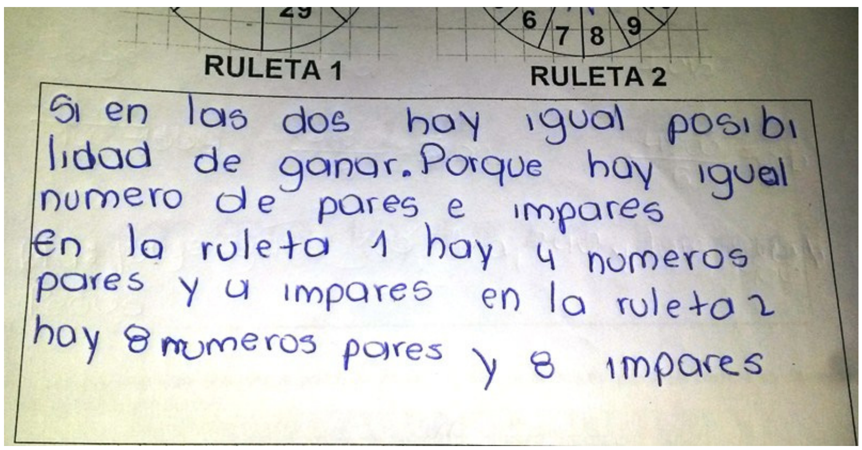
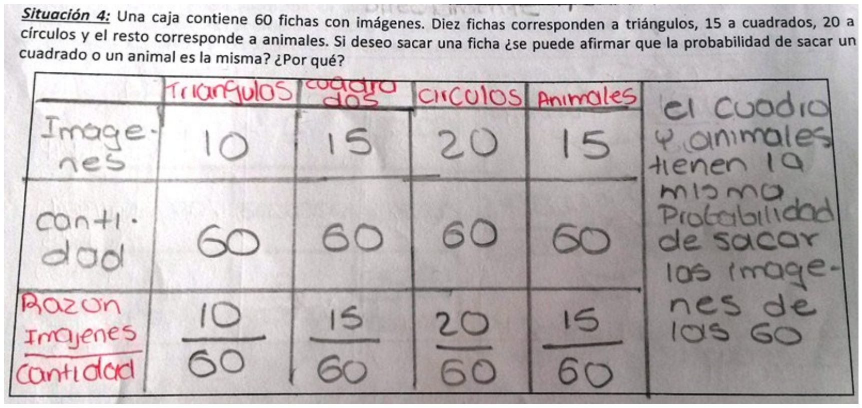


Figura 4.50

En el Taller de Afianzamiento 2 Situación 4, de los estudiantes que hacen diagrama, algunos consignan la información dada por el enunciado en el diagrama que realizan, además establece la razón entre la cantidad de imágenes y el total de imágenes que hay en la caja, pero no hacen alusión a proporcionalidades (Ver Figura 4.51). Aquellos estudiantes que establecen una conjetura, se centran en la cantidad de imágenes de animales y de cuadrados sin que ello conlleve a establecer razones y proporciones. Su argumento se centra en que existe la misma cantidad de imágenes en mención (Ver Figura 4.52).

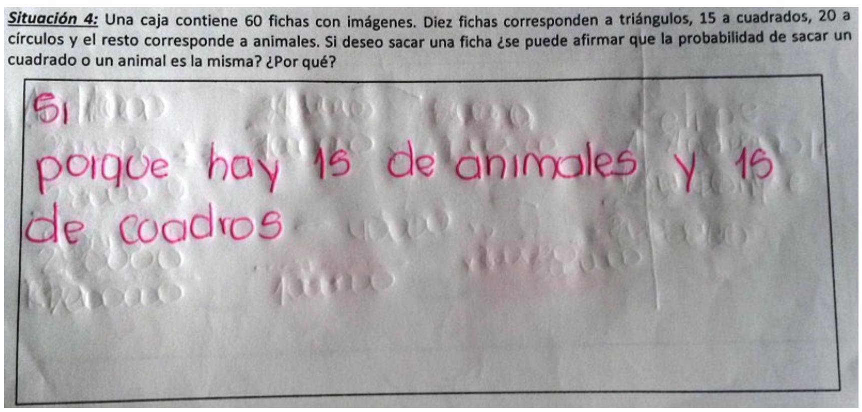
Otros estudiantes en este mismo taller establecieron la razón entre las imágenes de cuadrados y el total de imágenes en la caja, así como también la razón entre la cantidad de imágenes de cuadrados y el total de imágenes en la caja (concepto de probabilidad) para acto seguido establecer la proporcionalidad entre las mismas (Ver Figura 4.53).


Situación 4: Una caja contiene 60 fichas con imágenes. Diez fichas corresponden a triángulos, 15 a cuadrados, 20 a círculos y el resto corresponde a animales. Si deseo sacar una ficha ¿se puede afirmar que la probabilidad de sacar un cuadrado o un animal es la misma? ¿Por qué?

	Triangulos	cuadrados	circulos	Animales
Imagenes	10	15	20	15
cantidad	60	60	60	60
Razon Imajenes / Cantidad	10/60	15/60	20/60	15/60

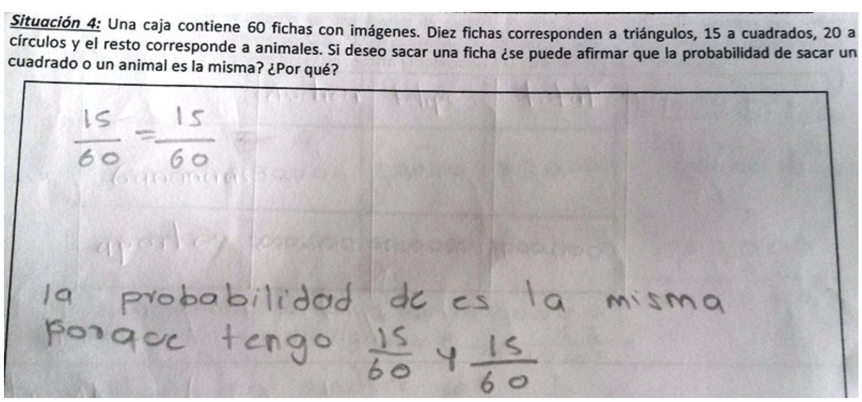
el cuadro y animales tienen la misma Probabilidad de sacar las imagenes de las 60

Figura 4.51: Estudiante que establece razones pero no las asocia con proporciones


Situación 4: Una caja contiene 60 fichas con imágenes. Diez fichas corresponden a triángulos, 15 a cuadrados, 20 a círculos y el resto corresponde a animales. Si deseo sacar una ficha ¿se puede afirmar que la probabilidad de sacar un cuadrado o un animal es la misma? ¿Por qué?

Si porque hay 15 de animales y 15 de cuadros

Figura 4.52: Ejemplo de estudiantes cuya respuesta no asocian con razones o proporciones


Situación 4: Una caja contiene 60 fichas con imágenes. Diez fichas corresponden a triángulos, 15 a cuadrados, 20 a círculos y el resto corresponde a animales. Si deseo sacar una ficha ¿se puede afirmar que la probabilidad de sacar un cuadrado o un animal es la misma? ¿Por qué?

$\frac{15}{60} = \frac{15}{60}$

la probabilidad de es la misma porque tengo $\frac{15}{60}$ y $\frac{15}{60}$

Figura 4.53: Este es un ejemplo de estudiantes que emplean razones y proporciones en situaciones de probabilidad

En el caso del Taller de Afianzamiento 3 Situación 4 (Ver Anexos), aquellos estudiantes cuya estrategia fue la de analizar la veracidad de la afirmación expuesta en el enunciado, realizan un conteo de las opciones que tienen cada uno de los personajes de la situación planteada. (Ver Figura 4.54).

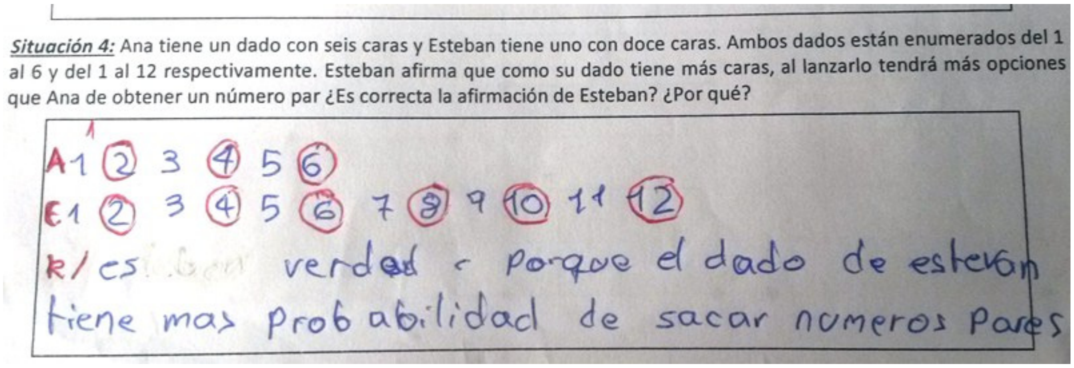


Figura 4.54: Un ejemplo de estudiantes que realizan conteo como estrategia de solución

Los estudiantes que establecen razones, lo hacen a partir del concepto básico de probabilidad Eventos ($\frac{\text{Exitosos}}{\text{Total de Eventos Posibles}}$). (Ver Figura 4.55). Unos pocos estudiantes no establecen adecuadamente éstas razones, dado que presentan dificultades en la comprensión del concepto de probabilidad (Ver Figura 4.56).

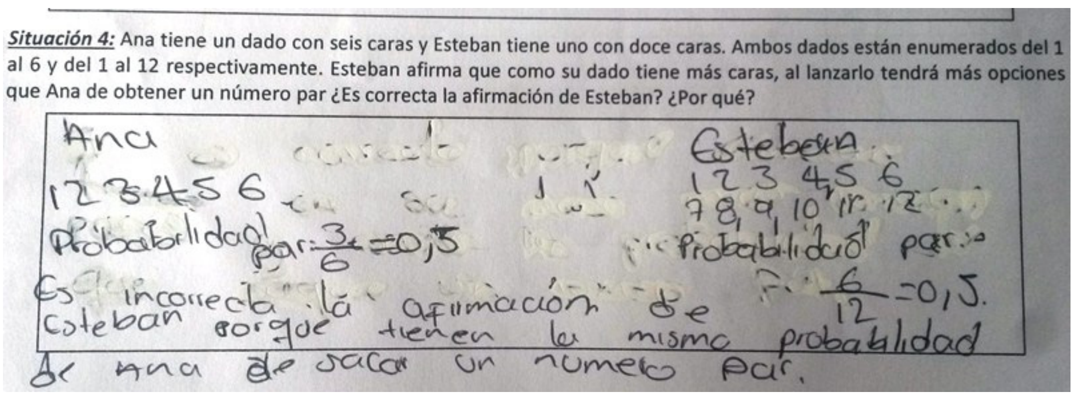


Figura 4.55: Este es un ejemplo de estudiantes que establecen razones en situaciones de probabilidades

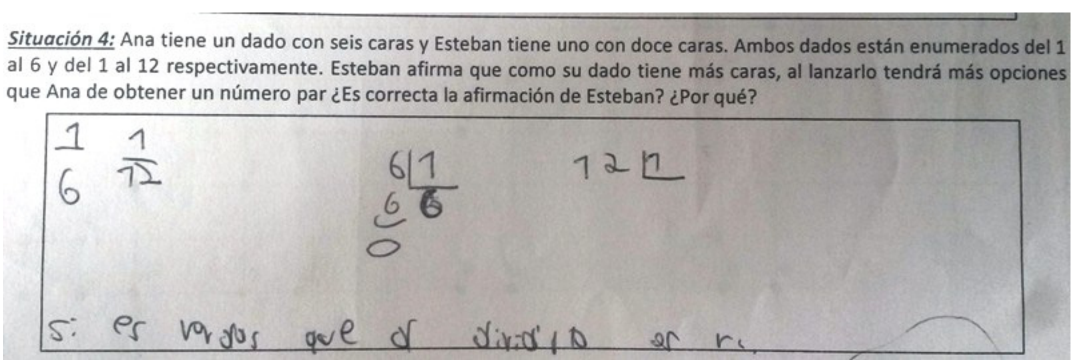
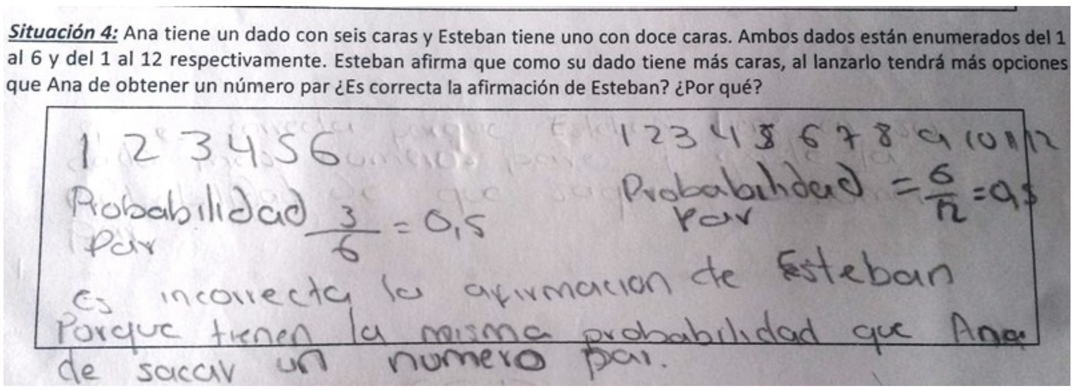


Figura 4.56: Ejemplo de estudiantes que establecen razones de forma errada

Mirar hacia atrás

Aunque la respuesta dada por la mayoría de los estudiantes no fue la acertada, todos asumen que su estrategia junto con sus argumentos fueron los correctos. Es evidente que la mayoría de los estudiantes se conforma con los procesos y resultados que han obtenido, asumiendo estos como válidos y acordes con lo solicitado en el planteamiento de la situación problema. Esto conlleva a que los estudiantes no realicen la comprobación de dicha respuesta.

Para los estudiantes que emplearon las razones y proporciones (en el caso del Taller de Afianzamiento 3 Situación 4), la afirmación hecha por el personaje resulta falsa. Su respuesta acertada, es producto del hecho de asociar las probabilidades con proporcionalidades (Ver Figura 4.57).


Situación 4: Ana tiene un dado con seis caras y Esteban tiene uno con doce caras. Ambos dados están enumerados del 1 al 6 y del 1 al 12 respectivamente. Esteban afirma que como su dado tiene más caras, al lanzarlo tendrá más opciones que Ana de obtener un número par ¿Es correcta la afirmación de Esteban? ¿Por qué?

1 2 3 4 5 6 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Probabilidad Par $\frac{3}{6} = 0,5$ Probabilidad Par $= \frac{6}{12} = 0,5$

Es incorrecta la afirmacion de Esteban Porque tienen la misma probabilidad que Ana de sacar un numero par.

Figura 4.57: Ejemplo de estudiantes con respuesta correcta

4.3. Experiencia en los Talleres de Profundización

Experiencia en Situaciones de Medición

Entender un problema

Los estudiantes que abordaron y dan solución a este ejercicio manifiestan comprender a qué se hace referencia en los enunciados e identifican la información dada por los mismos. Se pudo percibir que había estudiantes que no dan solución a la situación planteada lo que lleva a considerar que este grupo no entendió lo que allí estaba propuesto.

Configurar un Plan

En la Situación 2 del Taller de Profundización 1 (Ver Anexos) la estrategia de los estudiantes es la de elaborar un diagrama en el cual consignan los datos suministrados en el enunciado a la vez que relacionan dichos datos con la información que deben encontrar, la cual es caracterizada por una variable. Otros optan por establecer proporcionalidades entre las magnitudes llantas defectuosas y porcentaje que representa. Finalmente un grupo reducido de estudiantes opta por hacer multiplicaciones y divisiones entre dichas magnitudes.

Para la Situación 1 del Taller de Profundización 2 (Ver Anexos) los estudiantes eligen como estrategia el de medir con regla las longitudes de los lados de los triángulos.

Para la Situación 3 del Taller de Profundización 2 (Ver Anexos) los estudiantes deciden establecer proporcionalidades con la información a fin de establecer el porcentaje de descuento que la tienda les hace a los clientes. Posterior a ello realizan la suma de los descuentos hechos para obtener el total de rebajas en las dos prendas. Otros estudiantes hacen cocientes con los valores que hallan en el enunciado. Unos cuantos estudiantes realizan simplemente restas entre dichos valores.

Ejecutar el plan

El desarrollo de la Situación 2 del Taller de Profundización 1 (Ver Anexos) los estudiantes establece razones entre llantas y porcentaje que representan. Posterior a ello, proceden a establecer proporcionalidades a fin de encontrar el 1 % de la producción de llantas y finalmente con esta información determinar el 100 %, es decir la totalidad de la producción (Ver Figura 4.58). Por otro lado, los estudiantes que establecen proporcionalidades, fallan a la hora de establecer la constante por la cual multiplicar las magnitudes (Ver Figura 4.59).

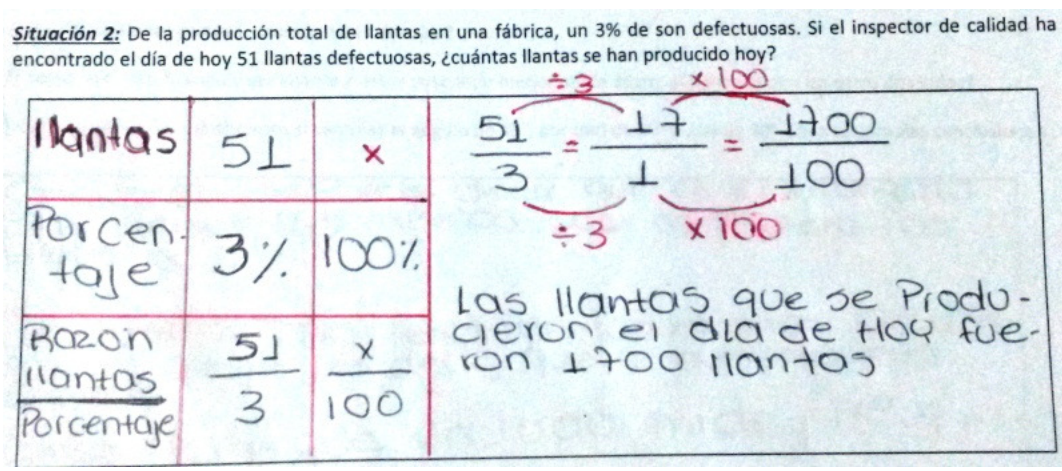


Figura 4.58: Ejemplo de estudiantes que elaboran diagramas y establecen proporcionalidades

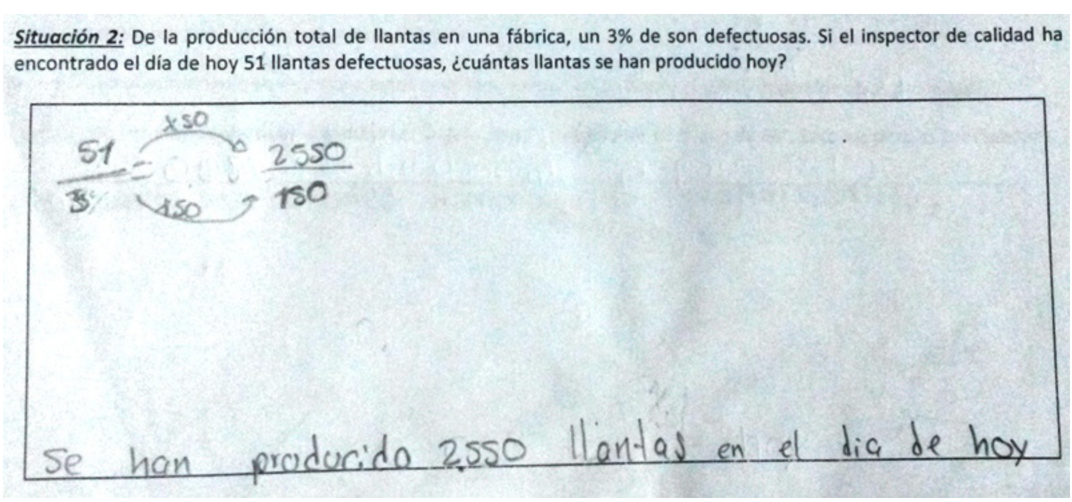


Figura 4.59: Ejemplo de estudiantes que establecen una constante errada

Finalmente los estudiantes que realizan productos y cocientes con la información suministrada en el ejercicio, evidencian que no tienen claro el establecimiento de razones y proporciones a la hora de abordar situaciones con porcentajes. (Ver Figura 4.60 y 4.61).

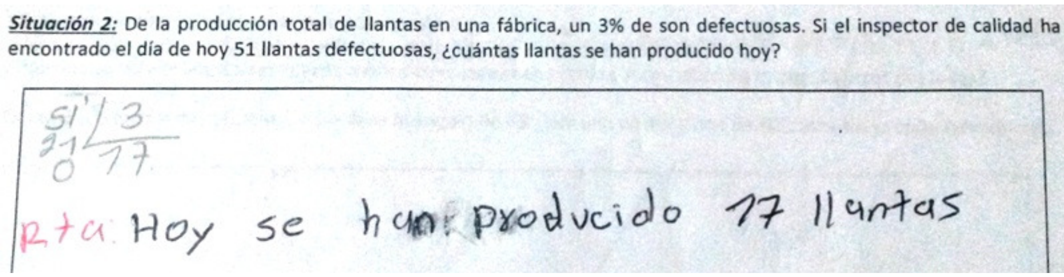


Figura 4.60: Ejemplo de estudiante que realiza cociente

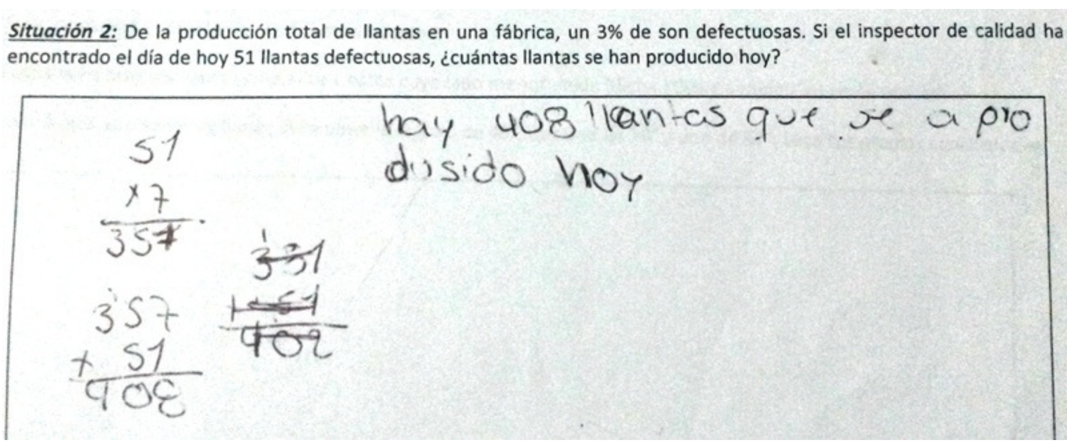
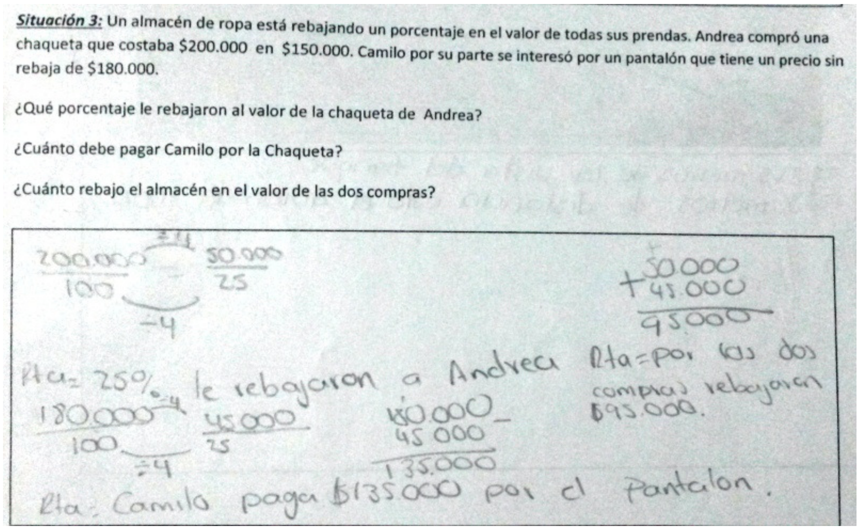


Figura 4.61: Ejemplo de estudiantes que realizan producto

Para el caso de la Situación 1 del Taller de Profundización 2 (Ver Anexos) los estudiantes proceden a realizar la medida de longitudes de los lados del triángulo grande, ya que este estaba relacionado con la imagen del avión.

Aquellos estudiantes que establecen proporcionalidades en el Taller de Profundización 2 Situación 3 (Ver Anexos), previamente realizan una diferencia entre el precio original de la prenda que compra Andrea con el precio en que finalmente realiza la compra. Como dicha diferencia da como resultado (50000), los estudiantes deducen que este es el valor descontado. Con dicho valor determinan el porcentaje de descuento que maneja el almacén (25 %). Como este descuento se aplica para todas las prendas, establecen una nueva proporción que involucre el precio original de la prenda que compra Camilo para así determinar el 25 % de este precio. Finalmente, realizan la suma de los descuentos hechos en cada una de las prendas ($50000 + 45000 = 95000$). (Ver Figura 4.62).


Situación 3: Un almacén de ropa está rebajando un porcentaje en el valor de todas sus prendas. Andrea compró una chaqueta que costaba $200.000 en $150.000. Camilo por su parte se interesó por un pantalón que tiene un precio sin rebaja de $180.000.

¿Qué porcentaje le rebajaron al valor de la chaqueta de Andrea?

¿Cuánto debe pagar Camilo por la Chaqueta?

¿Cuánto rebajo el almacén en el valor de las dos compras?

200.000 / 100 ÷4 50.000 / 25

+50.000 45.000 = 95.000

Rta= 25% le rebajaron a Andrea

Rta=por las dos compras rebajaron $95.000.

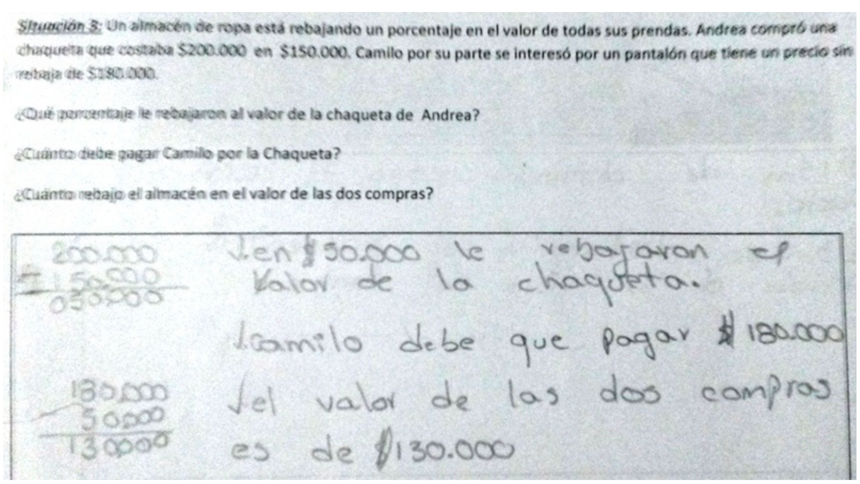
180.000 / 100 ÷4 45.000 / 25

180.000 − 45.000 = 135.000

Rta: Camilo paga $135.000 por el Pantalon.

Figura 4.62: Ejemplo de estudiante que emplea proporcionalidades y diferencias

Los estudiantes que realizaron la diferencia entre el precio original de la prenda comprada por Andrea y el precio con el descuento, asumen que el resultado (50000) es el valor de descuento para todas las prendas, de allí que éste valor sea sustraído del precio de la prenda que debe comprar Camilo. Estos estudiantes pese a que reconocieron la situación de porcentajes, no aplican la proporcionalidad para la solución del mismo. (Ver Figura 4.63).


Situación 3: Un almacén de ropa está rebajando un porcentaje en el valor de todas sus prendas. Andrea compró una chaqueta que costaba $200.000 en $150.000. Camilo por su parte se interesó por un pantalón que tiene un precio sin rebaja de $180.000.

¿Qué porcentaje le rebajaron al valor de la chaqueta de Andrea?

¿Cuánto debe pagar Camilo por la Chaqueta?

¿Cuánto rebajo el almacén en el valor de las dos compras?

200.000 − 150.000 = 050.000

en $50.000 le rebajaron el Valor de la chaqueta.

Camilo debe que pagar $180.000

180.000 − 50.000 = 130.000

el valor de las dos compras es de $130.000

Figura 4.63: Ejemplo de estudiante que no establece proporcionalidades

Al realizar el cociente entre el valor de la chaqueta comprada por Andrea entre cuatro, estos estudiantes simplemente determinan el porcentaje de descuento que se hace a la compra de Andrea. Sin embargo no comprenden que este valor es el descuento en la tienda, lo que conlleva a que no analicen la situación que se presenta con Camilo. (Ver Figura 4.64).

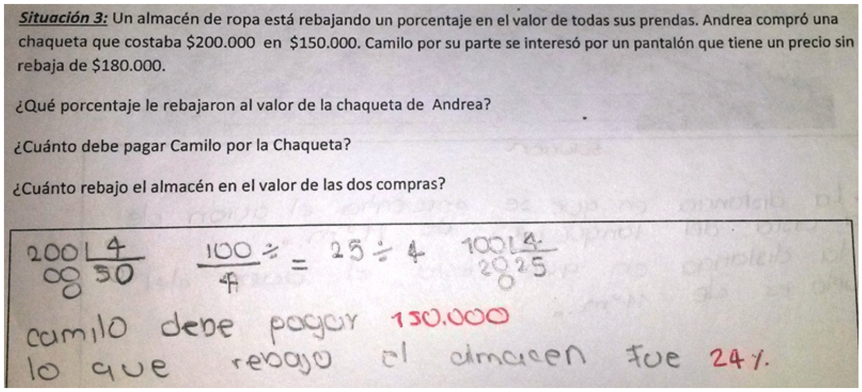


Figura 4.64: Ejemplo de estudiante que solamente realiza cocientes sin establecer proporcionalidades

Mirar hacia atrás

Se percibe que algunos estudiantes no realizan verificación de las respuestas obtenidas tal vez por el hecho de estar familiarizados con este tipo de situaciones. Las respuestas que entregan son de manera puntuales y acordes a la pregunta que se les planteó. (Ver Figura 4.65 y 4.66).

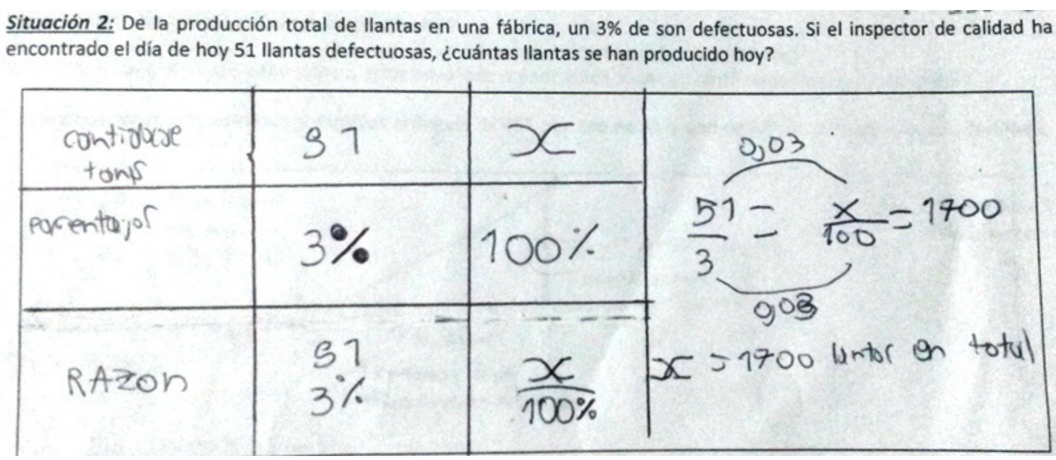


Figura 4.65: Ejemplo de estudiantes que entrega respuesta acertada - Taller Profundización 1 Situación 2

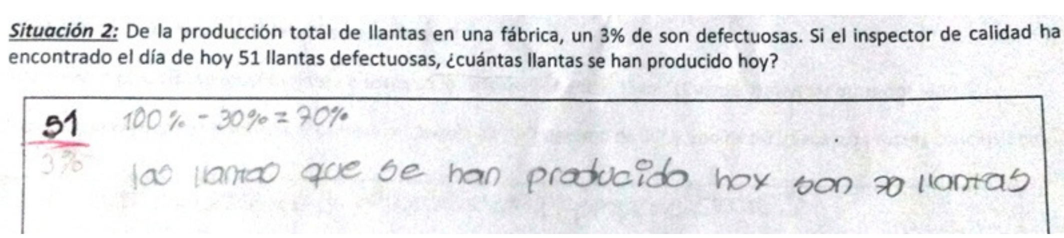


Figura 4.66: Ejemplo de estudiantes con respuesta errada - Taller Profundización 1 Situación 2

En el Taller de Profundización 2 Situación 1, la estrategia de medir la longitud de los lados del triángulo grande resultó errada. Esta pone de manifiesto que los estudiantes no asociaron la situación planteada con proporcionalidad, además no se observa el establecimiento de razones por parte de los estudiantes. Se pudo observar que los estudiantes entregan respuestas acorde a la medición que hicieron con la regla, pero en unidades métricas y no de centímetros, esto producto de que los estudiantes observaron que las medidas plasmadas en la imagen estaba dada en metros. (Ver Figura 4.67).

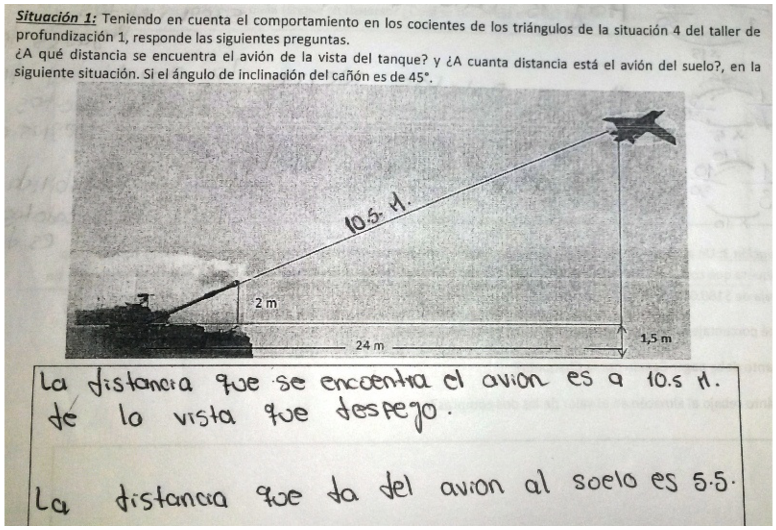


Figura 4.67: Ejemplo de estudiantes cuya respuesta ha sido dada de acuerdo al resultado de medir con regla

Mirar hacia atrás

En situaciones relacionadas con porcentajes, los estudiantes consignaban las respuestas de manera explícita en cada una de las preguntas. (Ver Figura 4.68). Otros estudiantes entregan sus respuestas sin operaciones que sustenten sus argumentos y en algunos casos estas respuestas no tienen relación con la pregunta planteada.

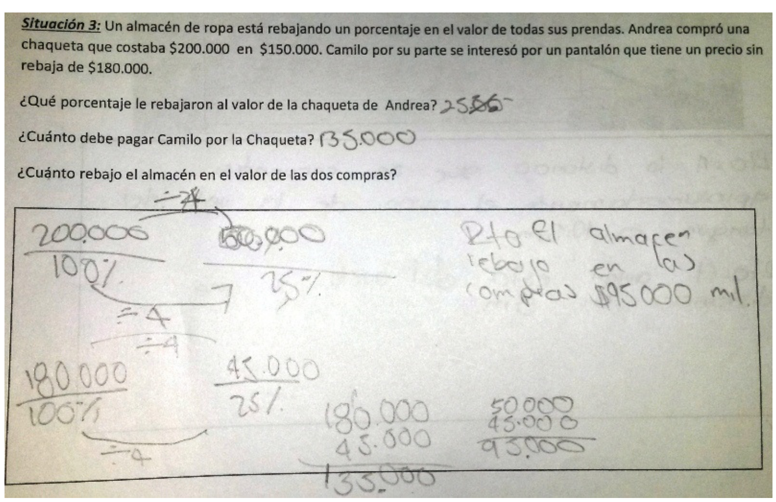


Figura 4.68: Ejemplo de estudiante que da respuestas explicitas a la situación problema

Experiencia en Situaciones de Variación

Entender un problema

En general los estudiantes comprenden lo que se les plantea en el enunciado. Distinguen los datos que allí están presentes y los consideran suficientes para dar solución a las situaciones problema. Se observa que algunos estudiantes no comprenden lo planteado.

Configurar un Plan

Dado que los estudiantes identifican el tipo de situación que se les plantea (repartos proporcionales) (Ver Anexos, Taller de Profundización 1 Situación 1), la mayoría de los mismos decide tomar como estrategia el elaborar un diagrama (cuadro) en el cual consignan la información que encuentran. Asignan con variables (primera letra de los personajes de la situación problema) la información que deben encontrar. Además con este cuadro los estudiantes establecen razones entre las magnitudes dinero y días. Otros estudiantes en cambio prefieren tomar como estrategia el realizar el cociente entre el total de días y el total de dinero a pagar para así determinar una constante con la cual se realizaran productos que permitan encontrar la información solicitada.

En el caso de razones de cambio (Ver Anexos, Taller de Profundización 1 Situación 3), los estudiantes inicialmente realizan la medición de los lados de cada uno de los triángulos a fin de poder determinar las razones entregadas en el enunciado. Posterior a ello, unos estudiantes optan por elaborar una conjetura y probar la validez de la misma. Otros elaboran gráficos de triángulos que les permiten analizar las preguntas planteadas.

En el Taller de Profundización 2 Situación 4 (Ver Anexos), los estudiantes optan por construir una conjetura de acuerdo a la información que encuentran en el enunciado para posteriormente argumentar el porqué de aquella conjetura. Otros estudiantes realizan el cociente que representa la razón $\frac{10}{3}$ en el tanque 2 para contrastarlo con la información del tanque 1.

Ejecutar el plan

Al elaborar el diagrama para situaciones de reparto proporcionales (Taller Profundización 1 Situación 1), los estudiantes establecen proporcionalidades entre las razones $\frac{\text{dinero}}{\text{días}}$ para de esta forma poder determinar la cantidad de dinero que cada personaje debe aporte de acuerdo a la cantidad de días. (Ver Figura 4.69 y 4.70).

Los estudiantes que realizaron el cociente entre el total del dinero y el total de días, encontraron la constante de proporcionalidad con la cual procedieron a multiplicar cada uno de los días que los personajes tuvieron la consola XBOX. Con esta estrategia rápidamente obtuvieron la cantidad de dinero que debía aportar cada uno de ellos (Ver Figura 4.71).

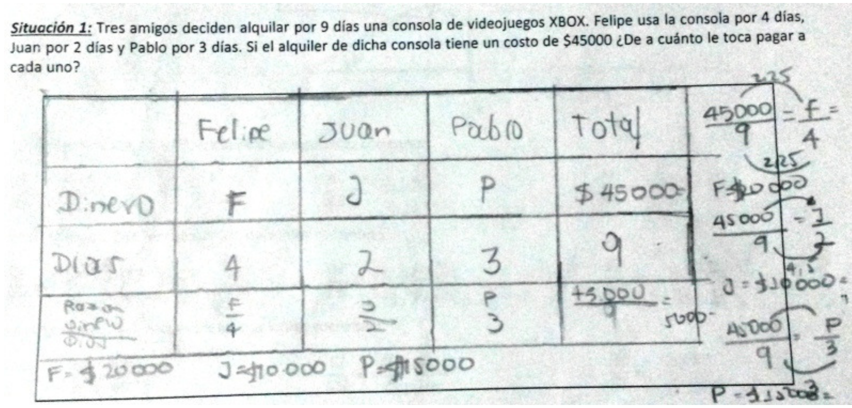


Figura 4.69: Ejemplo de estudiantes que establecen razones

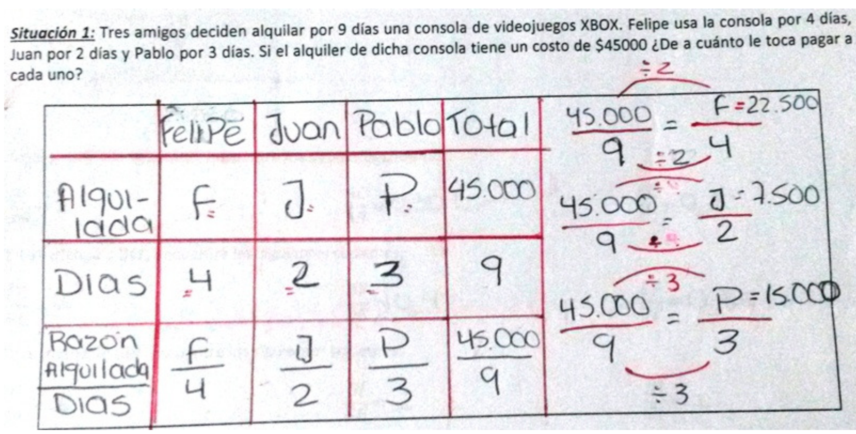


Figura 4.70: Ejemplo de estudiantes que realizan cocientes y productos con errores

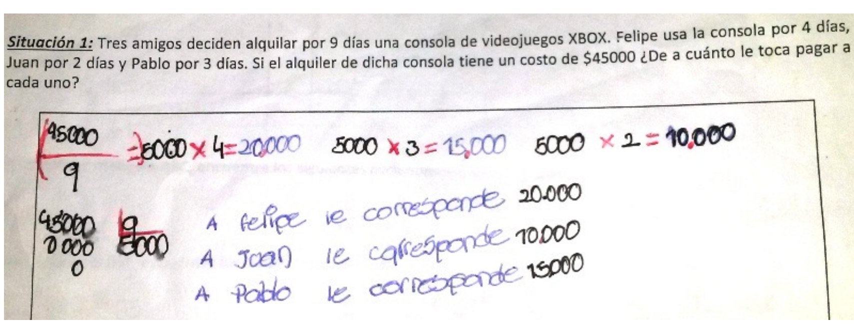


Figura 4.71: Ejemplo de estudiante que realiza cociente y posterior a ello producto

Algunos estudiantes que inicialmente establecieron las proporcionalidades entre las magnitudes dinero y días, presentaron equivocaciones a la hora de realizar algunas de las divisiones o productos (Ver Figura 4.72).

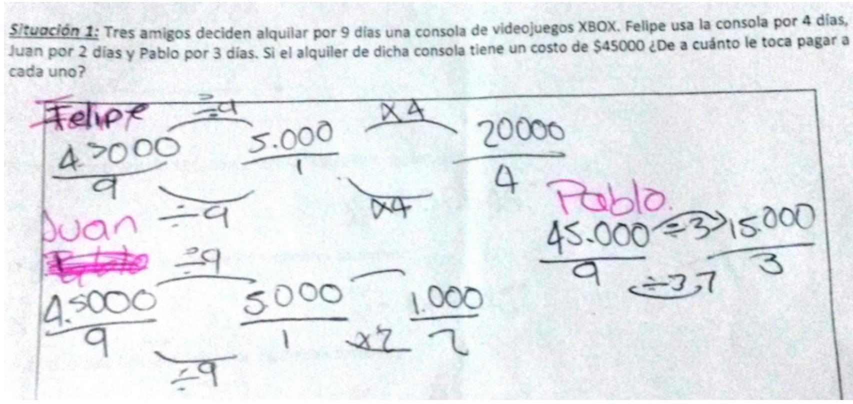


Figura 4.72: Ejemplo de estudiante que realiza operaciones con algunos errores

Algunos de los estudiantes en el Taller de Profundización 1 Situación 3 (Ver Anexos), que elaboran conjeturas no consignan los valores obtenidos en el proceso de medición (Ver Figura 4.73). Los demás estudiantes consignan valores errados, producto del mal procedimiento a la hora de realizar la medición de los lados de los triángulos (Ver Figura 4.74).

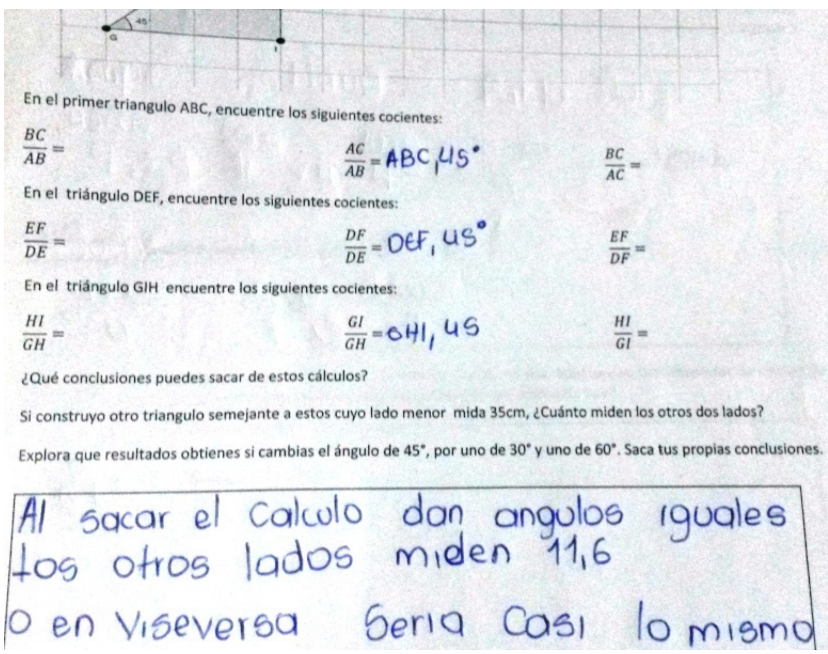


Figura 4.73: Ejemplo de estudiantes que no apuntan las longitudes de lados de triángulos

En la Situación 4 del Taller de Profundización 2, por ser una situación de razón de cambio, los estudiantes, al determinar el valor de la razón $\frac{10}{3}$, observan que este valor es menor que la razón de llenado en el tanque 1 (4 litros por segundo), lo que conlleva a responder es el tanque 1 el que se llena primero. (Ver Figura 4.75). Otros estudiantes argumentan que el tanque 2 es el que se llena más rápido, ya que la razón $\frac{10}{3}$ representa mayor capacidad de llenado. (Ver Figura 4.76). Finalmente, para algunos estudiantes ambos tanques se llenan al mismo tiempo, bajo el argumento de que los dos tanques poseen la misma capacidad de almacenamiento. (Ver Figura 4.77).

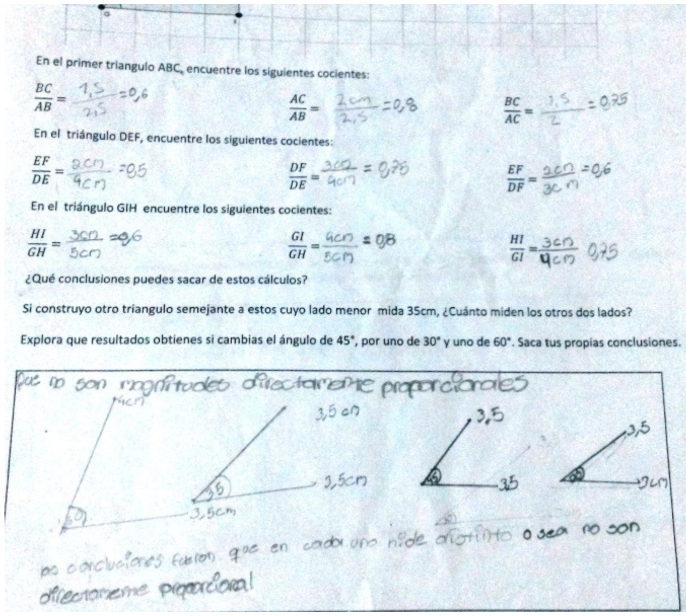


Figura 4.74: Estudiantes que escriben longitudes (erradas) de los lados de triángulos

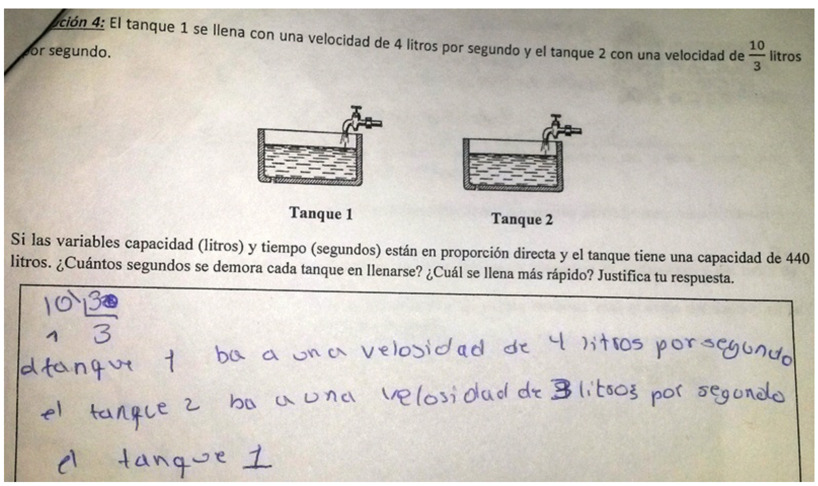


Figura 4.75: Ejemplo de estudiante cuya respuesta es el tanque 1

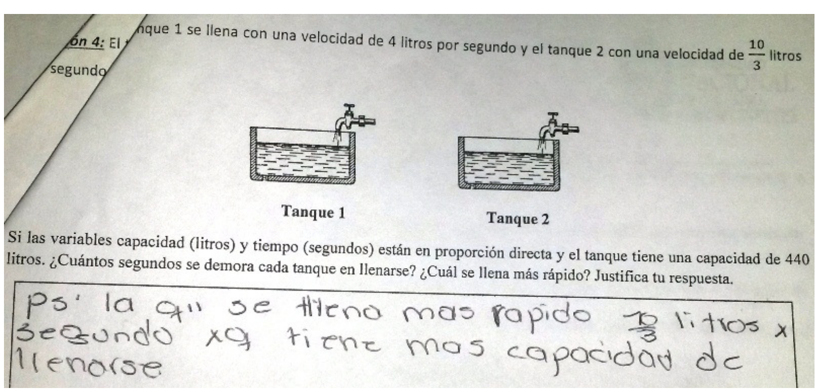
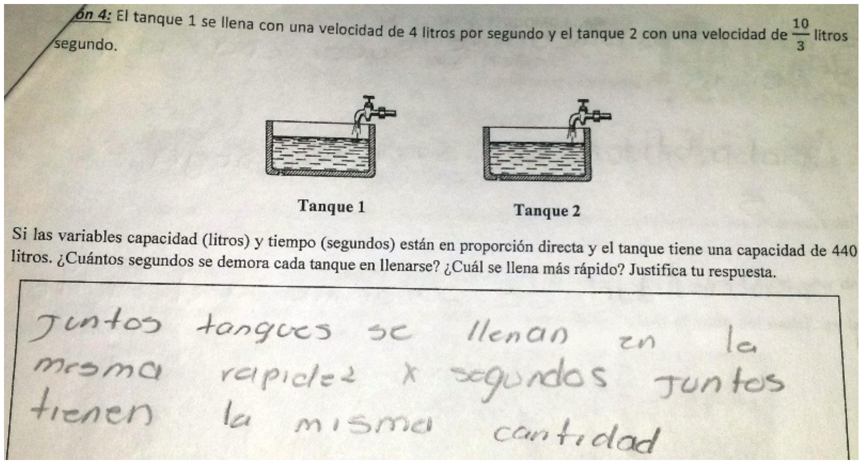


Figura 4.76: Ejemplo de estudiante cuya respuesta es el tanque 2



ón 4: El tanque 1 se llena con una velocidad de 4 litros por segundo y el tanque 2 con una velocidad de $\frac{10}{3}$ litros segundo.

Tanque 1 Tanque 2

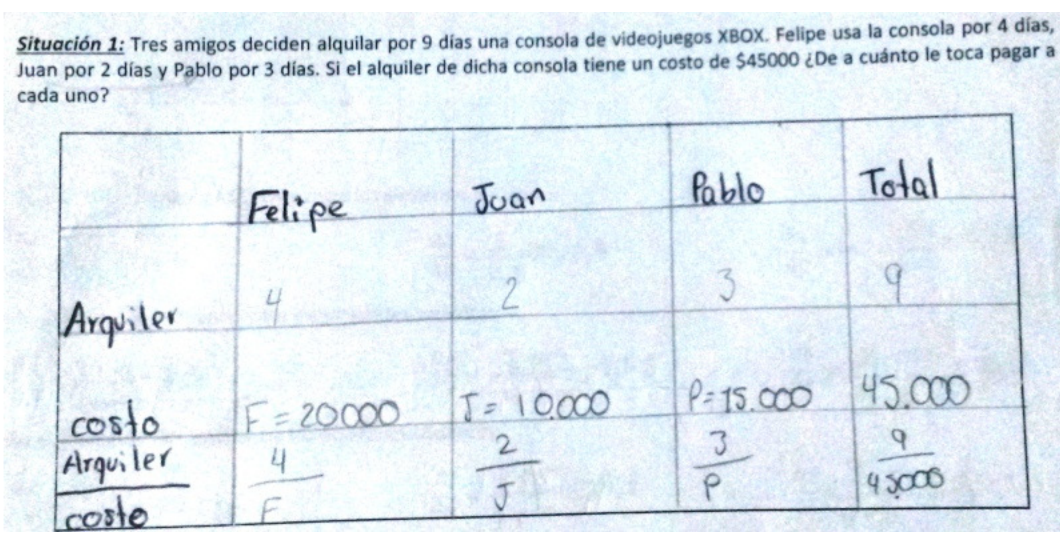
Si las variables capacidad (litros) y tiempo (segundos) están en proporción directa y el tanque tiene una capacidad de 440 litros. ¿Cuántos segundos se demora cada tanque en llenarse? ¿Cuál se llena más rápido? Justifica tu respuesta.

Juntos tanques se llenan en la misma rapidez x segundos juntos tienen la misma cantidad

Figura 4.77: Ejemplo de respuesta de estudiante que afirma que ambos tanques se llenan al tiempo

Mirar hacia atrás

Ya que los estudiantes estaban familiarizados con situaciones de repartos proporcionales, en su mayoría no verifican si las respuestas son acertadas o no. Aquellos que realizan el diagrama, suelen entregar las respuestas en el mismo (Ver Figura 4.78); aquellos que realizaron el cociente entre el total del dinero y el total de días, entregan respuestas puntuales para cada uno de los personajes (Ver Figura 4.79); mientras que aquellos que inicialmente establecieron proporcionalidades dan por sentada sus respuestas (Ver Figura 4.80).



Situación 1: Tres amigos deciden alquilar por 9 días una consola de videojuegos XBOX. Felipe usa la consola por 4 días, Juan por 2 días y Pablo por 3 días. Si el alquiler de dicha consola tiene un costo de $45000 ¿De a cuánto le toca pagar a cada uno?

	Felipe	Juan	Pablo	Total
Arquiler	4	2	3	9
costo	F = 20000	J = 10.000	P = 15.000	45.000
Arquiler / costo	$\frac{4}{F}$	$\frac{2}{J}$	$\frac{3}{P}$	$\frac{9}{45.000}$

Figura 4.78: Ejemplo de estudiantes con respuesta en el diagrama hecho por ellos

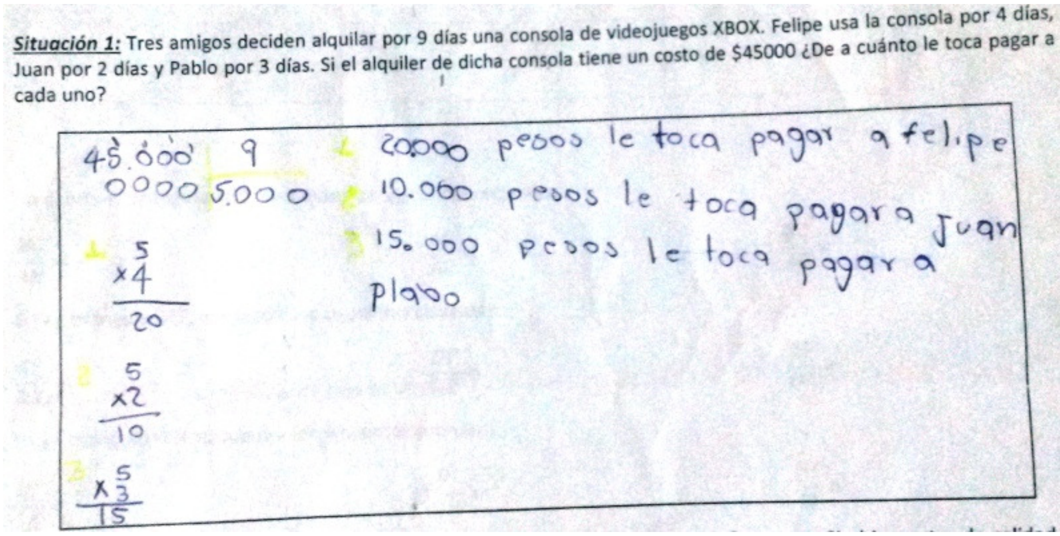


Figura 4.79: Este es un ejemplo de estudiantes que entregan respuestas puntuales

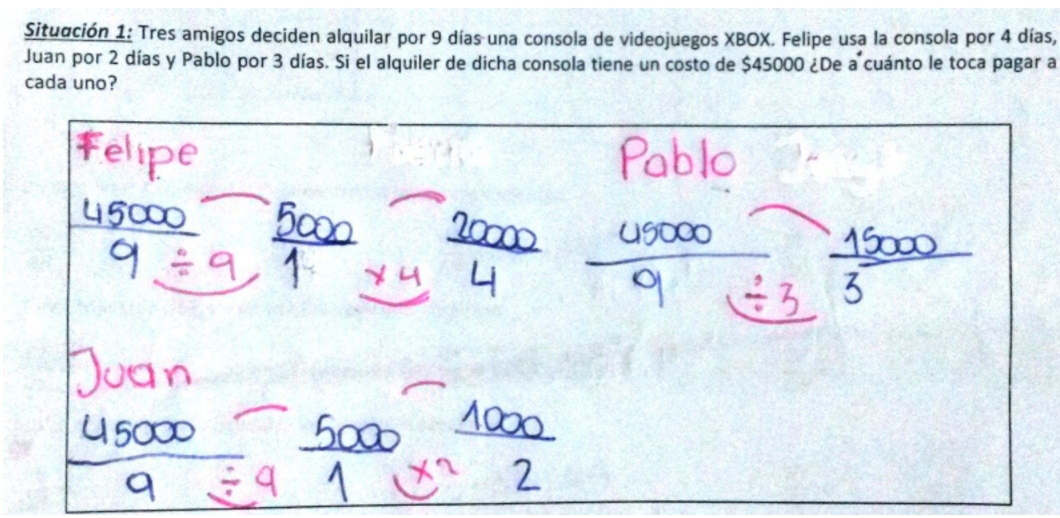


Figura 4.80: Ejemplo de estudiantes que solamente entregan operaciones sin respuesta explícita

En la situación de razón de cambio (Taller Profundización 1 Situación 2, los estudiantes no verifican la veracidad de sus respuestas. Además, la mayoría de ellos hace alusión a conclusiones sin responder las otras dos preguntas, no hacen referencia a la existencia de proporcionalidad, debido a los errores presentados a la hora tomar las longitudes de los lados de los triángulos. Junto con esto, es claro que los estudiantes no asociaron esta situación problema con proporcionalidad ya que la toma de medidas no fue la más acertada lo que trajo consigo cocientes en donde no se veía la existencia de alguna constante. (Ver Figura 4.81).

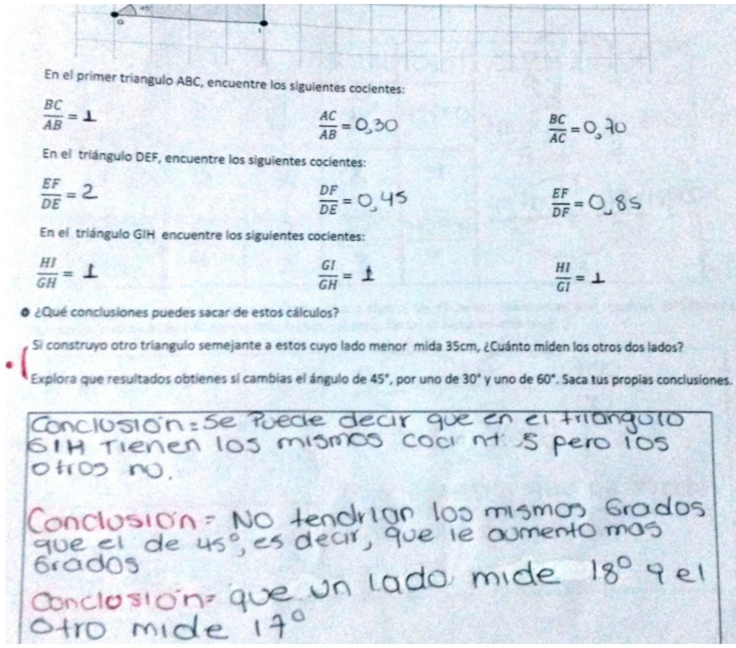


Figura 4.81: Ejemplo de estudiantes cuya respuesta no hace alusión a razones o proporciones

Experiencia en situaciones de Aleatoriedad

Entender un Problema

En su mayoría los estudiantes manifiestan reconocer con claridad la información y que esta es suficiente, además saben qué es lo que deben hacer con la misma y qué es lo que quieren encontrar. Pese a esto, se observa que algunos estudiantes manifiestan no entender el problema y por ende no dan solución al mismo.

Configurar un Plan

La mayoría de los estudiantes escoge como estrategia la de establecer proporcionalidades entre las probabilidades entregadas en el enunciado con una razón que incluya el total de balotas (30) para de esta forma determinar la cantidad de balotas que hay de acuerdo al color.

Otros estudiantes optan por realizar el cociente entre el total de balotas y el número tres, ya que según estos estudiantes así se determina la cantidad de balotas de acuerdo a los tres colores referidos en el enunciado.

Finalmente unos estudiantes realizan la suma entre las probabilidades suministradas en el enunciado.

Ejecutar el plan

Los estudiantes multiplicaron las probabilidades de acuerdo a cada color mencionado en el enunciado por constantes que les permitían encontrar el total de balotas (30), así lograban determinar la cantidad de balotas por color (Ver Figura 4.82), pero algunos estudiantes asociaban estos resultados con las probabilidades dadas (Ver Figura 4.83). Mientras que para los estudiantes que realizaron la división, el cociente obtenido (10) representa la cantidad de balotas por color (Ver Figura 4.84).

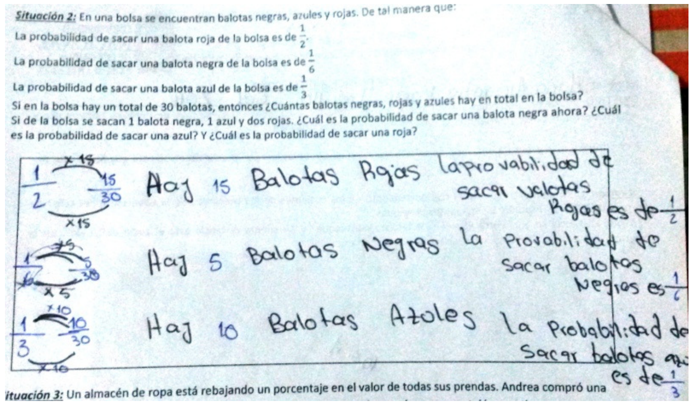


Figura 4.82: Estudiantes que realizan producto con constante para encontrar total de balotas

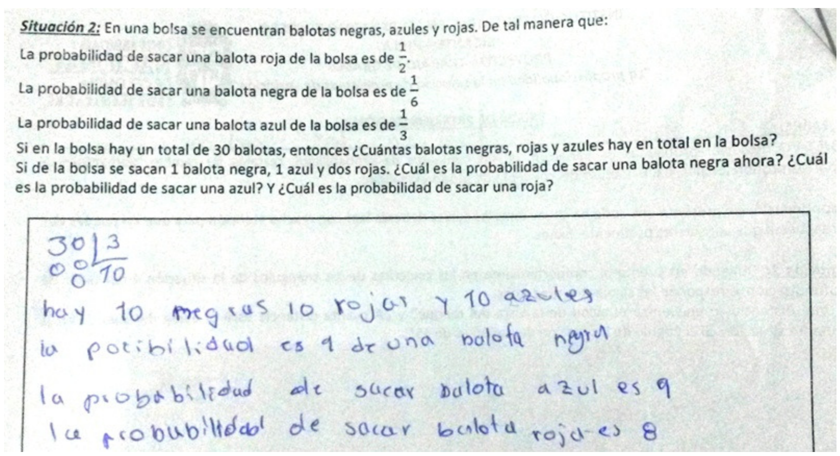


Figura 4.83: Estudiantes que asocian resultados con probabilidades dadas

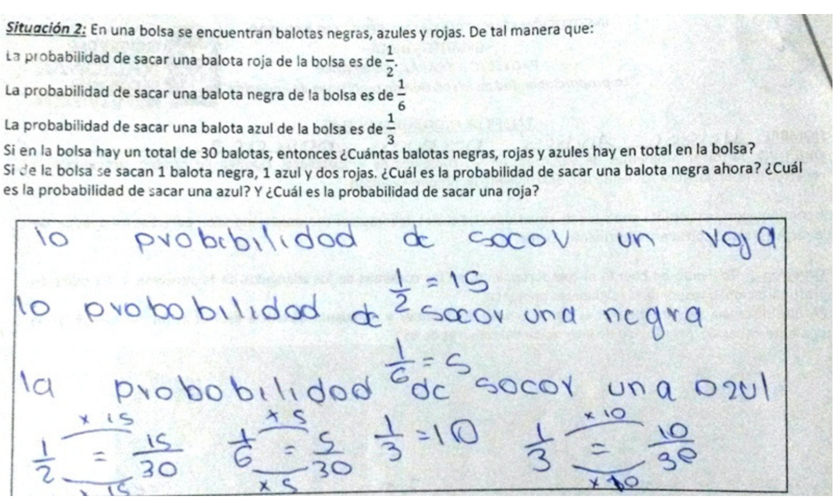


Figura 4.84: Estudiantes que realizan división

Mirar hacia atrás

Es de resaltar que la mayoría de estudiantes asoció esta situación de probabilidades con proporcionalidades gracias a la estrategia seleccionada por ellos mismos, pero con esta estrategia no contestaron la totalidad de las preguntas planteadas. Solo un grupo pequeño de estudiantes responde la totalidad de las preguntas, dado que infirieron que al retirar 1 balota negra, 1 azul y 2 rojas, la totalidad de balotas pasaba de 30 a 26 y junto con esto, los resultados obtenidos para cada uno de los colores también se veían reducidos. (Ver Figura 4.85).

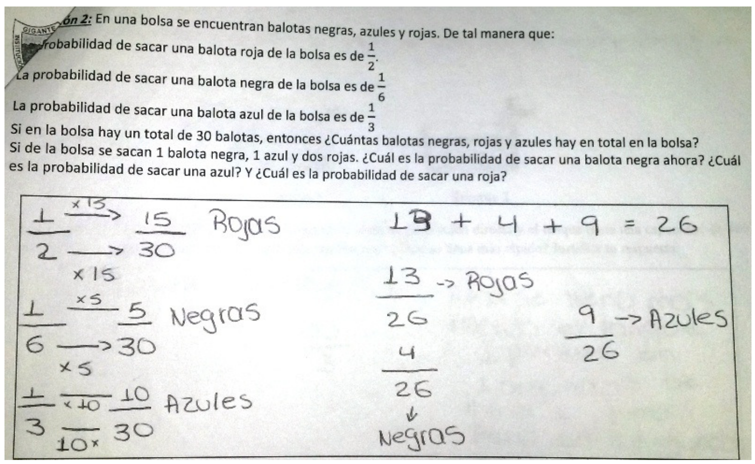


Figura 4.85: Estudiantes dan respuesta a cada una de las preguntas

El cociente 10 obtenido por los estudiantes que hicieron solamente la división, hizo que los estudiantes entregaran una respuesta errada (Ver Figura 4.86), sin embargo, estos estudiantes no lo ven así dado que ellos argumentan que si se realiza una suma se obtiene 30. Ello se puede interpretar en que estos estudiantes manejaron un razonamiento de tipo aditivo.

Los estudiantes que realizaron la suma de las probabilidades, reflejan dificultades para asociar razones y proporciones con situaciones de probabilidades. Además evidencian dificultades para manejar operaciones con fracciones (suma de fracciones).

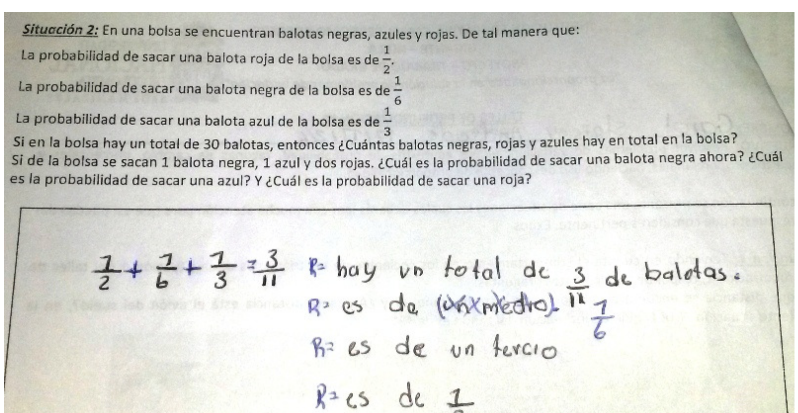


Figura 4.86: Estudiantes que realizan operaciones erradas con fracciones. Respuesta errada a la situación propuesta

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

De acuerdo a los resultados obtenidos en la aplicación del trabajo realizado y los hallazgos en cada taller desarrollado por los estudiantes se puede llegar a las siguientes conclusiones:

- La puesta en marcha del trabajo permitió que los estudiantes adquirieran habilidades en el manejo y procesamiento de razones y proporciones en situaciones tales como probabilidad, repartos proporcionales, porcentajes y razones de cambio.

- Los estudiantes están motivados con esta estrategia de trabajo la cual permite la creación de habilidades en cuanto al manejo de razones y proporciones a través del abordaje de situaciones problemas.

- A medida que se avanzó en los talleres los estudiantes mejoraron; pasaron de un razonamiento de tipo aditivo a uno de tipo multiplicativo.

- Los estudiantes encuentran en las razones y proporciones una herramienta poderosa y práctica para el manejo de distintas situaciones.

- Se logró el desarrollo total de cada uno de los talleres propuestos en este trabajo con la totalidad de los estudiantes de grado sexto, lo que acarrea mayor grado de efectividad en nuestra estrategia; cabe resaltar y agradecer el interés de los directivos y compañeros docentes en la puesta en marcha de la propuesta y el trabajo en general.

- Los resultados y las propias conclusiones obtenidas por los estudiantes durante la ejecución de cada uno de los talleres superaron las expectativas que se tenían para el desarrollo del trabajo dando una mayor dinámica y aporte a la hora del análisis de los resultados.

- El trabajo de talleres donde se enfatice el manejo de situaciones problemas, permite mejores resultados que serán evidenciados en el rendimiento de los estudiantes en cada uno de los momentos en que necesite poner en práctica las habilidades adquiridas, así como el reforzamiento de habilidades cognitivas y de competencias en los estudiantes.

- En la práctica docente, éste trabajo permite cuestionar y sobre todo el buscar estrategias que procuren mayor motivación y participación de los estudiantes.

- Los estudiantes obtuvieron mejores resultados académicos en relación al área de matemáticas.

- Se generó mayor motivación e interés por las razones y la proporcionalidad directa.

Por otro lado, en lo concerniente a los cuatro pasos propuestos por Polya para abordar una situación problema se pudo observar en cada uno de ellos lo siguiente:

- Entender un Problema: hubo estudiantes que definitivamente no comprendieron el problema y por ende no dieron respuesta al mismo; esto debido a las dificultades manifestadas por los mismos sobre el manejo de conceptos como razón y proporción. Sin embargo en general los estudiantes comprendían lo estipulado en el enunciado de las situaciones problemas, que la información suministrada era suficiente y no extraña y junto a esto, lo que se quería que ellos encontraran.

- Configurar un Plan: fueron dos las estrategias que emplearon los estudiantes para abordar el ejercicio planteado. Como se mencionó con anterioridad, unos optaron por establecer razonamiento de tipo aditivo mientras que otros mostraron razonamiento de tipo multiplicativo.
  Los estudiantes escogían las estrategias de acuerdo a las situaciones que encontraran. Para aquellas que implicaban repartos proporcionales, fue tendencia que los estudiantes elaboraran un diagrama (cuadro) en el cual consignaban la información suministrada por el enunciado. Además, asignaban con variables (letras) los datos desconocidos y dedicaban una fila al establecimiento de las razones entre las magnitudes que se les presentaba.
  Si las situaciones problemas estaban en el marco de porcentajes o razones de cambio, los estudiantes con las magnitudes que encontraban en los enunciados optaban por establecer razones y a partir de ellas proporcionalidades encaminadas a determinar la respuesta a la pregunta que poseía el enunciado.
  En situaciones problemas referentes a probabilidades, la estrategia que más se vio fue la de partir de lo escrito en el enunciado, que por lo general traía consigo una afirmación, para posteriormente validar o refutar dicha afirmación.
  Junto a lo mencionado con anterioridad, en los talleres de profundización para repartos proporcionales, dada la familiaridad de los estudiantes con los mismos, elaboraban un diagrama o cuadro en donde organizaban la información del enunciado. Después asignaban variables (letras) a los datos desconocidos y finalmente establecían razones entre las magnitudes que se les presentaba. En situaciones de porcentajes o razones de cambio, los estudiantes establecían razones y proporciones con las magnitudes que hallaban en los enunciados a fin de hacer operaciones (multiplicaciones o divisiones con constantes). Para las situaciones de probabilidades, fue la de elaborar una conjetura, generalmente a partir de la información suministrada por en el enunciado para posterior a ello argumentar sobre la validez de la misma. Unos pocos optan por establecer razones y proporciones con las magnitudes que aparecen consignadas en las mismas.

- Ejecución del Plan: los estudiantes llevan a cabo las dos estrategias a las cuales se hizo referencia. Se pudo observar que los estudiantes que mostraron razonamiento de tipo proporcional (aunque no establecieron proporcionalidades como tal).

En situaciones de repartos proporcionales, los estudiantes una vez establecido el diagrama, establecían proporcionalidades en las cuales aparecieran las variables previamente establecidas por ellos. Con estas proporcionalidades procedían a realizar productos de cada una de las magnitudes por una constante, lo cual permitía encontrar el valor de la variable que allí estaba presente.
Para las situaciones referentes a porcentajes, los estudiantes dividían las magnitudes por constantes a fin de establecer el 1 % en la situación, luego, la razón encontrada que implica el 1 % se multiplicaba nuevamente por una constante que permitiese encontrar el porcentaje o la cantidad solicitada.
Con las situaciones problemas en las que se hacía presente la probabilidad, los estudiantes tomaban la información referente a las opciones favorables en cada una de las situaciones. No establecían entre ellas las correspondientes proporcionalidades sino que emitían una conjetura basada en el conteo de opciones favorables. Esto significa que los estudiantes no hacen la asociación entre la proporcionalidad y las probabilidades.
Con las situaciones problemas de razones de cambio, los estudiantes procedían a realizar cocientes entre las magnitudes que se les presentaba a fin de encontrar una constante. Al determinar dicha constante los estudiantes podían verificar la existencia o no de proporcionalidad directa entre dichas magnitudes.
En los Talleres de profundización, con las situaciones de repartos proporcionales, los estudiantes establecían las proporciones a partir de las razones que escribían en el diagrama, en éstas proporciones introducían las variables previamente establecidas por ellos. Luego procedían a realizar productos de cada una de las magnitudes con una constante, esto les permitía hallar el valor de la variable que allí estaba presente.
Para las situaciones referentes a porcentajes, los estudiantes dividían las magnitudes por constantes para así determinar el 1 % en la situación, posterior a ello con la razón en la cual estaba implícito el 1 % la multiplicaban por una constante lo que les permitía hallar el porcentaje o la cantidad solicitada. Para las probabilidades, los estudiantes realizaban argumentos basados en la información de las opciones favorables en cada una de las situaciones. Pocos estudiantes establecieron proporcionalidades con dicha información.
Con las situaciones problemas de razones de cambio, los estudiantes procedían a realizar cocientes entre las magnitudes que se les presentaba a fin de encontrar una constante. Al determinar dicha constante los estudiantes podían verificar la existencia o no de proporcionalidad directa entre dichas magnitudes. En aquellos ejercicios de razones de cambio, los estudiantes presentaron dificultades a la hora de establecer las razones adecuadas, optaban por hacer conjeturas y afirmaciones basándose en la información que se les suministraba. Indudablemente en el Taller de Profundización 1 Situación 1, influyó el hecho de que los estudiantes no realizaron la toma de medidas de manera adecuada.

- Mirar hacia atrás: fue marcada la tendencia a entregar respuestas sin argumentos, es decir explícitamente indicaban la respuesta a la pregunta planteada sin mostrar un argumento que validara dicha respuesta. Además, muchos de ellos tan pronto como daban respuesta proseguían con la siguiente pregunta y no se detenían a verificar si dicha respuesta cumplía con lo que se pedía en el enunciado.

Sin embargo, para cada una de las situaciones (Razones de cambio, porcentajes, probabilidades y repartos proporcionales) en general los estudiantes no realizaban procesos de verificación de las respuestas obtenidas, de allí que hubiese respuestas erradas que los estudiantes daban como correctas. En algunos casos las respuestas eran explícitas, es decir, hacían alusión directa a lo que se les preguntaba. En otros, los estudiantes se limitaban a dejar plasmados los procesos que llevaban a cabo, asumiendo con esto que el lector (en este caso el docente encargado) daba por sentado que ella era su respuesta.

Finalmente, es de mencionar que los estudiantes lograron en términos generales reconocer y utilizar la noción de proporcionalidad como una estrategia para abordar situaciones que involucran principalmente razones de cambio, porcentajes y repartos proporcionales. Además se logró que los estudiantes pasaran en su mayoría de un razonamiento de tipo aditivo a uno de tipo multiplicativo a través del empleo de proporcionalidad directa. De igual manera, se logró que los estudiantes reconozcan a la proporcionalidad directa no solo como la relación entre dos magnitudes (si una aumenta, la otra también o viceversa), sino como una proporcionalidad que genera una constante. Junto a esto, a medida que se fueron trabajando cada uno de los talleres propuestos, fue posible estudiar cómo los estudiantes abordaban situaciones problemas a través de los cuatro pasos propuestos por Polya.

Recomendaciones

El desarrollo de este trabajo arroja como resultado las siguientes recomendaciones:

- Realizar con los estudiantes problemas de tipo aleaotorio encaminados al afianzamiento del concepto de probabilidad a fin de facilitar el manejo de la misma a través de razones y proporciones.
- Presentar a los estudiantes temas como los repartos proporcionales, porcentajes, probabilidades y razones de cambio, valiéndose de situaciones problemas, con los cuales ellos puedan darle sentido y afiancen su proceso de Saber - Hacer.
- Analizar situaciones problemas desde los cuatro pasos propuestos por Polya para la solución de estos, ya que así se puede estudiar los procesos y estrategias que emplean niños y niñas para incluirlos en planes de mejoramiento en el desarrollo curricular.
- Implementar como estrategia en el aula de clase el hecho de que los estudiantes analicen y se cuestionen cada uno de los procedimientos y respuestas que entregan.
- Llevar a cabo estrategias como el trabajo en equipo dentro del aula de clase, como un método a través del cual el estudiante puede desarrollar y potenciar actitudes sociales y de cooperación en la búsqueda de un resultado.

Bibliografía

[1] Ávila Godoy, R; Grijalva Monteverde, A; Ibarra Olmos, S E; (2010). El contexto y el significado de los objetos matemáticos. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13() 337-354. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33529137020

[2] Beltrán Pazo, C; Pérez Gómez, Y; (2009). Las estrategias heurísticas en la solución de problemas matemáticos. EduSol, 9() 107-116. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=475748665010

[3] Bustamante Santos, A J; Vaca Uribe, J; (2014). El papel de los sistemas de representación en las dificultades experimentadas por los estudiantes al resolver un problema del campo conceptual de las estructuras multiplicativas. CPU-e, Revista de Investigación Educativa, () 25-57. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=283129394003

[4] Camarena Gallardo, P; (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. Innovación Educativa, 9() 15-25. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=179414894003

[5] Castillo, E; Vásquez, M L; (2003). El rigor metodológico en la investigación cualitativa. Colombia Médica, 34() 164-167. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=28334309

[6] Ceballos, E., (2012). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad en el grado octavo de la Institución Educativa María Josefa Marulanda del municipio de La Ceja* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

[7] Clements, M; (1999). Planteamiento y resolución de problemas: ¿Es relevante Polya para las matemáticas escolares del siglo XXI?. Revista Suma. Recuperado de https://revistasuma.es/IMG/pdf/30/027-036.pdf

[8] Díaz Barriga Arceo, F; (2003). Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo. REDIE. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 5() 105-117. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=15550207

[9] González Alonso, F; (2007). METODOLOGÍA CUALITATIVA Y FORMACIÓN INTERCULTURAL EN ENTORNOS VIRTUALES. Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información, 8() 106-133. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=201017309007

[10] González Martínez, L; (1993). UN ACERCAMIENTO METODOLÓGICO A LA INVESTIGACIÓN CUALITATIVA. Sinéctica, Revista Electrónica de Educación, () 1-12. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=99825983002

[11] Gutiérrez, O., (2013). *Una propuesta didáctica que permita abordar y potenciar la aprehensión del concepto de proporcionalidad en estudiantes de la educación básica secundaria* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia.

[12] Holguin, C., (2012). *Razonamiento Proporcional* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

[13] Ivars, P; Fernández, C; (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. Educación Matemática, 28() 9-38. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40545377002

[14] Jaramillo, L., (2012). *La proporcional y el desarrollo del pensamiento matemático* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

[15] Joya et al., A, (2010). Hipertexto 7. Bogotá, Colombia: Santillana.

[16] Lobato Fraile, C; (1997). Hacia una comprensión del aprendizaje cooperativo. Revista de Psicodidáctica, () 59-76. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=17517797004

[17] Lopera, C., (2014). *Diseño de una Unidad de Enseñanza Potencialmente Significativa que movilice el Aprendizaje de la proporcionalidad directa e inversa a través de las TIC en el grado Séptimo la Institución Educativa el Pedregal del Municipio de Medellín* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

[18] Marin, L., Posada, L., (2015). *Propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad en el grado séptimo* (tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

[19] Ministerio de Educación Nacional; (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

[20] Ministerio de Educación Nacional; (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA). Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

[21] Mochón Cohen, S; (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. Educación Matemática, 24() 133-157. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40525850006

[22] Montealegre, R; (2016). CONTROVERSIAS PIAGET-VYGOTSKI EN PSICOLOGÍA DEL DESARROLLO . Acta Colombiana de Psicología, 19() 271-283. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=79845405012

[23] Nieto S., J H; (2005). Resolución de problemas, Matemática y Computación. Enl@ce: Revista Venezolana de Información, Tecnología y Conocimiento, 2() 37-45. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=82320204

[24] Ortiz, J., (2012). *Enseñanza del concepto de proporcionalidad en el grado 5 de primaria* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

[25] Polya, G. (1989). Cómo plantear y resolver problemas. Recuperado de https://ebiblioteca.org/?/ver/50213

[26] Prieto, L., (2009). *Proporcionalidad simple: Estrategias utilizadas por estudiantes de octavo grado* (tesis de pregrado). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

[27] Ramis, F J; Sánchez S., I R; (2004). APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO BASADO EN PROBLEMAS. Horizontes Educacionales, () 101-111. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=97917171011

[28] Recensiones. (1996). Polya, un clásico en resolución de problemas. Recuperado de https://revistasuma.es/IMG/pdf/22/103-107.pdf

[29] Ruedas M.∗, M J; Nieves Sequera, FE; Ríos Cabrera, M M; (2009). Epistemología de la investigación cualitativa. Educere, 13() 627-635. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=35613218008

[30] Ruiz Hernández, C; (2015). Hacia una comprobación experimental de la zona de desarrollo próximo de Vigotsky. Ciencia Ergo Sum, 22() 167-171. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=10439327009

[31] Souza Minayo, M C d; (2010). Los conceptos estructurantes de la investigación cualitativa. Salud Colectiva, 6() 251-261. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=73115348002

[32] Vélez Upegui, M; (2011). Sobre la comprensión. Co-herencia, 8() 145-184. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=77421563007

[33] Vielma Vielma, E; Salas, M L; (2000). Aportes de las teorías de Vygostsky, Piaget, Bandura y Bruner. Paralelismo en sus posiciones en relación con el desarrollo. Educere, 3() 30-37. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=35630907

[34] Villalobos, J; Mota de Cabrera, C; (2007). El aspecto socio-cultural del pensamiento y del Lenguaje: visión Vygotskyana. Educere, 11() 411-418. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=35603805

[35] Yepes, N., (2012). *La proporcionalidad: el mejor sendero para llegar a construir el concepto de "Razones trigonométricas". Estudio de caso por medio de experiencias de aula en estudiantes del grado* 10 *de la I.E. Fe y Alegría Popular* 1. (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Anexos

Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Institución Educativa Ismael Perdomo Borrero (Gigante - Huila)

Proyecto: La proporcionalidad en la solución de problemas de variación

Taller de Transposición Didáctica

Objetivo: Transponer didácticamente a los estudiantes del grado sexto el concepto de proporcionalidad en la solución de problemas de variación.

Analiza las siguientes situaciones:

Situación 1: Durante las obras de cementación de la calle cerca al colegio, accidentalmente se rompió un tubo del acueducto que surte al municipio. Los ingenieros encargados de la obra presentaron la siguiente tabla en la cual se evidenciaba los litros de agua derramados por minuto.

Tiempo (T) en minutos	1	2	3	$\cdots$	15	$\cdots$	30	$\cdots$	60	$\cdots$	120
Litros de agua derramada (L)	4	8	12	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
Cociente $\frac{\text{Tiempo (T)}}{\text{Litros de agua (L)}}$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{2}{8} = 0,25$	$\frac{3}{12} = 0,25$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	

Pregunta 1: ¿Qué observas en la anterior tabla, con respecto al aumento en la cantidad de agua derramada con el paso del tiempo y con respecto al comportamiento del cociente? ¿Qué conclusiones puedes sacar?

Pregunta 2: ¿Cuántos litros de agua se han derramado a los 15 minutos, a la media hora (30 minutos), una hora (60 minutos) y dos horas (120 minutos)?. Realiza el procedimiento que consideres pertinente para dar respuesta a esta pregunta y así completar la tabla de la situación 1 (si el espacio no es suficiente, continúa por detrás de la hoja).

Situación 2: Se coloca en el fuego un recipiente con agua a 2 grados centígrados (2^oC). La temperatura del agua va aumentando 2^oC cada minuto por una hora. Con un termómetro, se tomó la temperatura del agua y los datos se registraron en la siguiente tabla

Tiempo (T) en minutos	0	1	2	3	$\cdots$	15	$\cdots$	30	$\cdots$	60	$\cdots$	120
Temperatura en grados centígrados (C)	2	4	6	8	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
Cociente $\frac{\text{Tiempo (T)}}{\text{Temperatura (C)}}$	$\frac{0}{2} = 0$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{2}{6} = 0,\overline{3}$	$\frac{3}{8} = 0,375$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	

Pregunta 1: ¿Qué observas de la anterior tabla, con respecto a los cambios en la temperatura con el paso del tiempo? ¿Qué observas en el comportamiento de los cocientes? ¿Qué diferencias observas con respecto a la tabla de la situación 1?.

Intervencion del docente En la tabla de la Situación 1 se puede observar que se realiza la división o cociente entre dos magnitudes el tiempo y los litros de agua derramada. A dicha división se le conoce o recibe el nombre de **razón**.

De igual manera es de resaltar que en dichas divisiones se están consiguiendo los mismos resultados, los cuales llamaremos **constante**.

Al observar el comportamiento de los primeros cocientes observamos que la constante es 0,25. Podemos afirmar que éstas magnitudes son **directamente proporcionales** o que están en **proporción directa**. De allí que los resultados en el cociente de los demás datos por llenar, deben ser igual a la constante (0,25) lo cual significa que:

Tiempo (T) en minutos	1	2	3	$\cdots$	15	$\cdots$	30	$\cdots$	60	$\cdots$	120
Litros de agua derramada (L)	4	8	12	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	
Cociente $\frac{\text{Tiempo (T)}}{\text{Litros de agua (L)}}$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{2}{8} = 0,25$	$\frac{3}{12} = 0,25$	$\cdots$	$\frac{15}{60} = 0,25$	$\cdots$	$\frac{30}{120} = 0,25$	$\cdots$	$\frac{60}{240} = 0,25$	$\cdots$	$\frac{120}{480} = 0,25$

De lo anterior, se puede deducir que

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{15}{60} = \frac{60}{240} = \cdots = \frac{120}{480} = 0,25$$

A esta constante se le denominará de ahora en adelante **constante de proporcionalidad directa**.

Note que $\frac{1}{4} = 0,25$. Entonces todas las divisiones entre el tiempo y la cantidad de litros deben dar $\frac{1}{4}$.

Por ejemplo para responder la pregunta ¿Cuántos litros de agua se han derramado en 15 minutos?

Ya sabemos que al dividir 15 por la cantidad de litros debe dar como resultado $\frac{1}{4}$, es decir,

$$\frac{15}{L} = \frac{1}{4}$$

A esta comparación de dos razones la llamaremos de ahora en adelante una **proporción**.

¿Cómo crees tú poder hallar el valor de L que hace falta?

La razón $\frac{1}{4}$vse interpreta como razón de cambio y quiere decir que cada vez que se aumenta en un (1) minuto el tiempo, los litros de agua derramada aumenta en cuatro (4 unidades).

En conclusión:

- La división o cociente entre dos magnitudes cualesquiera recibe el nombre de razón.

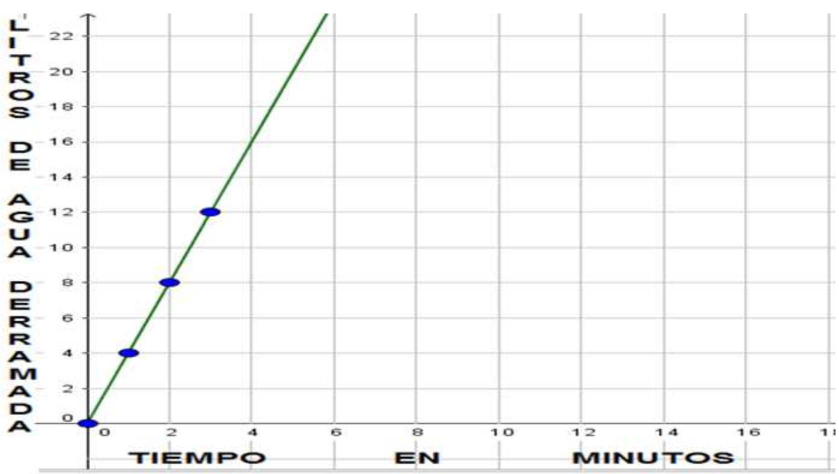
- La proporción es la igualdad que existe al comparar dos o más razones.

- Cuando ésta razón es siempre constante (la misma), se dice que las magnitudes implicadas son directamente proporcionales.

Por otro lado, en la Situación 2 se observa que al realizar la razón entre las dos magnitudes: tiempo y temperatura no se obtiene una misma constante. En este caso se dice que las magnitudes están en relación directa, pero no son **proporcionales**, porque las razones son diferentes con el paso del tiempo.

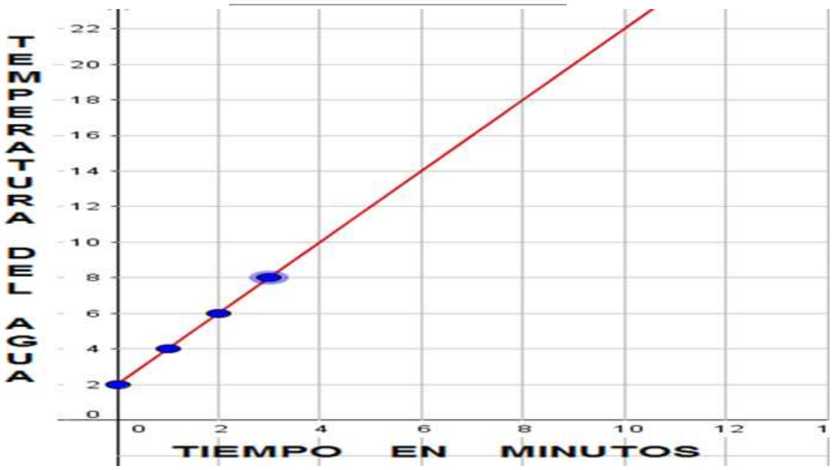
Representación Gáfica de las situaciones 1 y 2

Los datos presentados en la tabla de la situación 1, pueden ser representados en un plano cartesiano. En el eje horizontal ubicaremos el tiempo (T) y en el eje vertical ubicaremos los litros de agua derramada (L)



En la gráfica podemos observar que los datos están **generando una línea recta que pasa por (0,0)**. Esto se debe a que las magnitudes son proporcionales. Cabe resaltar también, que en la gráfica se hace evidente la razón de cambio (1/4) ya que por cada unidad que se avanza en el eje horizontal (TIEMPO EN MINUTOS), se sube cuatro unidades en el eje vertical.

Para la situación 2. En el eje horizontal ubicaremos el tiempo (T) y en el eje vertical ubicaremos la temperatura del agua en grados centígrados (C).

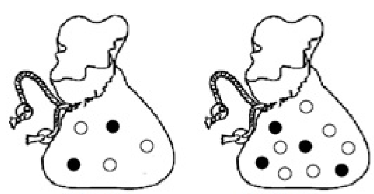


En la gráfica se observa que los datos están **generando una línea recta que no pasa por (0,0)**. Esto se debe a que las magnitudes **no son directamente proporcionales**.

Observa que la ventaja de las magnitudes directamente proporcionales es que podemos hacer predicciones sobre el comportamiento de ellas.

La proporcionalidad directa en la probabilidad

Situación 3: Una bolsa A contiene cinco canicas, dos de ellas de color negro; mientras que una bolsa B contiene diez canicas, de las cuales cuatro son de color negro. Si te piden sacar una canica ¿en cuál de las dos bolsas tienes mayor probabilidad de que la canica extraída sea de color negro?



La anterior información la podemos resumir en la siguiente tabla

	Bolsa A	Bolsa B
Canicas negras	2	4
Total de canicas en la bolsa	2	4
Cociente: $\dfrac{\text{Canicas negras}}{\text{Total de canicas}}$	$\dfrac{2}{5} = 0,4$	$\dfrac{4}{10} = 0,4$

Se observa que en esta situación hay proporcionalidad porque: $\dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{10} = 0,4$. Esto significa que en las dos bolsas existe la misma probabilidad de que la canica extraída sea de color negro. En este caso 0,4 es decir 2/5 significa el total de canicas en la bolsa y 2 representa el total de eventos exitosos (sacar canicas negras).

La proporcionalidad en porcentajes

La proporcionalidad directa es de gran utilidad a la hora de calcular porcentaje.

Situación 4: El profe de matemáticas te dice que en las 8 tareas que has presentado ha encontrado errores en el 25 % de ellas. ¿Cuántas de tus tareas han tenido errores?

Cantidad de tareas	X	8
Porcentaje %	25	100
Total de canicas en la bolsa	2	4
Cociente: $\frac{\text{Cantidad}}{\text{Total de porcentaje}}$	$\frac{X}{25} = 0,08$	$\frac{8}{100} = 0,08$

De esta tabla se concluye que: $\frac{X}{25} = \frac{8}{100}$. Bastará entonces con multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por un mismo número para obtener la fracción $\frac{8}{100}$.

¿Qué número multiplicado por 4 da como resultado 8? Dicho número es 2 y representa las tareas con errores que tu profesor encontró.

Te invitamos a resolver la siguiente situación: Juan compró una nevera que costaba 800,000en768.000 porque estaban haciendo un descuento. ¿Qué porcentaje del precio original le descontaron?

La proporcionalidad en repartos proporcionales

Situación 6: Un gran ganadero decide repartir 700 vacas entre sus tres trabajadores de acuerdo a sus años de servicio. A Lorenzo, quien ha trabajado con el ganadero por 15 años, le entrega 300 vacas. Freddy, su segundo trabajador recibe 240 vacas por sus 12 años de trabajo y finalmente Mauricio, quien lleva 8 años de labores recibe 160 vacas. ¿Consideras que el reparto que hizo el ganadero fue equitativo? ¿Por qué?

Observemos el comportamiento de los datos en la siguiente tabla

Trabajadores	Total	Lorenzo	Freddy	Mauricio
Vacas	700	300	240	160
Años de trabajo	35	15	12	8
Cociente: $\frac{\text{Vacas}}{\text{Años de trabajo}}$	$\frac{700}{35} = 20$	$\frac{300}{15} = 20$	$\frac{240}{12} = 20$	$\frac{160}{8} = 20$

A la hora de realizar repartos proporcionales, la proporcionalidad directa puede ser de gran utilidad. Veamos

Puede observarse de la tabla que:

$$\frac{300}{15} = \frac{240}{12} = \frac{160}{8} = 20$$

y además

$$\frac{300 + 240 + 160}{15 + 12 + 8} = \frac{700}{35} = 20$$

Con lo que se concluye que

$$\frac{300}{15} = \frac{240}{12} = \frac{160}{8} = \frac{700}{35} = 20$$

Así pues, el reparto que hizo el ganadero si fue equitativo porque la relación entre el número de vacas repartidas y el número de años trabajados es igual. De ahora en adelante a este tipo de repartos lo llamaremos **reparto proporcional**.

Te invitamos a resolver la siguiente situación: El área de ciencias naturales ha diseñado el concurso (Revivamos nuestro planeta) el cual entrega un premio de $120000 a los estudiantes que hayan recogido la mayor cantidad material reciclable en su hogar en un periodo de dos meses. Por los grados sextos y séptimos, la ganadora fue Mónica quien llevo 11kg de material; en los grados Octavos y Novenos el ganador fue Arcesio con un total de 12kg de material y en los grados Decimos y Onces la ganadora fue Ruby con un total de 7kg de material. El comité organizador del concurso decide repartir el premio entre estos tres estudiantes de manera proporcional. ¿Qué tanto dinero recibe cada uno de los ganadores?

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Institución Educativa Ismael Perdomo Borrero (Gigante - Huila)

Proyecto: La proporcionalidad en la solución de problemas de variación

Taller de Afianzamiento # 1

Objetivo: Resolver problemas de variación, en los contextos de probabilidad, razones de cambio, porcentajes y repartos proporcionales, haciendo uso del concepto de proporcionalidad.

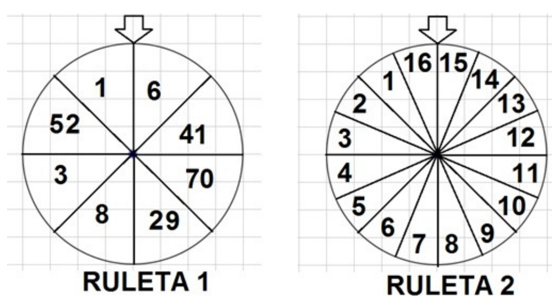
Situación 1: Jorge, Ana y Luis participaron en un concurso en el cual ganaron $4800. Los tres deciden repartirlo de manera proporcional a la cantidad de puntos que cada uno aportó en la consecución de dicho premio. Jorge aportó 10 puntos, Ana 15 puntos y Luis 5 puntos. ¿Qué cantidad del premio le corresponde a cada uno? ¿Por qué?

Situación 2: La siguiente tabla presenta el precio en pesos y el número de dulces que Jorge compra en diferentes ocasiones en el restaurante escolar.

Cantidad de dulces	3	···		···	15	···	30	···	
Precio en pesos	150	···	500	···	750	···		···	3000

Complete los datos que hacen falta de la tabla, asumiendo que son magnitudes directamente proporcionales.

Situación 3: Al pueblo ha llegado la feria de la diversión. Dentro de sus múltiples atracciones está el juego de la ruleta numérica. Consiste en hacer girar cualquiera de las dos ruletas (RULETA 1 o RULETA 2) y obtienes premios si la flecha cae en un número par. María tiene deseos de participar, sin embargo no sabe cuál de las dos ruletas escoger. El administrador del juego le dice que no importa cuál de las dos escoja, las posibilidades de obtener premios es la misma. ¿Estás de acuerdo con las palabras del administrador del juego? ¿Por qué?



Situación 4: Un tanque de agua de 150 Litros actualmente está lleno en un 30 %. ¿Cuántos litros de agua tiene el tanque actualmente?

Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Institución Educativa Ismael Perdomo Borrero (Gigante - Huila)

Proyecto: La proporcionalidad en la solución de problemas de variación

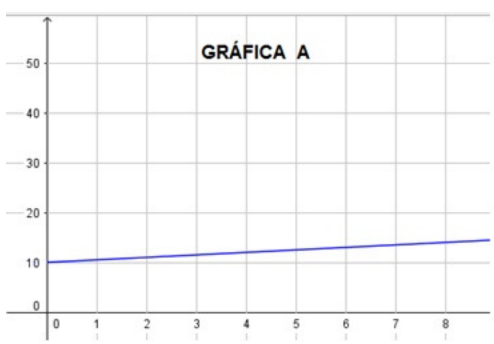
Taller de Afianzamiento # 2

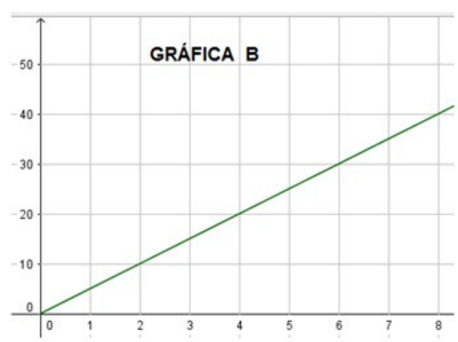
Objetivo:Resolver problemas de variación, en los contextos de probabilidad, razones de cambio, porcentajes y repartos proporcionales, haciendo uso del concepto de proporcionalidad.

Situación 1: María desea comprar un bolso. Ella observa en internet una promoción que dice: “Solo por hoy, Bolso viajero tipo Travel, precio original $125000. Cómpralo por tan solo $93750”. Si María decide hoy comprar el Bolso Travel, ¿Qué porcentaje del precio original tuvo descuento?.

Situación 2: Andrea y Felipe invirtieron en una fábrica de zapatos. Andrea invirtió $2000000 mientras que Felipe $5000000. Al cabo de un año, obtuvieron $280000 en ganancias. De dichas ganancias, ¿Cuánto dinero le corresponde a Felipe y cuánto a Andrea?. Si se quiere hacer un reparto proporcional a la cantidad de dinero invertida.

Situación 3: El profesor Simón presenta a sus estudiantes dos gráficas y pregunta por cuál de las dos representa el comportamiento de dos magnitudes directamente proporcionales. Andrea dice que la gráfica A mientras que Marcos opina que la gráfica B. Posterior a ello, el profesor te hace a ti la misma pregunta. ¿Cuál sería tu respuesta? ¿Por qué?





Situación 4: Una caja contiene 60 fichas con imágenes. Diez fichas corresponden a triángulos, 15 a cuadrados, 20 a círculos y el resto corresponde a animales. Si deseo sacar una ficha ¿se puede afirmar que la probabilidad de sacar un cuadrado o un animal es la misma? ¿Por qué?

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Institución Educativa Ismael Perdomo Borrero (Gigante - Huila)

Proyecto: La proporcionalidad en la solución de problemas de variación

Taller de Afianzamiento # 3

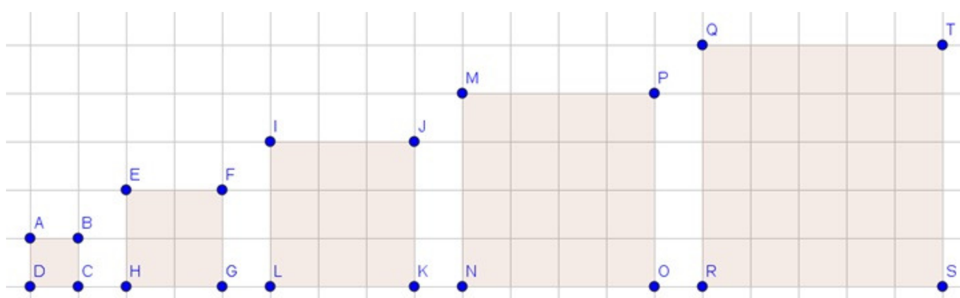
Objetivo: Resolver problemas de variación, en los contextos de probabilidad, razones de cambio, porcentajes y repartos proporcionales, haciendo uso del concepto de proporcionalidad.

Situación 1: Para cada una de las tapas que has traído, completa la siguiente tabla

Longitud de circunferencia (L)							
Diámetro de circunferencia (D)							
Razón: $\frac{L}{D}$							

¿Qué notas en la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro de la misma?

Situación 2: La siguiente imagen muestra cuadrados con diferentes medidas en sus lados. Completa las tablas que se presentan enseguida de la imagen y determina cuál de las dos situaciones presentan comportamiento de magnitudes directamente proporcionales.



Longitud de lado (L)					
Area del cuadrado (A)					

Longitud de lado (L)					
Perímetro del cuadrado (P)					

Situación 3: El grado preescolar del colegio **La Alegría del Saber** tiene actualmente 26 estudiantes, los cuales corresponden al 5 % de todos los estudiantes de la institución. ¿Es posible afirmar que el colegio **La Alegría del Saber** tiene actualmente 150 estudiantes? ¿Por qué?

Situación 4: Ana tiene un dado con seis caras y Esteban tiene uno con doce caras. Ambos dados están enumerados del 1 al 6 y del 1 al 12 respectivamente. Esteban afirma que como su dado tiene más caras, al lanzarlo tendrá más opciones que Ana de obtener un número par. ¿Es correcta la afirmación de Esteban? ¿Por qué?

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Institución Educativa Ismael Perdomo Borrero (Gigante - Huila)

Proyecto: La proporcionalidad en la solución de problemas de variación

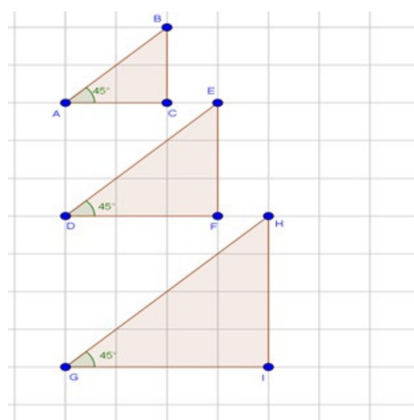
Taller de Profundización # 1

Objetivo: Evaluar los alcances de los estudiantes en lo concerniente al desarrollo de estructuras de razonamiento proporcional y como emplean el mismo en la solución de problemas de variación.

Situación 1: Tres amigos deciden alquilar por 9 días una consola de videojuegos XBOX. Felipe usa la consola por 4 días, Juan por 2 días y Pablo por 3 días. Si el alquiler de dicha consola tiene un costo de \$45000 ¿De a cuánto le toca pagar a cada uno?

Situación 2: De la producción total de llantas en una fábrica, un 3 % de son defectuosas. Si el inspector de calidad ha encontrado el día de hoy 51 llantas defectuosas, ¿cuántas llantas se han producido hoy?

Situación 3: Mida todos los lados de los triángulos rectángulos que están en la gráfica:



En el primer triangulo ABC, encuentre los siguientes cocientes:

$\frac{BC}{AB} =$ $\qquad$ $\frac{AC}{AB} =$ $\qquad$ $\frac{BC}{AC} =$

En el primer triangulo DEF, encuentre los siguientes cocientes:

$\frac{EF}{DE} =$ $\qquad$ $\frac{DF}{DE} =$ $\qquad$ $\frac{EF}{DF} =$

En el primer triangulo GIH, encuentre los siguientes cocientes:

$\frac{HI}{GH} =$ $\qquad$ $\frac{GI}{GH} =$ $\qquad$ $\frac{HI}{GI} =$

¿Qué conclusiones puedes sacar de estos cálculos?. Si construyo otro triangulo semejante a estos cuyo lado menor mida $35cm$, ¿Cuánto miden los otros dos lados?. Explora que resultados obtienes si cambias el ángulo de 45º, por uno de 30º y uno de 60º. Saca tus propias conclusiones.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

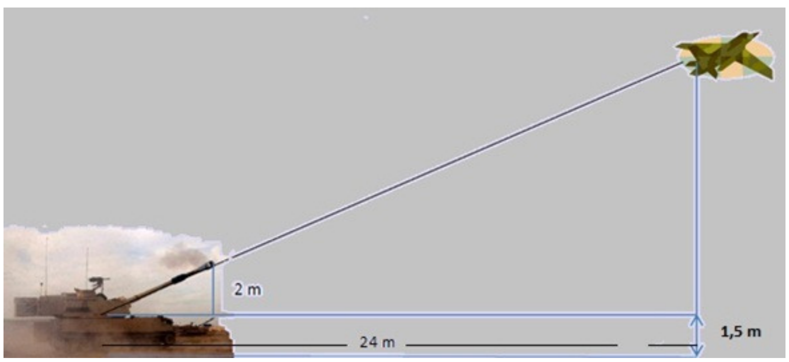
Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Institución Educativa Ismael Perdomo Borrero (Gigante - Huila)

Proyecto: La proporcionalidad en la solución de problemas de variación

Taller de Profundización # 2

Objetivo: Evaluar los alcances de los estudiantes en lo concerniente al desarrollo de estructuras de razonamiento proporcional y como emplean el mismo en la solución de problemas de variación.

Situación 1: Teniendo en cuenta el comportamiento en los cocientes de los triángulos de la situación 4 del taller de profundización 1, responde las siguientes preguntas. ¿A qué distancia se encuentra el avión de la vista del tanque? y ¿A cuanta distancia está el avión del suelo?, en la siguiente situación. Si el ángulo de inclinación del cañón es de 45º

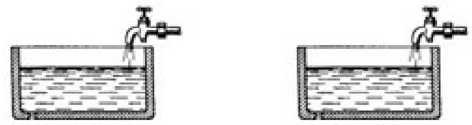


Situación 2: En una bolsa se encuentran balotas negras, azules y rojas. De tal manera que: La probabilidad de sacar una balota roja de la bolsa es de $\frac{1}{2}$; La probabilidad de sacar una balota negra de la bolsa es de $\frac{1}{6}$; y La probabilidad de sacar una balota azul de la bolsa es de $\frac{1}{3}$.

Si en la bolsa hay un total de 30 balotas, entonces ¿Cuántas balotas negras, rojas y azules hay en total en la bolsa? Si de la bolsa se sacan 1 balota negra, 1 azul y dos rojas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una balota negra ahora? ¿Cuál es la probabilidad de sacar una azul? y ¿Cuál es la probabilidad de sacar una roja?

Situación 3: Un almacén de ropa está rebajando un porcentaje en el valor de todas sus prendas. Andrea compró una chaqueta que costaba $200,000 en $150,000. Camilo por su parte se interesó por un pantalón que tiene un precio sin rebaja de $180,000. ¿Qué porcentaje le rebajaron al valor de la chaqueta de Andrea? ¿Cuánto debe pagar Camilo por la Chaqueta? ¿Cuánto rebajo el almacén en el valor de las dos compras?

Situación 4: El tanque 1 se llena con una velocidad de 4 litros por segundo y el tanque 2 con una velocidad de $\frac{10}{3}$ litros por segundo.



Tanque 1 Tanque 2

Si las variables capacidad (litros) y tiempo (segundos) están en proporción directa y el tanque tiene una capacidad de 440 litros. ¿Cuántos segundos se demora cada tanque en llenarse? ¿Cuál se llena más rápido? Justifica tu respuesta.