UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Grafos como herramienta didáctica en el reconocimiento de patrones gráficos y numéricos.

Carol Ximena Rodríguez Cardenas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2016

Grafos como herramienta didáctica en el reconocimiento de patrones gráficos y numéricos.

Carol Ximena Rodríguez Cardenas

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:
Profesor Ph.D., Agustín Moreno Cañadas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2016

Carta de aprobación del director

El director del proyecto de grado “**Grafos como herramienta didáctica en el reconocimiento de patrones gráficos y numéricos** ” considera que el trabajo reúne los requisitos y la estructura académica para ser presentado.

AGUSTÍN MORENO CAÑADAS
Director

A Dios por guiarme cada día en el cumplimiento de mis metas y proyectos. Gracias por bendecirme con las personas maravillosas que tengo a mi lado, que han permitido que mis estudios sean una realidad y hoy este vinculada a esta maravillosa profesión de ser docente.

A mis padres Carmen y Jesús quienes con su apoyo y esfuerzo han hecho posible cada uno de los logros obtenidos. A mi hermano Camilo y hermosos sobrinos por motivar y apoyar cada momento.

A Carlos, mi esposo y compañero que con su voz de aliento y compañia permiten que cada día crezcamos personal y profesionalmente.

A mi hermosa y encantadora hija, Maria Alejandra, quien me cautiva y enamora con sus sonrisas y palabras.

Agradecimientos

Al director de este trabajo, profesor Agustín Moreno Cañadas, por sus valiosos comnetarios, sugerencias y aportes que orientaron el desarrollo del trabajo.

A la profesora Teresa Braicovich por su disposición y sugerencias brindadas durante la realización de este trabajo.

A los estudiantes del grado 602 de la I.E.D Técnico Comercial de Tibacuy, quienes participaron activamente en la realización de cada una de las actividades propuestas.

A mi familia por su apoyo, paciencia, comprensión y palabras de apoyo.

Resumen

En este trabajo se diseñó, aplicó y evaluó una secuencia de cuatro actividades relacionadas con la teoría de grafos que permitió el reconocimiento de patrones gráficos y numéricos. La propuesta estuvo dirigida a jóvenes de sexto grado de la I.E.D. Técnico Comercial de Tibacuy, del municipio de Tibacuy (Cundinamarca). Se plantearon las actividades con el propósito que los estudiantes establecieran patrones y conjeturaran algunos resultados de la teoría de grafos como: relación entre la suma de los grados de los vértices y la cantidad de aristas del grafo; relación de Euler para regiones, vértices y aristas en un grafo plano ($R + V - 2 = A$); condiciones para que un grafo sea recorrible o no y, la cantidad mínima de veces que se debe levantar el lápiz en un grafo no recorrible. Se realizó una descripción de los resultados encontrados en la aplicación de la secuencia de actividades, y se establecieron 13 categorías de análisis. Los resultados evidencian que los grafos son un recurso didáctico que permite que los estudiantes se motiven y reconozcan patrones, al mismo tiempo que hacen matemáticas.

Palabras claves:. Grafos, Patrones gráficos y numéricos, enseñanza de la matemática.

Abstract

In this work, a sequence of four activities related to the theory of graphs was designed, applied and evaluated that allowed the recognition of graphic and numerical patterns. The proposal was addressed to sixth-grade youth from the I.E.D. Técnico Comercial de Tibacuy, of the municipality of Tibacuy (Cundinamarca). The activities were designed with the purpose that the students establish patterns and will conjecture some results of the theory of graphs like: relation between the sum of the degrees of the vertices and the amount of edges of the graph; Euler relation for regions, vertices and edges in a flat graph (R + V - 2 = A); conditions for a graph to be recursive or not, and the minimum number of times to lift the pencil in a non-recursive graph. A description of the results found in the application of the sequence of activities was made, and 13 categories of analysis were established. The results show that graphs are a didactic resource that allows students to motivate and recognize patterns, while doing mathematics..

Keywords: Graphs, Graphical and numerical patterns, teaching mathematics.

Contenido

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Introducción

En la Institución Educativa Departamental Técnico Comercial de Tibacuy del municipio de Tibacuy, Cundinamarca, se concentra una población estudiantil de aproximadamente 340 estudiantes de estratos socioeconómicos 1 y 2. En esta institución se observa que cuando a los estudiantes de los grados sexto y séptimo se les plantea una situación problema en un contexto relacionado con su entorno, ellos tienen dificultades para interpretarla y asociarla con el conocimiento matemático que han trabajado previamente y por ello no pueden identificar estrategias de solución. Usualmente se restringen a preguntar, qué operación deben utilizar para resolverla y una vez encontrada una respuesta, no analizan si esta es pertinente con la situación planteada. Con respecto a esta situación, Cognini, Braicovich y Reyes [8, pág 1] plantean: " *... a los estudiantes de todos los niveles les resulta difícil proponer razonamientos propios y además en muchas ocasiones no logran resolver sencillos problemas que se pueden presentar en la vida cotidiana y que tiene relación con la matemática* ".

A partir de la situación anterior surge la pregunta: ¿Qué tipo de estrategia didáctica permite favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de grado sexto?

Teniendo en cuenta que los estudiantes de este grado se motivan y se concentran en situaciones o problemas matemáticos que les generan retos, se propone diseñar una secuencia de actividades, usando la Teoría de Grafos, que permitan el reconocimiento de patrones gráficos y numéricos. Como herramienta didáctica se selecciona la Teoría de Grafos, puesto que potencia el pensamiento creativo , el reconocimiento de regularidades y la formulación de conjeturas. A este respecto Coriat, citado en [8, pág 2], plantea: '*'Por medio de los grafos se facilita el acceso de los alumnos a sus propias estrategias de aprendizaje, no porque estas se describan necesariamente mediante grafos, sino porque el ir y venir entre situaciones y estructuras puede facilitar la toma de conciencia de los propios procesos cognitivos* ".

De igual manera se planea trabajar con temas específicos de la teoría de Grafos ya que el análisis de estos temas resulta retador e interesante para los estudiantes como lo reiteran en las conclusiones de su trabajo de investigación Vergel, Molina y Echeverry [26]. Se selecciona el trabajo con patrones teniendo en cuenta que, *"las actividades con patrones revisten la característica de la resolución de problemas ya que pueden ser formuladas de modo que el alumno las reconozca como situaciones problemáticas y así* *estimular la generación de hipótesis, su comunicación y comprobación y la refutación o confirmación de las mismas (lo cual acerca a los alumnos al modo de pensamiento que las ciencias requieren)"*[22, pág 8].

Se propone el reconocimiento de patrones numéricos y gráficos teniendo en cuenta que este proceso es muy importante para el desarrollo del pensamiento matemático, en particular en el proceso de razonamiento. *"Razonar en matemáticas tiene que ver con . . . encontrar patrones y expresarlos matemáticamente "*[11, pág 77].

Del mismo modo, el planteamiento de patrones permite un acercamiento al pensamiento variacional, tal como se plantea en [12, pág 67]:

> Las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras involucran la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras en los cuales se basa el proceso de generalización. Esta es una forma muy apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar al séptimo y octavo grado.

Los anteriores planteamientos sustentan esta propuesta cuyo objetivo es diseñar una secuencia de actividades, para estudiantes de grado sexto, que permita el reconocimiento de patrones gráficos y numéricos, usando como herramienta didáctica la Teoría de Grafos. Para el cumplimiento de este objetivo, el trabajo se organiza en seis capítulos.

En el capítulo 1 se describe el desarrollo histórico de la Teoría de Grafos. Se exponen cuatro problemas que contribuyeron al desarrollo de esta área de las matemáticas, la cual fue considerada inicialmente parte de la Topología y actualmente parte de la Matemática Discreta. En el capítulo 2 se presentan algunas definiciones y propiedades de la Teoría de Grafos que sustentan la propuesta. También se plantean resultados de trabajos relacionados con la enseñanza de grafos en la educación secundaria. En el capítulo 3 se define el concepto de patrón y se presentan las características relevantes que se deben tener en cuenta al momento de abordar su enseñanza. Adicionalmente, se realiza una revision de los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias propuestos por el MEN, y se describen aquellos elementos que sustentan la inclusión de este concepto en el currículo escolar colombiano. En el Capítulo 4 se plantea la propuesta didática y se describe la metodología de cada una de las cuatro actividades que conforman la secuencia de actividades. En el capítulo 5 se realiza la descripción de los resultados obtenidos en la aplicación de la secuencia de actividades.

Finalmente, se presentan en el capítulo 6 las conclusiones y recomendaciones del trabajo.

1 Aspectos históricos y epistemológicos

A diferencia de otras áreas de las matemáticas, sobre la Teoría de Grafos se conocen con claridad sus inicios. Su desarrollo se logró gracias al estudio de diversos problemas. A continuación se mencionan los cuatro problemas clásicos, sus aportes a esta teoría, y se describe el proceso de consolidación como teoría y su desarrollo actual.

1.1. Problema Euleriano

1.1.1. Ciudad de Königsberg

Uno de los problemas más famosos que da inicio a esta teoría se originó en la ciudad de Königsberg (o Koenigsberg), que fue capital de Prusia Oriental hasta el año 1945. En la conferencia de Berlín de 1946 esta ciudad pasó a formar parte de la antigua URSS, que un año más tarde fue nombrada como Kaliningrado [19]. Actualmente Kaliningrado es un enclave Ruso ubicado entre Polonia y Lituania, localizado muy cerca al mar Baltico [15], ver figura **1-1**[1].

Figura 1-1: La Provincia de Kaliningrado

En el siglo XVII, el río Pregel atravesaba la ciudad de Königsberg, y sus ramificaciones la dividieron en cuatro regiones: Altstadt and Löbnicht localizadas en la costa norte del rio Pregel (A), Vorstadt localizada en la costa sur (V), y las dos islas Kneiphof (K)

[1]Imagen extraída de [15]

y Lomse (L) como se puede observar en la figura **1-2**[2] [15, pág 1].

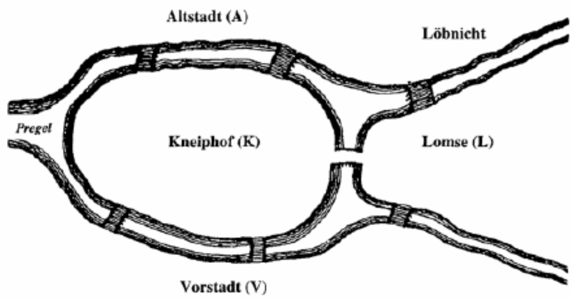


Figura 1-2: Ciudad de Königsberg

La isla Kneiphof es pequeña y de forma casi rectangular con dimensiones: 400 metros de largo x 200 metros de ancho. La segunda isla, muy poco referenciada en los documentos, es más grande que Kneiphof y tiene una longitud aproximada de 9 kilometros de largo y un ancho que oscila entre 200 metros y 1000 metros. Estas islas y las demás regiones se conectan entre sí por siete puentes distribuidos como se observa en la figura **1-2**.

A continuación se realiza una breve descripción de cada puente. En la figura 1.3(a)[3] se encuentra los nombres de cada uno de los puente y los números de la figura 1.3(b)[4] indican el orden cronológico en que se contruyeron, como se puder ver en la figura [15]:

1. El puente de Salesman o Krämerbrücke. Construido en el año 1286 y reconstruido en los años 1787 y 1900. Esta última modificación en acero.

2. El puente Green o Grünebrücke. Construido en el año 1322. Fue destruido por combates en 1582 y reconstruido en los años 1590 y 1907. Esta última modificación en acero.

3. El puente Slaughter o Köttelbrüke. Construido en el año 1377. Fue reconstruido en el año 1886.

4. El puente de Blacksmith o Schmiedebrücke. Construido en el año 1397. Fue reconstruido en 1787 y 1896. Esta última modificación en acero.

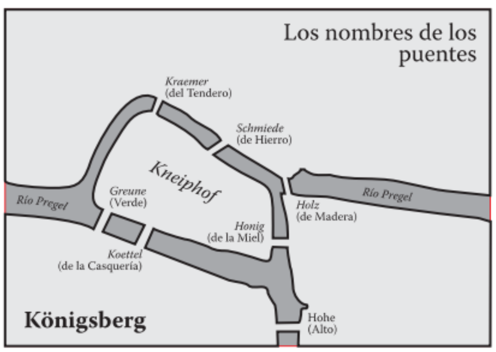
5. El puente Timber o Holzbrücke. Construido en el año 1400. Fue reconstruido en acero en 1904.

[2]Representación de los puentes de Königsberg realizado por Euler. Extraída de [15].
[3]Imagen tomada de [19].
[4]Imagen extraída de [15].

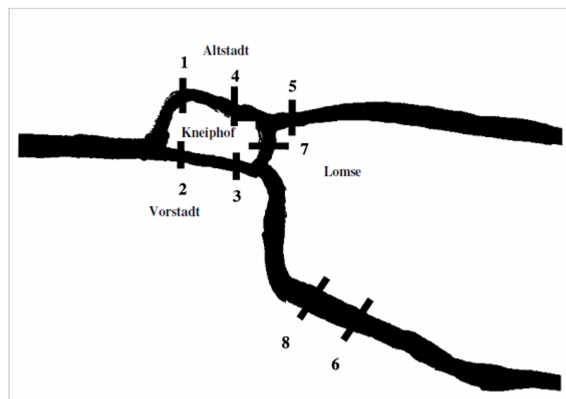
6. El puente High o Hohebrücke. Construido en el año 1506. Fue reconstruido en 1882-1883, destruido en 1937 y reconstruido en concreto entre los años 1937-1939.

7. El puente Honey o Hönigbrücke. Construido en el año 1542. Fue reconstruido en acero entre los años 1879-1882.

8. En 1905 se construye el octavo puente en el centro de la ciudad de Königsberg, que conecta a la isla Lomse con Vorstadt. Este puente recibe el nombre de Emperor o Kaiserbrücke.



(a) Puentes de Königsberg en el siglo XVIII



(b) Puentes de Königsberg en 1905

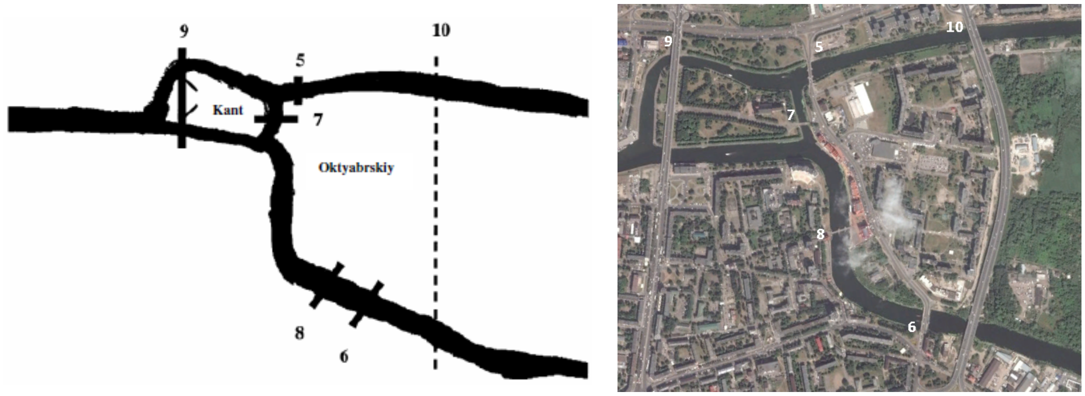
Figura 1-3: Puentes de Königsberg

Durante la segunda guerra mundial, cuatro de los ocho puentes fueron destruidos: Slaughter (puente 3), Blacksmith (puente 4), Timber (puente 5) y Emperor (puente 8). De estos puentes son reconstruidos los puentes Timber y Emperor. Después de la Segunda Guerra Mundial (1945) las islas de Kneiphof y Lomse cambian de nombre por Isla Kant e Isla Oktyabrskiy (October), respectivamente.

En 1972 se construye el noveno puente que reemplaza a los demolidos puentes de Salesman (puente 1) y Green (puente 2). Este nuevo puente recibe el nombre de Estacada y une los dos extremos del rio pregel [15]. La figura 1.4(a)[5] corresponde a los puentes que se encuentran actualmente en este sector de Kaliningrado y el puente que se observa en linea interlineada representa un puente en construcción en el año 2005. Este último puente existe y se puede observar en la imagen 1.4(b)[6].

[5] Imagen extraída de [15]

[6] Imagen obtenida de Google Earth. Octubre 9 de 2016



(a) Puentes de Königsberg en 2005 (b) Puentes de Königsberg en 2016

Figura 1-4: Puentes de Königsberg

1.1.2. Planteamiento del problema

A principios del siglo XVIII, los habitantes de la ciudad de Königsberg recorrían los puentes y se planteaban la pregunta: *¿es posible encontrar una manera de caminar los siete puentes, cruzándolos exactamente una vez y regresando al punto donde se había iniciado el recorrido?*

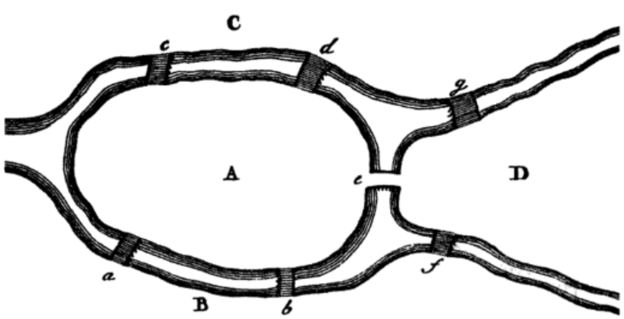


Figura 1-5: Representación de los puentes de Königsberg

Leonhard Euler (1707-1783) matemático suizo de la época se enteró del problema en 1735, por un grupo de jovenes que le solicitaron resolverlo. Euler planteó el problema de la siguiente manera:

*“ En la ciudad de Königsberg, en Prusia, hay una isla A llamada Kneiphof, rodeada por los dos brazos del río Pregel. Hay siete puentes a, b, c, d, e, f y g (Figura **1-5** [7]) que cruzan por los dos brazos del río. La cuestión consiste en determinar si una*

[7] Imagen extraída de [19].

persona puede realizar un paseo de tal forma que cruce cada uno de estos puentes sólo una vez" [19].

Para la solución a este problema[8], Euler nombró con las letras A, B, C, D a las 4 regiones de Königsberg y representó el camino que va desde A hasta B como AB, independiente si es por el puente a o b. Luego para ir a D se sigue el camino BD obteniendo la ruta ABD. Euler observa que el cruzar tres puentes se puede representar con cuatro letras, y presenta como ejemplo la ruta ABDC que corresponde a cruzar 3 puentes iniciando en la región A, continuando en B, luego de B a D y para finalizar de D a C.

A partir de estas observaciones, Euler dedujo que para resolver el problema de los siete puentes de Königsberg, se requería una secuencia de ocho letras. De esta manera el problema se reduce a encontrar esta secuencia. Euler encontró que esta situación no era posible y describió los siguientes casos para determinar cuando una secuencia existe o no, utilizando la figura **1-6**[9]:

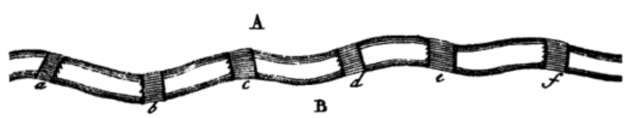


Figura 1-6: Representación de un problema simple propuesto por Euler

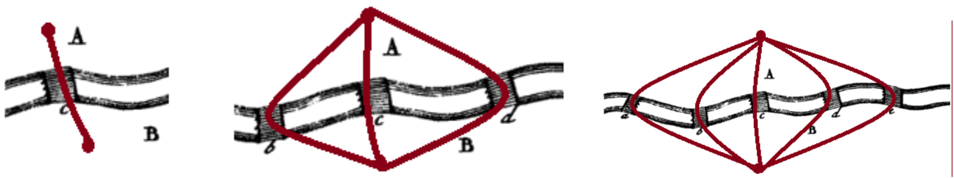
- si sólo hay un puente, la letra A aparece una vez en la secuencia. Inicie en la región A o B. Recorrido AB o BA (ver Figura 1.7(a)[10]).

- si hay tres puentes, A puede aparecer dos veces en la secuencia, independiente de donde se inicie. Recorrido ABAB o BABA (ver Figura 1.7(b)).

- si hay cinco puentes, A puede aparecer tres veces en la secuencia, independiente de donde se inicie. Recorrido ABABAB o BABABA (ver Figura 1.7(c)).

- en general, si hay una cantidad impar de puentes que unen dos regiones, la cantidad de veces que aparece A en la secuencia es la mitad del resultado de sumar el número de puentes con uno.

[8]Solución descrita en [19, 25]
[9]Imagen extraída de [25].
[10]Imagen extraída de [25].



(a) Un puente de la Región A a B. (b) Tres puentes de la región A a B. (c) Cinco puentes de la región A a B.

Figura 1-7: Puentes de la región A a B

Aplicando lo anterior a la solución del problema de Königsberg, la A debería aparecer tres veces, porque el número de puentes que tiene esta zona es cinco. La letra B estaría 2 veces, al igual que la C y D, porque cada zona tiene tres puentes. De esta manera se obtendría una secuencia de $3 + 2 + 2 + 2 = 9$ letras (Tabla **1-1**). Esta respuesta contradice el hecho de que para siete puentes, la secuencia que permite que cruzar cada puente una sóla vez tiene 8 letras. Concluyó así que el problema no tiene solución[11].

Regiones	N. de Puentes	N. de veces de letra en la secuencia
A	5	(5+1)/2=3
B	3	(3+1)/2=2
C	3	(3+1)/2= 2
D	3	(3+1)/2= 2

Tabla 1-1: Relación puentes y número de veces de la letra en la secuencia

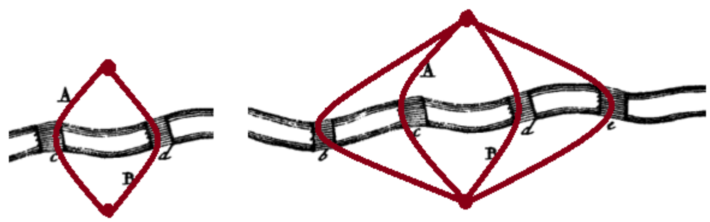
Después de dar respuesta a la situación inicial, Euler continuó el estudio de este problema buscando generalizar el resultado para cualquier número de puentes. Notó que el anterior argumento podía ser extendido tanto para cualquier arreglo de puentes y regiones, como para un número par o impar de puentes. Propuso las siguientes situaciones [25]:

- Si el número de puentes que conducen a la región A es par, entonces la cantidad de veces que A aparece en la secuencia de letras depende de si se inicia el recorrido en A, o en la otra región. Para el caso de dos puentes, indicó que al iniciar en A, la letra A aparece dos veces, y al iniciar en la otra región aparece una sóla vez, ABA o BAB (Figura 1.8(a)[12]).

[11]Esta forma de resolver el problema es diferente al que se presenta en diversas fuentes.
[12]Imagen extraída de [25].

- Para cuatro puentes, iniciando en A, se repite tres veces la letra A, e iniciando en la otra región se repite dos veces, ABABA o BABAB (Figura 1.8(b)).

- Con un número par de puentes e iniciando en la otra región, la letra A aparece en la secuencia un número de veces que equivale a la mitad del número de puentes. Pero, si se inicia en la región A, la letra A debe aparecer uno mas la mitad del número de puentes.



(a) Dos puente de la Región A a B. (b) cuautro puentes de la región A a B.

Figura 1-8: Puentes de la región A a B

Euler presentó un segundo ejemplo que involucra dos islas A y B, cuatro ríos y 15 puentes. No menciona que este corresponda a un lugar real, como el problema de los puentes de königsberg (Figura **1-9**[13]).

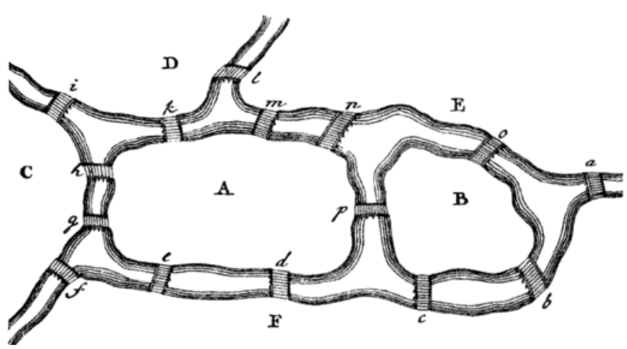


Figura 1-9: Ejemplo propuesto por Euler

Para indicar que la región tiene un número de puentes par, utilizó un asterisco (∗). La solución la presenta como se puede observar en la tabla **1-2**.

[13]Imagen extraída de [25].

Regiones	N. de Puentes	N. de veces de letra en la secuencia
A*	8	8/2=4
B*	4	4/2=2
C*	4	4/2= 2
D	3	(3+1)/2= 2
E	5	(5+1)/2= 3
F*	6	6/2= 3
		16

Tabla 1-2: Ejemplo. Relación puentes y número de veces de la letra en la secuencia

Este procedimiento le permitió concluir que el problema tiene por solución una secuencia de 16 letras, coherente con el hecho de tener 15 puentes. Propone el siguiente recorrido, indicando que no podría empezar en una región con asterisco ($*$):

$$EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBoElD$$

Euler finaliza escribiendo:

- Si el problema implica que cada puente se cruce una solo vez, entonces el problema siempre tiene solución, si cada región tiene un número par de puentes.

- Si dos de los números que representan la cantidad de puentes en cada región son impares, entonces el recorrido debería iniciar por una de estas áreas.

- Finalmente, menciona que si hay más de dos regiones con un número de puentes impar, no existe solución [25].

Pocos meses después de obtener respuesta a la situación de los puentes de Königsberg, Euler presentó un voluminoso informe a la Academia Rusa de San Petesburgo, confirmando la imposibilidad de encontrar la ruta. Luego publicó en 1736 un artículo titulado *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, donde presenta la solución para el caso general, sin utilizar, ni mencionar algún concepto de grafo. Es a partir de este momento que se considera el nacimiento de la Teoría de Grafos, y una de las primeras manifestaciones de una nueva geometría, en la que únicamente importa la posición de los objetos y no sus medidas [19].

En esta solución, Euler reemplazó las áreas de tierra por nodos y los puentes por vínculos. Esta figura que representó (ver Figura**1-10**[14])) se conoce hoy en día como un multigrafo[15]. Por otra parte, definió dos conceptos:

- *Un grafo tiene un camino de Euler si se pueden trazar arcos sin levantar la pluma y sin dibujar más de una vez cada arco.*
- *Un circuito de Euler obedece a la misma prescripción, con la exigencia agregada de finalizar en el mismo nodo en el que se comenzó.*[23]

Y halló los siguientes resultados que se mantienen hoy en día:

- *Un grafo con todos los vértices pares contienen un circuito de Euler, sea cual fuere su topología.*
- *Un grafo con dos vértices impares y algunos otros pares contiene un camino de Euler..*
- *Un grafo con más de dos vértices impares no contiene ningún camino y tampoco contiene ningún circuito de Euler.* [23]

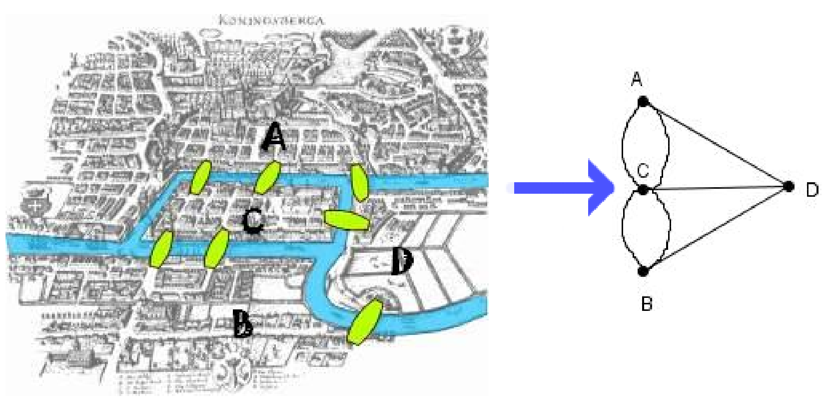


Figura 1-10: Problema Euleriano. Representación en grafo

1.2. Árboles

El objetivo de resolver los sistemas de ecuaciones lineales, que vinculan potenciales con intensidades de corrientes en redes eléctricas, contribuyó al desarrollo de otro concepto importante en esta teoría. Gustav Kirchhoff (1824-1877) en el año de 1847 publica su obra donde aparece por primera vez, una estructura que actualmente se conoce como

[14]Imagen extraída de https://goo.gl/BzGtn2.
[15]Definición presentada en el apartado 2.1. Grafo y tipos de Grafo

Árbol[16]. En 1857, Arthur Cayley(1821-1895), sin conocer los desarrollos anteriores, fue el primero en utilizar la palabra Árbol en el transcurso de sus investigaciones, para determinar el número de isómeros de hidrocarburos saturados con enlace simple [16, 7].

El problema que abordó Cayley consistía en determinar el número de árboles con n vértices de grado o valencia cuatro, y $2n+2$ de grado uno, resuelto en 1874 [7]. Posterior al trabajo de Cayley, se encuentran los aportes de: Carl Borchardt (1860), G. Polya, Grace Hopper (1951), Kenneth Iverson (1961) [16].

1.3. Problema de los cuatro colores

Este tercer problema que se retoma, al igual que el primero mencionando en este apartado (Problema Euleriano), es unos de los pocos problemas en matemáticas de los que es posible conocer su origen con precisión [27]. A continuación se describen algunos hechos de la cadena de cartas acerca de la conjetura de los cuatros colores, que marca el inicio del Teorema de los Cuatro Colores.

En 1852 un estudiante de Londres, **Francis Guthrie** (1831-1899), mientras coloreaba las regiones en un mapa de Inglaterra observó que *podía pintar el mapa utilizando solamente cuatro colores, de manera que dos países que comparten una frontera común no quedan con el mismo color*. Con el propósito de determinar si su observación se cumplía en cualquier mapa, le escribió a su hermano menor **Federico Guthrie**, que se encontraba estudiando en University College de Londres [17].

Ante la imposibilidad de comprobar esta hipotesis, Federico se la comentó a su profesor **Augustus De Morgan** (1806-1871), un famoso matemático del siglo XIX. De Morgan muy impresionado con esta conjetura y sin poderla resolver, le escribe en una carta el 23 de Octubre de 1852 a su amigo y colega Sir William Rowan Hamilton (1805-1865)[18] [27, 7, 18], quién ‘*‘mostrando más sabiduría que muchos otros matemáticos de la época se negó a involucrarse con el problema”*[19] [18, pág 108].

Esta conjetura permaneció sin abordarse hasta que el matemático y abogado Inglés Arthur Cayley (1821-1895), comentó el 13 de de julio de 1878 en la reunión de la London Mathematical Society que había sido incapaz de resolverlo, “constituyéndose de

[16]Sea G=(V,E) un grafo no dirigido sin lazos. El grafo G es un árbol si G es conexo y no contiene ciclos [16].

[17]Algunos libros y documentos mencionan que August Möbius (1849) fue el primero en mencionar la conjetura de los cuatro colores. En [18, 27] se menciona que este reconocimiento es erróneo.

[18]Hamilton (1805-1865), inventor de los cuaterniones.

[19]Traducción realiza por el autor.

esta manera en uno de los más famosos desafíos matemáticos"[7, pág 47]. En la revista American Journal Mathematics de 1879, Sir **Alfred Bray Kempe** (1849-1922), abogado y matemático de Londrés, publicó la primera prueba de la Conjetura de los Cuatro Colores. Probó que " *cualquier mapa en la superficie de una esfera puede ser de cuatro colores"*[20] [18, pág 109]. En este mismo documento, presentó un ejemplo de una coloración apropiada y no apropiada del mapa de los Estados Unidos de América (ver Figura **1-11** [21]). La representación no adecuada se debía a que las regiones de Idaho y Utah (estados de los Estados Unidos de América) comparten una frontera y tienen el mismo color. En la figura 1.11(b) se observa que estos estados son coloreados con el mismo color, en este caso, referenciada con el número 1.

(a) Mapa coloreado adecuadamente. (b) Mapa coloreado de manera inadecuada.

Figura 1-11: Mapa de Estados Unidos coloreado con cuatro colores

En su trabajo, Kempe plantea que cualquier mapa en el plano se puede representar de la siguiente manera: dentro de cada región se ubica un círculo llamado vértice, si dos regiones tiene una borde común, se une los vértices con una línea que atraviese el límite, estas líneas se llaman aristas. El resultado de la colección de aristas y vértices es un grafo, desde que dos aristas del grafo no se intersequen salvo en sus extremos se dice que es un grafo plano [18]. En la figura **1-12**[22], Kempe representa el mapa de Estados Unidos como Grafo Plano.

[20]Traducción realizada por el autor. Texto original: any map on the surface of a sphere can be four-colored.
[21]Imagen extraída de [18].
[22]Imagen extraída de [18].

Figura 1-12: Mapa de Estados Unidos representado como grafo plano

En 1890, **John Percy Heawood** (1861-1955) encontró un error en la prueba realizada por Kempe, y mostró que el teorema (*cualquier mapa en la superficie de una esfera puede ser de cuatro colores*) es valido para cinco colores. Después de varios años de estudios relacionados con este Teorema, en 1969 Ore y Stemple demostraron la validez para todo los mapas con a lo sumo 40 países. En el verano de 1976, luego de más de 1200 horas de resultados en un computador, Kenneth Appel y Wolfgang Haken declararon que los cuatro colores son suficientes. Para comprobar este teorema necesitaron 1936 casos, cada uno resuelto por un computador [7, 27].

Esta prueba no convenció a muchos matemáticos, ya que consideraban que es prácticamente imposible realizarla sin uso del ordenador. Independientemente de las diferentes posturas, finalmente se considera la prueba como válida. Posteriormente, en 1996, Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour y Robin Thomas hicieron una gran mejora en la prueba, reduciendo el conjunto de configuraciones a solamente 633 casos [27].

La búsqueda por encontrar una prueba válida para este teorema (*cualquier mapa en la superficie de una esfera puede ser de cuatro colores*) conllevó al desarrollo de temas como Topología combinatoria y Multigrafos Planares. Esta conjetura de los cuatro colores tuvo un gran recorrido que involucró grandes matemáticos en aproximadamente 150 años de historia. Actualmente algunos matemáticos consideran que esta última prueba no demuestra el teorema por no poderse realizar a mano.

La *fórmula poliedral de Euler* tiene sus orígenes en 1750 y afirma que: *“ si G es un poliedro (grafo planar) con C caras, A aristas y V vértices entonces, $C - A + V = 2$. Esta relación permite deducir que todo grafo planar tiene al menos un vértice de grado menor o igual que cinco”*. [7, pág 50]

1.4. Problema Hamiltoniano

En 1835 William Rowan Hamilton, brillante matemático que nació en Dublín, Irlanda (1805-1865), observó que los números complejos se pueden representar como pares ordenados de números reales. En un intento fallido de extender este hecho a triplas ordenadas, en 1843 descubre un conjunto de números de 4 dimensiones: $a+bi+cj+dk$ llamados Cuaterniones, que se convierte en el primer ejemplo de Algebra no conmutativa. En el puente de Broughman en el Royal Canal de Dublín, Hamilton escribió esta fórmula, que dedujo mientras lo recorría. Actualmente se encuentra una placa en este puente donde se resalta la fecha en que Hamilton descubrió esta fórmula (Figura **1-13**[23]) [13].

Como consecuencia de sus hallazgos, en 1856 Hamilton descubre un álgebra no conmutativa a la cual se refirió como *Icosian Calculus*. Los símbolos que utilizó en su cálculo los representa con movimientos entre los vértices de un dodecaedro. Surge así la invención del *Icosian Game*, que usó para ilustrar y popularizar su descubrimiento matemático. En 1857 presentó el juego en una reunión de la Asociación Británica en Dublín, y en 1859 Jhon Graves, amigo de Hamilton, fabricó una versión del Icosian Game en forma de una mesa pequeña con la forma de tablero del juego. En este mismo año vendió el juego por 25 guineas a la compañia John Jaques and Son [7, 13]. Dos versiones fueron fabricadas por esta empresa, una en un tablero plano y la otra versión viajero.

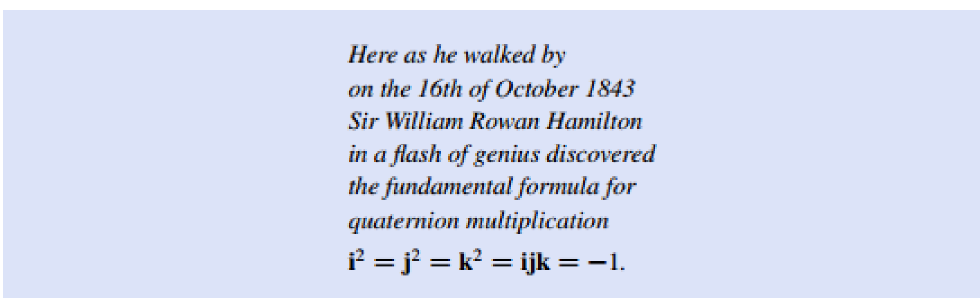

Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1.$

Figura 1-13: Mensaje en la placa ubicada en el puente de Broughman, Royal Canal de Dublín

1.4.1. Planteamiento del problema

El juego inventado por Hamilton (versión viajero) etiquetado como " NEW PUZZLE TRAVELLER'S DODECAHEDRON or A VOYAGE ROUND THE WORLD " planteaba que dado los 20 vértices del dodecaedro etiquetados con 20 ciudades[24], *"el*

[23] Imagen extraída de [13].

[24] B. Brussels, C. Canton, D. Delhi, F. Frankfort, G. Geneva, H. Hanover, J. Jeddo, K. Kashmere, L. London, M. Moscow, N. Naples, P. Paris, Q. Quebec, R. Rome, S. Stockholm, T. Toholsk, V.

jugador debía elegir una sucesión de vértices tal que incidiendo exactamente una vez en cada uno de ellos y utilizando solo aristas del dodecaedro le permitieran volver a la ciudad inicial, luego de dar la vuelta al mundo" [7]. En la figura **1-14**[25] se muestra la versión viajero del Icosian Game.

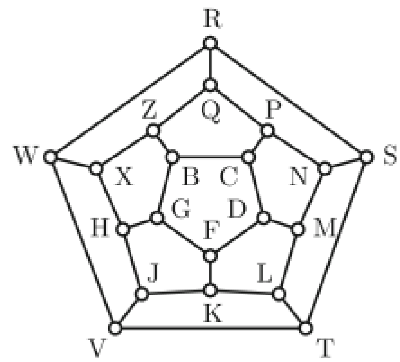


Figura 1-14: Versión del viajero del Icosian Game

Una solución a este problema se muestra en la figura 1.15(a), donde se recorren todos los vértices o ciudades una sola vez y se regresa a la ciudad de donde se partió. Cuando el viaje inicia y termina en la misma ciudad se llama ciclo Hamiltoniano, y si inicia pero no termina en la misma ciudad se llama camino Hamiltoniano (ver Figura **1-15**[26]) [20].

(a) Ciclo Hamiltoniano. (b) Camino Hamiltoniano.

Figura 1-15: Ciclo y camino Hamiltoniano

Vienna, W. Washington, X. Xenia y Z. Zanzibar

[25]Imagen extraída de [13].

[26]Imagen extraída de [13].

Se nota que hay cierta similitud entre los problemas Eulerianos y Hamiltonianos, pero para el caso Hamiltoniano, a diferencia de lo que sucede para el caso Euleriano, aún no se han dado condiciones realmente manejables que caractericen a los Hamiltonianos, ni algoritmos para construir esos recorridos, salvo en casos muy particulares [7].

1.5. Consolidación como teoría

La primera persona en designarle el nombre de "grafo" a esta estructura fue Silvester en 1878 al publicar sus estudios relacionados con teoría de invariantes en química. En 1922 Veblen estudia la Teoría de Grafos como parte de la Topología Combinatoria, y en 1936 aparece el primer libro sobre la Teoría de Grafos, escrito por el matemático Húngaro Dénes Konig (1884-1944), quien organizó y consolidó en un todo los diversos resultados que se habían obtenido en trabajos anteriores sin conexión aparente. Entre los muchos investigadores contemporáneos importantes en el estudio y desarrollo en esta área se encuentran: Claude Berge, V. Chvátal, Paul Erdös, Laslo Lovász, W. Tutte y Hassler Whitney [7, 16].

Son muchas las situaciones de la vida real que pueden ser representadas por medio de grafos, y estas se encuentran presentes, por ejemplo, en la ingeniería, economía, psicología, informática y química; usualmente bajo diferentes nombres como redes, sociograma, organigrama, diagramas de flujo y estructuras moleculares [7].

Representar una situación por medio de un grafo es fundamental y no siempre es evidente a partir de los datos, por lo que es importante toda la información adicional del problema. En algunas contextos, el orden puede ser o no, un elemento a tener en cuenta y que conlleva a determinadas nociones, por ejemplo [7]:

- *Nociones orientadas o dirigidas.* Se presenta cuando hay situaciones de jerarquía u orden. A es superior jerárquico de B, o A es anterior a B.

- *Nociones no dirigidas.* Se presenta cuando hay situaciones que no presentan algún orden o jerarquía. A es amigo de B, o A es contemporáneo de B.

Por otra parte, es posible, que en determinadas situaciones sea necesario asociar a los elementos del grafo nombres, valores (costo, tiempo, capacidad, distancia, etc.), símbolos. Los grafos se pueden representar de diversas maneras teniendo en cuenta el número de elementos. Si son reducidos la cantidad de elementos, la representación geométrica es adecuada, en caso contrario, se pueden representar por medio de listas, tablas, matrices, etc [7].

1.6. Pensamiento visual

El pensamiento visual, que en general se utiliza en conjunción con el no visual, incluye representaciones visuales externas como diagramas, matrices de símbolos, y pensamientos con imágenes visuales internas. Este pensamiento visual ha tenido varias perspectivas en la historia, a finales del siglo XIX, el uso de representaciones gráficas en pruebas de teoremas no era aceptada. Posteriormente, a finales del siglo XX, esta consideración cambia y se acepta la visualización, el uso de imágenes y diagramas como medio para complementar diferentes resultados matemáticos [14].

El uso de diagramas se considera poco fiable debido a que este puede representar situaciones con alguna propiedad descrita o no, hecho que puede conllevar a una generalización injustificada. Si bien es cierto que un argumento visual no es una forma de demostrar la verdad de una conclusión, sí constituye una manera de descubrirla. La prueba del teorema del valor intermedio para los números reales, realizado por Bolzano en 1817, es un ejemplo de esta postura ya que utiliza inicialmente los diagramas para representar la situación antes de realizar una prueba estrictamente analítica [14].

Otra mirada en el uso del pensamiento visual, y quizás más valiosa, es aquella que se utiliza para el descubrimiento de una verdad utilizando el conocimiento previo, y es el que se pone en práctica en la realización de la secuencia de actividades planteadas en este trabajo. En el desarrollo de la teoría de grupos geométricos, este tipo de pensamiento tuvo un gran importancia ya que se necesitó de este para descubrir los grafos de Cayley [14].

Las representaciones visuales pueden ayudar a entender definiciones y argumentos facilitando así la comprensión de la temática. Por otra parte, temas matemáticos como Teoría de Grafos y Teoría de Nudos tiene representaciones visuales naturales que generan un conjunto de hechos matemáticos. En modo de conclusión [14]:

- Se debe prestar atención a no sobregeneralizar cuando se utilizan imágenes sin tener en cuenta si estas son verdaderas para otros tipos de representaciones.
- El pensamiento visual permite activar recursos cognitivos de cada persona, conllevando así al descubrimiento de una verdad matemática.
- Las ilustraciones visuales pueden ser muy útiles para proporcionar ejemplos y contraejemplos de conceptos analíticos.

2 Teoría de Grafos

2.1. Grafo y tipos de grafo

En este apartado se realiza una breve introducción a los conceptos propios de la Teoría de Grafos, los cuales fundamentan el desarrollo del presente trabajo. Se presentan definiciones, proposiciones y ejemplos que ilustren cada uno de los conceptos. Se inicia con la definición del concepto base de esta teoría: *Grafo*

Definición 2.1 *Definición de grafo.*

Diestel [10] lo define como un par de conjuntos $G = (V, E)$, donde el conjunto V representa los vértices (nodos o puntos) del grafo G y los elementos de E son las aristas (o lineas).

En estos conjuntos los elementos de E son parejas de elementos de V, asi $A \subseteq [V]^2$ y $V \cap E = \emptyset$.

Para trazar un grafo, se dibujan puntos que corresponden a los vértices y una línea (que une dos vértices) representando las aristas. La forma como los puntos y líneas son dibujados se considera irrelevante. Si una arista une un vértice consigo mismo recibe el nombre de *lazo*.

En la figura **2-1** se presenta dos formas de representar el grafo G con $V = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ y $E = \{\{a, b\},\ \{b, c\},\ \{c, d\},\ \{b, d\},\ \{a, d\}\}$.

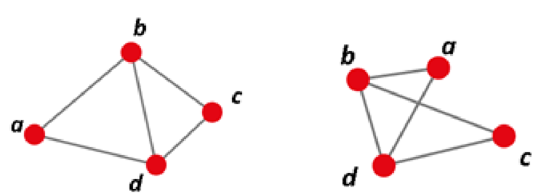


Figura 2-1: Ejemplo de grafo

Los vértices se pueden representar con letras (por ejemplo, $a,\ b,\ c,\ \ldots, v_1,\ , v_2,\ v_3,\ \ldots$) o números ($1,\ 2,\ 3,\ \ldots$). De forma similar se puede notar las aristas con parejas de letras (por ejemplo, {a,b}, ab), letras, letras con subíndices ($e_1,\ e_2,\ e_3,\ \ldots$) o números (1, 2, 3, ...) [24].

En este apartado se utilizaran las letras $a,\ b,\ c,\ \ldots, v_1,\ , v_2,\ v_3,\ \ldots$ para notar los vértices y las letras $e_1,\ e_2,\ e_3,\ \ldots$, o parejas {a,b} para referirnos a las aristas.

Entre los distintos grafos se encuentran grafos simples, grafos multiples o multigrafos, grafos dirigidos o digrafos.

Definición 2.2 *Multigrafo.*

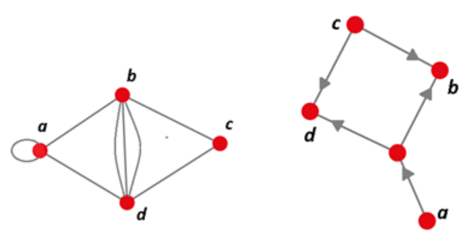
Un grafo G =(V, E) es multigrafo si existen $a,\ b \in V,\ a \neq b$, con dos o más aristas de la forma {a,b}. Son grafos en los que hay pares de vértices unidos por más de una arista [16]. Se utiliza el concepto de *aristas paralelas*, para referirse a dos aristas que tienen los mismos extremos. En la figura 2.2(a) se observa un multigrafo con lazo.

Definición 2.3 *Grafo dirigido o digrafo.*

Un grafo G =(V, E) es dirigido si existen dos relaciones: $Inicial(init)$ y $Terminal, (ter)$. Cada relación asigna a cada arista un vértice inicial y un vértice final, con $ini : E \rightarrow V$ y $ter : E \rightarrow V$. Un grafo dirigido puede tener varias aristas entre los mismos dos vértices [10]. En la figura 2.2(b) se presenta un ejemplo de digrafo.

Definición 2.4 *Grafo simple.*

Es un grafo no dirigido, que no tiene aristas paralelas y no tiene lazos. La figura **2-1** es un ejemplo de grafo simple. [28]



(a) Multigrafo con Lazo (b) Digrafo

Figura 2-2: Grafos

2.2. Grado de un vértice

Un vértice v, es incidente con una arista e si $v \in e$, es decir si v es extremo de la arista e, de esta manera e es una arista en v [10].

Definición 2.5 *Grado de un vértice.*

Un grado o valencia de un vértice v, notado por $d(v)$ es el número de aristas que inciden en v. Si el $d(v)= 0$, v es un vértice aislado.

Ejemplo,

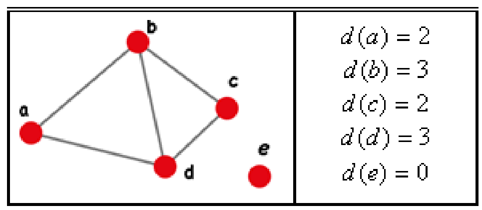


Figura 2-3: Grado de los vértices de un grafo

Si todos los vértices de G tienen el mismo grado k, se dice que el grafo G es $k-regular$ o $regular$ [10].

Ejemplo,

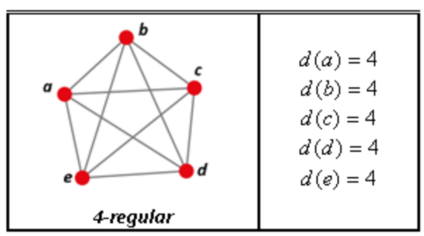


Figura 2-4: Grafo $4-regular$

El primer Teorema de la Teoría de Grafos fue planteado en 1736 por Leonhard Euler, quién observó lo siguiente [1]:

Teorema 2.1 *Teorema de Euler.* [1]

Si $G = (V, E)$ es un grafo o multigrafo no dirigido donde $V = \{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\}$ y $E = \{e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_m\}$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

[1] Teorema referenciado en libros como: Lema de Apretón de manos.

m, número de aristas [2].

Demostración. Si se considera cada arista $\{a, b\}$ del grafo G, esta contribuye con una unidad al $d(a)$ y $d(b)$, de modo que cada arista contribuye en 2 unidades a $\sum_{i=1}^{n} d(v_i)$. Por lo que $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$ [3].

Del anterior teorema se deduce la siguiente proposición.

Proposición 2.1 *En un grafo, el número de vértices impar, es siempre par.*

Demostración. Sea el grafo G y el conjunto de vértices $V = \{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\}$ con $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k$ de grado impar y $v_{k+1},\ v_{k+2},\ \ldots,\ v_n$ de grado par. Por el teorema anterior, se establece que

$$d(v_1) + d(v_2) + \ldots + d(v_k)) + (d(v_{k+1}) + \ldots + d(v_n) = 2m. \tag{2-1}$$

Como cada $d(v_i)$, con $k + 1 \leq i \leq n$ es par, se tiene que

$$(d(v_{k+1}) + \ldots + d(v_n)) = 2p \tag{2-2}$$

sustituyendo 2-2 en 2-1

$$(d(v_1) + d(v_2) + \ldots + d(v_k)) + 2p = 2m.$$

de donde se deduce que

$$(d(v_1) + d(v_2) + \ldots + d(v_k)) = 2m - 2p = 2(m - p).$$

Por lo tanto $(d(v_1) + d(v_2) + \ldots + d(v_k))$, suma de números impares, es par, que es posible solamente si hay una cantidad par de números impares.

2.3. Caminos, recorridos, ciclos

Ahora que se conocen diferentes tipos de grafos, así como el grado de un vértice, se presenta en esta sección las formas en que se pueden relacionar vértices y aristas, formando así diferentes conexiones en un grafo: camino, circuito y ciclo.

[2] La cantidad de vértices de un grafo se llama orden del grafo, y la cantidad de aristas se llama tamaño del grafo.

[3] Demostración tomada de [16, pág 550].

Definición 2.6 *Camino*

En un grafo $G = (V, E)$, un camino es una sucesión alternada finita $v_0e_0v_1e_1 \dots e_{k-1}v_k$ de vértices y aristas en G tal que $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ para todo $i < k$. La longitud de un camino es k, que representa el número de aristas que hay en el camino. Si $v_0 = v_k$ se dice que el camino es *cerrado* [16]. Para notar un camino se puede utilizar solamente la secuencia de vértices, $v_0v_1v_2 \dots v_k$.

Ejemplo,

En el siguiente grafo, la sucesión de vértices $gfabcfed$ representa un camino, y la sucesión $cdehgfc$ corresponde a un *camino cerrado.*

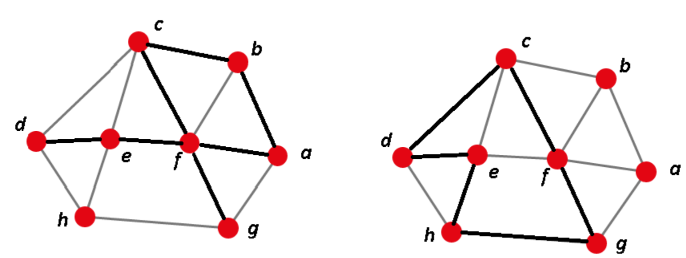


Figura 2-5: Ejemplo de caminos

Definición 2.7 *Recorrido*

Un *recorrido* es un grafo $P = (V, E)$ de la forma

$$V = \{v_0,\ v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_k\} \text{ y } E = \{v_0v_1,\ v_1v_2,\ v_2v_3,\ \dots, v_{k-1}v_k\}.$$

donde todos v_i son distintos. Los vértices v_0 y v_k se denominan *finales*, y los vértices $v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_{k-1}$ se llaman interiores.

El número de aristas del recorrido es la *longitud*, y un recorrido de longitud k, se nota P^k [10]. En la figura **2-6** se representa un $P = P^6$ en G.

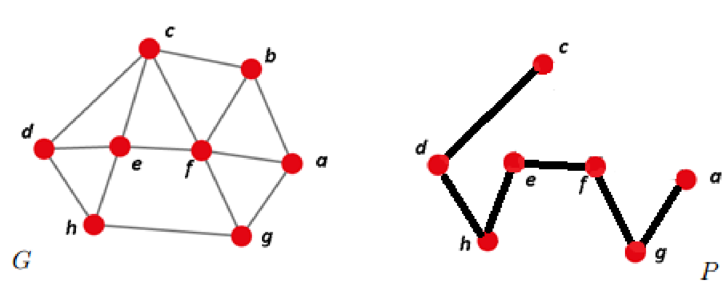


Figura 2-6: Recorrido $P = P^6$ en G

Definición 2.8 *Ciclo*

Si $P = v_0 \dots v_{k-1}$ es un recorrido y $k \geq 3$, entonces el grafo $C := P + v_{k-1}v_0$ es llamado un *ciclo*. La longitud del ciclo es el número de aristas, el ciclo de longitud se llama $k-$*ciclo*, y se representa por C^k [10]. Un ciclo C^8 se presenta a continuación (Figura **2-7**).

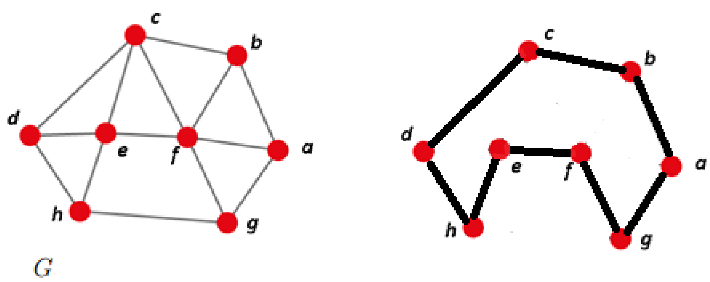


Figura 2-7: Ciclo C^8

2.4. Grafo conexo

En este apartado se presenta una de las propiedades más elementales que un grafo puede tener.

Definición 2.9 *Grafo conexo*

Un grafo G es conexo si para cada $a, b \in V(G)$ existen un recorrido en G, con a, b vértices finales [9].

En la figura **2-8** el grafo G_1 es conexo y el grafo G_2 no es conexo.

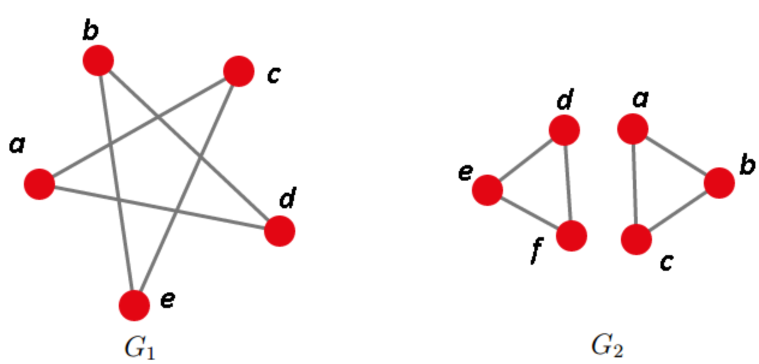


Figura 2-8: Grafo conexo y no conexo

2.5. Circuito Euleriano

El nombre de este circuito surge del hecho que Leonhard Euler fue la primera persona en solucionar el famoso problema de los puentes de Königsberg. Este problema plantea la posibilidad de cruzar cada uno de los siete puentes de esta ciudad exactamente una vez y regresar al punto de partida [28] [4].

Definición 2.10 *Circuito Euleriano*

Un circuito Euleriano, en un grafo G, es un camino cerrado que atraviesa cada arista del grafo exactamente una vez. Un grafo es *Euleriano* si admite un circuito Euleriano [10].

En la siguiente figura se presenta un grafo G con circuito Euleriano $iabcifcdefghi$. Este circuito es un camino cerrado y sin aristas repetidas.

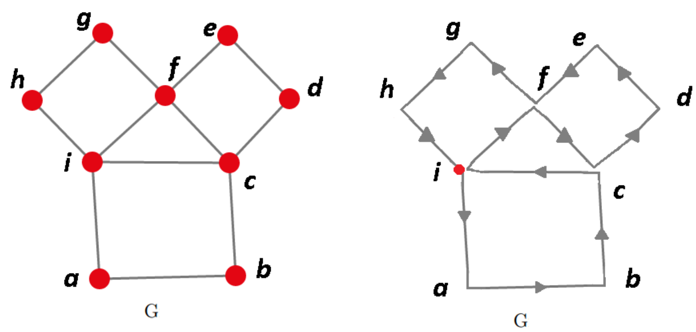


Figura 2-9: Grafo Euleriano

Teorema 2.2 (*Euler 1736*). *Un Grafo conexo G es Euleriano si y sólo si el grado de cada vértice de G es par.*

Demostración. (i) *Si un grafo conexo G es Euleriano, entonces el grado de cada vértice es par.*

En un grafo Euleriano G, sea c el vértice inicial del circuito Euleriano. Para cualquier otro vértice v de G, cada vez que el circuito llega a v debe partir de este vértice. De esta manera, el circuito pasa por dos aristas incidentes con v. En cada caso, se contribuye con dos unidades al $d(v)$.

[4]Información detallada en el *Capítulo 1. Aspecto Histórico.*

Como v no es el punto inicial y cada arista incidente a v se recorre una sola vez, se obtienen 2 unidades cada vez que el circuito pase por v, de modo que $d(v)$ es par.

Para el vértice inicial c la primera arista del circuito debe ser distinta de la última, y como cualquier otro paso por c produce dos unidades para $d(c)$, tenemos que $d(c)$ es par. Por lo tanto, todas las aristas en un grafo Euleriano son de grado par [5].

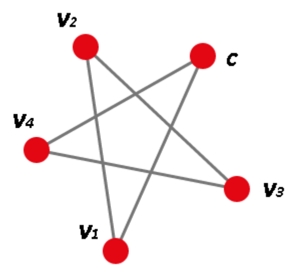


Figura 2-10: Grafo. Cada vértice tiene grado par

(ii) Si en el grafo conexo G el grado de cada vértice es par, entonces el grafo es Euleriano.

Sea G un grafo conexo con todos los vértices de grado par, y sea

$$W = v_0 e_0 \dots e_{l-1} v_l$$

el más largo camino en G usando las aristas solamente una vez. Dado que W no puede extenderse, este camino contiene todos las aristas hasta v_l. Por hipótesis, cada vértice le inciden dos aristas. Por lo tanto $v_l = v_0$, así que W es un camino cerrado.

Supongamos que W no es un Circuito Euleriano. entonces G tiene una arista e que no pertenece a W pero incide en un vértice de W, se dice $e = uv_i$, debido a que el grafo G es conexo. Luego el camino

$$uev_i e_i \dots e_{l-1} v_l e_0 \dots e_{i-1} v_i$$

es más largo que W, lo que conlleva a una contradicción [6].

[5] Demostración tomada de [16].
[6] Demostración tomada de [10].

2.6. Grafo plano

Un grafo G se puede representar en una pieza de papel de diferentes formas. A continuación se dibuja de tres formas diferentes el grafo G con E={ $\{ab\}$, $\{bc\}$, $\{cd\}$, $\{da\}$, $\{ac\}$, $\{bd\}$ }.

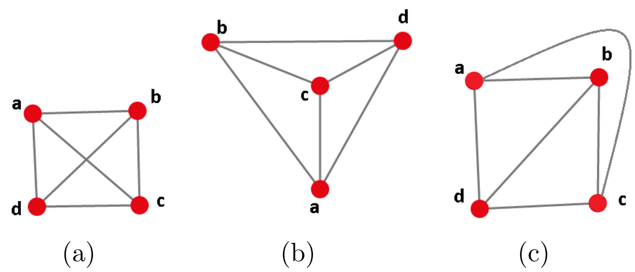


Figura 2-11: Representaciones del grafo G con $E = \{\{ab\}, \{bc\}, \{cd\}, \{da\}, \{ac\}, \{bd\}\}$

Los grafos 2.11(b) y 2.11(c) que se representaron en el plano tiene como característica particular que no hay intersección de las aristas salvo en los vértices. En la representación 2.11(a) las aristas $\{ac\}, \{bd\}$ se cortan. Al grafo G se le denomina *Grafo Plano* ya que existe una representación en la que sus aristas no se cortan.

Definición 2.11 *Grafo plano*

Un *grafo plano* es un par de conjuntos finitos (V, E), con las siguientes propiedades [10]:
(i) $V \subseteq R^2$;
(ii) cada arista es una linea entre dos vértices
(iii) diferentes aristas tiene diferentes conjuntos finales
(iv) las aristas no contiene vértices y puntos de cualquier otra arista.

Los grafos que se presentan a continuación no son planos debido a que no es posible representarlos de manera que cumpla las condiciones dadas.

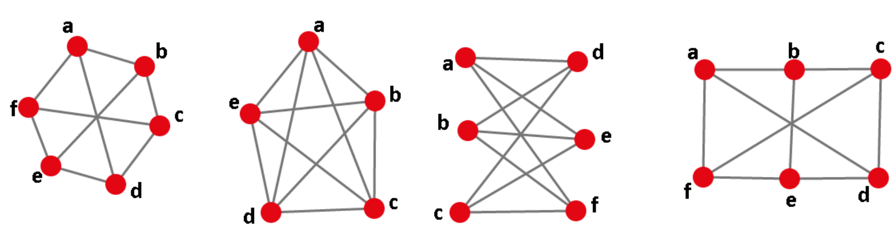


Figura 2-12: Grafos no planos

El siguiente Teorema es un resultado del trabajo de Leonhard Euler (1752). Este Teorema relaciona el número de vértices, lados y regiones en un grafo plano.

Teorema 2.3 (*Fórmula de Euler*). *Sea G un grafo conexo plano con v vértices, e aristas y r regiones. Entonces*

$$v - e + r = 2$$

.

Demostración. La demostración realiza por inducción, planteada en [16], es la siguiente:

(i) Comprobar que se cumple para $e = 0$ y $e = 1$. Para $e = 0$, se tiene que $v = 1$ y $r = 1$ (ver grafo 2.13(a)). Por lo tanto

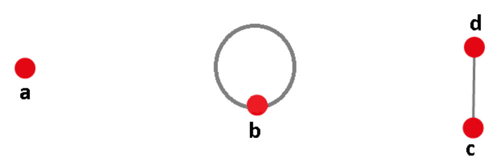
$$v - e + r = 1 - 0 + 1 = 2$$

Para $e = 1$, se puede obtener dos casos: $v = 2$ y $r = 1$ (ver grafo 2.13(b)), de donde,

$$v - e + r = 2 - 1 + 1 = 2$$

o $v = 1$ y $r = 2$ (ver grafo 2.13(c)), obteniendo

$$v - e + r = 1 - 1 + 2 = 2$$



(a) (b) (c)

Figura 2-13: Grafo con $e = 0$ y $e = 1$

(ii) Supongamos que la fórmula es verdadera para cualquier grafo con e aristas, donde $0 \leq e \leq k$ y $v - e + r = 2$

(iii) Probaremos el resultado para $e = k + 1$ aristas.

Si $G = (V, E)$ es un grafo con v vértices, r regiones y $e = k + 1$ aristas, y sean $a, b \in V$ con $\{a, b\} \in E$. Se define el subgrafo H de G el cual se obtiene al eliminar la arista $\{a, b\}$ de G. Se puede escribir como $H = G - \{a, b\}$ o $G = H + \{a, b\}$. El grafo H que se puede obtener, depende del hecho si H es conexo o disconexo. Se analizan los dos casos.

Caso 1. Si el grafo H es conexo, el grafo G se puede obtener dibujando un lazo $\{a, a\}$ o una arista $\{a, b\}$ uniendo dos vértices distintos en H (ver Figura **2-14**). Partiendo del hecho que G tiene r regiones, el grafo H tiene $r - 1$ regiones debido a que en H no se encuentra una arista que divide una región en 2. De esta manera H tiene v vértices, k aristas y $r - 1$ regiones, y aplicando la hipótesis de inducción para el grafo H se tiene que:

$$v - k + (r - 1) = 2$$

que equivale a

$$2 = v - (k + 1) + r$$

y por hipótesis $e = k + 1$ se tiene que

$$2 = v - (k + 1) + r = v - e + r$$

Demostrando así que el teorema de Euler se cumple para G.

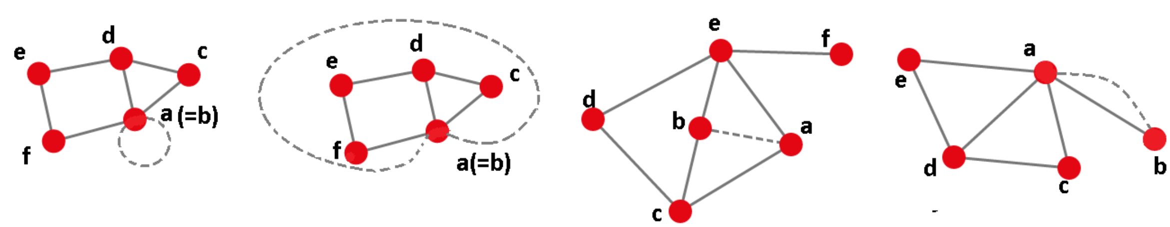


Figura 2-14: Grafos $G = H + \{a, b\}$, H conexo

Caso 2. Si el grafo $H = G - \{a, b\}$ es disconexo, con v vértices, k aristas y r regiones, se tiene que H tiene dos componentes H_1 y H_2, donde H_i tiene v_i vértices, e_i aristas y r_i regiones, para $i = 1, 2$. Adémas $v_1 + v_2 = v$, $e_1 + e_2 = k = e - 1$ y $r_1 + r_2 = r + 1$ ya que cada uno determina una región infinita (ver Figura **2-15**). Por hipótesis de inducción a H_1 y H_2 se tiene que

$$v_1 - e_1 + r_1 = 2 \qquad y \qquad v_2 - e_2 + r_2 = 2$$

En consecuencia, $(v_1 + v_2) - (e - 1) + (r + 1) = 4$, y de esto se obtiene $v - e + 1 + r + 1 = v - e + r = 2$. Demostrando así que el teorema de Euler se cumple para G.

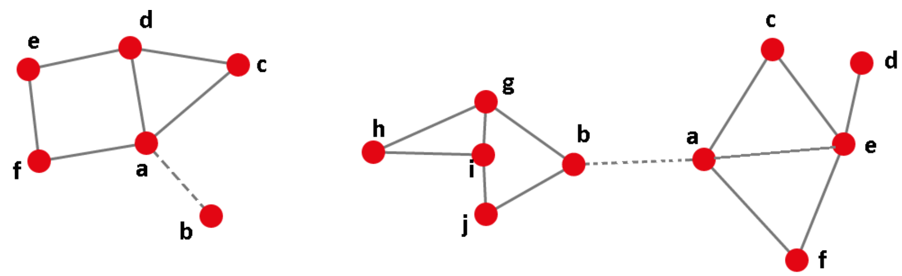


Figura 2-15: Grafos $G = H + \{a, b\}$, H disconexo

2.7. Teoría de Grafos en la enseñanza

La incorporación de tópicos de la Teoría de Grafos en la enseñanza de las matemáticas a nivel de básica primaria y secundaria, ha sido objeto de investigación en los últimos años. Algunos de estos estudios realizados en Colombia, Argentina, República Checa y Estados Unidos, han aportado valiosas conclusiones y recomendaciones para innovar en el abordaje de este tema.

Braicovich [2, pág 805] en su estudio que realizó concluye: *"El trabajo con grafos permite que los alumnos modelicen matemáticamente distintas situaciones de la vida real. La modelización es un proceso clave que, en general, está muy poco trabajado en el aula"*. De igual manera en el estudio realizado por Vergel et al. [26, pág 450] plantean: *"Las actividades resultaron retadoras e interesantes para los estudiantes. Con esta actividad se constató que es posible trabajar contenidos de topología y grafos a nivel comprensible para estudiantes de educación básica, garantizando la comprensión de los contenidos por parte de los mismos"*.

La Teoría de Grafos, como herramienta didáctica, potencia el pensamiento creativo y da al reconocimiento de regularidades y la formulación de conjeturas. A este respecto Coriat, citado en [8, pág 2], plantea: *"Por medio de los grafos se facilita el acceso de los alumnos a sus propias estrategias de aprendizaje, no porque estas se describan necesariamente mediante grafos, sino porque el ir y venir entre situaciones y estructuras puede facilitar la toma de conciencia de los propios procesos cognitivos"*.

En el estudio realizado por Lessner, "Graph Theory in High School Education[7]", de la Universidad Carolina, Praga, República Checa, menciona que los grafos representan una nueva forma de trabajar, diferente de los números u otras estructuras clásicas de las matemáticas presentes en la escuela secundaria. Los grafos requieren una forma diferente de pensar, que permitiría a los estudiantes con bajo rendimiento en matemáticas, una nueva oportunidad de ponerse al día. A pesar de que la estructura es diferente

[7]Estudiantes de 15-18 años de edad, en su 10-13 año de estudio

y puede ser sobre todo de dibujo, el razonamiento detrás es el mismo que en otras estructuras [17, pág 3].

Buhler en su estudio "Spock, Euler, and Madison: Graph Theory in the Classroom" concluye, entre otras, que la Teoría de Grafos es la matemática de las conexiones. Nuestro mundo está lleno de conexiones, de modo que, la teoría de grafos es una de las formas más aplicables de las matemáticas. Esto hace que la Teoría de Grafos sea tan atractiva para enseñar en una clase secundaria. Otro atractivo es que es conceptualmente simple. Los estudiantes pueden entender fácilmente una serie de puntos y líneas. Son conceptos fáciles de graficar, pero al mismo tiempo resolver problemas básicos puede ser excesivamente difícil. Este desafío ofrece oportunidades para que los estudiantes construyan sus habilidades de razonamiento matemático y se preparen para las matemáticas universitarias [4, pág 12].

Braicovich [2], hace referencia a cuatro razones sobre la pertinencia de introducir algunos conceptos de la Teoría de Grafos en la escuela. Estas son:

- Referido a la aplicabilidad: en los años recientes varios temas de esta teoría han sido utilizados creando distintos modelos en distintas áreas.
- Referido a la accesibilidad: para entender las aplicaciones del tema en muchas situaciones es suficiente tener conocimientos de aritmética y en otras solamente de álgebra elemental.
- Referido a la atracción: existen algunas situaciones sencillas de resolver y también otras que hacen que los alumnos deban explorar para poder llegar a los resultados.
- Referido a la adecuación: a aquellos estudiantes que no tengan problemas en matemáticas les dará mayor preparación para las carreras que elijan y para los que no les va bien en esta disciplina es apropiada porque les da la posibilidad de un nuevo comienzo.

3 Patrones Gráficos y Numéricos

3.1. Definición de patrones

En este apartado se realiza una aproximación a los conceptos relacionados con patrones y cómo son involucrados en la enseñanza. Portan, A y Costa, B [22] definen de la siguiente manera un patrón.

Definición 3.1 *Patrón*

Un patrón es una sucesión de signos que pueden ser orales, gestuales, gráficos, etc; construidos a partir de reglas o algoritmos de repetición o recurrencia [22]. Se puden clasificar en numéricos pictóricos, geométricos, computacionales, informáticos, lineales y cuadráticos [3].

Los patrones de repetición se producen cuando los elementos que hacen parte del núcleo o estructura de base se presentan de forma periódica. Por ejemplo, si el núcleo está compuesto por dos elementos, el patrón de repetición puede ser:

- Repetir los dos elementos alternadamente: 2, 3, 2, 3, ... o azul, rojo, azul, rojo, ...
- Repetir dos veces un elemento y a continuación dos veces el otro elemento: 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, ... o círculo, círculo, cuadrado, cuadrado, círculo, círculo, ...

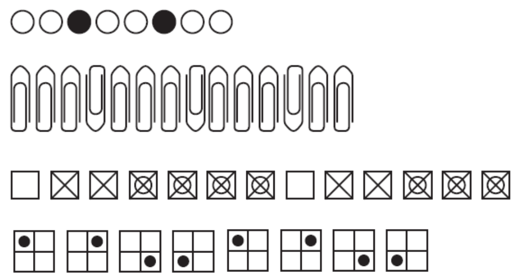
Los patrones de recurrencia se presentan cuando los elementos cambian siguiendo una regularidad. Cada término de esta sucesión se puede expresar en función de los anteriores siguiendo una ley de formación. Por ejemplo,

- El patrón 1, 2, 3, 4, 5, ... Cada término se obtiene adicionándole uno al anterior.
- El patrón 2, 6, 12, 20, ... Cada término se obtiene adicionando los números pares, así: 2, 2+4, 2+4+6, 2+4+6+8, ...
- El patrón $\leftarrow \uparrow \rightarrow \downarrow$. Cada témino se obtiene de girar la flecha anterior 90°.

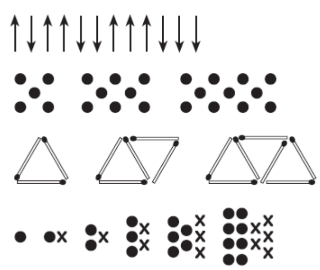
Ejemplos de patrones

Algunos ejemplos de patrones gráficos y numéricos se presentan a continuación[1].

Patrones gráficos de repetición



Patrones gráficos de recurrencia



Patrones numéricos de repetición

5, 7, 9, 5, 7, 5, 7, 9,

2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, .

Patrones numéricos de recurrencia

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16,

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35,

[1] Imágenes extraidas de
http:// www.concepcionsscc.cl/ssccintranet/sites/default/files/guias_unidad_6_patrones_y_algebra_1.pdf.

Definición 3.2 *Generalización*

La generalización se entiende como el procedimiento de pasar de casos particulares a una propiedad común o transferir propiedades de una situación a otra. Este proceso hace parte del razonamiento inductivo [3].

"La generalización se construye gracias a la abstracción de invariantes esenciales. Las propiedades abstraídas son más bien relaciones entre objetos que objetos mismos, y la descontextualización es el proceso principal de la generalización" [3, pág 9].

Definición 3.3 *Inducción*

Pólya citado en [6] define que la inducción es un modo de razonar que conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de casos particulares y sus combinaciones. Ortiz citado en [6] menciona que la inducción trata de proporcionar regularidad y coherencia a los datos obtenidos a través de la observación; los procedimientos que utiliza son la generalización, la particularización y la analogía, de hecho muchos resultados matemáticos se han obtenido inicialmente por inducción y posteriormente han sido demostrados [2].

Para un resolutor de problemas ideal, Pólya, citado en [5, pág 74] identifica que el proceso de inducción se inicia trabajando con casos particulares y concretos, se pasa por la formulación de una conjetura, llegando a la comprobación de la conjetura con nuevos casos particulares.

La inducción es un método para descubrir propiedades tras la observación de los fenómenos, la regularidad que presentan dichos fenómenos y la coherencia que se les supone a los mismos. La inducción empieza frecuentemente con alguna observación [5, pág 74].

Cañadas [5, pág 74] en su trabajo de investigación propone una aproximación de modelo de razonamiento inductivo compuesto por siete pasos:

1. *Trabajo con casos particulares.* Los casos particulares son los ejemplos o casos concretos con los que se inicia un proceso inductivo.

2. *Organización de casos particulares.* Este paso se considera como parte del trabajo con los casos particulares. Se observa la influencia que puede tener la disposición de los casos particulares en la identificación de patrón y en otros pasos sucesivos.

[2] La conjetura de los cuatro colores, es un ejemplo de esta observación. Problema planteado en el capítulo 2 de este documento.

3. *Identificación de patrones.* Cuando a partir de una regularidad observada se busca un patrón que sea válido para más casos, se ha hablado de generalización. Los patrones matemáticos se han considerado como la estructura que permite modelizar las reiteraciones que se observan en el entorno.

4. *Formulación de conjeturas.* Pólya considera la formulación de conjeturas como segundo paso en el proceso de razonamiento inductivo. Este autor, así como Lakatos consideran que una conjetura es una proposición que se prevé verdadera pero que aún no ha sido sometida a exámen. Este exámen puede tener como resultado su aceptación o su rechazo.

5. *Justificación.* Ferrater (1988) entiende el término justificación en dos sentidos. Por un lado considera la serie de operaciones que se llevan a cabo para reconstruir lógicamente teorías científicas. Por otro lado, considera que son los razonamientos que, obedeciendo leyes lógicas, se producen cuando se dan razones, las llamadas a menudo "buenas razones", para demostrar que la norma o el imperativo moral son aceptables o plausibles.

6. *Generalización.* Cuando la conjetura se expresa de tal manera que se refiere a todos los casos de una clase determinada, se habla de generalización. Este es el principal objetivo del razonamiento inductivo, por el que se le considera generador de conocimiento, en particular de conocimiento matemático.

7. *Demostración.* En algunos procesos de validación predomina el razonamiento inductivo. Los procesos de validación informales son comprobaciones que se realizan con casos particulares o falsaciones desde la perspectiva que presenta Popper. Para comprobar la validez de una conjetura desde el punto de vista de la verificación matemática, es necesario recurrir a procesos deductivos, a la demostración formal.

3.2. Patrones y su enseñanza

En el proceso de enseñanza de los patrones se debe tener en cuenta, entre otros, los siguientes aspectos:

- La habilidad de reconocer patrones, muy frecuentes en matemáticas, ayuda a la comprensión intuitiva de expresiones y relaciones que se pueden usar en estudios posteriores de matemáticas [6].

- En la identificación de patrones intervienen situaciones como reconocimiento de semejanzas y diferencias, identificación de rasgos que caracterizan la secuencia y práctica de procedimientos de reproducción (copia de un patrón dado), de identificación (detección de la regularidad), de extensión (dado una parte de la sucesión extenderla de acuerdo a las características), de extrapolación (completar partes vacias) y de traslación (copiar el patrón sobre otros elementos) [22].

Las actividades con patrones se pueden formular de modo que permita el acercamiento de los estudiantes al proceso utilizado en las ciencias: planteamiento, comunicación, comprobación y refutación de hipótesis.

- Las actividades con patrones revisten la característica de la resolución de problemas ya que pueden ser formuladas de modo que el alumno las reconozca como situaciones problemáticas, y así estimular la generación, comunicación, comprobación, refutación o confirmación de hipótesis, (lo cual acerca a los alumnos al modo de pensamiento que el estudio de la ciencia requiere) [22, pág 8].

- El uso de patrones no se debe involucrar en actividades mecánicas, por el contrario, a partir de diferentes elementos que se les brinden a los estudiantes, ellos construyan recursos que les facilite identificar regularidades. Estas actividades se pueden plantear a lo largo del año y relacionarlas con diferentes temas de aritmética, geometría, estadística, o de otras áreas como sociales, física, etc. [22, 3]. En [3] se menciona que los docentes no utilizan contextos que permitan evidenciar la aplicabilidad de la propiedad obtenida. Además plantean situaciones que son exclusivamente numéricas.

- Una actividad importante es pasar de los patrones gráficos o concretos a las tablas numéricas, de manera que permita evidenciar diferentes leyes que cumplen los números al ser organizados en determinada forma [22]. Respecto a lo anterior, en [3] se plantea que los maestros poseen poca flexibilidad para modelizar con distintas representaciones, por ejemplo, al trabajar con secuencias geométricas no utilizan otra forma de representar.

- Es importante crear espacios adecuados que permitan que los alumnos describan verbalmente las regularidades que encuentran, e impulsarlos a que utilicen símbolos para representar sus generalizaciones [3].

A continuación se presenta un ejemplo de patrón geométrico y numérico de recurrencia planteado en [22].

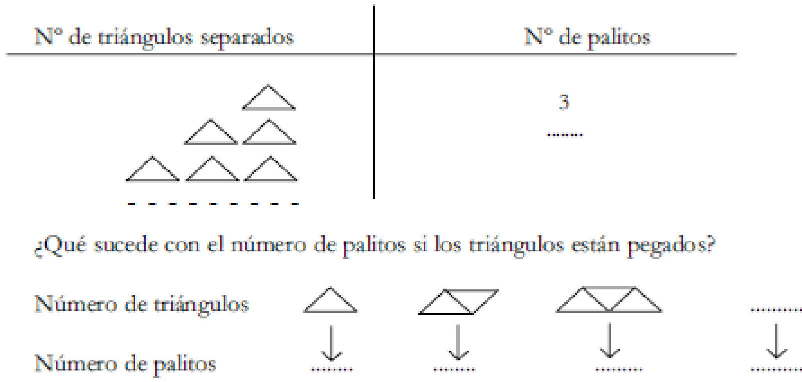


Figura 3-1: Ejemplo de un patrón de recurrencia

3.3. Patrones en el currículo escolar colombiano

En este apartado se realiza una descripción de diferentes elementos que permiten sustentar y dar cuenta de la importancia del trabajo con patrones en la educación básica, en particular, en el grado sexto. Se citan los Estándares Básicos de Competencias y los Lineamientos Curriculares, ya que son la guía que orienta los procesos curriculares en las comunidades educativas y toma como referencia tres aspectos: procesos generales, conocimientos básicos y el contexto.

Procesos generales

En los Estándares Básicos de Competencias[3] [12], se resaltan los procesos generales presentes en toda actividad matemática. Estos cinco procesos son: formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar, y elaborar, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Los patrones desempeñan un papel importante en el quehacer matemático, y por ende se encuentran incluidos en estos procesos, como se menciona a continuación.

La *resolución y planteamiento de problemas* es considerada una actividad muy importante en las matemáticas, puesto que permite establecer diferentes estrategias para resolverlos, interpretar los resultados, modificar condiciones y originar otros problemas. Además, proporciona contextos cotidianos de los estudiantes de otras ciencias o de las mismas matemáticas, permitiendo así un aprendizaje significativo.

[3]Definido como: “los parámetros de lo que todo niño, niña y joven debe saber y saber hacer para lograr el nivel de calidad esperado a su paso por el sistema educativo y la evaluación externa e interna es el instrumento por excelencia para saber qué tan lejos o tan cerca se está de alcanzar la calidad establecida con los estándares”[12, pág 9].

En la *modelación* como proceso propio en la matemática, se entiende un modelo como *"un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible"* [12, pág 52]. Se define que "la matematización o modelación puede entenderse como la detección de esquemas que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente"[12, pág 52].

En este sentido, Lynn Arthur Steen, citado en [12, pág 53] propuso una definición de las matemáticas como aquellas que:

> parten de una base empírica, pero para detectar en ella esquemas que se repiten, que podemos llamar "modelos o patrones, y en la multitud de esos modelos o patrones detectar de nuevo otros más y teorizar sobre sus relaciones para producir nuevas estructuras matemáticas, sin poner límites a la producción de nuevos modelos mentales, nuevas teorías y nuevas estructuras. Por lo tanto, las matemáticas serían la ciencia de los modelos o patrones ("Mathematics is the science of patterns"). El matemático busca modelos o patrones en el número, en el espacio, en la ciencia, en los ordenadores y en la imaginación.

La *comunicación* es un proceso que contribuye a la comprensión de las matemáticas, en cuanto hay diferentes formas de expresar, comunicar las preguntas, problemas y resultados matemáticos. Juega un papel importante ya que permite que los estudiantes construyan vínculos entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas.

El *razonamiento* como proceso que debe estar presente en todo trabajo matemático de los estudiantes, implica, entre otras cosas, que los estudiantes deben [11, pág 54]:

- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.

En el proceso de *formulación, comparación y ejercitación de procedimientos*, se incluye las reflexiones sobre *"qué procedimientos y algoritmos conducen al reconocimiento de patrones y regularidades en el interior de determinado sistema simbólico y en qué contribuyen a su conceptualización"* [12, pág 55].

Conocimientos básicos

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas[11] se clasifican los conocimientos básicos en cinco pensamientos matemáticos: numérico, espacial, métrico o de medida, aleatorio o probabilístico y variacional. En cada uno de los pensamientos se encuentran conceptos propios que se deben alcanzar a partir de diferentes actividades y procesos. Los patrones se encuentran presentes como herramientas en diferentes temas de las matemáticas.

A continuación se menciona el uso de los patrones en determinados pensamientos:

En el *pensamiento espacial y los sistemas geométricos* se menciona que la geometría se debe relacionar con la observación y reproducción de patrones (por ejemplo en las plantas, animales u otros fenómenos de la naturaleza).

Proponer el desarrollo del *pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos* como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, implica analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones donde se involucre la variación. Las representaciones tabulares, los enunciados verbales, las representaciones pictóricas e icónicas, son algunas de los diferentes sistemas de representación asociados a la variación. Para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional se puede hacer uso de situaciones donde se organice la variación en tablas y se construyan fórmulas. En este sentido, la tabla se constituye en un elemento para iniciar el estudio de función, pues es un ejemplo de función presentada numéricamente [11]. Al respecto, Demana (citada en [11]) menciona: *"la exposición repetida de construcciones de fórmulas, como expresiones algebraicas que explicitan un patrón de variación, ayuda a los estudiantes a comprender la sintaxis de las expresiones algebraicas que aparecerán después del estudio del álgebra"* [11, pág 50].

El estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente son otra herramienta necesaria para iniciar el estudio de la variación. Las actividades como intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas e intentar generalizar permite el desarrollo de este pensamiento desde los primeros niveles de la educación básica. Por último,

> Las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras involucran la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras en los cuales se basa el proceso de generalización. Esta es una forma muy apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos, y su manejo simbólico mucho antes de llegar al séptimo y octavo grado. [11, pág 67]

Contexto

El último componente esencial en la propuesta curricular, tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que dan sentido a las matemáticas que aprende. En los ambientes propuestos por los Lineamientos Curriculares en Matemáticas [11], se distinguen tres tipos de contextos: los procedentes de la vida diaria, de las matemáticas mismas y lo relacionado con otras ciencias.

En consideración con todo lo anterior, es necesario resaltar que la propuesta de trabajo que en este proyecto se favorece, a propósito de potenciar el razonamiento en un grupo particular de estudiantes de básica secundaria a partir de la generalización de patrones gráficos y numéricos, se ubica, en relación con los conocimientos básicos, en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos; pues para el desarrollo de este pensamiento se contempla el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación.

Del mismo modo, el uso de tablas en las actividades propuestas donde los estudiantes organicen la información y construyan fórmulas como expresiones algebraicas que explicitan un patrón de variación, tiene por objetivo que los estudiantes inicien el estudio del la función, ya que se convierten en ejemplos numéricos de funciones y de esta manera faciliten la comprensión de la sintaxis de expresiones algebraicas que aparecen posteriormente en el estudio del álgebra.

En relación con los procesos generales, se privilegia el razonamiento y la comunicación ya que son de gran importancia para las situaciones propuestas en la secuencia de actividades, debido a que se involucra elementos propios de cada uno de estos procesos como la formulación de hipótesis, establecimiento de conjeturas, comunciación de resultados de una situación determinada, utilización de lenguaje propio de las matemáticas, entre otros. Es importante mencionar que no se excluye en ningún momento la presencia de los otros procesos generales, sin embargo, se considera que el centro de atención son los mencionados.

Finalmente, en la secuencia de actividades se favorecen los contextos que proceden de la vida diaria y de las matemáticas mismas; debido a que se plantean situaciones propias de las matemáticas como la Teoría de Grafos y al mismo tiempo se plantean situaciones de la vida diaria de los estudiantes.

Los estándares propuestos por el MEN [12] están organizados según el nivel escolar de los estudiantes, a partir de unas competencias matemáticas mediadas por diferentes contextos, ambientes y situaciones que posibilitan avanzar a niveles de competencias más complejos, buscando así, formar un ser matemáticamente competente. La secuencia de actividades que se propone esta diseñada para estudiantes de sexto grado de la

Eduación Básica Secundaria y se relaciona con el estudio de fenómenos de variación, para los cuales se tiene en cuenta los siguientes estándares ubicados en el ciclo de sexto y séptimo:

- Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
- Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).

La complejidad y gradualidad del aprendizaje de las matemáticas, implica que los estándares guarden relación con los demás del mismo pensamiento de los otros conjuntos de grados (coherencia vertical) y relación con los estándares de los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados (coherencia horizontal). El diseño de la secuencia de actividades que en este trabajo se propone responde a estas dos coherencias, ya que se presenta una relación entre el pensamiento variacional y el numérico. Por ejemplo, al identificar las variaciones que se presentan entre las representaciones gráficas y numéricas y dar al paso al estudio de regularidades y patrones con niveles de abstracción y generalidad mayor donde el sistema simbólico- algebraico cobra especial relevancia, lo que abre paso al estudio del álgebra escolar en grados posteriores a sexto.

Teniendo en cuenta lo anterior, en la figura **3-2**, se exhiben los estándares que guardan tanto coherencia vertical como horizontal con los ya mencionados, los cuales se enfocarán de manera central en la secuencia de actividades.

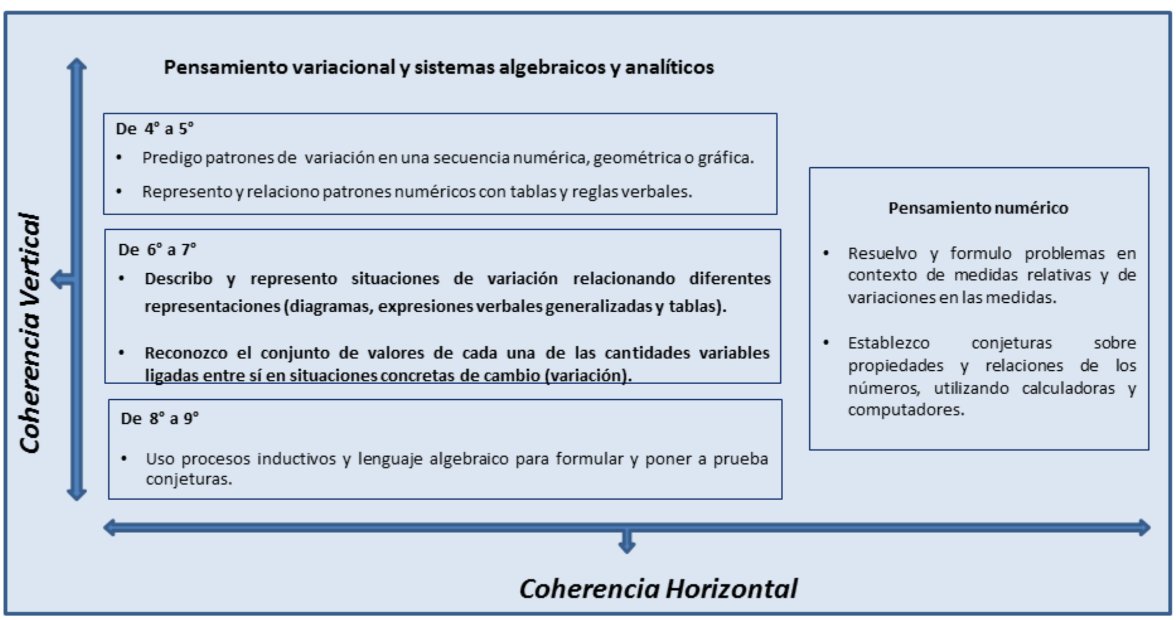


Figura 3-2: Coherencia vertical y horizontal en relación con los estándares seleccionados a desarrollar en la propuesta

4 Propuesta didáctica

La siguiente propuesta está basada en el Modelo Constructivista, el cual se caracteriza por:

- *El conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción del ser humano, y esta construcción es realizada por los esquemas que ya poseían* [29, pág 159].
- *En este modelo cada individuo realiza la construcción de sus propias representaciones mentales, las cuales son, en consecuencia, individuales e irrepetibles* [29, pág 161].

El aprendizaje por parte del estudiante puede ser repetitivo o significativo, según si lo aprendido se relacionó arbitraria o sustancialmente con la estructura cognoscitiva. El aprendizaje significativo se presenta cuando los nuevos conocimientos se vinculan de manera clara y estable con los conocimientos previos de los cuales disponía el individuo. Por otro lado, el aprendizaje repetitivo será aquel en el cual no se logre establecer esta relación con los conceptos previos, o, en el caso de hacerse, será de una forma mecánica y, por lo tanto, poco duradera [29].

Desde la enseñanza, existen también dos grandes posibilidades [29].

- Aprendizaje receptivo. *"Consiste en presentar de manera totalmente acabada el contenido final que va a ser aprendido"* [29, pág 166].
- Aprendizaje por descubrimiento. *"Se presenta cuando no se le entrega al alumno el contenido en su versión final, sino que este contenido tiene que ser descubierto e integrado antes de ser asimilado, caso en el cual estaremos ante un aprendizaje por descubrimiento"* [29, pág 166].

Para que el aprendizaje sea significativo se debe presentar de manera simultanea las siguientes tres condiciones [29]:

1. El contenido del aprendizaje debe ser potencialmente significativo.
2. El estudiante debe poseer en su estructura cognitiva los conceptos utilizados previamente formados, de manera que el nuevo conocimiento pueda vincularse con el anterior.

3. El estudiante debe manifestar una actitud positiva hacia el aprendizaje significativo.

El constructivismo, a nivel pedagógico plantea los siguientes propósitos educativos, contenidos, secuencias, estrategias metodológicas, criterios y sistemas de evaluación, planteados en [29]:

1. La finalidad de la evaluación debe ser alcanzar la comprensión cognitiva para favorecer el cambio conceptual.

2. Los contenidos a ser trabajados deberán ser los hechos y los conceptos científicos. Más importantes que los propios contenidos son el proceso y las actividades desarrolladas por los propios estudiantes para alcanzarlos.

3. Las secuencias curriculares deben tener en cuenta condiciones dadas en la ciencia, el contexto, los estudiantes y el medio.

4. Las estrategias metodológicas deben privilegiar la actividad, ser esencialmente autoestructurantes, favorecer el diálogo desequilibrante, utilizar el taller y el laboratorio y **privilegiar operaciones mentales de tipo inductivo.**

5. Toda evaluación es, por definición, subjetiva y debe intentar siempre ser cualitativa e integral.

En toda actividad matemática, Brousseau, citado en [11, pág 96], plantea que el trabajo intelectual del alumno debe por momentos ser comparable a la actividad científica. Una buena reproducción por parte del alumno de una actividad científica exigirá que él actúe, formule, observe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca las que están conformes con la cultura, que tome las que le son útiles, etcétera. Para hacer posible semejante actividad, el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones que puedan vivir y en las que los conocimientos van a aparecer como la solución óptima y descubrible en los problemas planteados.

4.1. Diseño de actividades

Las actividades se diseñaron con el propósito que los estudiantes las realicen considerando los siguientes pasos, de los siete planteados por Cañadas [5]:

- Trabajo con casos particulares.
- Organización de casos particulares.
- Identificación de patrones.

- Formulación de conjeturas.
- Generalización.

Así mismo, se diseñaron las actividades teniendo en cuenta las consideraciones realizadas sobre patrones[1]:

- En la identificación de patrones intervienen situaciones como reconocimiento de semejanzas y diferencias, identificación de rasgos que caracterizan la secuencia y práctica de procedimientos de reproducción (copia de un patrón dado), de identificación (detección de la regularidad), de extensión (dado una parte de la sucesión extenderla de acuerdo a las características), de extrapolación (completar partes vacías) y de traslación (copiar el patrón sobre otros elementos) [22].
- Las actividades con patrones se pueden formular de modo que permita el acercamiento de los estudiantes al proceso utilizado en las ciencias: planteamiento, comunicación, comprobación y refutación de hipótesis.
- Una actividad importante es pasar de los patrones gráficos o concretos a las tablas numéricas de manera que permita evidenciar diferentes leyes que cumplen los números al ser organizados de determinada forma [22].
- Es importante crear espacios adecuados que permitan que los alumnos describan verbalmente las regularidades que encuentran, e impulsarlos para que utilicen símbolos para representar sus generalizaciones [3].

Todas las anteriores consideraciones nos permiten enmarcar las actividades dentro del modelo constructivista con el enfoque de enseñanza de aprendizaje por descubrimiento, teniendo en cuenta que las actividades se plantearon de manera que los estudiantes descubran las relaciones existentes entre cada uno de los elementos presentes (actividades de tipo inductivo).

A continuación se presentan los aspectos importantes de cada una de las cuatro actividades diseñadas, destacando los siguientes elementos:

- **Objetivo.** Representa los productos de aprendizaje que se espera que el estudiante alcance al final de la actividad.
- **Conceptos.** Son las temáticas a partir partir de las cuales se pretende alcanzar las capacidades expresadas en los objetivos.
- **Metodología.** Describe la forma en que se realizará la intervención en el aula.

[1] Consideraciones planteadas en el apartado: 3.2 Patrones y su enseñanza

- **Descripción.** Se presenta la estructura de la actividad, explicitando cantidad de preguntas y la intención de cada una de ellas.

- **Resultados esperados.** Son las evidencias asociadas a los objetivos planteados en la actividad.

4.1.1. Actividad 1. Reconociendo grafos

Objetivo.
Comprender los conceptos de: grafo, grafo conexo y no conexo, y grado de un vértice.

Determinar que la suma de los grados de los vértices es el doble del número de aristas de este (Teorema de Euler (Teorema 2.1)).

Conceptos.
Grafo, grafo conexo, grafo no conexo.

Metodología.
A cada estudiante se le hará entrega de las copias de la actividad 1. El docente orientará las actividades, al mismo tiempo que fomentará la participación y comunicación de los estudiantes.

Descripción.
Teniendo en cuenta los diferentes elementos presentes en el modelo constructivista, en esta actividad se plantean situaciones que a los estudiantes los motiven, sean de su contexto y les brinden espacios para escribir sus observaciones.

Esta actividad está compuesta por ocho items, y a continuación se presenta la descripción de cada uno de ellos.

Item 1. En este item se presenta la definición de grafo, a partir del cual los estudiantes reconocen que los grafos permiten representar situaciones en la vida diaria. La situación 1a, les implica comunicarse entre sus compañeros y conocer del lugar de residencia de los demás. De igual manera, la situación 1b, les permitirá recordar aspectos que generalmente se abordan en otras materias, como la clasificación de animales según su alimentación. Por último se presenta una tabla donde los estudiantes pueden dibujar estos grafos.

Items 2 y 3. Estos items tienen como objetivo que los estudiantes comprendan el concepto de grafo conexo y no conexo, a partir de grafos que representan los pases de los 11 jugadores en un equipo de fútbol. Se plantean seis preguntas con el propósito que el estudiante identifique que en algunos grafos es posible encontrar caminos que unan dos vértices distintos.

Finalizada estas preguntas, se le presenta al estudiante la definición de grafo conexo y no conexo. En el item 3 se le plantea un espacio donde los estudiantes deben realizar un ejemplo de grafo conexo y no conexo.

El contexto de fútbol utilizado en estos items, se seleccionó teniendo en cuenta que los estudiantes se sienten identificados y familiarizados con esta actividad. La mayoría de los estudiantes de este curso practican este deporte en sus horas de descanso.

Items 4, 5, 6, 7 y 8. En estos items se pretende que los estudiantes establezcan que en un grafo la sumas de los grados de los vértices es el doble del número de aristas del grafo. Para lograr este objetivo, se les plantea inicialmente trabajo con casos particulares, organización de estos casos, identificación de patrones, formulación de conjeturas y generalización.

En el item 4 se define el grado de un vértice y se plantean ejemplos. A partir de esta información los estudiantes deben hallar el grados de los vértices de cinco grafos propuestos. En el item 5, los estudiantes deben organizar la información obtenida en la tabla planteada. En esta forma de organizar la información los estudiantes podrán determinar el patrón presente.

El item 6 tiene por propósito que los estudiantes dibujen grafos que cumplan condiciones específicas. En particular, dibujar un grafo cuya suma de los grados de los vértices sea 14, y otro cuya suma sea 11. En este último, los estudiantes deben identificar que no es posible dibujar un grafo con esta condición.

En el item 7 se plantea una tabla donde los estudiantes deben extrapolar la información presentada, es decir, completar los espacios con valores de acuerdo al patrón identificado (detección de la regularidad).

Por último, en el item 8, los estudiantes deben escribir sus conjeturas. Se espera que los estudiantes determinen que la suma de los grados de los vértices es el doble del número de aristas de este.

Resultados esperados.
Los estudiantes representarán situaciones por medios de grafos. Comprenderán concepto de grafo conexo y no conexo. Determinarán el grado de un vértice y establecerán la relación entre la suma de los grados de los vértices del grafo y el número de aristas de este.

4.1.2. Actividad 2. Mi alrededor con grafos

Objetivo.
identificar si un grafo es plano o no.

Generalizar la fórmula de Euler (Teorema 2.3) que relaciona el número de vértices, aristas y regiones de un grafo plano .

Conceptos.
Grafo plano.

Metodología.
A cada estudiante se le hará entrega de las copias de la actividad 2. El docente orientará las actividades, al mismo tiempo que fomentará la participación y comunicación de los estudiantes. Se contará con los diferentes mapas en afiches de manera que permita la socializar de forma adecuada la actividad.

Descripción.
Esta actividad está compuesta por siete items, y a continuación se presenta la descripción de cada uno de ellos.

Items 1 y 2. Estos items se plantean con el propósito que los estudiantes identifiquen un grafo plano, es decir grafos en los que las aristas no se intersecan salvo en sus extremos. En el item 1 se plantea el juego que consiste en conectar 3 casas a los servicios de agua, electricidad y gas, y el cual podrán resolver en la página de internet indicada. En el item 2, se les brinda un espacio para que los estudiantes representen por medio de un grafo, el juego planteado en el item 1.

Items 3 y 4. El objetivo de estos items es que los estudiantes reconozcan que un grafo puede ser representado de diferentes maneras en el plano. Algunos grafos pueden ser dibujados de manera que las aristas no se corten salvo en los extremos, los cuales se definen como grafos planos.

En el item 3 los estudiantes deben representar un grafo de manera que las aristas no se corten salvo en los extremos. Posteriormente se presenta la definición de grafo plano, y en el item 4 se le pide a los estudiantes que identifiquen si los grafos dados son planos o no.

Items 5 y 6. En estos items se plantean situaciones relacionadas con mapas políticos de determinadas regiones. Esta situación fue inspirada en el trabajo realizado por Kempe (1849-1922)[2] en el desarrollo del problema de los cuatro colores, quién planteó que

[2]Situación descrita en el apartado: *1.3 Problema de los cuatro colores.*

cualquier mapa en el plano se puede representar de manera que cada región se represente por un vértice, y se unan dos regiones si tienen un borde común.

Estos items tienen por objetivo que los estudiantes asocien un grafo a cada mapa propuesto, de manera similar como lo propuso Kempe (1849-1922) en su trabajo sobre la conjetura de los cuatro colores. Los estudiantes deben completar la tabla propuesta con los valores indicados. De esta manera se espera que los estudiantes identifiquen el patrón y concluyan la fórmula de Euler (Teorema 2.3).

En el item 5 se presenta un ejemplo del grafo asociado a un mapa, y en el item 6 los estudiantes deben representar el grafo de 4 mapas conocidos por ellos: mapa de Colombia, mapa de los países límites de Colombia, mapa de Centroamérica, mapa de la región del Sumapaz (Región de Cundinamarca a la cual pertenece el municipio de Tibacuy). Se propone un tabla donde los estudiantes deben escribir los vértices, aristas y regiones de los grafos representados con el fin de observar el patrón.

Item 7. En este item se brinda un espacio para que los estudiantes escriban la generalización obtenida.

Resultados esperados.
Los estudiantes identificarán si un grafo dado es plano o no. Establecerán la relación entre el número de vértices, aristas y regiones de un grafo plano.

4.1.3. Actividad 3. Sin levantar la mano

Objetivo.
Determinar si un grafo es recorrible o no.

Establecer las condiciones que debe cumplir un grafo para ser recorrible (Teorema 2.2).

Conceptos.
Grafo recorrible.

Metodología.
A cada estudiante se le hará entrega de las copias de la actividad 3. El docente orientará las actividades, al mismo tiempo que fomentará la participación y comunicación de los estudiantes. En esta actividad se realizarán diferentes retos entre parejas de compañeros.

Descripción.
Esta actividad está compuesta por siete items, y a continuación se presenta la descripción de cada uno de ellos.

Item 1. En este item se pretende que los estudiantes identifiquen que existen grafos que pueden ser recorribles sin levantar la mano y sin repetir aristas, y que estos recorridos pueden ser cerrados o abiertos. Se presenta la definición de Grafos recorribles y tres ejemplos, cada uno de ellos con espacios donde se pretende que los estudiantes verifiquen los recorridos planteados.

Items 2 y 3. En estos items se pretende que los estudiantes determinen si los grafos son recorribles o no. A partir de esta información deben completar la tabla que se propone con los grados de los vértices de cada grafo.

Items 4 y 5. En estos items se plantean ejemplos de grafos recorribles y no recorribles, a partir de los cuales, se realizará por parejas de estudiantes un pequeño concurso que determine quién dibuja más rápido cada grafo. Por último, deberán completar la tabla propuesta con los grados de cada vértice.

Items 6 y 7. En estos items se pretende que los estudiantes determinen si el grafo propuesto es recorrible o no, a partir de las características observadas al completar la tabla planteada. Finalmente, en el item 7, los estudiantes deben escribir las características que identificaron en un grafo recorrible y no recorrible.

Resultados esperados.
Los estudiantes identificarán si un grafo es recorrible o no. Establecerán las condiciones que debe cumplir un grafo para ser recorrible (Teorema 2.2).

4.1.4. Actividad 4. ¿Cuántas veces debo levantar el lápiz?

Objetivo.
Determinar la cantidad mínima de veces que se debe levantar la mano para dibujar un grafo no recorrible.

Conceptos.
Grafo no recorrible.

Metodología.
A cada estudiantes se le hará entrega de las copias de la actividad 4. El docente orientará las actividades, al mismo tiempo que fomentará la participación y comunicación de los estudiantes.

Descripción.
Los cuatro items que componen esta actividad se describen a continuación.

Item 1. Este item tiene por objetivo que los estudiantes determinen la cantidad mínima de veces que deben levantar el lápiz para poderlos dibujar los seis grafos propuestos. Para esto deben completar la tabla propuesta con la información solicitada, entre la que se encuentra la cantidad de vértices de grado impar.

Items 2 y 3. En el item 2 se pretende que los estudiantes determinen el patrón presente en los valores de la tabla previamente diligenciada, para posteriormente escribir la generalización obtenida en el item 3.

Item 4. Para finalizar la secuencia de actividades se les propone un video, que tiene por finalidad dar a conocer la historia de la teoría de grafos, las características de un grafo recorrible y las aplicaciones de esta teoría.

Resultados esperados.
Los estudiantes identificarán el mínimo de veces que se debe levantar la mano para dibujar un grafo no recorrible.

4.2. Secuencia de Actividades

4.2.1. Actividad 1. Reconociendo grafos

Un **grafo G** es un conjunto de puntos llamados vértices y un conjunto de líneas llamadas aristas. Los extremos de las líneas son los vértices.

A continuación se presenta el grafo G, el cual está formado por el conjunto de vértices $V = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ y aristas $A = \{\{a,b\},\ \{b,c\},\ \{c,d\},\ \{b,d\},\ \{a,d\}\}$

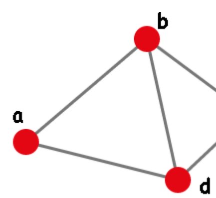


Figura 4-1: Ejemplo de grafo

En nuestra vida diaria se utilizan los grafos en diversas situaciones, por ejemplo, un grafo nos permite representar las rutas en avión que una aerolínea ofrece a sus clientes. En esta situación las ciudades representan los vértices y las rutas, las aristas (**4-2**[a]).

[a]Imagen extraída de https://goo.gl/w1XN78

Figura 4-2: Rutas de avión, ejemplo de grafo.

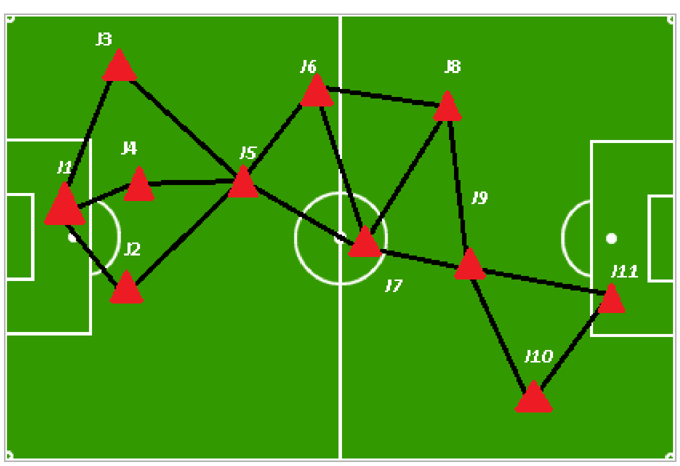
1. Con base en la definición de grafo, dibuje dos grafos G_1 y G_2 teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

   a) Grafo G_1: los vértices representen nombres de seis estudiantes del curso 602, y las aristas unan dos nombres de estudiantes que vivan en la misma vereda.

   b) Grafo G_2: los vértices representen el conjunto de animales {león, vaca, oso, elefante, aguila, paloma, tiburón, jirafa, jabalí } y las aristas unan dos nombres de animales que pertenezcan a la misma clasificación según su alimentación: herbívoros, omnívoros, carnívoros.

Grafo 1	Grafo 2

2. En la siguiente figura se muestra un grafo que representa los pases de balón que puede realizar un equipo de fútbol. Los vértices representan los jugadores y las aristas los posibles pases entre ellos.



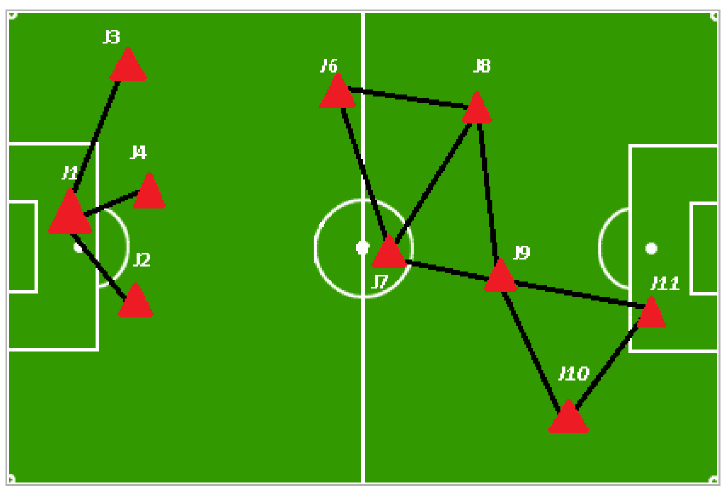
a) Teniendo en cuenta los pases permitidos, si el jugador J4 posee el balón, ¿es posible que el jugador J9 reciba el balón?

Si es posible, ¿cuáles podrían ser los pases realizados? ______________________

b) Escriba una jugada que permita al jugador J11 recibir el balón del arquero (J1):______________________________________

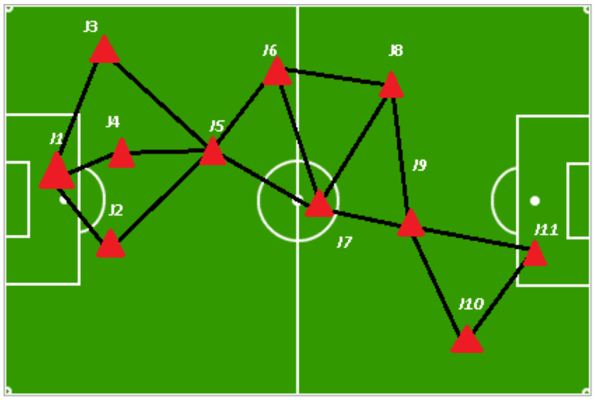
c) ¿Es posible que a cualquier jugador que este en el campo le llegue un balón de los otros integrantes del equipo? ___________________________

d) Durante un partido, el jugador J5 es expulsado y el Director Técnico no logra dar nuevas indicaciones. El grafo que representa la situación se presenta a continuación.

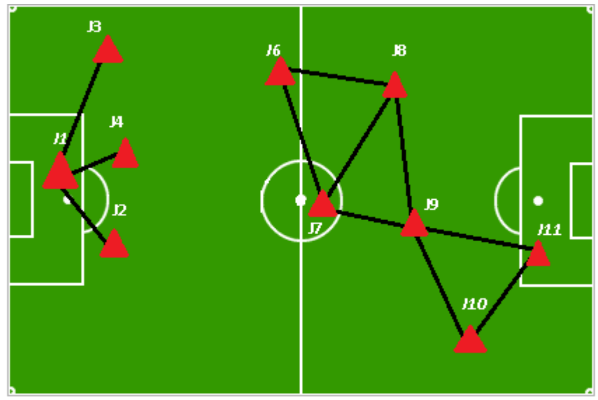


e) En esta nueva situación, ¿es posible que el jugador J9 reciba el balón del jugador J2? Justifique su respuesta. ____

f) Encuentra alguna diferencia entre los grafos obtenidos en las dos situaciones anteriores. ____
____



Situación 1.

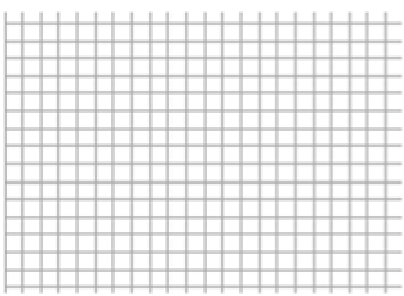


Situación 2.

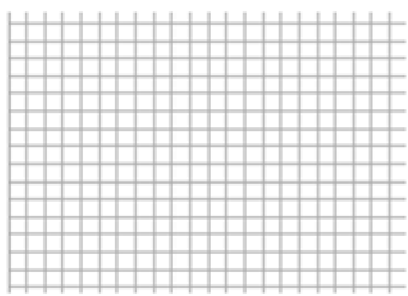
Las anteriores situaciones nos ilustran el concepto de *Grafo Conexo*, grafo donde es posible conectar dos cualesquiera vértices por un camino o secuencia de vértices y aristas. En la situación 1 se tiene una representación de grafo conexo y en la situación 2, un grafo no conexo.

3. 

A continuación dibuje un grafo conexo y un grafo no conexo.



Grafo Conexo

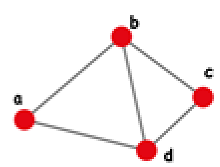
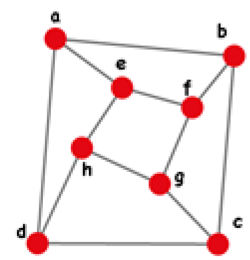
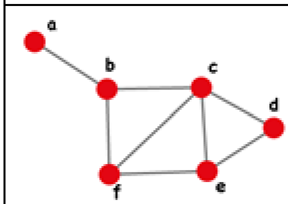
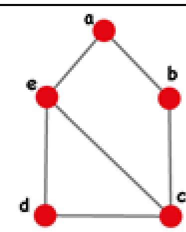
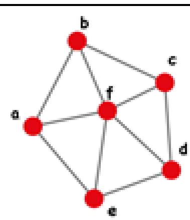
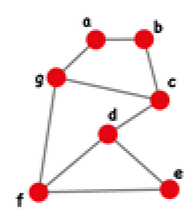


Grafo no Conexo

4. 

El **grado de un vértice** v, $grad(v)$, es el número de aristas del Grafo que concurren o inciden en v.

Halle el grado de los vértices de los siguientes grafos. Observe el ejemplo.

<table>
<tr><th>Grafos</th><th>Grado</th><th>Grafos</th><th>Grado</th></tr>
<tr><td>
Grafo 1</td><td>$grad(a) = 2$
$grad(b) = 3$
$grad(c) = 2$
$grad(d) = 3$</td><td>
Grafo 4</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$grad(a) + grad(b) + grad(c) + grad(d) =$
$= 2 + 3 + 2 + 3 = 10$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>
Grafo 2</td><td></td><td>
Grafo 5</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>
Grafo 3</td><td></td><td>
Grafo 6</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

5. Con los resultados obtenidos en el punto anterior complete la siguiente tabla.

Grafo	Suma de los grados de los vértices del grafo	N. de Aristas del grafo
G_1	10	5
G_2		
G_3		
G_4		
G_5		
G_6		

6. Dibuje un grafo G_1 de manera que la suma de los grados de sus vértices sea 14. Dibuje un grafo G_2 de manera que la suma de los grados de todos su vértices sea 11.

$grad(G_1) = 14$	$grad(G_2) = 11$
¿Cuántas aristas tiene el grafo? ________	¿Cuántas aristas tiene el grafo? ________

7. A partir de lo que ha observado en los puntos anteriores, complete la siguiente tabla:

Grafo	Suma de los grados de los vértices del grafo	N. de Aristas del grafo
G_7	12	
G_8		7
G_9	6	
G_{10}	11	
G_{11}		4
G_{12}	7	
G	m	

8. Conclusión: Se puede concluir que en un grafo ______________________________
____
____

4.2.2. Actividad 2. Mi alrededor con grafos

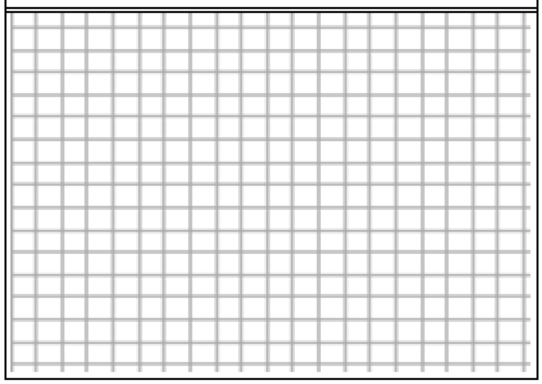
1. Realice la siguiente actividad interactiva que se encuentra en la página web $http://www.arandomgame.com/index.php?game\_id = 899$ El objetivo del juego es conectar 3 casas a los servicios de agua, electricidad y gas, sin que alguna línea de conexión se cruce.

Después de realizada la actividad, ¿fue posible lograr el objetivo propuesto en la actividad?: ____

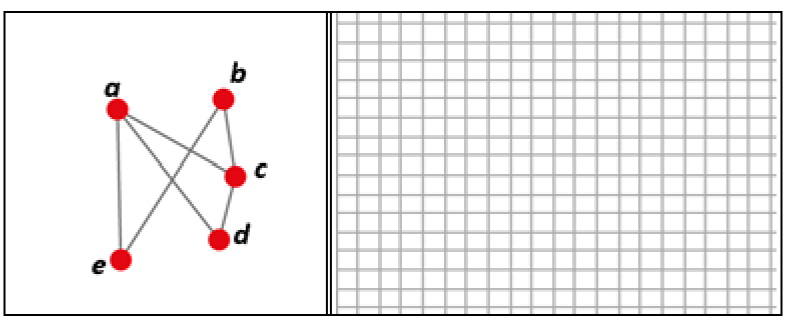
2. Realice un grafo que represente uno de los intentos realizados en la aplicación, donde los vértices representan las casas y servicios, y las aristas sean

las conexiones entre las casas y los servicios.

Grafo: tres casas y tres servicios

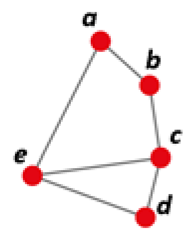
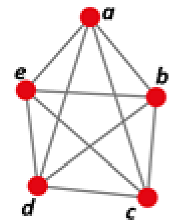


3. A continuación se presenta el grafo G_1. Realice, si es posible, el mismo grafo de manera que las aristas no se corten.

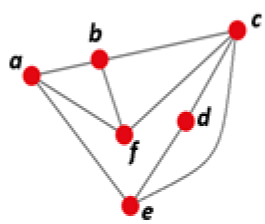
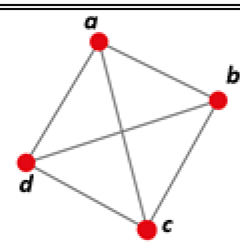
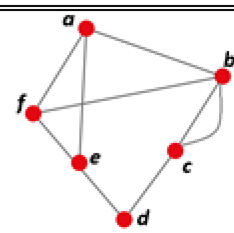
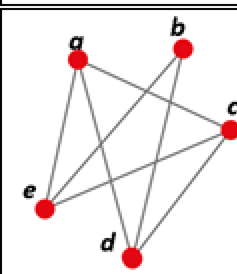


Un **Grafo** se considera **Plano** si se puede dibujar en el plano de modo que no haya intersección de las aristas salvo en los vértices.

Ejemplo,

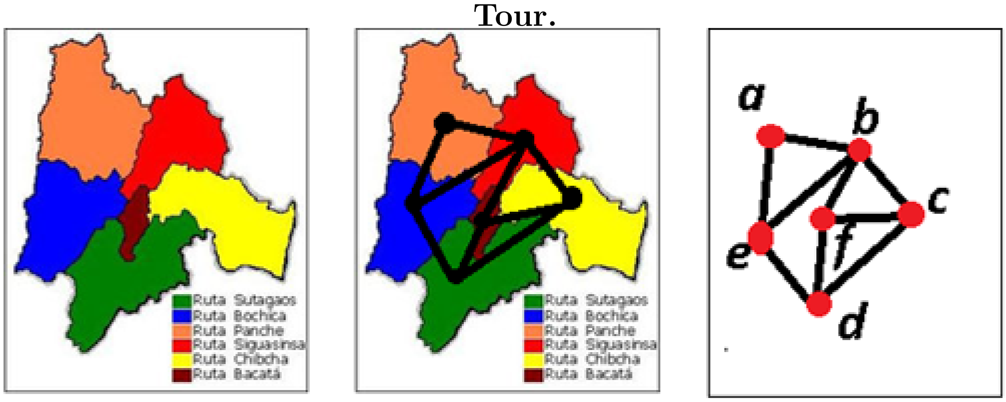
	
Grafo Plano	Grafo no Plano

4. Determine si los siguientes grafos son planos o no.

Grafo 1	Grafo 2	Grafo 3	Grafo 4
			
Si ____ No ____	Si ____ No ____	Si ____ No ____	Si ____ No ____

5. Los mapas se pueden representar por medio de grafos planos. Los vértices representan las regiones y las aristas unen dos regiones límites. A continuación se representan un mapa por medio de un grafo.

Mapa de rutas de turismo de la empresa Turística ENTAMAGUE Tour.



Con la información proporcionada por el anterior grafo, completa la tabla teniendo en cuenta que las regiones son las partes en que el grafo dividió el plano.

Mapa	N. de Regiones (R)	N. de Vértices (V)	N. de Aristas (A)
Mapa de rutas de turismo de la empresa Turística ENTAMAGUE Tour.			

6. Se presentan algunos mapas geográficos, a partir de los cuales:

   a) dibuje sobre cada mapa el grafo plano que lo representa, de manera que los vértices sean las divisiones del mapa y las aristas unan dos regiones limites.

   b) realice una breve descripción de lo que cada uno representa.

   c) complete la tabla que se propone con el número de regiones, aristas y vértices.

Mapa 1	Mapa 2
	
Descripción del mapa	**Descripción del mapa**
Mapa 3	**Mapa 4**
	
Descripción del mapa	**Descripción del mapa**

Mapa	N. de Regiones (R)	N. de Vértices (V)	N. de Aristas (A)
Regiones Naturales de Colombia			
Municipios de la Región del Sumapaz			
Paises de Centroamérica			
Colombia y países límites			

7.  Conclusión: Se puede concluir que en un grafo ______________________________

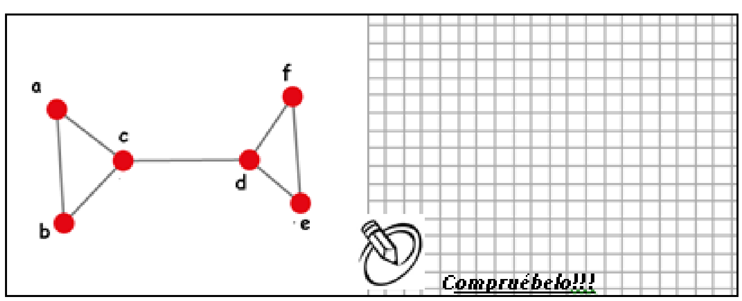
____

____

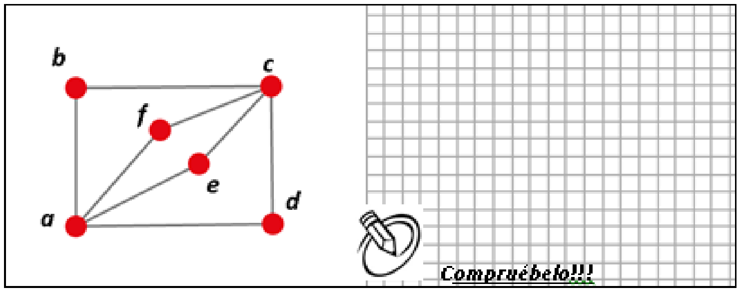
4.2.3. Actividad 3. Sin levantar la mano

1. Un grafo es **recorrible** o tiene un **circuito Euleriano** si se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin repetir aristas.
Se pueden clasificar en circuito Euleriano abierto y cerrado. Abierto si al dibujar el grafo se termina en un punto diferente al inicio. Cerrado si se finaliza el dibujo en el mismo vértice por donde se inicio

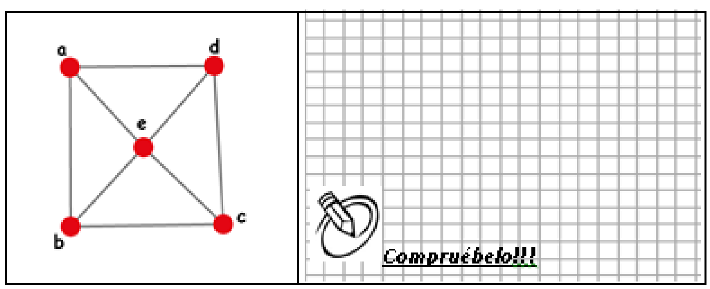
Ejemplo 1. El siguiente grafo G tiene un circuito Euleriano: $c-a-b-c-d-e-f-d$ que es equivalente al circuito Euleriano: $d-e-f-d-c-b-a-c$. Este circuito es Euleriano abierto porque se inicia, por ejemplo, en el vértice c y termina en el d.



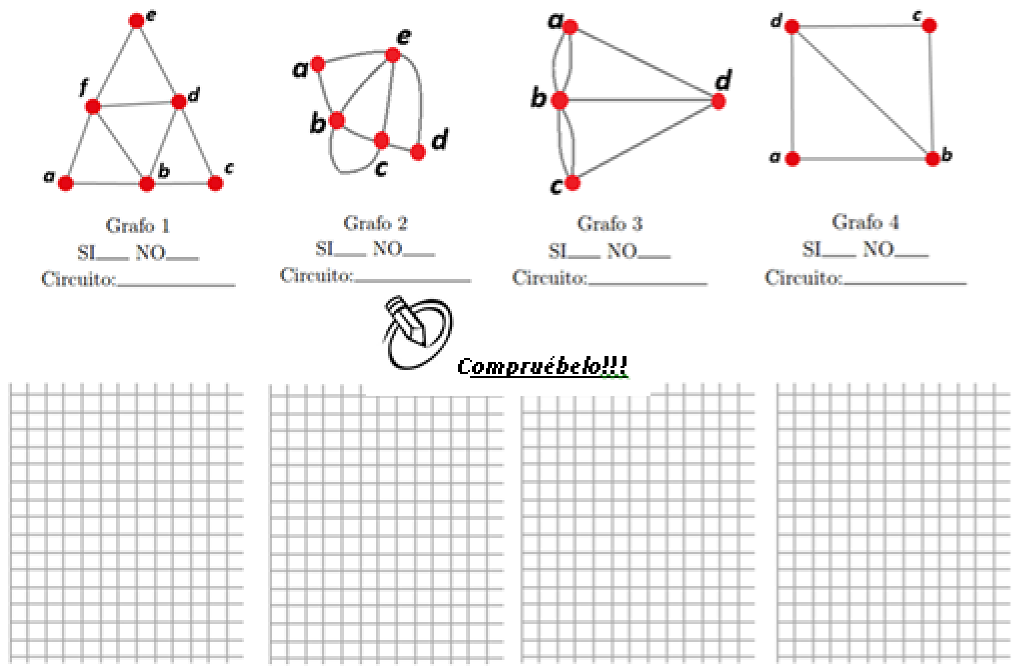
Ejemplo 2. El siguiente grafo tiene un circuito Euleriano cerrado: Ya que tiene el circuito: $a-f-c-e-a-d-c-b-a$ que inicia y termina en el mismo vértice, a.



Ejemplo 3. El siguiente grafo no es recorrible o no tiene circuito Euleriano ya que al empezar en algún vértice no es posible dibujar el grafo sin levantar el lápiz del papel y sin repetir aristas.



2. A continuación se presentan varios grafos. ¿ Cuáles de ellos se pueden dibujar sin levantar el lapíz del papel y sin repetir aristas?

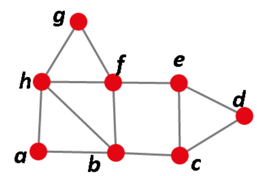


3. Complete la siguiente tabla a partir de la información de los anteriores grafos.

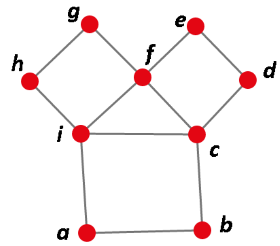
Grafo	N. de Vértices	Grado del Vértice						Circuito Euleriano (si hay)
		a	b	c	d	e	f	
Grafo 1								
Grafo 2								
Grafo 3								
Grafo 4								

4. A continuación se presenta una clasificación de los grafos que son recorribles y los que no.

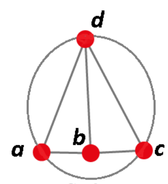
Grafos recorribles **Grafos no recorribles**



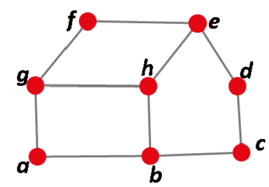
Grafo 5



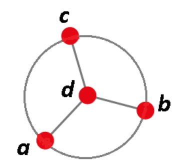
Grafo 6



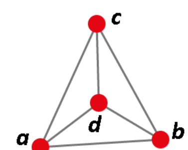
Grafo 7



Grafo 8



Grafo 9



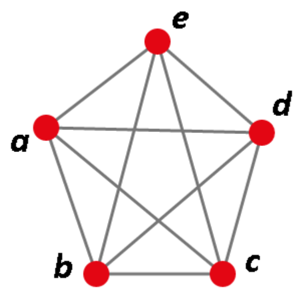
Grafo 10

De los grafos que son recorribles o tienen circuito Euleriano, seleccione con su compañero dos grafos y determinen quién los puede dibujar más rápido, sin levantar el lápiz del papel y sin repetir arista.

5. A partir de la anterior clasificación de grafos recorribles y no recorribles, Complete la siguiente tabla.

Grafo	N. de Vértices	Grado del Vértice									Circuito Euleriano (si hay)
		a	b	c	d	e	f	g	h	i	
Grafo 5											
Grafo 6											
Grafo 7											
Grafo 8											
Grafo 9											
Grafo 10											

6. Para el siguiente Grafo complete la tabla.

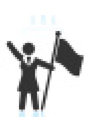


Grafo	N. de Vértices	Grado del Vértice									Circuito Euleriano
		a	b	c	d	e	f	g	h	i	
Grafo											

Observe las tablas que completó en los puntos 3 y 5 donde se pueden determinar las características que debe tener un grafo recorrible y no recorrible.

Sin intentar su trazo con el lapíz, ¿es posible determinar si el grafo es recorrible o no? Justifique su respuesta ____

____

7.  Conclusión: Se puede concluir que un grafo ______________________

____

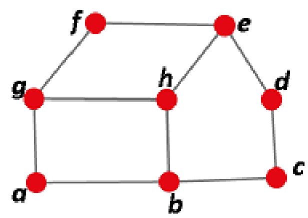
____

4.2.4. Actividad 4. ¿Cuántas veces debo levantar el lápiz ?

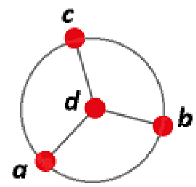
En la actividad anterior se concluyó que un grafo tiene circuito Euleriano si todos los vértices son de grado par, o cuando solamente hay dos vértices de grado impar.

En esta actividad se analizaran los grafos que no tienen circuito Euleriano.

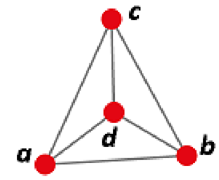
1. A continuación se presentan grafos no Eulerianos. Para cada uno de ellos determine la mínima cantidad de veces que debe levantar el lápiz para dibujarlos. Complete la tabla que se presenta.



Grafo 1

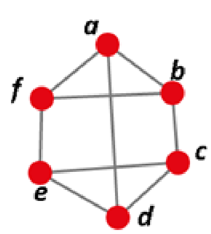


Grafo 2

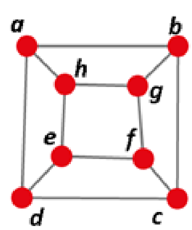


Grafo 3

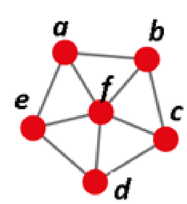
Compruébelo!!!



Grafo 4



Grafo 5



Grafo 6

Compruébelo!!!

Grafo	N. de Vértices de grado impar	Nombre de Vértices	Cantidad mínima de veces que se levanta el lápiz
Grafo 1			
Grafo 2			
Grafo 3			
Grafo 4			
Grafo 5			
Grafo 6			

2. Observando los datos registrados en la tabla, ¿ es posible determinar la mínima cantidad de veces que se debe levantar la mano para dibujar el grafo? Justifique su respuesta ____

3.  Conclusión: Se puede concluir que en un grafo ________________________________

4. Para finalizar estas actividades observe el video $https://www.youtube.com/watch?v=sEs0LyZh198$.

5 Análisis de resultados

En este apartado se realiza la descripción de los resultados obtenidos al aplicar la secuencia de actividades (propuesta en la sección 4) a 20 estudiantes de sexto grado (602), de la I.E.D Técnico Comercial de Tibacuy. Las cuatro actividades se aplicaron en un total de 13 sesiones de clase, cada sesión con una duración de 55 minutos.

Las actividades,

- fueron guiadas por el docente y cada estudiante escribía sus resultados en las fotocopias.
- permitieron que los estudiantes compartieran sus respuestas de manera oral y escrita en el tablero.
- en algunos casos, se plantearon para desarrollar en casa.

En este apartado se presentan las respuestas dadas por los estudiantes a las diferentes actividades que componen la secuencia planteada. Para ello, estas respuestas se han agrupado en categorías de acuerdo a los resultados esperados en cada una de las cuatro actividades (tabla **5-1**).

Actividad	Resultados Esperados
Actividad 1. Reconociendo grafos	Los estudiantes representarán situaciones por medios de grafos. Comprenderán el concepto de grafo conexo y no conexo. Determinarán el grado de un vértice y establecerán la relación entre la suma de los grados de los vértices del grafo y el número de aristas de este.
Actividad 2. Mi alrededor con grafos	Los estudiantes identificarán si un grafo dado es plano o no. Establecerán la relación entre el número de vértices, aristas y regiones de un grafo plano.

Sigue en la página siguiente

Actividad	Resultados Esperados
Actividad 3. Sin levantar la mano	Los estudiantes identificarán si un grafo es recorrible o no. Establecerán las condiciones que debe cumplir un grafo para ser recorrible (Teorema 2.2).
Actividad 4. ¿Cuántas veces debo levantar el lápiz?	Los estudiantes identificarán el mínimo de veces que se debe levantar la mano para dibujar un grafo no recorrible.

Tabla 5-1: Resultados esperados en cada una de las actividades.

Estas categorías se notan con dos números. El primero corresponde a la actividad y el segundo al número de la categoría. Por ejemplo, C 1.2 segunda categoría de la actividad 1.

5.1. Actividad 1. Reconociendo grafos

Teniendo en cuenta los resultados esperados para este actividad, los items se agruparon de la siguiente manera:

- Item 1. Los estudiantes representarán situaciones por medios de grafos.
- Items 2 y 3. Los estudiantes comprenderán el concepto de grafo conexo y no conexo.
- Items 4, 5, 6, 7 y 8. Los estudiantes determinarán el grado de un vértice y establecerán la relación entre la suma de los grados de los vértices del grafo y el número de aristas de este.

A continuación se presenta cada una de los items con las respuestas agrupadas en categorías planteadas.

5.1.1. Item 1

Para realizar el grafo G_1 los estudiantes preguntaron a algunos de sus compañeros el lugar donde viven, ya que hay estudiantes nuevos en el colegio con los cuales no habian compartido otros años escolares. Para realizar el grafo G_2, algunos estudiantes no recordaban el significado de animales que fueron omnívoros, lo que implico realizar una breve aclaración.

CATEGORIAS 1.1 y 1.2

C 1.1. Dada la información, los estudiantes representan adecuadamente los grafos.

Los estudiantes que representaron adecuadamente los grafos, a partir de la información presentada en el item 1a fueron 14. En estas representaciones ubicaron los nombres de sus compaẽros como vértices y los unieron según vivieran en la misma vereda o barrio.

En el grafo G2, de los 20 estudiantes, 11 representaron el grafo adecuadamente, relacionando entre sí los animales que cumplieran la misma característica.

A continuación se presentan algunas de las respuestas dadas por los estudiantes a este item.

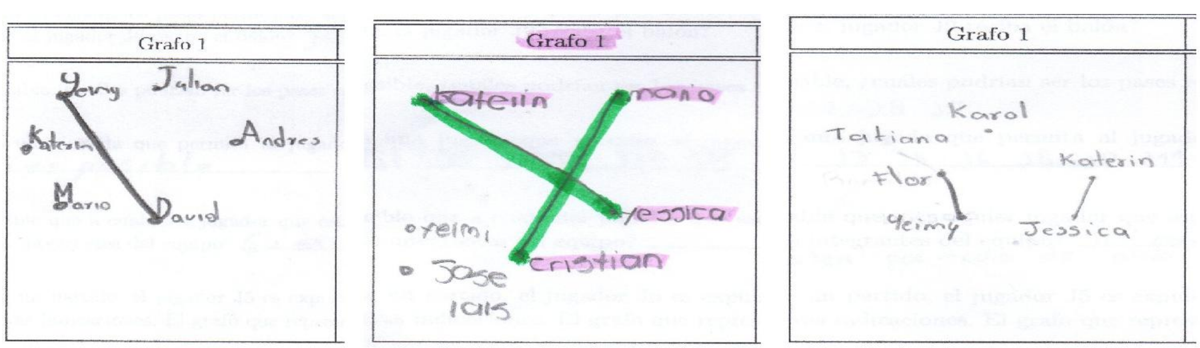


Figura 5-1: Representación adecuada del grafos G_1 - item 1a. Actividad 1

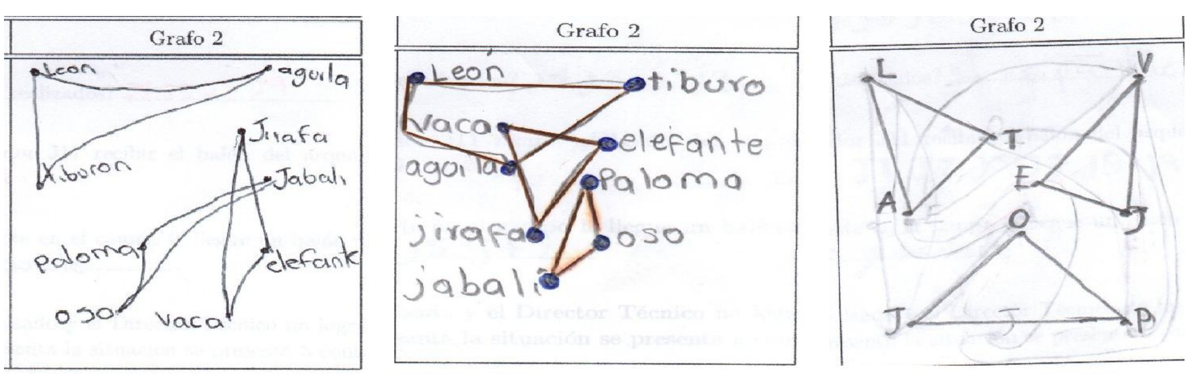


Figura 5-2: Representación adecuada del grafos $G2$ - item 1b

C 1.2. Dada la información, los estudiantes no representan adecuadamente los grafos.

A partir de la información brindada para el grafo G_1, 6 de los 20 estudiantes no lo representaron adecuadamente y 9 no representaron adecuadamente el grafo G_2. Los estudiantes no relacionaban todos los vértices que cumplen las relaciones por considerar que se podían relacionar por medio de un camino. Un estudiante realizó el grafo sin contemplar los datos que representaban los vértices y aristas, en su lugar, contempló todos los datos como vértices.

A continuación se presentan algunas respuestas dadas por los estudiantes donde se evidencia esta situación.

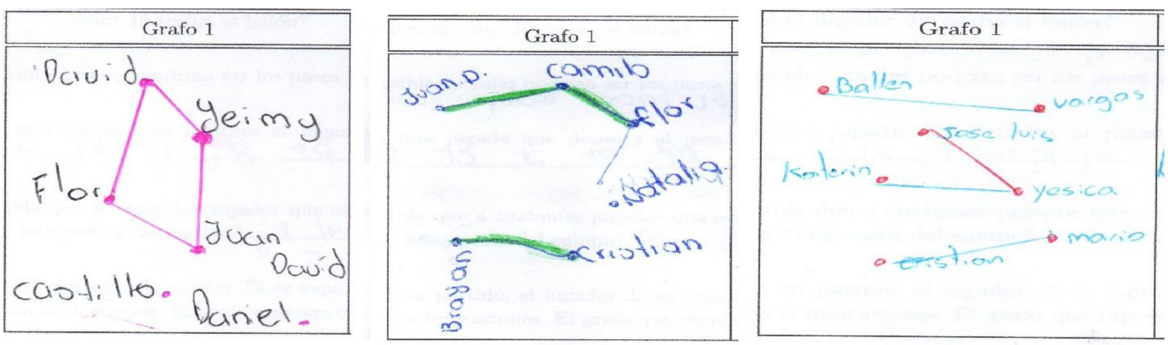


Figura 5-3: Representación no adecuada del grafos $G1$ - item 1a. Actividad 1

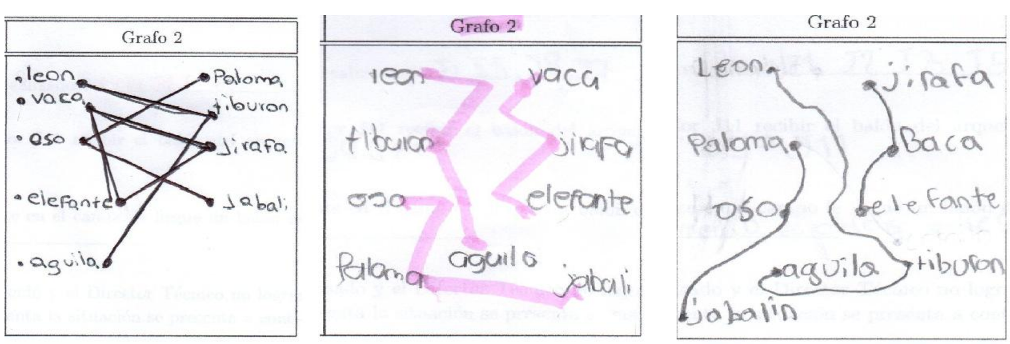


Figura 5-4: Representación no adecuada del grafos $G2$ - item 1b. Actividad 1

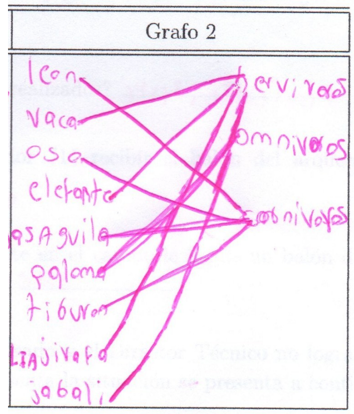


Figura 5-5: Representación no adecuada del grafos $G2$ - item 1b. Actividad 1

Esta actividad cumplió con su objetivo propuesto ya que los estudiantes identificaron que los grafos pueden representar situaciones en diferentes campos. Así se evidencia en los comentarios de los estudiantes a la actividad.

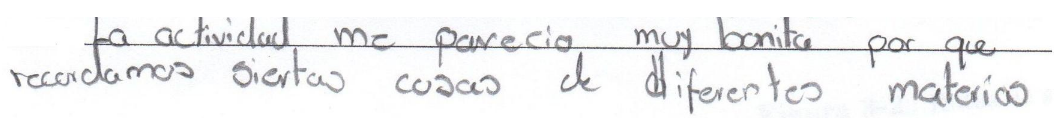


Figura 5-6: Comentario por una estudiante de la actividad 1

El error que evidenciaron los estudiantes al representar los grafos se puede prevenir presentando ejemplos donde dadas las características se represente el grafo.

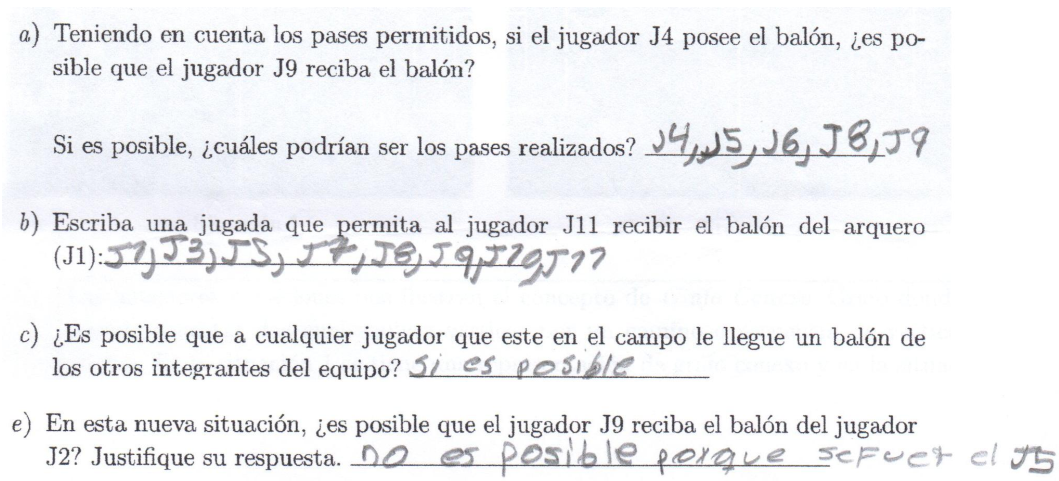
5.1.2. Items 2 y 3

Los estudiantes se apropiaron y comprometieron con el desarrollo de los items. Durante su desarrollo analizaban los diferentes pases que se pueden realizar los jugadores, se hizo necesario aclarar que los pases que estaban permitidos son los indicados por medio de las líneas.

CATEGORIA 1.3

C 1.3. Los estudiantes comprenden el concepto de grafo conexo y no conexo. Todos los estudiantes contestaron las preguntas del item 2 de acuerdo a lo esperado. De igual forma lograron comprender a partir de las dos situaciones las características de los grafos conexos. Esto se evidencia en el item 3 cuando realizan diferentes grafos conexos y no conexos.

Las respuestas dadas a los items 2a, 2b, 2c, 2d y 2e, que en general son muy similares en todos los estudiantes, se presentan a continuación.


a) Teniendo en cuenta los pases permitidos, si el jugador J4 posee el balón, ¿es posible que el jugador J9 reciba el balón?

Si es posible, ¿cuáles podrían ser los pases realizados? J4, J5, J6, J8, J9

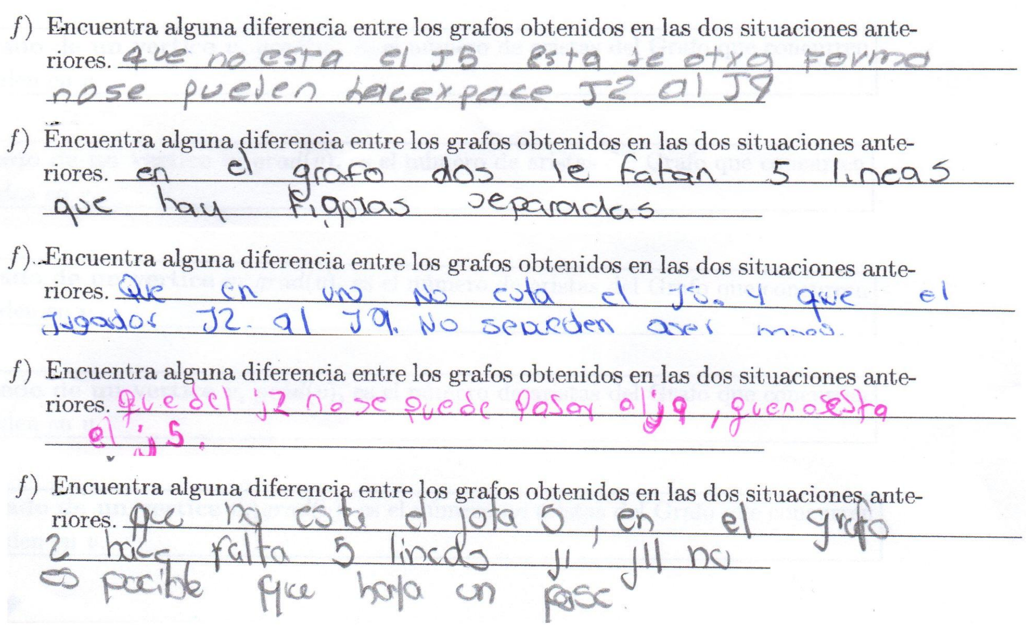
b) Escriba una jugada que permita al jugador J11 recibir el balón del arquero (J1): J1, J3, J5, J7, J8, J9, J10, J11

c) ¿Es posible que a cualquier jugador que este en el campo le llegue un balón de los otros integrantes del equipo? Si es posible

e) En esta nueva situación, ¿es posible que el jugador J9 reciba el balón del jugador J2? Justifique su respuesta. no es posible porque se fue el J5

Figura 5-7: Respuestas a los items 2a, 2b, 2c, 2d, 2e. Actividad 1

Algunas respuestas dadas al item 2f, que indagaba por las diferencias entre los dos grafos representados son:


f) Encuentra alguna diferencia entre los grafos obtenidos en las dos situaciones anteriores. que no esta el J5 esta de otra forma nose pueden hacer pace J2 al J9

f) Encuentra alguna diferencia entre los grafos obtenidos en las dos situaciones anteriores. en el grafo dos le fatan 5 lineas que hay figuras separadas

f) Encuentra alguna diferencia entre los grafos obtenidos en las dos situaciones anteriores. Que en uno no esta el J5. y que el jugador J2 al J9. No se pueden aser mas.

f) Encuentra alguna diferencia entre los grafos obtenidos en las dos situaciones anteriores. que del J2 no se puede pasar al J9, que no esta el J5.

f) Encuentra alguna diferencia entre los grafos obtenidos en las dos situaciones anteriores. que no esta el jota 5, en el grafo 2 hace falta 5 lineas y J1 no es posible que haya un pase

Figura 5-8: Respuestas dadas al item 2f. Actividad 1

Las representaciones de los grafos conexos y no conexos dadas por los estudiantes son:

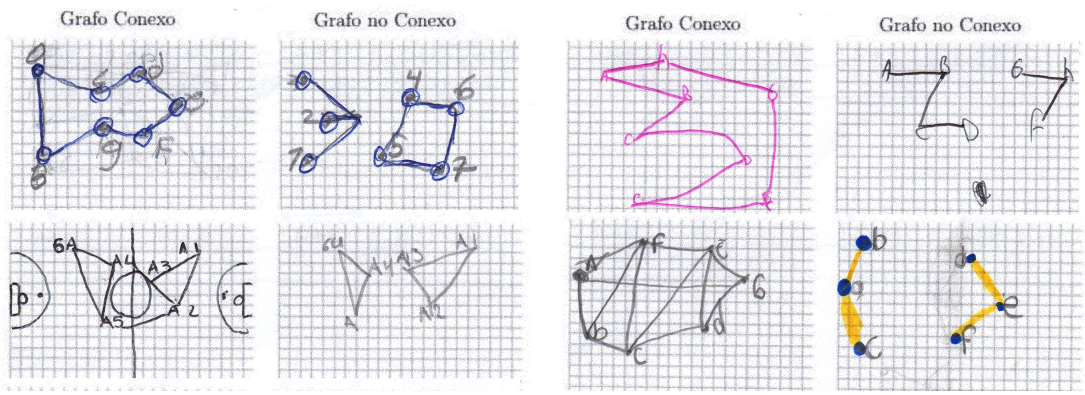


Figura 5-9: Respuestas dadas al item 3. Actividad 1

5.1.3. Items 4, 5, 6, 7 y 8

En esta actividad los estudiantes se apropiaron del concepto de grado de un vértice, hallaron el grado de los vértices de cada uno de los grafos planteados y organizaron la información obtenida de manera adecuada.

Al dibujar los grafos cuya suma de los grados fuera 14 y 11, no todos los estudiantes lo realizaron de manera adecuada. Esta actividad se les planteó como extraclase. Al proponerse la actividad un estudiante mencionó que era fácil porque sólo era suficiente realizar un grafo que tuviera 7 aristas (para el caso del grafo $G1$). Lo anterior nos permite evidenciar, que la forma de organización de la información juega un papel importante para el reconocimiento de patrones.

Los estudiantes completaron la tabla del item 7, a partir de la información de los items 5 y 6. Hasta este punto, los estudiantes habían reconocido el patrón presente (el número de de aristas en un grafo corresponde a la mitad de la suma de los grados de los vértices del grafo). De igual manera observaron que no es posible que la suma de los grados de los vértices sea impar. Finalmente, los estudiantes escriben su conjetura obtenida.

CATEGORIAS 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 y 1.8
C 1.4. Los estudiantes determinan el grado de los vértices en un grafo dado. Todos los estudiantes hallaron adecuadamente el grado de los vértices de un grafo. A continuación se presenta la solución dada por un estudiante al item 4, y los datos organizados en la tabla del item 5.

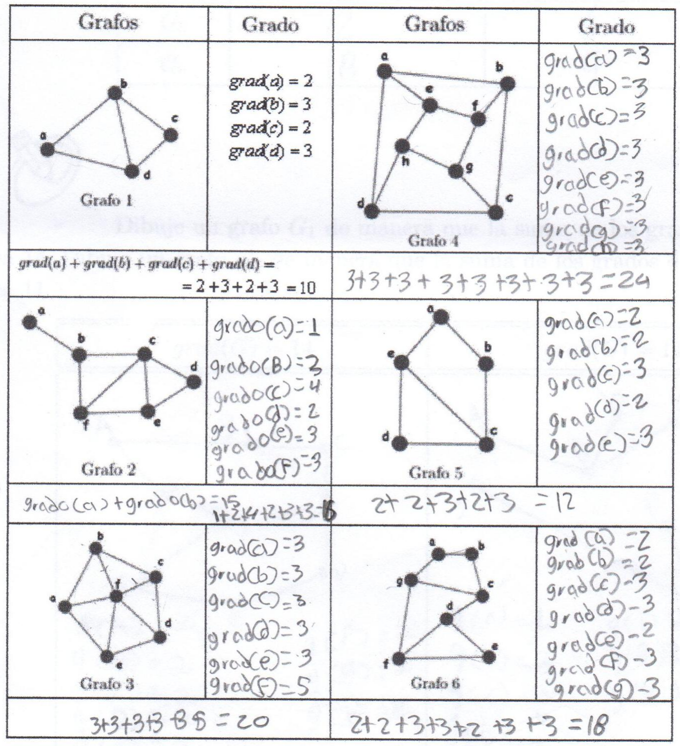


Figura 5-10: Respuestas dadas al item 4. Actividad 1

Grafo	Suma de los grados de los vértices del grafo	N. de Aristas del grafo
G_1	10	5
G_2	16	8
G_3	20	10
G_4	24	12
G_5	12	6
G_6	18	9

Figura 5-11: Respuestas dadas al item 5. Actividad 1

C 1.5. Dado el número que representa la suma de los grados de los vértices de un grafo, los estudiantes realizan el grafo adecuadamente y determinan el número correcto de aristas del mismo.

Dado el número 14 y 11 que corresponden a la suma de los grados de los vértices de los grafos, 15 estudiantes de los 20, realizaron los grafos adecuadamente, e identificaron el número de aristas presentes en cada uno.

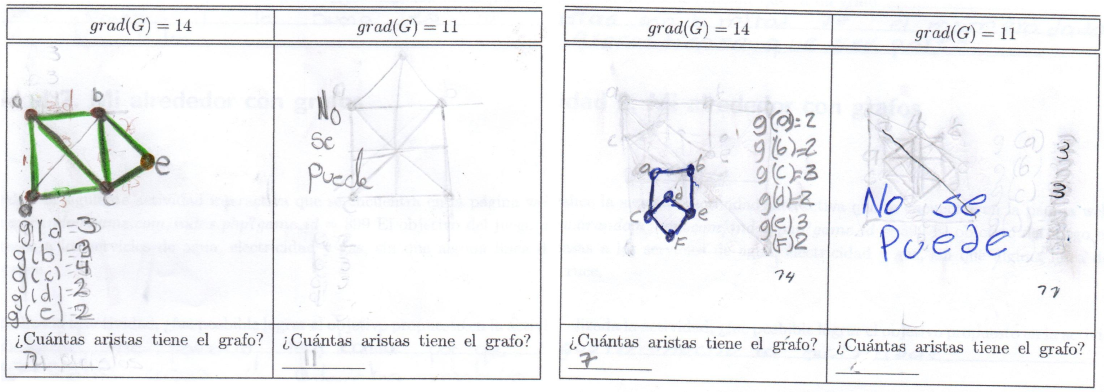


Figura 5-12: Respuestas adecuadas dadas al item 6. Actividad 1

C 1.6. Dado el número que representa la suma de los grados de los vértices de un grafo, los estudiantes no realizan el grafo adecuadamente y no determinan el número correcto de aristas del mismo.

Dado el número 14 y 11 que corresponden a la suma de los grados de los vértices de los grafos, 5 estudiantes de los 20, no realizaron los grafos adecuadamente, y no identificaron el número de aristas presentes en cada uno.

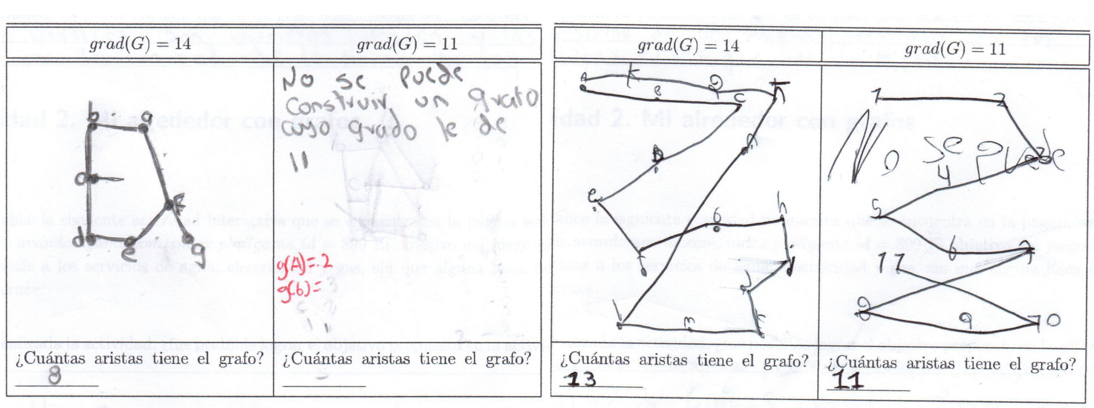


Figura 5-13: Respuestas inadecuadas dadas al item 6. Actividad 1

C 1.7. Los estudiantes identifican el patrón entre el número de aristas de un grafo y la suma de los grados de los vértices del mismo y completan la tabla con los valores faltantes.

Los estudiantes identificaron el patrón entre el número de aristas de un grafo y la suma de los grados de lo vértices, lo que permitió que completaran adecuadamente la tabla planteada en el item 7. Esto se puede observar en las siguientes respuestas.

Grafo	Suma de los grados de los vértices del grafo	N. de Aristas del grafo
G_7	12	6
G_8	14	7
G_9	6	3
G_{10}	11	No se puede
G_{11}	8	4
G_{12}	7	No se puede
G	m	$\frac{m}{2}$

Grafo	Suma de los grados de los vértices del grafo	N. de Aristas del grafo
G_7	12	6
G_8	14	7
G_9	6	3
G_{10}	11	no se puede
G_{11}	8	4
G_{12}	7	No se puede
G	m	$\frac{m}{2}$

Figura 5-14: Respuestas en la tabla del item 7. Actividad 1

C 1.8. Los estudiantes establecen como conjetura que el número de aristas corresponde a la mitad de la suma de los grados de los vétices.

Los estudiantes plantearon en este item la conjetura observada. Al plantearla expresaron verbalmente lo interesante de encontrar que esta situación siempre sucediera en los grafos observados. A continuación se presenta las respuestas dadas por los estudiantes a este item.

8. Conclusión: Se puede concluir que en un grafo que los grados son pares y los aristos son mitad del los grados de los vertices

8. Conclusión: Se puede concluir que en un grafo la suma de los grados tienen que ser pares y las aristas tiene que ser la mitad de los gradas del vertice

8. Conclusión: Se puede concluir que en un grafo que los grados son pares y las aristas son la mitad de los grados

Figura 5-15: Conjetura planteada en el item 8. Actividad 1

5.2. Actividad 2. Mi alrededor con grafos

Teniendo en cuenta los resultados esperados para este actividad, los items se agruparon de la siguiente manera:

- Items 1, 2, 3 y 4. Los estudiantes identificarán si un grafo dado es plano o no.
- Items 5, 6 y 7. Los estudiantes establecerán la relación entre el número de vértices, aristas y regiones de un grafo plano.

A continuación se presenta cada una de los items con las respuestas agrupadas en categorías planteadas.

5.2.1. items 1, 2, 3 y 4

No fue posible cumplir con el objetivo del item 1, debido a que el servicio de internet en la Institución presentó una falla que no se pudo solucionar. Como actividad que supliera esta situación se les propuso que lo realizaran en una hoja de papel (Figura **5-16** y **5-17**). Los estudiantes se motivaron mucho con este juego ya que fue un reto realizarlo y resolverlo.

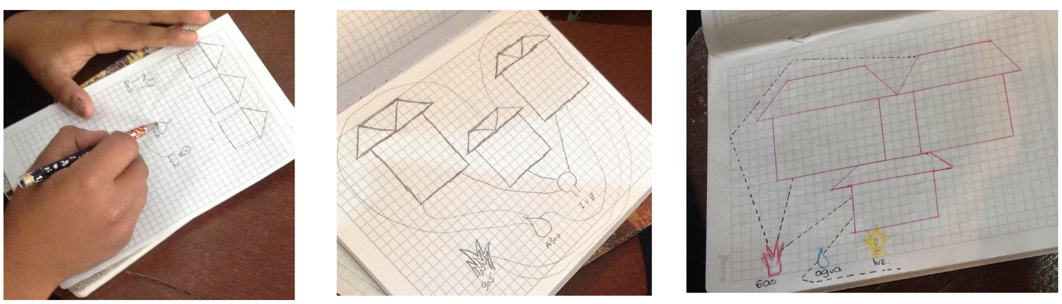


Figura 5-16: Representación del juego: 3 casas y 3 servicios. Actividad 2

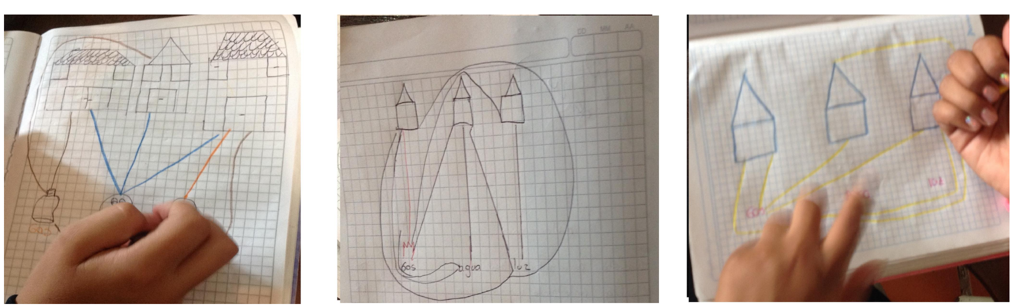


Figura 5-17: Representación del juego: 3 casas y 3 servicios. Actividad 2

A partir de muchos intentos, que los continuaron en la casa, los estudiantes concluyeron que no era posible conectar a las tres casas con los tres servicios: agua, luz y electricidad. Los intentos que realizaron los estudiantes fueron plasmados en el item 2. Algunos de estos resultados se presentan a continuación.

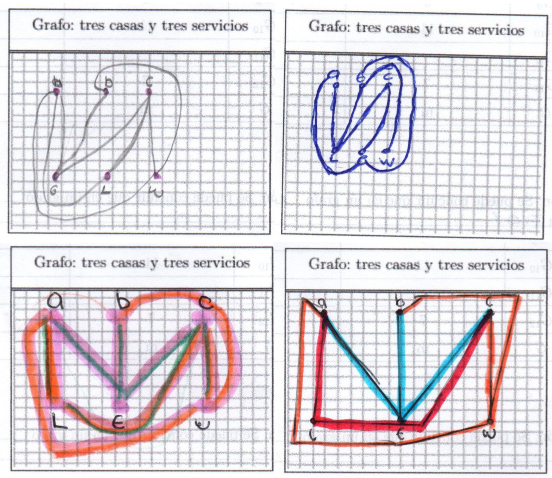
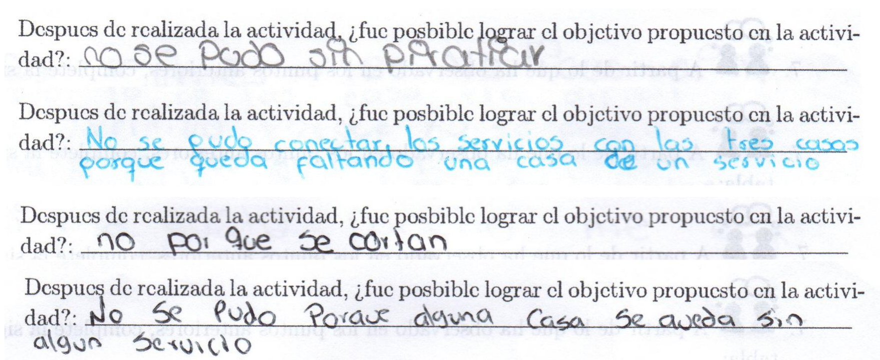


Figura 5-18: Respuesta dada en el item 2. Actividad 2

A la pregunta planteada en el tiem 1, los estudiantes respondieron:



Despues de realizada la actividad, ¿fue posibible lograr el objetivo propuesto en la actividad?: no se Pudo sin piratiar

Despues de realizada la actividad, ¿fue posibible lograr el objetivo propuesto en la actividad?: No se pudo conectar, los servicios con las tres casas porque queda faltando una casa de un servicio

Despues de realizada la actividad, ¿fue posibible lograr el objetivo propuesto en la actividad?: no por que se cortan

Despues de realizada la actividad, ¿fue posibible lograr el objetivo propuesto en la actividad?: No se Pudo Porque alguna Casa se queda sin algun servicio

Figura 5-19: Respuestas dadas en el item 1. Actividad 2

Como aspecto curioso, los estudiantes utilizaron la palabra "piratiar" cuando contemplan la conexión para una de las casas desde otra casa, situación que permitiría dar respuesta al problema. Por lo que dicen que no es posible sin piratiar.
Respecto a los items 3 y 4, se cumplió el propósito planteado ya que los estudiantes comprendieron el significado de un grafo plano, que se evidenció cuando representaron adecuadamente los grafos de manera que las aristas no se intersecaran salvo en sus

extremos. En el item 4, determinaron correctamente que los cuatro grafos planteados eran planos.

Para posteriores aplicaciones se puede proponer, en la situación a resolver por los estudiantes, ejemplos de grafos no planos.

CATEGORIA 2.1

C 2.1. Los estudiantes determinan si un grafo es plano o no.

Todos los estudiantes determinaron correctamente si un grafo es plano o no. Algunas representaciones de los grafos planos a los grafos dados se presentan a continuación.

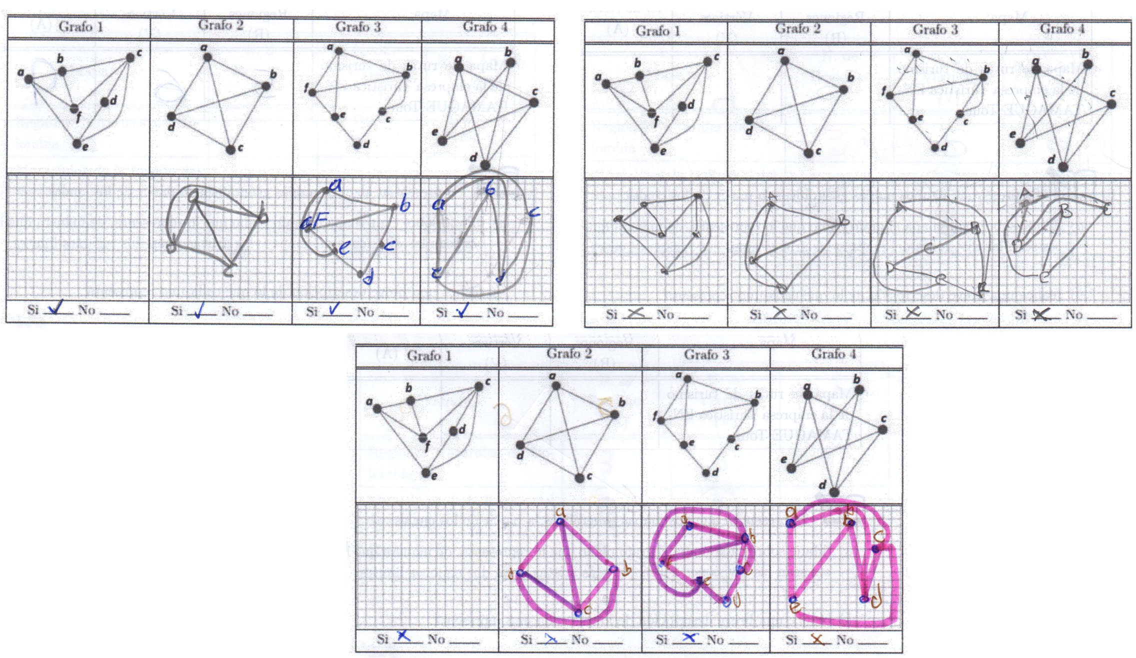


Figura 5-20: Respuesta dada en el item 4. Actividad 2

5.2.2. Items 5, 6 y 7

En el desarrollo de estos items, los estudiantes se sintieron familiarizados con los mapas, ya que recordaron las ubicaciones de algunos países (mapas 2 y 3) y municipios que hacen parte de la región del Sumapaz (región a la pertenece Tibacuy, municipio de residencia de los estudiantes).

Realizaron el grafo asociado a cada mapa, con una limitante y fue el reducido tamaño en que se presentaron los mapas. Motivo por el cual se utilizó como recurso un mapamundi y la representación de mapas en el tablero. La imagen del mapa 4, regiones de Sumapaz, no fue muy claro, lo que no permitió diferenciar las diferentes regiones. A partir de los grafos obtenidos completaron adecuadamente la tabla con los valores solicitados.

A contiuación se presenta los grafos asociados a los diferentes mapas y la tabla completa con los datos.

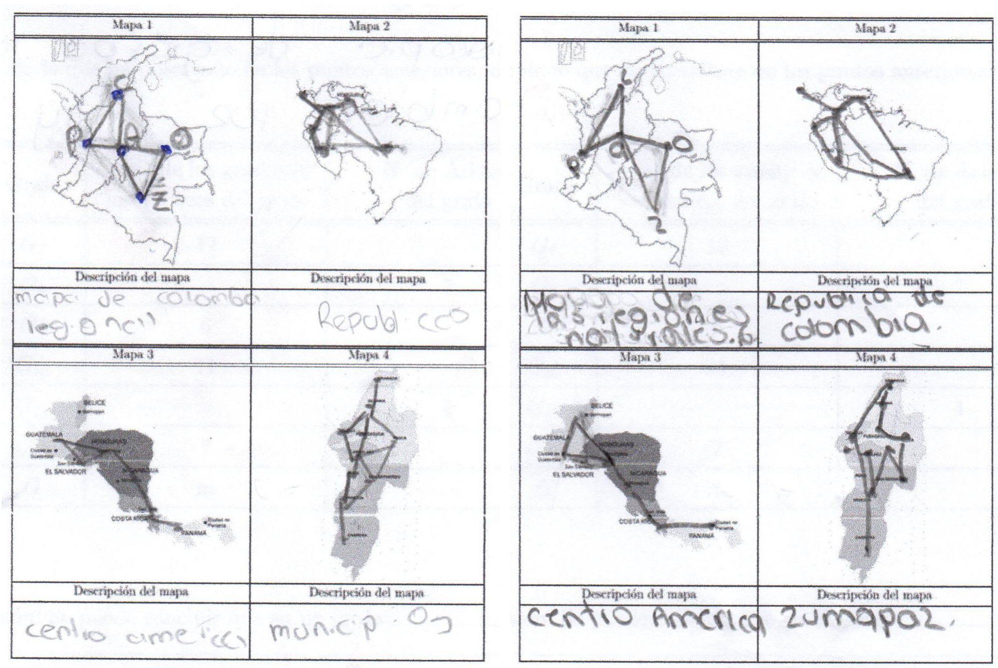


Figura 5-21: Grafos asociados a los mapas del item 6. Actividad 2

Mapa	N. de Regiones (R)	N. de Vértices (V)	N. de Aristas (A)
Regiones Naturales de Colombia	3	5	6
Municipios de la Región del Sumapaz	8	10	16
Paises de Centroamerica	2	6	6
Colombia y países límites	4	6	8

Mapa	N. de Regiones (R)	N. de Vértices (V)	N. de Aristas (A)
Regiones Naturales de Colombia	3	5	6
Municipios de la Región del Sumapaz	8	10	16
Paises de Centroamerica	2	6	6
Colombia y países límites	4	6	8

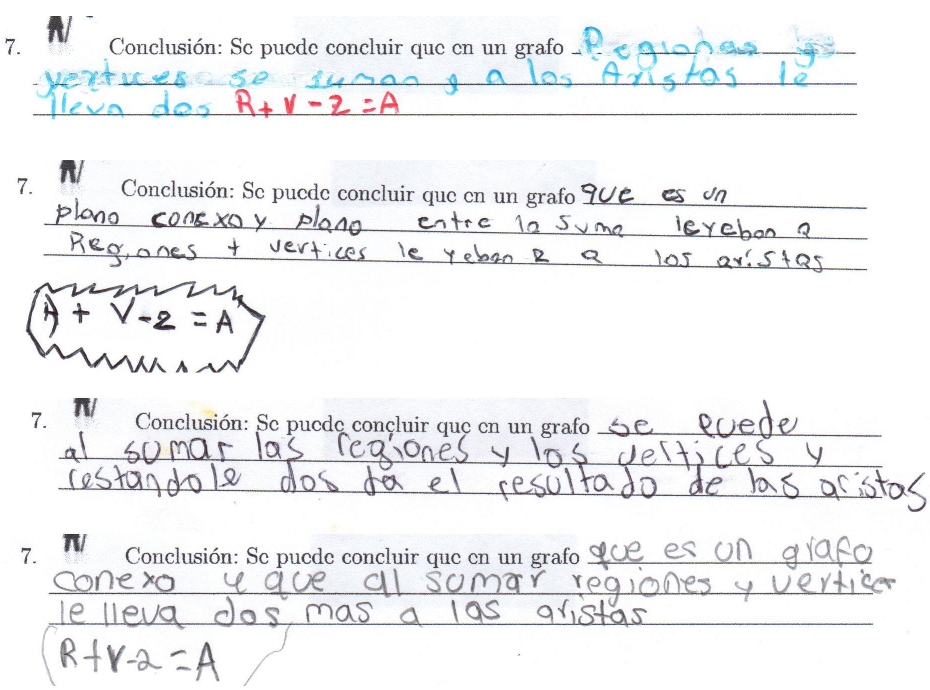
Figura 5-22: Datos en la tabla del item 6. Actividad 2

Socializar la tabla del item 6 en el tablero permitió que los estudiantes observaran el patrón que relaciona el número de aristas, vértices y regiones de cada grafo. Los estudiantes empezaron a observar que en la columna de las aristas todos los números son pares. Después de varios minutos se les pidió a los estudiantes que sumaran los valores de las dos primeras columnas y que determinaran la característica del número que obtenían. En este momento observaron el patrón y manifestaron que la suma de los valores de las regiones y vértices excedía en 2 al número de aristas. Esta observación la escribieron como conclusión en el item 7.

CATEGORIA 2.2

C 2.2. Los estudiantes observan el patrón presente en el número de regiones, vértices y aristas en un grafo plano.

Para que los estudiantes observaran el patrón presente, se les realizó preguntas relacionadas que guiaron este proceso. Todos los participantes de la actividad estaban motivados en encontrar una relación como la obtenida en la actividad 1. Muchos de los estudiantes empezaron observando si alguno de los valores correpondía a la mitad de otro. Esto debido a que es la primera forma de patrones que han identificado, lo que permite concluir que a medida que a los estudiantes se les presenta diversos patrones, ellos establecen mas estrategias en un momento determinado. Algunas respuestas al item 7 se presentan a continuación.


7. Conclusión: Se puede concluir que en un grafo Regiones y vertices se suman y a los Aristas le lleva dos R+V-2=A

7. Conclusión: Se puede concluir que en un grafo que es un plano conexo y plano entre la suma leyeban a Regiones + vertices le yeban 2 a los aristas

A + V-2 = A

7. Conclusión: Se puede concluir que en un grafo se puede al sumar las regiones y los vertices y restandole dos da el resultado de las aristas

7. Conclusión: Se puede concluir que en un grafo que es un grafo conexo y que al sumar regiones y vertices le lleva dos mas a las aristas

R+V-2=A

Figura 5-23: Respuesta dadas al item 7. Actividad 2

5.3. Actividad 3. Sin levantar la mano

A partir de los resultados esperados para este actividad, los items se agruparon de la siguiente manera:

- Items 1, 2 y 3. Los estudiantes identificarán si un grafo es recorrible o no.
- Items 4, 5, 6 y 7. Los estudiantes establecerán las condiciones que debe cumplir un grafo para ser recorrible (Teorema 2.2).

Esta actividad se desarrolló y cumplió con el objetivo propuesto. Adicional a los items propuestos se plantearon ejercicios adicionales en el cual los estudiantes practicaron sus hallazgos y establecieron los circuitos para aquellos que era posible y una explicación para aquellos que no eran recorribles.

Estos ejercicios extras son los siguientes[1]:

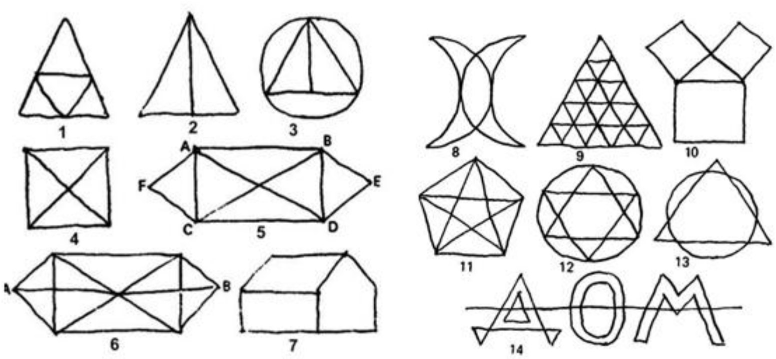


Figura 5-24: Ejercicios adicionales de trazos de grafos

Las respuestas dadas por los estudiantes se presentan a continuacón agrupadas en categorías.

5.3.1. Items 1, 2 y 3

A partir de la información descrita, los estudiantes realizaron la comprobación y representaron los grafos siguiendo el circuito presentado en el ejemplo. Seguido esto, identificaron aquellos grafos recorribles y no recorribles del item 2.

CATEGORIA 3.1
C 3.1. Los estudiantes determinan si un grafo es recorrible o no.

[1]Ejercicios extraídos de [21]

Todos los estudiantes determinaron correctamente si un grafo es recorrible o no. Algunos circuitos que describieron los estudiantes para cada grafo, se presentan a continuación.

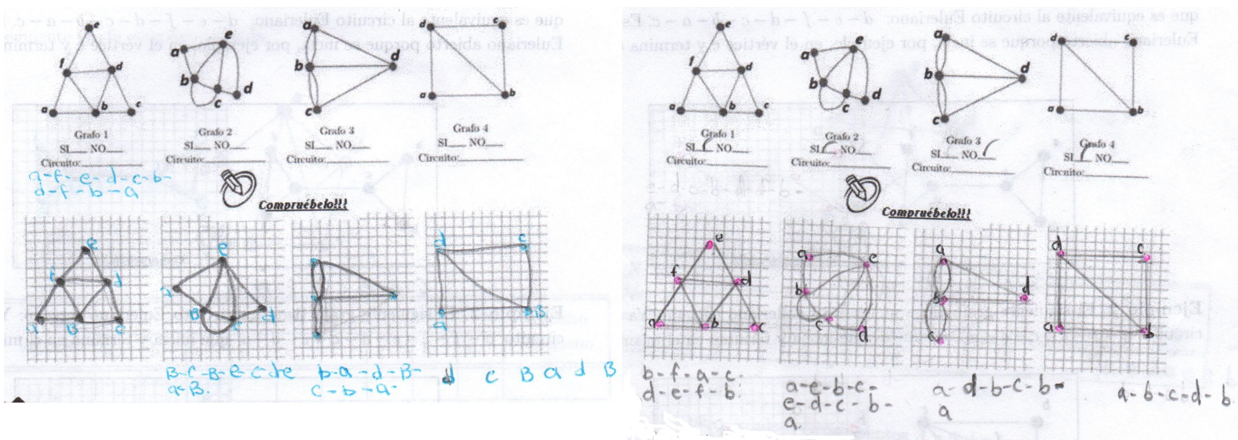
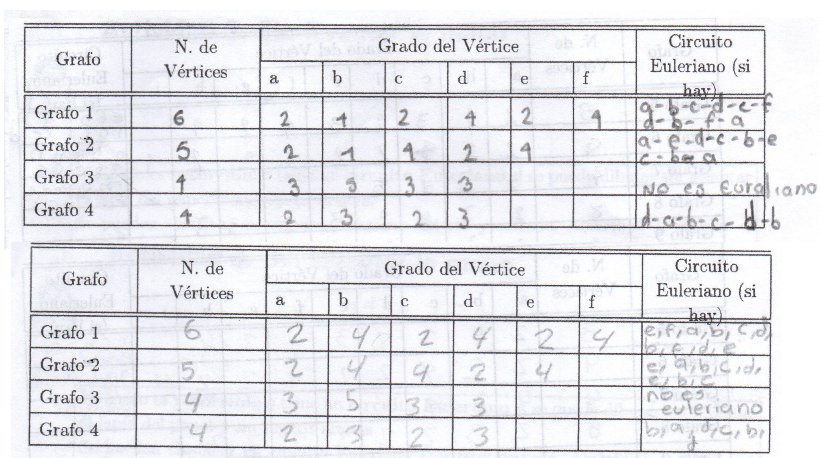


Figura 5-25: Respuesta dadas al item 2. Actividad 3

En el item 3, los estudiantes completaron adecuadamente la tabla con los grados de cada uno de los vértices de los grafos. Estos son algunas de las soluciones.



Grafo	N. de Vértices	Grado del Vértice a	b	c	d	e	f	Circuito Euleriano (si hay)
Grafo 1	6	2	4	2	4	2	4	a-b-c-d-e-f-d-b-f-a
Grafo 2	5	2	4	4	2	4		a-e-d-c-b-e-c-ba a
Grafo 3	4	3	5	3	3			No es Euraliano
Grafo 4	4	2	3	2	3			d-a-b-c-d-b

Grafo	N. de Vértices	Grado del Vértice a	b	c	d	e	f	Circuito Euleriano (si hay)
Grafo 1	6	2	4	2	4	2	4	e,f,a,b,c,d,b,f,d,e
Grafo 2	5	2	4	4	2	4		e,a,b,c,d,e,b,c
Grafo 3	4	3	5	3	3			no es euleriano
Grafo 4	4	2	3	2	3			b,a,d,c,b, d

Figura 5-26: Respuesta dadas a la tabla propuesta en el item 3. Actividad 3

5.3.2. Items 4, 5, 6 y 7

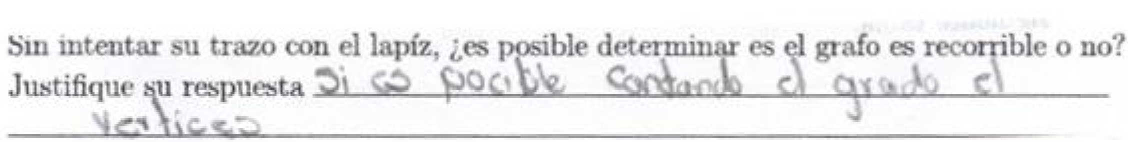
En estos items los estudiantes estuvieron muy activos ya que deseaban ser los primeros en lograr dibujar el grafo sin levantar la mano. Se hicieron concursos en parejas sobre sus cuadernos y luego en el tablero. Los estudiantes mostraron muy buena actitud, completaron correctamente la tabla planteada en el item 5.

Grafo	N. de Vértices	Grado del Vértice a	b	c	d	e	f	g	h	i	Circuito Euleriano (si hay)
Grafo 5	8	2	4	3	2	3	4	2	4		[illegible]
Grafo 6	- 9	2	2	4	2	2	4	2	2	4	[illegible]
Grafo 7	4	4	3	4	5						[illegible]
Grafo 8	8	2	3	2	2	3	2	3	3		NO
Grafo 9	4	3	3	3	3						NO
Grafo 10	4	3	3	3	3						No

Grafo	N. de Vértices	Grado del Vértice a	b	c	d	e	f	g	h	i	Circuito Euleriano (si hay)
Grafo 5	8	2	4	3	2	3	4	2	4		[illegible]
Grafo 6	-9	2	2	4	2	2	4	2	2	4	[illegible]
Grafo 7	4	4	3	4	5						[illegible]
Grafo 8	8	2	3	2	2	3	2	3	3		
Grafo 9	4	3	3	3	3						
Grafo 10	4	3	3	3	3						

Figura 5-27: Respuesta dadas a la tabla propuesta en el item 5. Actividad 3

En el item 6 se le pidió a los estudiantes la posibilidad de determinar si el grafo era recorrible o no sin utilizar el lápiz, pero esto les fue difícil, ya que antes de leer el ejercicio estaban tratando de resolverlo con ayuda del lápiz. Los estudiantes observaron las tablas que se les organizó en el tablero (tablas item 3 y 5) y determinaron diversos patrones. Uno de estos, es que habían grafos en los que todos los grados son pares, otros en los que todos los grados son impares, y otros en los que solamente habia 2 grados impares. Comparando estos patrones con aquellos que eran recorribles o no, determinaron las condiciones para que el grafo sea recorrible.



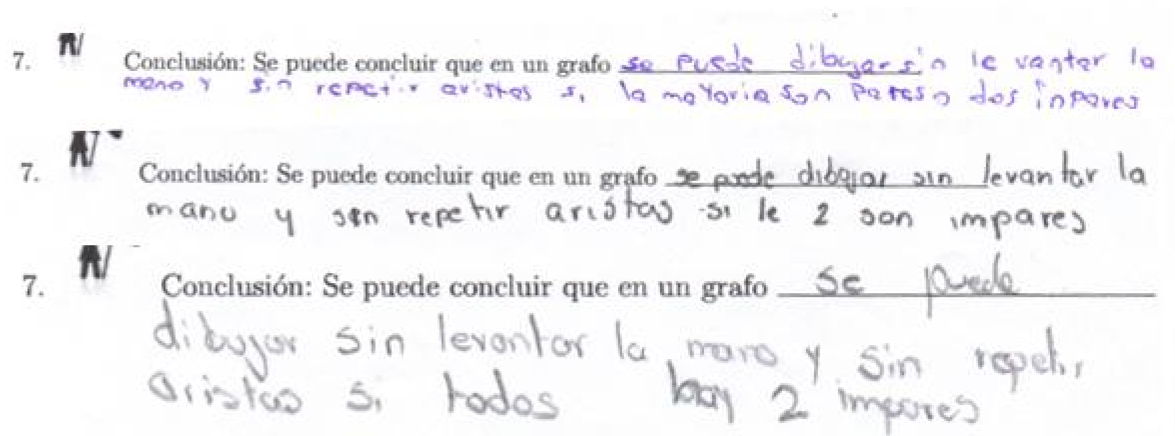
Sin intentar su trazo con el lapíz, ¿es posible determinar es el grafo es recorrible o no?
Justifique su respuesta Si es pocible contando el grado el vertices

Figura 5-28: Respuesta dadas al item 6. Actividad 3

CATEGORIA 3.2

C 3.2. Los estudiantes determinan las condiciones para que un grafo sea recorrible o no.

Todos los estudiantes determinaron correctamente las condiciones que debe tener un grafo para que se pueda recorrer sin levantar la mano. Algunas conjeturas escritas por los estudiantes se presentan a continuación.



7. Conclusión: Se puede concluir que en un grafo se puede dibujar sin levantar la mano y sin repetir aristas si la mayoria son pares o dos impares

7. Conclusión: Se puede concluir que en un grafo se puede dibujar sin levantar la mano y sin repetir aristas si le 2 son impares

7. Conclusión: Se puede concluir que en un grafo se puede dibujar sin levantar la mano y sin repetir aristas si todos hay 2 impares

Figura 5-29: Respuesta dadas al item 7. Actividad 3

5.4. Actividad 4. ¿Cuántas veces debo levantar el lápiz?

Los estudiantes identificarán el mínimo de veces que se debe levantar la mano para dibujar un grafo no recorrible

Los items se agruparon de la siguiente manera, a partir de los resultados esperados en la actividad.

- Items 1, 2 y 3. Los estudiantes identificarán el mínimo de veces que se debe levantar la mano para dibujar un grafo no recorrible

5.4.1. Items 1, 2 y 3

Esta actividad cumplió con su propósito ya que los estudiantes reconocieron el patrón y establecieron la cantidad mínima de veces que se debe levantar la mano para dibujar un grafo no recorrible.

En el item 1 los estudiantes realizaron los grafos y determinaron la cantidad mínima de veces que deben levantar el lápiz. Hallaron el grado de cada uno de los vértices, lo que les permitió completar la tabla que se les planteó. Algunas de estas soluciones son:

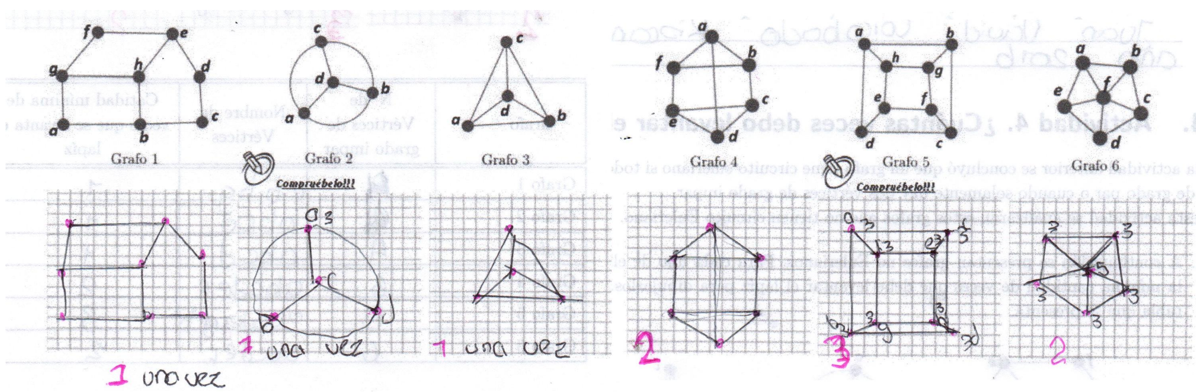


Figura 5-30: Respuesta dadas al item 1. Actividad 4

Grafo	N. de Vértices de grado impar	Nombre de Vértices	Catidad mínima de veces que se levanta el lapíz
Grafo 1	4	e,b,h,g	1
Grafo 2	4	a,b,c,d	1
Grafo 3	4	a,b,c,d	1
Grafo 4	6	a,b,c,d,e,f	2
Grafo 5	8	a,b,c,d,e,f,g	3
Grafo 6	6	a,b,c,d,e,f	2

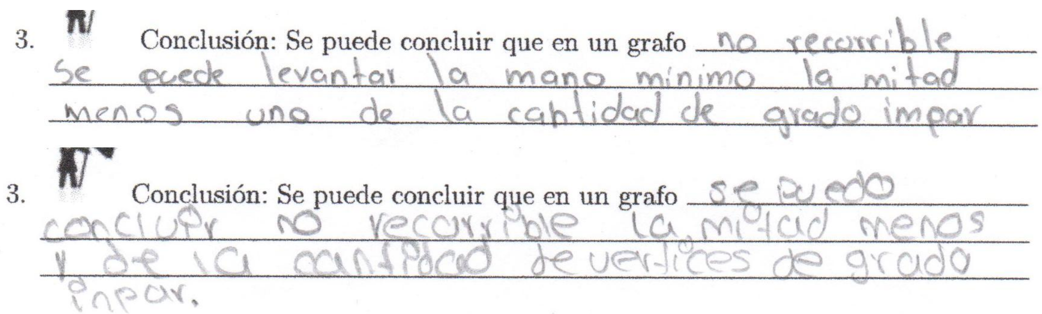
Figura 5-31: Respuesta dadas a la tabla del item 1. Actividad 4

En los items 2 y 3 los estudiantes observaron los datos presentados en la tabla y determinaron el patrón presente entre el número de vértices impar y la cantidad mínima de veces que debe levantar el lápiz.

CATEGORIAS 4.1

C 4.1. Los estudiantes determinan la cantidad mínima de veces que debe levantar el lápiz, a partir de los cantidad de vértices de grado impar.

Todos los estudiantes observaron la relación presente entre la cantidad de vértices de grado impar y la cantidad mínima de veces que se levanta el lápiz. Establecieron por conjetura que la cantidad mínima de veces que se debe levantar la mano corresponde a la mitad de número de vértices de grado impar, menos 1. Algunas respuestas dadas por los estudiantes se presentan a continuación.



3. Conclusión: Se puede concluir que en un grafo no recorrible se puede levantar la mano mínimo la mitad menos uno de la cantidad de grado impar

3. Conclusión: Se puede concluir que en un grafo se puedo concluir no recorrible la mitad menos 1 de la cantidad de vertices de grado impar.

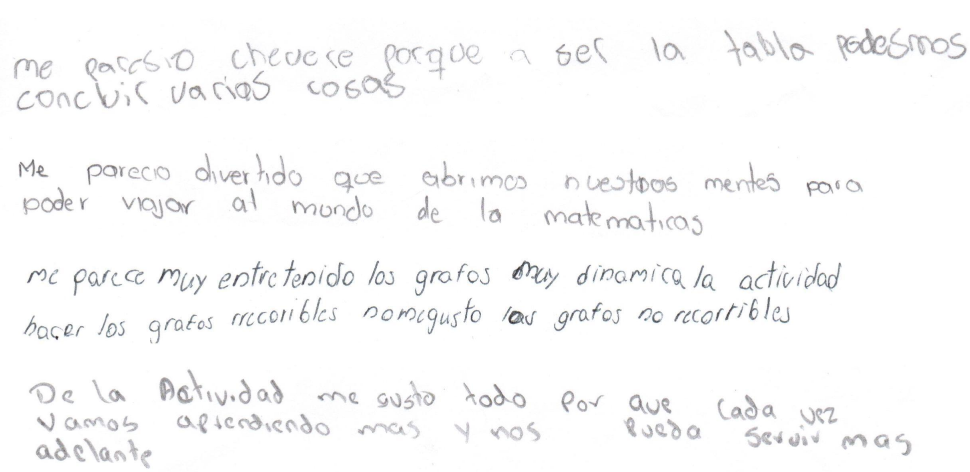
Figura 5-32: Respuesta dadas al item 7. Actividad 4

5.4.2. Item 4

Para finalizar las actividades, se les proyectó el video propuesto en este item. Los estudiantes observaron diferentes aplicaciones e identificaron diferentes personajes importantes en el desarrollo de esta teoría como: Leonhard Euler y Willliam Hamilton. Como actividad extra se les solicitó investigar sobre estos dos brillantes matemáticos.

5.5. Observaciones generales

Durante el desarrollo de las diferentes actividades, los estudiantes escribieron comentarios a las mismas. A continuación se presenta algunos de estos comentarios.

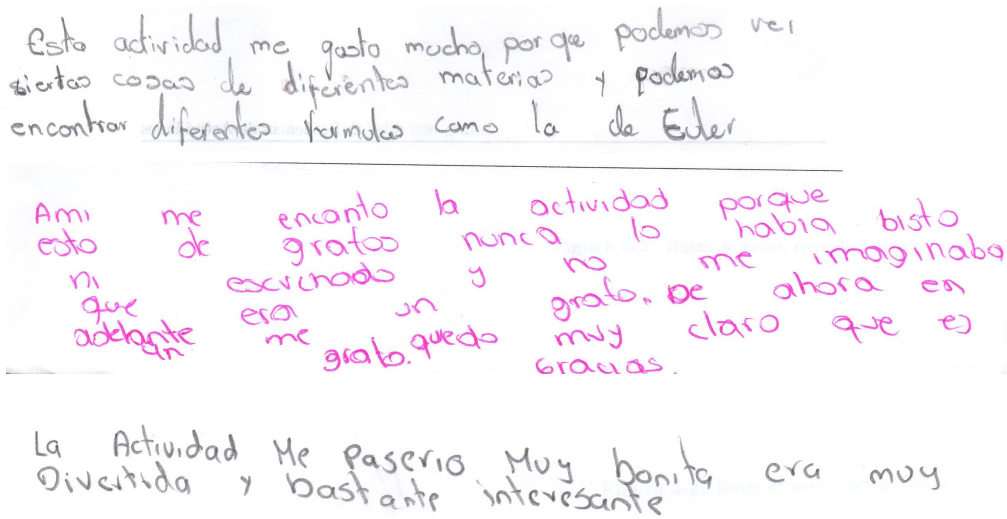


me parecio chevere porque a ser la tabla podesmos concluir varias cosas

Me parecio divertido que abrimos nuestros mentes para poder viajar al mundo de la matematicas

me parece muy entretenido los grafos muy dinamica la actividad hacer los grafos recorribles no me gusto los grafos no recorribles

De la Actividad me gusto todo por que cada vez vamos aprendiendo mas y nos pueda servir mas adelante



Esta actividad me gusto mucho porque podemos ver siertas cosas de diferentes materias y podemos encontrar diferentes formulas como la de Euler

Ami me encanto la actividad porque esto de grafos nunca lo habia bisto ni escuchado y no me imaginaba que era un grafo. De ahora en adelante me quedo muy claro que es un grafo. gracias.

La Actividad Me Paserio Muy bonita era muy Divertida y bastante interesante

Figura 5-33: Comentarios de los estudiantes a la secuencia de actividades

5.6. Síntesis de las categorías de análisis

Categorías de Análisis	Cantidad de Estudiantes
C 1.1. Dada la información, los estudiantes representan adecuadamente los grafos.	8
C 1.2. Dada la información, los estudiantes no representan adecuadamente los grafos.	12
C 1.3. Los estudiantes comprenden el concepto de grafo conexo y no conexo.	20
C 1.4. Los estudiantes determinan el grado de los vértices en un grafo dado.	20
C 1.5. Dado el número que representa la suma de los grados de los vértices de un grafo, los estudiantes realizan el grafo adecuadamente y determinan el número correcto de aristas del mismo.	15
C 1.6. Dado el número que representa la suma de los grados de los vértices de un grafo, los estudiantes no realizan el grafo adecuadamente y no determinan el número correcto de aristas del mismo.	5
C 1.7. Los estudiantes identifican el patrón entre el número de aristas de un grafo y la suma de los grados de los vértices del mismo y completan la tabla con los valores faltantes.	20
C 1.8. Los estudiantes establecen como conjetura que el número de aristas corresponde a la mitad de la suma de los grados de los vétices.	20
C 2.1. Los estudiantes determinan si un grafo es plano o no.	20
C 2.2. Los estudiantes observan el patrón presente en el número de regiones, vértices y aristas en un grafo plano.	20
C 3.1. Los estudiantes determinan si un grafo es recorrible o no.	20
C 3.2. Los estudiantes determina las condiciones para que un grafo sea recorrible o no.	20
C 4.1. Los estudiantes determinan la cantidad mínima de veces que debe levantar el lapiz, a partir de los cantidad de vértices de grado impar.	20

Tabla 5-2: Categorías de análisis

6 Conclusiones y recomendaciones

En este capítulo se presenta las conclusiones obtenidas tras la realización de este trabajo. Se presentan inicialmente, aquellas relacionadas con los aspectos teóricos y metodológicos que fundamentaron la propuesta. A continuación, se especifícan los resultados relacionados con el diseño y aplicación de la secuencia de actividades, y finalmente, se presentan recomendaciones que el análisis de resultados arrojó para posteriores aplicaciones de las actividades propuestas.

Aspectos teóricos y metodológicos

- En la enseñanza de las matemáticas, el razonamiento es un proceso que debe estar presente en todo el trabajo con los estudiantes, lo que implica que se hace necesario plantear actividades donde se deban formular hipótesis, hacer conjeturas, encontrar contraejemplos, patrones, entre otras acciones. Las fuentes consultadas plantean que en el reconocimiento de patrones se deben plantear actividades no mecánicas, que involucre diferentes áreas y en diferentes momentos del año escolar. Al mismo tiempo que genere en los estudiantes diferentes tipos de actividades, por ejemplo, identificación, reproducción, extrapolación y extensión de un patrón.

- Es importante el uso de diversas formas de representación en una misma situación, por ejemplo, de una representación gráfica, pasar a numérica, y a organizarla en tablas que permitan visualizar relaciones entre los diferentes elementos. Otro elemento importante es favorecer espacios que permitan que los estudiantes expresen de forma oral o escrita sus observaciones y conjeturas.

- Potenciar actividades que favorezcan el reconocimiento de patrones. Su generalización es una forma de preparar el aprendizaje de sistemas algebraicos que se abordan en los grados séptimo y octavo.

- Para el reconocimiento de patrones y establecimiento de conjeturas, la forma como se organiza y se presenta la información permite que se puedan observar diferentes relaciones entre elementos. El estudio previamente realizado permitió fortalecer el uso de tablas y reconocer la importancia de las mismas.

Diseño y aplicación de la secuencia de actividades

- Los resultados obtenidos en la implementación de la secuencia de actividades, permite corroborar y dar cuenta que el trabajo con patrones permite que los estudiantes se convierten en constructores de su propio aprendizaje, se motiven al reconocer relaciones presentes en determinadas situaciones y genere en ellos una búsqueda constante de patrones. Esto se evidenció al abordar el tema de criterios de divisibilidad, posterior a la apliación de la secuencia de actividades. Al abordar un criterio de divisibilidad los estudiantes reconocían diferentes patrones presentes en diferentes conjuntos de números. Esta secuencia de actividades permitió introducir en los estudiantes el reconocimiento de patrones.

- Los grafos son una herramienta didáctica en la enseñanza de las matemáticas puesto que permiten modelar situaciones de diferentes áreas (sociales, biología, etc); motivar el estudio de las matemáticas por ser temas no estudiados, llamativos, y que no requieren conceptos previos que les dificulte su abordaje. Este último aspecto se observó en el desarrollo de las actividades ya que todos los estudiantes estuvieron motivados y manifestaron que era un tema interesante. Los estudiantes con dificultades en matemáticas se mostraron participativos puesto que no les implicaba recordar o utilizar conceptos trabajos previamente. Por otra parte manifestaron que fue interesante el trabajo porque "recordaron ciertas cosas de diferentes materias". Esto permite que los estudiantes reconocieran la interrelación que hay entre las diferentes áreas.

- Durante el desarrollo de las diferentes actividades se evidenció que los estudiantes presentaron dificultades en el reconocimiento de patrones ya que en sus años de estudio anteriores no se les han presentado patrones, de manera que no cuentan con diferentes recursos al momento de establecer relaciones existentes. Por otro lado, se les dificultó escribir adecuadamente sus conjeturas.

Recomendaciones

- En la actividad 1- item 1, plantear ejemplos de situaciones que se representen por medio de grafos. El análisis de resultados permitió dar cuenta que los estudiantes no representaron adecuadamente situaciones por medio de grafos, tal vez, por no presentarse ejemplos antes de plantear la actividad.

- En la actividad 2 -item 4, plantear grafos que no sean planos para que se evidencie esta característica. En la secuencia solamente se plantearon grafos planos.

Bibliografía

[1] Araúz, C.: Problemas y Conjeturas de la Teoría de Grafos / Universitat de Barcelona. 2008-2009. – Informe de Investigación. – 129 p.

[2] Braicovich, T.: Grafos: Una misma situación para la construcción de distintos modelos extramatemáticos. En: *Actas del VII CIBEM, Montevideo, Uruguay.* (2013), p. 803–809

[3] Bressan, A. ; Gallego, M.: El proceso de matematización progresiva en el tratamiento de patrones. En: *Correo del Maestro* 168 (Mayo 2010), p. 5–21

[4] Buhler, M.: *Spock, Euler, and Madison: Graph Theory in the Classroom*. Utah, Estados Unidos, Utah State University, Tesis de Grado, 2013

[5] Cañadas, M.: *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de Educación Secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Madrid, Universidad de Granada, Tesis de Doctorado, 2007

[6] Castro, E.: *Exploración de Patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14años)*. Madrid, Universidad de Granada, Tesis de Doctorado, 1995

[7] Chiappa, R.: Algunas Motivaciones Históricas en la Teoría de Grafos. En: *Revista de Educación Matemática, Unión Matemática Argentina* 1 (1989), Nr. 4, p. 37–54

[8] Cognigni, R. ; Braicovich, T. ; Reyes, C.: Recorriendo grafos a lo largo de la Educación General Básica. En: *Revista de Educación Matemática* 24 (2008), p. 1–17

[9] Dickson, A. *Introduction to Graph Theory*. 2006

[10] Diestel, R.: *Graph Theory*. New York : Springer-Verlag, 1997

[11] Ministerio de Educación Nacional, MEN. *Lineamientos Curriculares de matemáticas*. 1998

[12] Ministerio de Educación Nacional, MEN. *Estándares Básicos de Competencias*. Mayo 2006

[13] Fujie, F. ; Zhang, P: Hamiltonian Walks (Cap. 2). En: *Covering Walks in Graphs*, 2014, p. 35–66

[14] Giaquinto, Marcus: The Epistemology of Visual Thinking in Mathematics. En: Zalta, Edward N. (Ed.): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Winter 2016. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2016

[15] Gribkovskaia, I. ; Halskau, O. ; Laporte, G.: The Bridges of Königsberg - A Historial Perspective / Molde University College. 2007. – Informe de Investigación. – 8 p.

[16] Grimaldi, R.P.: *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. Wilmington,Delaware,E.U.A : Addison-Wesley Iberoamericana, 1997

[17] Lessner, D.: Graph Theory in High School Education / Department of Software and Computer Science Education, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, Prague, Czech Republic. 2011. – Informe de Investigación. – 6 p.

[18] Mitchem, J.: On the History and Solution of the Four-Color Map Problem. En: *The Two-Year College Mathematics Journal.* 12 (Mar 1981), Nr. 2, p. 108–116

[19] Nuñez, J. ; Perez, S. ; Diánez, M. ; Olivenza, M.: Siete puentes, un camino:Königsberg. En: *SUMA. Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas* 45 (Febrero de 2004), p. 69–78

[20] Pegg, E.: The Icosian Game, Revisited. En: *The Mathematica Journal* 11:3 (2009), p. 310–314

[21] Kap. Capítulo 24. De un trazo In: Perelmán, Y.: *Problemas y Experimentos Recreativos.* Editorial Mir Moscú, 1913, p. 452–461

[22] Portan, A. ; Costa, B.: *Las Regularidades:Fuente de aprendizajes matemáticos.* Buenos Aires : Consejo Provincial de Educación, 1996

[23] Reinoso, C.: Hacia la complejidad por la vía de las redes. Nuevas lecciones epistemológicas. En: *Desacatos, México.* (2008), Nr. 28

[24] Ruohonen, K.: Graph Theory / Tampere University of Technology. 2008. – Informe de Investigación. – 114 p.

[25] Sandifer, C.E.: *The Early Mathematics of Leonhard Euler.* United States of America : The Mathematical Association of America, 2007

[26] Vergel, C. ; Molina, B. ; Echeverry, A.: Grafos en la Educación Básica. En: *Revista EMA* 10 (2005), Nr. 2 y 3, p. 440–451

[27] Walters, M.: It appears That four Colors Suffice: A historical overview of the four-colot theorem. En: *SIGMAA- History of Mathematics* (May 2004), p. 1–12

[28] Wilson, R.J.: *Introduction to Graph theory*. England : Addison Wesley Longman Limited, 1996

[29] Kap. Las corrientes constructivistas y los modelos autoestructurantes In: Zubiría, J.: *Los Modelos Pedagógicos: Hacia una pedagogía dialogante*. Bogotá : Cooperativa Editorial Magisterio, 2007, p. 145–188