



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Valoración de Derivados de la Tasa Swap utilizando el Modelo Gaussiano de dos Factores (G2++)

Edgar Augusto Trilleras Motta

Universidad Nacional de Colombia  
Departamento de Matemáticas  
Bogotá, Colombia  
2017



# Valoración de Derivados de la Tasa Swap utilizando el Modelo Gaussiano de dos Factores (G2++)

Edgar Augusto Trilleras Motta

Trabajo Final presentado como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Ciencias Matemática Aplicada**

Director:  
Alejandra Sánchez

Universidad Nacional de Colombia  
Departamento de Matemáticas  
Bogotá, Colombia  
2017



# Agradecimientos

A Dios por ser mi fortaleza. A mi familia por su apoyo incondicional. A la profesora Alejandra Sánchez por su orientación.



## Resumen

Se logra una valoración de un derivado financiero de la tasa Swap, el Constant Maturity Swap (CMS), valorado en un modelo afín de dos factores el G2++, por dos caminos distintos consiguiéndose resultados muy cercanos. El primero, modelando directamente el valor esperado con Monte Carlo y el segundo utilizando técnicas del Ajuste por Convexidad. Se mejoran algunas fórmulas y se adaptan a un Modelo Multifactorial.

**Palabras clave:** Modelo G2++, Swap, Constant Maturity Swap, Medida Neutral al Riesgo, Numerario, Valoración, Ajuste por Convexidad.

## Abstract

An evaluation is achieved of a financial derivate of the Swap rate, the Constant Maturity Swap (CMS), valued in a two-factor affine model, G2++, by two different paths, obtaining very close results. The first, directly modeling the expected value with Monte Carlo and the second using Convexity Adjustment techniques. Some formulas are improved and adapted to a Multifactorial Model.

**Keywords:** G2++ Model, Swap, Constant Maturity Swap, Risk Neutral Measure, Numeraire, Pricing, Convexity Adjustment.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>Resumen</b>	<b>vii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Preliminares. Definiciones y Teoremas Clásicos</b>	<b>4</b>
2.1. Renta Fija vs Renta Variable . . . . .	4
2.2. La derivada de Radon-Nikodym . . . . .	6
2.3. Teorema de Girsanov . . . . .	7
2.4. Teorema de Feynman-Kač . . . . .	7
2.5. El Numerario . . . . .	8
2.6. Cambio de Numerario . . . . .	9
2.7. Ejemplos de Numerarios . . . . .	9
2.7.1. La evolución del dinero en el mercado como numerario . . . . .	11
2.7.2. El bono con cupones cero como numerario . . . . .	11
2.7.3. El factor anualidad como numerario . . . . .	12
<b>3. El Modelo G2++ y el Instrumento CMS</b>	<b>14</b>
3.1. El Modelo G2++ . . . . .	14
3.1.1. El precio del bono cupón cero . . . . .	17
3.1.2. El precio de algunos derivados en el G2++ . . . . .	21
3.2. Constant Maturity Swap (CMS) . . . . .	23
<b>4. Ajuste por Convexidad en Modelos Afines</b>	<b>25</b>
4.1. Modelos afines . . . . .	26
4.2. Dinámicas . . . . .	27
4.2.1. Dinámica del Bono . . . . .	28
4.2.2. Dinámica del Factor Anualidad . . . . .	28
4.2.3. Dinámica del Swap . . . . .	29
4.3. Ajuste CMS . . . . .	30
4.4. Estructura Afín para el modelo G2++ . . . . .	34
4.5. Ajuste CMS para el modelo G2++ . . . . .	35



---

<b>5. Implementación Numérica y Resultados</b>	<b>38</b>
5.1. Descripción del CMS a Valorar . . . . .	38
5.2. Valoración con Monte Carlo . . . . .	39
5.2.1. El procedimiento . . . . .	40
5.2.2. Tasa CMS vía Monte Carlo . . . . .	41
5.2.3. Valoración . . . . .	41
5.3. Valoración con el Ajuste CMS . . . . .	43
5.3.1. Tasa CMS vía Ajuste . . . . .	43
5.4. Valoración . . . . .	43
5.5. Resultados . . . . .	45
<b>6. Conclusiones, Alcances y Limitaciones de este Trabajo</b>	<b>46</b>
<b>A. Demostraciones</b>	<b>47</b>
<b>B. Programas</b>	<b>51</b>
B.1. Programa Monte Carlo . . . . .	51
B.2. Programa Ajuste . . . . .	55
<b>Bibliografía</b>	<b>58</b>

# 1. Introducción

El mercado de derivados financieros ha sido subdividido en dos categorías, derivados de renta fija y de renta variable; siendo el primer grupo mucho mayor en volumen que el segundo. En este grupo se encuentran principalmente los llamados derivados sobre riesgo crediticio, sobre tasas de interés, sobre inflación y sobre divisas. Sin embargo, a pesar de su enorme importancia tanto económica como por el riesgo que generan existen serias dificultades en los modelos de valoración. A medida que el mercado es de mayor complejidad y se estructuran derivados cada vez más sofisticados -a fin de diversificar los riesgos inherentes a la actividad financiera-, la valoración de dichos instrumentos se vuelve mucho más exigente y requiere de lenguajes y técnicas matemáticas más sofisticadas.

Los modelos de valoración de derivados de renta fija conocidos generan problemas de valoración y cobertura de dichos instrumentos; por esta razón se hace necesario generar modelos alternativos que reduzcan las dificultades observadas.

La mayoría de los derivados de renta fija, y de manera especial los derivados del tipo de interés requieren para su valoración de una variable fundamental: la curva cupón cero o lo que es lo mismo, la colección de todos los factores de descuento para tiempos futuros. Esta curva puede obtenerse (o ajustarse) a través de los precios de instrumentos financieros disponibles en el mercado, uno de ellos, quizás el más utilizado es el de los bonos. Sin embargo, el mercado de bonos difiere en un aspecto fundamental de otros mercados estándar; mientras estos últimos se pueden modelar utilizando una cantidad finita de activos, el subyacente del mercado de bonos es la estructura completa de las tasas de interés, una variable infinito-dimensional que no es directamente observable.

Los instrumentos más líquidos del mercado (como los contratos futuros) no suelen proporcionar información directa sobre las tasas Forward las cuales permitirían construir la curva de forma exacta. Sus precios hay que complementarlos por medio de ciertos ajustes, en función del modelo de evolución escogido. Por otra parte, los modelos de precios se construyen a partir de factores estocásticos que representan la estructura de las tasas de interés en un espacio de dimensión finita.

El modelamiento del movimiento de la curva cupón cero, así como su construcción a partir de instrumentos disponibles en el mercado, plantea interesantes problemas teóricos (el paso

de una evolución estocástica infinito dimensional a una finito dimensional), prácticos (corrección por ajuste de los precios disponibles en el mercado) y otros de índole computacional.

Los problemas arriba expuestos constituyen uno de los nodos de investigación más importante de las Matemáticas Financieras. El problema a abordar, consiste en estudiar la valoración de un instrumento de renta fija, un derivado de la tasa *Swap* (que a su vez es un derivado de la tasa de interés), el *Constant Maturity Swap* (CMS), ambos instrumentos (derivado y subyacente) utilizados con este fin, son ampliamente utilizados en el mercado financiero y presentan dificultades muy particulares en su valoración, por su parte el modelo de dos factores, el Modelo G2++ presenta interesantes características pero por su complejidad es poco utilizado. El objetivo fundamental es incorporar técnicas y conocimientos propios de la teoría de valoración financiera, utilizar modelos de mercado atractivos distintos a los tradicionales e implemente técnicas propias de los métodos numéricos en finanzas.

Además de ello, este trabajo también presenta una alternativa de valoración del instrumento ajustando su precio por medio de una técnica conocida como Ajuste por Convexidad. Se utilizan desarrollos del Ajuste por Convexidad para Modelos Afines, se llevan a modelos de dos parámetros (El Modelo G2++ lo es) y se obtienen valores para unos parámetros específicos encontrándose una diferencia muy baja con respecto a la aplicación directa del Modelo. Para la simulación numérica respectiva se usan técnicas de Monte Carlo. Como se verá en la formulación del Ajuste se consigue una muy buena aproximación de una Ecuación Diferencial Estocástica de dos parámetros por un sistema de dos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, cuya solución resulta muy simple.

## 2. Preliminares. Definiciones y Teoremas Clásicos

En este capítulo se especifican las nociones básicas de finanzas matemáticas, se presenta dentro de un contexto matemático la diferencia que hay entre derivados de renta fija y los de renta variable, igualmente se enuncian los teoremas esenciales que se usaran en el desarrollo de este trabajo, por ultimo se hace énfasis en lo relacionado al numerario.

### 2.1. Renta Fija vs Renta Variable

Consideremos un mercado financiero de flujo continuo en un horizonte de tiempo dado por el intervalo  $[0, T]$ , donde los sucesos aleatorios en este mercado serán modelados en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ . El flujo de información procedente de todos los agentes económicos es representado por una filtración  $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$  satisfaciendo las condiciones usuales. El mercado consta de  $n + 1$  activos que no pagan dividendos y cuyos precios son modelados por una  $n + 1$  dimensional  $\mathcal{F}_t$ -semimartingala  $S = \{S(t) : 0 \leq t \leq T\}$ , cuyas componentes  $S_0, S_1, \dots, S_n$  son positivas. Cada proceso de precio  $S_j(t)$  se asumirá que describe una dinámica

$$dS_j(t) = \alpha_j(t)S_j(t)dt + \sigma_j(t)S_j(t)dW_t^{\mathcal{P}}, \quad j = 1, \dots, n$$

donde  $W^{\mathcal{P}}$  es un  $\mathcal{P}$ -movimiento Browniano, los coeficientes son  $\mathcal{F}_t$ -adaptados y satisfacen:

$$E\left(\int_0^T |\alpha_j(t)S_j(t)|dt\right) < \infty, \quad E\left(\int_0^T [\sigma_j(t)S_j(t)]^2 dt\right) < \infty$$

y el activo indexado por 0 representa la cuenta bancaria:

$$dS_0(t) = l(t)S_0(t)dt$$

con  $S_0(0) = 1$  y  $l$  una tasa libre de riesgo.

Notese aquí la diferencia que hay en un principio entre  $S_0$  y los demas  $S_i$ , pues mientras  $S_i$ , con  $i = 1, \dots, n$  presenta una varianza en su evolución, una volatilidad en su dinámica (el termino  $\sigma_j$ ),  $S_0$  no la manifiesta.

**Definición 2.1.** Un portafolio  $\delta$  es un vector  $n + 1$ -dimensional:

$$\delta(t) := (\delta_0(t), \delta_1(t), \dots, \delta_n(t)),$$

donde  $\delta_j(t)$  representa el numero de unidades del activo  $j$  en  $t$ .

**Definición 2.2.** El valor del portafolio  $\delta$  en  $t$  sera:

$$V_t(\delta) := \sum_{i=0}^n \delta_i(t) S_i(t).$$

Ademas éste se dice auto-financiado si la integral estocástica  $\int_0^T \sum_{k=0}^n \delta_k(t) dS_k(t)$  existe y:

$$dV_t(\delta) = \sum_{k=0}^n \delta_k(t) dS_k(t).$$

**Definición 2.3.** Una oportunidad de arbitraje es un portafolio auto-financiado  $\delta$  tal que:

$$\begin{aligned} V_0(\delta) &= 0, \\ \mathcal{P}[V_T(\delta) > 0] &> 0, \\ \mathcal{P}[V_T(\delta) \geq 0] &= 1. \end{aligned}$$

Diremos que el mercado es libre de arbitraje si no existen posibilidades de arbitraje.

Cuando se habla de derivado financiero se hace mención a un instrumento del mercado que se ha definido en términos de cierto activo subyacente. Formalmente:

**Definición 2.4.** Un título contingente  $\mathcal{X}$  con fecha de madurez  $T$ , también llamado  $T$ -título, es cualquier variable aleatoria cuadrado integrable sobre  $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathcal{P})$ .

Es importante tener en cuenta que un  $T$ -título  $\mathcal{X}$  lo que representa es el beneficio o la ganancia (comúnmente llamado *payoff*) que brinda cierto derivado financiero a tiempo  $T$ . Por ejemplo, con  $K$  una constante, si:

$$\mathcal{X}_T = [S_i(T) - K]^+,$$

éste es el *payoff* de un derivado financiero conocido como opción europea *call*, el subyacente en este caso es el activo  $S_i$ .

A grandes rasgos, cuando tratamos con derivados financieros en los que el subyacente es un activo negociable en el mercado, hablamos de renta variable ( $S_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ ), mientras que si el subyacente es no traspasable tenemos renta fija (tasa de interés  $l$  presente en  $S_0$ ).

**Definición 2.5.** Un  $T$ -título contingente  $\mathcal{X}$  es replicable si existe un portafolio auto-financiado  $h$  tal que:

$$V_T(h) = \mathcal{X}, \quad \mathcal{P} - a.s.$$

**Definición 2.6.** Un mercado financiero es completo si todo título contingente es replicable.

## 2.2. La derivada de Radon-Nikodym

**Teorema 2.7** (Radon-Nikodym). *Sean dos medidas de probabilidad  $P$  y  $Q$  sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$ .  $P$  es absolutamente continua respecto<sup>1</sup> a  $Q$  si sólo si existe una única función  $\mathcal{F}$ - $\mathcal{B}$ -medible no negativa  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:*

$$P(A) = \int_A f dQ \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

La función  $f$  es llamada la derivada de Radon-Nikodym y se escribe como  $\frac{dP}{dQ}$ .

El teorema de Radon-Nikodym implica que dada una variable aleatoria  $X$  con valor esperado bajo  $P$  finito, cumple que:

$$E^P[X] = \int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} X \frac{dP}{dQ} dQ = E^Q \left[ X \frac{dP}{dQ} \right].$$

**Teorema 2.8** (General de Bayes). *Sea  $\mathcal{Y}$  una variable aleatoria sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$  con  $P$  y  $Q$  dos medidas de probabilidad sobre el mismo espacio y derivada de Radon-Nikodym:*

$$L := \frac{dQ}{dP}, \quad \text{sobre } \mathcal{F}.$$

Si  $\mathcal{Y}$  es  $Q$ -integrable y  $\mathcal{G}$  es una  $\sigma$ -álgebra con  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ . Entonces

$$E^Q[\mathcal{Y}|\mathcal{G}] = \frac{E^P[L\mathcal{Y}|\mathcal{G}]}{E^P[L|\mathcal{G}]}, \quad Q - a.s.$$

**Proposición 2.9.** *Sean dos medidas de probabilidad  $P$  y  $Q$  sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$  tales que  $Q \ll P$  y  $\mathcal{G}$  una sub  $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$ . Entonces  $L^{\mathcal{F}}$  y  $L^{\mathcal{G}}$  la derivada de Radon-Nikodym sobre  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  respectivamente se relacionan por medio de:*

$$L^{\mathcal{G}} = E^P[L^{\mathcal{F}}|\mathcal{G}].$$

Se tiene con ello que si  $P$  y  $Q$  son equivalentes en el espacio de probabilidad filtrado, existe una  $P$ -martingala  $\rho_t$  tal que:

$$Q(A) = \int_A \rho_t(\omega) dP(\omega), \quad A \in \mathcal{F}_t$$

donde:

$$\left. \frac{dQ}{dP} \right|_{\mathcal{F}_t} = \rho_t,$$

ademas un proceso estocástico  $M$  es  $Q$ -martingala si sólo si  $\rho M$  es  $P$ -martingala.

<sup>1</sup>Se escribe  $P \ll Q$  y significa que para todo  $A \in \mathcal{F}$ ,  $Q(A) = 0$  implica que  $P(A) = 0$ .

## 2.3. Teorema de Girsanov

Asumiremos que en nuestro espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \underline{\mathcal{F}})$ , la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  es generada por un  $d$ -dimensional proceso de Wiener estándar  $W^{\mathcal{P}}$ .

Bajo esta hipótesis tenemos:

**Teorema 2.10** (Girsanov). *Sea  $W^{\mathcal{P}}$  un  $d$ -dimensional  $\mathcal{P}$ -proceso de Wiener estándar sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \underline{\mathcal{F}})$  y  $\Psi$  cualquier  $d$ -dimensional proceso estocástico adaptado. Sea  $L$  el proceso sobre  $[0, T]$  definido como:*

$$\begin{aligned} dL_t &= \Psi_t L_t dW_t^{\mathcal{P}}, \\ L_0 &= 1, \end{aligned}$$

es decir

$$L_t = e^{\int_0^t \Psi_s dW_s^{\mathcal{P}} - \frac{1}{2} \int_0^t |\Psi_s|^2 ds}.$$

Se asume

$$E^{\mathcal{P}}[L_T] = 1,$$

y se define una nueva medida de probabilidad  $Q$  sobre  $\mathcal{F}_T$  como:

$$L_T = \frac{dQ}{d\mathcal{P}}.$$

Entonces

$$dW_t^{\mathcal{P}} = \Psi_t dt + dW_t^Q,$$

donde  $W^Q$  es un  $Q$ -proceso de Wiener.

Al proceso  $\Psi$  dado en el teorema anterior se le menciona como el **núcleo de Girsanov** para el cambio de medida de  $\mathcal{P}$  a  $Q$ .

**Teorema 2.11** (Girsanov Inverso). *Sea  $W^{\mathcal{P}}$  un  $d$ -dimensional  $\mathcal{P}$ -proceso de Wiener estándar sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \underline{\mathcal{F}})$  y se asume la existencia de una medida de probabilidad  $Q$  tal que  $Q \ll \mathcal{P}$  sobre  $\mathcal{F}_T$ . Entonces existe un proceso adaptado  $\Psi$  tal que  $L := \frac{dQ}{d\mathcal{P}}$  tiene la dinámica*

$$\begin{aligned} dL_t &= \Psi_t L_t dW_t^{\mathcal{P}}, \\ L_0 &= 1. \end{aligned}$$

## 2.4. Teorema de Feynman-Kač

**Teorema 2.12** (Feynman-Kač). *Asuma que  $F$  es la solución de la Ecuación Diferencial Parcial:*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \mu(t, x) \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) - rF(t, x) = 0,$$

definida para  $t \in [0, T]$  y  $x \in \mathbb{R}$ , con condición final

$$F(T, x) = \phi(x).$$

Asumir además que el proceso  $e^{-rs}\sigma(s, X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s)$  está en  $L^2(\Omega)$ , donde  $X$  se define mas abajo. Entonces  $F$  tiene la representación

$$F(t, x) = e^{-r(T-t)}E[\phi(X_T)|X_t = x],$$

donde  $X$  satisface la Ecuación Diferencial Estocástica:

$$\begin{aligned} dX_s &= \mu(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dW_s, \\ X_t &= x. \end{aligned}$$

## 2.5. El Numerario

En economía se puede definir un numerario como aquel bien que sirve de unidad para medir el valor de los demás bienes o servicios. Dentro de este mismo entorno también se aclara que pasar de un numerario a otro no afecta ni a la recta de balance, ni a las curvas de demanda o de oferta, ni al equilibrio del mercado ni a ninguna magnitud real. Se trata simplemente de un cambio de escala. Algunos ejemplos de bienes que han sido numerarios a lo largo de la historia son: el oro, la plata, la sal, los cigarrillos en la Segunda Guerra Mundial, el dinero en sí mismo, etc.

Formalmente:

**Definición 2.13.** *El numerario es cualquier activo con proceso de precio  $\beta_t$ , positivo que no paga dividendos.*

**Definición 2.14.** *Una medida de probabilidad  $Q^\beta$  sobre  $\mathcal{F}_T$  se llama medida de martingala equivalente a la del mercado financiero con numerario  $\beta_t$  sobre  $[0, T]$ , si se cumple que:*

- i)  $Q^\beta$  y  $\mathcal{P}$  son equivalentes sobre  $\mathcal{F}_T$ .
- ii) La derivada de Radon-Nikodym  $dQ^\beta/d\mathcal{P}$  está en  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ .
- iii) Los procesos de precio relativos al numerario:

$$S_j^\beta(t) := S_j(t)/\beta_t, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

son martingala bajo  $Q^\beta$ :

$$E^\beta[S_j^\beta(s)|\mathcal{F}_t] = S_j^\beta(t), \quad t \leq s.$$



**Teorema 2.15** (Fundamental de Finanzas). *Se tiene que:*

- *El modelo de mercado es libre de arbitraje si sólo si existe una medida de martingala equivalente a la del mercado,  $Q^\beta$  con numerario  $\beta_t$ .*
- *Un modelo de mercado libre de arbitraje es completo si sólo si la medida de martingala es única.*
- *En acuerdo con ausencia de arbitraje, un derivado con payoff dado por el  $T$ -título  $\mathcal{X}$  debe ser valorado como:*

$$\Pi(t; \mathcal{X}) = \beta_t E^\beta \left[ \frac{\mathcal{X}}{\beta_T} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

con  $\Pi(t; \mathcal{X})$  el precio a tiempo  $t$ .

## 2.6. Cambio de Numerario

**Proposición 2.16.** *Asuma que  $Q^0$  es una medida de martingala para el numerario  $S_0$  sobre  $\mathcal{F}_T$  y asuma que  $S_1$  es un activo con proceso de precio positivo tal que  $S_1(t)/S_0(t)$  es una  $Q^0$ -martingala. Sea  $Q^1$  definida sobre  $\mathcal{F}_T$  a través de la derivada de Radon-Nikodym*

$$L_0^1(t) := \frac{dQ^1}{dQ^0} = \frac{S_0(0) S_1(t)}{S_1(0) S_0(t)}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Entonces  $Q^1$  es una medida de martingala con numerario  $S_1$ .

**Proposición 2.17.** *Asumiendo ausencia de arbitraje y las condiciones dadas al principio de este capítulo. Denotando el correspondiente  $Q^0$  proceso de Wiener como  $W^0$ . Entonces la  $Q^0$ -dinamica de la derivada de Radon-Nikodym  $L_0^1$  está dada por*

$$dL_0^1(t) = L_0^1(t)[\sigma_1(t) - \sigma_0(t)]dW^0(t).$$

Es decir el núcleo de Girsanov  $\Psi_0^1$  para pasar de  $Q^0$  a  $Q^1$  está dado por las diferencias en las volatilidades:

$$\Psi_0^1 = \sigma_1(t) - \sigma_0(t).$$

## 2.7. Ejemplos de Numerarios

**Definición 2.18.** *Un bono con cupones cero con fecha de madurez  $T$ , es un contrato que garantiza al titular el pago de una unidad monetaria en  $T$ . El precio en  $t$  de este bono se denotará por  $\mathcal{P}(t, T)$ .*

**Definición 2.19.**

1. La tasa forward simple para el período de tiempo futuro  $[S, T]$  en  $t$ , mencionada también como la tasa LIBOR, se define como

$$L(t; S, T) = -\frac{\mathcal{P}(t, T) - \mathcal{P}(t, S)}{(T - S)\mathcal{P}(t, T)}.$$

2. La tasa forward con capitalización continua para el período de tiempo futuro  $[S, T]$  en  $t$ , se define como

$$R(t; S, T) = -\frac{\ln \mathcal{P}(t, T) - \ln \mathcal{P}(t, S)}{T - S}.$$

3. La tasa forward instantánea<sup>2</sup> con madurez  $T$  en  $t$ , se define como

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln \mathcal{P}(t, T)}{\partial T}.$$

4. La tasa corta instantánea en  $t$ , se define como

$$r_t := r(t) := f(t, t).$$

Una consecuencia importante del Teorema 2.15 es que si asumimos nuestro mercado libre de arbitraje y completo, dado un numerario  $\beta_t$ , hay una única medida de probabilidad  $Q^\beta$  tal que los procesos de precio relativos a él son martingalas:

$$\frac{\Pi(t; G)}{\beta(t)} = E^\beta \left[ \frac{G(T)}{\beta(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (2.1)$$

siendo  $t < T$  y  $G(T)$  el *payoff* de cualquier derivado en  $T$ .

Dados dos numerarios  $N$  y  $M$  con medidas asociadas respectivamente  $Q^N$  y  $Q^M$ , equivalentes a la medida inicial  $\mathcal{P}$ , la ecuación (2.1) implica:

$$N(t)E^{Q^N} \left[ \frac{G(T)}{N(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = M(t)E^{Q^M} \left[ \frac{G(T)}{M(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (2.2)$$

reescribiendo con  $C(T) = \frac{G(T)}{N(T)}$ :

$$\begin{aligned} E^{Q^N} \left[ C(T) \middle| \mathcal{F}_t \right] &= E^{Q^M} \left[ \frac{G(T)}{N(T)} \frac{M(t)}{M(T)} \frac{N(T)}{N(t)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^{Q^M} \left[ C(T) \frac{N(T)/N(t)}{M(T)/M(t)} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Así la derivada de Radon-Nicodym que define la medida  $Q^N$  en  $\mathcal{F}$  esta dada por:

$$\frac{dQ^N}{dQ^M} = \frac{N(T)/N(t)}{M(T)/M(t)}. \quad (2.3)$$

Esto último es casi una demostración de la Proposición 2.16.

---

<sup>2</sup> $\lim_{S \rightarrow T} R(t; S, T) = f(t, T)$

### 2.7.1. La evolución del dinero en el mercado como numerario

Al mencionar la evolución del dinero en el mercado como numerario nos referimos al valor de una unidad monetaria en el tiempo cuando está gana intereses continuos a una tasa instantánea libre de riesgo  $r$ , es decir hablamos de hacer  $\mathcal{B}_t$  como nuestro numerario:

$$d\mathcal{B}(t) = r_t\mathcal{B}(t)dt,$$

es decir

$$\mathcal{B}_t := \mathcal{B}(t) := e^{\int_0^t r(s)ds}.$$

Asumiendo ausencia de arbitraje existirá una medida de martingala asociada a este numerario, medida de martingala que llamaremos la *Medida Neutral al Riesgo*  $\mathcal{Q}$ .

En un mercado completo el valor de un derivado cualquiera en  $t$  con *payoff*  $G(T)$  en  $T$  estará dado así de manera única por:

$$\Pi(t; G) = \mathcal{B}(t)E^{\mathcal{Q}}\left[\frac{G(T)}{\mathcal{B}(T)}|\mathcal{F}_t\right],$$

o de forma mas explícita:

$$\Pi(t; G) = E^{\mathcal{Q}}\left[G(T)e^{-\int_t^T r(s)ds}|\mathcal{F}_t\right]. \quad (2.4)$$

En particular si el derivado es el bono con cupones cero y vencimiento  $T$  entonces

$$\mathcal{P}(t, T) = E^{\mathcal{Q}}[e^{-\int_t^T r(s)ds}|\mathcal{F}_t],$$

escribiendo  $\frac{\mathcal{B}(t)}{\mathcal{B}(T)}$  como  $\mathcal{D}(t, T)$  el factor de descuento estocástico para el período  $(t, T)$ :

$$\mathcal{P}(t, T) = E^{\mathcal{Q}}[\mathcal{D}(t, T)|\mathcal{F}_t].$$

### 2.7.2. El bono con cupones cero como numerario

Para  $T$  fijo la medida  $T$ -forward será la asociada con el numerario  $\beta_t = \mathcal{P}(t, T)$ , usando la Proposición 2.16 o la ecuación (2.3):

$$\begin{aligned} \Pi(t; G) &= E^{\mathcal{Q}}[G(T)\mathcal{D}(t, T)|\mathcal{F}_t] \\ &= E^{\mathcal{J}}\left[G(T)\mathcal{D}(t, T)\frac{\mathcal{B}(T)/\mathcal{B}(t)}{\mathcal{P}(T, T)/\mathcal{P}(t, T)}|\mathcal{F}_t\right] \\ &= E^{\mathcal{J}}\left[G(T)\mathcal{D}(t, T)\frac{\mathcal{D}(T, T)\mathcal{P}(t, T)}{\mathcal{D}(t, T)\mathcal{P}(T, T)}|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathcal{P}(t, T)E^{\mathcal{J}}[G(T)|\mathcal{F}_t]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

En particular si  $G(T) = \mathcal{P}(T, S)$  y  $0 \leq t \leq T \leq S$ :

$$\mathcal{P}(t, S) = \mathcal{P}(t, T)E^{\mathcal{J}}[\mathcal{P}(T, S)|\mathcal{F}_t]. \quad (2.6)$$

**Proposición 2.20.** *La tasa forward simple es una martingala en la medida  $T$ -forward.*

**Demostración.** Tenemos que:

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{J}}[L(t; S, T)|\mathcal{F}_u] &= E^{\mathcal{J}}\left[\frac{1}{(T-S)}\left(\frac{\mathcal{P}(t, S)}{\mathcal{P}(t, T)} - 1\right)|\mathcal{F}_u\right] \\ &= \frac{1}{(T-S)}E^{\mathcal{J}}\left[\frac{\mathcal{P}(t, S) - \mathcal{P}(t, T)}{\mathcal{P}(t, T)}|\mathcal{F}_u\right], \end{aligned}$$

la expresión  $\mathcal{P}(t, S) - \mathcal{P}(t, T)$  en la ultima ecuación se puede ver como un portafolio de dos bonos con cupones cero dividido por el numerario, luego es una martingala bajo la medida  $T$ -forward. Entonces

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{J}}[L(t; S, T)|\mathcal{F}_u] &= \frac{1}{(T-S)}\frac{\mathcal{P}(u, S) - \mathcal{P}(u, T)}{\mathcal{P}(u, T)} \\ &= L(u; S, T), \end{aligned} \tag{2.7}$$

para  $0 \leq u \leq t \leq S \leq T$ . □

**Proposición 2.21.** *La tasa forward instantánea  $f(t, T)$  es una martingala en la medida  $T$ -forward para  $0 \leq t \leq T$ , en particular*

$$\begin{aligned} f(t, T) &= E^{\mathcal{J}}[f(T, T)|\mathcal{F}_t] \\ &= E^{\mathcal{J}}[r(T)|\mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

### 2.7.3. El factor anualidad como numerario

En el mercado de derivados financieros existen unos instrumentos muy populares denominados *Swap*, se trata de un contrato mediante el cual dos partes (corporaciones industriales, financieras, bancos, compañías de seguros, fondos de pensiones, multinacionales, gobiernos, etc.) acuerdan intercambiar flujos de efectivo sobre un cierto principal a intervalos regulares de tiempo durante un período dado. Los *Swaps* son los tipos de instrumentos derivados más importante que se han conocido y es en base a éstos que existe el numerario llamado factor anualidad:

**Contrato Swap:** *Un Swap es un contrato en el que se intercambia una tasa de interés fija por una tasa variable en unas fechas futuras. Formalmente asumiendo una unidad monetaria como principal y dadas un conjunto de fechas  $\Gamma = \{T_0, T_1, \dots, T_n\}$ :*

- A tiempo  $T_{i+1}$  con  $i = 0, \dots, n-1$  la institución A paga a B:

$$\tau_{i+1}L(T_i; T_i, T_{i+1})$$

- En la misma fecha  $B$  paga a  $A$  la tasa fija  $K$

$$\tau_{i+1}K$$

con  $\tau_{i+1}$  la fracción del año correspondiente a  $[T_i, T_{i+1}]$ .

El pago neto en  $T_{i+1}$  para  $B$  es:

$$\tau_{i+1}(L(T_i; T_i, T_{i+1}) - K)$$

que en  $t$  ( $t \leq T_0$ ) usando la fórmula (2.5) es:

$$\mathcal{P}(t, T_{i+1})E^{\mathcal{J}_{i+1}}[\tau_{i+1}(L(T_i; T_i, T_{i+1}) - K)|\mathcal{F}_t]$$

que por la Proposición 2.20 es igual a

$$\mathcal{P}(t, T_{i+1})\tau_{i+1}(L(t; T_i, T_{i+1}) - K)$$

luego el precio del Swap total para  $B$  en  $t$  es dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t, \Gamma, K) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{P}(t, T_{i+1})\tau_{i+1}(L(t; T_i, T_{i+1}) - K) \\ &= \mathcal{P}(t, T_0) - \mathcal{P}(t, T_n) - K \sum_{i=1}^n \tau_i \mathcal{P}(t, T_i). \end{aligned}$$

La tasa Swap  $SR(t, T_0, T_n)$  es la tasa  $K$  que hace del valor de este contrato cero, es decir:

$$SR(t, T_0, T_n) := \frac{\mathcal{P}(t, T_0) - \mathcal{P}(t, T_n)}{\sum_{i=1}^n \tau_i \mathcal{P}(t, T_i)}, \quad (2.8)$$

el denominador de la ultima expresión para la tasa Swap es de especial importancia y se usara en capítulos posteriores, definimos:

$$a_t(T_0, T_n) := \sum_{i=1}^n \tau_i \mathcal{P}(t, T_i) \quad (2.9)$$

$a_t(T_0, T_n)$  puede tomarse como numerario y la medida asociada con él se conoce como la *Medida Swap*; bajo ella la tasa Swap es martingala:

$$\begin{aligned} E^{\text{sw}}[SR(t_0, T_0, T_n)|\mathcal{F}_t] &= E^{\text{sw}}\left[\frac{\mathcal{P}(t_0, T_0) - \mathcal{P}(t_0, T_n)}{\sum_{i=1}^n \tau_i \mathcal{P}(t_0, T_i)}|\mathcal{F}_t\right] \\ &= E^{\text{sw}}\left[\frac{\mathcal{P}(t_0, T_0) - \mathcal{P}(t_0, T_n)}{a_{t_0}(T_0, T_n)}|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \frac{\mathcal{P}(t, T_0) - \mathcal{P}(t, T_n)}{a_t(T_0, T_n)} \\ &= SR(t, T_0, T_n) \quad t \leq t_0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

## 3. El Modelo G2++ y el Instrumento CMS

Las definiciones y resultados aquí presentados son tomados de [3] allí puede acudir el lector para profundizar algún aspecto.

**Definición 3.1.** *Para un  $t$  fijo, el bono con cupones cero  $\mathcal{P}(t, T)$  como función de  $T$  recibe el nombre de estructura a término o a plazos en  $t$ , también llamada curva de precios de los bonos cupón cero en  $t$ .*

Un resultado fuerte en lo que a instrumentos de inversión de renta fija se refiere, (que es el tipo de derivados con los que se trata en este trabajo) es el siguiente:

**Resultado:** *La estructura a término, así como el precio libre de arbitraje de cualquier otro derivado de la tasa de interés, está completamente determinado por **la dinámica de  $r$  bajo la Medida Neutral al Riesgo  $\mathcal{Q}$ .***

**Martingale Modeling:** *La dinámica de la tasa corta  $r$  bajo  $\mathcal{Q}$  se asume de la forma:*

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t), \quad (3.1)$$

donde  $\mu$  (drift term) y  $\sigma$  (diffusion term) son funciones dadas y  $W$  un  $\mathcal{Q}$  proceso de Wiener.

### 3.1. El Modelo G2++

El modelo gaussiano de dos factores denominado G2++ para la dinámica a la tasa  $r$  bajo  $\mathcal{Q}$  que se va a tratar, es muy útil en la práctica, su maleabilidad analítica lo hace adecuado para la tarea de valorar productos exóticos, el carácter Gaussiano de los procesos  $x$ ,  $y$  permite la obtención de fórmulas explícitas para instrumentos que no son del tipo plan vanilla (los más básicos del mercado), las expresiones derivadas para los bonos con cupón cero da lugar a procedimientos numéricos eficientes para fijar el precio de cualquier posible *payoff* y la presencia de dos factores hace que la variabilidad real de las tasas de mercado se describa de mejor manera:

En el modelo G2++, la dinámica para la tasa instantánea corta bajo la Medida Neutral al Riesgo  $\mathcal{Q}$  esta dada por

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t), \quad r(0) = r_0 \quad (3.2)$$

donde los procesos estocásticos  $\{x(t) : t \geq 0\}$  y  $\{y(t) : t \geq 0\}$  satisfacen

$$\begin{aligned} dx(t) &= -ax(t)dt + \sigma dW_1(t), & x(0) &= 0 \\ dy(t) &= -by(t)dt + \eta dW_2(t), & y(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

con  $(W_1, W_2)$  un movimiento Browniano bidimensional con correlación instantánea  $\rho$

$$dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt,$$

las constantes  $r_0, a, b, \sigma, \eta$  son positivas,  $-1 \leq \rho \leq 1$ . La función determinista  $\varphi$  es definida en  $[0, T^*]$ , con  $T^*$  el horizonte de tiempo por lo general 10, 30 o 50 años.

La dinámica de los procesos  $x$  y  $y$  también pueden ser expresados en términos de dos movimientos Brownianos independientes  $\widetilde{W}_1$  y  $\widetilde{W}_2$

$$\begin{aligned} dx(t) &= -ax(t) + \sigma d\widetilde{W}_1(t), \\ dy(t) &= -by(t)dt + \eta\rho d\widetilde{W}_1(t) + \eta\sqrt{1-\rho^2}d\widetilde{W}_2(t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde

$$\begin{aligned} dW_1(t) &= d\widetilde{W}_1(t), \\ dW_2(t) &= \rho d\widetilde{W}_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}d\widetilde{W}_2(t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

**Lema 3.2.** Sea  $\gamma(t)$  dada por una función determinista en el tiempo y sea  $X$  el proceso estocástico definido como:

$$X(t) := \int_0^t \gamma(s)dW(s).$$

Entonces  $X(t)$  se distribuye normal con media cero y varianza dada por:

$$\text{Var}[X(t)] = \int_0^t \gamma^2(s)ds.$$

**Demostración.** Ver Apéndice A. □

**Teorema 3.3.**  $r(t)$  como en la ecuación (3.2), condicionada a  $\mathcal{F}_s$  se distribuye normal con media y varianza dadas por

$$E[r(t)|\mathcal{F}_s] = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \varphi(t), \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[r(t)|\mathcal{F}_s] &= \frac{\sigma^2}{2a} \left[ 1 - e^{-2a(t-s)} \right] + \frac{\eta^2}{2b} \left[ 1 - e^{-2b(t-s)} \right] \\ &\quad + 2\rho \frac{\sigma\eta}{a+b} \left[ 1 - e^{-(a+b)(t-s)} \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

**Demostración.** Integrando las ecuaciones (3.3) llegamos a que para  $s < t$

$$\begin{aligned} x(t) &= x(s)e^{-a(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u), \\ y(t) &= y(s)e^{-b(t-s)} + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2(u), \end{aligned} \quad (3.8)$$

y reemplazando en (3.2) obtenemos

$$r(t) = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2(u) + \varphi(t),$$

de donde se deduce de inmediato la expresión para el valor esperado. Ahora

$$\begin{aligned} \text{Var}[r(t)|\mathcal{F}_s] &= \text{Var}[x(t) + y(t)|\mathcal{F}_s] \\ &= E[x^2(t) + y^2(t) + 2x(t)y(t)|\mathcal{F}_s] - E^2[x(t) + y(t)|\mathcal{F}_s] \\ &= E[x^2(t)|\mathcal{F}_s] - E^2[x(t)|\mathcal{F}_s] + E[y^2(t)|\mathcal{F}_s] - E^2[y(t)|\mathcal{F}_s] \\ &\quad + 2E[x(t)y(t)|\mathcal{F}_s] - 2E[x(t)|\mathcal{F}_s]E[y(t)|\mathcal{F}_s], \end{aligned}$$

y dado que

$$\begin{aligned} E[x^2(t)|\mathcal{F}_s] &= E\left[x^2(s)e^{-2a(t-s)} + \left(\sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u)\right)^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] \\ &= x^2(s)e^{-2a(t-s)} + \sigma^2 \int_s^t e^{-2a(t-u)} du \\ &= x^2(s)e^{-2a(t-s)} + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)}), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} E[x(t)y(t)|\mathcal{F}_s] &= E\left[x(s)y(s)e^{-(a+b)(t-s)} + \eta x(s)e^{-a(t-s)} \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2(u) \right. \\ &\quad \left. + \sigma y(s)e^{-b(t-s)} \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) \right. \\ &\quad \left. + \eta\sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2(u) \middle| \mathcal{F}_s\right] \\ &= x(s)y(s)e^{-(a+b)(t-s)} + \sigma\eta \int_s^t \rho e^{-(a+b)(t-u)} du \\ &= x(s)y(s)e^{-(a+b)(t-s)} + \rho \frac{\sigma\eta}{a+b}(1 - e^{-(a+b)(t-s)}), \end{aligned}$$

luego de sustituir da lugar a la expresión para la varianza. Finalmente que se distribuya normal se concluye a partir del último lema.  $\square$

Note que en particular, si  $s = 0$

$$r(t) = \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) + \eta \int_0^t e^{-b(t-u)} dW_2(u) + \varphi(t). \quad (3.9)$$



### 3.1.1. El precio del bono cupón cero

**Estructura a Término del Mercado** Se asumirá que la estructura de los factores de descuento actual observada en el mercado es dada por una función suficientemente suave  $T \mapsto \mathcal{P}^*(0, T)$ .

En estos términos la tasa forward instantánea  $f^*(0, T)$  implicada por el mercado será:

$$f^*(0, T) = -\frac{\partial \ln \mathcal{P}^*(0, T)}{\partial T}.$$

**Lema 3.4.** Para cada  $t, T$  la variable aleatoria

$$I(t, T) := \int_t^T [x(u) + y(u)] du,$$

condicionada al  $\sigma$ -campo  $\mathcal{F}_t$  se distribuye normal con media  $M(t, T)$  y varianza  $V(t, T)$  dadas por:

$$M(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) + \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t), \quad (3.10)$$

y

$$\begin{aligned} V(t, T) = & \frac{\sigma^2}{a^2} \left[ T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right] \\ & + \frac{\eta^2}{b^2} \left[ T - t + \frac{2}{b} e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b} e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2b} \right] \\ & + 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} \left[ T - t + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a+b} \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

**Demostración.** Ver Apéndice A. □

**Teorema 3.5.** El precio a tiempo  $t$  de un bono cupón cero que madura a tiempo  $T$  con nominal uno es:

$$\mathcal{P}(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T \varphi(u) du - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t) + \frac{1}{2} V(t, T) \right\}. \quad (3.12)$$

**Demostración.** La función  $\varphi$  es determinista, y el teorema se sigue de inmediato del lema anterior y del hecho de que si  $Z$  es una variable aleatoria normal con media  $m_Z$  y varianza  $\sigma_Z^2$ , entonces  $E[\exp(Z)] = \exp(m_Z + \frac{1}{2}\sigma_Z^2)$ . □

**Corolario 3.6.** El modelo descrito en las expresiones (3.2) y (3.3) se ajusta a la estructura de los factores de descuento observada hoy si sólo si para cada  $T$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(T) = & f^*(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2 \\ & + \frac{\eta^2}{2b^2} (1 - e^{-bT})^2 + \rho \frac{\sigma\eta}{ab} (1 - e^{-aT})(1 - e^{-bT}), \end{aligned} \quad (3.13)$$

es decir, si sólo si,

$$\exp\left\{-\int_t^T \varphi(u)du\right\} = \frac{\mathcal{P}^*(0, T)}{\mathcal{P}^*(0, t)} \exp\left\{-\frac{1}{2}[V(0, T) - V(0, t)]\right\}, \quad (3.14)$$

y el precio del correspondiente bono con cupones cero a tiempo  $t$  es

$$\mathcal{P}(t, T) = \frac{\mathcal{P}^*(0, T)}{\mathcal{P}^*(0, t)} \exp\left\{\frac{1}{2}[V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)]\right. \\ \left. - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}x(t) - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b}y(t)\right\}. \quad (3.15)$$

**Demostración.** El modelo descrito en las ecuaciones (3.2) y (3.3) se ajusta a la estructura observada hoy si sólo si para cada tiempo de madurez  $T \leq T^*$  el factor de descuento  $\mathcal{P}(0, T)$  producido por nuestro modelo coincide con el observado en el mercado es decir, si sólo si,:

$$\mathcal{P}^*(0, T) = \exp\left\{-\int_0^T \varphi(u)du + \frac{1}{2}V(0, T)\right\}, \quad (*)$$

equivalente a plantear

$$f^*(0, T) = -\frac{\partial \ln \mathcal{P}^*(0, T)}{\partial T} = \varphi(T) - \frac{1}{2} \frac{\partial V(0, T)}{\partial T},$$

al despejar  $\varphi(T)$  y calcular  $\frac{1}{2} \frac{\partial V(0, T)}{\partial T}$ , se llega a la ecuación (3.13).

Ahora para probar la ecuación (3.14) note que lo planteado en (\*) es equivalente a decir que:

$$\exp\left\{-\int_t^T \varphi(u)du\right\} = \exp\left\{-\int_0^T \varphi(u)du\right\} \exp\left\{\int_0^t \varphi(u)du\right\} \\ = \frac{\mathcal{P}^*(0, T) \exp\{-\frac{1}{2}V(0, T)\}}{\mathcal{P}^*(0, t) \exp\{-\frac{1}{2}V(0, t)\}},$$

finalmente del Teorema 3.5 y la ecuación (3.14) se sigue de inmediato la ecuación (3.15).  $\square$

**Lema 3.7.** La dinámica de los procesos  $x$  y  $y$  bajo la medida  $T$ -forward  $\mathcal{Q}^T$  es:

$$dx(t) = \left[ -ax(t) - \frac{\sigma^2}{a}(1 - e^{-a(T-t)}) - \rho \frac{\sigma \eta}{b}(1 - e^{-b(T-t)}) \right] dt + \sigma dW_1^T(t), \\ dy(t) = \left[ -by(t) - \frac{\eta^2}{b}(1 - e^{-b(T-t)}) - \rho \frac{\sigma \eta}{a}(1 - e^{-a(T-t)}) \right] dt + \eta dW_2^T(t), \quad (3.16)$$

donde  $W_1^T$  y  $W_2^T$  son dos movimientos Brownianos bajo  $\mathcal{Q}^T$  con correlación instantánea  $dW_1^T(t)dW_2^T(t) = \rho dt$ .

Más aún, las soluciones explícitas del sistema (3.16) son, para  $s \leq t \leq T$ ,

$$x(t) = x(s)e^{-a(t-s)} - M_x^T(s, t) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1^T(u), \\ y(t) = y(s)e^{-b(t-s)} - M_y^T(s, t) + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2^T(u), \quad (3.17)$$

donde

$$M_x^T(s, t) = \left( \frac{\sigma^2}{a^2} + \rho \frac{\sigma\eta}{ab} \right) \left[ 1 - e^{-a(t-s)} \right] - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left[ e^{-a(T-t)} - e^{-a(T+t-2s)} \right] \\ - \frac{\rho\sigma\eta}{b(a+b)} \left[ e^{-b(T-t)} - e^{-bT-at+(a+b)s} \right],$$

$$M_y^T(s, t) = \left( \frac{\eta^2}{b^2} + \rho \frac{\sigma\eta}{ab} \right) \left[ 1 - e^{-b(t-s)} \right] - \frac{\eta^2}{2b^2} \left[ e^{-b(T-t)} - e^{-b(T+t-2s)} \right] \\ - \frac{\rho\sigma\eta}{a(a+b)} \left[ e^{-a(T-t)} - e^{-aT-bt+(a+b)s} \right],$$

es así, como bajo  $\mathcal{Q}^T$ , la distribución de  $r(t)$  condicionada a  $\mathcal{F}_s$  es normal con media y varianza dadas respectivamente por

$$E^{\mathcal{J}}[r(t)|\mathcal{F}_s] = x(s)e^{-a(t-s)} - M_x^T(s, t) + y(s)e^{-b(t-s)} - M_y^T(s, t) + \varphi(t), \\ \text{Var}^{\mathcal{J}}[r(t)|\mathcal{F}_s] = \frac{\sigma^2}{2a} \left[ 1 - e^{-2a(t-s)} \right] + \frac{\eta^2}{2b} \left[ 1 - e^{-2b(t-s)} \right] + 2\rho \frac{\sigma\eta}{a+b} \left[ 1 - e^{-(a+b)(t-s)} \right]. \quad (3.18)$$

**Demostración.** La derivada de Radon-Nikodym:

$$\frac{d\mathcal{Q}^{\mathcal{J}}}{d\mathcal{Q}} = \frac{\mathcal{B}(0)\mathcal{P}(T, T)}{\mathcal{B}(T)\mathcal{P}(0, T)} = \frac{\exp\{-\int_0^T r(u)du\}}{\mathcal{P}(0, T)} \\ = \frac{\exp\{-\int_0^T \varphi(u)du - \int_0^T [x(u) + y(u)]du\}}{\mathcal{P}(0, T)} \\ = \exp\left\{-\frac{1}{2}V(0, T) - \int_0^T [x(u) + y(u)]du\right\}. \quad (3.19)$$

De acuerdo a las ecuaciones (3.3) y (3.5) tenemos que con  $\widetilde{W}_1$  y  $\widetilde{W}_2$  movimientos Brownianos independientes bajo  $\mathcal{Q}$ :

$$dy(t) = -by(t)dt + \eta\rho d\widetilde{W}_1(t) + \eta\sqrt{1-\rho^2}d\widetilde{W}_2(t), \quad y(0) = 0$$

de donde

$$y(T) = -b \int_0^T y(u)du + \eta\rho \int_0^T d\widetilde{W}_1(u) + \eta\sqrt{1-\rho^2} \int_0^T d\widetilde{W}_2(u), \quad (I)$$

ahora de la ecuación (3.8) con  $s = 0$  y  $t = T$  tenemos que:

$$y(T) = \int_0^T e^{-b(T-u)} dW_2(u),$$

que en términos de procesos de Wiener independientes como en la ecuación (3.5) es

$$y(T) = \eta\rho \int_0^T e^{-b(T-u)} d\widetilde{W}_1(u) + \eta\sqrt{1-\rho^2} \int_0^T e^{-b(T-u)} d\widetilde{W}_2(u). \quad (II)$$

Luego de igualar (I) y (II) y despejar, llegamos a que

$$\int_0^T y(u)du = \rho \frac{\eta}{b} \int_0^T (1 - e^{-b(T-u)})d\widetilde{W}_1(u) + \frac{\eta}{b}\sqrt{1 - \rho^2} \int_0^T (1 - e^{-b(T-u)})d\widetilde{W}_2(u),$$

análogamente

$$\int_0^T x(u)du = \frac{\sigma}{a} \int_0^T (1 - e^{-a(T-u)})d\widetilde{W}_1(u),$$

es así como la derivada de Radon-Nikodym (3.19) es

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{Q}^J}{d\mathcal{Q}} = \exp \left\{ -\frac{1}{2}V(0, T) - \int_0^T \left[ \frac{\sigma}{a}(1 - e^{-a(T-u)}) + \rho \frac{\eta}{b}(1 - e^{-b(T-u)}) \right] d\widetilde{W}_1(u) \right. \\ \left. - \frac{\eta}{b}\sqrt{1 - \rho^2} \int_0^T (1 - e^{-b(T-u)})d\widetilde{W}_2(u) \right\}. \end{aligned}$$

Ahora, definiendo:

$$\begin{aligned} \psi^T(t) &:= \left( -\frac{\sigma}{a}(1 - e^{-a(T-t)}) - \rho \frac{\eta}{b}(1 - e^{-b(T-t)}), -\frac{\eta}{b}\sqrt{1 - \rho^2}(1 - e^{-b(T-t)}) \right) \\ &= (\psi_1^T(t), \psi_2^T(t)), \end{aligned}$$

nótese que:

$$\begin{aligned} V(0, T) &= \int_0^T \left[ \frac{\sigma}{a}(1 - e^{-a(T-u)}) - \rho \frac{\eta}{b}(1 - e^{-b(T-u)}) \right]^2 du \\ &\quad + \frac{\eta^2}{b^2}(1 - \rho^2) \int_0^T (1 - e^{-b(T-u)})^2 du = \int_0^T |\psi^T(s)|^2 ds, \end{aligned}$$

luego:

$$\frac{d\mathcal{Q}^J}{d\mathcal{Q}} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T |\psi^T(s)|^2 ds + \int_0^T \psi^T(s)d\widetilde{W}(s) \right\}.$$

Lo que implica por el teorema de Girsanov que:

$$d\widetilde{W}_1(t) = \psi_1^T(t)dt + d\widetilde{W}_1^T(t),$$

$$d\widetilde{W}_2(t) = \psi_2^T(t)dt + d\widetilde{W}_2^T(t),$$

con  $d\widetilde{W}_1^T$  y  $d\widetilde{W}_2^T$  dos movimientos Brownianos independientes bajo la medida  $\mathcal{Q}^J$ .

Sustituyendo en la ecuación (3.4) nos queda  $x$  y  $y$  como:

$$dx(t) = [-ax(t) + \sigma\psi_1^T(t)]dt + \sigma d\widetilde{W}_1^T(t),$$

$$dy(t) = [-by(t) + \eta\rho\psi_1^T(t) + \eta\sqrt{1-\rho^2}\psi_2^T(t)]dt + \rho\eta d\widetilde{W}_1^T(t) + \eta\sqrt{1-\rho^2}d\widetilde{W}_2^T,$$

finalmente definiendo  $W_1^T$  y  $W_2^T$  por

$$\begin{aligned} dW_1^T(t) &= d\widetilde{W}_1^T(t), \\ dW_2^T(t) &= \rho d\widetilde{W}_1^T(t) + \sqrt{1-\rho^2}d\widetilde{W}_2^T(t), \end{aligned}$$

encontramos que:

$$\begin{aligned} dx(t) &= [-ax(t) + \sigma\psi_1^T(t)]dt + \sigma dW_1^T(t), \\ dy(t) &= [-by(t) + \eta\rho\psi_1^T(t) + \eta\sqrt{1-\rho^2}\psi_2^T(t)]dt + \eta dW_2^T(t), \end{aligned}$$

lo que demuestra (3.16). Las fórmulas (3.17) se siguen tras integración de las ecuaciones (3.16), donde se usa que:

$$\begin{aligned} M_x^T(s, t) &= \int_s^t \left[ \frac{\sigma^2}{a}(1 - e^{-a(T-u)}) + \rho \frac{\sigma\eta}{b}(1 - e^{-b(T-u)}) \right] e^{-a(t-u)} du, \\ M_y^T(s, t) &= \int_s^t \left[ \frac{\eta^2}{b}(1 - e^{-b(T-u)}) + \rho \frac{\sigma\eta}{a}(1 - e^{-a(T-u)}) \right] e^{-b(t-u)} du. \end{aligned}$$

Por último las expresiones (3.18) son directas.  $\square$

### 3.1.2. El precio de algunos derivados en el G2++

**Lema 3.8.** Sean  $M, V$  y  $K$  números reales con  $V$  y  $K$  positivos. Entonces para  $\omega \in \{-1, 1\}$ ,

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} [\omega(e^y - K)]^+ e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-M)^2}{V^2}} dy \\ &= \omega e^{M+\frac{1}{2}V^2} \Phi\left(\omega \frac{M - \ln(K) + V^2}{V}\right) - \omega K \Phi\left(\omega \frac{M - \ln(K)}{V}\right). \end{aligned}$$

**Demostración.** Ver Apéndice A.  $\square$

**Teorema 3.9.** El precio a tiempo  $t$  de una opción europea call con madurez  $T$  y strike  $K$ , sobre un bono con cupones cero de vencimiento  $S$  y una unidad como nominal, es dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{ZBC}(t, T, S, K) &= \mathcal{P}(t, S) \Phi\left(\frac{\ln \frac{\mathcal{P}(t, S)}{K\mathcal{P}(t, T)}}{\Sigma(t, T, S)} + \frac{1}{2}\Sigma(t, T, S)\right) \\ &\quad - \mathcal{P}(t, T) K \Phi\left(\frac{\ln \frac{\mathcal{P}(t, S)}{K\mathcal{P}(t, T)}}{\Sigma(t, T, S)} - \frac{1}{2}\Sigma(t, T, S)\right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde

$$\begin{aligned}\Sigma(t, T, S)^2 &= \frac{\sigma^2}{2a^3} [1 - e^{-a(S-T)}]^2 [1 - e^{-2a(T-t)}] \\ &\quad + \frac{\eta^2}{2b^3} [1 - e^{-b(S-T)}]^2 [1 - e^{-2b(T-t)}] \\ &\quad + 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab(a+b)} [1 - e^{-a(S-T)}][1 - e^{-b(S-T)}][1 - e^{-(a+b)(T-t)}].\end{aligned}$$

**Demostración.** Se sabe que

$$\mathbf{ZBC}(t, T, S, K) = E[e^{-\int_t^T r(s)ds} (\mathcal{P}(T, S) - K)^+ | \mathcal{F}_t],$$

que cambiando de medida de  $\mathcal{Q}$  a  $\mathcal{Q}^\mathbb{J}$

$$\mathbf{ZBC}(t, T, S, K) = \mathcal{P}(t, T) E^\mathbb{J}[(\mathcal{P}(T, S) - K)^+ | \mathcal{F}_t],$$

ademas recordando la ecuación (3.15)

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(T, S) &= \frac{\mathcal{P}^*(0, S)}{\mathcal{P}^*(0, T)} \exp \left\{ \frac{1}{2} [V(T, S) - V(0, S) + V(0, T)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 - e^{-a(S-T)}}{a} x(T) - \frac{1 - e^{-b(S-T)}}{b} y(T) \right\},\end{aligned}$$

haciendo uso del Lema 3.7, bajo  $\mathcal{Q}^\mathbb{J}$  el logaritmo de  $\mathcal{P}(T, S)$  condicionado a  $\mathcal{F}_t$  se distribuye normal con media

$$\begin{aligned}M_{\mathcal{P}} &= \ln \frac{\mathcal{P}^*(0, S)}{\mathcal{P}^*(0, T)} + \frac{1}{2} [V(T, S) - V(0, S) + V(0, T)] \\ &\quad - \frac{1 - e^{-a(S-T)}}{a} E^\mathbb{J}[x(T) | \mathcal{F}_t] - \frac{1 - e^{-b(S-T)}}{b} E^\mathbb{J}[y(T) | \mathcal{F}_t],\end{aligned}$$

y varianza

$$\begin{aligned}(V_{\mathcal{P}})^2 &= \frac{\sigma^2}{2a^3} [1 - e^{-a(S-T)}]^2 [1 - e^{-2a(T-t)}] \\ &\quad + \frac{\eta^2}{2b^3} [1 - e^{-b(S-T)}]^2 [1 - e^{-2b(T-t)}] \\ &\quad + 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab(a+b)} [1 - e^{-a(S-T)}][1 - e^{-b(S-T)}][1 - e^{-(a+b)(T-t)}],\end{aligned}$$

es decir  $\mathcal{P}(T, S)$  condicionado a  $\mathcal{F}_t$  es una variable aleatoria con distribución lognormal:

$$E^\mathbb{J}[(\mathcal{P}(T, S) - K)^+ | \mathcal{F}_t] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}V_{\mathcal{P}}} (e^z - K)^+ e^{-\frac{1}{2} \frac{(z - M_{\mathcal{P}})^2}{V_{\mathcal{P}}^2}} dz,$$

es decir (usando el ultimo lema),

$$\begin{aligned} \mathbf{ZBC}(t, T, S, K) \\ = \mathcal{P}(t, T) \left[ e^{M_{\mathcal{P}} + \frac{1}{2}V_{\mathcal{P}}^2} \Phi\left(\frac{M_{\mathcal{P}} - \ln(K) + V_{\mathcal{P}}^2}{V_{\mathcal{P}}}\right) - K \Phi\left(\frac{M_{\mathcal{P}} - \ln(K)}{V_{\mathcal{P}}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Nótese que  $\Sigma(t, T, S)^2 = V_{\mathcal{P}}^2$  y que  $\frac{\mathcal{P}(t, S)}{\mathcal{P}(t, T)}$  es una martingala bajo  $\mathcal{Q}^T$ , así:

$$\frac{\mathcal{P}(t, S)}{\mathcal{P}(t, T)} = E^{\mathcal{Q}^T} \{ \mathcal{P}(T, S) | \mathcal{F}_t \} = e^{M_{\mathcal{P}} + \frac{1}{2}V_{\mathcal{P}}^2},$$

o escrito de otra forma

$$M_{\mathcal{P}} = \ln \frac{\mathcal{P}(t, S)}{\mathcal{P}(t, T)} - \frac{1}{2} \Sigma(t, T, S)^2,$$

sustituyendo esto ultimo se prueba la expresión (3.20) de la opción europea *call*.<sup>1</sup>  $\square$

## 3.2. Constant Maturity Swap (CMS)

Un *Constant Maturity Swap* (CMS) es un contrato que permite intercambiar tasa *Swap* a cierta fecha de vencimiento por una tasa fija o flotante. En un CMS la tasa variable que se intercambia ya no es una tasa a corto plazo, pero las fechas de vencimiento si pueden ser a termino corto. Por ejemplo, pagamos cada seis meses la tasa *Swap* 5-años y recibimos pagos a una tasa fija.

Es a causa de la combinación del reajuste a corto plazo en las tasas de largo plazo que el CMS es un instrumento útil; pues ofrece a los inversionistas la posibilidad de realizar apuestas en la forma de la curva de rendimientos y adoptar posiciones largas de la curva pero por períodos de tiempo cortos.

**Constant Maturity Swap:** *Asumiendo una unidad monetaria como principal. Sea  $\Gamma = \{T_0, \dots, T_n\}$  un conjunto de fechas en las que se dará unos flujos de pago.*

- *A tiempo  $T_i$ , con  $i \geq 1$ , la institución A paga a B la tasa *Swap* a  $c$ -años que se determina en  $T_{i-1}$  y con tenor iniciando en  $T_i$ . Formalmente, a tiempo  $T_i$  A paga a B:*

$$SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c}) \tau_i,$$

donde  $\tau_i = T_i - T_{i-1}$  y

$$SR(t, T_i, T_{i+c}) = \frac{\mathcal{P}(t, T_i) - \mathcal{P}(t, T_{i+c})}{\sum_{k=i+1}^{i+c} \tau_k \mathcal{P}(t, T_k)}.$$

<sup>1</sup>Se deduce el precio de la opción europea *put*  $\mathbf{ZBP}(t, T, S, K)$  a partir de la *call* y la paridad *put-call*:  $\mathbf{ZBC}(t, T, S, K) + K\mathcal{P}(t, T) = \mathbf{ZBP}(t, T, S, K) + \mathcal{P}(t, S)$ .

- En la misma fecha  $B$  paga a  $A$  la tasa fija  $K$

$$K\tau_i.$$

El valor neto de este contrato para  $B$  (el payer) es a tiempo  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{CMS}_p(0, \Gamma, K, c) &= E^Q \left[ \sum_{i=1}^n D(0, T_i) (SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c}) - K) \tau_i \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \tau_i \mathcal{P}(0, T_i) (E^{T_i} [SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c}) | \mathcal{F}_0] - K) \\ &= \sum_{i=1}^n \tau_i \mathcal{P}(0, T_i) \left( E^n \left[ SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c}) \frac{\mathcal{P}(T_i, T_i) / \mathcal{P}(0, T_i)}{\mathcal{P}(T_i, T_n) / \mathcal{P}(0, T_n)} \middle| \mathcal{F}_0 \right] - K \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \tau_i \mathcal{P}(0, T_n) E^n \left[ \frac{SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c})}{\mathcal{P}(T_i, T_n)} \middle| \mathcal{F}_0 \right] - \sum_{i=1}^n \tau_i K \mathcal{P}(0, T_i). \end{aligned}$$

La tasa CMS ( $K_{CMS}$ ), es la tasa  $K$  que hace del valor de este contrato cero, es decir:

$$\mathbf{CMS}_p(0, \Gamma, K_{CMS}, c) = 0.$$

De acuerdo a lo planteado arriba, tenemos dos expresiones para la tasa CMS:

$$K_{CMS} = \frac{\sum_{i=1}^n \tau_i \mathcal{P}(0, T_n) E^n \left[ \frac{SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c})}{\mathcal{P}(T_i, T_n)} \right]}{\sum_{i=1}^n \tau_i \mathcal{P}(0, T_i)}, \quad (3.21)$$

y

$$K_{CMS} = \frac{\sum_{i=1}^n \tau_i \mathcal{P}(0, T_i) E^{T_i} [SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c})]}{\sum_{i=1}^n \tau_i \mathcal{P}(0, T_i)}. \quad (3.22)$$

Al tratar con la valoración de un CMS a lo que primero se atiende es al cálculo de la tasa CMS, pues una vez hallada está la tasación del instrumento quedara determinada.



## 4. Ajuste por Convexidad en Modelos Afines

La idea de ajuste por convexidad en los mercados de renta fija surge cuando se utilizan los precios de productos estándar (vanilla) corregidos por un ajuste para hallar el precio de productos derivados más complejos.

Recordemos la fórmula (2.5). Para un derivado con *payoff*  $G(T)$  en  $T$  su precio libre de arbitraje en  $t$  viene dado por:

$$\Pi(t; G) = \mathcal{P}(t, T)E^{\mathbb{J}}[G(T)|\mathcal{F}_t],$$

si el *payoff* tiene propiedades “agradables” como ser martingala en la medida  $T$ -forward, obtenemos de forma trivial que

$$\Pi(t; G) = \mathcal{P}(t, T)G(t),$$

por lo general para derivados complejos esto casi nunca ocurre.

Si se asume que existe una medida de martingala  $Q^G$  en la que el *payoff* si es martingala entonces  $G(t) = E^{\mathbb{G}}[G(T)|\mathcal{F}_t]$ , y el ajuste por convexidad  $CC^G$  se define como:

$$\begin{aligned} CC^G &:= E^{\mathbb{J}}[G(T)|\mathcal{F}_t] - E^{\mathbb{G}}[G(T)|\mathcal{F}_t] \\ &:= E^{\mathbb{J}}[G(T)|\mathcal{F}_t] - G(t), \end{aligned}$$

con este ajuste tendríamos que:

$$\Pi(t; G) \approx \mathcal{P}(t, T)(G(t) + CC^G).$$

Este capítulo trata de un ajuste por convexidad para el precio del CMS. La expresión para este ajuste CMS se halla en el marco general de un tipo de modelos denominados afines, teoría aquí presentada especialmente como en [5] y [15], luego de forma particular se calcula este ajuste para el G2++.

## 4.1. Modelos afines

**Teorema 4.1** (Fórmula de Itô). *Sea  $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$  un proceso estocástico  $n$ -dimensional, donde cada componente  $X_i$  describe una ecuación diferencial estocástica:*

$$dX_i(t) = \mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t)dW_j(t),$$

con cada  $W_1, \dots, W_d$  procesos de Wiener independientes. Sean el drif  $\mu := (\mu_1, \dots, \mu_n)^\top$ , el proceso de Wiener  $d$ -dimensional  $W := (W_1, \dots, W_d)^\top$  y la matriz de diffusion  $\sigma$  de tamaño  $n \times d$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1d} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nd} \end{pmatrix}$$

en estos términos la dinámica de  $X$  es

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t).$$

Si  $Z$  es el proceso estocástico definido como

$$Z(t) := f(t, X(t)),$$

donde  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  es una función clase  $C^{1,2}$ . Entonces la diferencial  $df$  es dada por

$$df = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \mu_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \text{tr}[\sigma^\top H \sigma] \right\} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_i dW,$$

siendo  $\sigma_i$  la  $i$ -ésima fila de la matriz  $\sigma$ ,  $H$  la matriz Hessiana

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

y  $\text{tr}[A]$  la traza de la matriz correspondiente  $A$ .

Un modelo se dice que tiene estructura afín cuando la tasa corta  $r_t$  resulta ser una función afín de un proceso  $m$ -dimensional  $(Z_t)_{t \geq 0}$  con una dinámica particular:

**Modelos Afines** *Sea  $(Z_t)_{t \geq 0}$  un proceso estocástico de dimension  $m$  con dinámica bajo la Medida Neutral al Riesgo:*

$$dZ_t = \alpha(t, Z_t)dt + \sigma(t, Z_t)dW_t,$$

donde  $W$  es un  $n$ -dimensional estándar movimiento Browniano,  $\alpha : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$  y  $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^{m \times n}$ . Con:

$$\alpha(t, z) = d(t) + E(t)z, \tag{4.1}$$

$$\sigma(t, z)\sigma^\top(t, z) = k_0(t) + \sum_{i=1}^m z_i k_i(t). \quad (4.2)$$

La función suave  $d : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^m$  y tanto  $E$  como  $k_i$   $i = 0, 1, \dots, m$  son funciones de  $\mathbb{R}^+$  en  $\mathbb{R}^{m \times m}$ . Además, la tasa corta esta dada por:

$$r_t = r(t, Z_t) = f(t) + g(t)Z_t, \quad (4.3)$$

donde  $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^m$  son suaves.

En este contexto

$$\mathcal{P}(t, T) = e^{A(t, T) + B(t, T)Z_t}, \quad (4.4)$$

con  $A, B$  funciones deterministas de  $(t, T)$  y solución del sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + d(t)^\top B + \frac{1}{2} B^\top k_0(t) B &= f(t), \\ \frac{\partial B}{\partial t} + E(t)^\top B + \frac{1}{2} \hat{B}^\top \hat{k}(t) B &= g(t), \end{aligned} \quad (4.5)$$

sujeto a las condiciones de frontera  $A(T, T) = 0$  y  $B(T, T) = 0$ . Las matrices  $\hat{B}$  y  $\hat{k}$  son:

$$\hat{B} := \begin{pmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & B \end{pmatrix}, \quad \hat{k}(t) := \begin{pmatrix} k_1(t) \\ \vdots \\ k_m(t) \end{pmatrix}.$$

Además, usando la fórmula de Itô descrita en el Teorema 4.1 a la ecuación (4.4), es fácil verificar que la dinámica del bono bajo  $\mathcal{Q}$  es

$$d\mathcal{P}(t, T) = r_t \mathcal{P}(t, T) dt + B(t, T) \sigma(t, Z_t) \mathcal{P}(t, T) dW_t. \quad (4.6)$$

## 4.2. Dinámicas

Para facilitar las cuenta y los resultados presentados más adelante referentes a lo que llamaremos al ajuste CMS, conviene tener calculadas explícitamente las dinámicas de algunos de los instrumentos derivados básicos en las distintas medidas ya previamente descritas. Es lo presentado en esta sección.

### 4.2.1. Dinámica del Bono

El proceso básico para los precios de los bonos se asume:

$$d\mathcal{P}(t, T) = \mathcal{P}(t, T)r(t)dt + \mathcal{P}(t, T)v_t(T)dW_t, \quad (4.7)$$

donde  $v_t(T)$  es un vector de volatilidades,  $W_t$  un proceso de Wiener multidimensional bajo la medida  $Q$  (la Neutral al Riesgo) y  $r(t)$  la tasa corta.

En la medida  $T$ -forward esto tendría que ser:

$$d\mathcal{P}(t, T) = \mathcal{P}(t, T)\mu_t(T)dt + \mathcal{P}(t, T)v_t(T)dW_t^T,$$

donde una forma de calcular  $\mu_t(T)$  es teniendo en cuenta que  $\mathcal{B}_t/\mathcal{P}(t, T)$  (recordando que  $\mathcal{B}_t$  es la cuenta bancaria) es una martingala en esta medida:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\mathcal{B}_t}{\mathcal{P}(t, T)}\right) &= \frac{d\mathcal{B}_t}{\mathcal{P}(t, T)} + \mathcal{B}_t d\left(\frac{1}{\mathcal{P}(t, T)}\right) + d\mathcal{B}_t d\left(\frac{1}{\mathcal{P}(t, T)}\right) \\ &= \frac{r(t)\mathcal{B}_t}{\mathcal{P}(t, T)}dt + \mathcal{B}_t \left(-\frac{d\mathcal{P}(t, T)}{(\mathcal{P}(t, T))^2} + \frac{1}{2} \frac{2(d\mathcal{P}(t, T))^2}{(\mathcal{P}(t, T))^3}\right) \\ &= \frac{r(t)\mathcal{B}_t}{\mathcal{P}(t, T)}dt + \frac{\mathcal{B}_t}{\mathcal{P}(t, T)}(-(\mu_t(T)dt + v_t(T)dW_t^T) + v_t(T) \cdot v_t(T)dt) \\ &= \frac{\mathcal{B}_t}{\mathcal{P}(t, T)}((r(t) - \mu_t(T) + v_t(T) \cdot v_t(T))dt - v_t(T)dW_t^T), \end{aligned}$$

para que sea martingala debemos tener:

$$\mu_t(T) = r(t) + v_t(T) \cdot v_t(T).$$

Es así como al cambiar de medida de  $Q$  a  $Q^T$  (o lo contrario) tenemos que tener:

$$dW_t = v_t(T)dt + dW_t^T. \quad (4.8)$$

Como caso particular para pasar entre medidas *forward*, digamos de la medida  $T$  a la  $S$  nos quedaría:

$$dW_t^T = -v_t(T)dt + dW_t = (v_t(S) - v_t(T))dt + dW_t^S.$$

### 4.2.2. Dinámica del Factor Anualidad

Denotaremos el *Swap* con la notación usual, usando  $\alpha_i = T_i - T_{i-1}$  y escribiendo la tasa *Swap*  $SR(t, T_0, T_N)$  cuando no haya confusión como  $S_t$ :

$$S_t = \frac{\mathcal{P}(t, T_0) - \mathcal{P}(t, T_N)}{\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathcal{P}(t, T_i)}.$$

El denominador es el factor anualidad, ya previamente definido como

$$a_t(T_0, T_N) := \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathcal{P}(t, T_i),$$

su dinámica bajo la Medida Neutral al Riesgo es en base a la ecuación (4.7):

$$\begin{aligned} da_t(T_0, T_N) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i d\mathcal{P}(t, T_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i (\mathcal{P}(t, T_i) r(t) dt + \mathcal{P}(t, T_i) v_t(T_i) dW_t) \\ &= a_t(T_0, T_N) r(t) dt + a_t(T_0, T_N) v_t^a(T_0, T_n) dW_t, \end{aligned}$$

donde  $v_t^a(T_0, T_n) := \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathcal{P}(t, T_i) v_t(T_i) / a_t(T_0, T_N)$  y en la Medida *Swap*:

$$da_t(T_0, T_N) = a_t(T_0, T_N) \mu_t^{a,sw} dt + a_t(T_0, T_N) v_t^a(T_0, T_n) dW_t^{sw}. \quad (4.9)$$

Haciendo algo similar a lo hecho con los bonos, veamos la evolución de  $\mathcal{B}_t/a_t$  en la Medida *Swap* (tiene que ser martingala) con la intención de hallar  $\mu_t^{a,sw}$ :

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\mathcal{B}_t}{a_t}\right) &= \frac{d\mathcal{B}_t}{a_t} + \mathcal{B}_t d\left(\frac{1}{a_t}\right) + d\mathcal{B}_t d\left(\frac{1}{a_t}\right) \\ &= \frac{\mathcal{B}_t}{a_t} \left( r(t) dt - \frac{da_t}{a_t} + \left(\frac{da_t}{a_t}\right)^2 \right) \\ &= \frac{\mathcal{B}_t}{a_t} (r(t) - \mu_t^{a,sw} + v_t^a \cdot v_t^a) dt + \dots \end{aligned}$$

de donde sacamos que:

$$\mu_t^{a,sw} = r(t) + v_t^a \cdot v_t^a.$$

El cambio de la Medida Neutral al Riesgo  $\mathcal{Q}$  a la *Swap*  $\mathcal{Q}_{sw}$  es entonces:

$$dW_t = v_t^a dt + dW_t^{sw}, \quad (4.10)$$

y combinando las ecuaciones (4.8) y (4.10):

$$(v_t(T) - v_t^a) dt + dW_t^T = dW_t^{sw}.$$

### 4.2.3. Dinámica del Swap

Nos proponemos hallar la dinámica de la tasa *Swap* en la Medida Neutral al Riesgo  $\mathcal{Q}$ . Lo primero a tener en cuenta es que de las ecuaciones (4.9) y (4.10):

$$da_t(T_0, T_N) = a_t(T_0, T_N) r(t) dt + a_t(T_0, T_N) v_t^a(T_0, T_n) dW_t,$$

por tanto (usando la fórmula de Itô):

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{a_t(T_0, T_N)}\right) &= -\frac{da_t(T_0, T_N)}{(a_t(T_0, T_N))^2} + \frac{(da_t(T_0, T_N))^2}{(a_t(T_0, T_N))^3} \\ &= -\frac{r(t)dt + v_t^a dW_t}{a_t(T_0, T_N)} + \frac{v_t^a \cdot v_t^a dt}{a_t(T_0, T_N)}, \end{aligned}$$

de este modo

$$\begin{aligned} dS_t &= d\left(\frac{\mathcal{P}(t, T_0) - \mathcal{P}(t, T_N)}{a_t(T_0, T_N)}\right) = \frac{d(\mathcal{P}(t, T_0) - \mathcal{P}(t, T_N))}{a_t(T_0, T_N)} \\ &\quad + (\mathcal{P}(t, T_0) - \mathcal{P}(t, T_N))d\left(\frac{1}{a_t(T_0, T_N)}\right) + d(\mathcal{P}(t, T_0) - \mathcal{P}(t, T_N))d\left(\frac{1}{a_t(T_0, T_N)}\right) \\ &= \frac{(\mathcal{P}(t, T_0) - \mathcal{P}(t, T_N))r_t dt + (\mathcal{P}(t, T_0)v_t(T_0) - \mathcal{P}(t, T_N)v_t(T_N))dW_t}{a_t(T_0, T_N)} \\ &\quad + \frac{\mathcal{P}(t, T_0) - \mathcal{P}(t, T_N)}{a_t(T_0, T_N)}((v_t^a \cdot v_t^a - r(t))dt - v_t^a dW_t) \\ &\quad - (\mathcal{P}(t, T_0)v_t(T_0) - \mathcal{P}(t, T_N)v_t(T_N))\frac{v_t^a}{a_t(T_0, T_N)}dt, \end{aligned}$$

agrupando términos:

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t \left( v_t^a \cdot v_t^a - \frac{\mathcal{P}(t, T_0)v_t(T_0) - \mathcal{P}(t, T_N)v_t(T_N)}{\mathcal{P}(t, T_0) - \mathcal{P}(t, T_N)} v_t^a \right) dt \\ &\quad + S_t \left( \frac{\mathcal{P}(t, T_0)v_t(T_0) - \mathcal{P}(t, T_N)v_t(T_N)}{\mathcal{P}(t, T_0) - \mathcal{P}(t, T_N)} - v_t^a \right) dW_t. \end{aligned} \quad (4.11)$$

### 4.3. Ajuste CMS

Se pretende valorar el *Constant Maturity Swap*, empezaremos por recordar la ecuación (3.22):

$$K_{CMS} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{P}(0, T_i) E^{T_i}[SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c})]}{\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{P}(0, T_i)}.$$

La dificultad de hallar explícitamente esta tasa radica en el cálculo de  $E^{T_i}[SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c})]$ . Pues  $SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c})$  no es una martingala bajo la medida *forward*, es en este escenario donde se hace uso de un ajuste por convexidad. Este ajuste para cada pago del CMS es de la forma:

$$E^{T_i}[SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c})|\mathcal{F}_t] = SR(t, T_i, T_{i+c}) + CC^{CMS}(t, T_i, c).$$

**Definición 4.2.** *El ajuste CMS se define como*

$$CC^{CMS}(t, T_i, c) := E^{T_i}[SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c})|\mathcal{F}_t] - SR(t, T_i, T_{i+c}).$$

Adicional a esto también se asumirá la siguiente aproximación referente a la volatilidad del factor anualidad  $v_t^a$ :

**Hipotesis de Low Variance** Se asumirá que

$$v_t^a = \sum_{j=1}^c \frac{\alpha_j \mathcal{P}(t, T_{i+j})}{a_t(T_i, T_{i+c})} v_t(T_{i+j}) \approx \sum_{j=1}^c \frac{\alpha_j \mathcal{P}(0, T_{i+j})}{a_0(T_i, T_{i+c})} v_t(T_{i+j}),$$

es decir la volatilidad de la anualidad en un principio estocástica se asume ahora determinista independiente del proceso  $Z_t$  (el que hace de  $r(t)$  afín).

**Teorema 4.3** (Ajuste CMS en un Modelo Afín). *Asumiendo la hipótesis de Low Variance el ajuste CMS sobre un modelo Afín puede aproximarse por:*

$$CC^{CMS}(t, T_i, c) \approx SR(t, T_i, T_{i+c})(e^{M(t)+N(t)Z_t} - 1),$$

donde  $N$  y  $M$  son funciones deterministas de  $(t, T_i, T_{i+c})$  y resuelven el sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO):

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} + \left( d(t) + k_0(t) \left( (l_i + 1)B(t, T_i) - l_{i+c}B(t, T_{i+c}) - \sum_{j=1}^c m_j B(t, T_{i+j}) \right) \right)^\top N(t) \\ + \frac{1}{2} N(t)^\top k_0(t) N(t) \\ = \left( l_i B(t, T_i) - l_{i+c} B(t, T_{i+c}) - \sum_{j=1}^c m_j B(t, T_{i+j}) \right) k_0(t) \left( \sum_{j=1}^c m_j B(t, T_{i+j}) - B(t, T_i) \right), \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \left( E(t)^\top + \left( (l_i + 1)\hat{B}(t, T_i) - l_{i+c}\hat{B}(t, T_{i+c}) - \sum_{j=1}^c m_j \hat{B}(t, T_{i+j}) \right)^\top \hat{k}(t) \right) N(t) \\ + \frac{1}{2} N(t)^\top \hat{k}(t) N(t) \\ = \left( l_i \hat{B}(t, T_i) - l_{i+c} \hat{B}(t, T_{i+c}) - \sum_{j=1}^c m_j \hat{B}(t, T_{i+j}) \right) \hat{k}(t) \left( \sum_{j=1}^c m_j B(t, T_{i+j}) - B(t, T_i) \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

con

$$\begin{aligned} m_j &:= \alpha_j \mathcal{P}(0, T_{i+j}) / a_0(T_i, T_{i+c}), \\ l_i &:= \frac{\mathcal{P}(0, T_i)}{\mathcal{P}(0, T_i) - \mathcal{P}(0, T_{i+c})}, \\ l_{i+c} &:= \frac{\mathcal{P}(0, T_{i+c})}{\mathcal{P}(0, T_i) - \mathcal{P}(0, T_{i+c})}, \end{aligned}$$

y sujeto a  $M(T_{i-1}) = 0$  y  $N(T_{i-1}) = 0$ .

**Demostración.** Tenemos

$$\begin{aligned} CC^{\text{CMS}}(t, T_i, c) &= E^{T_i}[SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c})|\mathcal{F}_t] - SR(t, T_i, T_{i+c}) \\ &= SR(t, T_i, T_{i+c}) \left( \frac{1}{SR(t, T_i, T_{i+c})} E^{T_i}[SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c})|\mathcal{F}_t] - 1 \right), \end{aligned}$$

si llamamos

$$F(t, z) := \frac{1}{SR(t, T_i, T_{i+c})} E^{T_i}[SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c})|\{\mathcal{F}_t, Z_t = z\}],$$

tenemos que para todo  $z$ :

$$F(T_{i-1}, z) = 1,$$

pues en ese caso el cociente es  $\frac{1}{SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c})}$  y el valor esperado  $SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c})$ . Por otra parte,

$$SR(t, T_i, T_{i+c})F(t, Z_t)$$

es una martingala en la medida terminal  $T_i$ , de modo que podemos obtener el drift del proceso producto a partir de los procesos individuales.

Recordamos la dinámica del Swap en la Medida Neutral al Riesgo (ecuación (4.11)):

$$\begin{aligned} \frac{dSR(t, T_i, T_{i+c})}{SR(t, T_i, T_{i+c})} &= \left( v_t^a \left( \frac{\mathcal{P}(t, T_i)(v_t^a - v_t(T_i)) - \mathcal{P}(t, T_{i+c})(v_t^a - v_t(T_{i+c}))}{\mathcal{P}(t, T_i) - \mathcal{P}(t, T_{i+c})} \right) \right) dt \\ &\quad + \left( \frac{\mathcal{P}(t, T_i)(v_t(T_i) - v_t^a) - \mathcal{P}(t, T_{i+c})(v_t(T_{i+c}) - v_t^a)}{\mathcal{P}(t, T_i) - \mathcal{P}(t, T_{i+c})} \right) dW_t, \end{aligned}$$

donde

$$v_t^a = \sum_{j=1}^c \frac{\alpha_j \mathcal{P}(t, T_{i+j})}{a_t(T_i, T_{i+c})} v_t(T_{i+j}).$$

Definiendo

$$V_t := \frac{\mathcal{P}(t, T_i)(v_t(T_i) - v_t^a) - \mathcal{P}(t, T_{i+c})(v_t(T_{i+c}) - v_t^a)}{\mathcal{P}(t, T_i) - \mathcal{P}(t, T_{i+c})},$$

la última dinámica nos queda como:

$$dSR(t, T_i, T_{i+c}) = -[SR(t, T_i, T_{i+c})v_t^a V_t]dt + [SR(t, T_i, T_{i+c})V_t]dW_t,$$

que cambiando a la medida  $T_i$  (ecuación (4.8)) nos queda

$$\begin{aligned} dSR(t, T_i, T_{i+c}) &= -[SR(t, T_i, T_{i+c})v_t^a V_t]dt + [SR(t, T_i, T_{i+c})V_t](dW_t^{T_i} + v_t(T_i)dt) \\ &= [SR(t, T_i, T_{i+c})(v_t(T_i) - v_t^a)V_t]dt + [SR(t, T_i, T_{i+c})V_t]dW_t^{T_i}. \end{aligned}$$

Y el proceso  $t \mapsto F(t, Z_t)$  en la medida  $T_i$  usando la fórmula de Itô:

$$\begin{aligned} d^{\mathbb{T}_i} F_t &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial z} d^{\mathbb{T}_i} Z_t + \frac{1}{2} (d^{\mathbb{T}_i} Z_t)^\top \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} (d^{\mathbb{T}_i} Z_t) \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \alpha_t^{T_i} + \frac{1}{2} \text{tr} \left( \sigma_t^\top \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \sigma_t \right) \right) dt + \frac{\partial F}{\partial z} (\sigma_t dW_t^{T_i}). \end{aligned}$$



El drift de  $t \mapsto SR(t, T_i, T_{i+c})F(t, Z_t)$  en la medida  $T_i$  es cero y viene dado por el orden  $dt$  de la expresión:

$$(d^{T_i} SR(t, T_i, T_{i+c}))F_t + (d^{T_i} F_t)SR(t, T_i, T_{i+c}) + (d^{T_i} F_t)(d^{T_i} SR(t, T_i, T_{i+c})),$$

que se escribe como:

$$F_t SR(t, T_i, T_{i+c})(v_t(T_i) - v_t^a)V_t + SR(t, T_i, T_{i+c})\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z}\alpha_t^{T_i} + \frac{1}{2}tr\left(\sigma_t^\top \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\sigma_t\right)\right) + SR(t, T_i, T_{i+c})(\sigma_t V_t)^\top \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

cancelando  $SR(t, T_i, T_{i+c})$  y reagrupando:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\alpha_t^{T_i} + \sigma_t V_t)^\top \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{1}{2}tr\left(\sigma_t^\top \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\sigma_t\right) = F_t V_t^\top (v_t^a - v_t(T_i)),$$

haciendo el cambio  $H := \ln F$  nos queda:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + (\alpha_t^{T_i} + \sigma_t V_t)^\top \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{1}{2}tr\left(\left(\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial H^\top}{\partial z}\right)\sigma_t \sigma_t^\top\right) = V_t^\top (v_t^a - v_t(T_i)). \quad (\text{H})$$

Aquí requerimos hacer una aproximación. Asumiremos que el valor de los bonos está congelado al valor inicial. No así en todas las expresiones, sino solamente en las que se involucra a las volatilidades del Swap y de la Anualidad:

$$v_t^a \approx \sum_{j=1}^c \alpha_j \mathcal{P}(0, T_{i+j})v_t(T_{i+j})/a_0(T_i, T_{i+c}) = \sum_{j=1}^c m_j v_t(T_{i+j}) = \sigma_t^\top \sum_{j=1}^c m_j B(t, T_{i+j}), \quad (\text{L1})$$

donde la ultima parte de la igualdad se da por la ecuación (4.6), además

$$\begin{aligned} V_t &\approx \frac{\mathcal{P}(0, T_i)(v_t(T_i) - v_t^a) - \mathcal{P}(0, T_{i+c})(v_t(T_{i+c}) - v_t^a)}{\mathcal{P}(0, T_i) - \mathcal{P}(0, T_{i+c})} \\ &= \frac{\mathcal{P}(0, T_i)}{\mathcal{P}(0, T_i) - \mathcal{P}(0, T_{i+c})}v_t(T_i) - \frac{\mathcal{P}(0, T_{i+c})}{\mathcal{P}(0, T_i) - \mathcal{P}(0, T_{i+c})}v_t(T_{i+c}) - v_t^a \\ &= l_i v_t(T_i) - l_{i+c} v_t(T_{i+c}) - v_t^a \\ &= \sigma_t^\top \left( l_i B(t, T_i) - l_{i+c} B(t, T_{i+c}) - \sum_{j=1}^c m_j B(t, T_{i+j}) \right). \end{aligned} \quad (\text{L2})$$

Volviendo a la ecuación (H) proponiendo una solución afín:

$$H(t, z) = M(t) + N(t)z,$$

sustituyendo las expresiones (L1) y (L2) nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t} z + \left( d(t) + \sigma_t \sigma_t^\top B(t, T_i) + E(t)z \right)^\top N(t) + \frac{1}{2} N(t)^\top \sigma_t \sigma_t^\top N(t) \\ + \sigma_t \sigma_t^\top \left( l_i B(t, T_i) - l_{i+c} B(t, T_{i+c}) - \sum_{j=1}^c m_j B(t, T_{i+j}) \right)^\top N(t) \\ = \left( l_i B(t, T_i) - l_{i+c} B(t, T_{i+c}) - \sum_{j=1}^c m_j B(t, T_{i+j}) \right) \sigma_t \sigma_t^\top \left( \sum_{j=1}^c m_j B(t, T_{i+j}) - B(t, T_i) \right), \end{aligned}$$

al separar variables obtenemos el sistema de ecuaciones ordinarias:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} + \left( d(t) + k_0(t) \left( (l_i + 1) B(t, T_i) - l_{i+c} B(t, T_{i+c}) - \sum_{j=1}^c m_j B(t, T_{i+j}) \right) \right)^\top N(t) \\ + \frac{1}{2} N(t)^\top k_0(t) N(t) \\ = \left( l_i B(t, T_i) - l_{i+c} B(t, T_{i+c}) - \sum_{j=1}^c m_j B(t, T_{i+j}) \right) k_0(t) \left( \sum_{j=1}^c m_j B(t, T_{i+j}) - B(t, T_i) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \left( E(t)^\top + \left( (l_i + 1) \hat{B}(t, T_i) - l_{i+c} \hat{B}(t, T_{i+c}) - \sum_{j=1}^c m_j \hat{B}(t, T_{i+j}) \right)^\top \hat{k}(t) \right) N(t) \\ + \frac{1}{2} N(t)^\top \hat{k}(t) N(t) \\ = \left( l_i \hat{B}(t, T_i) - l_{i+c} \hat{B}(t, T_{i+c}) - \sum_{j=1}^c m_j \hat{B}(t, T_{i+j}) \right) \hat{k}(t) \left( \sum_{j=1}^c m_j B(t, T_{i+j}) - B(t, T_i) \right). \end{aligned}$$

Finalmente volviendo a lo que es  $F$  (recordemos que  $H = \ln F$ ) y sustituyéndola en la ecuación del ajuste  $CC^{CMS}$  dada al principio de la prueba, concluimos la demostración.  $\square$

## 4.4. Estructura Afín para el modelo G2++

De acuerdo a la ecuación (3.2) tenemos que:

$$r(t, Z_t) = f(t) + g(t)Z_t,$$

donde

$$\begin{aligned} f(t) &:= \varphi(t), \\ g(t) &:= (1 \quad 1), \\ Z_t &:= \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

como en la ecuación (4.3). Si definimos

$$E(t) := \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix},$$

tenemos

$$\alpha(t, z) := E(t) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

y con

$$\sigma(t, z) := \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ \eta\rho & \sqrt{\eta(1-\rho^2)} \end{pmatrix},$$

comprobamos que  $dZ_t = \alpha(t, Z_t)dt + \sigma(t, Z_t)d\mathcal{W}_t$ , con  $\mathcal{W}_t = \begin{pmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \end{pmatrix}$  siendo  $W_1$  y  $W_2$  dos movimientos Brownianos independientes bajo  $\mathcal{Q}$ . Finalmente si

$$k_0(t) := \sigma(t, z)\sigma^\top(t, z) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma\eta\rho \\ \sigma\eta\rho & \eta^2 \end{pmatrix},$$

terminamos de verificar que el modelo G2++ posee una Estructura Afín como en las ecuaciones (4.1) y (4.2) con  $d(t) = k_1(t) = k_2(t) = 0$ .

La expresión para el bono cupón cero en este modelo (ecuación (3.12)) en efecto se puede reescribir como:

$$\mathcal{P}(t, T) = e^{A(t, T) + B(t, T)Z_t},$$

con

$$A(t, T) := - \int_t^T \varphi(u)du + \frac{1}{2}V(t, T), \quad (4.14)$$

y

$$B(t, T) := \left( \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a}, \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} \right), \quad (4.15)$$

adicionalmete se puede comprobar que estas últimas ecuaciones son las solución del sistema de EDO (4.5) para el G2++.

## 4.5. Ajuste CMS para el modelo G2++

En esta seccion se pretende hallar de forma explícita el ajuste CMS para el modelo G2++ vía la aproximación expuesta en el Teorema 4.3, para ello será necesario conocer  $N$  y  $M$ , soluciones al sistema de EDO (4.12)-(4.13):

**Teorema 4.4.** *El ajuste CMS para la tasa Swap  $SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c})$  en el modelo G2++ puede aproximarse por:*

$$CC_{G2++}^{CMS}(t, T_i, c) \approx SR(t, T_i, T_{i+c})(e^{M(t)+N(t)Z_t} - 1),$$

con  $N$  y  $M$  dadas en las ecuaciones (4.16) y (4.17).

**Demostración.** Para el modelo G2++ como se mostró en la sección anterior la matriz  $\hat{k}(t) = (k_1(t), k_2(t))^T$  es nula, por consiguiente la ecuación (4.13) se reduce a:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + E(t)^T N(t) = 0, \quad N(T_{i-1}) = 0$$

o más precisamente:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} N(t) = 0, \quad N(T_{i-1}) = 0.$$

La única solución a esta ecuación diferencial ordinaria es la solución nula:

$$N(t) = (0, 0). \tag{4.16}$$

Ya  $N$  hallada y siendo esta un vector nulo, la ecuación (4.12) queda como:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \left( l_i B(t, T_i) - l_{i+c} B(t, T_{i+c}) - \sum_{j=1}^c m_j B(t, T_{i+j}) \right) k_0(t) \left( \sum_{j=1}^c m_j B(t, T_{i+j}) - B(t, T_i) \right). \tag{M1}$$

Recordemos que para el modelo G2++

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \left( \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a}, \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} \right) \\ &= (\xi_a^T e^{at}, \xi_b^T e^{bt}) - \left( \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right), \end{aligned}$$

donde  $\xi_a^T := \frac{e^{-aT}}{a}$  y  $\xi_b^T := \frac{e^{-bT}}{b}$  son constantes reales. Se define ahora:

$$\begin{aligned} R_1(t) &:= l_i B(t, T_i) - l_{i+c} B(t, T_{i+c}), \\ R_2(t) &:= \sum_{j=1}^c m_j B(t, T_{i+j}), \end{aligned}$$

con  $l_i, l_{i+c}, m_j$  como en el ultimo Teorema. Quedando así

$$\begin{aligned} R_1(t) &= \left( (l_i \xi_a^{T_i} - l_{i+c} \xi_a^{T_{i+c}}) e^{at}, (l_i \xi_b^{T_i} - l_{i+c} \xi_b^{T_{i+c}}) e^{bt} \right) + (l_{i+c} - l_i) \left( \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right), \\ R_2(t) &= \left( \sum_{j=1}^c m_j \xi_a^{T_{i+j}} e^{at}, \sum_{j=1}^c m_j \xi_b^{T_{i+j}} e^{bt} \right) - \sum_{j=1}^c m_j \left( \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right), \end{aligned}$$

continuando de esta forma tenemos:

$$R_1(t) - R_2(t) = (\varrho_1 e^{at}, \varrho_2 e^{bt}) + \varrho_3 \left( \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right),$$

$$R_2(t) - B(t, T_i) = (\varrho_4 e^{at}, \varrho_5 e^{bt}) + \varrho_6 \left( \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right),$$

donde se precisa

$$\varrho_1 := \left[ l_i \xi_a^{T_i} - l_{i+c} \xi_a^{T_{i+c}} - \sum_{j=1}^c m_j \xi_a^{T_{i+j}} \right], \quad \varrho_4 := \left[ \sum_{j=1}^c m_j \xi_a^{T_{i+j}} - \xi_a^{T_i} \right],$$

$$\varrho_2 := \left[ l_i \xi_b^{T_i} - l_{i+c} \xi_b^{T_{i+c}} - \sum_{j=1}^c m_j \xi_b^{T_{i+j}} \right], \quad \varrho_5 := \left[ \sum_{j=1}^c m_j \xi_b^{T_{i+j}} - \xi_b^{T_i} \right],$$

$$\varrho_3 := \left[ \sum_{j=1}^c m_j + l_{i+c} - l_i \right], \quad \varrho_6 := \left[ 1 - \sum_{j=1}^c m_j \right],$$

la ecuación (M1) se transforma en

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \left[ (\varrho_1 e^{at}, \varrho_2 e^{bt}) + \varrho_3 \left( \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right) \right] \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma\eta\rho \\ \sigma\eta\rho & \eta^2 \end{pmatrix} \left[ (\varrho_4 e^{at}, \varrho_5 e^{bt}) + \varrho_6 \left( \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right) \right]^T$$

o de forma mas exacta

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \theta_1 e^{(a+b)t} + \theta_2 e^{2at} + \theta_3 e^{2bt} + \theta_4 e^{at} + \theta_5 e^{bt} + \theta_6 \quad (\text{M2})$$

con

$$\theta_1 := \rho \sigma \eta \cdot \varrho_2 \varrho_4 + \rho \sigma \eta \cdot \varrho_1 \varrho_5,$$

$$\theta_2 := \sigma^2 \cdot \varrho_1 \varrho_4,$$

$$\theta_3 := \eta^2 \cdot \varrho_2 \varrho_5,$$

$$\theta_4 := \varrho_3 \varrho_4 \left( \frac{\sigma^2}{a} + \frac{\rho \sigma \eta}{b} \right) + \frac{\sigma^2 \cdot \varrho_1 \varrho_6}{a} + \frac{\rho \sigma \eta \cdot \varrho_1 \varrho_6}{b},$$

$$\theta_5 := \varrho_3 \varrho_5 \left( \frac{\eta^2}{b} + \frac{\rho \sigma \eta}{a} \right) + \frac{\rho \sigma \eta \cdot \varrho_2 \varrho_6}{a} + \frac{\eta^2 \cdot \varrho_2 \varrho_6}{b},$$

$$\theta_6 := \varrho_3 \varrho_6 \left( \frac{\sigma^2}{a^2} + \frac{\rho \sigma \eta}{ab} \right) + \varrho_3 \varrho_6 \left( \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\rho \sigma \eta}{ab} \right),$$

es decir:

$$M(t) = \left( \frac{\theta_1}{a+b} \right) e^{(a+b)t} + \left( \frac{\theta_2}{2a} \right) e^{2at} + \left( \frac{\theta_3}{2b} \right) e^{2bt} + \left( \frac{\theta_4}{a} \right) e^{at} + \left( \frac{\theta_5}{b} \right) e^{bt} + \theta_6 t + \theta_7 \quad (4.17)$$

con

$$\theta_7 := - \left( \frac{\theta_1}{a+b} \right) e^{(a+b)T_{i-1}} - \left( \frac{\theta_2}{2a} \right) e^{2aT_{i-1}} - \left( \frac{\theta_3}{2b} \right) e^{2bT_{i-1}} - \left( \frac{\theta_4}{a} \right) e^{aT_{i-1}} - \left( \frac{\theta_5}{b} \right) e^{bT_{i-1}} - \theta_6 T_{i-1}$$

□

## 5. Implementación Numérica y Resultados

En el presente capítulo, se procede al cálculo de la tasa CMS para un *Constant Maturity Swap* específico, este desarrollo se hará de dos formas; la primera implementando la fórmula (3.21) para ello, es necesario aproximar el valor esperado:

$$E^n \left[ \frac{SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c})}{\mathcal{P}(T_i, T_n)} \middle| \mathcal{F}_0 \right],$$

y en este caso lo hacemos a través del método de Monte Carlo.

La segunda forma es a través del ajuste CMS descrito en el capítulo anterior y la ecuación (3.22).

El objetivo es comparar la valoración teórica “más original” con la aproximación por medio del Ajuste por Convexidad que en este caso corresponde a la solución de un sistema de EDO.

### 5.1. Descripción del CMS a Valorar

Tomando la estructura término actual del mercado obtenida a partir de las tasas *Spot* de los bonos del *European Central Bank* a fecha del 22 de septiembre del 2008 y asumiendo ésta fecha como  $t = 0$  tenemos:

Tiempo(Años)	Fac. Desc.
0.5	0.9795
1.0	0.9599
1.5	0.9405
2.0	0.9214
2.5	0.9024
3.0	0.8837
3.5	0.8650
4.0	0.8464
4.5	0.8279
5.0	0.8095
5.5	0.7911
6.0	0.7729
6.5	0.7548
7.0	0.7369
7.5	0.7191
8.0	0.7016
8.5	0.6842
9.0	0.6671
9.5	0.6502
10.0	0.6337

Tiempo(Años)	Fac. Desc.
10.5	0.6174
11.0	0.6014
11.5	0.5857
12.0	0.5704
12.5	0.5553
13.0	0.5407
13.5	0.5263
14.0	0.5123
14.5	0.4985
15.0	0.4852
15.5	0.4721
16.0	0.4594
16.5	0.4469
17.0	0.4348
17.5	0.4230
18.0	0.4116
18.5	0.4003
19.0	0.3895
19.5	0.3789
20.0	0.3685

Se considera un CMS a 5-años empezando en  $t = 0$ . La frecuencia de pagos es semestral en ambas ramas (tanto la que paga la tasa fija como el que paga la tasa Swap), la tasa Swap a cinco años semestral es la pactada a ser intercambiada y se toma el contrato sobre un nominal de €1.000.

## 5.2. Valoración con Monte Carlo

En esta sección se denotara por  $\mathcal{P}(t, T; x(t), y(t))$  al precio del bono cupón cero expresado en la ecuación (3.15), ésto para hacer notar la dependencia que se presenta con los procesos  $x$  y  $y$ . Del mismo modo:

$$SR(t, T_i, T_{i+c}, x(t), y(t)) = \frac{\mathcal{P}(t, T_i, x(t), y(t)) - \mathcal{P}(t, T_{i+c}, x(t), y(t))}{\sum_{k=i+1}^{i+c} \tau_k \mathcal{P}(t, T_k, x(t), y(t))}. \quad (5.1)$$

### 5.2.1. El procedimiento

Una forma directa de hallar el precio del CMS es directamente con la fórmula (3.21). Se necesita así entonces calcular:

$$E^n \left[ \frac{SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c}, x(T_{i-1}), y(T_{i-1}))}{\mathcal{P}(T_i, T_n, x(T_i), y(T_i))} \right], \quad (5.2)$$

con  $T_n = 5$  años,  $c = 5$ , para todo  $i = 0.5, 1, 1.5, \dots, 5$ .

Este valor esperado se estimará a través de la técnica de simulación de Monte Carlo. Se procederá de la siguiente forma:

**Inputs:** Los datos y constantes necesarias para valorar el CMS.

1. El numero **np** de simulaciones para la estimación tipo Monte Carlo.
2. La estructura de factores de descuento inicial:  $T \mapsto \mathcal{P}^*(0, T)$ .
3. Los parámetros del modelo G2++:  $a, b, \sigma, \eta$  y  $\rho$ .

**Esquema:** Descripción del uso del modelo G2++ para la valoración del CMS.

1. La fecha actual es  $t = T_0 = 0$ . De acuerdo a ello se tiene entonces que  $x(T_0) = y(T_0) = 0$ . Sea  $i = 1$ .
2. Usando las ecuaciones (3.17) se generan np realizaciones:

$$x^p(T_i), y^p(T_i), \quad p = 1, 2, \dots, np$$

de  $x(T_i), y(T_i)$  con  $x(T_{i-1}), y(T_{i-1})$  previamente ya generados en un paso anterior. La fórmula (3.17) es aplicada con  $s = T_{i-1}, t = T_i$ .

3. Para  $i \geq 1$ , se calcula  $\mathcal{P}(T_i, T_n, x^p(T_i), y^p(T_i))$  usando la fórmula (3.15), en cada p escenario.
4. Para  $i \geq 2$ , se calculan:

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}(T_{i-1}, T_i, x^p(T_{i-1}), y^p(T_{i-1})), \\ & \mathcal{P}(T_{i-1}, T_{i+1}, x^p(T_{i-1}), y^p(T_{i-1})), \\ & \dots \mathcal{P}(T_{i-1}, T_{i+c}, x^p(T_{i-1}), y^p(T_{i-1})), \end{aligned}$$

usando la fórmula (3.15), en cada p escenario.

5. Para  $i \geq 2$ , se calcula la tasa *Swap* en cada p escenario vía fórmula (5.1)

$$SR^p(T_{i-1}, T_i, T_{i+c}) := SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c}, x^p(T_{i-1}), y^p(T_{i-1})),$$

y haciendose uso de lo ya hallado en los pasos 3 y 4.



6. En cada  $p$  escenario se determina el cociente

$$\frac{SR^p(T_{i-1}, T_i, T_{i+c})}{\mathcal{P}(T_i, T_n, x^p(T_i), y^p(T_i))}.$$

7. Se obtiene el promedio de las cantidades del paso 6 sobre todos los escenarios. Esta será la estimación de Monte Carlo de (5.2).

8. Continuar este proceso hasta  $i = n$ , y evaluar el precio del CMS.

### 5.2.2. Tasa CMS vía Monte Carlo

De forma explícita:

$$K_{\text{CMS}}^{\text{MC}} = \frac{\sum_{i=0.5}^5 \frac{1}{2} \mathcal{P}^*(0, T_5) E^{T_5} \left[ \frac{SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+5}, x(T_{i-1}), y(T_{i-1}))}{\mathcal{P}(T_i, T_5, x(T_i), y(T_i))} \right]}{\sum_{i=0.5}^5 \frac{1}{2} \mathcal{P}^*(0, T_i)}, \quad (5.3)$$

implementando esto en MATLAB (ver Apéndice B.1.) con los parámetros para el modelo como los hallados en [3], llegamos a que tras 100000 simulaciones la tasa CMS es aproximadamente:

$$K_{\text{CMS}}^{\text{MC}} \approx 4,6315953 \%. \quad (5.4)$$

### 5.2.3. Valoración

Usando la ecuación (5.3) llegamos a que el precio del *Constant Maturity Swap* en función de una tasa  $K$  pactada en el contrato viene dado por:

$$\begin{aligned} \text{CMSP}(0, \Gamma, K, 5, \omega) &= \omega \sum_{i=0.5}^5 \frac{1}{2} \mathcal{P}^*(0, T_5) E^{T_5} \left[ \frac{SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+5}, x(T_{i-1}), y(T_{i-1}))}{\mathcal{P}(T_i, T_5, x(T_i), y(T_i))} \right] \\ &\quad - \omega K \sum_{i=0.5}^5 \frac{1}{2} \mathcal{P}^*(0, T_i) \end{aligned}$$

donde  $\omega = 1$  ( $\omega = -1$ ) si el titular del contrato paga (recibe) la tasa  $K$ .

Tenemos así que haciendo una ligera modificación a lo ya implementado para hallar la tasa CMS, hallamos el precio justo del contrato para diferentes valores de  $K$ :

Tasa K	Precio (€1000)
1.0 %	162.26
1.5 %	139.92
2.0 %	117.58
2.5 %	95.24
3.0 %	72.90
3.5 %	50.56
4.0 %	28.22
4.5 %	5.88
5.0 %	-16.46

Tasa K	Precio(€1000)
6 %	-61.14
7 %	-105.82
8 %	-150.50
10 %	-239.86
12 %	-329.22
14 %	-418.58
16 %	-507.94
18 %	-597.30
20 %	-686.66

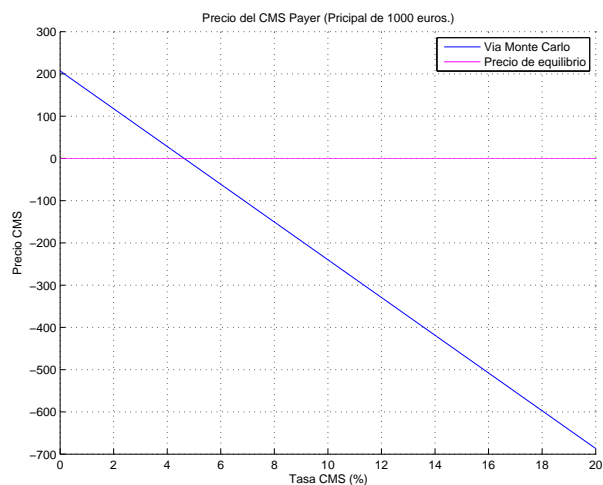


Figura 5.1.: Precio del CMS en función de la tasa (Payer).

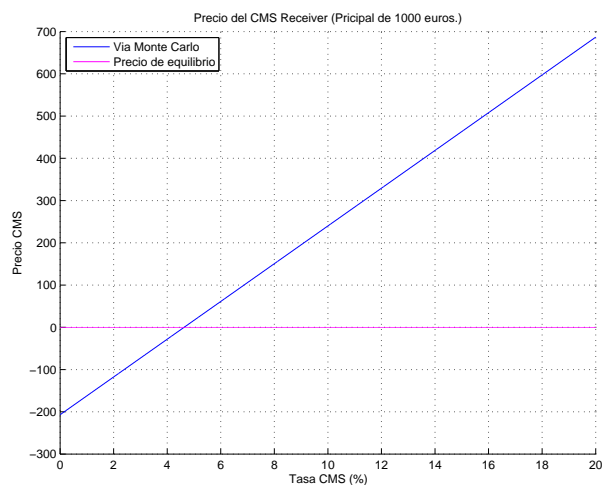


Figura 5.2.: Precio del CMS en función de la tasa (Receiver).

## 5.3. Valoración con el Ajuste CMS

### 5.3.1. Tasa CMS vía Ajuste

De la definición del Ajuste CMS 4.2 y el Teorema 4.4 se deduce que:

$$E^{T_i}[SR(T_{i-1}, T_i, T_{i+c})|\mathcal{F}_t] \approx SR(t, T_i, T_{i+c})e^{M(t)+N(t)Z_t}$$

sustituyendo esto en la igualdad (3.22) encontramos que:

$$K_{\text{CMS}}^{\text{Adj}} \approx \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{P}(0, T_i) SR(0, T_i, T_{i+c}) e^{M(0)+N(0)Z_0}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{P}(0, T_i)}.$$

Para el CMS que elegimos:

$$K_{\text{CMS}}^{\text{Adj}} \approx \frac{\sum_{i=0.5}^5 \frac{1}{2} \mathcal{P}^*(0, T_i) SR(0, T_i, T_{i+5}) e^{M(0)+N(0)Z_0}}{\sum_{i=0.5}^5 \frac{1}{2} \mathcal{P}^*(0, T_i)}, \quad (5.5)$$

es de este modo que la labor aquí se reduce a hallar  $M$  y  $N$ , que ya se presentan de forma explícita para el modelo G2++ en (4.16) y (4.17); una vez implementadas estas en MATLAB (ver Apéndice B.2.) obtenemos:

$$K_{\text{CMS}}^{\text{Adj}} \approx 4,6306865 \%. \quad (5.6)$$

## 5.4. Valoración

De la ecuación (5.5) la función de valoración en este caso es:

$$\begin{aligned} \mathbf{CMSP}(0, \Gamma, K, 5, \omega) &\approx \omega \sum_{i=0.5}^5 \frac{1}{2} \mathcal{P}^*(0, T_i) SR(0, T_i, T_{i+5}) e^{M(0)+N(0)Z_0} \\ &\quad - \omega K \sum_{i=0.5}^5 \frac{1}{2} \mathcal{P}^*(0, T_i), \end{aligned}$$

y el precio justo del CMS para algunos valores de  $K$ :

Tasa K	Precio (€1000)
1.0 %	162.22
1.5 %	139.88
2.0 %	117.54
2.5 %	95.20
3.0 %	72.86
3.5 %	50.52
4.0 %	28.18
4.5 %	5.84
5.0 %	-16.50

Tasa K	Precio(€1000)
6 %	-61.18
7 %	-105.86
8 %	-150.54
10 %	-239.90
12 %	-329.26
14 %	-418.62
16 %	-507.98
18 %	-597.34
20 %	-686.71

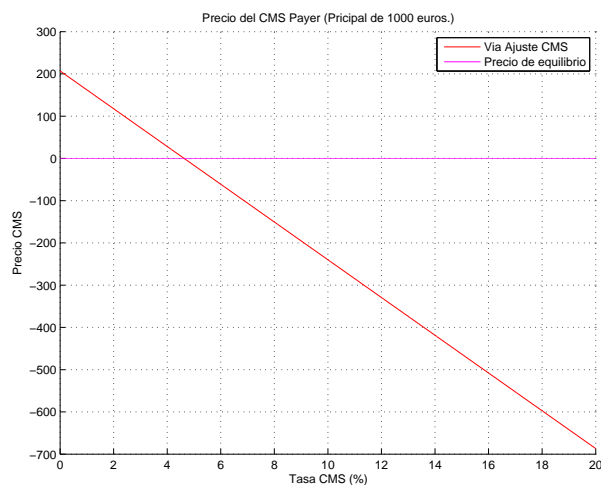


Figura 5.3.: Precio del CMS en función de la tasa (Payer).

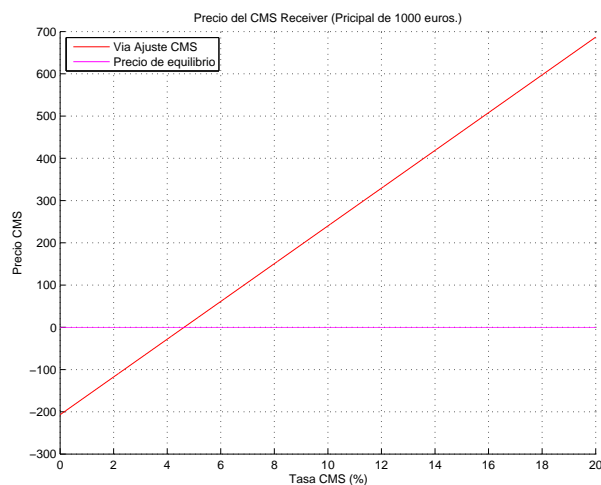


Figura 5.4.: Precio del CMS en función de la tasa (Receiver).

## 5.5. Resultados

Las diferencias de los precios sobre el nominal de €1000 entre ambas formas de valoración del CMS son:

Tasa K	Diferencia (€)
1.0 %	0.040605
1.5 %	0.040605
2.0 %	0.040606
2.5 %	0.040606
3.0 %	0.040606
3.5 %	0.040606
4.0 %	0.040607
4.5 %	0.040607
5.0 %	0.040607

Tasa K	Diferencia (€)
6 %	0.040607
7 %	0.040608
8 %	0.040609
10 %	0.040610
12 %	0.040611
14 %	0.040612
16 %	0.040613
18 %	0.040613
20 %	0.040614

cifras del orden de  $10^{-2}$  en relación al nominal de €1000, ésto nos brinda la seguridad de tener una muy buena aproximación al precio de nuestro CMS vía el ajuste por convexidad.

## 6. Conclusiones, Alcances y Limitaciones de este Trabajo

- Por Feynman-Kač, el valor esperado por el cual se determina la tasa CMS tiene su contraparte en una Ecuación Diferencial Parcial Parabólica. El Ajuste por convexidad es una buena aproximación para el caso de Modelos Afines, reduciendo el cálculo a la solución directa de un sistema determinista de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
- Se presentó aquí un caso práctico de un instrumento complejo el CMS, un derivado del tipo Swap valorado en un modelo afín de dos factores, el G2++. No se conocen trabajos que implementen estas técnicas del ajuste para modelos de varios factores.
- Este trabajo tiene muchas alternativas de proyección futuras: Analizar aproximaciones distintas a Low Variance (aquí usada), mirar otros derivados de la tasa Swap e incluso derivados de la tasa CMS como un Spread, mirar que pasaría con una formulación para Modelos Cuadráticos, entre otras.
- Puesto que los modelos Afines son los más utilizados en el mercado, (Vasiček, Cox-Ingersoll-Ross, Ho-Lee, Hull-White...) este trabajo muestra una muy interesante alternativa de valoración de instrumentos financieros muy complejos observando el comportamiento actual del instrumento más un ajuste dado.
- Entre las limitaciones de este trabajo y que deben ser mejoradas, se encuentra que no se realizó la calibración del modelo y se tomaron como parámetros los hallados por [3], la estructura a término del mercado usada no se interpoló, simplemente se tomaron los valores de ésta necesarios para los cálculos del Capítulo 5 y la fecha en la que se la observó aunque similar no es igual a la usada en [3] para la calibración del G2++. No se consideró necesario realizar la calibración ni ajustar la curva toda vez que nuestro objetivo no era validar el modelo.
- Un aspecto a enriquecer, es la implementación de métodos numéricos mas robustos que la simulación básica de Monte Carlo usada en el Capítulo 5 para calcular el precio del CMS con fórmulas directas del Modelo.

# A. Demostraciones

## Lema 3.2

*Demostración.* De las propiedades de la integral estocástica se deduce fácilmente que

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= 0, \\ \text{Var}[X(t)] &= \int_0^t \gamma^2(s) ds. \end{aligned}$$

Veamos que la variable aleatoria  $X(t)$  se distribuye normal a través del cálculo de su función generadora de momentos

$$\begin{aligned} m_{X_t}(u) &= E[e^{uX(t)}], \\ &= E[e^{u \int_0^t \gamma(s) dW(s)}]. \end{aligned}$$

Sea el proceso  $Y(t)$  definido como  $Y(t) := e^{uX(t)}$ . Usando la fórmula de Itô tenemos que

$$\begin{aligned} dY(t) &= \frac{u^2 \gamma^2(t)}{2} Y(t) dt + u \gamma(t) Y(t) dW(t), \\ Y(0) &= 1, \end{aligned}$$

lo que es equivalente a escribir

$$Y(t) = 1 + \frac{u^2}{2} \int_0^t \gamma^2(s) Y(s) ds + u \int_0^t \gamma(s) Y(s) dW(s).$$

Tomando el valor esperado a  $Y(t)$  y haciendo uso de la linealidad de la esperanza matemática y del hecho de ser  $\gamma$  una función determinista

$$E[Y(t)] = 1 + \frac{u^2}{2} \int_0^t \gamma^2(s) E[Y(s)] ds,$$

ahora definiendo  $m(t) := E[Y(t)]$  obtenemos la ecuación

$$m(t) = 1 + \frac{u^2}{2} \int_0^t \gamma^2(s) m(s) ds,$$

lo que luego de tomar la derivada respecto a  $t$  nos deja la EDO

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= \frac{u^2}{2} \gamma^2(t) m(t), \\ m(0) &= 1. \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación llegamos a que  $m(t) = e^{\frac{u^2}{2} \int_0^t \gamma^2(s) ds}$  y

$$\begin{aligned} m_{X_t}(u) &= E[e^{uX(t)}] \\ &= e^{\frac{u^2}{2} \int_0^t \gamma^2(s) ds} \\ &= e^{uE[X(t)] + \frac{u^2}{2} \text{Var}[X(t)]} \end{aligned}$$

lo que nos permite concluir que  $X(t)$  se distribuye normal.  $\square$

### Lema 3.4

*Demostración.* Integrado por partes la integral estocástica tenemos:

$$\int_t^T x(u) du = Tx(T) - tx(t) - \int_t^T u dx(u) = \int_t^T (T-u) dx(u) + (T-t)x(t). \quad (*)$$

reemplazando  $dx(u)$  según como se definió  $x$ , la integral de la parte derecha de la última expresión queda:

$$\int_t^T (T-u) dx(u) = -a \int_t^T (T-u)x(u) du + \sigma \int_t^T (T-u) dW_1(u)$$

ahora sustituyendo  $x(u)$ , vemos que:

$$\int_t^T (T-u)x(u) du = x(t) \int_t^T (T-u)e^{-a(u-t)} du + \sigma \int_t^T (T-u) \int_t^u e^{-a(u-s)} dW_1(s) du$$

calculamos ahora estas dos integrales por separado, la primera es:

$$-ax(t) \int_t^T (T-u)e^{-a(u-t)} du = -x(t)(T-t) - \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} x(t)$$

reescribiendo la segunda integral:

$$-a\sigma \int_t^T (T-u) \int_t^u e^{-a(u-s)} dW_1(s) du = -a\sigma \int_t^T (T-u)e^{-au} \int_t^u e^{as} dW_1(s) du \quad (**)$$

note que  $(T-u)e^{-au} du$  es justo la derivada respecto a  $u$  de  $\int_t^u (T-v)e^{-av} dv$  con ello el término en  $(**)$  es:

$$= -a\sigma \int_t^T \left( \int_t^u e^{as} dW_1(s) \right) d_u \left( \int_t^u (T-v)e^{-av} dv \right)$$



seguidamente integrando por partes esta ultima:

$$\begin{aligned}
&= -a\sigma \left[ \left( \int_t^T e^{au} dW_1(u) \right) \left( \int_t^T (T-v)e^{-av} dv \right) \right. \\
&\quad \left. - \int_t^T \left( \int_t^u (T-v)e^{-av} dv \right) e^{au} dW_1(u) \right] \\
&= -a\sigma \left[ \int_t^T \int_t^T (T-v)e^{-a(v-u)} dv dW_1(u) \right. \\
&\quad \left. - \int_t^T \int_t^u (T-v)e^{-a(v-u)} dv dW_1(u) \right] \\
&= -a\sigma \int_t^T \left( \int_u^T (T-v)e^{-av} dv \right) e^{au} dW_1(u) \\
&= -\sigma \int_t^T \left[ (T-u) + \frac{e^{-a(T-u)} - 1}{a} \right] dW_1(u),
\end{aligned}$$

sustituyendo en (\*) en total nos queda que:

$$\int_t^T x(u) du = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) + \frac{\sigma}{a} \int_t^T [1 - e^{-a(T-u)}] dW_1(u).$$

Análogamente:

$$\int_t^T y(u) du = \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t) + \frac{\eta}{b} \int_t^T [1 - e^{-b(T-u)}] dW_2(u),$$

con ello se concluye la igualdad (3.10). Para la ecuación (3.11) notemos que:

$$\begin{aligned}
\text{Var}\{I(t, T) | \mathcal{F}_t\} &= \text{Var} \left\{ \frac{\sigma}{a} \int_t^T [1 - e^{-a(T-u)}] dW_1(u) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\eta}{b} \int_t^T [1 - e^{-b(T-u)}] dW_2(u) \mid \mathcal{F}_t \right\} \\
&= \frac{\sigma^2}{a^2} \int_t^T [1 - e^{-a(T-u)}]^2 du + \frac{\eta^2}{b^2} \int_t^T [1 - e^{-b(T-u)}]^2 du \\
&\quad + 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} \int_t^T [1 - e^{-a(T-u)}] [1 - e^{-b(T-u)}] du.
\end{aligned}$$

Integrando esta ultima llegamos a la buscada igualdad (3.11). □

### Lema 3.8

*Demostración.* La integral la podemos reescribir como

$$\int_{\ln(K)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} (e^y - K) e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-M)^2}{V^2}} dy$$

realizando el cambio de variable  $z = \frac{y-M}{V}$ , nos queda

$$\begin{aligned}
&= \int_{\frac{\ln(K)-M}{V}}^{+\infty \cdot \omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{M+Vz} - K) e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\
&= e^{M+\frac{1}{2}V^2} \int_{\frac{\ln(K)-M}{V}}^{+\infty \cdot \omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-V)^2} dz - K \int_{\frac{\ln(K)-M}{V}}^{+\infty \cdot \omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\
&= e^{M+\frac{1}{2}V^2} \left[ \Phi(+\infty \cdot \omega) - \Phi\left(\frac{\ln(K) - M - V^2}{V}\right) \right] - K \left[ \Phi(+\infty \cdot \omega) - \Phi\left(\frac{\ln(K) - M}{V}\right) \right] \\
&= e^{M+\frac{1}{2}V^2} \omega \Phi\left(-\omega \frac{\ln(K) - M - V^2}{V}\right) - K \omega \Phi\left(-\omega \frac{\ln(K) - M}{V}\right).
\end{aligned}$$

□

## B. Programas

### B.1. Programa Monte Carlo

Las fórmulas de  $V(t, T)$  y  $B(t, T)$  dadas en las ecuaciones (3.11) y (4.15) respectivamente se usaran al calcular (5.3), se calculan con la función:

```
■ function V = Dts_G2(t, T)
```

```
(constantes del modelo G2++.)
```

```
a = 0,773511777;  
b = 0,082013014;  
sgm = 0,022284644;  
eta = 0,010382461;  
rho = -0,701985206;
```

```
ea = exp(-a * (T - t));  
eb = exp(-b * (T - t));  
eaa = (ea - 1)/a;  
ebb = (eb - 1)/b;  
eab = ((ea * eb) - 1)/(a + b);
```

```
V = ((sgm2)/(a2)) * (T - t + ((2/a) * ea) - ((1/(2 * a)) * (ea2)) - (3/(2 * a))) + ...  
      V((eta2)/(b2)) * (T - t + ((2/b) * eb) - ((1/(2 * b)) * (eb2)) - (3/(2 * b))) + ...  
      V((2 * rho * sgm * eta)/(a * b)) * (T - t + eaa + ebb - eab);
```

```
B = [eaa, ebb];  
V = [V, B];
```

Se procede a simular los proceso  $x$  y  $y$  bajo la medida  $Q^T$  con las fórmulas (3.17):

- Con este objetivo en mente se calculan las expresiones para  $M_x^T(s, t)$  y  $M_y^T(s, t)$  (lema 3.7):

```
function    M = M_Ts(s, t, Tn)

a = 0,773511777;
b = 0,082013014;
sgm = 0,022284644;
eta = 0,010382461;
rho = -0,701985206;

kx1 = (sgm^2)/(a^2) + ((sgm * eta * rho)/(a * b));
kx2 = ((sgm * eta * rho)/(b * (a + b)));
ky1 = (eta^2)/(b^2) + ((sgm * eta * rho)/(a * b));
ky2 = ((sgm * eta * rho)/(a * (a + b)));

Mx = kx1 * (1 - exp(-a * (t - s))) - ((sgm^2)/(2 * (a^2))) * (exp(-a * (Tn - t))...
    - exp(-a * (Tn + t - 2 * s)))...
    - kx2 * (exp(-b * (Tn - t)) - exp(-b * Tn - a * t + (a + b) * s));
My = ky1 * (1 - exp(-b * (t - s))) - ((eta^2)/(2 * (b^2))) * (exp(-b * (Tn - t))...
    - exp(-b * (Tn + t - 2 * s)))...
    - ky2 * (exp(-a * (Tn - t)) - exp(-a * Tn - b * t + (a + b) * s));

M = [Mx, My];
```

- function R = Mntc\_Ts(n, inst)

(la variable `inst` representa el instante de tiempo en el que nos interesa conocer  $x$  y  $y$ , y `n` es el número de simulaciones.)

```
dt = 0,0025;          (dt es el tamaño del paso en el tiempo.)
Tn = 5;              (Tn es el tiempo final es decir 5 años.)
nt = Tn/dt;         (nt es el número de pasos en el tiempo.)
```

(constantes del modelo G2++.)

```
a = 0,773511777;
b = 0,082013014;
sgm = 0,022284644;
eta = 0,010382461;
rho = -0,701985206;
```

( $t$  vector de tiempos comenzando en  $t=0$  y terminando en  $t=5$  años.)

```
t = 0 : dt : Tn;
```

(simulación)

```
x = zeros(n, nt + 1);
```

```
y = zeros(n, nt + 1);
```

```
rng(0)
```

```
for i = 1 : nt
```

```
    M = MTS(t(i), t(i + 1), Tn);
```

```
    dW1 = sqrt(dt) .* randn(n, 1);
```

```
    dW2 = sqrt(dt) .* randn(n, 1);
```

```
    x(:, i + 1) = (x(:, i) * exp(-a * dt)) - M(1) + (sgm * exp(-a * dt)) .* dW1;
```

```
    y(:, i + 1) = (y(:, i) * exp(-b * dt)) - M(2) + (eta * rho * exp(-b * dt)) .* dW1...
        +(eta * ((1 - (rho^2))^(1/2)) * exp(-b * dt)) .* dW2;
```

```
end
```

```
inst = (inst/dt) + 1;
```

```
insx = x(:, inst);
```

```
insy = y(:, inst);
```

```
R = [insx, insy];
```

Una vez simulados  $x$  y  $y$  se simulan los factores descuento con la ecuación (3.15):

```
■ function P = P_TS(t, T, n)
```

(Simulación de  $\mathcal{P}(t, T)$  en los  $n$  escenarios en los que se simulo  $x$  y  $y$ .)

```
if t == 0
```

(si  $t = 0$  no hay nada que simular pues es el factor de descuento  $\mathcal{P}^*(0, T)$  ya observable.)

```
    PP = Tss_TS;
```

```
    T = T/0,5;
```

```
    P = PP(T, 2);
```

(Tss\_TS es la matriz que contiene la estructura a término expuesta al principio del Capítulo 6.)

```

else                                     (simulación.)
    Df = Tss_TS;
    i = T/0,5;
    j = t/0,5;
    V1 = Dts_G2(t, T);
    B = V1(2 : 3);
    V1 = V1(1);
    V2 = Dts_G2(0, T);
    V2 = V2(1);
    V3 = Dts_G2(0, t);
    V3 = V3(1);
    A = ((V1 - V2 + V3)/2);
    XY = Mntc_Ts(n, t);
    P = (Df(i, 2)/Df(j, 2)). * exp(B(1). * XY(:, 1) + B(2). * XY(:, 2) + A);
end

```

El siguiente paso es simular las tasas Swap que aparecen en la igualdad (5.3):

```

■ function    S = Sw_Ts(t, T1, n)

```

(tenor del Swap subyacente 5 años.)

```

T2 = T1 + 5;

P1 = P_Ts(t, T1, n);
P2 = P_Ts(t, T2, n);
P3 = 0;

for i = (T1 + 0,5) : 0,5 : (T1 + 5)
    P3 = P_Ts(t, i, n) + P3;
end

P3 = (P3/2);
S = (P1 - P2)./P3;

```

Por ultimo la tasa CMS  $K_{\text{CMS}}^{\text{MC}}$  en (5.4) se halló como:

```

■ function    C = CMS_Ts(n)
    Valuation date: t=0
    Maturity: t=5
    CMS payment frequency: 2
    Underlying Swap p.fr: 2
    Underlying Swap tenor: 5

    tic

    U = 0;
    L = 0;
    for i = 0,5 : 0,5 : 5
        u = Sw_Ts((i - 0,5), i, n) ./ P_Ts(i, 5, n);
        U = mean(u) + U;
        L = L + P_Ts(0, i, n);
    end
    U = (U/2) * P_Ts(0, 5, n);
    L = (L/2);

    C = U/L;

    toc.

```

## B.2. Programa Ajuste

Básicamente es reproducir la prueba del Teorema 4.4 pero ya con datos, para simplificar las cosas empezamos definiendo la función:

```

■ function    E = B_Ts2(x, T)
    E = exp(-x * T)/x;

```

Dado que  $N$  es constante a cero, solo nos ocupamos de  $M$ :

```

■ function    M = Adjus_M_Ts2(t, T1, T2)
    ( $t$  es el tiempo en el que se esta evaluando  $M$  y  $T_1$  hace las veces de  $T_i$  y  $T_2$  a  $T_{i+c}$ )

    a = 0,773511777;
    b = 0,082013014;
    sgm = 0,022284644;
    eta = 0,010382461;
    rho = -0,701985206;

```

```

alp = 0,5;           (ancho de los intervalos de tiempo.)
Tnr = T2 - T1;      (tenor.)
T1 = T1 - alp;      (Ti-1.)
n = Tnr/alp;

```

(Constantes Nivel 1)

```

l1 = P_Ts(0, T1, 0)/(P_Ts(0, T1, 0) - P_Ts(0, T2, 0));
l2 = P_Ts(0, T2, 0)/(P_Ts(0, T1, 0) - P_Ts(0, T2, 0));
Anty = 0;
for j = 1 : n
    Anty = Anty + alp * (P_Ts(0, (T1 + alp * j), 0));
end
m = zeros(1, n);
ea = m;
eb = m;
for j = 1 : n
    m(j) = (alp * P_Ts(0, (T1 + alp * j), 0))/Anty;
    ea(j) = B_Ts2(a, (T1 + alp * j));
    eb(j) = B_Ts2(b, (T1 + alp * j));
end

```

(Constantes Nivel 2)

```

lm1 = l1 * B_Ts2(a, T1) - l2 * B_Ts2(a, T2);
lm2 = l1 * B_Ts2(b, T1) - l2 * B_Ts2(b, T2);
lm3 = sum(m. * ea);
lm4 = sum(m. * eb);
gm1 = l2 - l1;
gm2 = sum(m);

```

(Constantes Nivel 3)

```

lm13 = lm1 - lm3;
lm24 = lm2 - lm4;
gm12 = gm1 + gm2;
v1 = lm3 - B_Ts2(a, T1);
v2 = lm4 - B_Ts2(b, T1);
v3 = 1 - gm2;

```



(Constantes Nivel 4)

```

u1 = (sgm2) * lm13;
u2 = eta * sgm * rho * lm24;
u3 = eta * sgm * rho * lm13;
u4 = (eta2) * lm24;
u5 = gm12 * (((sgm2)/a) + ((eta * sgm * rho)/b));
u6 = gm12 * (((eta2)/b) + ((eta * sgm * rho)/a));

```

(Constantes Nivel 5)

```

th1 = ((u2 * v1) + (u3 * v2))/(a + b);
th2 = (u1 * v1)/(2 * a);
th3 = (u4 * v2)/(2 * b);
th4 = ((u5 * v1)/a) + ((u1 * v3)/(a2)) + ((u3 * v3)/(a * b));
th5 = ((u6 * v2)/b) + ((u4 * v3)/(b2)) + ((u2 * v3)/(a * b));
th6 = ((u5 * v3)/a) + ((u6 * v3)/b);

```

(Ultima Constante)

```

K = -(th1 * exp((a + b) * T1) + th2 * exp(2 * a * T1) + th3 * exp(2 * b * T1)...
    + th4 * exp(a * T1) + th5 * exp(b * T1) + th6 * T1);

M = th1 * exp((a + b) * t) + th2 * exp(2 * a * t) + th3 * exp(2 * b * t)...
    + th4 * exp(a * t) + th5 * exp(b * t) + th6 * t + K;

```

Finalmente ya con  $M$  el cálculo de  $K_{\text{CMS}}^{\text{Adj}}$  es:

```

■ function    C = CMS_Ts2

C1 = 0;
C2 = C1;
Adj = zeros(10, 1);          (Matriz de ajustes CMS)
for k = 0,5 : 0,5 : 5
    C1 = C1 + P_Ts(0, k, 0) * Sw_Ts(0, k, 0) * exp(Adjus_M.Ts2(0, k, k + 5));
    C2 = C2 + P_Ts(0, k, 0);
    Adj(2 * k) = Sw_Ts(0, k, 0) * (exp(Adjus_M.Ts2(0, k, k + 5)) - 1);
end

Adj
C = C1/C2;

```

# Bibliografía

- [1] Bjork, C. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, (2003).
- [2] Blanchard, A. *The Two-Factor Hull-White Model : Pricing and Calibration of Interest Rates Derivatives*. KTH Vetenskap och konst.
- [3] Brigo, D. y Mercurio, F. *Interest Rate Models*. Springer Verlag, Berlin, (2001).
- [4] Fabozzi, F. *Bond Markets, Analysis and Strategies* (3rd edición) Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1995).
- [5] Gaspar, R. y Murgocci, A. *Convexity Adjustment for ATS Models*. Working paper Series, n. 9/2008, (2008).
- [6] Gaspar, R. y Murgocci, A. *Convexity Adjustments*. *Encyclopedia of Quantitative Finance*. R. Cont, ed., Wiley, (2009).
- [7] Geman, H., El Karoui, N. y Rochet, J.C. *Changes of Numéraire, Changes of Probability Measure and Option Pricing*. *Journal of Applied Probability* 32, 443-458, (1995).
- [8] Hagan, P.S. *Convexity Conundrums: pricing CMS swaps, caps, and floors*. *Willmott Magazine*. March. 38-44 (2003).
- [9] Hunt, P. y Kennedy, J. *Financial Derivatives in Theory and Practice*. Wiley, Chichester, (2000).
- [10] Hull, J. C. *Options, Futures, and Other Derivatives* (7th edición) Prentice Hall, (2000).
- [11] Moreno, M. *Modelización de la Estructura Temporal de los Tipos de Interés: Valoración de Activos Derivados y Comportamiento Empírico*. *Revista Española de Financiación y Contabilidad*. Vol. XXIX n.º 104 pp. 345-376, (2000).
- [12] Nava, N.C. *Pricing Constant Maturity Swap Derivatives*. *Universiteit van Amsterdam*, (2010).
- [13] Nakagawa, H. ; Yueh, M. L. ; Hsieh, M. H. *Valuation of Constant Maturity Credit Default Swap*. *Notas Seminar on Department of financial and Computational Mathematics*. *Providence University*, (2011).

- 
- [14] Nevena, S. *An Examination of the Convexity Adjustment Technique in the Pricing of Constant Maturity Swaps. Advanced Mathematic of Finance Project. WorkingPaper*, (2003).
- [15] Oleaga, G. y Sánchez, A. *Convexity Adjustment via Drift Change*. Preprint, (2010).
- [16] Pelsser, A. *Efficient Methods of Valuing Interest Rate Derivatives. Springer Verlag, Berlin Heidelberg*, (2000).
- [17] Pelsser, A. *Mathematical foundation of convexity correction. Quantitative Finance*, 3, 5965, (2003).
- [18] Benhamou, E. *A Martingale Result for Convexity Adjustment in the Black Pricing Model, Financial Markets Group, London School of Economics, and Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique*, (2000).
- [19] Skovmand, D. *The Valuation of Callable Bonds with Floored CMS-spread Coupons, University of Aarhus, Department of Management*.