UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Diseño de una herramienta tridimensional no computarizada para contribuir al desarrollo del pensamiento geométrico-espacial

Luis Fernando Moncada García

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Exactas

Manizales, Colombia

Enero de 2017

Diseño de una herramienta tridimensional no computarizada para contribuir al desarrollo del pensamiento geométrico-espacial

Luis Fernando Moncada García

Trabajo Final presentado como requisito parcial para optar al título de:
MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Directora:

Maria Eugenia Becerra Herrera
Magister en Química

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Manizales, Colombia
2017

Culminar esta labor, constituye una de mis más grandes satisfacciones
a nivel académico y es el producto de muchas horas de trabajo y dedicación
en pro de brindar una posibilidad diferente a los jóvenes que de alguna
u otra forma emprenden un camino de aprendizaje de la geometría.
Es a ellos a quienes en primera medida quiero dedicarles este trabajo,
pues son la razón de ser y el fundamento de este producto.

De una forma muy especial, marcado por lo sentimental,
quiero dedicar este logro a todas las personas que han hecho posible
y han motivado de alguna manera el curso de mi vida,
***a mi hija Wara** quien es mi gran fortaleza y el motor de mi existencia,*
ella me impulsa a seguir sembrando y cosechando logros.

Le ofrezco también este esfuerzo a mi madre y a mi abuela,
quienes durante todo mí andar, me han enseñado
caminos para una vida correcta y tranquila, y es por ellas quien soy.

Por último, este trabajo quiero dedicarlo a mi asesora,
la persona quizá más importante durante todo este proceso,
y sin la cual no hubiese sido posible llevarlo a feliz término;
pues ella, con su entrega incondicional, su gran inteligencia femenina,
su carácter hermoso y su ternura natural,
lo ha facilitado y lo han hecho por demás,
definitivamente más agradable.

A todas las personas y entidades que de una u otra forma
han realizado algún aporte para que este trabajo sea lo mejor posible,
a ellos también les dedico mi satisfacción y mis logros.

***Bendiciones universales para todos**.*

Contenido

RESUMEN

En este trabajo se presenta el diseño de una herramienta tridimensional no computarizada y un protocolo de aplicación detallado para su implementación en el desarrollo de tres ejes temáticos fundamentales en un curso de geometría para estudiantes de grado séptimo de una institución educativa tradicional colombiana. Los contenidos se seleccionaron y se direccionaron en cumplimiento de los estándares nacionales de educación. El propósito de esta propuesta didáctica es que el estudiante logre apropiar, de una manera experimental, tres tópicos muy importantes dentro de toda la matriz de conocimientos matemáticos que debe ir entretejiendo en su formación básica secundaria y media.

La motivación principal para su realización es la falta de resultados satisfactorios en los procesos pedagógicos llevados a cabo al interior de las aulas, lo que se evidencia en el bajo desempeño mostrado no sólo en pruebas internas (SABER, ICFES, ECAES) sino también en escenarios de medición de competencias a nivel internacional (PISA) en cuanto a conocimientos matemáticos se refiere.

Los tres ejes temáticos seleccionados fueron: ***Propiedades de los Polígonos, Transformaciones isométricas y Cuerpos sólidos a partir de polígonos planos,*** fundamentales para el desarrollo de las competencias relacionadas con el pensamiento geométrico-espacial.

Para facilitar la implementación de la herramienta cada uno de los ejes temáticos se dividió en subcomponentes, los cuales un estudiante deberá ir realizando progresivamente hasta completar un concepto y apropiarse de él. Cada una de las actividades propuestas involucra un trabajo manual con materiales naturales como madera y arcilla u otro material moldeable que

permita el contacto directo, su formación y deformación y su movimiento libre, característica importante que brinda la posibilidad de manipular y observar de forma realmente tridimensional un cuerpo plano o sólido, cualquiera que fuere el caso.

Una vez realizado el trabajo manual en la clase con la compañía adecuada del docente, se espera que las posibilidades de experimentación directa en cuanto a la construcción de sus propias figuras y la percepción multisensorial de sus formas, se logre impactar de forma positiva la apropiación de conceptos necesarios para que el estudiante tenga una idea más clara de la geometría de los polígonos, y como éstos son componentes esenciales de un cuerpo sólido; contribuyendo al desarrollo de competencias matemáticas básicas que permitan a nuestros estudiantes comprender y aprender las relaciones geométrico-espaciales y por tanto obtener mejores resultados en contextos académicos o laborales futuros.

Para efectos de determinar la utilidad de la herramienta, se proponen dos momentos de evaluación, el primero con fines indagatorios sobre el nivel de apropiación de los conocimientos en lo referente al pensamiento espacial / geométrico (saberes previos), y el segundo, para medir el impacto que tuvo el proceso de enseñanza llevado a cabo, confrontando los resultados obtenidos con los de la prueba inicial. Para este propósito al final del documento se presenta un modelo de un formato de evaluación, que involucra los conceptos vistos en los tres ejes temáticos con la implementación de la herramienta tridimensional diseñada.

Palabras clave: Propiedades de los polígonos, transformaciones isométricas, poliedros, geometría experimental.

Design of a non-computerized three-dimensional tool to contribute to the development of thought

Geometric-spatial

ABSTRACT

In this paper, the design of a tridimensional non-computerized tool is presented, as well as a detailed application protocol for its implementation in the development of three main themes, fundamental in a geometry course for seventh graders of a traditional institution in Colombia. The contents were selected and directed according to the national education standards. The purpose of this didactic approach is that the student gets to appropriate experimentally three very important topics in the whole mathematical knowledge matrix that must be interweaving in his/her primary and high formation.

The main motivation for its making is the lack of satisfactory results in the pedagogical processes taken in the class rooms, which is evidenced in the low performance shown not only in local tests (SABER, ICFES, ECAES) but also in scenarios of measurement of abilities international wise (PISA) in terms of mathematical knowledge.

The three main topics selected were: polygon properties, isometric transformation y solid bodies from flat polygons, fundamental for the development of abilities related with geometrical and space thought.

To ease the tool implementation, each topic was divided in subtopics, which every student must make progressively until he/she completes a concept and appropriates it. Each activity proposed involves a manual task with natural materials such as wood or clay or any other moldable material that allows direct contact, its formation and deformation and its free movement, important characteristic that gives the chance to manipulate and observe in real 3D a flat or solid body, according to the case.

Once the manual task is made in class with the accurate guide of the teacher, it is hoped that with the possibilities of direct experimenting in terms of construction of their own figures and the multisensorial perception of their shapes, a positive impact in the appropriation of necessary concepts for the student to have a much clearer idea of polygons geometry will be achieved, and how these are essential components of a solid body; contributing to the development of mathematical basic abilities that allow our students comprehend and learn geometric-space relations and hence get better results in future academic or labor contexts

In order to determine the tool's utility, two evaluation moments are proposed, the first of them with inquiry purposes about the level of appropriation of the knowledge in terms of space/geometry thought (pre-knowledge), and the second one, to measure the impact that this teaching-learning process had, facing the results with the initial test. To achieve such purpose, at the end of the document a model of evaluation format is presented, that involves the concepts seen during the three main topics with the implementation of the designed tridimensional tool.

Keywords: polygon properties, isometric transformations, polyhedron, experimental geometry.

INTRODUCCIÓN

En el extenso contenido de las matemáticas se hallan inmersos diversos tipos de pensamiento que responden a diferentes estructuras, conceptos y representaciones a las que recurre el cerebro cuando se trata de entender un modelo del mundo físico, sea cual fuere, a la luz de las matemáticas.

Aunque los diferentes puntos de vista desde los que se pueden abordar los problemas responden a capacidades individuales, deben converger en un sistema explicativo completo que unifique y demuestre el concepto. El pensamiento numérico/aleatorio, el pensamiento lógico, el pensamiento métrico, son varios ejemplos de cómo se logra el entendimiento de las matemáticas, sin embargo, el área de interés de este trabajo es el pensamiento espacial y geométrico.

Desde tiempos remotos el hombre se ha visto conminado a entablar una relación estrecha con el estudio de su entorno, se ha enfrentado al entendimiento de las formas y fenómenos diversos que han conformado su mundo cotidiano época tras época y que le han permitido comprender, manipular y dominar en gran parte su macro-mundo.

La influencia del pensamiento geométrico-espacial ha sido evidente en el desarrollo de la humanidad, de no ser así, las primeras civilizaciones al enfrentarse a problemas como distribuciones parcelares, construcción de viviendas y pirámides, observación espacial, solo por mencionar algunos, no habrían podido avanzar; si el constructor, el agricultor, o el observador astronómico no se hallasen en la capacidad de imaginar por fuera de sí mismos el espacio geográfico de referencia y realizar sobre él, de forma mental/abstractiva, cálculos y razonamientos matemáticos que en ese momento, eran totalmente empíricos y no contaban con más demostración que su funcionamiento práctico.

Más tarde, entre los siglos VI y II antes de cristo, hombres como Thales de Mileto y Euclides iniciaban ya de forma empírica e intuitiva demostraciones geométricas, las que más tarde serían los pilares lógicos de muchos razonamientos geométrico-espaciales. Obras importantes de la época como “Los elementos” de Euclides, exponen de forma muy organizada conceptos geométricos antiguos, que aún hoy muchos de ellos se mantienen vigentes.

El pensamiento geométrico espacial ha proporcionado una de las herramientas clave para el desarrollo de la sociedad actual. Se hace evidente el resultado de su influencia en las grandes edificaciones, la optimización de los espacios, los estudios cartográficos complejos, la navegación espacial y marítima, entre muchos otros campos de aplicación; y es tal su importancia, que se podría pensar que en manos de los grandes “imaginadores” geométrico-espaciales se halla la visión y consolidación de un futuro sostenible y amigable.

En este sentido, es de gran importancia modificar el profundo imaginario colectivo que ubica a las matemáticas, su aprendizaje y aplicación, dentro de un “*bunker*” de alta seguridad que sólo es asequible a algunas “mentes brillantes”[a] dentro de los contextos escolares y que día tras día, agudiza en los estudiantes de matemáticas de todos los niveles de aprendizaje, bloqueos de tipo emocional, cognoscitivo y cultural, iniciados generalmente en los primeros grados escolares y que obstaculizan en gran medida la enseñanza de las matemáticas de forma natural y divertida. (Gómez Chacón, 2000, p. 3).

Dentro de las aulas[b], los estudiantes deben tener la oportunidad de modificar su mente y su entorno a partir de nuevas posibilidades. En este sentido, el desarrollo del pensamiento

---

a Las Mentes Brillantes, que según la creencia popular en muchas regiones del mundo solo la gozan personas privilegiadas que logran un entendimiento real de las matemáticas.

b El concepto de aula en este caso, es diferente a un espacio cerrado por paredes, se refiere sobre todo al momento de relaciones, emociones y experiencias que vive el estudiante, no importa en qué espacio o contexto físico.

geométrico-espacial en los estudiantes es un proceso interesante, ya que es posible intencionar aprendizajes transversales que permitan avanzar en la comprensión y apropiación de diversos conceptos matemáticos, fundamentales para el entendimiento de otros conceptos más abstractos y complejos.

Es en este punto en el que se ubica este trabajo, ya que la estrategia didáctica propuesta para lograr que el estudiante comprenda, por ejemplo, las figuras geométricas y sus características, involucra la experimentación con formas geométricas reales en una relación multi-sensorial y no solamente visual, o a lo sumo bidimensional, como se hace habitualmente. Resulta lógico que el cerebro no logre entender completamente un modelo espacial de figuras geométricas que simulan situaciones cotidianas reales, cuando se trata de explicar dicho modelo con representaciones planas y textuales[c], generando una dificultad evidente para el entendimiento de las matemáticas.

El papel de los profesores en el desmantelamiento de las prácticas que dificultan el aprendizaje es de gran importancia y de paradójica contradicción, pues ha sido desde la misma práctica docente que se han alimentado los miedos y las desmotivaciones frente a las matemáticas. Es necesario que los procesos de enseñanza–aprendizaje se desarrollen en contextos físicos y emocionales adecuados, en los que la relación entre los actores del proceso sea de confianza y horizontalidad. “Cada vez se tiene más evidencia de cómo los estados emocionales interactúan con las funciones cognitivas” (Ibídem).

Este trabajo tiene como objetivo diseñar una herramienta tridimensional no computarizada que contribuya al desarrollo de temas estratégicos incluidos en el contenido

---

[c] Casi siempre desde un espacio cerrado por paredes y mirando fijamente al tablero o pizarrón, mientras el docente explica.

establecido para un curso de geometría de séptimo grado. Para este propósito, se seleccionaron tres ejes temáticos: *Propiedades de los Polígonos, Transformaciones isométricas y Cuerpos sólidos a partir de polígonos planos,* por considerarlos de gran importancia para el desarrollo de las competencias matemáticas básicas, específicamente en el campo del pensamiento geométrico- espacial.

Estos ejes temáticos se dividieron en subcomponentes o metas, que el estudiante debe ir efectuando progresivamente hasta completar un concepto y apropiarse de él. Cada una de las actividades propuestas involucran un trabajo manual con arcilla o cualquier otro material moldeable. Las posibilidades de trabajo deben favorecer el contacto manual con el material, su formación y deformación y su movimiento libre, característica importante que brinda la posibilidad de manipular y observar de forma realmente tridimensional un cuerpo plano o sólido, cualquiera que fuere el caso, dada la importancia que tiene la experimentación en el proceso aprendizaje.

Algunos conceptos geométricos que frecuentemente son de difícil recordación para los aprendices de geometría, pueden facilitarse con la implementación de prácticas como las propuestas en este trabajo, que incluyen actividades experimentales y lúdicas, en las que el estudiante se involucra con su propia experiencia de conocimiento, haciéndola más personal y más natural para su cerebro por ser menos abstracta, favoreciendo así procesos sinápticos más profundos y que por tanto generan mayor entendimiento y recordación.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La competitividad es un concepto que cada día toma más fuerza en el contexto socioeconómico globalizado, convirtiéndola en una condición indispensable para seguir la tendencia de desarrollo expansivo, cada vez más marcado por nuevos y mejores productos y servicios. Como es de esperar, nuestro país no es ajeno a estos cambios, por el contrario, su participación es más abierta en diferentes escenarios y con más actores a nivel tecnológico y económico.

Es desafortunado que solo algunos gobiernos aplican -aunque es seguro que todos entienden que es muy importante para el desarrollo de una nación-, la inversión máxima y cuidadosa de recursos económicos en el sector educativo, por la simple razón de que una juventud bien preparada es el cimiento de una posterior sociedad más prospera y verdaderamente encaminada a un desarrollo socioeconómico sostenible.

A pesar de los grandes esfuerzos llevados a cabo en materia de mejoramiento de las condiciones educativas en nuestro país, se ha obtenido un bajo desempeño en el manejo de competencias técnicas, tecnológicas, administrativas, laborales, sociales y humanas, no solo en sondeos y pruebas llevadas a cabo a nivel interno (Pruebas SABER[d], ICFES[e], ECAES[f]) sino

---

[d] Se aplica a estudiantes de 5° y 9° grado. Comenzó en 1991 con aplicaciones muestrales y entre 2002 y 2003 se llevó a cabo la primera aplicación censal, que constituye una línea de base en las áreas de Lenguaje, Matemáticas, Ciencias Naturales y Competencias Ciudadanas. A partir de 2005 se incluyó Ciencias Sociales.

[e] Se aplica a los estudiantes de calendario A y B que terminan el grado 11, en las áreas de lenguaje, matemática, física, química, biología, geografía, historia, filosofía, idioma extranjero (electivo entre inglés, francés y alemán) e interdisciplinar (electiva entre medio ambiente y violencia y sociedad).

[f] Se orienta a evaluar los aprendizajes y las competencias de los estudiantes que concluyen el ciclo de educación superior, en las áreas y componentes propios de su programa académico. Se realiza una aplicación anual y pueden participar egresados de la superior o ciudadanos que aspiren a confrontar su dominio en un determinado campo. Datos tomados de:
http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-107522.html

también en escenarios de medición de competencias generales a nivel internacional (PISA[g], SERCE[h], TIMSS[i]). Una y otra vez, se dan diversas explicaciones de los resultados obtenidos, y se proponen cambios de forma *(edificios, aumento en horas de clase, instructores, docentes de apoyo, etc.)*, cuando lo que verdaderamente se requiere son cambios de fondo, es decir, es necesaria una reestructuración de la manera en que se concibe la enseñanza de los conceptos impartidos en nuestras aulas de clase.

Para referirnos de forma concreta a nuestro caso, es necesario ubicarnos en el escenario cotidiano de una clase de geometría para grado séptimo de una institución educativa tradicional rural. La geometría por su naturaleza necesita analizarse de manera tridimensional (real), no se recomienda limitarla solo al uso de herramientas didácticas bidimensionales como los pizarrones o las pantallas de computadora, las cuales, a pesar de ofrecer una ilusión óptica de profundidad, dando la sensación al observador de estar viendo una forma en tres dimensiones, están lejos de ofrecer las posibilidades de manipulación táctil y visual, necesarias para complementar las explicaciones verbales y los modelos bidimensionales con los que están normalmente dotados la mayoría de textos y producciones académicas referentes al tema, y a las que recurre frecuentemente un docente en su aula de clase para generar procesos de enseñanza y aprendizaje.

---

[g] Un programa de la Organisation for Economic Cooperation and Development (OECD) que se efectúa en 58 países, evalúa conocimientos y habilidades para la vida, relacionados con los dominios de comprensión lectora, matemática y científica. Son pruebas estandarizadas, dirigidas a jóvenes de 15 años que estén cursando al menos grado 7°. En Colombia, la prueba piloto se aplicó en 2005 a 1.720 estudiantes de 55 instituciones escolares, y a 5.250 estudiantes de 150 instituciones, en 2006.

[h] Un proyecto del Laboratorio Latinoamericano de la Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE) de OREALC/UNESCO Santiago de Chile, evalúa competencias básicas y habilidades para la vida en las áreas de lectura y matemática, con la opción de hacerlo en Ciencias Naturales.

[i] de la International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA), provee información confiable y oportuna sobre el logro académico de estudiantes de Estados Unidos de grados 4° y 8°, en Matemáticas y Ciencias Naturales, y lo compara con el de otros países (participan 59). El estudio piloto se cumple en 2006, con la evaluación de 3.123 estudiantes de 50 instituciones, y la aplicación definitiva se hará en 2006 y 2007 a 9.736 estudiantes de 260 instituciones. Datos tomados de:
http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-107522.html

JUSTIFICACION

Teniendo en cuenta que el Ministerio de Educación Nacional dentro de sus políticas de mejoramiento del desempeño de los estudiantes y que en el marco de su proyecto "Colombia la mejor educada en el 2025", se aplica periódicamente a los estudiantes de diferentes grados escolares, pruebas que en su mayoría incluyen la evaluación del pensamiento matemático, y considerando el bajo desempeño de los estudiantes colombianos en esta área, se hace necesario implementar estrategias que permitan incrementar la comprensión y apropiación de los conceptos matemáticos y por tanto mejorar el desempeño de los estudiantes de bachillerato y de educación superior, en las pruebas que se les apliquen, tanto a nivel nacional como internacional.

Desde este punto de vista, y teniendo en cuenta que la matemática es considerada como la ciencia base, se deben garantizar procesos de acercamiento efectivo a esta ciencia, que, por demás, es una de las más apropiadas para desarrollar conexiones neuronales fuertes y por tanto capacidades cognitivas que favorecen sin duda, no solo el desempeño en pensamiento de tipo matemático, sino otros tipos de razonamiento que involucran otras áreas del pensamiento.

Para avanzar de manera efectiva en esta dirección, se requiere que las instituciones educativas implementen las estrategias pedagógicas necesarias, y de ser posible, que se motive a los estudiantes a experimentar[j], para favorecer la apropiación de los conocimientos, ya que se permitiría una nueva relación de éste con el objeto de conocimiento, que es para nuestro cerebro, una manera de aprender más natural y biológicamente normal, ya que constantemente recurrimos

[j] La palabra "experimentar" descrita en este contexto, solo adquiere significancia total para el lector si se entiende que los ajustes necesarios realizados por cada docente dentro del aula se deben encaminar a que las didácticas de enseñanza permitan que el desarrollo de determinado aprendizaje se haga mayoritariamente por parte del estudiante con asistencia constante del docente, e incentivando de forma importante la manipulación del objeto de conocimiento, (de ser posible) y la experimentación libre con los fenómenos a que haya lugar en el desarrollo de las relaciones del objeto mismo con el entorno.

al tacto, la visión, el olor, el oído, e incluso, el gusto, para establecer relaciones de aprendizaje con el mundo que nos rodea.

El aprendizaje de los conceptos matemáticos que determinan las propiedades de los cuerpos, generalmente se lleva a cabo mediante el análisis de problemas reales dados en forma verbal, que permitan al estudiante traducir a un lenguaje matemático una situación determinada, con lo que se pretende favorecer el análisis de problemas y el pensamiento matemático en el ámbito de lo geométrico-espacial. Particularmente en esta área, las posibilidades de experimentación tridimensional pueden hacer la diferencia para el estudiante al momento de apropiar el conocimiento en cuestión.

OBJETIVOS

Objetivo General

Diseñar un modelo tridimensional no computarizado que pueda contribuir al desarrollo del pensamiento geométrico-espacial aplicable a un curso de geometría de séptimo grado de una institución educativa tradicional colombiana.

Objetivos Específicos:

- Diseñar una herramienta modular que le permita al estudiante formar diferentes figuras poligonales experimentando con sus lados y sus ángulos
- Construir con los moldes poligonales, figuras bidimensionales que se puedan manipular y analizar en tiempo y espacio reales, para experimentar sus propiedades y relaciones con el espacio de forma directa.
- Plantear una secuencia de actividades experimentales con los polígonos construidos encaminadas a que el estudiante comprenda el concepto de transformaciones isométricas, experimentando los movimientos de forma directa en un plano cartesiano.
- Proponer algunas actividades relacionadas con la construcción de cuerpos tridimensionales a partir de caras planas (triángulos y cuadrados) construidas anteriormente.

ANTECEDENTES

Según la búsqueda realizada en las bases de datos, se encontraron una serie de trabajos que se relacionan a continuación en cuanto a su objetivo y alcances.

Dora Fanny Marín (2013) reportó un impacto positivo en el mejoramiento de los procesos de aprendizaje en el área de geometría de los estudiantes del grupo de estudio, como resultado del desarrollo de unas estrategias didácticas basadas en la aplicación de un pre-test de saberes, la aplicación de material de apoyo (Geoplano, talleres grupales e individuales entre otros), y un pos test para establecer el desempeño de aprendizaje del grupo. (Marín Grajales 2014).

En la tesis de maestría de Pabón (2014) se analizaron las estrategias y didácticas utilizadas en el “Proyecto Ludomática” ejecutado por un grupo de docentes de matemáticas de la institución educativa Café Madrid de Tolima – Ibagué, con el objetivo de mejorar el pensamiento matemático de los estudiantes. La autora concluye que el “Proyecto Ludomática” evidencia una planeación basada en la lúdica como estrategia didáctica, la resolución de problemas y la investigación, sin embargo, encontró que hay objetivos específicos propuestos en el proyecto que no apuntan a la consecución del objetivo general y por tanto no permitieron evidenciar un trabajo coherente entre lo planeado y lo desarrollado dentro de las clases de matemáticas. (Pabón Jaimes, 2014).

Zapata (2014) reportó el desarrollo de un modelo para que el estudiante por su propio merito lograra razonar de manera deductiva para obtener conocimiento significativo, buscando mejorar sus competencias y mejorar el desempeño en las pruebas externas. El trabajo se fundamentó en la teoría del descubrimiento de Bruner (1961)[k]. En este trabajo la autora concluye que el desarrollo cognitivo de un estudiante se puede garantizar logrando ser analítico, creativo y autónomo, si los elementos surgen de los conceptos, las representaciones gráficas y mentales y el contacto directo con el objeto de estudio. (Zapata Álvarez, 2014).

Posteriormente, el trabajo realizado por Palacio (2016) se basó en el desarrollo del pensamiento geométrico según la teoría de Van Hiele[l]" con el objetivo de determinar el nivel de desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes de tercer grado de primaria de una institución educativa de Pereira. Trabajó con una muestra de 25 estudiantes, con edades entre 8 y 9 años, y encontró que, al aplicar el modelo propuesto, de las cinco etapas que involucra la teoría, tuvo mayor incidencia el nivel de visualización. (Palacio Villada, 2016).

También se encontró reportado un trabajo (Sedó, 2016) dirigido a la conformación de una propuesta basada en actividades lúdico-pedagógicas (proyectos, talleres y juegos contextualizados en su cotidianidad) encaminadas a mejorar el razonamiento geométrico de los estudiantes de segundo grado de educación primaria, potenciando la motivación, la cooperación y el aprendizaje activo. En este trabajo concluyó, entre otras cosas, que el bloque de contenidos matemáticos de *espacio y forma* donde las dificultades del proceso enseñanza-aprendizaje fueron más palpables, han hecho que estos temas sean unos de los menos trabajados y que despiertan menos interés por parte de profesores y estudiantes en los centros educativos. (Sedó Beneyto, 2016).

Finalmente, el trabajo realizado por Bahamon y Bonelo (2016), se aplicó a estudiantes de un colegio del municipio de Jumbo en el departamento del Valle, con la finalidad de potenciar

k Más información: www.viu.es/el-aprendizaje-por-descubrimiento-de-bruner

l Teoría Van Hiele es una propuesta para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría basada en 5 niveles: 1) Visualización 2) Análisis 3) Ordenación 4) Deducción formal 5) Rigor. Para leer más, http://www.xtec.cat/~rnolla/Sangaku/SangWEB/PDF/PG-04-05-fouz.pdf las actividades cognitivas de visualización y razonamiento en el trabajo con figuras geométricas en el grado 6, a partir de 8 actividades lúdico-pedagógicas. Como resultado del trabajo se reportó que, en general, las argumentaciones de los estudiantes para sustentar o defender una idea carecieron de fuerza y pertinencia, ya que no lo lograron expresar claramente con palabras todo lo que visualizaron; evidenciando una dificultad y una oportunidad de mejora, para darle énfasis al uso del lenguaje en situaciones de aula que requieran la visualización en la actividad geométrica." (Bahamon Charry y Bonelo Ayala, 2016).

En los repositorios de las universidades consultadas en relación con tesis dirigidas al pensamiento geométrico espacial, no se encontró publicado un trabajo experimental similar al desarrollado en el presente trabajo.

CAPITULO I: MARCO TEÓRICO

A continuación, se presentan bases teórico-científicas del concepto de geometría, de las características y elementos de los polígonos, del pensamiento espacial y de la relación existente entre lo espacial y lo geométrico. Finalmente se aportan algunas reflexiones acerca de la importancia de la experimentación directa del estudiante en el logro de un aprendizaje eficaz y verdadero.

Geometría

"Ptolomeo le preguntó una vez a Euclides si había algún camino más corto para el conocimiento de la geometría que por el estudio de los elementos, a lo que Euclides respondió que no había ningún camino real a la geometría" *(Proclo Diádoco).*

Una parte del pensamiento matemático, de gran importancia dentro de los saberes comunes de un estudiante de cualquier grado[m], es la ***Geometría***. Etimológicamente, la palabra geometría significa ***geo: tierra*** y ***metria: medida,*** refiriéndose al conocimiento dirigido a la relación de los objetos con el espacio y su medida. En una forma más precisa, se puede decir que

m Un grado mayor de escolaridad exige conocimientos geométricos más específicos la geometría *“se ocupa de problemas métricos como el cálculo del área y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos”* (Historia de la Geometría, s.f.a, p. 2).

La geometría en la antigüedad. Desde sus inicios, el hombre ha empleado la geometría como parte fundamental del avance social y económico de las comunidades de las cuales éste ha hecho parte. “Las primeras civilizaciones mediterráneas adquirieron poco a poco conocimientos geométricos de carácter muy práctico basados en fórmulas, -algoritmos expresados en forma de recetario-, para calcular áreas y longitudes. La finalidad era práctica al pretender con ello calcular la producción proporcional de las parcelas de tierra para determinar los impuestos, o reconstruirlas después de las inundaciones.” (Historia de la Geometría, s.f.b, p. 1).

Es razonable pensar que los orígenes de la Geometría se encuentran en los primeros pictogramas del hombre primitivo (prehistoria, + 3300 a. C.), que de esta forma clasificaba inconscientemente los objetos que le rodeaban atendiendo a su forma o dimensiones. En la abstracción de estas formas comienza el primer acercamiento intuitivo e informal a la geometría (Historia de la Geometría, s.f.c, p. 1).

Dentro de sus actividades y relaciones cotidianas, los hombres antiguos hallaban problemas que requerían ser analizados desde un punto de vista gráfico-espacial, empleando recursos y conocimientos para nosotros rudimentarios, pero que en realidad sirvieron para sentar las bases de los conocimientos geométricos actuales.

Los matemáticos babilonios fueron mucho más allá de las operaciones aritméticas, aportando ideas básicas sobre geometría y teoría de números. La geometría babilónica estaba íntimamente ligada a las mediciones prácticas. No había una diferencia esencial entre la partición de una cierta cantidad de dinero, de acuerdo con ciertas reglas, y la división de un terreno en partes de áreas iguales. Las condiciones exteriores tenían que ser observadas, en un caso eran las condiciones acerca de una herencia; en otras las reglas que determinan un área, o las relaciones entre medidas, o los problemas de salarios (Ibíd., pp. 5-6).

Otras zonas del planeta también eran cuna de grandes conocimientos matemáticos, donde las comunidades ya organizadas estructuraban cada vez mejor toda su red de conocimientos y los usaban de forma conjunta para realizar algunos cálculos y procedimientos de mayor complejidad.

> *Tales de Mileto visita Egipto una larga temporada y aprende de los sacerdotes y escribas egipcios lo referente a sus conocimientos en general. Impresiona ahora -tanto como a los egipcios- que fuera capaz de razonar y medir entonces la altura de la pirámide de Keops y de predecir un eclipse solar con asombrosa precisión* (Historia… s.f.b, p. 1).

Es así, que podemos notar como el conocimiento matemático y geométrico actual es una gran recolección de antiquísimas ideas y conceptos que nuestras comunidades y pueblos ancestrales han venido legando desde tiempos remotos en diferentes momentos y espacios.

Las formas geométricas planas. Desde las más elementales hasta las más complejas formas existentes en nuestro universo conocido, diseñadas ya sea por obra natural o humana, evidencian una tendencia a la organización de sus elementos o partes, de una manera por lo general, estética, ya sea simétrica o asimétrica, pero conservando un orden o patrón determinado.

Se puede observar detenidamente cada implemento usado en la vida diaria y encontrar inmersas en su forma, un despliegue armonioso de figuras geométricas, que pueden ser extraídas y analizadas de forma individual o semi – grupal *(partes de la figura)* según se requiera.

Tal y como se menciona en el libro "La Enseñanza de la Geometría", (García, López, 2008, p. 21), iniciar un viaje a través de la geometría, implica el trabajo con relaciones y modelos idealizados y teóricos, como cuadriláteros, círculos, triángulos, rectas y puntos, afortunada o infortunadamente, dados en forma bidimensional. La fuerza y predominancia de las formas geométricas en los esquemas de organización y representación de nuestro mundo, hace que sea relevante el estudio y entendimiento real de sus propiedades y características, para lograr una mejor utilización de las mismas, a favor de la solución de una situación determinada, cualquiera que fuere el campo en que se requiera usar geometría.

Es evidente que cualquier cuerpo de nuestro entorno se presenta de forma tridimensional, no obstante, el estudio geométrico de las formas presentes en nuestro espacio físico conocido[n], exige el análisis por separado de ***"subformas"*** que constituyen en sí mismas, al ser extraídas de su todo, una figura plana, bidimensional, que solo puede existir de forma ideal en nuestras mentes; susceptible de ser medida, calculada, representada, transformada, rotada, trasladada, etc., pero todo esto, solo bajo las posibilidades limitadas otorgadas por su naturaleza plana.

Polígonos. Los polígonos son parte fundamental de cualquier forma o cuerpo material; en una sola figura tridimensional es posible encontrar varios de ellos dispuestos de forma tal, que aúnan sus propiedades y características para conformar cualquier estructura. Desde la antigüedad, ya se reconocía su importancia y eran motivo de estudio y fascinación por parte de científicos y filósofos.

[n] Se refiere a nuestro planeta y nuestra realidad, para no generalizar las propiedades geométricas permitidas por nuestras leyes, a espacios universales por fuera de nuestro conocimiento, es decir, es probable que en otros espacios / momentos del universo, se hagan posibles otros tipos de relaciones geométricas desconocidas aún en nuestras realidades actuales.

“Se llama polígono a la porción de plano limitada por una curva cerrada, llamada línea poligonal” (Baldor, 2004, p. 73). En la Figura 1 se muestran algunas representaciones de polígonos.

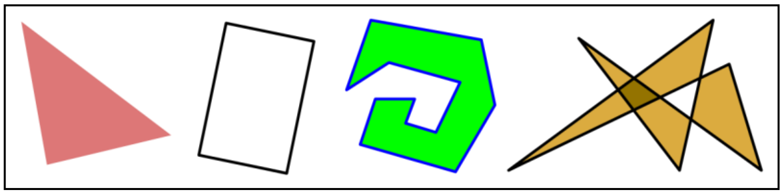


Figura 1. Representación de diferentes polígonos. Imagen tomada de https://es.wikipedia.org/wiki/Pol%C3%ADgono#/media/File:Assorted_polygons.svg

Dependiendo de sus características, los polígonos se clasifican en:

Polígonos Regulares. Son aquellos que tienen lados y ángulos de la misma medida. En la Figura 2 se muestran las representaciones de dos polígonos de este tipo.

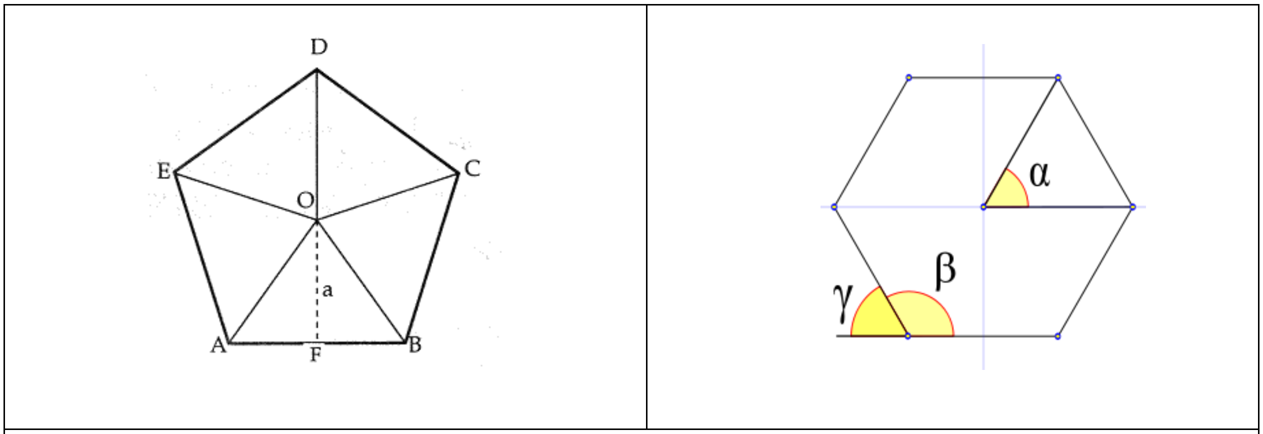


Figura 2. Representación de polígonos regulares. Imágenes tomadas de http://www.pps.k12.or.us/district/depts/edmedia/videoteca/curso1/htmlb/SEC_51.HTM y https://es.wikipedia.org/wiki/Pol%C3%ADgono_regular

Polígonos Irregulares. Son aquellos que tienen uno o varios lados de diferente medida, y por lo tanto sus ángulos no son congruentes, como se observa en la Figura 3.

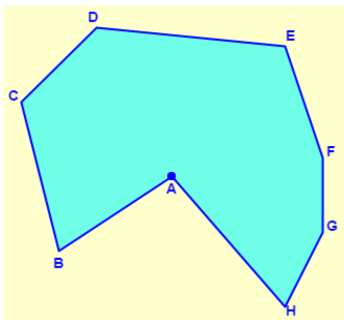
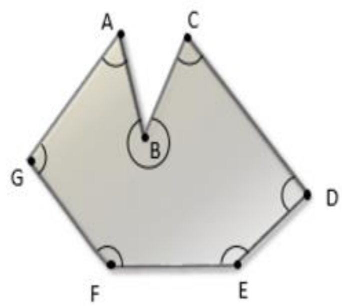
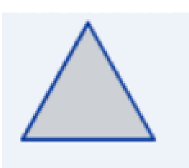
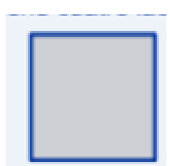
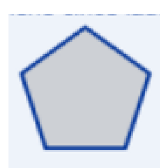
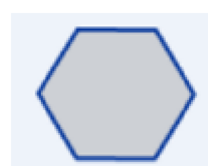
	

Figura 3. Representación de polígonos Irregulares. Imágenes tomadas de: http://www.matematicas10.net/2015/12/ejemplos-de-poligonos-irregulares.html y http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/1esomatematicas/1quincena9/1quincena9_contenidos_6d.htm

Tipos de polígonos regulares. Como se presenta en la Figura 4, los polígonos regulares se caracterizan porque tanto sus lados como sus ángulos tienen la misma medida y se nombran de acuerdo con el número de lados que posea, así:

			
Triángulo	**Cuadrilátero**	**Pentágono**	**Hexágono**

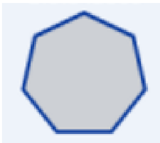
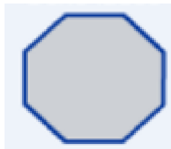
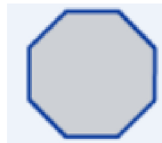
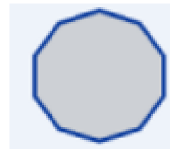
			
Heptágono	**Octágono**	**Nonágono**	**Decágono**

Figura 4. Tipos de polígonos regulares**.** Imágenes tomadas de: http://felviva.blogspot.com.co/2013/11/copia-pitagoras.html

Se definen solo los primeros ocho tipos de polígonos regulares ya que se considera suficiente esta definición para que el lector comprenda de forma amplia el concepto. Es importante tener en cuenta que un polígono puede presentar un número indeterminado de lados siempre y cuando éste número sea igual o mayor a 3, pero no se debe perder de vista el hecho de que cuando un polígono adquiere un número muy elevado de lados, éste se va asemejando cada vez más a un circulo, y a medida que el número de lados aumenta la circunferencia se va haciendo más evidente (Figura 5).

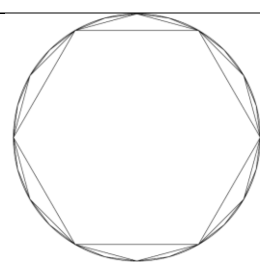


Figura 5. Ejemplo de método de exhaución. Imágenes tomadas de: http://gaussianos.com/utilizando-el-metodo-de-exhaucion-para-demostrar-que-21/

*Tipos de polígonos irregulares***.** En cuanto a las formas de los polígonos irregulares, estos no presentan un patrón definido, (obsérvese la Figura 3 de polígonos irregulares) ya que, por su naturaleza irregular, su forma puede ser indeterminada, siempre y cuando todos sus lados se encuentren cerrados.

*Elementos de un polígono regular***.** Los polígonos poseen algunos elementos individuales que determinan ciertas características de la figura y que sirven para realizar cálculos más complejos. A continuación, se dará la definición de cada uno:

- **Diagonal:** es el segmento de recta que une dos vértices no consecutivos de un polígono.
- **Vértice:** es el punto de unión de dos lados.
- **Lado o arista:** es un segmento de recta que une dos vértices consecutivos de un polígono y que a su vez le dan forma.
- **Apotema:** es un segmento de recta que une el centro del polígono con el centro de uno cualquiera de sus lados.
- **Radio:** es un segmento de recta que une el centro del polígono con cada uno de los vértices del polígono.
- **Centro:** es un punto que está separado exactamente la misma distancia con relación a cada uno de los ángulos y aristas del polígono.
- **Ángulo central:** es el ángulo que forman dos radios al unirse en el centro del polígono.
- **Circunferencia circunscrita:** se trata del círculo formado alrededor del polígono cuyo radio es igual al radio del mismo.

Las anteriores definiciones fueron sacadas de: "https://es.wikipedia.org/wiki/Polígono***"***

En la Figura 6 se presentan los elementos de un polígono

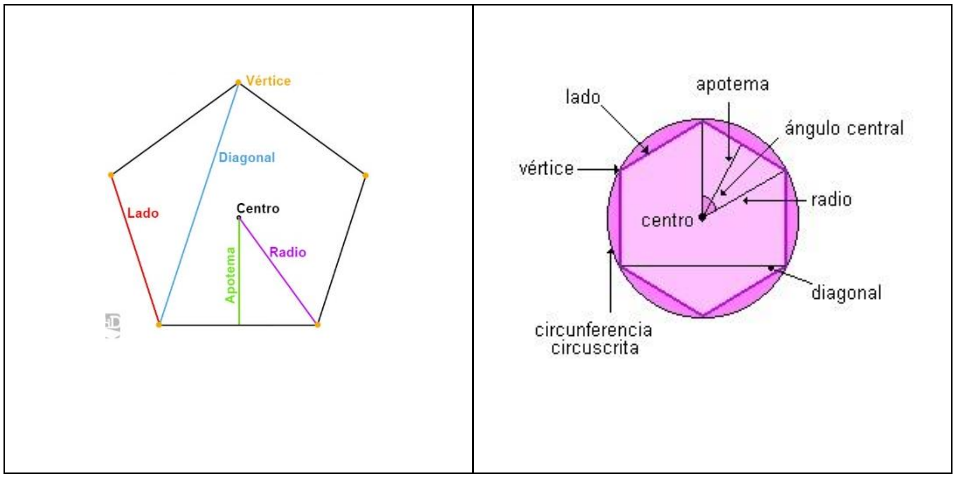


Figura 6. Elementos de un polígono. Imágenes tomadas de:

http://www.profesordedibujo.com/index.php/apuntes/2-1-poligonos-i.html

***Área y Perímetro de un Polígono*.** En las aplicaciones cotidianas y en el trabajo de campo de la geometría y de las matemáticas en general, los polígonos son susceptibles de ser medidos y calculados en cuanto a su área, su superficie y su perímetro para permitir obtener información conclusiva y poder aportar a la solución de un problema.

*Área***.** Porción de espacio plano encerrado por límites unidos entre sí. Matemáticamente el concepto de área se define diferente para cada forma, dependiendo de la disposición y el número de sus lados. Acá se definirán, para efectos prácticos, solo las áreas de algunos de los polígonos más comunes, como se muestra en las Figuras 7 - 9.

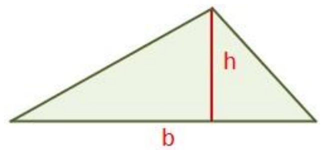
	Área del Triángulo: $A = \frac{base \cdot altura}{2}$ ***base = b; altura = h***

Figura 7. Área de un triángulo. Imagen tomada de:

http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/area-triangulo/

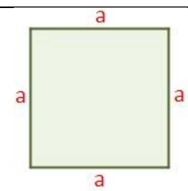
	Área del cuadrado: $A = lado \times lado$ ***lado = a***

*Figura 8***.** Área de un cuadrado – Imagen tomada de:

http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/cuadrado/

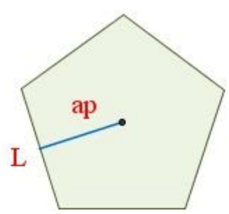
	Área del pentágono regular: $A = \frac{5 \cdot Lado \cdot Apotema}{2}$ ***lado = L; apotema = ap***

*Figura 9***.** Área de un pentágono regular. Imagen tomada de:

http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/pentagono/

Para hallar el área de cada polígono regular a partir del pentágono, solo es necesario modificar en la formula el número de lados, es decir, en un pentágono debe ser

5, en un hexágono 6, en un heptágono 7, y así sucesivamente para cualquier polígono regular

*Perímetro***.** Corresponde al total de la suma de las medidas de todos los lados de un polígono. En las Figuras 10-12 se presentan las fórmulas para calcular el perímetro de polígonos comunes

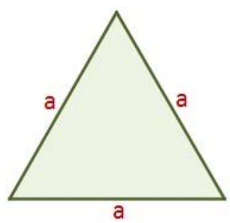
	Perímetro del Triángulo: $P \quad 3 \cdot a$ *solo en un triángulo equilátero*

Figura 10 Perímetro de un triángulo. Imagen tomada de:

http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/perimetro/

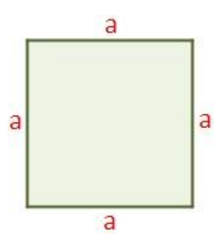
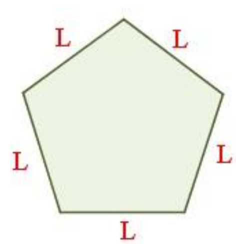
	Perímetro del cuadrado: $P = 4 \times a$ ***lado = a***
	Perímetro del pentágono regular: $P = 5 \times l$

Figura 11. Perímetro de un cuadrado. Imagen tomada de:

http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/perimetro/

Figura 12. Perímetro de un pentágono regular – Imagen tomada de:

http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/perimetro/

Transformaciones Isométricas

El concepto de transformaciones isométricas se refiere a movimientos que se aplican a una figura dentro del plano cartesiano. Cualquier transformación aplicada a una figura tiene como resultado otra llamada imagen, que es congruente en lados y ángulos con la original.

Las transformaciones isométricas se definen en tres tipos de movimiento:

a. La rotación: este tipo de movimiento se aplica a una figura ubicada en el plano cartesiano sobre la cual se sitúa un ***punto de rotación*** que hace girar la figura sobre un eje fijo. El movimiento se hace con base en un ángulo dado en grados, aplicando el movimiento de forma positiva o negativa según sea el caso. En la Figura 13 se muestra una representación de este tipo de movimiento.

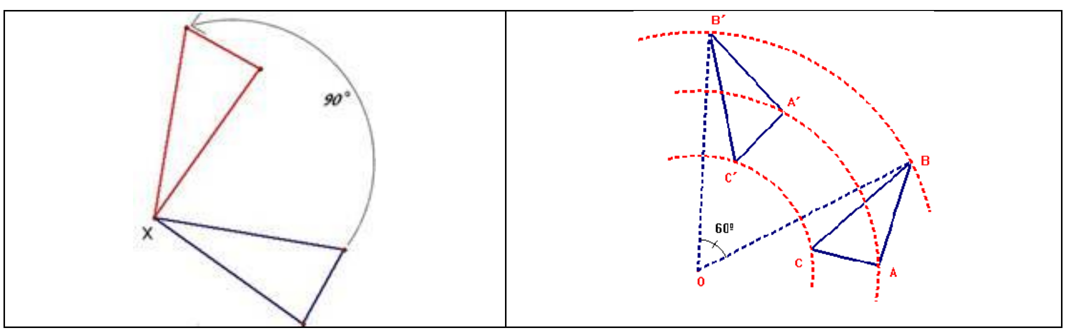


Figura 13. Ejemplos de Rotación de figuras en el plano – Imágenes tomadas de:

http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Isometria_Transformaciones.html

http://www.iesincagarcilaso.com/Depart/Mates/Matema/alhambra/movim/movim.htm

b. La traslación: es un movimiento que se aplica sobre una figura plana ubicada en el plano cartesiano, y sobre la cual, a cada una de las coordenadas de sus vértices, se suma un punto (x , y) llamado ***vector de traslación (v).*** Una vez sumado el vector de traslación, se ubican los puntos (x , y) resultantes y se unen los puntos para formar de nuevo la figura, pero esta vez, trasladada a otro punto del plano. En la Figura 14 se presentan ejemplos de traslación de una figura plana

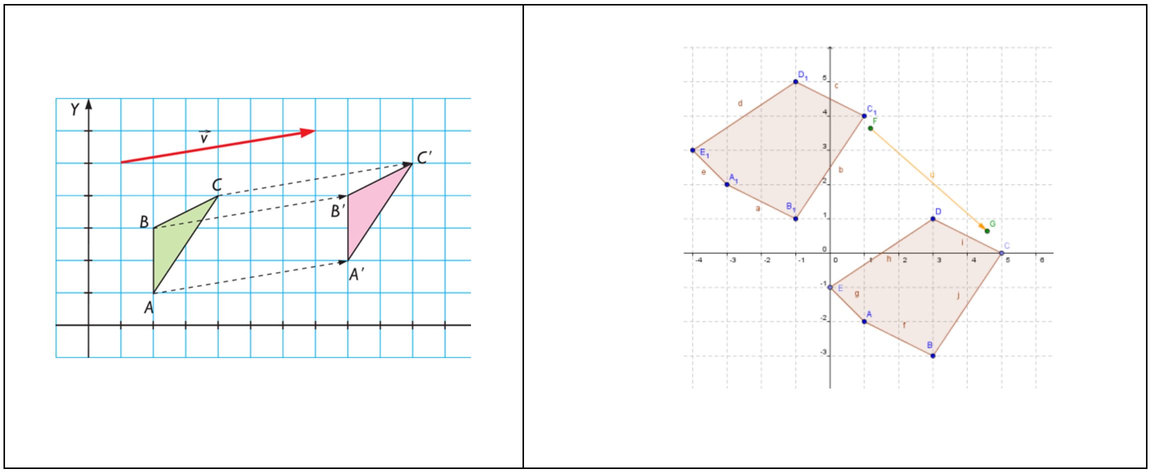


*Figura 14***.** Ejemplos de traslación de una figura plana – Imágenes tomadas de:

http://matematicasactividades.blogspot.com.co/

http://www.educacionpersonal.com/edupersonal/course/view.php?id=559

c. La simetría: este movimiento isométrico se define de dos formas.

i. Simetría axial: este tipo de transformación se presenta cuando cada vértice de la imagen se encuentra a la misma distancia que los vértices de la figura original, con respecto a una línea llamada ***eje de simetría (L).*** Figura 15 (a)

ii. Simetría central: este movimiento consiste en tomar dentro del plano un punto de referencia llamado ***centro de simetría (O)***, y a partir de él ubicar una imagen cuyos vértices se encuentren, cada uno, a la misma distancia que los vértices de la figura original, con respecto al punto escogido como centro de simetría. Figura 15 b

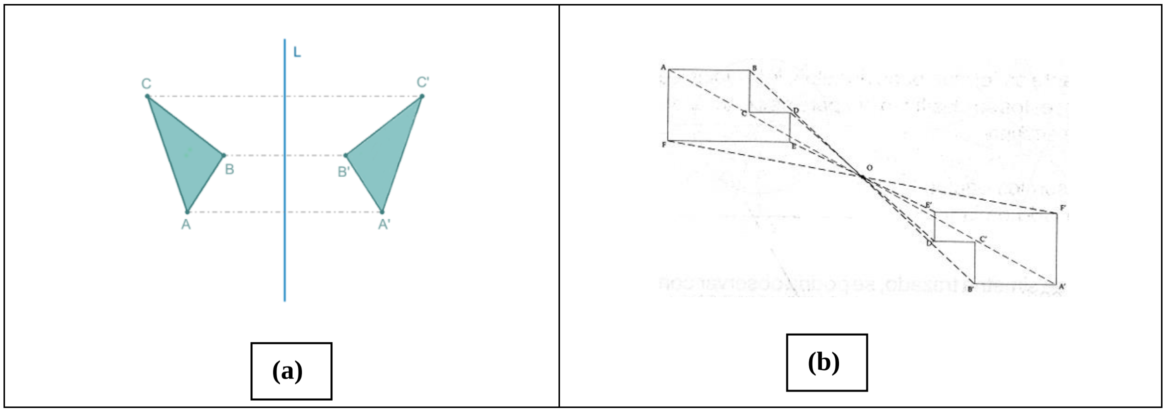


Figura 15. (a) Ejemplos de simetría axial y (b) simetría central de una figura plana – Imagen tomada de:
http://martha-gutierrez.blogspot.com.co/2010/12/simetria-axial-y-central-rotacion-y.html
http://www.pps.k12.or.us/district/depts/edmedia/videoteca/curso2/htmlb/SEC_54.HTM

Cuerpos Volumétricos

Considerando la extensión de los contenidos del plan de estudios para el grado séptimo y el tiempo disponible para desarrollarlos, se propone desarrollar el tema de cuerpos volumétricos, solo para poliedros sencillos (triángulos y cuadrados), en los que, de todos modos, se conjugan los elementos geométricos vistos y servirán de ejemplo para los comprender posteriormente los de mayor complejidad.

Prismas y pirámides. En la Figura 16 (a) y (b) se muestran ejemplos de pirámides y prismas formados con caras planas.

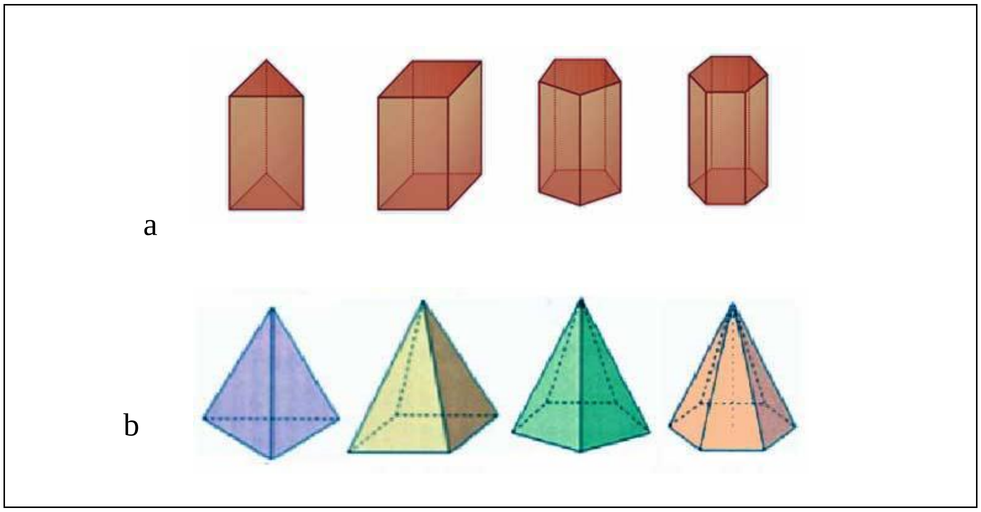


Figura 16. a) Ejemplos de prismas b) Ejemplos de pirámides. Formados ambos con polígonos. Imagen tomada de: https://matemelga.wordpress.com/2016/02/06/prismas-y-piramides/

Prismas. Un prisma está constituido por dos bases poligonales iguales y sus caras laterales por paralelogramos. Según el número de lados de la base se le da el nombre al prisma como se observa en la Figura 17 (a)-(c).

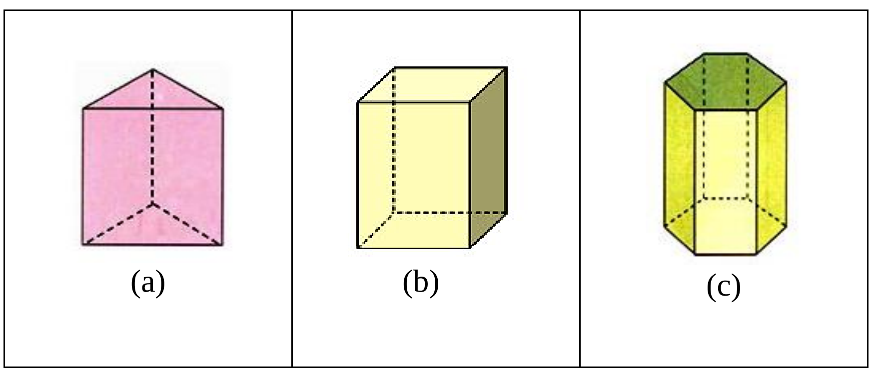


Figura 17. (a) Prisma triangular (base de 3 lados) (b) Prisma rectangular (base de 4 lados) (c) Prisma hexagonal (base de 6 lados). Imágenes tomadas de: http://www.portaleducativo.net/quinto-basico/524/Prismas-y-piramides)

Según la disposición de sus lados y de sus ángulos, los prismas se clasifican en:

Prismas rectos. Son aquellos cuyas caras laterales son rectángulos o cuadrados. Sus aristas laterales son perpendiculares a las bases (Figura 18 (a)).

*Prismas oblicuos***.** Son aquellos cuyas caras laterales son paralelogramos que no son rectángulos ni cuadrados. Sus aristas laterales no son perpendiculares a las bases (Figura 18 (b)).

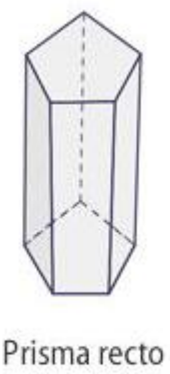
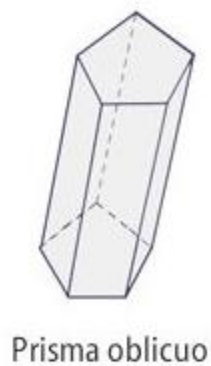
	
(a)	***(b)***

Figura 18. Clasificación de los prismas de acuerdo con la disposición de sus lados y de sus ángulos. (a) Prisma recto (b) Prisma oblicuo - Imágenes tomadas de: http://www.portaleducativo.net/quinto-basico/524/Prismas-y-piramides)

Si bien, los prismas rectos pueden ser regulares (cuyas bases son polígonos regulares (Figura 19 (a)), o irregulares (cuyas bases son polígonos irregulares (Figura 19 (b)), para este trabajo solo se incluirán como ejemplo los prismas rectos regulares triangulares y rectangulares.

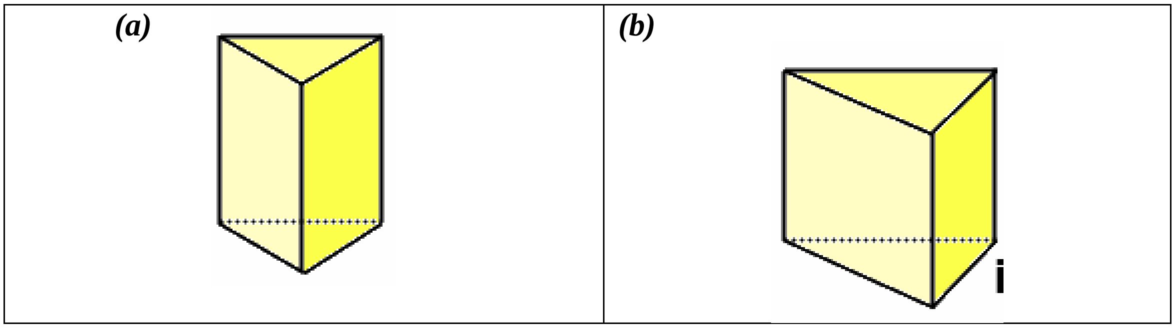


Figura 19. Clasificación de los prismas rectos. (a) Prisma regular (b) Prisma irregular Tomado de: http://www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/110908_prismas.elp/clasificacin_de_los_prismas.html

Pirámides. Son figuras tridimensionales constituidas por una base poligonal y por caras laterales cuyas aristas concurren a un punto del espacio llamado **cúspide o vértice común**, por lo tanto, las caras laterales siempre serán triangulares. El **eje** o **altura** de la pirámide es la línea que va del vértice al centro de la base (Figura 20).

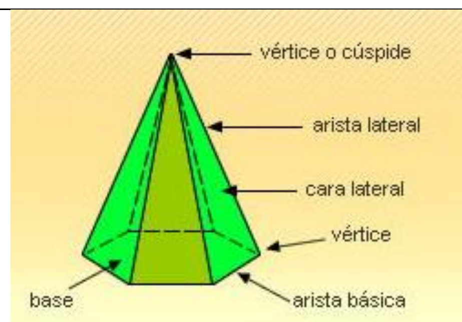


Figura 20. Elementos básicos de una pirámide. Imagen tomada de: http://www.portaleducativo.net/quinto-basico/524/Prismas-y-piramides

*Tipos de pirámides***.** En las pirámides, las caras laterales son siempre triángulos. Por tanto, para distinguirlas y nombrarlas se utiliza el polígono de la base (Figura 21).

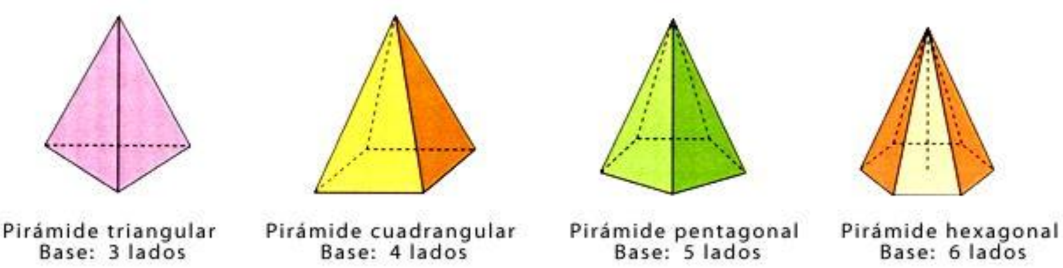


Figura 21. Tipos de pirámides de acuerdo con el polígono de la base. Tomado de: http://www.portaleducativo.net/quinto-basico/524/Prismas-y-piramides

Pensamiento Espacial

En el proceso de desarrollo de capacidades y desempeños relacionados con el área de matemáticas, sobre todo en algunos campos como la geometría y la trigonometría, en las que los estudiantes deben resolver situaciones que requieren de razonamientos espaciales de carácter tridimensional, es de gran importancia la capacidad de visualizar y analizar modelos mentales abstraídos de la imaginación, basándose en una realidad previamente conocida. Como lo expreso Howard Gardner[o] "La inteligencia espacial está íntimamente relacionada con la observación personal del mundo visual y crece en forma directa de ésta"**.** (Gardner, 2001, p. 141).

De acuerdo con Thurstone[p] (1938), la inteligencia espacial se puede enmarcar dentro de tres componentes:

[o] Psicólogo, investigador y profesor de la Universidad de Harvard, reconocido en el campo de la investigación cognitiva y creador de la teoría de las inteligencias múltiples en el año de 1983
p Louis Leon Thurstone, Psicólogo e ingeniero mecánico, investigador iniciante en el campo de la psicometría y la psicofísica.

1. La habilidad para reconocer la identidad de un objeto cuando se ve desde ángulos distintos.
2. La habilidad de imaginar el movimiento o desplazamiento interno entre las partes de una configuración.
3. La habilidad para pensar en las relaciones espaciales en que la orientación corporal del observador es parte esencial del problema.

La inteligencia espacial comprende capacidades relacionadas de manera informal: la habilidad para reconocer instancias del mismo elemento; la habilidad para transformar o reconocer una transformación de un elemento en otro; la capacidad de evocar el imaginario mental y luego transformarlo; la de producir una semejanza gráfica de información espacial, entre otras. Es concebible que estas operaciones sean independientes entre sí y que pudieran desarrollarse o fallar por separado; sin embargo, así como el ritmo y tono operan juntos en el área de la música, así típicamente, las capacidades mencionadas ocurren juntas en el ámbito espacial. (Gardner, 2001).

Como una inteligencia que data de tiempos muy remotos, la competencia espacial se puede observar fácilmente en todas las culturas humanas conocidas. Es cierto que inventos específicos, como la geometría o la física, la escultura cinética o la pintura impresionista, están restringidos a determinadas sociedades, pero parece encontrarse en todos lados la capacidad para hallar el camino dentro de un ambiente intrincado, para participar en artes y oficios complejos, y para practicar deportes y juegos de diversos tipos (Ibíd., p. 161).

Relación Pensamiento Espacial y Geometría

El pensamiento geométrico se encuentra desarrollado en mayor o menor grado en un estudiante, dependiendo de la capacidad que tenga su cerebro para visualizar de forma imaginaria el movimiento y el comportamiento de un determinado cuerpo en el espacio. Desde las primeras etapas del desarrollo de un individuo, se involucran procesos de pensamiento espacial al iniciar el aprendizaje de su entorno y la interacción visual con los objetos de su mundo.

Es así como vemos una progresión regular en el ámbito espacial, desde la habilidad infantil para moverse en el espacio hasta la habilidad del que comienza a caminar para formar imágenes mentales estéticas, hasta la capacidad del escolapio para manipular esas imágenes estéticas y, por último, a la capacidad del adolescente para asociar relaciones espaciales con declaraciones proposicionales. Siendo ya capaz de apreciar todos los arreglos espaciales posibles, el adolescente está en posición favorable para unir las formas de inteligencia lógico-matemática y espacial en un solo sistema geométrico o científico (Ibíd., p. 145).

Al ser la geometría la ciencia que estudia la relación del espacio con los objetos que este contiene, es intrínseca la relación existente entre ellos – (el espacio y el objeto). Por ello, es natural que la interacción y conocimiento inicial de los individuos con los objetos de su entorno en las primeras etapas de la vida, constituya una base para el pensamiento geométrico-espacial que deriva posteriormente. Cabe resaltar que los espacios y objetos con los cuales un estudiante puede interactuar y adquirir conocimiento son muy variados abarcando diversas escalas. “Las acciones geométricas se desarrollan en el espacio, pero el comportamiento es distinto según el tamaño de espacio que se considere. En cuanto al trabajo geométrico se refiere, se pueden considerar cuatro "tamaños" para el espacio:

- Micro-espacio. En el trabajo geométrico se utiliza el microscopio.
- Meso-espacio. Se trabaja con los objetos que se pueden disponer sobre una mesa.
- Macro-espacio. Los objetos tienen unas dimensiones entre 0,5 y 50 veces el tamaño del sujeto. Trabajo de campo, cortes topográficos etc.
- Cosmo-espacio. Se consideran aquí los fenómenos geográficos, topográficos, astronómicos (Castro Martínez, E.; del Olmo Romero, M. A.; Castro Martínez, E., 2002).

Posteriormente, y a medida que se complejizan los sistemas de representación del espacio, en un segundo momento se hace necesaria la metrización, pues ya no es suficiente con decir que algo está cerca o lejos de algo, sino que es necesario determinar qué tan cerca o qué tan lejos está. Esto significa un salto de lo cualitativo a lo cuantitativo, lo que hace aparecer nuevas propiedades y relaciones entre los objetos. De esta manera, la percepción geométrica se complejiza y ahora las propiedades de los objetos se deben no sólo a sus relaciones con los demás, sino también a sus medidas y a las relaciones entre ellas. El estudio de estas propiedades espaciales que involucran la métrica son las que, en un tercer momento, se convertirán en conocimientos formales de la geometría, en particular, en teoremas de la geometría euclidiana. (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p. 61).

Como se indica en el documento Estándares Básicos de Competencias del Ministerio de Educación Nacional, la apropiación por parte de los estudiantes del espacio físico y geométrico requiere del estudio de distintas relaciones espaciales de los cuerpos sólidos y huecos entre sí y con respecto a los mismos estudiantes; de cada cuerpo sólido o hueco con sus formas y con sus caras, bordes y vértices; de las superficies, regiones y figuras planas con sus fronteras, lados y vértices, en los que se destacan los procesos de localización en relación con sistemas de referencia, y del estudio de lo que cambia o se mantiene en las formas geométricas bajo distintas transformaciones.

El trabajo con objetos bidimensionales y tridimensionales y sus movimientos y transformaciones permite integrar nociones sobre volumen, área y perímetro, lo que a su vez posibilita conexiones con los sistemas métricos o de medida y con las nociones de simetría, semejanza y congruencia, entre otras. Así, la geometría activa se presenta como una alternativa para refinar el pensamiento espacial, en tanto se constituye en herramienta privilegiada de exploración y de representación del espacio. El trabajo con la geometría activa puede complementarse con distintos programas de computación que permiten representaciones y manipulaciones que eran imposibles con el dibujo tradicional (Ibíd., p. 62).

Ministerio de Educación

El MEN como máxima autoridad en materia educativa, se ha propuesto implementar de forma paulatina reformas y mejoras a los procesos educativos que se llevan a cabo año tras año en las instituciones educativas colombianas. Es así, como desde hace algunos años se está hablando en el contexto escolar de "Estándares Básicos de competencias[q]", que permiten medir de forma general los conocimientos mínimos que un estudiante debe obtener al finalizar cada ciclo escolar.

> *En este orden de ideas, los estándares básicos de competencias constituyen uno de los parámetros de lo que todo niño, niña y joven debe saber y saber hacer para lograr el nivel de calidad esperado a su paso por el sistema educativo y la evaluación externa e interna es el instrumento por excelencia para saber qué tan lejos o tan cerca se está de alcanzar la calidad establecida con los estándares. Con base en esta información, los planes de mejoramiento establecen nuevas o más fortalecidas metas y hacen explícitos los procesos que conducen a acercarse más a los estándares e inclusive a superarlos en un contexto de construcción y ejercicio de autonomía escolar* (Ibíd., p. 9).
>
> *"Los estándares propuestos por el MEN se refieren a lo central, necesario y fundamental en relación con la enseñanza y el aprendizaje escolar y en este sentido se los califica como básicos. No se trata de criterios mínimos, pues no se refieren a un límite inferior o a un promedio. Expresan, como se dijo, una situación esperada, un criterio de calidad, que todos deben alcanzar. Son retadores, pero no inalcanzables; exigentes pero razonables (Ibíd., p. 13).*

[q] Los estándares básicos de competencia son una guía que ofrece el Ministerio de Educación Nacional para que cada ente educativo conozca qué es lo que un estudiante debe saber y debe saber hacer con lo que sabe. Estos estándares están dados para 4 áreas consideradas fundamentales dentro del Curriculum educativo: Matemáticas, Ciencias, Lenguaje y Ciudadanía. Los estándares completos se pueden leer en: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

El Porqué de la Formación Matemática[r]

Hace ya varios siglos que la contribución de las matemáticas a los fines de la educación no se pone en duda en ninguna parte del mundo. En primer lugar, por su papel en la cultura y la sociedad, en aspectos como las artes plásticas, la arquitectura, las grandes obras de ingeniería, la economía y el comercio; en segundo lugar, porque se relacionan con el desarrollo del pensamiento lógico y, finalmente, porque desde el comienzo de la Edad Moderna su conocimiento se ha considerado esencial para el desarrollo de la ciencia y la tecnología.

En Colombia, desde los inicios de la República hasta la década de los setenta, la contribución de la formación matemática a los fines generales de la educación se argumentó principalmente con base en las dos últimas razones de carácter personal y científico-técnico, a saber: por su relación con el desarrollo de las capacidades de razonamiento lógico, por el ejercicio de la abstracción, el rigor y la precisión, y por su aporte al desarrollo de la ciencia y la tecnología en el país. Estos fines estuvieron fuertemente condicionados por una visión de la naturaleza de las matemáticas como cuerpo estable e infalible de verdades absolutas, lo que condujo a suponer que sólo se requería estudiar, ejercitar y recordar un listado más o menos largo de contenidos matemáticos –hechos, definiciones, propiedades de objetos matemáticos, axiomas, teoremas, procedimientos algorítmicos y 47 competencias en matemáticas, para formar a todos los estudiantes en el razonamiento lógico y en los conocimientos matemáticos. Sin embargo, estos argumentos comenzaron a ser cuestionados, de un lado, porque el desarrollo del pensamiento lógico y la preparación para la ciencia y la tecnología no son tareas exclusivas de las matemáticas sino de todas las áreas de la Educación Básica y Media y, de otro, por el

---

[r] Titulo tomado del documento “Estándares Básicos de Competencias”, pág. 46 – Ministerio de Educación Nacional

reconocimiento de tres factores adicionales que no se habían considerado anteriormente como prioritarios: la necesidad de una educación básica de calidad para todos los ciudadanos, el valor social ampliado de la formación matemática y el papel de las matemáticas en la consolidación de los valores democráticos (Ibíd., p. 46-47).

CAPITULO II. DISEÑO Y APLICACIÓN DE LA HERRAMIENTA TRIDIMENSIONAL NO COMPUTARIZADA

Las herramientas que se diseñaron para este estudio permiten modelar figuras para convertirlas posteriormente en objetos 3D que se pueden manipular y analizar en tiempo y espacio reales, para experimentar sus propiedades, movimientos y relaciones con el espacio de forma directa. Se espera que la implementación de esta herramienta, en un curso regular de geometría para grado séptimo, aporte a la comprensión y apropiación de los temas enmarcados en los tres objetivos de conocimiento propuestos en este trabajo.

La idea es que cada estudiante tome en sus manos un trozo de arcilla ya preparada pero inicialmente amorfa, e inicie su experiencia con el conocimiento a través de la manipulación des-intencionada del material, es decir, sin sugerirle la elaboración de alguna forma específica.

Se propone que el estudiante inicialmente explore y asimile el material de trabajo de forma libre, para no coaccionar su iniciativa con la creación de prototipos o imágenes previas de figuras o patrones, evitando en un momento dado influir de forma negativa en el proceso de conocimiento al predefinir preferencias o prejuicios que podrían bloquear su perspectiva o imaginación con respecto a cualquier condición geométrica, que pueda fluir de manera espontánea en su mente.

Para facilitar la construcción[s] de figuras y elementos geométricos planos[t], se diseñó un sistema que permita que, al unir por medio de resortes, una cantidad *N* de listones de madera a modo de segmentos como se observa en la Figura 22, los estudiantes puedan construir moldes de diferentes polígonos (Figura 23) y, posteriormente con arcilla (u otro material similar) modelar cualquier figura plana regular que se puede manipular en todas sus dimensiones.

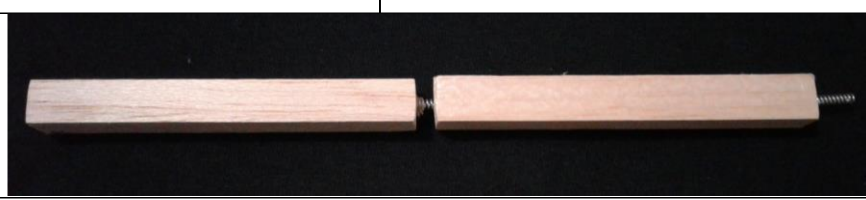
<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(a) Resorte</td><td>(b) Listón de madera con el acople de resorte</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">(c) Dos segmentos de madera con el acople de resorte</td></tr>
</table>

*Figura 22***.** Materiales y características del sistema inicial en (a) Resorte (b) Listón de madera (segmento) con el acople de resorte y en (c) Segmentos acoplados.

[s] Moldes construidos con pequeños listones de madera y resortes uniformes, que se acoplan de forma tal que se pueden formar polígonos de *N* número de caras, cuyos vértices (aristas) están formados por cada una de las uniones entre los trozos de madera con los resortes.

[t] El propósito es realizar las figuras lo más aproximado posible a la representación bidimensional (plana), ya que en nuestra realidad tridimensional éstas serían solo una cara de un objeto real, sea cual fuere su forma.

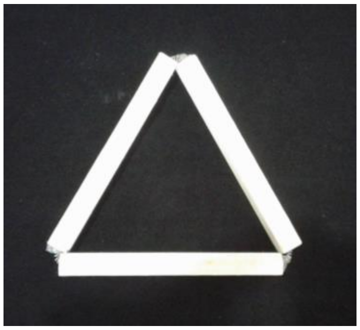
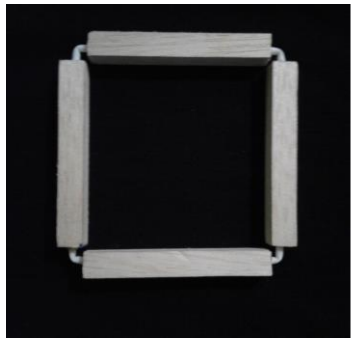
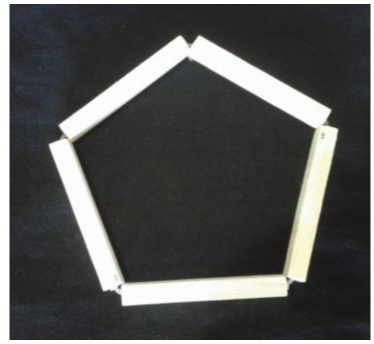
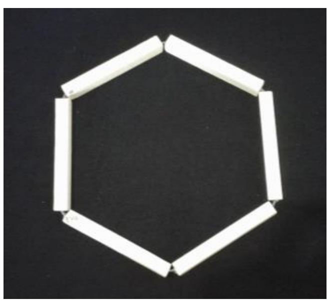
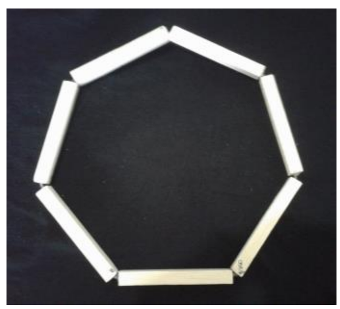
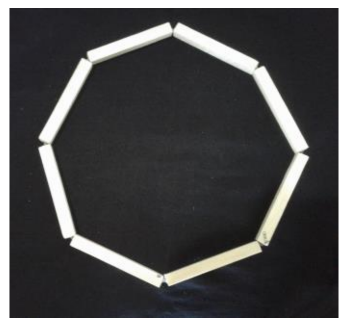
		
Triángulo	**Cuadrilátero**	**Pentágono**
		
Hexágono	**Heptágono**	**Octágono**

Figura 23. Moldes de diferentes polígonos hasta el octágono

Construcción de las figuras con arcilla

Las figuras de *N* segmentos de madera construidas por los estudiantes como primera parte del proceso, facilitarán la elaboración de los polígonos que en adelante serán los objetos de estudio y por tanto objetos de conocimiento de los saberes geométricos ya mencionados en este trabajo.

Después de este acercamiento preliminar, se puede proceder al armado de los polígonos, que, como se ha mencionado anteriormente, son los objetos de observación y experimentación de cada estudiante, ya que pueden someterlos a todo tipo de deformaciones, dobleces, cortes e isometrías dentro del plano, posibilitando el entendimiento de las propiedades geométricas en cada caso específico. Para armar cada polígono es preciso que la masa húmeda se encuentre perfectamente aplanada y tendida sobre una superficie rígida.

Posteriormente se toma el molde del polígono de madera ya fabricado y se ubica encima de la arcilla aplanada, presionándolo suave pero firmemente encima de la masa hasta que quede el polígono deseado claramente marcado sobre la arcilla (Figura 24 (a)); y posteriormente se levanta el molde de madera (Figura 24 (b)).

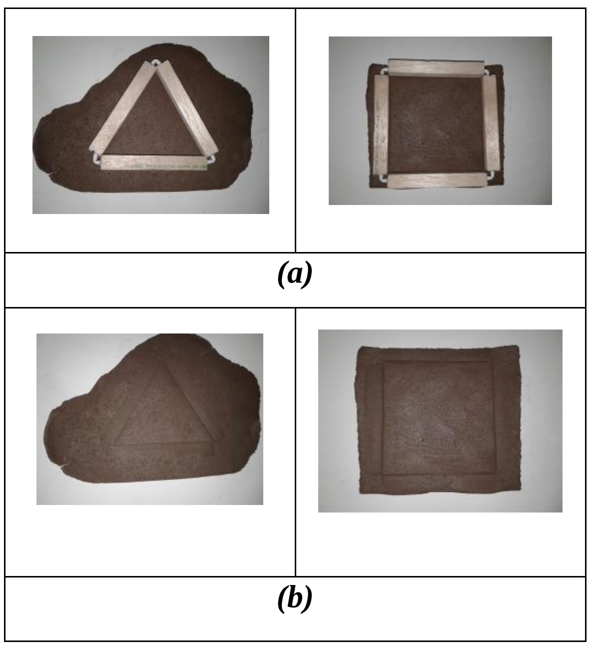


Figura 24. Construcción de las figuras en arcilla. (a) El molde de un polígono sobre la arcilla aplanada. (b) El polígono marcado en la arcilla.

La figura del polígono marcada debidamente sobre la arcilla, se debe extraer para que pueda manipularse. El corte final se puede realizar con cualquier objeto del medio que sea adecuado, como un carnet, una tarjeta rígida, una regla o escuadra, una lámina pequeña plástica o metálica, mas es de suma importancia evitar el uso, sobre todo en los estudiantes, de objetos como bisturís, cuchillas u otro objeto corto punzante, que en un momento dado pueden ser un peligro potencial para la comunidad educativa.

Una vez se tenga la figura de arcilla debidamente cortada, es posible iniciar el estudio de las primeras propiedades y características geométricas a que haya lugar en cada caso específico.

En la Figura 25 se presentan algunos polígonos regulares construidos con los moldes.

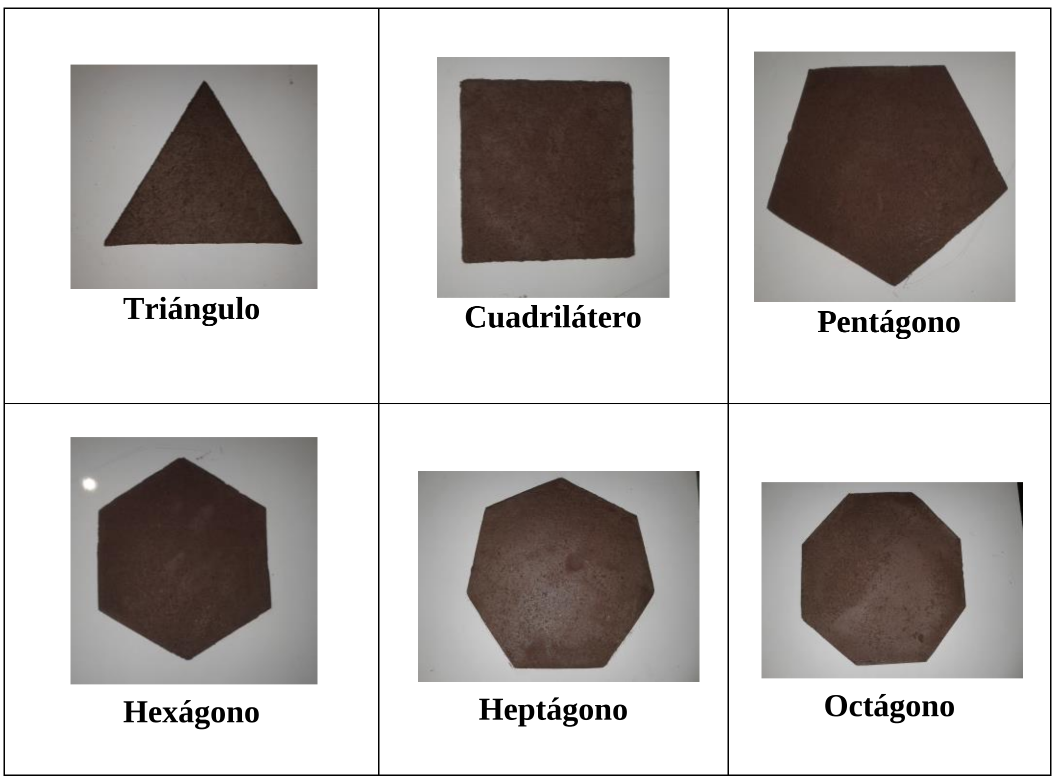


Figura 25. Moldes de polígonos regulares

Primer eje temático: Propiedades de los Polígonos

A continuación, se describirá de forma detallada como realizar el trabajo con los polígonos.

Como los conceptos geométricos ya están definidos en el marco teórico, solo se explicará cómo aplicar el modelo planteado para contribuir el entendimiento de esta parte de la geometría.

Inicialmente se debe tener especial cuidado en que el estudiante comprenda los conceptos básicos de punto, segmento, recta, vértice y ángulo, pues son indispensables para un entendimiento sencillo del concepto de polígono, bien sea éste regular o no, aunque esta parte del trabajo se centrará en el estudio de los polígonos regulares. Una vez entendidos de forma general dichos elementos, lo que constituye parte de un trabajo previo en el aula, se motiva al estudiante para que arme diferentes figuras uniendo segmentos (listones de madera) con los resortes, permitiéndole, que por sus propios medios, a través de la experimentación, de respuesta a situaciones propuestas tales como: ¿cuantos segmentos son necesarios para armar el polígono más pequeño?, ¿mínimo cuántos segmentos forman un ángulo? o ¿Cuánto deben sumar los ángulos de un triángulo? Estas son preguntas sencillas, pero de gran valor cognoscitivo cuando el estudiante logra intuir las respuestas de forma autónoma y experimental.

Los polígonos presentan entre otras, dos características que son relevantes para tenerlas en cuenta a la hora de iniciar un proceso de estudio de cualquiera de ellos. La disposición en la dirección de los lados de un polígono, es decir, si estos se pliegan hacia adentro o hacia afuera, determina si el polígono es cóncavo o convexo**.** Gracias a que los vértices de los moldes poligonales son uniones elásticas, es fácil para el estudiante experimentar en su propia figura, movimientos hacia adentro o hacia afuera de cualquiera de sus vértices para observar y transformar polígonos de cóncavos a convexos y viceversa.

Por otro lado, si los ángulos contenidos en el polígono son todos de la misma medida e igualmente los lados que lo conforman son de la misma longitud, entonces se trata de un polígono que llamamos regular, de cualquier otra forma nos encontramos frente a un polígono irregular; por lo que, para efectos de este trabajo, se debe indicar al estudiante la necesidad de cambiar los lados de una figura por otros de más o menos longitud y modificar los ángulos que forman sus lados, para que sea posible transformar una figura irregular en regular.

Es importante entonces, ya con estos primeros avances conceptuales, que se inicie la construcción de los polígonos, desde el triángulo hasta el decaedro[u], empleando los segmentos de madera y los resortes.

Se debe notar que a medida que el estudiante agregue cada vez más lados a su polígono, se va acercando poco a poco al concepto gráfico de lo que es una *circunferencia*, logrando entender realmente porque algunos matemáticos sostienen que un círculo tiene un número infinito de lados, pues es cuestión de simple observación, que entre más lados contiene el polígono regular, más se va acercando su forma a una circunferencia, sin llegar nunca a serlo. Es en esta instancia donde recobra importancia la relación naturalmente armónica entre una circunferencia y un polígono regular. Pero las circunferencias no solamente se asocian con polígonos de muchos lados, pues de ser así, se podría pensar que figuras como un triángulo o un cuadrado no poseen relación alguna con la circunferencia; cuando en realidad si están relacionados.

[u] Se propone un límite de 10 lados, ya que el trabajo con figuras de mayor número de lados, se puede volver extenso y monótono y es un número de lados suficientes para generar un conocimiento y manejo adecuado de las propiedades geométricas de los polígonos regulares y permitir en los estudiantes procesos de generalización con los polígonos regulares más grandes.

Independientemente de la similitud entre una circunferencia y los polígonos regulares a medida que incrementan sus lados, existe otro tipo de relación. Cada polígono es susceptible de contener o estar contenido en una circunferencia, y así se habla de *circunferencia inscrita* y *circunferencia circunscrita.* Si la circunferencia está marcada por fuera del polígono, es una circunferencia circunscrita en un polígono, y si se encuentra por dentro del polígono, entonces se denomina circunferencia inscrita en un polígono.

Para el estudio de este concepto, es necesario que cada estudiante posea un compás, que será de mucha utilidad en la medición de las dos circunferencias relacionadas a un polígono regular cualquiera. El estudiante puede tomar su figura construida con los segmentos de madera y los resortes, para dibujar sobre una superficie en la que se pueda marcar el contorno del polígono, y proceder a trabajar bien sea sobre su contorno interior o exterior (Figura 26 (a)).

Para marcar en el polígono dibujado la circunferencia inscrita, lo primero que debe hacer el estudiante es encontrar el centro y el punto medio de cada lado dentro de la figura, proceso que es explicado con detalle más adelante en este capítulo, al describir como llevar a cabo el estudio de estos elementos en particular. Una vez se tienen identificados se procede a ubicar la punta del compás en el centro, y se abre luego hasta el punto medio de cualquiera de sus lados. Con esta longitud, que corresponderá al radio de la circunferencia inscrita, se da inicio al trazado de la línea curva, la cual debe tocar todos los puntos medios de los lados del polígono sobre los que descansan cada una de las apotemas, y así queda inscrita la respectiva circunferencia dentro del polígono regular (Figura 26 (b)).

Finalmente, para hallar la circunferencia circunscrita, solo se requiere que el estudiante identifique y localice el centro de su polígono. Una vez lo localice, se ubica la punta del compás en el centro y se abre hasta un vértice o ángulo cualquiera de la figura. Con esta distancia, se inicia el trazo de la línea curva que resulta, la cual debe tocar por fuera del polígono cada uno de los vértices de la figura. De esta manera queda marcada la respectiva circunferencia circunscrita para el polígono regular (Figura 26 (c)).

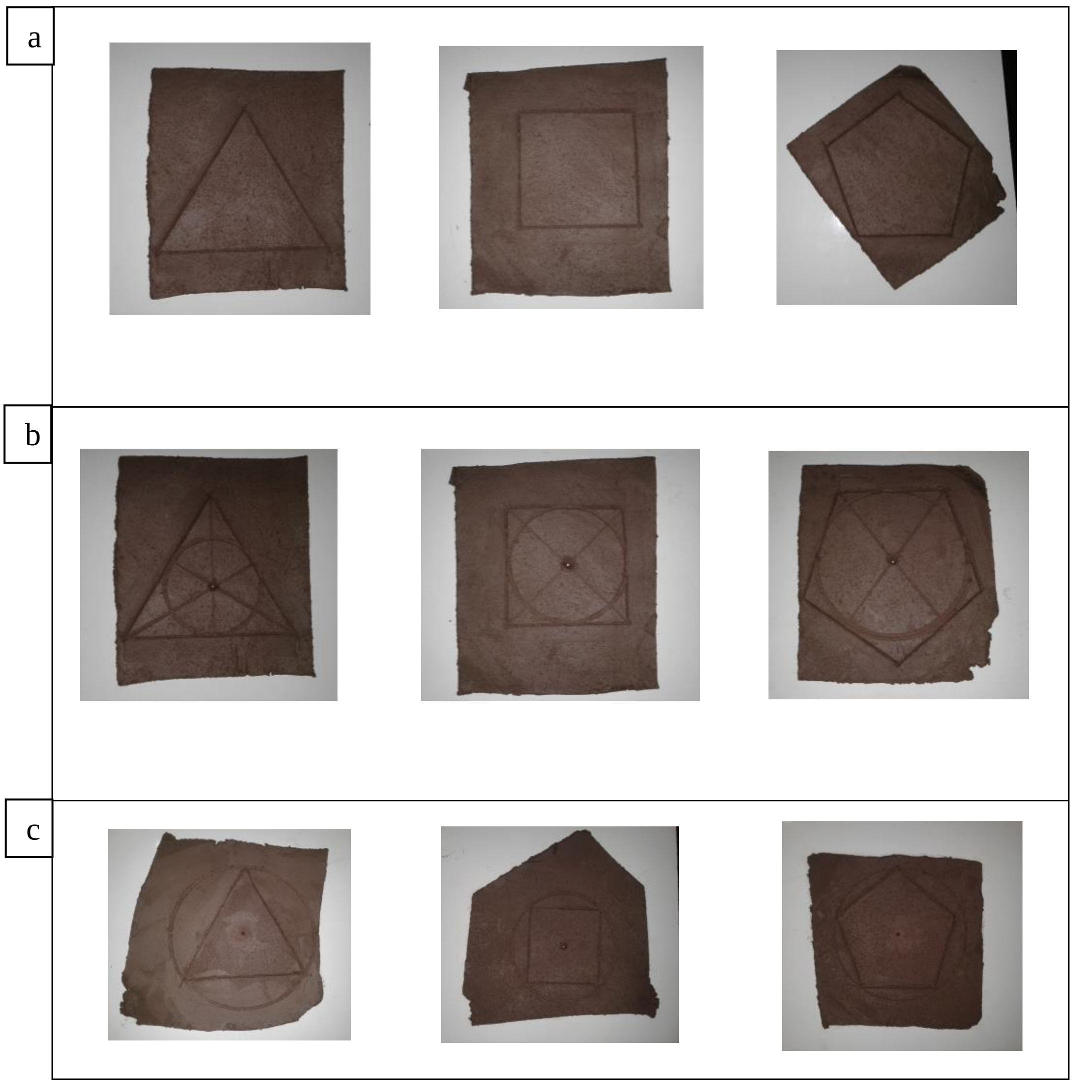


Figura 26 Proceso de trazado de la circunferencia (a). Polígono dibujado listo para marcar las circunferencias. (b) polígono dibujado con su circunferencia inscrita. (c) Polígono dibujado con su circunferencia circunscrita

Otro momento de trabajo con los polígonos de madera, se enfoca al análisis y comprensión de la relación existente entre el número de lados o ángulos, y el total de la suma del valor de sus ángulos, ya que, a través del desdoblamiento de los segmentos de madera, de manera tal que se forme una línea recta con todos los lados, se puede entender porque se debe adicionar 180° a la suma total de los ángulos inscritos, cada vez que a un polígono le aumenta en uno el número de sus lados. Este concepto geométrico se puede verificar experimentalmente con el polígono más pequeño (el triángulo), y generalizarlo al resto de los polígonos regulares.

Sin embargo, las figuras planas en cuestión, presentan algunos elementos geométricos como la *diagonal*, el *radio* y la *apotema*, para los que no es adecuado el uso de los moldes poligonales, ya que se requiere una figura sólida sobre la que se puedan realizar mediciones y cortes. Para este propósito se emplean las figuras de arcilla que ya se han fabricado con los moldes. Cada estudiante debe contar con su propia figura.

Como primera medida, se solicita al estudiante que en su figura identifique dos vértices, no importa cuáles[v], y que, desde allí, haciendo uso de una regla o escuadra, una los vértices seleccionados marcando una línea entre ellos. Una vez realizada esta tarea, se le explica al estudiante que la unión que acaba de realizar entre estos ángulos recibe el nombre de diagonal, proponiéndole que realice más uniones entre otros vértices de la figura. De esta manera, cuando haya agotado sus posibilidades, y manifieste haber finalizado la unión de vértices entre sí, es el momento adecuado para inducirlo a que identifique cuántas diagonales es posible sacar de cada vértice como también el número total de vértices inscritos en la figura, ya que la idea es que el estudiante intente, de forma intuitiva, establecer algún tipo de relación entre la cantidad total de

[v] Es importante que en este punto no se le informe al estudiante que los vértices para trazar las diagonales no deben ser consecutivos, ya que es un concepto al que se pretende que él llegue solo, como producto de sus experimentaciones sucesivas con la figura.

vértices inscritos en la figura y el número total de lados que la componen, para determinar de forma exacta el total de diagonales que puede contener un polígono.

La finalidad de este proceso es lograr que el estudiante comprenda y aprenda como hallar el número total de diagonales contenidas en cualquier figura, empleando el siguiente concepto: ***"Al total de lados restarle 3, luego multiplicar ese resultado por el total de lados, y ese resultado hallado, dividirlo entre 2".*** Este sería el concepto final que el estudiante debe comprender y manejar para generalizar adecuadamente el total de diagonales posibles para cualquier tipo de polígono (Figura 27).

Figura 27. Diagonales de cuadrado y pentágono regular.

Continuando con el estudio de los polígonos en relación con sus elementos principales, es tiempo de analizar el *radio*, concepto de gran importancia y fundamental para la comprensión en posteriores estudios matemáticos, de propiedades de otra importante figura geométrica no poligonal como lo es la circunferencia. Para abordar por parte del estudiante, el proceso de entendimiento de este concepto, es necesario que ubique el centro del polígono, considerando lo siguiente: si el polígono tiene un número de lados impar, se deben ubicar primero los puntos medios de sus lados, y luego trazar segmentos que unan cada punto medio con su vértice frontal correspondiente; para finalmente marcar en el punto donde se intersequen todos los segmentos, el centro del polígono (Figura 28 (a)).

Si por el contrario el polígono tiene un número de lados par, simplemente se marcan segmentos de recta que unan sus vértices opuestos y luego se marca con un punto el sitio donde se intersecan todos los segmentos entre sí, este punto corresponde al centro de la figura (Figura 28 (b)).

(a)

(b)

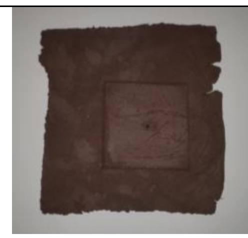
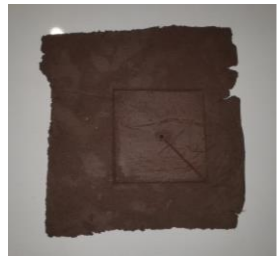


Figura 28. (a) Polígono lados impares con su centro (b) Polígono lados pares con su centro

Una vez el centro del polígono se halla de la manera más exacta posible, se marca un segmento que una el punto central con cualquiera de los vértices de la figura. A esta unión se le denomina *radio* del polígono.

Es muy importante buscar que el estudiante deduzca que ***"El número de radios totales que puede contener una figura poligonal cualquiera, es igual al número de vértices o ángulos que dicha figura contenga",*** como se observa en la Figura 29.

(a) Triángulo



(b) Cuadrilátero

Figura 29. Radio (a) Polígono de lados impares con sus radios marcados b) Polígono de lados pares con sus radios marcados.

Finalmente se propicia el estudio de la *apotema*. Para adentrar al estudiante en este concepto, se emplea el centro hallado anteriormente, el cual debe unirse mediante un segmento de recta, al punto medio de cada lado del polígono. Esta unión corresponde a la apotema.

Es muy importante resaltar que el o los segmentos desprendidos del centro que sirvan de *apotema* deben caer de forma perfectamente perpendicular sobre la mitad del lado escogido. ***"El número de apotemas totales que puede contener una figura poligonal cualquiera, es igual al número de lados que dicha figura contenga"*** (Figura 30).

(a). Triángulo

(b). Cuadrado

Figura 30. Apotema a) Polígono de lados impares con su apotema marcada. b) Polígono de lados pares con su apotema marcada.

Esta conclusión también debe ser producto de la intuición propia del alumno, ya que es de gran importancia para sus procesos de aprendizaje[w].

Una vez se han estudiado los conceptos básicos de la geometría, tales como punto, segmento, ángulo y polígono, la circunferencia inscrita y la circunscrita, así como algunos elementos: la diagonal, el radio y la apotema, se pueden abordar los conceptos relacionados con *área* y *perímetro* que se pueden desarrollar de igual forma con las figuras de arcilla.

Para llevar a cabo la medición del *perímetro* de cualquier forma plana, basta con sumar el valor de la medida de todos sus lados o también multiplicar dicho valor por el número de lados, ya que se están considerando formas regulares y por tanto todos sus lados tienen igual medida.

Para este análisis se propone que cada estudiante tome su figura, y con la ayuda de una regla o escuadra realice la medición de uno de sus lados. Una vez se tiene la medida de éste solo basta sumar su valor tantas veces como lados haya para encontrar el valor del perímetro.

El objetivo final es lograr que el estudiante generalice para cualquier tipo de polígono regular, el concepto de perímetro, desde la idea de que ***"El perímetro de un polígono regular es igual al producto del valor total de sus lados y el valor de la longitud de uno de sus lados"*** (Figura 31).

[w] Se podría pensar que son conclusiones bastante lógicas y de directa observación, y quizás lo sea para un cerebro más maduro, pero no se debe olvidar que para los estudiantes hasta los procesos más "básicos" o "lógicos" dentro de las matemáticas, resultan una maraña compleja de conceptos, relaciones y abstracciones que en su cerebro en formación no parecen ser tan evidentes.

 Si cada lado del triángulo mide 5 centímetros entonces empleando la formula sería: P = 3 lados * 5 cm = **15 cm**	 Si cada lado del cuadrado mide 13 centímetros entonces empleando la formula sería: P = 4 lados * 13 cm = **52 cm**
(a). Triángulo	***(b).*** Cuadrilátero

Figura 31. **Perímetro** a) Polígono de lados impares con su perímetro calculado b) Polígono de lados pares con su perímetro calculado

Para realizar el trabajo con el concepto de *área* es necesario entonces dividir la figura de estudio en triángulos, que para cada caso serían de igual forma, ya que se trata de un polígono regular (Figura 32).

 ***(a).*** Hexágono	 ***(b).*** Hexágono dividido

Figura 32. **Área** a) Polígono dividido en triángulos congruentes para calcular su área b) Triángulos separados equivalentes al área total del hexágono.

Se debe hacer lo anterior ya que el valor total del área o superficie del polígono, corresponde a la suma del valor de las áreas de cada uno de los triángulos en que se ha dividido. En este punto se debe recordar al estudiante como calcular el área de un triángulo, - es el producto entre su base y su altura-, teniendo en cuenta que la altura corresponde al valor de la apotema previamente calculada (**Figura 30 (b)).**

Lo anterior debe generalizarse para cualquier tipo de polígono regular, permitiendo que el estudiante experimente y verifique la formula general, donde ***"Área es igual al número de lados multiplicado por la medida de uno de los lados y esto multiplicado por la apotema, y todo este resultado dividirlo entre 2"***. Se puede hacer desde el triángulo y el cuadrado que suelen ser las más formas planas más familiares para el alumno en este grado. (Figura 33)

 **Triángulo**	Suponiendo que cada lado del triángulo mide 20 centímetros y la apotema del triángulo mide 10 centímetros, entonces empleando la formula tendríamos: A = ((3 lados * 20 cm)*10cm) / 2 = **300cm^2**

Figura 33. Área del triangulo

Una vez finalizado el proceso de áreas de polígonos regulares, solo resta para dar por terminada la parte correspondiente al primer eje temático considerado en este trabajo, indicar como se realiza el cálculo de áreas en formas no regulares mediante la misma idea de dividir la figura en triángulos, pero a diferencia de los anteriores estos no poseen la misma forma, claro está, ya que se trata de formas no regulares como se observa en la Figura 34.

 Polígono irregular	 Polígono irregular
 Polígono irregular dividido en triángulos	 Polígono irregular dividido en triángulos

Figura 34. Área Polígonos irregulares divididos en triángulos para calcular su área

En este punto el tratamiento de la figura es muy similar al caso anterior, solo se trata de hallar las áreas independientes de cada triángulo implícito y luego sumarlas, siendo este valor el área total del polígono en estudio.

Segundo Eje Temático: Transformaciones Isométricas

Una vez finalizado el trabajo de conocimiento con los polígonos, se ejecuta el siguiente grupo de actividades encaminadas a conceptualizar y comprender de manera amigable las condiciones y características del movimiento de las formas poligonales, en un plano bidimensional comúnmente conocido como el ***plano cartesiano***. Dichos movimientos reciben el nombre de ***transformaciones isométricas*** y se dividen en: *Rotaciones, Traslaciones y Reflexiones (RTR).* Es importante aclarar que este orden propuesto para los tres tipos de transformaciones no implica algun rigor conceptual en el momento de presentar el tema al estudiante, se propone para dar un orden que puede facilitar la recordación de sus nombres por las siglas RTR.

Para el trabajo con la rotación de una figura, se debe disponer, además de la figura previamente fabricada, de una superficie debidamente marcada y adecuada para servir como plano cartesiano (Figura 35 (a)), y en cuyas coordenadas *(x , y)* se marcarán los puntos en los que se anclará la figura a estudiar, con la ayuda de un lápiz o un compás a manera de eje ***(eje de rotación)*** (Figura 35 (b)) .

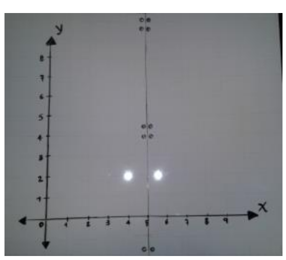
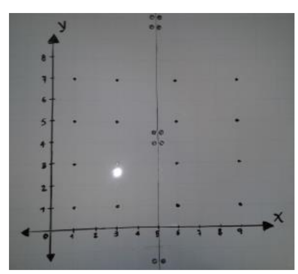
(a)	***(b)***
	

Figura 35. **a) Plano cartesiano** En el plano cartesiano dibujado, los puntos negros observados corresponden a posibles coordenadas y puntos del plano **b) Plano cartesiano con posibles ejes de rotación.** En este caso estos puntos corresponden a posibles ejes de rotación.

Este eje, será definido a priori por el estudiante en una coordenada cualquiera, permitiendo su movimiento rotatorio total en los 360° de movimiento circular plano, otorgando libertad al estudiante para que en repetidas selecciones de ángulos (positivos o negativos) de forma aleatoria, recorra con la figura anclada a su eje, la apertura necesaria hasta completar el arco inscrito en él, bien sea en rotaciones completas o semi-rotaciones; dependiendo siempre del ángulo de rotación.

Es importante recordar al estudiante que los tres elementos principales de esta primera transformación por rotación son el *eje de rotación*, el *ángulo de rotación* y el *sentido de la rotación*, de los cuales deben permanecer conscientes durante toda su experimentación.

Se le debe pedir al estudiante que seleccione en el tablero presentado un punto de rotación mediante una coordenada (x, y), y que luego coloque la figura en dicho punto, usando uno de sus vértices como eje de rotación (Figura 36)

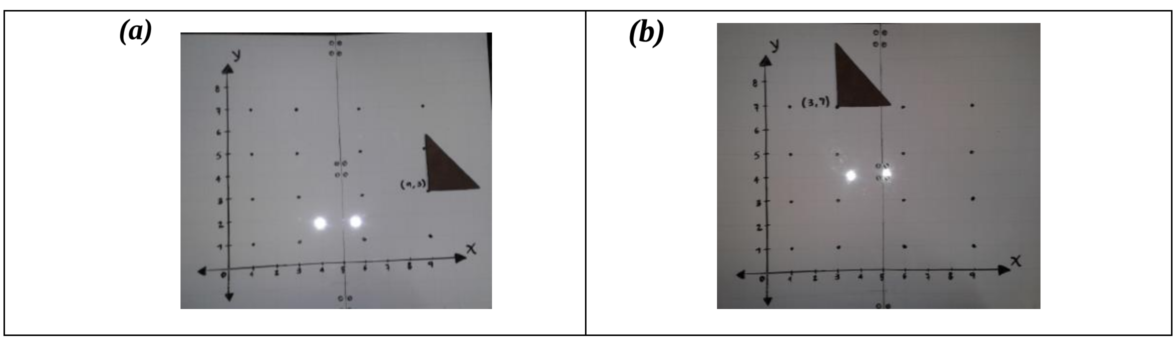
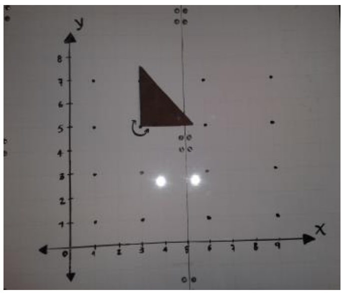


Figura 36. **Figura ubicada en diferentes ejes de rotación. (a)** Polígono ubicado en la coordenada (9,3) (b) Polígono ubicado en la coordenada (3,7). Cualquier punto (x,y) dentro del plano sirve de eje de rotación de la figura.

Luego se le pide al estudiante que piense sobre el sentido del ángulo (positivo o negativo) y su valor en grados, con los que quiere aplicar su transformación, llevando a cabo el proceso con la ayuda de un transportador (Figura 37).

(a)



(b)

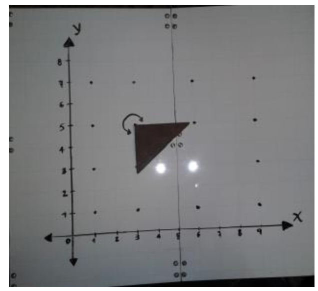


Figura 37**. Rotación de una figura (a)** Polígono en plano con su vértice en el eje de rotación, Este triángulo rectángulo se ubica y se le aplica rotación y sentido) (b) Figura con movimiento de rotación aplicado, acá se presenta rotado, después de aplicar 90 grados

Al finalizar las experimentaciones por parte de los estudiantes con relación a la rotación, es momento de iniciar el trabajo con el concepto de traslación.

Dentro de este concepto, el elemento más importante que el estudiante debe tener en cuenta se denomina *vector de traslación* [x] *V(x,y)*, y corresponde a una coordenada (x, y) cuyos valores son aplicados de igual forma a cada uno de los vértices de la figura en estudio.

Inicialmente se le debe pedir al estudiante que ubique los vértices de su figura en puntos cualesquiera del plano cartesiano, es importante que cada vértice quede ubicado en un punto (x, y) bien determinado, para no tener problemas de traslación de algún vértice durante el movimiento de la figura (Figura 38 (a))

[x] Para aplicar el vector de traslación a cada coordenada de la figura original solo es necesario sumar a la abscisa (x) el valor correspondiente a X en el vector de traslación; y a la ordenada (y) sumar la parte Y del vector de traslación. Entonces por ejemplo, si se tiene un punto A(3,2) y se tiene un vector de traslación V(4,2), el punto trasladado A´ corresponde a A´(7,4)

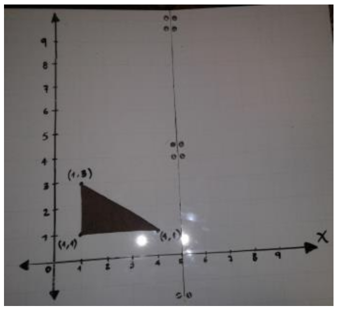
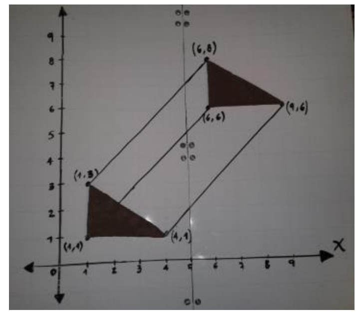
(a)	*(b)*
	

Figura 38. **Traslación de una figura (a)** Figura en plano con sus vértices en coordenadas lista para traslación. La figura se ubica con sus vértices en respectivas coordenadas y al aplicarle el vector de traslación, que para nuestro ejemplo es V(5,5). (b) Figura con movimiento de traslación aplicado. Acá se presenta la figura ya trasladada con el respectivo vector de traslación aplicado a cada vértice en su coordenada de la figura original.

Una vez ubicada la figura correctamente en el plano, el estudiante debe seleccionar un vector de traslación aleatoriamente, pero que pueda ser aplicado espacialmente, es decir, se debe tener en cuenta las medidas del tablero para el valor del vector. Este vector dado en forma de coordenadas cartesianas deberá ser aplicado a cada punto (vértice) del polígono previamente ubicado, de forma tal que toda la figura sufra un movimiento uniforme sin ser alterado ninguno de sus puntos, conservando ***semejanza*** y ***congruencia*** con su forma original, características estas, por definición, indispensables en un proceso isométrico (Ver figura 38 (b))

De esta forma finaliza el proceso de aprendizaje del concepto de traslación, restando solo el concepto de *reflexión* para completar el segundo eje tematico, parte de este trabajo.

Este último concepto, también denominado como simetría, se puede dividir en dos partes: la *simetría central* y la *simetría axial*.

Para desarrollar el concepto de simetría central, el estudiante debe entonces ubicar su polígono dentro del sistema de coordenadas, colocando cuidadosamente cada vértice de la figura en un punto determinado del plano (Figura 39 (a)).

Con la figura ubicada, el estudiante debe pensar en definir primero un punto (x, y) cuyo valor otorga el ***punto de simetría***, elemento básico para la *simetría central*, y que será el punto de referencia para obtener la imagen reflejada del polígono original (Figura 39 (b)).

En este punto, es de vital importancia que se tenga en cuenta que los vértices del polígono imagen deben cumplir dos condiciones: la primera es que cada uno de ellos debe estar a la misma distancia del punto de simetría que los vértices del polígono original, y la segunda corresponde a la línea recta que deben formar entre si el punto o vértice de la forma original con el mismo vértice en la forma imagen.

Ya con estas reglas establecidas, es labor del estudiante iniciar el cálculo de cada uno de los vértices de la figura imagen dentro del sistema de coordenadas, y una vez hallados solo queda unirlos con segmentos de recta para determinar la imagen reflejada bajo una simetría central[y] (Figura 39 (c)).

[y] Es muy importante resaltar la pertinencia que tiene la experimentación libre en este tipo de procesos lúdicos, antes de pasar de un concepto a otro el estudiante debe haber experimentado sus propias posibilidades con cada concepto, aparte de las inducciones del mediador.

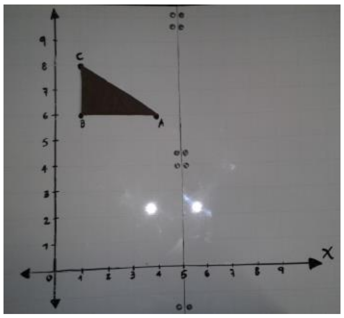
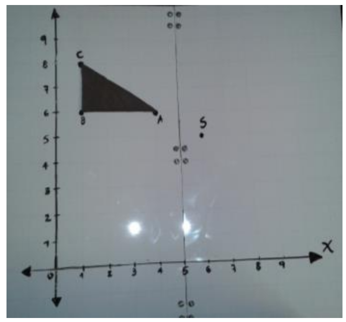
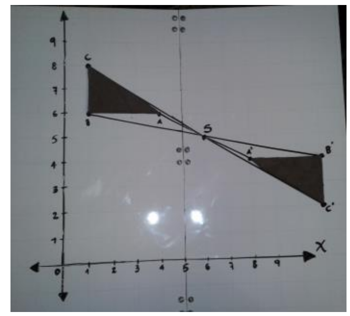
(a)	***(b)***	***(c)***
		

*Figura 39***. Simetría central de una figura (a)** Figura en plano con sus vértices en coordenadas lista para ser operada a través del centro de simetría seleccionado. (b) Figura con centro de simetría asignado, acá se presenta la figura ubicada y su respectivo centro de simetría (S) ubicado dentro del plano. (c) Figura en el plano con su respectiva imagen simétrica central, se presenta la figura original y su imagen simétrica central respectiva. Se debe ser muy cuidadoso en la medida de las coordenadas de la imagen para garantizar líneas rectas entre las coordenadas de la figura original original y la de la imagen

La simetría axial se trabaja a partir de un elemento importante llamado ***eje de simetría (T)***. Para este propósito se le debe pedir al estudiante que a partir del polígono ubicado en el plano (Figura 40 (a)) escoja un punto (x, y) cualquiera sobre el que, de manera perpendicular al eje X, se debe trazar una línea recta que pase por dicha coordenada (Figura 40 (b)).

Luego, para poder generar el polígono imagen al otro lado del eje de simetría, se debe medir la distancia de cada vértice del polígono original, al eje de simetría; y así, tomando el valor de la distancia de cada punto del polígono original se puede medir cada punto del polígono imagen, debiendo conservar cada uno de ellos la misma distancia con su par (Figura 40 (c)).

(a)	***(b)***	***(c)***

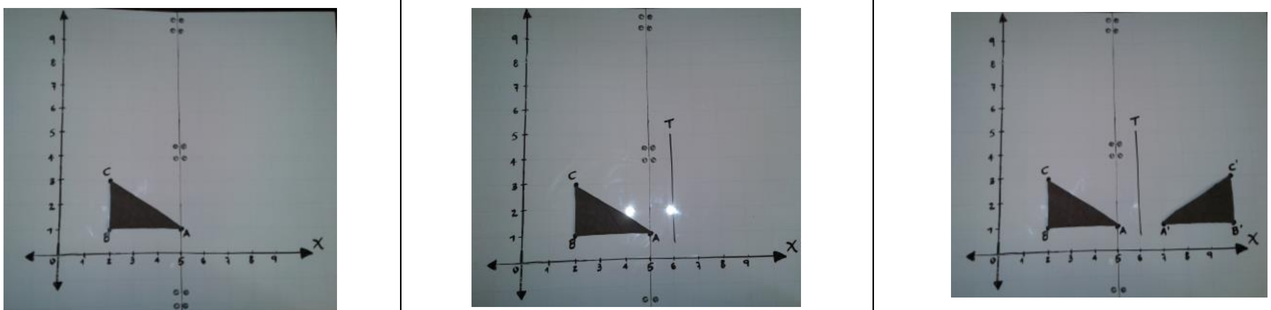


Figura 40. **Simetría axial de una figura (a)** Figura en plano con sus vértices en coordenadas lista para ser operada a través del eje de simetría seleccionado. (b) Figura con centro de simetría asignado, Acá se presenta la figura ubicada y su respectivo eje de simetría (T) ubicado dentro del plano (c) Figura en el plano con su respectiva imagen simétrica axial, como en la anterior se debe ser muy cuidadoso en la medida de las coordenadas de la imagen para garantizar líneas rectas entre las coordenadas original e imagen.

Con este último concepto se da por finalizado el segundo eje temático que hace parte de este trabajo, y que en su parte final propone trabajar con cuerpos sólidos construidos a partir de la unión de polígonos planos, restringidos solo poliedros sencillos (triángulos y cuadrados), en los que, como se dijo anteriormente, se conjugan los elementos geométricos vistos y sirven como introducción para el desarrollo posterior del tema de cuerpos volumétricos de mayor complejidad.

Tercer Eje Temático: Cuerpos Volumétricos

La primera tarea que se debe llevar a cabo para este objetivo es que el estudiante construya un conjunto de triángulos iguales, los necesarios para que, al unirlos, pueda construir una pirámide de tres caras, como se observa en la Figura 41. Con este primer acercamiento al trabajo con los cuerpos tridimensionales, se pretende que, a partir de una idea ya establecida, en la que un solo triángulo es un cuerpo plano bidimensional, o por lo menos una idea muy cercana a dos dimensiones, el alumno pueda relacionar entre si estas formas y corroborar por sí mismo la existencia de un polígono plano como parte formadora de un todo en un cuerpo más complejo.

Figura 41 **Construcción de una pirámide de tres caras.** Se observan los triángulos iguales y como al unirlos se pasa de una figura bidimensional a una tridimensional.

En este punto se puede inducir al estudiante a la experimentación con la construcción de pirámides ya no con base triangular como la anterior, sino con bases cuadradas, pentagonales, hexagonales, etc. El propósito de esto es que el estudiante visualice y aplique de forma real, uno o varios cuerpos planos bidimensionales en la construcción de una forma sólida tridimensional. Para el efecto de este ejemplo solo se mostrarán las pirámides triangular y cuadrada (Figura 42).

Figura 42 **Construcción de una pirámide de base cuadrada.** En este caso también con los triángulos iguales necesarios se forma un cuerpo tridimensional

Ahora, el estudiante puede continuar con las construcciones de sólidos, pero esta vez se le pide que construya un cubo, empleando cuadrados (Figura 43).

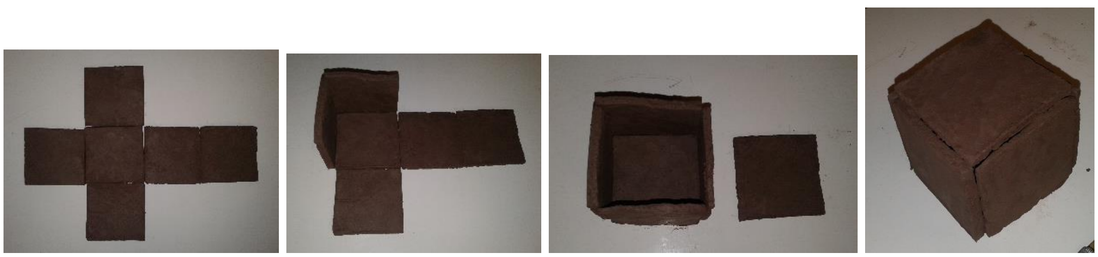


Figura 43 **Construcción de un cubo.** Se observan los cuadrados iguales y como al unirlos se obtiene una forma tridimensional

Lo que se busca es que el estudiante comprenda tanto a nivel conceptual como espacial, que cualquier forma tridimensional está conformada por uno o varios tipos de polígonos planos, ya sean estos regulares o no, y que todo el trabajo previo con éstos, está intencionado al estudio y entendimiento de las propiedades de los cuerpos sólidos en el espacio.

Volumen de pirámides y prismas. Un elemento importante de los poliedros que debe tenerse en cuenta es su volumen ya que hace referencia a su capacidad de contenido, concepto importante en muchos de los problemas que implican el análisis geométrico de los poliedros en general. En este caso particular se consideran sólo los más básicos, ya que este trabajo está dirigido a estudiantes de grados inferiores.

Este concepto se puede iniciar presentando a los estudiantes la formula general para calcular volumen:

Volumen $= (N * L * Ap_b * h) / 6$, en donde: N es el numero der lados de la base, L es la longitud de uno de ellos, Ap_b es la medida del apotema de la base y h es la altura del poliedro.

Para calcular el volumen de un prisma la fórmula general es:

Volumen $\boldsymbol{= A_b * h}$, en donde A_b es el área de la base, y h es la altura del prisma

En la Figura 44 (a) y (b) se presentan ejemplos de los cálculos de volumen de dos poliedros que ya, en este punto, deben ser familiares para los estudiantes.

 ***(a)***	Si una pirámide cuadrada tiene una apotema de 5 cm, ($Ap_b = 5cm$) y una altura de 11 cm ($h = 11$ *cm*), y sabiendo que su base posee 4 lados ($N = 4$) y si uno de ellos mide 10 cm ($L = 10$ *cm*). Reemplazando estos datos en la fórmula del volumen se obtiene: *Volumen* $= (4 * 10cm * 5cm * 11cm) / 6$ *Volumen* $= 2200\ cm^3 / 6$ *Volumen* $= 366,67\ cm^3$

 ***(b)***	Para un prisma triangular, y suponiendo que ya en cálculos realizados se ha encontrado que su triángulo base tiene un área aproximada de 25 cm^2 ($A_b = 25\ cm^2$) y una altura de 8 cm, ($h = 8\ cm$), se aplican los datos obtenidos en la fórmula así: Volumen = 25 cm^2 * 8 cm Volumen = 200 cm^3

Figura 44 **Cálculo de volumen en dos poliedros comunes**. (a) Pirámide de base cuadrada (b) Prisma triangular.

Ya con esta información, el estudiante puede tomar cualquiera de los sólidos que ha construido y realizar los cálculos aplicando la fórmula.

Todos los cuerpos sólidos que se ubican en cualquier espacio tridimensional, presentan al igual que los polígonos, elementos que deben ser estudiados y tenidos en cuenta a la hora de analizar los poliedros. Cualquiera de estos, presenta características como caras basales y caras laterales, aristas y vértices.

Para realizar el trabajo con estos elementos, se le puede pedir al estudiante que tome cualquier poliedro que haya construido. Inicialmente se le debe explicar que los lados del poliedro que sirvan como base para apoyarse en el plano, se denominan *caras basales*, y que los lados restantes se denominan *caras laterales*. Se busca que el estudiante identifique este tipo de elementos en varios poliedros (Figura 45)

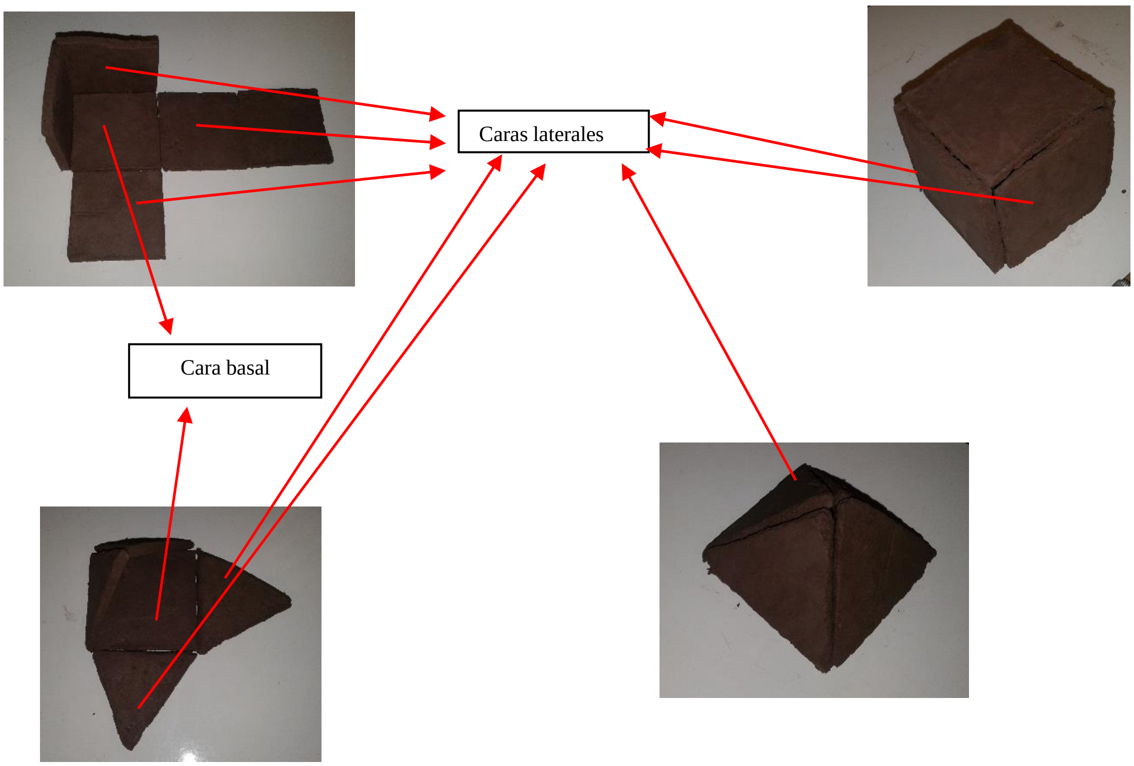


Figura 45 Identificación de caras basales y laterales en un cubo y en una pirámide de base cuadrada.

El segundo elemento a identificar son las aristas, que se definen como las líneas que se forman al unir dos caras de una figura. Para profundizar en este concepto, se le puede solicitar al estudiante que tome su poliedro y lo descomponga en los polígonos que lo conforman, para que después tome dos de ellos y los una, mostrándole finalmente que la unión realizada recibe el nombre de *arista*, y cada vez que se agregue una nueva cara al poliedro se formará una *arista* nueva (Figura 46). Cada estudiante puede realizar el proceso con su propio poliedro[z]

[z] Es muy importante que los estudiantes compartan las experimentaciones entre sí, debido a que por razones de tiempo éste no explora todos los casos posibles de los elementos en los diferentes tipos de poliedros.

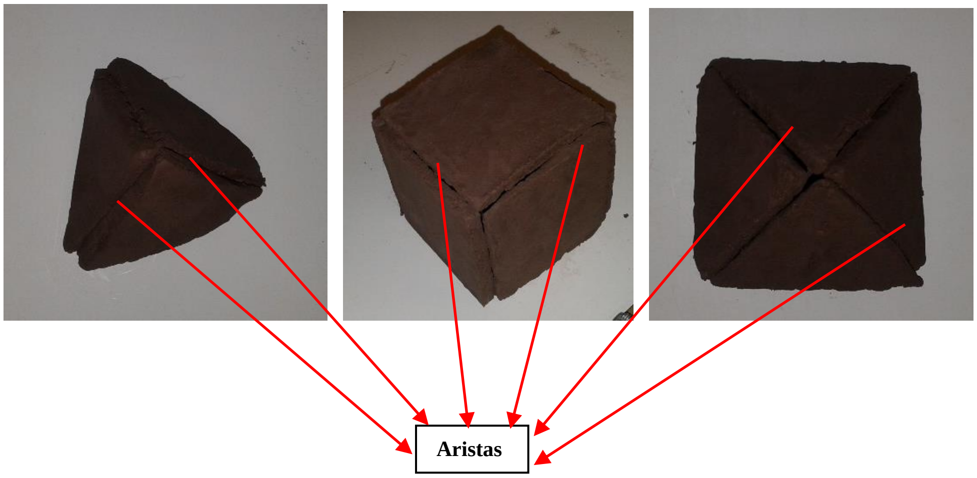


Figura 46 **Identificación de las aristas** en una pirámide de base triangular, en un cubo y en una pirámide de base cuadrada.

El tercer y último elemento a estudiar en un poliedro son sus vértices, que se definen como el punto de unión de tres o más caras. Entonces para abordar este concepto se le debe pedir al estudiante que, como en el caso anterior, desintegre su poliedro en polígonos y una vez más realice la unión de éstos para conformar de nuevo el poliedro, explicándole a medida que avanza en su reconstrucción, que el punto de unión de mínimo tres caras recibe el nombre de *vértice* (Figura 47), así el estudiante tiene oportunidad de ir verificando visualmente la información brindada.

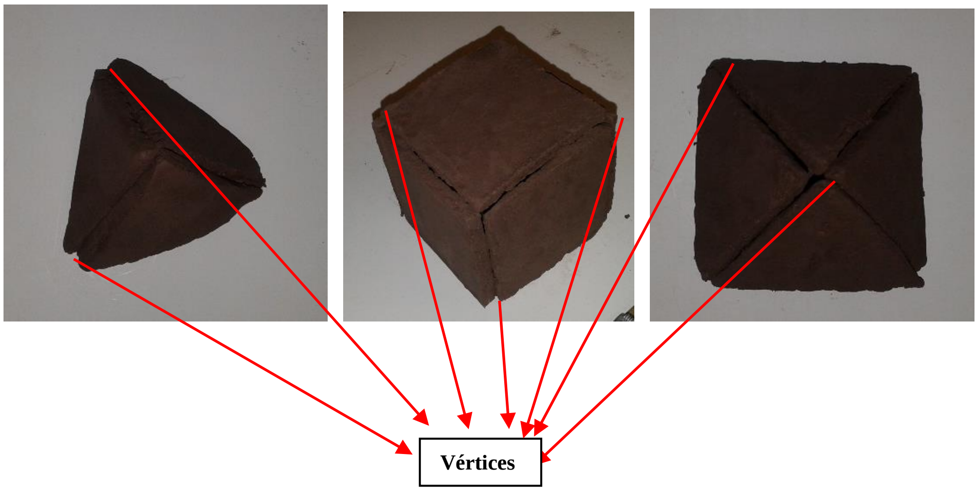


Figura 47 **Identificación de los vértices** en una pirámide de base triangular, en un cubo y en una pirámide de base cuadrada.

Finalmente, los estudiantes pueden construir algunos prismas básicos; que, como los sólidos anteriores, se componen de varios polígonos unidos entre sí, y tienen también como elementos básicos caras basales, caras laterales, aristas y vértices.

Para construir un prisma triangular, el estudiante debe primero moldear en arcilla dos triángulos regulares de cualquier medida e iguales entre ellos, los cuales servirán como bases del prisma (Figura 48 (a)). Después, debe construir tres cuadriláteros regulares, es muy importante que sus lados conserven la misma medida que uno de los lados de los triángulos construidos en el paso anterior (Figura 48 (b)). Una vez se tienen las 5 formas construidas, se unen los cuadrados de forma vertical a cada lado de los triángulos (Figura 48 (c)). Finalmente se ubica el triángulo restante como tapa en la parte superior, quedando de esta forma construido uno de los poliedros prismáticos más sencillos (Figura 48 (d))

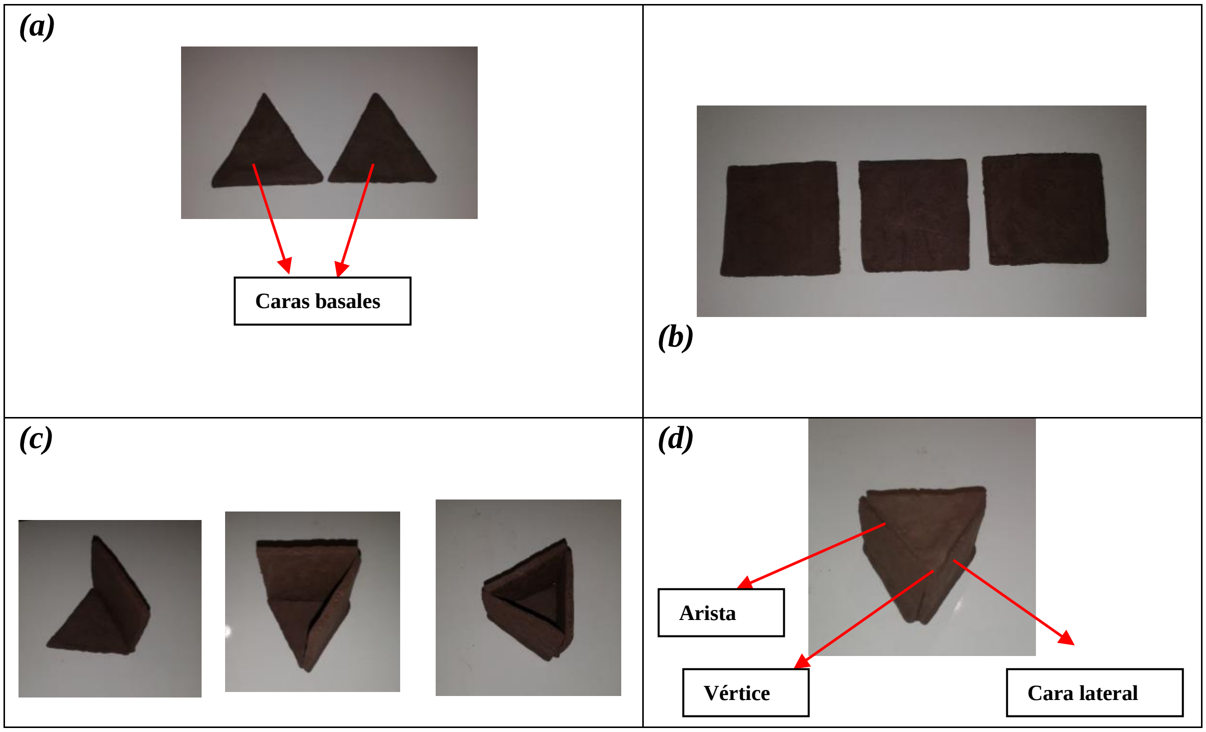


Figura 48 **Construcción de un prisma triangular (a)** Dos triángulos regulares e iguales entre ellos **(b)** Tres cuadriláteros regulares e iguales entre ellos **(c)** Cuadrados pegados a los triángulos de forma vertical **(d)** Prisma construido con caras poligonales.

Para la realización de un segundo prisma, el prisma pentagonal, el estudiante debe construir dos pentágonos regulares e iguales entre ellos, que servirán como las bases del cuerpo (Figura 49 (a)). Luego, se procede a medir 5 rectángulos de igual medida entre ellos, y cuyos lados menores tengan la misma medida que uno de los lados del pentágono ya construido (Figura 49 (b)). Ahora, es momento de ubicar cada uno de los rectángulos construidos a cada lado del pentágono, ubicándolos de forma vertical (Figura 49 (c)). Finalmente se ubica el pentágono restante como tapa de la construcción, quedando así constituido el prisma en mención (Figura 49 (d)).

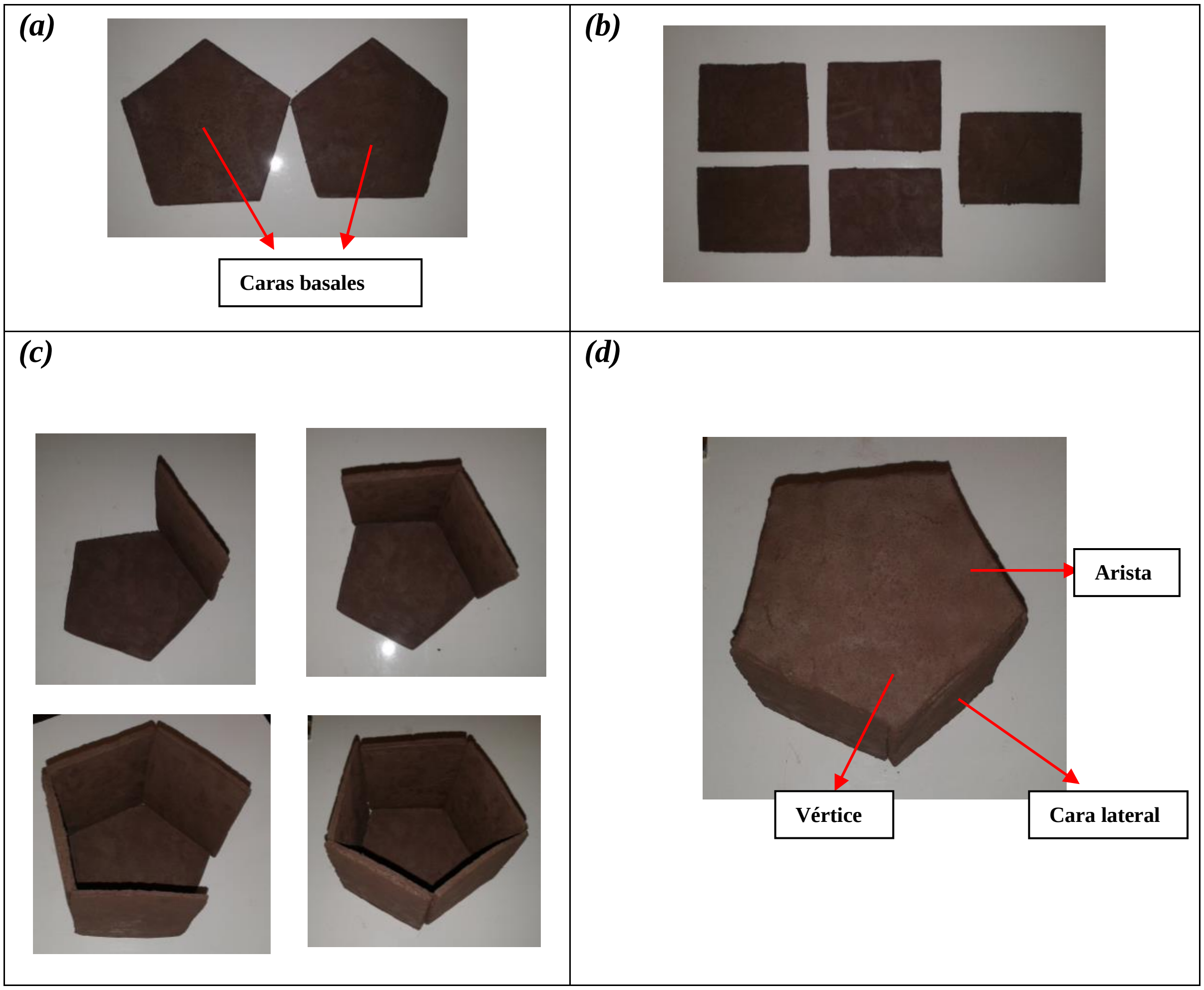


Figura 49 **Construcción de un prisma pentagonal (a)** Dos pentágonos regulares e iguales entre ellos **(b)** Cinco rectángulos iguales entre sí **(c)** Rectángulos pegados a los pentágonos de forma vertical **(d)** Prisma construido con caras poligonales.

Así mismo, los prismas presentan elementos básicos e importantes. Las caras basales y las caras laterales, las aristas y los vértices.

Ahora se pueden identificar los elementos básicos en cualquier prisma ya construido.

Tomando como ejemplo los prismas anteriores, los dos polígonos regulares se denominan *caras basales (Ver Figuras 48 (a) y 49 (a),* ya que son las que sirven de bases para el prisma, y las caras restantes, es decir las caras verticales se denominan *caras laterales (Ver Figuras 48 (d) y 49 (d).*

Como ya se ha mencionado anteriormente, los *vértices* son los puntos de encuentro de 3 o más caras, que corresponde a las esquinas del prisma.

Solo resta la identificación de las aristas, las que, como ya se ha dicho, son las líneas de unión de dos caras del prisma. Estos últimos dos elementos también están indicados en *las Figuras 48 (d) y 49 (d).*

Hasta este punto se espera que el estudiante haya comprendido que un poliedro, cualquiera que fuere, está conformado por varios polígonos unidos; y que pueda también identificar sus principales elementos.

CAPITULO III. CONSIDERACIONES FINALES

“Aprender Experimentando”

“Es evidente la estrecha relación que existe entre el ser humano y la naturaleza, de hecho, es nuestra vida misma la que depende de ésta, y a ésta le debemos lo que somos.”

Dentro de las relaciones establecidas en el entorno escolar, específicamente en el área de la geometría, el docente tiene la oportunidad de acercar el objeto de conocimiento (formas geométricas) a situaciones de la vida diaria, favoreciendo los procesos de aprendizaje ya que permiten una relación más efectiva con la geometría, vivenciándola desde otras perspectivas diferentes al tablero, los textos escolares, una tableta o una computadora.

En un proceso de enseñanza-aprendizaje, el docente debe encaminar sus esfuerzos a la implementación de caminos efectivos de aprendizaje, dentro de los que, sea cual fuere el objeto de conocimiento, se logre un acercamiento y un entendimiento real del objeto propuesto. En el caso específico de la enseñanza de la geometría dentro de un aula de clase regular, dichos caminos pueden recorrerse desde la proposición de prácticas lúdicas, libres y experimentales[aa], en las que el estudiante sea quien descubra las propiedades y posibilidades de un cuerpo, plano o tridimensional, analizado desde lo métrico y lo espacial.

[aa] Es de aclarar que en este contexto el término ***“aprendizaje experimental”*** no corresponde a una dinámica rigurosa en la que el docente no intervenga en la mayoría del proceso de conocimiento del objeto y además que el estudiante tenga la plena libertad de ejecutar las etapas a su propio ritmo; ya que estas condiciones no se cumplen en nuestras clases cotidianas debido a que el sistema educativo planteado no permite este tipo de desarrollos a este nivel. La palabra “experimentales” dentro de este contexto se refiere a que el estudiante puede tomar en sus manos un objeto, armarlo, desarmarlo, girarlo, recortarlo, trazar líneas y evidenciar los cambios de orientación en el espacio cuando lo gira etc. actuando de forma libre con él, pero en muchos casos, con una información teórica previa para facilitar el proceso y la dirección del trabajo propuesto.

Generalmente se pretende que los estudiantes apropien conceptos y comprendan información relacionada con cuerpos geométricos y las relaciones de estos con el espacio; se les recomiendan textos, bien sea electrónicos o en papel, se conminan a que transcriban en sus cuadernos gran cantidad de figuras, fórmulas y sus ejemplos escritos en el tablero, asisten a la sala de computadoras de su institución para manipular figuras desde programas electrónicos que les permiten un acercamiento limitado a la realidad tridimensional de la figura *(siendo esta la mejor experiencia para ellos dentro de la clase de geometría)*; todo esto es válido en un proceso de conocimiento, pero su efectividad disminuye toda vez que carece de espacios de experimentación directa, vivida por el estudiante de forma lúdica y adecuada para el desarrollo y el refuerzo del aprendizaje. ***"Teoría y práctica se complementan muy bien en el aprendizaje, y ambas son necesarias, pero creo que practicar y experimentar, especialmente en edad escolar es imprescindible para que los conceptos adquiridos en las clases teóricas se fijen y no se olviden nunca." (Javier García Martínez - http://fedit.com/experimentando-para-aprender/)***

Precisamente, la intención de este trabajo es contribuir al mejoramiento de las competencias basadas en el pensamiento espacial geométrico en un grupo de estudiantes de grado séptimo, mediante la intensificación del trabajo experimental dentro del aula, permitiéndole que haga verificaciones propias sobre la teoría propuesta al poder manipular, de forma tridimensional, el cuerpo o elemento geométrico sobre el que se pretende aprender. La posibilidad que el estudiante, con su ritmo y perspectiva propios, establezca puntos de referencia espacial para su objeto, el cual está manipulando de forma real, y pueda descubrir y verificar sus propiedades y elementos presentados antes teóricamente, le otorga ya una ventaja frente a estudiantes que quizás hayan vivenciado un proceso teórico – práctico similar en otras aulas de clase, pero siguen careciendo de las posibilidades de experimentación real para completar adecuadamente el proceso de conocimiento. ***"El aprendizaje es experiencia, todo lo demás es información" Albert Einstein.***

Experiencia con la Figura

Uno de los momentos más importantes dentro del aprendizaje de los conceptos geométricos es el de la manipulación real del cuerpo geométrico. Todos los datos e información verbal y/o gráfica dada por el docente, se pueden llevar a medidas, formas y movimientos reales que sirvan de prototipo tridimensional real de la forma propuesta en el libro, tablero o pantalla, con la ventaja que puede ser completamente observada, manipulada y transformada, sin más limitantes que la propia capacidad de imaginar del estudiante.

Jean Piaget sostiene que "la forma en que un niño aprende es mediante las acciones" (El enfoque constructivista de Piaget, s.f.). Esto nos convoca como docentes a repensar la manera en que se lleva a cabo la enseñanza de los diferentes saberes, sobre todo en relación con las posibilidades mínimas o a veces nulas que otorgamos a nuestros estudiantes dentro del desarrollo de la clase, para realizar procesos de experimentación; ya que casi siempre se reduce la etapa de conocimiento del objeto en cuestión, a trabajo de tablero, texto escolar o pantalla de tableta o computadora.

Es notorio en la clase de geometría que cuando se da el tiempo para el armado y manipulación de la figura, se convierte en un momento de juego para el estudiante, en el que esta relacionando conceptos y completando información, fortaleciendo así el proceso de aprendizaje.

Frecuentemente los docentes incurrimos en agresiones des-intencionadas, al acelerar o simplificar etapas fundamentales para la apropiación exitosa de un conocimiento específico. Se le da más importancia al rigor teórico de un concepto que a su manejo lúdico, desconociendo el gran valor que tiene la experimentación y el juego personal con la forma, observarla, tocarla, transformarla en otra, medirla, cambiarle perspectivas de visualización, ubicarla en las coordenadas de un plano cartesiano y moverlas, conforme a sus requerimientos y expectativas, tratando de que sea él mismo quien finalmente establezca las conexiones entre los conceptos teóricos sueltos, almacenados en su cerebro y los lleven a relaciones reales y modelos físicamente trabajables que ofrezcan la posibilidad de ser manipulados manualmente.

Para Piaget (Ibídem) los niños solo descubren las posibilidades físicas de los objetos actuando sobre ellos y descubriendo cómo reaccionan a sus actos. Es solo mediante la manipulación de la figura que el estudiante entenderá realmente el concepto geométrico a que haya lugar, en cualquier caso, ya que al ser la geometría un concepto altamente relacionado con lo espacial, tiene mucha importancia la visualización y la verificación física de las propiedades y elementos relacionados.

En este sentido es de gran importancia que se involucren en el proceso de aprendizaje elementos de la naturaleza como la arcilla, la madera, el agua, entre otros. Se espera que, la experimentación de las diversas posibilidades geométricas de los polígonos al armar, desarmar, rearmar, formar, deformar, ver e imaginar el cuerpo del cual se le pretende brindar información al estudiante, contribuya a que se obtengan resultados más satisfactorios en términos de aprendizaje y posteriormente del conocimiento obtenido.

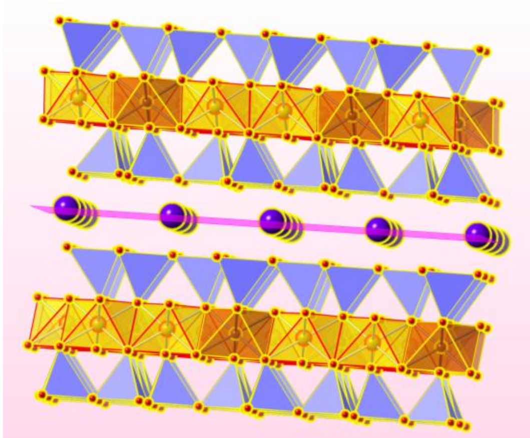
La apropiación de los conceptos geométricos y, en particular, el manejo y la visualización espacial de los poliedros, es de gran aplicación y prepara a los estudiantes para enfrentar posteriormente temas más avanzados en diversos campos del conocimiento, incluso diferentes a las matemáticas.

Por ejemplo, es interesante observar como la estructura misma, a escala nanométrica, de las arcillas usadas en este trabajo para la construcción de las figuras geométricas, se pueden considerar en sí mismas como un arreglo de átomos que forman poliedros ordenados y conectados de manera muy precisa para generar la estructura del material.

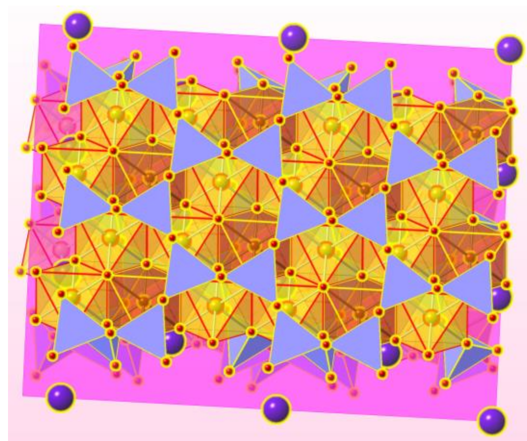
Un tipo de arcilla común que se encuentra como mineral en la naturaleza se presenta en la Figura 50. Este tipo de arcillas está constituido por átomos de silicio unidos a cuatro átomos de oxígeno formando un tetraedro, también se encuentra átomos de aluminio unidos a seis átomos de oxígeno de tal forma que generan un octaedro.

Finalmente, los tetraedros y octaedros se disponen en capas que se acoplan dando láminas que al repetirse forman la estructura cristalina de material, como se observa en la Figura 50.

En materiales sólidos, la estructura cristalina es probablemente el factor clave que determina la mayor parte de las propiedades y aplicaciones del material. Al igual que las arcillas, la mayoría de las estructuras de los materiales sólidos se pueden entender como arreglos ordenados de átomos en forma de poliedros y por tal razón la apropiación de estos conceptos básicos de geometría puede tener trascendencia en áreas tan diversas como la física, química, geología, ciencia de los materiales e ingeniería en general.



(a)



(b)

Figura 50 **Estructura de un tipo de arcilla común (a)** Vista lateral de la estructura **(b)** Vista desde la parte superior de la estructura (Imagen elaborada con el programa *Crystal Maker* cortesía del profesor Oscar Hernán Giraldo)

.

CAPITULO IV. RECOMENDACIONES

Una de las estrategias que el Ministerio de Educación Nacional (MEN) ha establecido para dar cumplimiento a los objetivos proyectados en materia de calidad y competitividad educativa[bb], son los estándares básicos de competencia[cc] discriminados por niveles de escolaridad, que, según el MEN, son los conocimientos adquiridos y la forma de aplicarlos que un estudiante debe evidenciar cada vez que finaliza un grado determinado de la educación básica y media, que le permitirán competir en conocimientos con estudiantes de otras latitudes y contextos.

En este sentido, la herramienta diseñada en este trabajo está dirigida a favorecer una parte del pensamiento matemático perteneciente al campo de la geometría y su relación con el espacio en el que nos movemos. El *Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos* se enmarca en los estándares básicos de competencias, establecidos por el MEN

Para la implementación de la herramienta en un grupo de séptimo grado de una escuela tradicional, bien sea rural o urbana, se desarrolló el protocolo de aplicación descrito en el Capítulo II, dirigido a que un grupo de estudiantes apliquen sus conocimientos a la resolución de problemas relacionados con el pensamiento geométrico-espacial; después de pasar por ciertos procesos de aprendizaje, llevados a cabo con didácticas experimentales. Se

[bb] http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-268932_PLAN_DE_DESARROLLO_20142018.pdf

[cc] MEN (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas - Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.

espera que, al finalizar el proceso, las concepciones y relaciones que posee el estudiante en lo referente a la geometría mejoren considerablemente.

El protocolo descrito es aplicable a un grupo de estudiantes de grado séptimo de cualquier Institución Educativa, aprovechando que sus edades promedio (entre 12 y 14 años) les permite propiciar y ejecutar en sus esquemas conceptuales, reajustes que pueden favorecer un proceso de aprendizaje más efectivo.

El conjunto de conocimientos que se pretende abarcar en este proceso, responde a los requerimientos del MEN en lo relacionado con los conceptos geométricos estándar que debe tener un estudiante al finalizar grado séptimo.

Para efectos de determinar la utilidad de la herramienta, se proponen dos momentos de evaluación, el primero con fines indagatorios sobre el nivel de apropiación de los conocimientos en lo referente al pensamiento espacial / geométrico (saberes previos), y el segundo, para medir el impacto que tuvo el proceso de enseñanza llevado a cabo confrontando los resultados obtenidos con los de la prueba inicial.

Finalmente, se presenta un modelo de un formato de evaluación, que involucra los conceptos vistos en los tres ejes temáticos (*Propiedades de los Polígonos, Transformaciones isométricas y Cuerpos sólidos a partir de polígonos planos*) desarrollados en el Capítulo II con la implementación de la herramienta tridimensional diseñada:

DIAGNÓSTICO PRELIMINAR SOBRE SABERES RELACIONADOS CON PENSAMIENTO GEOMÉTRICO / ESPACIAL

PROPIEDADES DE LOS POLIGONOS:

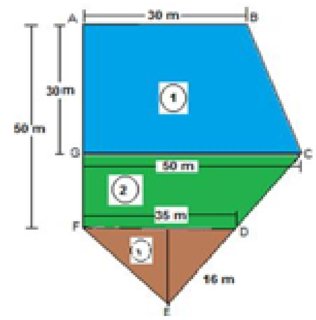
1. El área del terreno de la figura es:

a. 2330 m^2

b. 2330 cm^2

c. 2340 m^2

d. 2340 cm^2

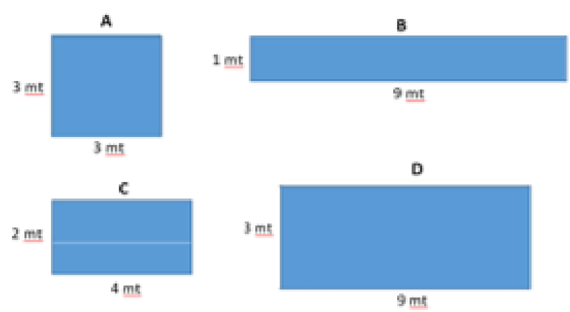


2. La profesora Lucia necesita un tablero que cumpla con las siguientes características:

I. Superficie del tablero: 9 metros cuadrados (9 m^2)

II. Perímetro del tablero: 12 metros (12 m)

De las representaciones de tablero que se presentan a continuación, ¿cuál cree usted que cumpla con las características exigidas por la profesora Lucía?



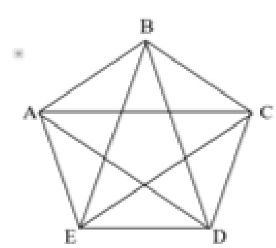
3. En el pentágono regular que se muestra en la figura se han trazado algunas de sus diagonales. ¿Cuáles de los siguientes pares de triángulos son congruentes?

a. ΔGEF y ΔABE

b. ΔDAC y ΔCAB

c. ΔEGD y ΔEGF

d. ΔBEC y ΔDAC



4. Un campo de cultivo que presenta forma rectangular, cuesta el metro cuadrado 150000 pesos. Las medidas de los lados del terreno son: 170 metros y 28 metros.

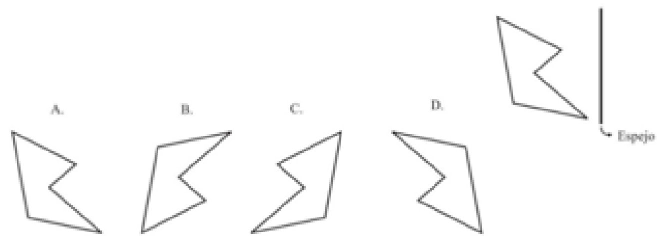
El precio del terreno en pesos es:

a. 741. 000. 000	*b.* 714. 000. 000	*c.* 741. 400. 300	*d.* 714. 366. 254

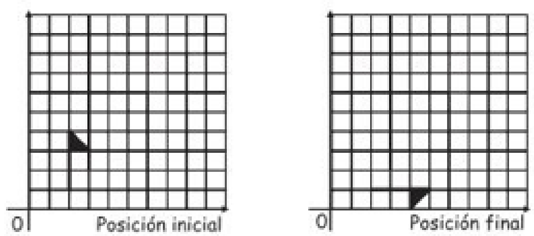
TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS:

1. Se ubica frente al espejo una figura como se muestra a continuación

De las siguientes imágenes, la que representa la figura reflejada en el espejo es:



Responda la pregunta 2 de acuerdo con la siguiente información:



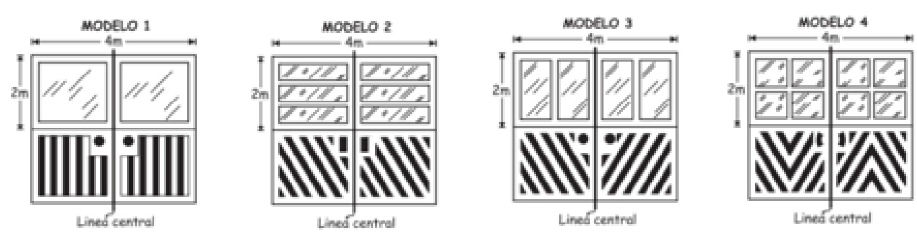
Se ha dibujado en un plano un banderín en dos posiciones diferentes

2. Partiendo de la posición inicial, el banderín se hace rotar 120°, luego 80° en el mismo sentido, y finalmente 20° en sentido contrario. La nueva posición en que se encuentra el banderín, también es posible obtenerla si realizo un giro equivalente a:

a. Un cuarto (1/4) de vuelta	*b.* Media (1/2) vuelta	*c.* Tres cuartos (3/4) de vuelta	*d.* Una (1) vuelta

Responda la pregunta 3 de acuerdo con la siguiente información:

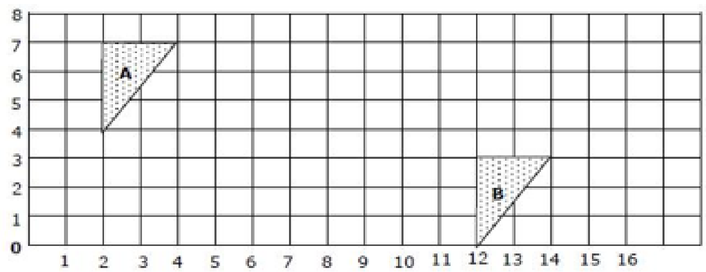
Se presentan 4 modelos de portones metálicos que tienen en la parte superior, ventanas con vidrio, y en la parte inferior diferentes diseños



3. El modelo de portón que es simétrico, con respecto a la línea central, es:

a. Modelo 1	*b.* Modelo 2	*c.* Modelo 3	*d.* Modelo 4

4. En el siguiente plano, ¿cuál es el vector de traslación que se ha aplicado al triángulo A para obtener el triángulo B?

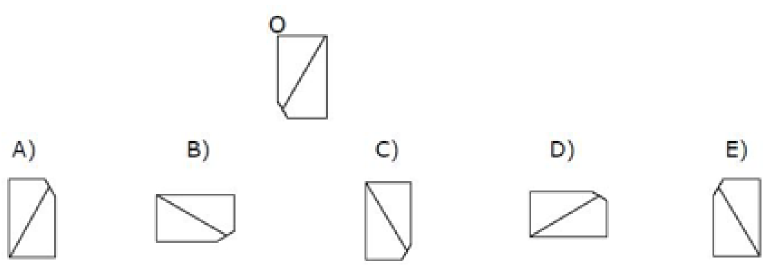


a. (8 , -4)	***b.*** (8 , 4)	***c.*** (4 , -10)	***d.*** (10 , 4)	***e.*** (10 , -4)

5. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un cuadrado?

a. Uno
b. Dos
c. Cuatro
d. Ocho
e. Infinitos

6. Al aplicar una **rotación de centro O** y un ángulo de giro de 180 grados a la siguiente figura, se obtiene:

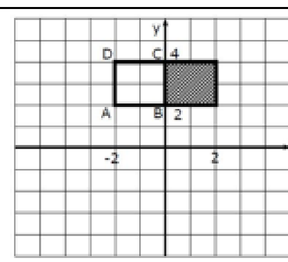


7. El cuadrado ABCD representado en el siguiente plano, ha sido transformado mediante un vector de **traslación**, resultando en el cuadro sombreado. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

*I. El movimiento realizado a la figura en el plano (**vector de traslación**) fue V(2,0)*

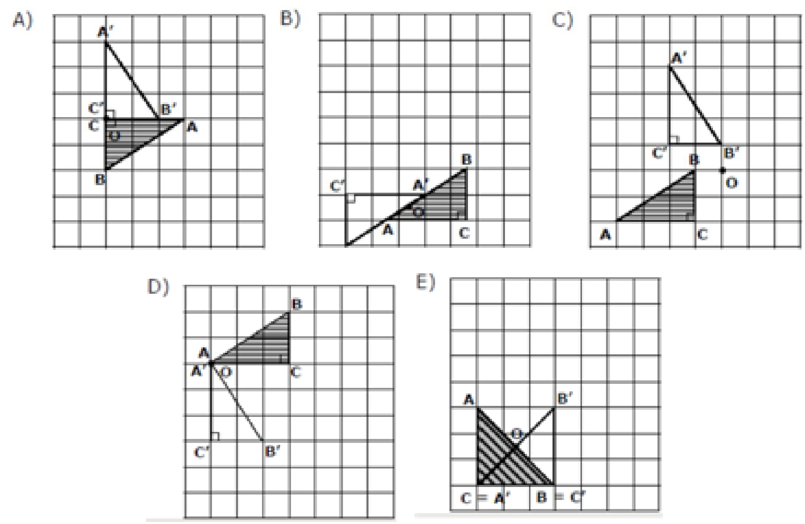
II. Los puntos B y C permanecen invariantes (no cambian de posición)

1. El área del cuadrado permanece constante



a. Solo I	***b.*** Solo I y II	***c.*** Solo I y III	***d.*** Solo II y III	***e.*** I, II, III

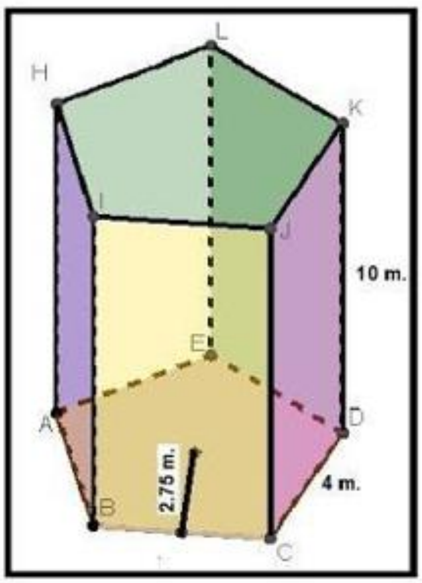
8. Mediante una **rotación de centro O** y ángulo de 90° (en cualquier sentido), el triángulo ABC se transforma en el triángulo A´B´C´. Esto **NO** se cumple en:



CUERPOS VOLUMÉTRICOS

1. Una de las siguientes figuras tiene más de 2 caras triangulares:
 **I. B. C. D.**

Responda las preguntas 2 a la 5 de acuerdo con la información suministrada en la siguiente gráfica:



2. La medida de la apotema de la base es:			
a. 2.75 m.	***b.*** 4 m.	***c.*** 10 m.	***d.*** 40m.

3. El perímetro de la base del prisma es:			
a. 6.75 m	***b.*** 16 m..	***c.*** 20 m.	***d.*** 28 m.

4. La longitud del segmento BJ es:			
a. 4 m	***b.*** 10 m	***c.*** 10.8 m..	***d.*** 116 m.

5. Del área de las caras ABIH y BCJI se puede afirmar que:	
a. Ambas caras tienen igual área.	***b.*** El área de la cara ABIH es mayor que BCJI.
c. El área de la cara ABIH es menor que BCJI.	***d.*** Ninguna de las anteriores.

REFERENCIAS

Áreas de Polígonos (s.f.). Recuperado de http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/1esomatematicas/1quincena9/1quincena9_contenidos_6d.htm

Arquímedes (s.f.). Recuperado de http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Parte1/Cap05/Parte02_05.htm

Bahamon Charry, L. C.; Bonelo Ayala Y. (2016). *Los procesos de construcción, visualización y razonamiento en el desarrollo del pensamiento geométrico: Un experimento de enseñanza* (Tesis de grado). Cali: Universidad del Valle. Recuperado de http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/9745/1/3469-0510675.pdf

Baldor, J. A. (2004). *Geometría plana y del espacio y Trigonometría*. México: Publicaciones Cultural.

Castro Martínez, E.; del Olmo Romero, M. A.; Castro Martínez, E. (2002). *Desarrollo del Pensamiento Matemático Infantil*. Granada: Universidad de Granada.

Departamento Nacional de Planeación (2014). *Plan Nacional de Desarrollo 2014-2018*. Bogotá: Departamento Nacional de Planeación. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/17ci59/articles-268932_PLAN_DE_DESARROLLO_20142018.pdf

Ejemplos de Polígonos Irregulares (s.f.). En *Matemáticas 10*. Recuperado de http://www.matematicas10.net/2015/12/ejemplos-de-poligonos-irregulares.html

El Aprendizaje por Descubrimiento de Bruner (2016, marzo 9). *Universidad Internacional de Valencia*. Recuperado de www.viu.es/el-aprendizaje-por-descubrimiento-de-bruner

El Área de Polígonos Regulares (s.f.). Recuperado de http://www.pps.k12.or.us/district/depts/edmedia/videoteca/curso1/htmlb/SEC_51.HTM

El enfoque constructivista de Piaget (s.f.). Recuperado de http://www.ub.edu/dppsed/fvillar/principal/pdf/proyecto/cap_05_piaget.pdf

Fouz, F.; de Berritzegune, D. (s.f.). *Modelo de Van Hiele para la Didáctica de la Geometría*. Recuperado de http://www.xtec.cat/~rnolla/Sangaku/SangWEB/PDF/PG-04-05-fouz.pdf

García Martínez, J. (s.f.). Experimentando para Aprender. En *Fedit*. Recuperado de http://fedit.com/experimentando-para-aprender/

Gardner, H. (2001). *Estructuras de la mente*. Bogotá: Fondo de Cultura Económica.

Geometría (s.f.). En *Universo Fórmulas*. Recuperado de http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria

Geometría de Séptimo Básico a Primero Medio (s.f.). Recuperado de http://www.educacionpersonal.com/edupersonal/course/view.php?id=559

Geometría del Movimiento (s.f.). Recuperado de www.iesincagarcilaso.com/Depart/Mates/Matema/alhambra/movim/movim.htm

Geometría Octavos (s.f.). Polígonos Regulares [Mensaje de registro web]. Recuperado de http://felviva.blogspot.com.co/2013/11/copia-pitagoras.html

Gómez Chacón, I. M. Afecto y Aprendizaje Matemático: Causas y Consecuencias de la Interacción Emocional. En J. Carrillo (ed.) (2002). *Pasado, Presente y Futuro de las Matemáticas*. Huelva: Editorial Universidad de Huelva (pp. 197-227). Recuperado de http://literoltura.es/sites/default/files/Actividades%20emociones%20matem%C3%A1ticas.pdf

Historia de la Geometría (s.f.a). Recuperado de https://domat.wikispaces.com/file/view/Historia+de+La+Geometria.pdf

Historia de la Geometría (s.f.b). Recuperado de http://cipri.info/resources/HIST-Historia_de_la_Geometria.pdf

Historia de la Geometría (s.f.c). Recuperado de http://www.ugr.es/~fjlopez/_private/Babil_Egip.pdf

http://200.24.17.68:8080/jspui/handle/123456789/1324

Isometría y Transformaciones Isométricas (s.f.). En *Profesor en Línea*. Recuperado de http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Isometria_Transformaciones.html

Marín Grajales, D. F. (2014). *Estrategias Didácticas para Fortalecer el Pensamiento Geométrico en Estudiantes de Grado Sexto* (Tesis de grado). Manizales: Universidad Católica de Manizales. Recuperado de **http://repositorio.ucm.edu.co:8080/jspui/handle/10839/667**

Martha (2010, diciembre 14). Simetría Axial y Central. La Rotación y Traslación [Mensaje de registro web]. Recuperado de http://martha-gutierrez.blogspot.com.co/2010/12/simetria-axial-y-central-rotacion-y.html

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2006, enero-marzo). Las Distintas Pruebas. *Altablero* 38 (página web). Recuperado el 26 de enero de 2017 de http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-107522.html

Ministerio de Educación Nacional (2010). *Escuela Nueva. Manual de Implementación Escuela Nueva. Generalidades y Orientaciones Pedagógicas para Transición y Primer Grado. Tomo I*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-340089_archivopdf_orientaciones_pedagogicas_tomoI.pdf

Morales Medina, M. A. (2016, septiembre 13). Utilizando el Método de Exhaución para "Demostrar" que 2=1. En *Gaussianos*. Recuperado de http://gaussianos.com/utilizando-el-metodo-de-exhaucion-para-demostrar-que-21/

Pabón Jaimes, L. V. (2014). *El Proyecto Ludomática como un Espacio de Construcción de Pensamiento Matemático: Una Mirada sobre su Desarrollo en la Institución Educativa Café Madrid* (Tesis de maestría). Ibagué: Universidad del Tolima. Recuperado de http://repository.ut.edu.co/handle/001/1142

Palacio Villada, K. (2016). *Desarrollo del Pensamiento Geométrico según la Teoría de Van Hiele* (Tesis de grado). Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira. Recuperado de http://repositorio.utp.edu.co/dspace/handle/11059/7179

Polígono (s.f.). En *Wikipedia*. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Pol%C3%ADgono#/media/File:Assorted_polygons.svg

Polígono Regular (s.f.). En *Wikipedia*. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Pol%C3%ADgono_regular

Prismas (s.f.). Recuperado de http://www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/110908_prismas.elp/clasificacin_de_los_prismas.html

Prismas y Pirámides (s.f.). En *Portal Educativo*. Recuperado de http://www.portaleducativo.net/quinto-basico/524/Prismas-y-piramides

Prismas y Pirámides (s.f.). En *Sobre Todo, Matemáticas*. Recuperado de https://matemelga.wordpress.com/2016/02/06/prismas-y-piramides/

Sedó Beneyto, M. (2016). *Explorando la Geometría en el segundo curso del primer ciclo de educación Primaria* (Tesis de grado). Barcelona: Universidad Internacional de la Rioja. Recuperado de http://reunir.unir.net/handle/123456789/3572

Simetría Central (s.f.). Recuperado de http://www.pps.k12.or.us/district/depts/edmedia/videoteca/curso2/htmlb/SEC_54.HTM

ssblandon (2010, agosto 31). Semejanzas y Congruencias de Figuras Geométricas. [Mensaje de registro web]. Recuperado de http://matematicasactividades.blogspot.com.co/

Teoría y Clasificación de Polígonos (s.f.). En *Profesor de Dibujo*. Recuperado de http://www.profesordedibujo.com/index.php/apuntes/2-1-poligonos-i.html

Zapata Álvarez, G. P. (2014). *El desarrollo del pensamiento espacial a través del aprendizaje por descubrimiento* (Tesis de grado). Medellín: Universidad de Antioquia. Recuperado de http://200.24.17.68:8080/jspui/handle/123456789/1324