UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Situaciones problema como estrategia para la enseñanza-aprendizaje de la solución de ecuaciones lineales

Angee Samaris Solano Bernal

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2016

Situaciones problema como estrategia para la enseñanza-aprendizaje de la solución de ecuaciones lineales

Angee Samaris Solano Bernal

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora:

Martha Cecilia Moreno Penagos Título (Msc. Matemáticas)

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2016

A Dios quien fue y es mi fortaleza en cada paso de mi vida, llenándola de tranquilidad y felicidad.

A mi madre, quien sin saber fue mi motor para continuar en los momentos en que sentí desfallecer.

Agradecimientos

En primer lugar, le agradezco a Dios, por llenar mi vida de fortaleza y permitirme alcanzar este logro a pesar de tantos momentos de desánimo, solo Él lleno mi vida de tranquilidad, sabiduría y fuerza.

Agradezco a la vida por darme la oportunidad de aprender y crecer como profesional y como persona, también a mi familia quienes siempre me han apoyado, alegrado y han sido mi soporte y mis ganas de seguir adelante.

De manera especial a mis compañeros y amigos Erika Vargas, Lily Bojacá, Wilson Triana, Eimmy Zafra y Nancy González quienes sin saberlo me animaron y alegraron durante nuestro camino por la maestría, con sus conocimientos, consejos y enseñanzas aportaron en la construcción de este trabajo.

Presento un agradecimiento a los profesores que me acompañaron durante mi proceso académico por la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, de quienes aprendí diferentes estrategias para mejorar mi práctica como docente, de manera especial agradezco a la profesora Martha Cecilia Moreno Penagos por sus aportes y participación en la realización de esta propuesta.

Resumen

En este documento se encuentra planteada la propuesta de una secuencia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la solución de ecuaciones lineales mediante la resolución de situaciones problema, usando los pasos propuestos por Polya, y con algunas estrategias que permiten orientar al estudiante sobre cómo abordar una situación y lograr resolverla. Se presentan los resultados obtenidos en la aplicación de la secuencia didáctica para el curso grado séptimo conformado por 36 estudiantes a quienes inicialmente se les aplicó una prueba diagnóstica con el fin de hacer un sondeo sobre el manejo de los conceptos previos de los estudiantes. La propuesta didáctica está basada en los Estándares Básicos en Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional y se divide en tres sesiones que corresponden a: cambios de representación de expresión verbal a simbólica y viceversa, observación de secuencias numéricas y geométricas para luego establecer la expresión simbólica para el n-ésimo término, y finalmente se propone una serie de problemas que involucran situaciones basadas en las dos primeras sesiones, que conducen al planteamiento de ecuaciones lineales para que el estudiante use las estrategias construidas durante las dos sesiones anteriores.

Palabras clave: ecuación lineal, resolución de situaciones problema, secuencia didáctica.

Abstract

This paper presents a proposal for a didactic teaching-learning sequence to find the linear equation solution for special situations using the Polya's steps plus strategies that guide the students on how to deal with some situations and to find the right solution.

We present the results obtained after applying the didactic sequence with 36 grade students, who at the beginning solved a diagnostic test with the aim to evaluate the student´s previous knowledge. The didactic proposal is based on "Basic Standards in Mathematics" given by the Ministerio de Edcuación Nacional. This work has three sections that correspond to: changing from verbal to symbolic representation, and vice versa, numeric and geometry sequence to show the n-th term using the symbolic expression, and finally, we propose problems series that involve situations based on the two preceding sections in order to guide the student in establishing equations using the strategies built upon and learned during the two previous sessions.

Keywords: lineal equation, resolution of problem situations, didactic sequence.

Contenido

Lista de figuras

Pág.

Lista de tablas

Introducción

En la educación básica y media, un estudiante año tras año se enfrenta a aprender distintos conocimientos y a desarrollar diferentes destrezas y capacidades. En matemáticas específicamente se tienen como referencia tres grandes ejes que se plantean en el documento de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional los cuales son: procesos de aprendizaje, conocimientos básicos y el contexto. Los conocimientos básicos se encuentran distribuidos en cinco pensamientos (numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional). La experiencia y los resultados de la prueba diagnóstica aplicada nos muestran que en algunos grupos o instituciones particularmente en el Liceo Mayor de Soacha y específicamente en el grado séptimo, se presenta una desarticulación con los mismos, pues se presentan los conceptos aislados. Es evidente de acuerdo a los resultados analizados que los estudiantes no relacionan que un mismo concepto les permite modelar situaciones en contextos diferentes, ya sean asociados con otras asignaturas o con las mismas de la matemática o la geometría.

Las observaciones descritas anteriormente y teniendo en cuenta que el eje de procesos de aprendizaje desde los estándares hace referencia a: razonamiento, comunicación, modelación, elaboración, comprobación y ejercitación de procedimientos, y resolución y planteamiento de problemas, hemos sido motivados a plantear una secuencia didáctica basada en la resolución de problemas, dado que esta incluye los demás procesos y se encuentra de manera transversal en los pensamientos que describen los conocimientos básicos. Particularmente trabajamos con la enseñanza y aprendizaje de la solución de ecuaciones lineales y algunas de sus aplicaciones.

La secuencia se planteó y aplico inicialmente para un curso de 36 estudiantes del grado séptimo del Liceo Mayor de Soacha, pero la idea a futuro es implementarla en los otros cursos de este grado del Liceo y esperamos que docentes de otras instituciones la usen, y complementen.

El trabajo está dividido en seis capítulos. En el primero se plantea y analiza la problemática que dio origen al trabajo y se formulan los objetivos del mismo. En el segundo capítulo se hace un breve recorrido histórico por algunas culturas resaltando los aspectos principales en relación con el planteamiento y solución de ecuaciones lineales en donde se evidencia como las situaciones problemas de la época dieron pie al planteamiento de ecuaciones y diferentes métodos de solución. En el tercer capítulo se presentan algunos aspectos disciplinares asociados tales como: los axiomas de cuerpo de los números reales y las propiedades de las igualdades a partir de las cuales se demuestran los teoremas básicos que se utilizan para la solución de ecuaciones lineales. Se presentan adicionalmente los métodos que usualmente se trabajan con los estudiantes: habitual, balanzas y gráfico. El capítulo cuatro presenta aspectos didácticos relacionados con el tema de la propuesta, específicamente la teoría de resolución de problemas abordada por Polya y se presentan apartes de algunas investigaciones en didáctica relacionadas con la problemática de la transición de la aritmética al álgebra y los errores más comunes en la solución de ecuaciones.

En el capítulo cinco se presentan: la prueba inicial(diagnostica) aplicada a los estudiantes con la que se busca identificar los conceptos previos que deben tener para ese grado a partir de lo planteado en los estándares y el análisis de los resultados que constituyen un insumo para la construcción de la secuencia didáctica a implementar. También se presentan las actividades, objetivos y resultados de cada una de las actividades de la secuencia.

La temática seleccionada: las ecuaciones lineales y como estrategia el planteamiento y resolución de problemas. Queremos aclarar porque consideramos que esta estrategia a nuestro parecer, es la más adecuada: primero la experiencia nos muestra que los estudiantes “aprenden” algunos conceptos para las evaluaciones, pero inmediatamente los olvidan, es decir el aprendizaje no es duradero y consideramos que los problemas trabajados en distintos contextos pueden ayudar a relacionar temáticas presentadas en diferentes grados o asignaturas lo que contribuiría a la solución de esta situación. Segundo, los problemas “bien” diseñados o seleccionados desarrollan habilidades importantes, entre otras: el razonamiento, la comunicación (verbal y escrita). Un trabajo adicional fue la revisión de algunos textos usados en grado séptimo, la conclusión relacionada con los problemas planeados es que en la mayoría de los casos, son de tipo rutinario, entendiendo así que lo que buscan es la repetición de un modelo dado o de una serie de pasos establecidos con el agravante que la mayoría no los contextualizan o si lo hacen el contexto difiere mucho de la realidad de nuestros estudiantes por lo que consideramos en la propuesta, problemas que integren varios procesos y para su solución, diversas estrategias.

Capítulo 1: Planteamiento del problema

A continuación, se describe la problemática que origina el interés por realizar este trabajo y se plantean el objetivo general y los objetivos específicos.

1.1. Planteamiento del problema

En el grado octavo de la educación básica secundaria se da formalmente el paso de la aritmética al álgebra, de acuerdo con el documento de estándares básicos de competencias en matemáticas del MEN[1]. Luego, es en grado séptimo en donde inicia el acercamiento a las expresiones algebraicas, generalizaciones y soluciones de ecuaciones y es precisamente en este grado en el que se implementará la estrategia didáctica propuesta en este documento.

Los estudiantes de grado séptimo a los que se les aplicará esta propuesta pertenecen a la institución de sector público, Liceo Mayor de Soacha, el cual es un colegio en concesión que pertenece a Cundinamarca y lo administra la Corporación Minuto de Dios. Este colegio maneja jornada única comprendida desde las 6:30 am hasta las 4:00 pm y el nombre del PEI[2] es "Bienestar para todos".

Evidenciando que las situaciones problema que se proponen a los estudiantes de séptimo grado, para iniciar el trabajo con ecuaciones lineales, son rutinarios (desde los libros de texto, entendiendo esta afirmación como problemas que piden que el estudiante repita los pasos seguidos en los ejemplos presentados y modelando la misma situación o una muy similar a la de los ejemplos), en contextos forzados y poco atractivos en donde no se le da la oportunidad al estudiante de proponer estrategias de solución, comunicar y permitirle construir matemáticas. Cuando los estudiantes intentan resolver este tipo de problemas, presentan dificultades para interpretar la situación, es decir, no entienden el problema y sin saber qué hacer, se corre el riesgo de perder el interés y por ende rechazar cualquier

[1] Ministerio de Educación Nacional
[2] Proyecto Educativo Institucional

actividad que esté relacionada. Lo anterior, tiene incidencia en grados superiores, cuando se ven en la tarea de platear una ecuación para modelar una situación.

La problemática descrita anteriormente, se origina (entre otros), por la poca profundidad con que se trabaja, usualmente en los niveles básicos, la teoría de ecuaciones y aún más el desarrollo de procesos de razonamiento y argumentación de los estudiantes al abordar el planteamiento y resolución de una situación problema, además, de la desarticulación entre los temas que se trabajan año tras año en matemáticas y la falta de interdisciplinariedad entre asignaturas.

Es así, como los estudiantes tienen dificultades en la interpretación de situaciones problema, y en algunas ocasiones es posible que planteen una ecuación que no modela la situación y al resolverla de manera mecánica, no les es posible argumentar por qué es válida o no la solución. En síntesis, no interpretan la solución de dicha situación, sencillamente no entienden que deben encontrar.

De lo anterior, surge la pregunta problema de este documento: ¿qué características debe tener una estrategia didáctica que permita a los estudiantes de grado séptimo dar significado, interpretar, plantear y resolver ecuaciones lineales?

Para responder a la pregunta, se construirá una secuencia de problemas interesantes y retadores con diferente nivel de complejidad, que conduzcan a plantear ecuaciones lineales que en lo posible permitan seleccionar diferentes caminos para su solución (aritmético, geométrico y algebraico), es decir, que sea posible usar diferentes formas de representación.

La resolución de un problema en matemáticas es la oportunidad de llegar a un conocimiento nuevo, usando y relacionando lo que ya se sabe, siendo un reto para el estudiante y por tanto una motivación para él.

La secuencia didáctica que se propone busca que los estudiantes mejoren sus competencias interpretativa, argumentativa y propositiva por lo que está basada en la teoría del planteamiento y resolución de problemas, considerada como un eje de la educación matemática, tal como se establece en uno de los cinco procesos generales de los Lineamientos Curriculares en Matemáticas: *"es un proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares y no un actividad aislada y esporádica".*

En los estándares se realiza la descripción de los cinco pensamientos en matemáticas para cada uno de los grupos de grados (numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional), se evidencia como el planteamiento y resolución de problemas está presente de manera transversal. Particularmente temáticas asociadas al trabajo con ecuaciones se pueden evidenciar en algunos de los logros propuestos como por ejemplo: en el grupo de primero a tercero *“reconozco y genero equivalencias entre expresiones numéricas y describo como cambian los símbolos aunque el valor siga igual”,* en el grupo de cuarto a quinto *“resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas y composición, transformación, comparación e igualación”,* de sexto a séptimo *“formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos”.*

1.2. Objetivos

A continuación, se describen el objetivo general y los específicos de esta propuesta.

1.2.1. General

Construir una secuencia didáctica que permita a los estudiantes de grado séptimo dar significado, interpretar, plantear y resolver ecuaciones lineales en el contexto de problemas no rutinarios.

1.2.2. Específicos

- Seleccionar aspectos disciplinares, epistemológicos y didácticos que fundamentaran la secuencia didáctica.
- Identificar conceptos previos de los estudiantes relativos a las ecuaciones lineales, métodos de solución, planteamiento y resolución de problemas.
- Construir y adecuar problemas y situaciones en diferentes contextos que se resuelven planteando y resolviendo ecuaciones lineales.
- Estructurar la secuencia.
- Evaluar la secuencia con estudiantes y docente de grado séptimo.

A continuación, se iniciará el desarrollo de cada uno de los objetivos específicos, empezando con un recorrido histórico en relación a los métodos de solución de ecuaciones lineales.

Capítulo 2: Breve Historia de las Ecuaciones Lineales

El Álgebra es una de las ramas de la matemática que, entendida de forma muy elemental, se resume en la aplicación de las reglas de la aritmética y propiedades de las operaciones usando símbolos (o letras) que, en la mayoría de los casos, representan variables o incógnitas, en la que uno de los objetivos fundamentales es la solución de ecuaciones. La palabra álgebra de origen árabe apareció por primera vez en el título de un tratado del matemático Al-Khwarizmi llamado ***Al-jebrwal-mugabalah*** en el que el autor utiliza las palabras Al-jebr y mugabalah para designar dos herramientas básicas en la solución de ecuaciones: Jabr para la transposición de términos y Mugabalah para reducción o cancelación de los términos semejantes en lados opuestos de la ecuación.

Algunas de las traducciones del título del libro son "*La ciencia de la restauración y la oposición*" o *"La Ciencia de la transposición y la cancelación*" o "*El Libro de la restauración y del equilibrio*"; todos estos nos recuerdan el proceso que utilizamos para resolver ecuaciones lineales, que describimos de manera simple como: "despejar la incógnita", para lo que utilizamos la transposición de términos y simplificación o reducción de términos semejantes.

El trabajo de Al-Khwarizmi debió estar influenciado por los aportes de muchos matemáticos que le antecedieron, y ha sido complementado y enriquecido por los que le sucedieron.

A continuación, se describe un recorrido por las principales culturas destacando el aporte de cada una de ellas o algunos de sus representantes en el álgebra, y particularmente en la solución de ecuaciones.

Para facilitar el recorrido histórico describimos a continuación la subdivisión cronológica que se considera:

Babilonios	Egipcia	Matemáticas Griegas	China	India	Islam
1800 y 1600 a.C. Siglos VI y VII a.C.	1800 y 1650 a.C.	624 y 285 a.C Entre los siglos VII y V a.C. 100 y 300 d.C	A partir del siglo III a.C. 4000-2000 a.C.	476 d.C. 500- 1200 d.C.	Principios del siglo IX 973-1170

Tabla 1: línea de tiempo

2.1.1. Babilonios

Los aportes de los Babilonios se han rescatado de textos en escritura cuneiforme contenidos en tablillas de arcilla en los que se evidencia que su aritmética se basaba en un sistema posicional de base 60 y que al parecer no usaban el cero, como también se rescata el hecho de que planteaban y resolvían los problemas en forma retórica. Gran parte de las tablillas contienen tablas de multiplicación, recíprocos, cuadrados y raíces cuadradas y cúbicas lo que de alguna manera nos permite inducir que el concepto de relación y función, aunque en un sentido muy simple lo tenían. Algunas de las tablillas encontradas contienen problemas que piden determinar una cantidad desconocida (ecuaciones) pero describen soluciones de problemas particulares, es decir no dan un método general o algoritmo para problemas similares. Muchos de estos problemas los formulaban en términos de situaciones como la repartición de herencias, peso de un objeto, cuentas diarias, longitud del lado de un triángulo, etc.

Un ejemplo del trabajo se puede ilustrar con una traducción de una tabilla Babilónica, conservada en el Museo Británico que dice:

"*4 es la largura y 5 la diagonal. ¿Qué es la anchura? Su tamaño no es conocido. 4 veces 4 es 16. 5 veces 5 es 25. Si se toma 16 de 25 queda 9, ¿cuántas veces tomaré en orden a 9? 3 veces 3 es 9. 3 es la anchura*", esta solución evidencia el manejo del lenguaje retorico y el conocimiento del teorema de Pitágoras pues en nuestra notación corresponde a:

$$l^2 = 5^2 - 4^2 = 5 * 5 - 4 * 4 = 25 - 16 = 9$$

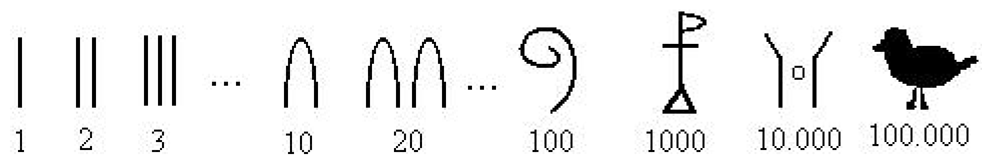
$$l = \sqrt{9} = 3$$

2.1.2. Egipto

Los conocimientos que se tienen sobre la matemática egipcia se basan en dos documentos: El papiro de Moscú, y el papiro de Rhind. El primero se encuentra en un museo en la ciudad de Moscú y el segundo en el Museo Británico de Londres; son de gran importancia puesto que en ellos se pueden encontrar solución a problemas de la vida cotidiana, que se presentan de manera retórica puesto que se carecía de una notación matemática. Los métodos de solución corresponden a procesos aritméticos sin alguna demostración o justificación del por qué funcionaban.

Se evidencia en los documentos que los egipcios conocieron los números naturales, su aproximación al valor de $\pi = 3{,}16$ fue la más acertada en la antigüedad. Resolvían ecuaciones de segundo grado y raíces cuadradas para aplicarlas a los problemas de áreas.

El sistema de numeración egipcio, era un sistema decimal (de base 10), sus números se escribían usando los símbolos:



En los papiros se encuentran soluciones de problemas con un valor desconocido, es decir, ecuaciones lineales. Los problemas se encuentran formulados y resueltos de manera retórica, mediante procesos aritméticos sin ninguna justificación.
En relación a los aportes desde el álgebra, para la solución de problemas se usa el método de “regula falsi”, es decir, “falsa posición”, se refiere a una estrategia que consistía en ensayo y error, usada por los antiguos *egipcios* para resolver ecuaciones. De acuerdo a los papiros de Rhind (1650 a. de C.) y el de Moscú (1850 a. de C.) los egipcios dejaron escritos varios problemas matemáticos que respondían a situaciones cotidianas. Las ecuaciones más usadas fueron las de la forma:

$$x + ax = b$$

$$x + ax + b = 0$$

Donde a, b y c eran números conocidos y x el número a encontrar, que los egipcios denominaban *aha* o *montón*.

A continuación, se muestra uno de los problemas propuestos en el papiro de Rhind

Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24.

En la notación actual corresponde a la ecuación lineal:

$$x + \frac{1}{7}x = 24$$

El método de la falsa posición para solucionar el problema consiste en tomar un valor concreto para la incógnita, evaluar si con este si se obtiene la igualdad, en caso afirmativo este número es la solución, pero si no es así mediante cálculos usando el resultado obtenido al sustituir se obtiene la solución exacta, veamos la solución:

1. Suponiendo que $x = 7$, al sustituir se tiene $7 + \frac{1}{7} \cdot 7 = 8$ .Se tiene que 7 no es la solución.
2. Pero como $8 \cdot 3 = 24$, entonces la solución será: $3 \cdot 7 = 21$ ya que $3\left(7 + \frac{1}{7} \cdot 7\right) = 24$

Ejemplo: en nuestra notación actual para resolver la siguiente ecuación el razonamiento sería:

$$5x + 3x = 40$$

Suponemos que la solución es $x = 4$, si sustituimos el resultado es 32, luego comparando los resultados tenemos que 32 es $4/5$ de 40. Por lo anterior se tiene que el valor elegido $x = 4$ es $4/5$ de la solución. Así que la solución debe ser 5 puesto que 4 es $4/5$ de5.

2.1.3. Matemáticas Griegas

La Geometría fue la rama de la Matemática más desarrollada en la antigua Grecia, sin embargo, los griegos tomaron elementos de las matemáticas de los babilonios y de los egipcios. La innovación más importante fue la invención de las matemáticas abstractas basadas en una estructura lógica de definiciones, axiomas y demostraciones.

Los matemáticos griegos no tuvieron problemas con las ecuaciones lineales y, exceptuando a Diophante (250 d. de C.), no se dedicaron mucho al álgebra, pues su preocupación era mayor por la geometría.

En el siglo III el matemático Diofanto de Alejandría publicó su *Aritmética* en la cual, por primera vez en la historia de las matemáticas griegas, se trataron de una forma rigurosa las ecuaciones de primer grado. Introdujo un simbolismo algebraico muy elemental al designar la incógnita con un signo: la primera silaba de la palabra arithmos, que significa número. Los problemas de álgebra que propuso prepararon el terreno de lo que siglos más tarde sería "la teoría de las ecuaciones". A pesar de lo rudimentario de su notación simbólica y de lo poco elegantes que eran los métodos que usaba, se le considera uno de los precursores del álgebra moderna.

Como una curiosidad asociada con nuestro tema en el epitafio de su tumba aparece:

¡Transeúnte!, en esta tumba yacen los restos de Diofanto. De la lectura de este texto podrás saber un dato de su vida. Su infancia ocupó la sexta parte de su vida, después transcurrió una doceava parte hasta que su mejilla se cubrió de vello. Pasó aún una

séptima parte de su existencia hasta contraer matrimonio. Cinco años más tarde tuvo lugar el nacimiento de su primogénito, que murió al alcanzar la mitad de la edad que su padre llegó a vivir. Tras cuatro años de profunda pena por la muerte de su hijo, Diofanto murió. De todo esto, dime cuántos años vivió Diofanto.

Lo anterior, en nuestra notación actual corresponde a una ecuación lineal, la cual se representa a continuación junto con su solución:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

$$\frac{2x+x+6x}{12}+\frac{x}{7}+9=x$$

$$\frac{9x}{12}+\frac{x}{7}+9=x$$

$$\frac{3x}{4}+\frac{x}{7}+9=x$$

$$\frac{21x+4x+252}{28}=x$$

$$25x+252=28x$$

$$252=28x-25x$$

$$252=3x$$

$$\frac{252}{3}=x$$

$$84=x$$

Luego la edad de Diofanto al morir era de 84 años.

2.1.4. China

De la época de la primera dinastía Han (206 a. C. hasta 24 d.C.) procede el tratado Matemáticas en nueve Libros. Posteriormente otros matemáticos como Liu Hui (siglo III), Sun-zi (siglos II-IV), Liu Zhuo (siglo VI) y otros hicieron aportaciones a este tratado. El texto trata problemas económicos y administrativos como medición de campos, construcción de canales, cálculo de impuestos. Trabajan las ecuaciones lineales indeterminadas y un procedimiento algorítmico para resolver sistemas lineales parecido al que hoy conocemos

como método de Gauss, que les llevó al reconocimiento de los números negativos. Estos números constituyen uno de los principales descubrimientos de la matemática china. La escuela algebraica china alcanza su apogeo en el siglo XIII con los trabajos de Quin Jiu-shao, Li Ye, Yang Hui y Zhu Shi-jie que idearon un procedimiento para la resolución de ecuaciones de grado superior, llamado método del elemento celeste o tian-yuanshu. Este método actualmente se conoce como método de Horner, matemático que vivió medio milenio más tarde. El desarrollo del álgebra en esta época es grandioso: sistemas de ecuaciones no lineales, sumas de sucesiones finitas, utilización del cero, triángulo de Tartaglia (o Pascal) y coeficientes binomiales, así como métodos de interpolación que desarrollaron en unión de una potente astronomía.
Se usaban dos sistemas de numeración, uno de tipo multiplicativo usando la base diez y el otro era un sistema posicional.

Usaron el ábaco para agilizar los cálculos y un sistema de barras pintadas de rojo y negro para diferenciar números positivos de negativos, aunque no aceptaron el número negativo como posible solución de una ecuación.

2.1.5. India

Usaban el teorema de Pitágoras en problemas de construcción puesto que construían un cuadrado igual a la suma de otros dos, e hicieron aproximaciones a la cuadratura del círculo. El uso del teorema se hacía por necesidad, pero la comprensión de número irracional era nula.

Aparece literatura de sistemas astronómicos, como lo es *sistema del sol,* aproximadamente escrito en el año 400 d. C.; la trigonometría de los *Siddhantas* se caracteriza por la contribución de la función seno considerada como una razón.

En la obra Aryabhata se muestra que los astrónomos indios no tenían símbolo alguno para el cero. Los indios tenían nombre para los números por ejemplo 212 se leía como “ojos-luna-alas”, el cero por “agujero”. Aun así, llegaron a resultados con suficiente precisión en materia de astronomía.

Se resaltan matemáticos como Brahmagupta quien aporto a la solución general de la ecuación diofántica lineal $ax + by = c$ en la que a, b y c son enteros, así como también la generalización de la fórmula de Heron. Fue el primero en hallar la solución general de la ecuación diofantica $ax + by = c$, sabiendo que el máximo común divisor de a y b divide también a c. Sabía que si eran primos entre si, las soluciones serian $x = r - mb$; $y = s - ma$ donde m es un entero cualquiera.

Igual que los *egipcios* también usaron el método de la falsa posición para resolver problemas que corresponden a ecuaciones, en este caso por la *"doble falsa posición",* método que se describe a continuación:

2.1.5.1. Método de la doble falsa posición

A partir de la ecuación $ax + b = 0$ y suponiendo dos valores para x, se tiene que:

$$\begin{array}{lcl} x = m & \text{Entonces} & am + b = p \\ x = n & & an + b = q \end{array}$$

Restando

$$am + b - (an + b) = p - q$$

$$am + b - an - b = p - q$$

$$\boldsymbol{a(m - n) = p - q}$$

Luego

$$\begin{array}{c} n(am + b) = n \cdot p \\ m(an + b) = m \cdot q \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} amn + bn = pn \\ amn + bm = qm \end{array}$$

Restando nuevamente

$$amn + bn - (amn + bm) = pn - qm$$

$$amn + bn - amn - bm = pn - qm$$

$$\boldsymbol{b(n - m) = pn - qm}$$

Dividiendo los resultados obtenidos se tiene

$$\frac{a}{b} = \frac{p-q}{pn-qm} \text{ , o, } \frac{b}{a} = \frac{pn-qm}{p-q}$$

Ejemplo:

Sea la ecuación $3x - 15 = 0$, tomamos los posibles valores para x: $x = 6$ y $x = 7$. De lo anterior se tiene que

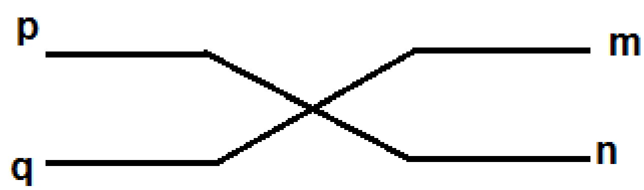
$$3 \cdot 7 - 15 = p$$

$$3 \cdot 6 - 15 = q$$

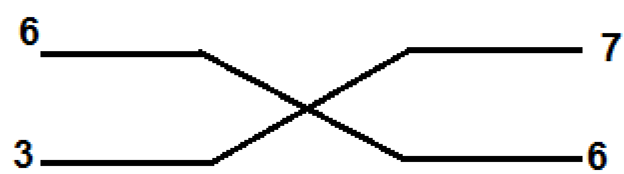
Sustituyendo

$$x = \frac{6 \cdot 6 - 3 \cdot 7}{6 - 3} = \frac{15}{3} = 5$$

Luego se propuso el *método de las escalas* que hace referencia al diagrama que lo representa. Surge del método anterior y permite encontrar la solución de una manera más rápida.



En el ejemplo anterior los valores correspondientes serian:



Un avance se da al considerar los números negativos al igual que el cero. En las ecuaciones las incógnitas eran expresadas como abreviaturas “ya” que venia del significado” tanto como”.

2.1.6. Islam

En esta civilización se realizan diversos aportes al álgebra elaborados por varios matemáticos con el uso de la geometría, a partir de varios de los descubrimientos griegos e indios. En las aritméticas de los autores árabes se encuentran procedimientos como la “regla del nueve”, la “regla de la falsa posición”, “regla de la doble falsa posición” y la “regla de tres”.

Hacían uso del álgebra retorica en donde se usaban palabras para describir procesos como: pasar un miembro de un lado a otro en una ecuación, para la anulación de términos semejantes, entre otros.

Un matemático celebre de la época fue Al-Khwarizmi quien en su álgebra resuelve seis tipos de ecuaciones entre ellas $bx = c$. En el capítulo III de su libro trabaja las ecuaciones que engloban igualdades de raíces y números, el caso $bx = c$, en cada capítulo se trabajan tres partes cuando el coeficiente del termino variable es mayor, menor o igual a uno; mediante el álgebra retorica se desarrollan los seis capítulos en donde se aceptan dos raíces, demuestra geométricamente la veracidad de los problemas.

De forma retorica se trabajan ecuaciones de segundo grado desde lo aritmético y geométrico, se solucionan ecuaciones de tercer grado sin admitir soluciones negativas; se hace uso de las secciones cónicas para la solución de ecuaciones de tercer grado; un acercamiento al uso de decimales para problemas que requerían soluciones muy precisas, también se conocían y usaban las seis razones trigonométricas y sus relaciones.

2.1.7. Teoría de Ecuaciones Moderna

François Viète (1540-1603) fue un matemático francés, se le considera uno de los principales precursores del álgebra. Fue el primero en representar los parámetros de una ecuación mediante letras es decir es el precursor del álgebra simbólica, al ser el primero que introduce el uso de literales para representar las incógnitas y los parámetros de las ecuaciones en el álgebra.
Famoso por sus fórmulas o relaciones (ahora llamadas fórmulas de Vieta) las cuales establecen una relación entre los coeficientes de un polinomio y sus raíces.

Evariste Galois (1811-1832), es considerado como uno de los fundadores de la teoría de grupos que en la actualidad es usada no solo para resolver una ecuación sino también permite estructurar la aritmética, física de partículas, entre otras. Su estudio principal tuvo que ver con las condiciones necesarias que debía tener una ecuación de una incógnita y de grado n para resolverse usando radicales.

Es así como se menciona en el artículo de la revista *Suma* (Évariste Galois: un genio en la base del álgebra moderna, 2011), *“el intento de resolver un determinado problema lleva a idear una teoría que ensancha el horizonte de la matemática, abre nuevos campos y contribuye a dar solución a otros nuevos problemas. Esto es precisamente lo que ocurrió con los estudios de Galois sobre la teoría ecuaciones.”*

Luego, concentra su atención en el estudio sobre los criterios generales para determinar si una ecuación polinómica de grado n tiene solución o no por radicales. Para la época ya había algunos avances, entonces Galois centró su atención en determinar qué ecuaciones de grado superior a cuatro podían resolverse por radicales y cuáles no. Logrando así introducir tres nociones clave, para demostrar que no existe un método general para resolver las ecuaciones de grado superior al cuarto, por medio de radicales.

Los aspectos históricos anteriormente mencionados permiten evidenciar las situaciones problema como un punto de partida en la construcción de las matemáticas. Enseguida se describirán los aspectos disciplinares relevantes en relación a la solución y planteamiento de ecuaciones lineales.

Capítulo 3: Marco Disciplinar

En este apartado se tratarán los conceptos y nociones básicas en relación con las ecuaciones lineales, empezando por los números reales como cuerpo ordenado, luego las nociones de igualdad y ecuación y finalmente algunos métodos de solución.

3.1. Números Reales

De manera informal presentamos el conjunto de los números reales como la unión del conjunto de los números racionales y los números irracionales: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Los números reales se pueden expresar en forma decimal mediante un número entero, un decimal finito, un decimal periódico o un decimal con infinitas cifras no periódicas.

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ esta dotado de una estructura algebraica que incluye dos operaciones: una adición y una multiplicación.

Los números reales $\mathbb{R}$ satisfacen una serie de axiomas denominados: axiomas de cuerpo de los que se pueden deducir todas las leyes usuales del álgebra elemental, a continuación, se enuncian los axiomas y algunas de las leyes formuladas junto con algunas de sus demostraciones:

3.1.1. Axiomas de cuerpo

Las operaciones internas definidas en el conjunto de los números reales:

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to x + y$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to x \cdot y$$

3.1.1.1. Respecto a la suma:

S-1 Conmutativa: $\boldsymbol{a + b = b + a}, \forall \boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}$

S-2 Asociativa: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}), \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$

S-3 Módulo : $\exists\ \mathbf{0} \in \mathbb{R}$, tal que $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$, $\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$

S-4 Opuesto (opuesto aditivo): Para todo $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ existe $\exists -\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$

3.1.1.2. Respecto al producto:

P-1 Conmutativa: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}=\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$

P-2 Asociativa: $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}=\boldsymbol{a} \cdot(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}), \forall\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$

P-3 Neutro: $\exists\ \mathbf{1} \in \mathbb{R}$, tal que $\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{1}=\mathbf{1} . \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$, $\forall\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$

P-4 Existencia de inverso: dado $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, con $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ existe $\exists\ \boldsymbol{a}^{-\mathbf{1}} \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}^{-\mathbf{1}}=\boldsymbol{a}^{-\mathbf{1}} \cdot \boldsymbol{a}=\mathbf{1}$

SP Propiedad distributiva: $\boldsymbol{a} \cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}, \forall\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$

3.1.2. Noción de igualdad

El conjunto de los números Reales es ordenado por lo que satisface la propiedad de la tricotomía, es decir dados dos números reales *a* y *b* se satisface una y solo una de las condiciones: *a=b* o *a<b* o *a>b*.

Nos interesa en particular la relación de igualdad la cual es una relación de equivalencia lo que significa que satisface las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva:

- Reflexiva: $a=a$
- Simétrica: Si $a=\ b$, entonces $b=a$
- Transitiva: Si $a=b$ y $b=c$, entonces $a=c$

Algunas propiedades que satisfacen las igualdades:

Propiedades de la igualdad(monotonía): **para todo** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$	
I-1 Si $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b} \rightarrow \boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$	Sumando la misma cantidad en ambos miembros de la igualdad, se conserva la igualdad.

I-2 Si $\boldsymbol{a = b \rightarrow a - c = b - c}$	Al restar un mismo número en ambos miembros de una igualdad, se conserva la igualdad.
I-3 Si $\boldsymbol{a = b \rightarrow c \cdot a = c \cdot b}$	Multiplicando por el mismo número real ambos miembros de la igualdad, se conserva la igualdad.
I-4 Si $\boldsymbol{a = b \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c}}$, con $\boldsymbol{c \neq 0}$	Si se divide ambos miembros de la igualdad por un número real (distinto de cero), se conserva la igualdad

Tabla 2: propiedades de la igualdad

3.1.3. Algunas Leyes o teoremas básicos del álgebra

En los teoremas que se enuncian, las letras a, b, c, d representan cualquier número real. La demostración está basada en los axiomas de cuerpo y las propiedades de las igualdades:

Teorema 1. *Simplificación para la suma: Si $a + b = a + c$, entonces $b = c$*

Demostración: Por S-4 existe $-a$ en $\mathbb{R}$ tal que $-a + a = a + (-a) = 0$

Por I-1 $-\boldsymbol{a} + a + b = -\boldsymbol{a} + a + c$

Por S-2 $(-\boldsymbol{a} + a) + b = (-\boldsymbol{a} + a) + c$

Por S-4 $0 + b = 0 + c$

Por S-3 $b = c$

Teorema 2. *Simplificación para la multiplicación: Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$*

Demostración: Por P-4 existe a^{-1} en $\mathbb{R}$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

Por I-3 $a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot a \cdot c$

Por P-2 $(a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c$

Por P-4 $1 \cdot b = 1 \cdot c$

Por P-3 $b = c$

3.1.4. Noción de ecuación

Una ecuación es una igualdad algebraica en la que aparecen números y letras (incógnitas) con valor desconocido que se relacionan mediante operaciones matemáticas y se verifican para algunos valores determinados de las incógnitas, es decir una ecuación es una igualdad condicionada, esta aclaración es importante pues se debe distinguir ecuación de *identidad* (igualdad en la que las letras o variables pueden tomar cualquier valor, es decir es una igualdad no condicionada), existen identidades numéricas y algebraicas como:

- Numérica $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- Algebraica $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Elementos de una ecuación.

- Miembros: son las expresiones que aparecen a cada lado de la igualdad. El de la izquierda se llama primer miembro, el de la derecha se llama segundo miembro y los términos son los sumandos que forman los miembros.
- Incógnitas: son letras que aparecen en la ecuación que representan las cantidades que se quieren encontrar.
- Grado de una ecuación: es el mayor de los grados de los exponentes al que se eleva la incógnita.
- La solución de una ecuación es el número que al sustituirlo por la incógnita hace que sean iguales los dos miembros de la ecuación.

3.1.4.1. Ecuaciones Equivalentes:

Son aquellas que tienen el mismo conjunto solución, se pueden generar a partir de la aplicación de los axiomas de cuerpo y las propiedades de las igualdades, por ejemplo:

$$8x + 1 = 17 \qquad y \qquad 8x = 16$$

3.1.4.2. Clases de ecuaciones

Existen diferentes tipos de ecuaciones que se podrían clasificar dependiendo por ejemplo del número de incógnitas que contengan, o del tipo de expresión o función involucradas, son comunes las ecuaciones racionales, logarítmicas, exponenciales, trigonométricas y las polinómicas que incluyen el caso de interés del trabajo por lo que nos concentramos en ellas:

- Polinómicas: son aquellas cuyo primer término es un polinomio y el segundo término es cero. Así, una ecuación polinómica de grado n es de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Donde $a_n\ a_{n-1}, \ldots, a_0, con\ a_n \neq 0$. son números reales denominados coeficientes de la ecuación.

Las ecuaciones de primer grado son de la forma $ax + b = 0$ donde a y b representan números reales con $a \neq 0$ y x es la incógnita por determinar.

3.1.4.3. Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

con coeficientes complejos tiene por lo menos un cero o raíz.

Es decir, la ecuación polinómica $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ tiene por lo menos una solución.

Dado que cualquier número real es también un número complejo, el teorema se aplica a polinomios con coeficientes reales.

Sabiendo que todo cero de un polinomio corresponde a un factor lineal de acuerdo al teorema del factor, el teorema fundamental del álgebra asegura que se puede factorizar cualquier polinomio $P(x)$ de grado n como:

$$P(x) = (x - c_1) \cdot Q_1(x)$$

Donde $Q_1(x)$es de grado $n - 1$ y $c_1$es un cero de $P(x)$. Al aplicar el teorema fundamental del álgebra al cociente $Q_1(x)$se obtiene la factorización:

$$P(x) = (x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot Q_2(x)$$

Donde $Q_2(x)$ es de grado $n - 2$ y c_2 es un cero de $Q_1(x)$. Continuando con este procedimiento se llega a:

$$P(x) = a_n (x - c_1) \cdot (x - c_2). (x - c_3) \ldots \ldots . (x - c_n)$$

3.1.4.4. Gráfica de una función lineal

Una función $f(x)$ lineal es de la forma:

$$f(x) = mx + b$$

, donde $m \neq 0$

su dominio y rango es el conjunto de los números reales: $\mathbb{R}$

La representación gráfica es una línea recta en el plano cartesiano: donde b representa el punto de corte de la recta con el eje y y m representa la pendiente la cual se refiere a la inclinación de la recta respecto al eje x. Para calcular la pendiente de una línea recta se procede así:

Sean los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ la pendiente de una recta está definida por la siguiente expresión:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

A partir de la gráfica de la recta el estudiante puede identificar si la pendiente es positiva o negativa como se muestra a continuación:

Pendiente positiva

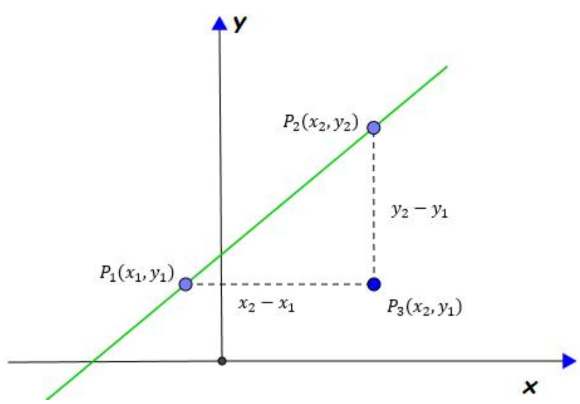


Ilustración 1: pendiente positiva

Pendiente negativa

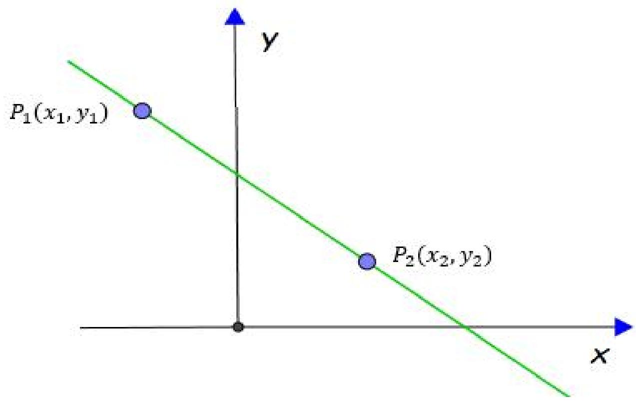


Ilustración 2: pendiente negativa

Ejemplo: sea la ecuación de la recta $y = x - 2$

La representación gráfica se puede encontrar por medio de dos procedimientos. En primer lugar, evaluar la ecuación en dos valores numéricos y así determinar dos puntos y trazar la recta.

Cuando $x = 0$ y $x = 3$ se tienen los puntos $A(0, -2)$ y $B(3,1)$, ubicando los puntos en el plano cartesiano se tiene:

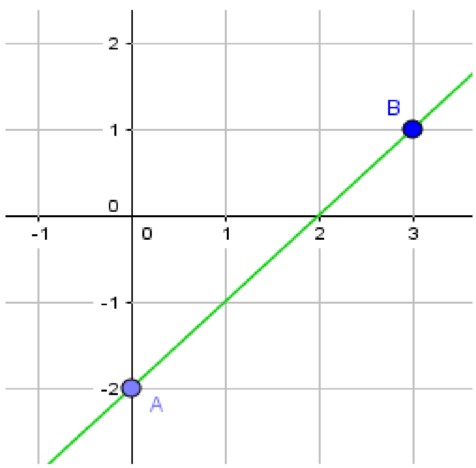


Ilustración 3: solución gráfica

En segundo lugar, a partir de la información que da la ecuación de la recta se tiene que -2 es el punto de corte con el eje y y que la pendiente es 1 , es decir, los desplazamientos en el eje y (hacia arriba positivo) sobre los desplazamientos en el eje x (hacia la derecha positivo) se tiene la siguiente gráfica:

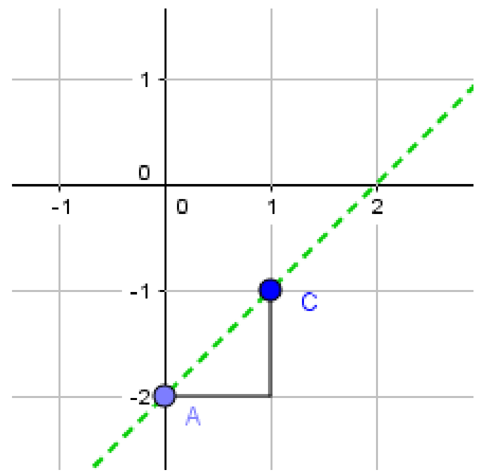


Ilustración 4: solución de la ecuación

Otros casos:

- Se tiene la función lineal de la forma $y = mx$ siendo $m \neq 0$. Gráficamente corresponde a una línea recta que pasa por el punto $(0,0)$ es decir, el origen y pendiente m.
- Por otro lado, las rectas constantes simbolizadas como $y = k$ donde $k \in \mathbb{R}$. La cual tiene una representación gráfica que corresponde a la recta paralela al eje x y que pasa por el punto $(0, k)$.

Ahora bien, el uso de la representación gráfica de una función lineal permite resolver algunas ecuaciones lineales como se evidenció en el ejemplo anterior. A continuación, se presenta otro ejemplo que permite usar la gráfica en el plano cartesiano para interpretar y encontrar soluciones de algunas ecuaciones.

3.1.5. Métodos de solución

A continuación, se describen algunos métodos para la solución de ecuaciones lineales. En primer lugar, trabajando de la forma habitual (aplicando las propiedades de los números reales), luego un método de solución mediante diagramas de balanzas y finalmente el método gráfico de Lill.

3.1.5.1. Método habitual

Denominamos habitual al proceso de “despejar la incógnita” que informalmente describimos así: si un número está sumando a la incógnita lo enviamos al otro miembro a restar y si un número multiplica la incógnita lo enviamos al otro miembro a dividir; el cual es un proceso complejo basado en la utilización de los axiomas de cuerpo de los números reales y las propiedades de las igualdades, a continuación, lo presentamos formalmente:

$$ax + b = 0$$

Por S-4 existe el inverso aditivo de b, y usando I-1

$$ax + b + (-b) = 0 + (-b)$$

Aplicando S-2

$$ax + (b + (-b)) = 0 + (-b)$$

Por S-4

$$ax + 0 = 0 + (-b)$$

Por S-3

$$ax = (-b)$$

Como $a \neq 0$ por P-4 existe el inverso multiplicativo de a

Usando I-3

$$a^{-1}. ax = a^{-1}. (-b)$$

Por P-2

$$(a^{-1}. a)x = a^{-1}. (-b)$$

Por P-4

$$1. x = a^{-1}. (-b)$$

Por P-3

$$x = a^{-1}. (-b) = \frac{-b}{a}$$

Es importante darle a conocer al estudiante la justificación del proceso resaltando así la importancia de las propiedades de los números reales.

El proceso descrito corresponde al tipo más simple de ecuación lineal, sin embargo, es común encontrar ecuaciones lineales que contienen signos de agrupación y operaciones adicionales por lo que debemos tener en cuenta que inicialmente se deben resolver las operaciones que estén indicadas en ambos miembros de la ecuación (paréntesis y términos semejantes).

Ejemplo:

$$9x + (5 + 2) = (5x - 3x) + 14$$

$$9x + 7 = 2x + 14$$

- Sumar opuestos aditivos correspondientes para dejar a un solo lado los términos independientes

$$9x - 2x = 14 - 7$$

$$7x = 7$$

- Multiplicar a ambos lados el inverso multiplicativo cuando corresponda

$$7x \cdot \frac{1}{7} = 7 \cdot \frac{1}{7}$$

$$x = 1$$

Ejemplo: sumando el opuesto aditivo a ambos lados de la igualdad

$$x + 3 = 5$$

$$x + 3 - 3 = 5 - 3$$

$$x = 2$$

$$3x + 5 = 2x + 10$$

$$3x \boldsymbol{- 2x} + 5 \boldsymbol{- 5} = 2x \boldsymbol{- 2x} + 10 \boldsymbol{- 5}$$

$$x = 5$$

Ejemplo: multiplicando el inverso a ambos lados de la igualdad

$$10x + 6 = 5x + 26$$

$$10x \boldsymbol{- 5x} + 6 \boldsymbol{- 6} = 5x \boldsymbol{- 5x} + 26 \boldsymbol{- 6}$$

$$5x = 20$$

$$5x \cdot \boldsymbol{\frac{1}{5}} = 20 \cdot \boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

$$x = 4$$

El proceso descrito y los ejemplos nos muestran que en general las ecuaciones lineales tienen una única solución, sin embargo, podemos encontrar unos casos especiales de ecuaciones lineales que no tienen solución y se denominan *contradicciones* y otras que tienen infinitas soluciones que denominamos *identidades*, por ejemplo:

Contradicción: $3(x + 1) = 3x - 2$

Identidad: $3(x + 1) = 3x + 3$

3.1.5.2. Método mediante el uso de balanzas

Para presentar a los niños el trabajo de solución de ecuaciones lineales es conveniente iniciar con procedimientos sencillos, entendibles y en lo posible gráficos y manipulables. Uno que reúne estos requisitos es el método de la balanza que usa una representación visual de la ecuación, la idea es simbolizar la incógnita x por ejemplo con un cuadro y los números por ejemplo con círculos.

Retirando figuras estratégicamente a lado y lado de la balanza manteniendo siempre el equilibrio es posible determinar el valor de x. Como se muestra a continuación.

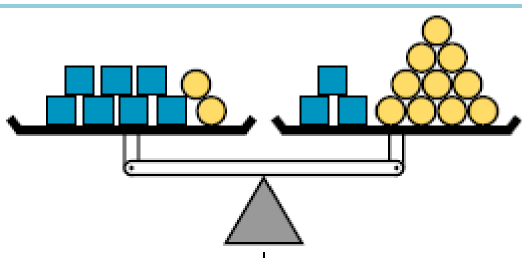
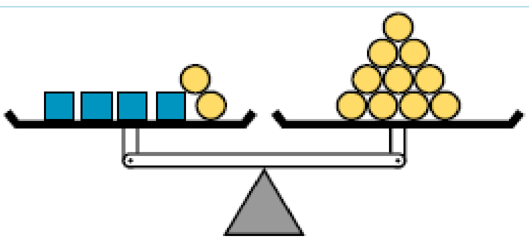
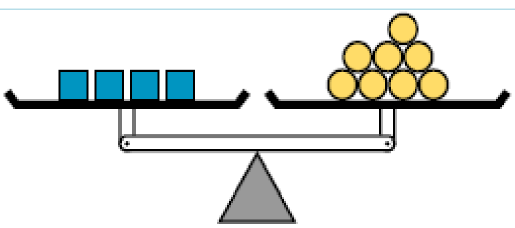
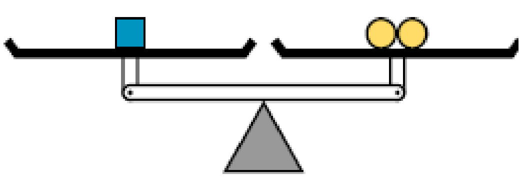
Representación gráfica	Expresión algebraica
	$7x+2=3x+10$
	Retiramos tres cuadros a cada lado de la balanza. $7x+2-3x=3x+10-3x$ $4x+2=10$
	Retiramos dos círculos a cada lado de la balanza. $4x+2-2=10-2$ $4x=8$
	Visualmente se puede concluir que: $x=2$

Tabla 3: representación de balanzas

3.1.5.3. Solución gráfica

A continuación, se muestra la representación gráfica de rectas y cómo esta permite aprovechar este método gráfico para introducir el manejo del plano cartesiano y la solución gráfica de sistemas de ecuaciones, sin realizar procedimientos de “despejar” la incógnita.

Ejemplo: sean las rectas $y = x$ y $y = 3$, estas ecuaciones forman un sistema que se puede resolver identificando el punto de intersección, que en este caso es $(3{,}3)$ como se muestra en la ilustración 5. Luego trazando la recta perpendicular al eje x por el punto de intersección se tiene la solución $x = 3$, la cual es solución del sistema de ecuaciones lineales propuesto, como se muestra en la ilustración 6.

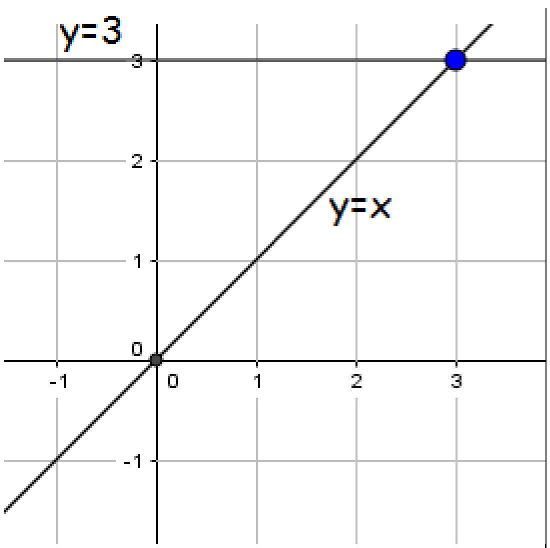


Ilustración 5: representación de las rectas

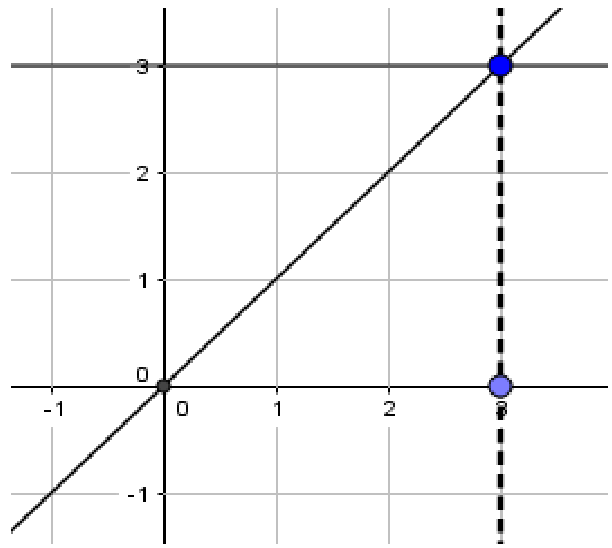


Ilustración 6: solución del sistema

Ejemplo: sean las rectas $y = x + 2$ y $y = 4$, estas ecuaciones forman un sistema que se puede resolver identificando el punto de intersección, que este caso es $(2{,}4)$ como se muestra en la ilustración 7. Luego trazando la recta perpendicular al eje x por el punto de intersección se tiene la solución $x = 2$, la cual es solución del sistema de ecuaciones lineales propuesto, como se muestra en la ilustración 8.

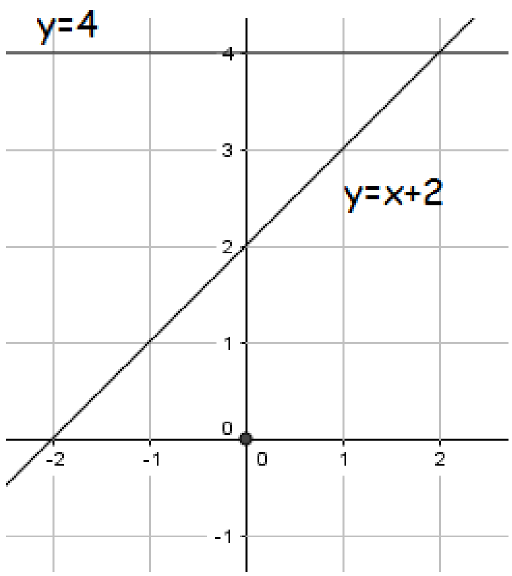


Ilustración 7: gráfica de rectas

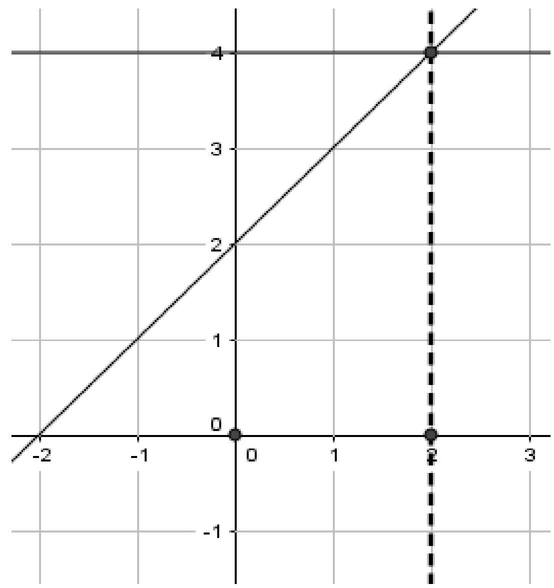


Ilustración 8: solución gráfica

3.1.5.4. Método gráfico de Lill

El método grafico de Lill se trata de un método que permite calcular $f(x)$ de una forma aproximada, en donde se localiza una de las raíces de la ecuación polinómica de la forma

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, a_n \in \mathbb{Z}$$

La construcción se realiza así:

1. Se trazan segmentos de rectas $AB, BC, CD, ED,$ … cuyas longitudes corresponden a los valores absolutos de los coeficientes $a_0, a_1, a_2, a_3,$ … respectivamente.
2. Cada uno de los puntos $B, C, D,$ … es vértice de un ángulo recto formado por dos segmentos consecutivos, trazados hacia la derecha si el signo es positivo y trazados hacia la izquierda si el signo es negativo. De donde se tiene en el grafico $n+1$ segmentos y n vértices.
3. Se toma un ángulo agudo θ tal que $\tan\theta = x$. Luego uno de los ángulos corresponde a una cierta x real dada, en donde el signo de θ es el mismo que el de x.
4. Se traza la línea AP cortando a BC, en donde si es el caso se prolonga en P, tal que el ángulo BAP sea θ. Si AB está trazado horizontalmente de izquierda a

derecha entonces P estará situado debajo de AB cuando x sea negativa y encima cuando x sea positiva.

5. Tracemos una línea punteada $APQR$ ..., tal que los ángulos en $P, Q,$ ..., sean ángulos rectos cuyos vértices están situados en las líneas $BC, CD, DE,$ ..., respectivamente.
6. Entonces el valor de $f(x)$ viene dado por la distancia RE. Esta distancia se mide según el sentido de la distancia DE.
7. La ecuación está resuelta cuando el punto R coincide con E.

Ejemplo: resolver por el método gráfico de Lill la ecuación $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

Solución gráfica:

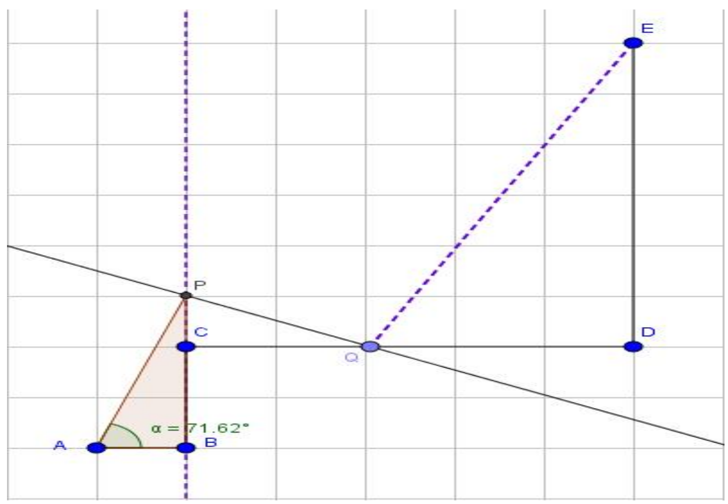


Ilustración 9: método gráfico de Lill

Construcción:

1. Se traza el segmento AB cuya longitud es el primer coeficiente del polinomio dado, como es positivo será de izquierda a derecha.
2. Se gira la hoja $90°$ y se traza el segmento BC que corresponde al valor absoluto del segundo coeficiente, como es negativo se traza de derecha a izquierda.
3. Se gira la hoja $90°$ y se traza el segmento CD que corresponde al valor absoluto del tercer coeficiente, como es negativo será de derecha a izquierda.
4. Se gira la hoja $90°$ y se traza el segmento DE que corresponde a el último término del polinomio dado, como es positivo será de izquierda a derecha.
5. Se ubica un punto Q cualquiera en el segmento CD, luego se traza el segmento QE.
6. Se extiende el segmento de recta BC.
7. Se traza una recta perpendicular a QE por Q, de tal manera que su intersección con la recta BC sea el punto P.

8. Traza el triángulo ABP, en donde el ángulo $BAP = 71{,}62$
9. Luego $x = \tan 71{,}62$ el cual es aproximadamente $x = 3{,}009$ en este caso será aproximadamente $x = 3$ una solución.

Es así como se tiene que:

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x - 3} = x^2 + x - 2$$

Luego

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$$

Por lo tanto, las raíces de $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, son: $c_1 = 3, c_2 = 1$ y $c_3 = -2$.

Capítulo 4: Marco Didáctico

A continuación, se describe la metodología que se utilizó en el planteamiento de la propuesta: La Resolución de Problemas que orienta a los estudiantes para que construyan su conocimiento matemático estableciendo conjeturas, y diseñando y usando estrategias.

4.1. Resolución de problemas

El recorrido histórico a través de los aportes de las diferentes culturas en el capítulo 1 evidenció la importancia de la resolución de problemas, pues fue a partir de estos que en muchos casos surgieron nuevas teorías matemáticas con sus respectivas definiciones, teoremas, demostraciones y refutaciones, es decir, algunos problemas en determinado contexto permitieron el avance de las matemáticas. En la actualidad, la resolución de problemas en nuestro sistema educativo es fundamental puesto que en su organización es un eje transversal en cada uno de los conjuntos de grados, y en cada uno de los pensamientos en donde se describen los conocimientos básicos caracterizados por procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático (MEN, 2006).

Por otro lado, la actividad de solucionar un problema en el aula permite a los estudiantes proponer estrategias, conjeturar y construir su conocimiento matemático, motivándolos a crear sus propios caminos de solución, y así, dejar de lado la idea del conocimiento matemático como la repetición de algoritmos.

En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (MEN) se hace referencia a que en los procesos de enseñanza de las matemáticas es necesario que se asuma la clase como una comunidad de aprendizaje en donde docentes y estudiantes interactúan y construyen conocimiento, mediante actos comunicativos que permiten argumentar sobre la toma de decisiones. Así mismo, propone la construcción de situaciones problema significativas, por medio de las cuales se posibilite el aprendizaje, reconociendo la matemática como una actividad humana, alimentada por la historia y la cultura, en donde se utilizan recursos de comunicación para plantear y solucionar problemas, y se tiene la oportunidad de socializar y compartir estrategias de solución con sus respectivas justificaciones.

De acuerdo a los estándares y la Matemática en sí, se distinguen dos tipos básicos de conocimiento matemático: el conceptual; que se refiere al conocimiento teórico y sus relaciones entre componentes, y el procedimental; que se asocia a las técnicas y estrategias en el uso de algoritmos, éste enriquece el conocimiento conceptual que está asociado al “saber cómo”.

Los estándares, precisan que se es matemáticamente competente cuando se logra formular, plantear y resolver problemas contextualizados ya sea sobre la vida cotidiana, otras ciencias y las matemáticas mismas. Para lo cual el estudiante debe identificar, establecer relaciones, representar la situación de maneras diferentes, entre otros procesos que requieren que se haga un uso flexible de conceptos, para formular, resolver el problema y validar la solución propuesta, asociada a una situación.

En resumen, el ser competente en matemáticas podría lograrse si la metodología de las clases le permitiera al estudiante trabajar de forma similar a como lo hace un matemático, es decir que la secuencia planteada por el maestro contenga actividades diseñadas que permitan: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, formular, probar, conjeturar, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

Se destaca de manera especial el primer proceso (formular y resolver problemas) puesto que involucra los demás en diferentes niveles dependiendo del momento en que se encuentre. A continuación, se hace una descripción de cada uno de los procesos de acuerdo a los estándares del MEN.

1. La formulación, tratamiento y resolución de problemas

Podría ser un eje organizador del currículo en matemáticas debido a que es un proceso que se mantiene a lo largo de las actividades que se hacen en el aula, las situaciones problema pueden ser del mundo cotidiano, de las mismas matemáticas e interdisciplinares (involucrando otras ciencias), lo cual lo hace más atractivo, logrando que los estudiantes se motiven, reten y logren proponer estrategias para solucionar dicha situación. Lo anterior permite enriquecer el pensamiento matemático y la comunicación por parte de los alumnos.

2. La modelación

Dado que un modelo es una representación, la modelación propicia en el estudiante distintos caminos de abordar o analizar una situación, por ejemplo: mentalmente, gráficamente, usando tablas o por medio de símbolos aritméticos o algebraicos, involucrando variables y relaciones entre ellas.

3. La comunicación

De acuerdo a los estándares del MEN: "*la comunicación es la esencia de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas*"

La comunicación entendida como el medio para expresar que se ha comprendido el contenido matemático. En particular, se plantea que si se aprendió o comprendió un contenido, se debe poder representar mínimo por dos formas: verbal y escrita, usando símbolos o gráficos, o lenguaje natural.

4. El razonamiento

Razonar entendida como: "la *acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión"* es tal vez el proceso más íntimamente relacionado con la formulación y resolución de problemas, la comunicación y la modelación.

Destacando que las matemáticas no son reglas de memoria y algoritmos que se aplican sin sentido. Este proceso debe desarrollarse desde los primeros grados mediante actividades que propicien: la percepción de regularidades y relaciones, la justificación y/o refutación de conjeturas entre otros, y luego en los grados superiores otras que logren que el estudiante realice comprobaciones trabajando directamente con teoremas.

5. La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos

Se refiere a la aplicación segura y confiable de algoritmos, en donde se da lugar el conocimiento conceptual y procedimental. Se destaca que a pesar de que el docente decida practicar un algoritmo para realizar operaciones aritméticas, se propone ensayar varios métodos de solución para comparar y analizar las ventajas o no que tiene uno o el otro y estimular al estudiante a proponer procedimientos para la solución de una situación.

"*El aprendizaje de procedimientos facilitan aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana*" (MEN).

Conocimientos Básicos:

Tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas, se relacionan con el desarrollo del pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional.

Para la propuesta se destaca el pensamiento variacional, y los sistemas algebraicos y analíticos, puesto que cumplen un papel importante en la resolución de problemas, ya que promueven la caracterización de la variación y el cambio, modelando situaciones de la vida cotidiana. Los cuales se describen en el conjunto de grados 6° y 7°, se refieren a contenidos como la proporcionalidad directa e inversa en contextos aritméticos y geométricos, métodos para la solución de ecuaciones e identificar características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan.

Eventualmente se describen las relaciones entre los cinco tipos de pensamiento, mediante el reconocimiento de elementos conceptuales comunes que permiten el diseño de situaciones problema, que integren los diferentes pensamientos y posibiliten que los procesos de aprendizaje de las matemáticas se den a partir de la construcción de formas generales y articuladas de esos mismos tipos de pensamiento matemático.

Finalmente se encuentran los contextos de aprendizaje de las matemáticas, que es donde se construye el sentido y significado de los contenidos matemáticos y se establecen conexiones con la vida cotidiana, por lo que se busca la construcción de situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo de las matemáticas que permitan contextos interesantes a los estudiantes y generen en ellos procesos de interpretar, modelar, proponer estrategias y resolver problemas tales como:

1. Inmediato o del aula: la misma matemática
2. Escolar o institucional: otras asignaturas (interdisciplinariedad)
3. Extra escolar: vida cotidiana

Se distingue entre situación y actividad. La primera se refiere a un conjunto de problemas bien preparados en donde el conocimiento surge como una herramienta para la solución de problemas en contextos cotidianos, de otras ciencias o de las matemáticas mismas, en donde se hace relevante que un mismo contenido matemático se presente desde diferentes situaciones, por ejemplo, las fracciones y sus interpretaciones. La actividad se trata del trabajo que hace el estudiante, individual o en grupo, en donde se proponen estrategias, se analiza y se reformula una situación. Luego la situación propuesta es determinante en las actividades que se busca que el estudiante realice.

Por otra parte, se hace pertinente señalar que la resolución de problemas en las normas del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) de los Estados Unidos, publicado (NCTM, 1989), señala la resolución como una estrategia potente en el aprendizaje de las matemáticas, lo cual indica que en otros países también se reconoce que la resolución de problemas es importante en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

Es así como, en una publicación clásica sobre los tipos de enseñanza relacionados con la resolución de problemas, Schroeder y Lester (1989), señalan tres tipos de enfoques en la resolución de problemas: *la enseñanza de la resolución de problemas* en donde generalmente se inicia con el aprendizaje del concepto y luego el estudiante lo aplica para la solución de problemas; *la enseñanza acerca de la resolución de* problemas en donde se enseña al estudiante las estrategias para resolver el problema; *la enseñanza a través de la resolución de problemas* que en este caso se destaca de manera especial, pues hace parte de la propuesta de este documento, ya que este enfoque propone que los estudiantes aprendan matemáticas y construyan conceptos a partir de contextos, problemas y situaciones.

A continuación, se mencionarán algunas tendencias de enseñanza de resolución de problemas, destacando la enseñanza a través de la resolución de problemas y la importancia que se le ha dado en otros países, como una estrategia para mejorar los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, para lo cual se hace necesario enseñar a los estudiantes procesos y estrategias de cómo solucionar un problema, para lo cual se describirán los pasos propuestos por Polya en el libro; Cómo plantear y resolver problemas (Pólya, 1965) y finalmente se mencionaran diferentes estrategias para la solución de un mismo problema.

Se destaca el papel del maestro, puesto que es quien elige las tareas a trabajar y formula preguntas para direccionar a sus estudiantes a que puedan verificar y relacionar sus estrategias. Se toma el “problema” como una tarea o actividad en donde el estudiante tiene la libertad de proponer sus estrategias, sin exigirle que aplique un algoritmo o un procedimiento específico.

De este modo, se hace relevante que el maestro tenga conocimientos sobre la enseñanza de cómo resolver un problema, en donde se hace de gran utilidad manejar pautas y estrategias que puedan ayudar al estudiante. Por esta razón a continuación, se mencionan las fases propuestas por Polya, quien resalta la importancia de la resolución de problemas como medio para crear conocimiento en matemáticas. Estas son comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución.

Debido a que el autor trabaja el método de la heurística inicialmente, para **comprender** el problema propone cuestiones como ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición?, entre otras preguntas, que sugieren reflexionar sobre la situación antes de aplicar un procedimiento o algoritmo. Preguntas que son generales y se podrían aplicar a cualquier problema que no son exclusivas para matemáticas como tal. Las preguntas se caracterizan por ser sencillas para ayudar a entender el problema. Se hace importante esta comprensión puesto que influye en la disposición que pueda llegar tener el estudiante, pues por ello puede llegar a perder el interés si el problema no se entiende o no le genera interés.

Luego, **concebir un plan** en donde nuevamente se plantean preguntas como ¿ha visto un problema planteado en forma diferente? ¿Conoce algún teorema que le pueda servir? ¿Podría enunciar el problema de otra forma?, en donde una estrategia útil podría ser resolver un problema similar que sea más simple, teniendo en cuenta que el estudiante ya entendió el problema, en este momento lo relaciona con conceptos y problemas que ya ha resuelto. Este paso no necesariamente se da de manera espontánea puesto que depende del problema podría surgir a partir del ensayo y error, o irse formando poco a poco. El maestro poniéndose en la posición del alumno y teniendo en cuenta sus propias dificultades para resolver un problema puede buscar estrategias para orientar al estudiante hacia lo que se está buscando, para lo cual ya se debe tener la experiencia y los conocimientos sobre el tema. Es importante tener presente que la memoria no es suficiente, pero si se requiere asociar problemas similares o teoremas que se hayan usado.

Ejecución del plan, ¿puede usted demostrarlo?, es decir, que el estudiante logre verificar y este seguro de cada paso del plan que había pensado anteriormente; finalmente r**evisar la solución** ¿puede verificar el razonamiento? ¿puede obtener el resultado de otra forma?, con el ánimo de mejorar la comprensión de la solución y descartar posibles errores la invitación es a verificar, así como también invitarlo a imaginar problemas en los que se pueda aplicar la misma estrategia de solución y reflexionar sobre otras posibles maneras de resolver la situación.

Por tanto, el papel del maestro es fundamental, puesto que si se enfrenta un estudiante a un problema sin alguna orientación se corre el riesgo que no haga nada. El maestro plantea preguntas como se describió anteriormente, para orientar al alumno hacia algún camino sin imponerle una solución. Por ejemplo, hacer una pregunta de diferentes maneras para centrar la atención del estudiante en la incógnita del problema.

Finalmente, y como se había señalado anteriormente, sobre el reconocimiento en otros países de la importancia de la resolución de problemas como estrategia en el proceso de enseñanza aprendizaje, en este capítulo se menciona que el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM), identifica la enseñanza de la solución de problemas como el foco de las matemáticas (Musser, Burger, & Peterson, 2008).

A partir de la de idea de que la resolución de problemas es el objetivo principal de las matemáticas, Polya menciona varias estrategias, pero se rescatan seis de ellas pues se considera (en este trabajo) que son algunas de las más comunes en la solución de problemas que involucran ecuaciones lineales: prueba, realizar un dibujo, utilizar una variable, buscar un patrón, hacer una lista y resolver un problema más sencillo.
A continuación, se ilustran algunas de ellas mediante ejemplos.
Ejemplos:

1. Ensayo y error

Completa el cuadrado mágico si la suma es 45 y se construye con los números del 11 al 19.

	11	
13		
		12

- Comprender el problema

Por definición de cuadrado mágico se debe tener que la suma de filas, columnas y diagonales sea 45.

- Elaborar un plan

Como se tienen los números que se deben usar se van ensayando hasta lograr la solución.

18	11	16
13	15	17
14	19	12

2. Usar una variable y hacer una lista

Observa el siguiente patrón. Si el número de palillos es 61, ¿Cuál es el número de la figura?

Figura 1 Figura 2 Figura 3

- Comprender el problema

A partir de la observación se evidencia que se aumentan tres palillos por cada figura.

- Elaborar un plan

Se construye la siguiente tabla como estrategia de solución.

Figura	Número de palillos	Relación
1	4	$2 \cdot 2 + 0$
2	7	$2 \cdot 3 + 1$
3	10	$2 \cdot 4 + 2$
4	13	$2 \cdot 5 + 3$
5	16	$2 \cdot 6 + 4$
…	…	…
$\boldsymbol{n}$	$3n + 1$	$2 \cdot (n + 1) + (n - 1)$

Si el número de palillos es 61, se tiene la siguiente expresión:

$$3n + 1 = 61$$

Luego $n = 20$, que corresponde al número de la figura.

3. Hacer un dibujo

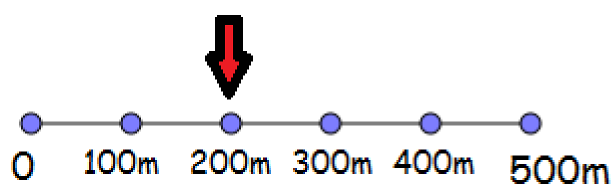
Una persona recorre 500m diarios, si el día de hoy ha avanzado 2/5 del recorrido ¿Cuántos metros le hacen falta por recorrer?

- Entender el problema

El recorrido esta fraccionado en 5 partes iguales, estableciendo 2/5 de él es posible lograr la solución.

- Elaborar un plan

Se usa un dibujo como estrategia.



Luego, hacen falta por recorrer 300m.

4. Resolver un problema más simple

Calcular la suma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{10}}$$

- Entender el problema:

Para resolver esta suma de fracciones se identifica el mínimo común denominador que es 2^{10}.

- Elaborar un plan:

En vez de realizar la suma directa, la estrategia que se llevará a cabo es hacer sumas parciales para buscar un patrón.

$$\mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{3}{4}}=\mathbf{\frac{4-1}{4}}=\mathbf{\frac{2^2-1}{2^2}}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\mathbf{\frac{7}{8}}=\mathbf{\frac{8-1}{8}}=\mathbf{\frac{2^3-1}{2^3}}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\mathbf{\frac{15}{16}}=\mathbf{\frac{16-1}{16}}=\mathbf{\frac{2^4-1}{2^4}}$$

El patrón que se observa en relación al resultado de las sumas anteriores:

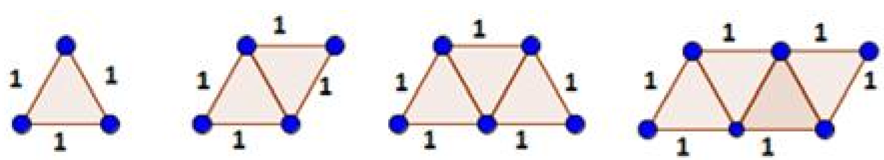
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\ldots.+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$$

Para el problema particular con n=10 tenemos:

$$\frac{2^n-1}{2^n}=\frac{2^{10}-1}{2^{10}}=\frac{1023}{1024}$$

5. Busque el patrón

A partir del arreglo que se presenta a continuación, completa la tabla:



a. Encuentra el perímetro de cada una de las figuras que van apareciendo y luego completa la tabla:

- Entender el problema: establecer las relaciones a partir de los resultados que se obtienen en la tabla.

Número de triángulos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**…**	**30**	**31**	**49**
Perímetro	3	4	**5**	6	7	8	…	32	33	51

- Observando el patrón se logra responder a:

  b. Cuando el número de triángulos es 50 ¿Cuál es el perímetro de la figura? **52**

  c. Cuando el perímetro de la figura es 102 ¿Cuántos triángulos hay en la figura? **100**

  d. Construye una expresión algebraica para para expresar el perímetro de la figura cuando el número de triángulos es n.

$$P = n + 2$$

4.1.1. Dificultades en el planteamiento y solución de ecuaciones lineales

De acuerdo con (Socas, Camacho, Palarea, & Hernández, 1996) en el libro Iniciación al Álgebra, es importante que el profesor identifique los posibles errores en álgebra que el estudiante podría cometer, puesto que le permite mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje. A partir de una investigación que realizó el grupo de álgebra del proyecto Strategies and Errors in Secondary Mathematics (S.E.S.M.), se encontraron una serie de errores comunes relacionados con los siguientes aspectos:

a. La naturaleza y el significado de los símbolos y las letras.
b. El objeto de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra.
c. La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes.
d. El uso inapropiado de “formulas” o “reglas de procedimiento”.

Los tres primeros errores identificados, se encuentran relacionados con las dificultades en la transición conceptual de la aritmética al álgebra, los cuales se describen a continuación.

4.1.1.1. Transición de la aritmética al álgebra

Hace referencia al cambio conceptual entre aritmética y álgebra, se centra en el significado de los símbolos e interpretaciones de las letras. Lo primero a lo que se enfrentan los estudiantes, es al reconocimiento de la naturaleza y significado de los símbolos y así operar con estos e interpretar los resultados.

Por ejemplo, con el símbolo $+$ el cual tiene una interpretación por los estudiantes como la acción de realizar una operación lo cual puede llevar a errores como $5x + 2 = 7x$, en este caso la dificultad radica en interpretar el símbolo $+$ como resultado y acción. Lo anterior debido a que en el proceso aritmético de la adición el estudiante siempre obtiene un resultado, y en el álgebra se encuentra con expresiones como $5x + 2$.

Otro de los errores se debe al valor posicional que se trabaja en la aritmética en donde se tiene $x = 5$ entonces $6x = 65$. Para evitar este tipo de situaciones se aconseja mantener el signo de la multiplicación e irlo eliminando paulatinamente.

En relación al concepto de igualdad: se tiene que el signo $=$ se usa en aritmética y ecuaciones algebraicas, lo cual implica la extensión de un concepto ya existente. En aritmética el signo $=$ es usado para conectar una operación con su resultado, para relacionar procesos o para unir una secuencia de pasos, esto es:

$$10 + 3 = 13$$

$$5 \times 3 = 10 + 5$$

$$3 \times (5 + 3) = 3 \times 8 = 24$$

respectivamente.

Finalmente se deben tener en cuenta los errores en relación con el significado de las letras tanto en aritmética como en álgebra. Puesto que el significado es diferente, por ejemplo, en aritmética las letras aparecen generalmente como abreviaturas de unidades de medida y en álgebra la letra desde un punto de vista más significativo se refiere a números generalizados o como variables.

Por otro lado, en aritmética el estudiante está habituado a hallar soluciones numéricas específicas, pero cuando empieza a trabajar con expresiones algebraicas no es así, puesto que lo que se busca es obtener relaciones, procesos y expresiones generales que eventualmente se puedan usar como fórmulas para resolver problemas. En la búsqueda de un término único para expresar un resultado en una expresión como: $2x + 3y$ se cometen errores como $5xy$, situación que aparece de la aritmética.

Es preciso aclarar que el álgebra no está separada de la aritmética, puesto que a través del álgebra se generalizan relaciones y procesos que se trabajaron antes en aritmética. Algunas de las dificultades que los estudiantes presentan en álgebra posiblemente se presentaron en aritmética y no se corrigieron, por ejemplo, operaciones entre fracciones, uso de paréntesis, potencias, entre otros. Errores que posteriormente se traducen al campo algebraico.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de errores cometidos en aritmética por falta de interiorización del concepto.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$	$-(x+y)=-x+y$	$(-1)^4=-4$

Finalmente, los errores que se atribuyen al uso inapropiado de fórmulas o reglas que se adoptan erróneamente a situaciones. Estos errores se originan como falsas generalizaciones sobre operadores o sobre números. A continuación, se describen los errores debidos a generalizaciones incorrectas:

i. Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva: en donde una expresión algebraica es distribuida por el operador dominante, por ejemplo, cuando se tiene $\sqrt{a \cdot b}=\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ los estudiantes pueden llegar a expresiones como $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Por lo cual es importante cuando y respecto a quien se verifica la propiedad.
ii. Errores relacionados con el uso de recíprocos: surgen a partir de procesos en aritmética que no fueron comprendidos, por ejemplo, en el caso de la suma de fracciones es posible encontrar:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{a+b}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a \cdot b}$$

A partir de la solución de ecuaciones de la forma $\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$ donde $x = 3$ es posible cometer errores como $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{8}$ entonces $3 = x + 8$

iii. Errores de cancelación: a partir de expresiones como $\frac{Ax}{x} = A$ se tienen errores como $\frac{Ax+By}{x+y} = A + B$, los cuales se deben a que el alumno extiende la regla para abarcar la situación.

4.1.1.2. Errores en la solución de ecuaciones

Muchos de los errores que se presentan en la resolución de ecuaciones se deben a lo mencionado anteriormente. Algunos de los ejemplos se describen a continuación:

- Transición de la aritmética al algebra: al calcular el denominador común de expresiones como la siguiente.

$$\frac{x}{9} + 5x = 3 + \frac{x}{3} \text{ entonces } \frac{x}{9} + 45x = 9 + \frac{x}{9}$$

- Realizando operaciones a un miembro de la ecuación sin modificar el otro miembro, debido al desconocimiento del significado del signo igual en las ecuaciones.
- Reconocer que la resolución de ecuación se realiza de arriba hacia abajo y la obtención de la incógnita se da mediante simplificaciones sucesivas por medio de transformaciones y reducciones apropiadas.
- El uso inapropiado de fórmulas conlleva a errores como es el caso en el descuido de signos en fórmulas como por ejemplo en la ecuación cuadrática.

4.1.2. Generalización en álgebra

Uno de los caminos naturales por los cuales un estudiante puede tener un acercamiento al álgebra es mediante el trabajo con situaciones en las que debe establecer lo general y expresarlo verbalmente o usando letras que posteriormente se convierten en una necesidad, como instrumento para expresar y manejar sus ideas.

La generalización es un proceso matemático que permite dar solución a problemas, establecer proposiciones, entre otras formas de construir matemáticas. Estableciendo regularidades entre objetos matemáticos, logrando expresar lo general utilizando símbolos, que es lo que potencia el lenguaje algebraico del lenguaje natural, además, interpretando los símbolos a partir de los términos de las series, es como los estudiantes empiezan a comprender el concepto de variable.

Teniendo en cuenta lo mencionado en el apartado anterior, en relación con los errores debidos a la generalización de propiedades o cuando se amplía la definición de una ley, se hace relevante mejorar el desarrollo de este procedimiento en los estudiantes. Por lo tanto, en el proceso de generalización en relación con el álgebra se proponen tres fases en el libro Ideas y Actividades para Enseñar Álgebra (Azarquiel, 1993), las cuales se tendrán en cuenta en el diseño y construcción de actividades para esta propuesta.

Las fases son:

a. Ver.
b. Describir.
c. Escribir.

A continuación, se describen cada una de las fases y algunas de las dificultades que los estudiantes encuentran en ellas.

4.1.2.1. Ver

Se trata del proceso mental por medio del cual es posible que el estudiante identifique el modelo de cada situación relacionando los elementos que se le presentan. En matemáticas esta actividad se encuentra especialmente cuando se trabaja con secuencias numéricas o geométricas. Las regularidades de conjuntos en figuras geométricas permiten poner en práctica la capacidad de observación del estudiante y facilitar el reconocimiento de la secuencia.

Por lo cual, la actividad de visualizar se refleja en el Anexo C, en donde se proponen algunas secuencias de figuras geométricas las cuales pueden ser identificadas por los estudiantes que no necesariamente son los que generalmente sobresalen, sino que son accesibles a todos, siendo así una actividad motivadora.

Es necesario tener en cuenta que el desarrollo de la capacidad de generalizar es un proceso que no es fácil, en particular cuando no se ha trabajado anteriormente, por lo cual en esta propuesta se tuvo en cuenta, en las actividades propuestas en el Anexo C, niveles de dificultad y el paso de las figuras a las series numéricas.

4.1.2.2. Describir

Después de percibir la regularidad la segunda fase es describirla, inicialmente de manera oral comunicando lo que se ha observado, describiendo las características que se visualizaron, lo cual depende de lo que se haya apreciado de la regularidad.

La descripción de la regularidad implica la organización de ideas para comunicar a otros, en este sentido, es importante la socialización de diferentes conjeturas, para así reformular y posteriormente plantear una expresión simbólica, lo más acertada posible.

4.1.2.3. Escribir

Teniendo en cuenta que la generalización en álgebra tiene como objetivo la construcción de expresiones simbólicas que se observan, después de expresar oralmente y por escrito el proceso de llegar a una expresión simbólica suele ser el que presenta mayor dificultad para el estudiante, puesto que requiere de un esfuerzo mayor.

Luego, escribir la relación no significa plantear la expresión simbólica puesto que no es lo más natural para el estudiante, la escritura de palabras, dibujos, símbolos propios, combinación entre los anteriores son elementos que se pueden ir utilizando, eventualmente se pueden sustituir algunas palabras por símbolos, y gradualmente llegar a establecer la expresión simbólica.

Capítulo 5: Construcción y Análisis de la Prueba Inicial

5.1. Prueba inicial

El objetivo fundamental de la propuesta es diseñar una secuencia de actividades para el aprendizaje de estrategias de planteamiento y solución de ecuaciones lineales a través de situaciones problema; pero teniendo en cuenta que para lograr que nuestros estudiantes aprendan, y no vean las diferentes temáticas trabajadas a lo largo de su vida escolar matemática como aisladas, sino que evidencien la relación entre ellas y su aplicación, consideramos que esta es una oportunidad para enriquecer y aportar al logro del aprendizaje a largo plazo de algunas temáticas. Es por ello, que convencida de que esta estrategia constituye una herramienta que integra los conocimientos básicos y contribuye al desarrollo de los procesos; para aplicarla en este nivel (séptimo) se debe tener un dominio de ciertas temáticas.

Esta prueba diagnóstica pretende indagar por el nivel de apropiación de algunos conceptos básicos en particular, los que se pueden relacionar, a partir de los cinco tipos de pensamiento matemático en el conjunto de grados de sexto y séptimo que proponen los estándares del MEN. Se considera que un estudiante tiene nociones de cada uno de los temas a los que se hace referencia a continuación:

Pensamiento Numérico y sistemas numéricos	Múltiplos y divisores, así como la noción de mínimo común múltiplo $(\boldsymbol{m.c.m.})$ y máximo común divisor $(\boldsymbol{M.C.D.})$; Criterios de divisibilidad; Valor posicional y valor numérico; Operaciones entre números reales; Jerarquía de las operaciones; Relaciones entre los valores (opuesto aditivo, operaciones inversas); Propiedades básicas de la teoría de números; Relaciones y propiedades de las operaciones; Noción de proporcionalidad directa e inversa.
Pensamiento métrico y sistemas de medidas	Noción de perímetro, reconocer el ancho y largo.
Pensamiento espacial y sistemas geométricos	Características de los polígonos.
Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos	Manejo de expresiones algebraicas de primer grado.
Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	Media aritmética.

Tabla 4: saberes previos

En el Anexo 1, se presentan las preguntas de la prueba inicial, en las que se evidencian algunos de los temas antes mencionados. En esta prueba el estudiante no resuelve una ecuación directamente, lo que se pretende es indagar sobre los conocimientos y la comprensión de la situación planteada.

En la primera pregunta planteada, se busca indagar sobre la interpretación y comprensión que le da el estudiante a la situación. Más allá de la solución, se busca observar concretamente a la competencia interpretativa de una situación problema. En la segunda pregunta, el estudiante debe realizar operaciones entre números enteros teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones, lo cual se espera que sea fluido para su grado, teniendo en cuenta que este manejo facilitaría resolver una situación problema planteando una ecuación. En la tercera pregunta se encuentran unos arreglos de igualdades, en donde se busca observar sobre la noción de igualdad y la interpretación que da el estudiante a la situación. La cuarta pregunta hace referencia a la noción de perímetro y las características de polígonos. La quinta pregunta permite reconocer si el estudiante sabe calcular un promedio y si plantea una ecuación para tal fin, además de razonar sobre la situación. En la sexta pregunta, se proponen secuencias gráficas y geométricas en donde el estudiante debe observar y deducir cual sería la expresión para una n –ésima posición. Séptima pregunta, un arreglo de balanzas en donde interfieren las competencias interpretativas y argumentativas. Octava pregunta y novena, situaciones donde interfieren las nociones de mínimo común múltiplo y máximo común divisor respetivamente, se observará si el estudiante relaciona o no estas nociones para la solución de la situación.

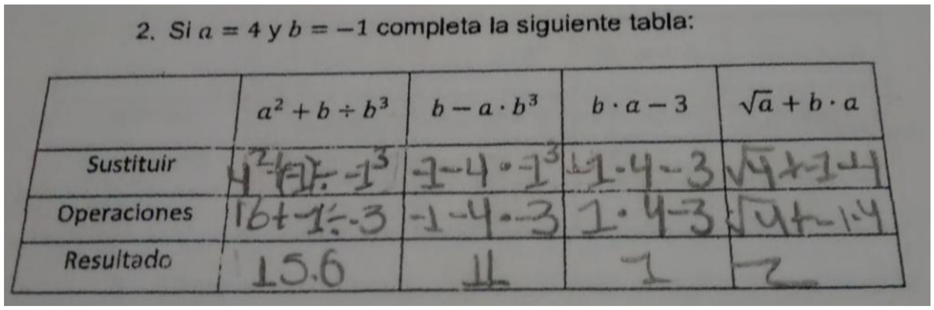
5.1.1. Análisis prueba inicial

La prueba inicial se realizó a treinta y seis estudiantes de grado séptimo, el profesor conformo parejas y no intervino en la solución de esta, los resultados en este caso fueron:

- Para la primera situación 13 de las parejas señalan que la respuesta tiene unidades de años y que la edad debe ser menor de 28. Por otro lado, se evidencia que no les es fácil reconocer las operaciones necesarias para resolver la situación.
- En la segunda situación que tiene que ver con la jerarquía de las operaciones, de acuerdo a lo observado en clase, los estudiantes presentan dificultades puesto que

realizan las operaciones de izquierda a derecha sin discriminar ningún orden, además, se evidencian dificultades, al aplicar las leyes de los signos y en el cálculo de potencias.

En la siguiente imagen se presentan algunos de los errores señalados anteriormente:



2. Si $a = 4$ y $b = -1$ completa la siguiente tabla:

	$a^2 + b \div b^3$	$b - a \cdot b^3$	$b \cdot a - 3$	$\sqrt{a} + b \cdot a$
Sustituir	$4^2(-1) \div -1^3$	$-1-4 \cdot -1^3$	$-1 \cdot 4 - 3$	$\sqrt{4} + -1 \cdot 4$
Operaciones	$16 + -1 \div -3$	$-1-4 \cdot -3$	$1 \cdot 4 - 3$	$\sqrt{4} + -1 \cdot 4$
Resultado	15.6	11	1	2

Ilustración 10: pregunta 2 de la prueba inicial

- Para la tercera situación, se tiene que 13 parejas obtuvieron la respuesta correcta, en donde se evidencia que fueron solucionando y reemplazando de arriba hacia abajo. Pero, a pesar de ello nuevamente la dificultad en la jerarquía de operaciones se evidencia, como se muestra a continuación:

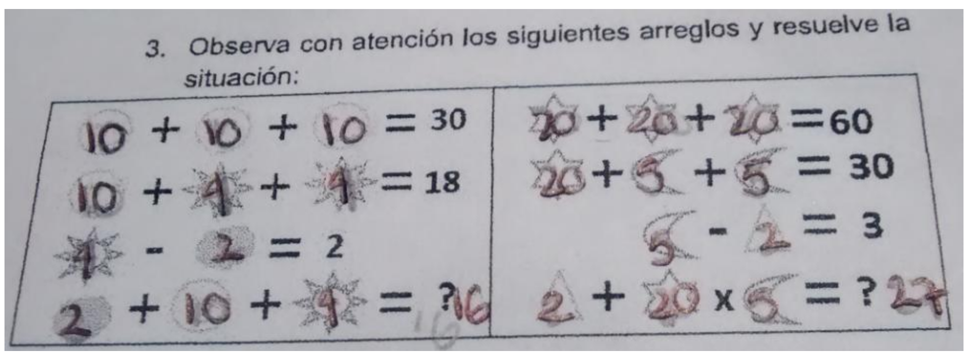


Ilustración 11: pregunta 3 de la prueba inicial

- En la cuarta situación, 9 de las parejas logran la respuesta correcta, algunas dibujando un rectángulo y usando la información acerca de su perímetro. Por otro lado, para los que no acertaron se evidencian errores como:

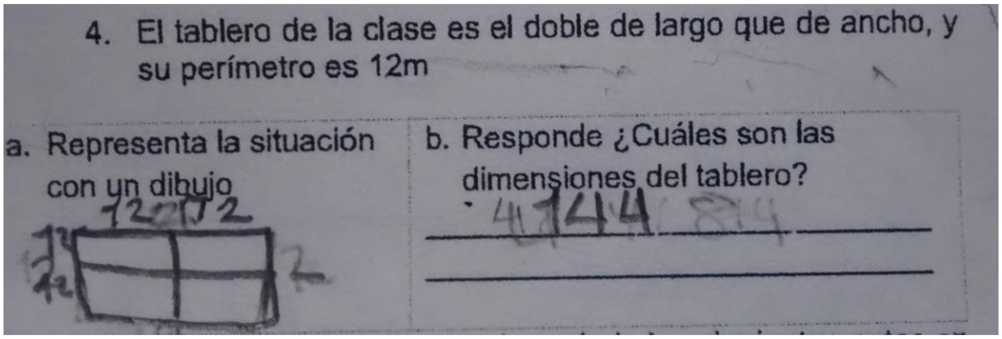


Ilustración 12: pregunta 4 de la prueba inicial

En donde se evidencia que no se tiene claro el concepto de perímetro, además la relación expresada por "el doble de".

- En la quinta situación se trabaja el pensamiento aleatorio, en donde se proponen dos situaciones en las que en primer lugar, se evidencia dificultad al realizar operaciones entre números decimales y en segundo lugar, en su mayoría no interpretan la solución como se muestra a continuación:

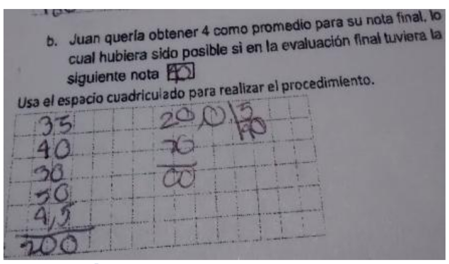


Ilustración 13: respuesta a la pregunta 5

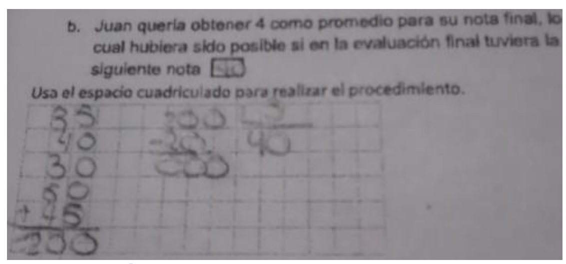


Ilustración 14: otra respuesta a la pregunta 5

A pesar de obtener el número que se buscaba, que en este caso es $4{,}5$, el estudiante da como resultado4, pero se tiene la dificultad en la interpretación del resultado.

- En la sexta situación, se propone una secuencia de figuras geométricas y unas tablas en donde se requiere escribir una expresión para el n −ésimo término, se encontró que los estudiantes entienden la secuencia, pero se les dificulta establecer la expresión simbólica.

Cuando se le pide al estudiante explicar cómo logro completar la tabla, se evidencian deficiencias para comunicar la estrategia que usaron, puesto que los estudiantes escriben: "*sumar o multiplicar*"," se *multiplica número por posición*", "*multiplicando*", o prefieren no escribir.

- En la séptima situación, solo tres de las parejas trabajan el ejercicio sin escribir la respuesta, y en la explicación escriben “*reemplazar figuras”.* Nuevamente se evidencia la dificultad para comunicar lo observado.
- Para la octava y novena situación, se tuvo que dar intervención del profesor puesto que los estudiantes no relacionaron la situación con los procesos de mínimo común múltiplo $(m.c.m.)$ y máximo común divisor $(m.c.d.)$. Además, escriben expresiones como *“mínimo común divisor”.*

5.1.1.1. Categorías

En la tabla que se presenta a continuación se describen los resultados de la prueba inicial relacionados con: conceptos previos relacionados con la solución de ecuaciones, métodos de solución y planteamiento, y solución de situaciones, con el fin de dar cumplimiento al objetivo específico propuesto inicialmente en este trabajo.

Conceptos previos relacionados con la solución de ecuaciones	En el primer ejercicio, se encuentran elementos relacionados con esta categoría de manera implícita, como lo son las operaciones que se relacionan de acuerdo a la situación. En los ejercicios dos y tres se evidencian dificultades en realizar operaciones entre números enteros, específicamente lo que tiene que ver con la jerarquía de las operaciones, puesto que los estudiantes realizan operaciones de izquierda a derecha sin ninguna discriminación.
Métodos de solución	De manera general, se evidencia que el método usado por los estudiantes es ensayo y error. Por ejemplo, en el ejercicio tres, en general los estudiantes reemplazan los valores.
Planteamiento y solución de situaciones	Los estudiantes que logran solucionar la situación reconocen las características de los cuadriláteros, la noción de perímetro y saben calcular promedio, pero no plantean una ecuación o el uso de variables. En los ejercicios ocho y nueve se evidencia que los estudiantes saben el procedimiento para calcular mínimo común múltiplo y máximo común divisor, pero no lo relacionan con la situación.

Tabla 5: análisis prueba inicial

5.1.2. Conclusiones

A partir de la prueba inicial se observó la tendencia que tienen los estudiantes en cuanto al uso del método de ensayo y error para dar solución a las situaciones propuestas. Sin embargo, cuando los datos sean mayores este método de solución puede conducir a errores por lo cual el objetivo es impulsar en los estudiantes la estrategia del uso de variables y planteamiento de ecuaciones para optimizar el tiempo.

Se evidencia que los estudiantes cuando se enfrentan a una situación no tienen claridad sobre el camino a seguir para dar solución a la misma. Lo cual muestra la importancia de orientar a los estudiantes en la búsqueda de estrategias para solucionar situaciones y le da importancia y pertinencia a esta propuesta.

5.2. Descripción de la secuencia didáctica

A continuación, se mencionan los aspectos principales de la secuencia didáctica que se propone en este trabajo.

5.2.1. Título

El paso a paso de la iniciación al planteamiento y solución de ecuaciones.

5.2.2. Tema

Ecuación lineal.

5.2.3. Objetivo general

Usar estrategias para el planteamiento y solución de situaciones problema que involucren ecuaciones lineales.

5.2.4. Objetivos específicos

- Realizar cambios de representación de expresiones verbales a expresiones simbólicas (algebraicas) y viceversa.
- Identificar secuencias y plantear conjeturas a partir de la observación.

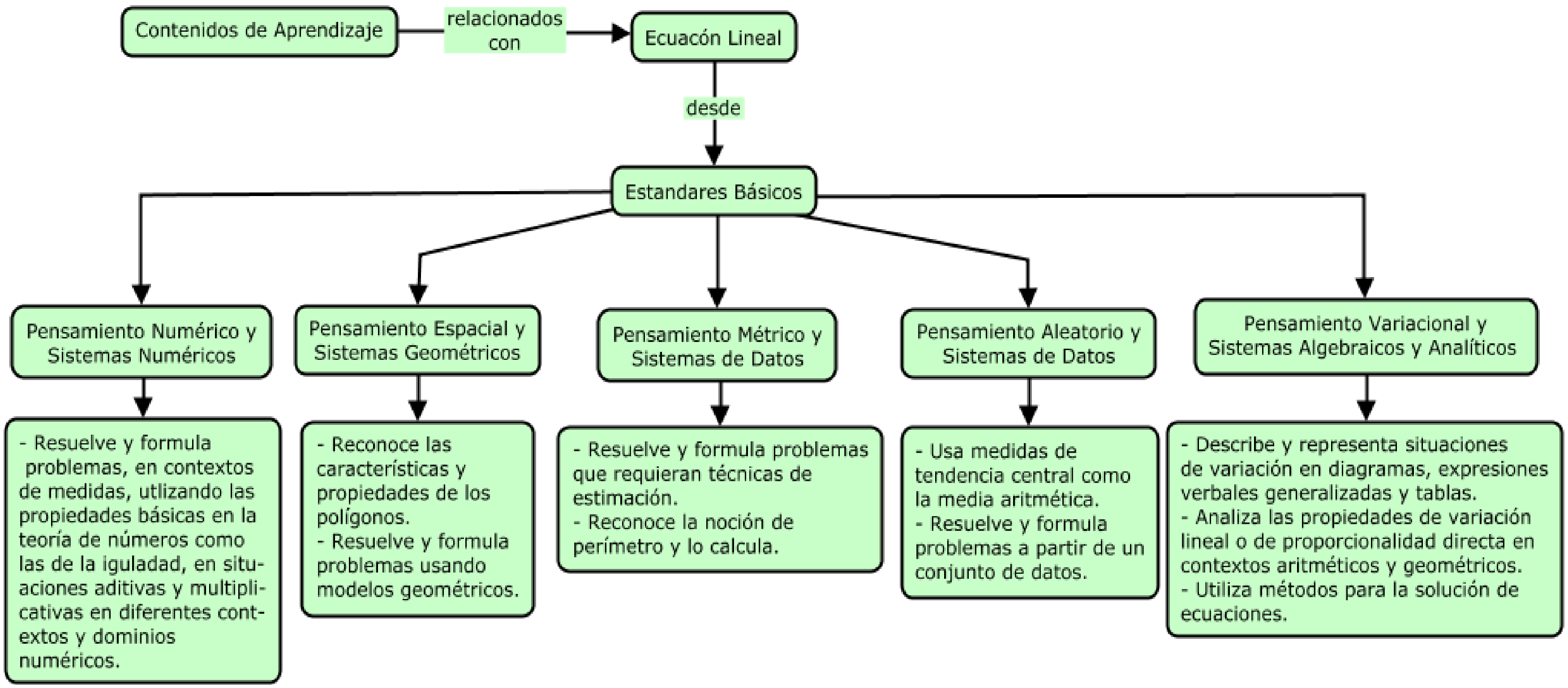
- Resolver situaciones problema en donde se ponen en juego las estrategias y herramientas proporcionadas por el profesor.

5.2.5. Recursos y herramientas

Para llevar a la práctica esta propuesta se hace necesario contar con los siguientes recursos: la institución educativa, el aula de clase, los estudiantes, el docente, fotocopias de cada una de las sesiones y guía de estrategia que se proporcionó a cada uno de los estudiantes.

5.3. Contenidos de aprendizaje

Los contenidos de aprendizaje que se ponen en juego durante la práctica de esta propuesta se presentan en el siguiente mapa conceptual, teniendo en cuenta los estándares.


Contenidos de Aprendizaje
relacionados con
Ecuacón Lineal
desde
Estandares Básicos
Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos
- Resuelve y formula problemas, en contextos de medidas, utlizando las propiedades básicas en la teoría de números como las de la igualdad, en situaciones aditivas y multiplicativas en diferentes contextos y dominios numéricos.
Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos
- Reconoce las características y propiedades de los polígonos.
- Resuelve y formula problemas usando modelos geométricos.
Pensamiento Métrico y Sistemas de Datos
- Resuelve y formula problemas que requieran técnicas de estimación.
- Reconoce la noción de perímetro y lo calcula.
Pensamiento Aleatorio y Sistemas de Datos
- Usa medidas de tendencia central como la media aritmética.
- Resuelve y formula problemas a partir de un conjunto de datos.
Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos
- Describe y representa situaciones de variación en diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas.
- Analiza las propiedades de variación lineal o de proporcionalidad directa en contextos aritméticos y geométricos.
- Utiliza métodos para la solución de ecuaciones.

5.4. Metodología

Esta propuesta se implementa con los estudiantes de grado séptimo del colegio Liceo Mayor de Soacha, en tres sesiones, cada sesión corresponde a dos horas de clase. La secuencia de las sesiones responde a objetivos específicos y niveles de complejidad que van aumentando.

Se espera fomentar en el estudiante la participación, comunicación y capacidad de proponer estrategias de solución frente a una situación problema, mediante los diferentes ejercicios que se proponen en cada una de las sesiones. El docente tiene un papel de orientador, mediante preguntas que conducen al estudiante a la solución, permitiéndole comunicar y discutir las estrategias.

5.5. Secuencia de actividades

A continuación, se describen las actividades a realizar con el grupo de estudiantes de grado séptimo. Las cuales están divididas en tres sesiones:

i. La primera corresponde a la iniciación al álgebra en donde se plantean situaciones que permiten al estudiante pasar de un cambio de representación a otro expresión verbal - expresión simbólica, haciendo uso de vocabulario y diagramas.
ii. En la segunda sesión, se realiza un trabajo en cuanto al proceso de generalizar, a partir de secuencias de figuras geométricas para luego relacionarlas con secuencias numéricas y finalmente establecer una expresión simbólica.
iii. Finalmente, en la tercera sesión, se propone a los estudiantes una serie de situaciones referentes a ecuaciones lineales, que deben resolver junto con una guía (Anexo 5), donde se describen las cuatro fases propuestas por Polya y algunas preguntas que lo pueden orientar a reflexionar y llegar a la solución de la situación.

5.5.1. Sesión I

Objetivo: realizar cambios de representación de expresiones verbales a expresiones simbólicas (algebraicas) y viceversa.

Se inicia con esta actividad, en donde el estudiante debe pasar de lenguaje verbal a un lenguaje simbólico, puesto que para lograr el objetivo (de esta propuesta), se requiere que el estudiante plantee una ecuación lineal. Teniendo en cuenta (como se ha dicho antes) que todas las estrategias propuestas por los estudiantes son valoradas, pero en este trabajo se hace relevante el planteamiento y la solución de ecuaciones lineales.

De acuerdo con lo anterior, los ejercicios que se proponen en esta sesión permiten a los estudiantes realizar cambios de representación. En el Anexo 2 se encuentran los ejercicios que se construyeron para la primera sesión, los cuales se describen a continuación.

- En primer lugar, se propone una tabla donde el estudiante tiene la expresión verbal de una situación y debe encontrar la expresión simbólica, se propone un diagrama tomado de (Socas, Camacho, Palarea, & Hernández, 1996) que permite organizar la información.
- En segundo lugar, el estudiante debe conectar la expresión verbal con su respectiva expresión simbólica, en donde el estudiante hace uso de expresiones como: la quinta parte de, un número incrementado, un número y su consecutivo, diferencia, perímetro y disminuido.
- En tercer lugar, se tiene un ejercicio con el que el estudiante puede llegar a establecer relaciones y establecer una expresión simbólica.
- En el cuarto punto, a partir de una expresión simbólica se plantea una situación o expresión verbal y viceversa, usando la representación de la máquina.
- En el quinto punto, se tienen expresiones verbales y el estudiante debe proponer la expresión simbólica y resolver la situación. En este caso el estudiante logra hacerlo mediante procesos informales, usando la representación de la máquina.
- Por último, se propone un modelo de maquina tomado de (Socas, Camacho, Palarea, & Hernández, 1996), la cual tiene elementos de entrada y salida que se describen en una tabla. Este ejercicio es de introducción a la sesión II en la que se destaca la importancia de la búsqueda de patrones y expresiones simbólicas para la n −ésima posición.

Conclusión

Al finalizar esta sesión se espera que el estudiante logre transformar situaciones expresadas de forma verbal a expresiones simbólicas y viceversa. Además, de tener un acercamiento al planteamiento de una expresión simbólica a partir de la observación de información mostrada en tablas.

5.5.1.1. Análisis de aplicación sesión I

1. En relación al primer ejercicio propuesto en donde el estudiante realiza cambios de representación de un enunciado verbal a una expresión simbólica, algunos aspectos que se evidenciaron se describen continuación:

- A los estudiantes se les dificultó comprender el diagrama que se propuso en este ejercicio, puesto que en las casillas que no se encontraba el esqueleto del mismo en general los estudiantes no lo dibujaban.
- En relación a las expresiones simbólicas que se obtuvieron seis de las dieciséis parejas a las que se le aplico la prueba, logro la expresión simbólica para el enunciado verbal *"la cuarta parte de un número es 50*". En otros casos se encuentran expresiones simbólicas como "4D=50", "$\frac{4}{p} = 50$".
- En relación a la expresión simbólica para describir un número consecutivo, se tiene que cuatro parejas lograron la expresión.
- Se evidencia que en general los estudiantes reconocen la noción de perímetro, pero al plantear la expresión simbólica se les dificulta plantearla en términos de una sola variable, cuando se les indica que *"la altura es dos veces su ancho".*

2. El segundo ejercicio los estudiantes lo realizaron con mayor fluidez, puesto que se les facilito identificar el enunciado verbal con su expresión simbólica.
3. Para el tercer ejercicio, los estudiantes manifestaron que no sabían que hacer y que el ejercicio estaba difícil, puesto que a partir de la expresión simbólica plantear una situación no es una actividad que se propone frecuentemente.
4. Los estudiantes entienden el diagrama y comprenden los que deben hacer, al iniciar el ejercicio nuevamente se presentan dificultades en cuanto al cálculo de operaciones. En cuanto a la expresión para el $n-$ésimo término, varios logran conseguirla, aunque alguno solo tiene en cuenta la primera operación planteada, luego queda incompleta.
5. Finalmente, los estudiantes manifiestan que el quinto ejercicio que se propone les gusta puesto que de alguna manera este tipo de ejercicios los sorprenden, aunque cuando se les pide la explicación a lo que sucede no logran hacerlo.

5.5.2. Sesión II

Objetivo: identificar secuencias y plantear conjeturas a partir de la observación.

En esta sesión se encuentran cinco ejercicios, en donde el profesor debe formar grupos de tres estudiantes, cada uno de los cuales tendrá el material del Anexo 3, cada grupo debe tener en cuenta que al iniciar cada uno de los ejercicios planteados debe socializar con sus compañeros lo que observo de la secuencia geométrica o arreglo propuesto, esto con el ánimo de trabajar con las fases de generalización descritas en el capítulo anterior, en este caso ver y describir.

Luego, se relaciona la secuencia gráfica observada con la respectiva secuencia numérica mediante el uso de una tabla, para finalmente escribir una expresión simbólica que represente dicha relación. En esta sesión, los estudiantes tienen la posibilidad de trabajar situaciones relacionadas con geometría y aritmética, a través de la observación de patrones y secuencias.

Conclusión

Al finalizar esta sesión se espera que el estudiante adopte estrategias para establecer la generalización de secuencias a partir de figuras geométricas y luego secuencias numéricas. Además de fortalecer la comunicación de sus ideas y conjeturas en público.

5.5.2.1. Análisis de aplicación sesión II

En esta sesión participaron un total de 30 estudiantes y se realizó el trabajo en parejas, de donde se obtienen 15 resultados para el análisis que se realiza en relación a tres aspectos: observación y comunicación, interpretación y finalmente el planteamiento y solución, como se muestra en la tabla que se presenta a continuación.

- Observación y comunicación: relacionado con lo que el estudiante tiene en cuenta en cada ejercicio y como lo expresa de manera escrita.
- Interpretación: corresponde a determinar si el estudiante comprende cada una de las secuencias propuestas.
- Planteamiento y solución: finalmente si logra establecer la relación y establecer la expresión simbólica.

Ejercicio	Observación y comunicación	Interpretación	Planteamiento y solución
1	Nueve de las parejas evidencia a partir de sus escritos que se presenta una suma. Cuando se les pide caracterizar los números de dicha suma, tres de las parejas concluyen que son impares como se esperaba, en los otros casos se observa que los caracterizan como números primos, aunque a partir del quinto caso aparece el 9, además una de las parejas manifiesta que lo que tienen en común es "*que se repiten en diagonal*".	Las 15 parejas establecen que ninguna suma da como resultado 35, pero cuando se les pide establecer los números que suman 81, no toman en cuenta la secuencia observada, conforman parejas que den dicha suma, tal como se muestra en la ilustración 15.	Solo una pareja logra establecer la secuencia de números impares que sumen 81 y 169. Esta pareja es la que dese un principio observa que los números se repiten en diagonal.
2	Las 15 parejas lograron construir las figuras que se pedían puesto que observaron la relación para cada posición, tal como se muestra en las ilustraciones 16, 17 y 18, se evidencian diferentes estrategias.	Las 15 parejas lograron construir la tabla antes de establecer la expresión simbólica, 7 de las parejas lograron establecer relaciones entre la tabla y las preguntas propuestas a partir de percibir que los números que aparecen son múltiplos de 4.	Lograron plantear la expresión simbólica 10 de las pajeras, aunque no relacionaron este resultado para la responder a las preguntas que se propusieron posteriormente.
3	7 de las parejas manifiesta por escrito que por cada paso se agrega un triángulo, las demás no escriben nada.	Todas las parejas logran construir la tabla y se evidencia que reconocen la noción de perímetro. Además 13 de las parejas logran establecer relaciones entre los resultados de la tabla y las preguntas que se realizan posteriormente.	Finamente se tiene que 9 parejas establecen la expresión simbólica a partir de las relaciones establecidas anteriormente.

4	Los estudiantes realizan el ejercicio varias veces para lograr establecer relaciones.	Todos realizan el ejercicio, pero solo 9 logran establecer relaciones que les permiten llegar a la solución.	9 de las parejas logran obtener la solución a partir del ensayo y error.
5	9 de las parejas logran construir y observar de manera asertiva la secuencia propuesta.	A partir de las indicaciones dadas 9 parejas logran interpretar gráficamente la secuencia, pero después de observar la relación en la tabla se logra completar la tabla y contestar las preguntas que se proponen posteriormente.	Finalmente 12 de las parejas logran determinar la expresión simbólica para el n-ésimo término.

Tabla 6: análisis de aplicación sesión II

A continuación, se presentan algunas ilustraciones que evidencian las respuestas obtenidas por los estudiantes.

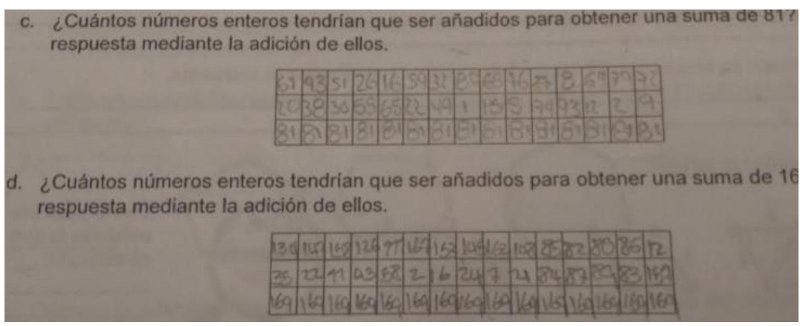


Ilustración 15: primera pregunta-sesión II

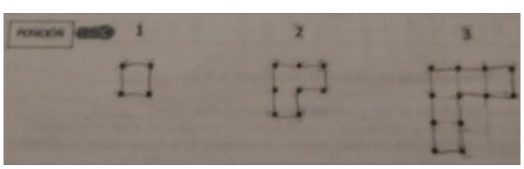


Ilustración 16: segunda pregunta-sesión II

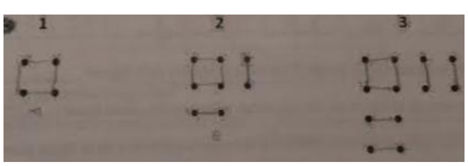


Ilustración 17: segunda pregunta-sesión II

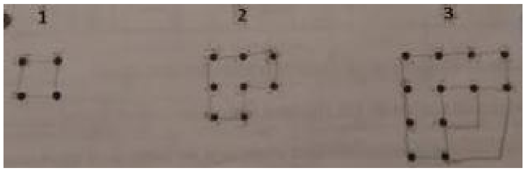


Ilustración 18: segunda pregunta-sesión II

Finalmente, los estudiantes manifestaron que les agradaron los ejercicios y que a pesar de manifestar que "*siempre les va mal en matemáticas",* intentaron y en su mayoría lograron establecer relaciones.

5.5.3. Sesión III

Objetivo: resolver situaciones problema, en donde se ponen en juego las estrategias de solución de los estudiantes las y herramientas proporcionadas por el profesor.

En esta sesión, se proponen nueve ejercicios como se muestra en el Anexo 4, con los cuales se busca finalmente que los estudiantes resuelvan situaciones problema, haciendo uso de estrategias como la de la observación y el planteamiento de una expresión simbólica. Además, se le construye y se entrega una guía como estrategia para el planteamiento y solución de situaciones, la cual se encuentra en el Anexo 5.

Conclusión

Al finalizar esta sesión el estudiante ya ha adquirido a través de las sesiones trabajadas una serie de herramientas que le permiten abordar una situación y resolverla.

5.5.3.1. Análisis de aplicación sesión III

En esta sesión participaron un total de 32 estudiantes y se realizó el trabajo en parejas, de donde se obtienen 16 resultados para el análisis que se realiza en relación a tres aspectos: observación y comunicación, interpretación y finalmente el planteamiento y solución, como se muestra en la tabla que se presenta a continuación.

Ejercicio	Observación y comunicación	Interpretación	Planteamiento y solución
1 y 2	13 de las parejas logra, mediante la observación, establecer relaciones y manifiestan que no tuvieron dificultad para hacerlo.	Logran interpretar la secuencia tanto gráficamente como numéricamente en la tabla.	12 de las parejas plantean la expresión simbólica y la usan para responder a las

			preguntas planteadas.
3	Este tipo de ejercicios presento bastante agrado por los estudiantes, quienes en sesiones anteriores manifestaban que era “*magia*”, por lo cual les llamaba la atención y no tenían dificultad en realizarlo.	Todas las parejas logran interpretar el enunciado y realizan en el ejercicio. Al finalizar, 13 de las parejas logran establecer relaciones.	8 de las parejas establecen la expresión simbólica y la usan para argumentar y responder a la pregunta que se realiza posteriormente.
4	Los estudiantes expresan que ya se había trabajado antes por lo cual logran relacionarlo con números consecutivos.	12 de las parejas interpretan sin dificultad lo que propone el enunciado, puesto que lo relacionan con sesiones pasadas.	13 parejas plantean una expresión simbólica que corresponde a una ecuación y la resuelven mediante procesos algorítmicos.
5	La secuencia gráfica que se propone, permite que todos los estudiantes participen y logran observar que en cada figura aparecen tres palitos más.	Todas las parejas interpretan y completan la tabla que se propone, solo 3 parejas dejan sin escribir la expresión para el n-ésimo término.	11 de las parejas logran plantear la expresión simbólica que corresponde a una ecuación lineal la cual solucionan sin dificultad.
6	Los estudiantes, a partir de diferentes estrategias, logran observar e identificar la secuencia.	Logran interpretar tanto la secuencia grafica como numérica a partir de la tabla que se propone.	12 de las parejas logran plantear la expresión simbólica, que se lo que se pide.
7 8 9	En estos tres ejercicios los estudiantes manifestaron que fue de gran ayuda la guía que se le proporciono, puesto que eran situaciones diferentes a las de secuencias gráficas y numéricas.	11 de los estudiantes interpretaron la situación y comprendieron que se estaba pidiendo. Los demás con ayuda del docente y la guía luego lograron entender la situación.	10 de los estudiantes plantearon la ecuación lineal que corresponde a la situación y luego la resolvieron.

Tabla 7: análisis de aplicación sesión III

Finalmente, a partir de los resultados de esta sesión se tiene que los estudiantes observaron y se comunicaron asertivamente, lo cual les permitió defender sus argumentos o darse cuenta si estaban en un error. Por otro lado, la guía que se les entrego permitió que se orientan hacia la solución de la situación.

Capítulo 6

6.1. Conclusiones

Tomando en cuenta la pregunta inicialmente planteada ¿qué características debe tener una estrategia didáctica que permita a los estudiantes de grado séptimo dar significado, interpretar, plantear y resolver ecuaciones lineales?, y a partir de los resultados obtenidos, se puede establecer en primer lugar, que se debe tener en cuenta ¿qué saben los estudiantes?, y a partir de ello construir dicha secuencia.

Así mismo, el uso de secuencias gráficas y numéricas permite que el estudiante se motive, puesto que no son ejercicios para los que siempre les ha ido bien en matemáticas, ya que en primer lugar se proponen ejercicios de observación y de establecer relaciones que llevan a plantear una expresión simbólica (ecuación lineal), lo cual surge de manera natural, permitiendo que el estudiante logre interpretar y comprender la situación que se le propone y por ende logre solucionarla.

El uso de situaciones problema permitió que los estudiantes usaran diferentes conceptos, nociones y conocimientos matemáticos de manera conjunta y no como si fueran aislados, lo cual permitió establecer conexiones entre los conocimientos básicos que se han ido trabajando durante su vida académica en la escuela, hasta grado séptimo.

Finalmente, se evidencia que el uso de la guía que se le proporcionó a los estudiantes les permitió orientarse, puesto que ellos mismos lo manifestaron, y al tener la ecuación planteada, solucionarla no presentaba ninguna dificultad.

6.2. Recomendaciones

Para futuras aplicaciones se recomienda disponer más tiempo a cada una de las sesiones y a la reflexión en cuanto a las estrategias de solución, también sería conveniente realizarla de manera individual.

Por otro lado, se recomienda seguir trabajando con el tipo de ejercicios que inicialmente tienen gráfica y piden a los estudiantes observar y establecer relaciones, puesto que en la aplicación de este trabajo se evidenció el gusto y motivación que tienen los estudiantes.

Anexos

Anexo 1: Prueba Inicial

Prueba inicial

1. Lee con atención la siguiente situación y luego responde las preguntas:

Juan dice: ¿Cuántos años tengo si mi papá tiene 3 veces mi edad y yo nací cuando él tenía 28 años?

a. ¿En qué unidades debe estar la respuesta?

A. Metros	B. Años	C. Litros	D. Kilos

b. Menciona las operaciones necesarias para resolver el problema

____

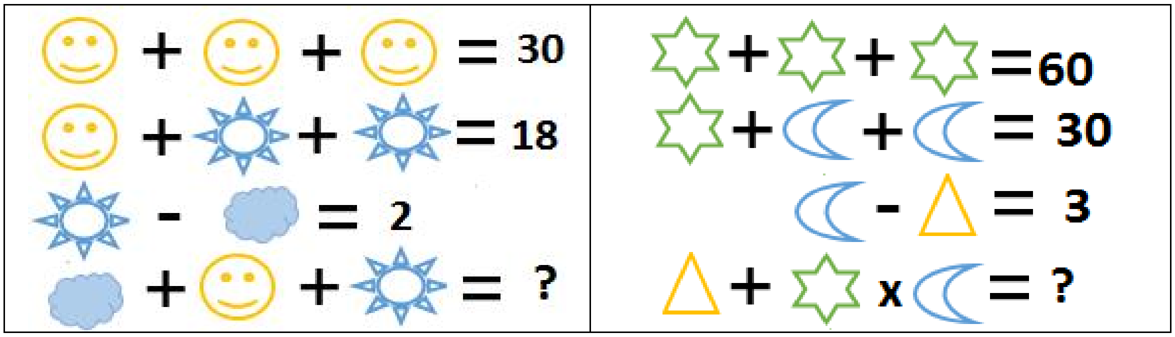
c. Al resolver la situación, la edad de Juan debería ser:

Menor de 28	Mayor de 28

2. Si $a = 4$ y $b = -1$ completa la siguiente tabla:

	$a^2 + b \div b^3$	$b - a \cdot b^3$	$b \cdot a - 3$	$\sqrt{a} + b \cdot a$
Sustituir				
Operaciones				
Resultado				

3. Observa con atención los siguientes arreglos y resuelve la situación:



4. El tablero de la clase es el doble de largo que de ancho, y su perímetro es 12m

a. Representa la situación con un dibujo	b. Responde ¿Cuáles son las dimensiones del tablero? ______________________ ______________________

5. Juan obtuvo en el segundo periodo las siguientes notas en matemáticas:

Taller 1	3,5
Taller 2	4
Quiz	3
Participación	5
Evaluación final	2,5

a. Sabiendo que cada nota tiene el mismo porcentaje ¿cuál es su nota final?. Usa el espacio cuadriculado para realizar el procedimiento.

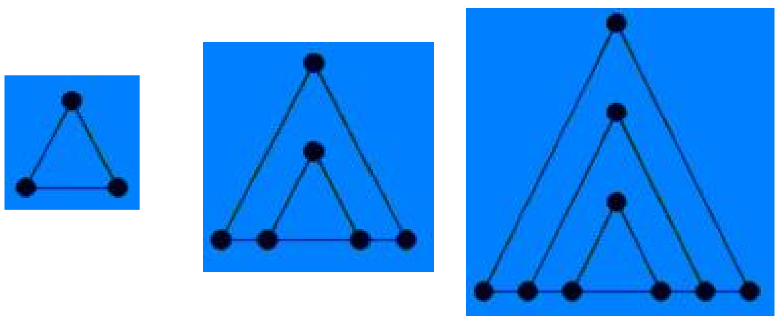
Respuesta: ______________________
____

b. Juan quería obtener 4 como promedio para su nota final, lo cual hubiera sido posible si en la evaluación final tuviera la siguiente nota $\boxed{}$

Usa el espacio cuadriculado para realizar el procedimiento.

6. Observa las secuencias y completa según corresponda:

a. Observa la siguiente secuencia gráfica y luego responde las preguntas:



1 **2** **3** **…**

En la posición 10 el número de puntos es: ______	En la posición n el total de puntos debe ser: ______

b. Observa y completa la siguiente tabla:

POSICIÓN	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	15	22	100	…	n
NÚMERO	2	4	6	8	10	12	14	16		…				…	

¿Cómo lo haces?

____

____

c. Completa la tabla y explica tu estrategia:

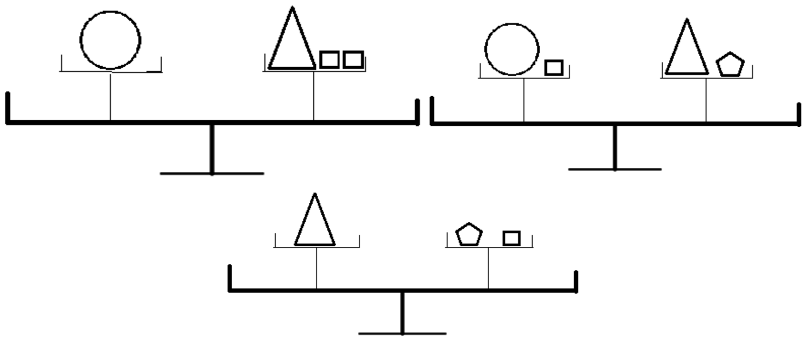
POSICIÓN	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	15	100	…	n
NÚMERO	1	3	5	7	9	11	13	15			…			…	

¿Cómo lo haces?

____

____

7. A continuación, encontraras tres dibujos. Se muestra una balanza en equilibrio usando diferentes objetos ¿cuántos  equilibran un  ?



Explica cómo lograste encontrar la solución a la situación: ____________________________

____

____

8. En una estación del Transmilenio, una ruta pasa con una frecuencia de 18 minutos, otro cada 15 minutos y un tercero cada 8 minutos. ¿Dentro de cuántos minutos, como mínimo, se encontrarán en la estación?

Explica la estrategia que usaste: ____

____

9. Carlos vende bombones. Con lo que aprendió en su taller de chocolatería, hizo 32 bombones de trufa, 24 de frambuesa y 28 de arequipe. ¿Cuántos paquetes con la misma cantidad de bombones de cada tipo puede hacer?

Explica la estrategia que usaste: ____

____

Anexo 2: Sesión I

SESIÓN I

Objetivo: realizar cambios de representación de expresiones verbales a expresiones simbólicas (algebraicas) y viceversa.

Nombre:

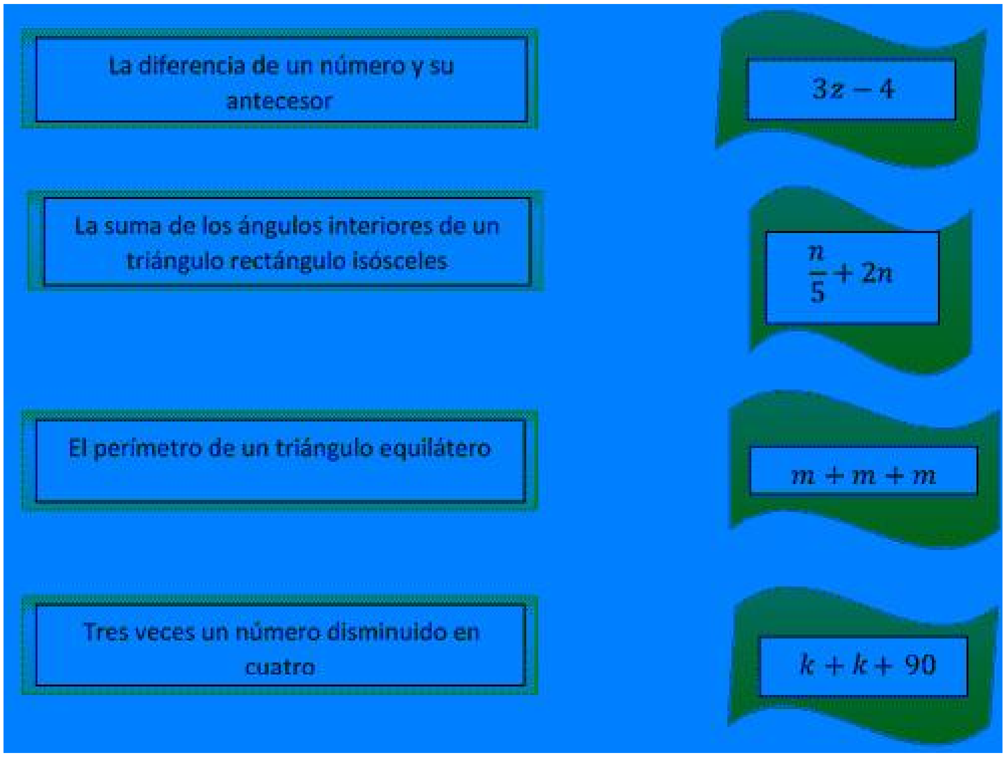
1. Observa la siguiente tabla, luego completa el diagrama y la expresión simbólica para de cada enunciado verbal:

Enunciado verbal	Diagrama	Expresión simbólica
El doble de un número aumentado en 15 es 59.	$\boxed{m} \xrightarrow{\times 2} \boxed{2m} \xrightarrow{+15} \boxed{59}$	$2m + 15 = 59$
El triple de un número es 900	$\boxed{} \xrightarrow{\times} \boxed{} \longrightarrow \boxed{}$	
El perímetro de un triángulo equilátero es 51	$\boxed{} \xrightarrow{+} \boxed{} \xrightarrow{+} \boxed{} \longrightarrow \boxed{}$	
La diferencia entre 1456 y un número da como resultado 700		
La cuarta parte de un número es 50	$\boxed{} \xrightarrow{\div} \boxed{} \longrightarrow \boxed{}$	
El cociente entre 56 y un número es 8		
La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180˚	$\boxed{} \xrightarrow{+} \boxed{} \xrightarrow{+} \boxed{} \longrightarrow \boxed{}$	
El doble de un número es 259		

Un número más su consecutivo es 11		
El perímetro de un rectángulo es igual a 12 donde la altura de es dos veces su ancho.		
7 más que un número es 10		
Un ángulo que es el complemento del ángulo $37°$	$\square \xrightarrow{+} \square \rightarrow \square$	
11 veces un número es igual a 121		
El ángulo $72°$ más un ángulo que es su suplemento.		
El producto entre 12 y un número es 144	$\square \xrightarrow{\times} \square \rightarrow \square$	

2. Une con una línea cada enunciado verbal con su correspondiente expresión simbólica:

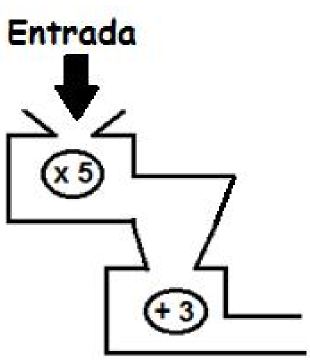
La quinta parte de un número más su doble	$x + (x + 1)$
Un número incrementado en cinco	$a - (a - 1)$
Adición de un número con su consecutivo	$m + 5$



3. Construye una situación para cada una de las expresiones algebraicas:

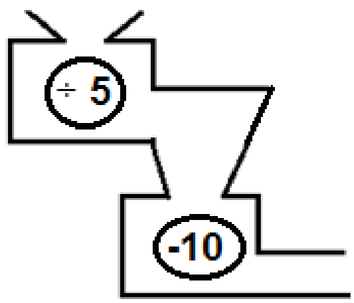
	$n + (n+1) + (n+2) = 36$
$a + 2a + a + 2a = 24$	
	$\frac{x}{4} + 5x$

4. Observa la siguiente máquina en la cual los números que se introducen se transforman de acuerdo al operador indicado y se obtiene los números de salida que se muestran en la tabla:

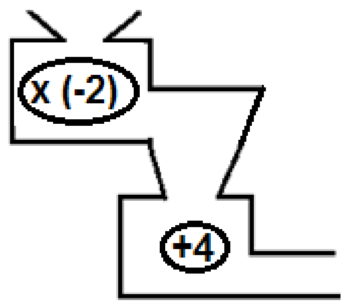


Entrada	1	2	3	4	m
Salida	8	13	18	23	$5m+3$

Observa las siguientes máquinas y completa las tablas:

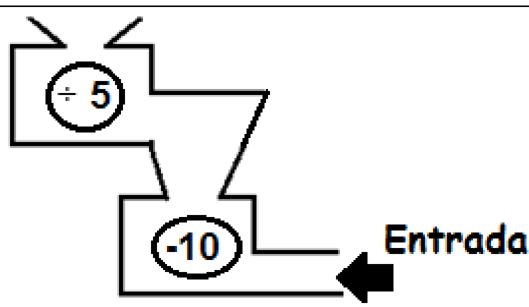


Entrada	5	10	15	20	25	n
Salida						

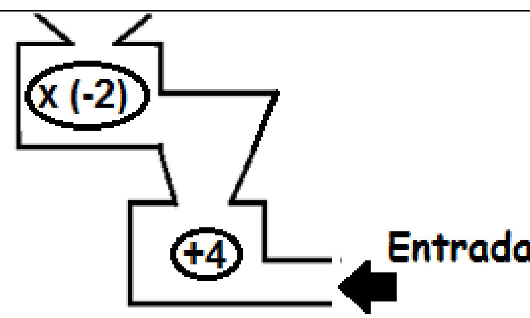


Entrada	1	2	3	7	13	a
Salida						

5. Las máquinas anteriores tienen un cambio y ahora la entrada es como se indica en la figura. Observa y completa cada tabla:



Entrada	5	10	15	20	25	n
Salida						



Entrada	1	2	3	7	13	a
Salida						

6. Completa la tabla siguiendo las indicaciones (realízalo mínimo con tres números diferentes):

Indicaciones	**Expresión**		
Piensa un número			
Adiciona 10			
Multiplica por 4			
Agrega 200			
Divide por 4			
Resta el número pensado			

¿Al realizar las operaciones el resultado es 60? ____
Como podrías explicar lo que sucede:
____

Anexo 3: Sesión II

SESIÓN II

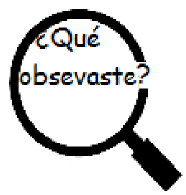
Objetivo: identificar secuencias y plantear conjeturas a partir de la observación.

NOMBRES: ____

Indicaciones: tu profesor armará grupos de tres estudiantes para realizar esta actividad, debes tener presente que al empezar cada ejercicio debes comentar con tu grupo lo que observaste.

1. Observa la siguiente tabla y completa la columna de respuesta:

Suma	Respuesta
1	1
$1+3$	4
$1+3+5$	
$1+3+5+7$	
$1+3+5+7+9$	
…	



Escribe con tus palabras lo que observaste:

____

____

a. ¿Qué tienen en común los números que están en la columna izquierda?

____

____

b. ¿Hay alguna suma que dé como resultado 35? ________ ¿Cuál?

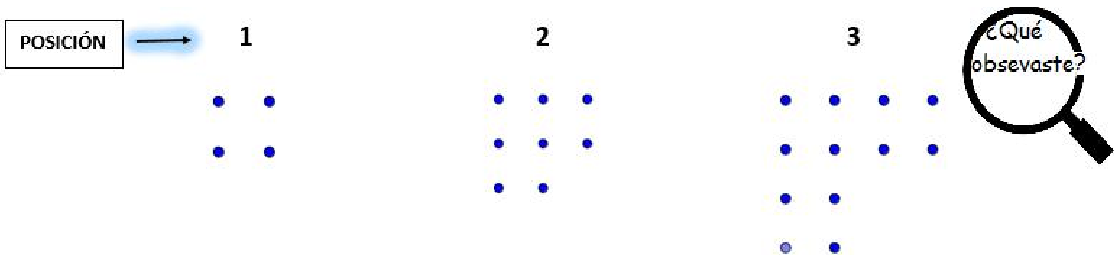
____

c. ¿Cuántos números enteros tendrían que ser añadidos para obtener una suma de 81?. Compruebe su respuesta mediante la adición de ellos.

d. ¿Cuántos números enteros tendrían que ser añadidos para obtener una suma de 169?. Compruebe su respuesta mediante la adición de ellos.

e. ¿Es posible que el resultado de una suma de números enteros sea 200? Explica tu respuesta.

2. Observa el siguiente arreglo y responde las preguntas:



a. Dibuja las dos figuras que siguen en el siguiente espacio:

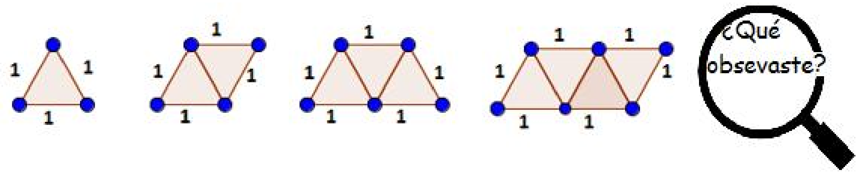
b. Completa la siguiente tabla en la columna de número de puntos para cada posición:

Posición	Número de puntos
1	4
2	8
3	
4	
5	
6	
…	
n	

c. ¿Hay alguna posición que tenga 68 puntos? Si es así ¿Cuál?
Explica tu respuesta.

d. ¿En alguna posición se encuentran 85 puntos? Si es así ¿Cuál? Explica tu respuesta.

3. Observa el siguiente arreglo:



Escribe con tus palabras lo que observaste: ___ ______________ ______________

e. Encuentra el perímetro de cada una de las figuras que van apareciendo y luego completa la tabla:

Número de triángulos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**…**	**30**	**31**	**49**
Perímetro			**5**				…			

f. Cuando el número de triángulos es 50 ¿Cuál es el perímetro de la figura? ______________

g. Cuando el perímetro de la figura es 102 ¿Cuántos triángulos hay en la figura? __________

h. Construye una expresión algebraica para para expresar el perímetro de la figura cuando el número de triángulos es n.

$$\boxed{}$$

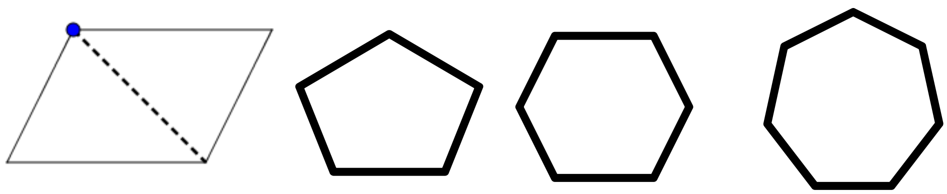
4. Completa la siguiente tabla siguiendo las indicaciones:

Indicaciones	
Piensa un número	
Multiplícalo por 2	
Ahora adiciona 3	
Suma el número pensado	
Suma 1 al resultado obtenido	
Multiplica por 2	
Resta el número que pensaste al comienzo	
Resta 3	
Resta de nuevo el número que pensaste al inicio	
Resta 2	
Dos veces el resultado anterior	
Suma 3	

Si quieres que el resultado final sea 49 ¿cuál debería ser el número inicial? ______. Escribe como lo conseguiste ____

5. Antes de realizar esta actividad debes recordar que la diagonal de un polígono es un segmento que une dos vértices no consecutivos.

a. Traza con un lápiz las diagonales **desde un vértice en cada polígono** tal como se muestra en el primer polígono:



b. Observa la relación entre el número de triángulos y el número de lados del polígono luego completa la tabla:

Número de lados	**Número de triángulos**	**Relación**
4	**2**	$\mathbf{4-2}$
5		
6		
7		
8		
9		
…	…	
n		

c. Responde las siguientes preguntas:

Si un polígono tiene 54 triángulos ¿Cuántos lados tiene?	¿Es posible que un polígono tenga 100 triángulos? Si es así ¿Cuántos lados tendría?

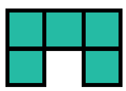
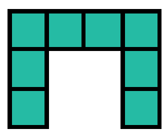
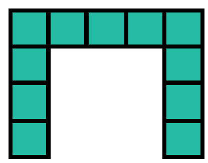
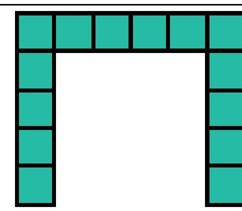
Anexo 4: Sesión III

SESIÓN III

Objetivo: resolver situaciones problema en donde se ponen en juego las estrategias de solución de los estudiantes las y herramientas proporcionadas por el profesor.

Nombres: ____

1. Observa la siguiente secuencia gráfica:

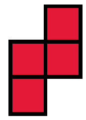
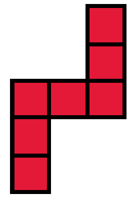
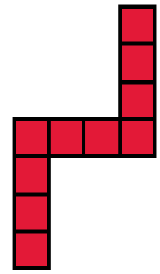
Figura				
Posición	**1**	**2**	**3**	**4**

a. Dibuja la figura que representa la posición 10	b. ¿Cuántos cuadros debe tener la figura de la posición 34?

c. Analiza los datos que se muestran en la siguiente tabla y de acuerdo a ellos plantea una expresión para la n –ésima posición

Posición	Núemero de cuadros	Relación
1	5	$\mathbf{3} \cdot 1 + 2$
2	8	$\mathbf{3} \cdot 2 + 2$
3		
4		
5		
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\boldsymbol{n}$		

2. Observa la siguiente secuencia gráfica:

Figura				
Posición	**1**	**2**	**3**	**4**

a. Dibula la figura que representa la posición 10	b. ¿Cuántos cuadros debe tener la figura de la posición 100?

c. Analiza los datos que se muestran en la siguiente tabla y de acuerdo a ellos plantea una expresion para la n –ésima posición

Posición	**Núemero de cuadros**	**Relación**
1	1	$\mathbf{1}$
2	4	$\mathbf{2} \cdot 2$
3	7	$\mathbf{3} \cdot 2 + 1$
4	10	$\mathbf{4} \cdot 2 + 2$
5		
6		
…	…	…
$\boldsymbol{n}$		

3. Sigue las indicaciones de la siguiente tabla y realiza el ejercicio mínimo con dos números diferentes.

Indicación	Expresión
Piensa un número	
Cinco veces el número pensado	
Adiciona 8	
Multiplica por 4	
Suma 9	
Multiplica por 5	

Sustrae 105	
Divide por 100	
Resta 1	

Al realizar las operaciones, observas alguna relación entre el resultado y el número original. Explica tu respuesta: ____

____

4. Lee con atención la siguiente situación:

Martín abrió un libro de texto y al sumar los números de páginas de las dos hojas enfrentadas dio como resultado 207.

¿Cuáles son los números de las páginas? _______________

Explica con tus palabras como encontraste la solución: _________________________

____

5. Observa el siguiente patrón:

Figura 1 Figura 2 Figura 3

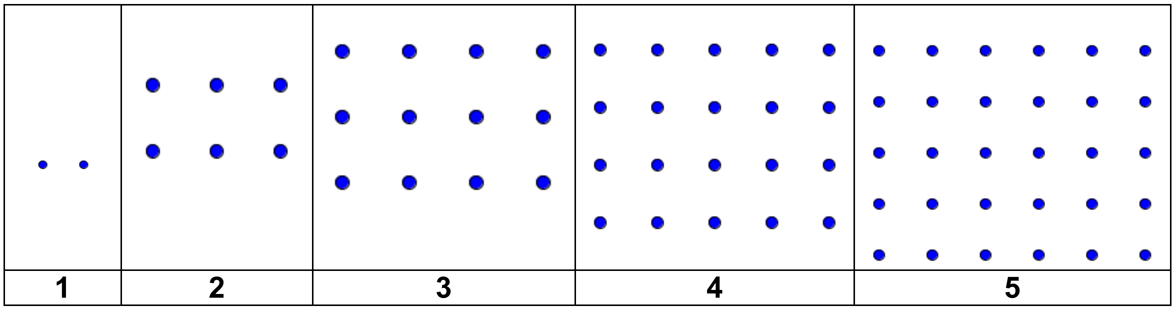
a. Completa la siguiente tabla:

Figura	Número de palillos	Relación
1	4	$2 \cdot 2 + 0$
2	7	$2 \cdot 3 + 1$
3	10	
4		
5		
6		
…		
$\boldsymbol{n}$		

b. ¿Cuántos palillos se necesitan para construir la figura 20? _______________

c. ¿Cuál sería la expresión que corresponde al número de palillos para la figura n?
____

6. A continuación, encontraras un arreglo de puntos, observa con atención como se va formando la secuencia:



a. Completa la siguiente tabla de acuerdo al arreglo:

Posición	Número de puntos	Relación
1	2	1×2
2	6	2×3
3		3×4
4		
5		
6		
…	..	…
n		$n(n+1)$

Usando la relación que se muestra en la tabla anterior contesta las siguientes preguntas:

b. ¿Cuál es el número de puntos para la posición 20? _______	c. ¿Hay un número que tiene 380 puntos? Si es así ¿Cuál es?

7. Deisy es una estudiante de grado séptimo. Cogio su libro de castellano lo abrió y la suma de los números de las páginas era 201 ¿cuáles eran las páginas?

Operación:	**Respuesta:**
	______________________________ ______________________________

8. Las medidas de los lados de un triángulo son números naturales consecutivos. Si el perímetro mide 33, ¿cuánto mide el lado menor?

Operación:	**Respuesta:**

9. Carlos y Sara dividen cierta suma de dinero en partes iguales. Luego, Sara le regala a Carlos un tercio de su parte. Si Carlos quedó con $3.000, ¿cuál era la suma inicial de dinero?

Operación:	**Respuesta:**

Anexo 5: Guía de estrategia

ESTRATEGIA PARA LA SOLUCIÓN DE SITUACIONES

Comprender la situación 	Con el ánimo de lograr la solución de la situación es indispensable la comprensión de la misma, las siguientes preguntas pueden orientarte para lograrlo. • Lee con detenimiento el enunciado de la situación • Subraya los datos importantes como, por ejemplo: ¿Cuál es la pregunta de la situación? ¿Cuáles son los datos que te sirven? ¿Qué relación encuentras entre los datos y la pregunta? ¿Cuáles son los datos conocidos? ¿Cuál es el dato que te están solicitando?
Determinar un plan 	Después de comprender la situación es momento de determinar la operación indicada que permita responder a la pregunta. ¿Cuáles son los pasos que deberías seguir para resolver la situación? ¿Cuál es la operación que resuelve la situación? ¿Solo requieres realizar una operación para resolver la situación?
Poner en práctica el plan 	Ahora es momento de poner en práctica el plan que has pensado. ¿Qué debes hacer primero? Realiza las operaciones paso a paso. ¿Está funcionando el plan?
Confirmar la solución obtenida	Finalmente es conveniente evaluar si la solución obtenida es razonable

	y responde a pregunta de la situación. ¿La solución obtenida responde a la pregunta planteada? ¿Puedes justificarlo? ¿Puedes comprobarla la solución? Usa los datos para ello Revisa los cálculos realizados ¿evidencias algún error? Si encontraste un error ¿cómo se podría evitar?

Bibliografía

Azarquiel, G. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra .* Sintesis.

Collette, J. P. (1992). *Historia de las Matemáticas I.* Siglo XXI.

Évariste Galois: un genio en la base del álgebra moderna. (2011). *Suma*, 101-106. Obtenido de http://www.fespm.es/sites/revistasuma.es/IMG/pdf/66/101-106.pdf

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antiguedad a nuestros días, I.* Madrid : Alianza.

Musser, G., Burger, W., & Peterson, B. (2008). *Mathematics for Elementary Teacher.* Bicentennial.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Perero, M. (1914). Historia e historias de matemáticas. México: Grupo Editorial Iberoamérica S. A.

Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas.

Rey Pastor, J. y. (2000). Historia de la matemática. Del renacimiento a la actualidad (Vol. 2). Barcelona: Gedisa, S.A.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M., & Hernández, J. (1996). *Iniciación al álgebra.* Sintesis.

Valderrama, J. J. (1989). *5 Años de olimpiadas de matemáticas para primaria 1985-1989.* Bogotá: Corporación Universitaria Antonio Nariño.

Walle, J. A. (s.f.). *Elementary and Middle Schooll Mathematics Teaching Developmentally.* Pearson Education, Chapter 8.