UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Unidad didáctica para desarrollar el sentido numérico de los estudiantes de grado séptimo teniendo como base los números enteros

Jean Carlos Baena Eljach

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Valledupar, Colombia

2016

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Unidad didáctica para desarrollar el sentido numérico de los estudiantes de grado séptimo teniendo como base los números enteros

Jean Carlos Baena Eljach

Trabajo Final presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

PhD. Clara Helena Sánchez Botero

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Valledupar, Colombia

2016

“Quien quiera enseñarnos una verdad que no nos la diga, simplemente que nos ayude a construir algunas trayectorias, para que al deslizarnos sobre ellas lleguemos nosotros mismos a la nueva verdad”.

Rosalba Osorio

Agradecimientos

A DIOS por darme la oportunidad de vivir, gozar de buena salud y de realizar esta maestría.

A mi madre Edilsa María Eljach Gómez, por su apoyo incondicional en este arduo proceso académico.

A mi padre Luis Alberto Baena Salas, quien emocionalmente me controló los afanes.

A mi hija María Gabriela Baena García, por su amor, paciencia y resignación en el poco tiempo dedicado en el transcurso de este logro.

A mi directora de Trabajo Final de Maestría, Clara Helena Sánchez Botero, por sus acertadas sugerencias y correcciones.

A mi gran amiga Claudia Liliana, por su colaboración y apoyo incondicional.

A todas aquellas personas que directa o indirectamente aportaron para que fuese realidad este alcance.

Resumen

En este Trabajo Final de Maestría se presenta una propuesta didáctica con el fin de desarrollar algunos componentes del sentido numérico respecto a los Números Enteros basándose en la solución de situaciones problemas cotidianos. La propuesta se desarrolló teniendo en cuenta la información obtenida en una prueba diagnóstica aplicada a estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa de Educación Media de Aguas Blancas del corregimiento de Aguas Blancas, Valledupar. Luego de una reflexión histórico-epistemológica, disciplinar y didáctico sobre el sistema de los Números Enteros se plantean tres actividades, mediante las cuales el estudiante pueda desarrollar el concepto de números enteros, sus operaciones y sus propiedades. Al aplicar la propuesta se obtuvieron resultados que mostraron una mejoría en el aprendizaje del grupo experimental comparado con el otro grupo de séptimo, al cual se le aplicó la enseñanza tradicional.

Palabras clave: números enteros, adición, producto, sentido numérico, resolución de problemas.

Abstract

In this Final work of Master´s degree is shown a Methodogical proposal in order to develop some components of number sense about integers numbers based on the solution of daily problems solutions. The proposal was developed taking the information obtained in a diagnostic test applied to seventh graders at the School of Media Education Aguas Blancas, in Aguas Blancas, Valledupar. After an historical, epistemological, discipline and methodological reflection of integer's numbers system are shown three activities through which the student can develop the concept of integer's numbers, their operations and their properties. By applying, the proposal results showed an improvement in learning of the experimental group compared with the other group the seventh to which traditional teaching was applied.

Keywords: integer's numbers, addition, product, number sense, problem resolution.

Contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Pág.

Introducción

El presente trabajo se desarrolló con los estudiantes de séptimo grado jornada mañana de la Institución Educativa de Educación Media de Aguas Blancas, ésta es de carácter oficial y se encuentra ubicada en el corregimiento de Aguas Blancas, zona rural del Municipio de Valledupar. La población estudiantil de la Institución es de escasos recursos económicos y el núcleo familiar de la mayoría es disfuncional.

El propósito de este trabajo es diseñar una unidad didáctica basada en la metodología de una investigación experimental que permita a los estudiantes de grado séptimo dar significado al concepto de número entero y aplicar sus operaciones básicas en el planteamiento y resolución de problemas. Una unidad didáctica es un conjunto integrado, organizado y secuencial de los elementos básicos que conforman el proceso de enseñanza-aprendizaje (motivación, relaciones con otros conocimientos, objetivos, contenidos, método y estrategias, actividades y evaluación) con sentido propio, unitario y completo que permite a los estudiantes, tras su estudio, apreciar el resultado de su trabajo. (GARCÍA, 2009)

El trabajo está estructurado en cinco capítulos. El primer capítulo se refiere a los aspectos preliminares del trabajo tales como, el origen de la pregunta de investigación, el objetivo que se trazó y algunos antecedentes sobre propuestas de la enseñanza de los números enteros.

En el segundo capítulo reposan los aspectos teóricos conformados por las voces de la historia de los números enteros, su concepto, propiedades y operaciones, y la parte didáctica correspondiente al sentido numérico con resolución de problemas.

El tercer capítulo contiene la propuesta para desarrollar el sentido numérico de los estudiantes de grado séptimo teniendo como base los números enteros, elaborada a partir de la evaluación diagnóstica y aplicando las actividades diseñadas.

En el cuarto capítulo se hace el análisis de los resultados de la prueba diagnóstica y de las evaluaciones por actividad que se aplicaron a los estudiantes.

En el quinto capítulo se presentan las conclusiones y las recomendaciones de la unidad didáctica.

Al final del trabajo se encuentra la evaluación diagnóstica y las evidencias de las actividades aplicadas.

1. Contextualización del problema de investigación

Desde la antigüedad, el hombre ha empleado el concepto de número natural en situaciones de la vida cotidiana tales como conteo de objetos, medidas de tierras, entre otras, sin embargo, al pasar el tiempo se fueron presentando aspectos que los números naturales no podían responderlos y es así como surge la necesidad de conocer otros conjuntos numéricos entre esos el conjunto de los números enteros.

Desde mi experiencia como docente del grado séptimo en la Institución Educativa de Educación Media de Aguas Blancas, de carácter oficial y ubicada en el corregimiento de Aguas Blancas, zona rural del Municipio de Valledupar, he observado que la mayoría de los estudiantes no logran dar significado a los números enteros, particularmente a los números negativos; tienen dificultades para diferenciar el signo del número del de la operación de sustracción, manifiestan problemas para representar y ordenar los enteros, y no comprenden la estructura de las operaciones y sus propiedades. Cuando se les plantean ejercicios y problemas que involucran enteros, operan sin dar significado a la solución y no pueden explicar por qué el resultado es correcto o incorrecto.

De la situación descrita anteriormente surgió la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué tipo de unidad didáctica permitiría a los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa de Educación Media de Aguas Blancas desarrollar su sentido numérico respecto a los enteros?

Para responder la pregunta antes planteada se diseñó e implementó una unidad didáctica que permitiera a los alumnos dar significado al concepto de número entero, manejar adecuadamente las operaciones básicas y la resolución de problemas con ellos, aspectos que intervienen en algunos componentes del Sentido Numérico.

Este Trabajo Final se delimitó por el objetivo general que a continuación se menciona:

Diseñar una unidad didáctica que permita a los estudiantes de grado séptimo dar significado al concepto de número entero y aplicar sus operaciones básicas en el planteamiento y resolución de problemas.

Todo objetivo general para alcanzarlo requiere de unos objetivos específicos que en este caso son los siguientes:

- Identificar conceptos previos de los estudiantes respecto a los números enteros y sus operaciones.
- Determinar los aspectos histórico-epistemológicos, disciplinares, curriculares y didácticos relacionados con los números enteros y sus operaciones.
- Estructurar las actividades que conformarán la unidad didáctica.
- Validar algunas actividades con los estudiantes de séptimo grado.

Una de las motivaciones para elaborar dicha estrategia es que soy consciente de que las matemáticas están en constante crecimiento y también lo deben estar los mecanismos para enseñarla. Las falencias en la enseñanza–aprendizaje no son siempre culpa de los estudiantes sino como docente aporto también a su dificultad cuando dejo de buscar estrategias para mejorar dicho proceso.

2. Marco teórico

El marco teórico que fundamenta este Trabajo Final está dividido en tres secciones: los aspectos histórico-epistemológicos, el componente disciplinar y la reflexión didáctica sobre la enseñanza-aprendizaje de los números enteros.

2.1 Breve recorrido por la historia de los números enteros

En nuestro quehacer académico en el aula, muchas veces no dimensionamos el tiempo que se requirió para que la comunidad matemática aceptara un concepto, un teorema o una propiedad relativa a los conjuntos numéricos, y particularmente a los enteros negativos. A través de la historia se han presentado diversos cambios en la construcción y evolución de este concepto específico mirado desde la perspectiva histórica, epistemológica y científica.

En la época de Diofanto (s. III) se presentan los primeros rastros de los números negativos pero, él los rechaza por no considerarlos números o por no considerarlos posible solución a ecuaciones tales como $x + b = c$ siendo b un número natural mayor que c. Sin embargo, (GÓMEZ, 2001), menciona que Diofanto, en su libro I de la Aritmética, emplea los números negativos al hacer un planteamiento matemático relacionado con la regla de los signos el cual dice así: “lo que es lo que falta multiplicado por lo que es lo que falta da lo que es positivo; mientras que lo que es que falta multiplicado por lo que es positivo, da lo que es lo que falta”.

Con esta ley plantea, por primera vez en la historia, una teoría sobre los números enteros que tiene presente todos los casos de la ley de los signos, para lograr “completar” las leyes de la multiplicación y con esta encontrar solución a todas las ecuaciones del tipo $x + b = c$.

Los números negativos fueron usados por los chinos, y probablemente sin muchos problemas, ya que estaban acostumbrados a calcular utilizando dos tipos de varillas, unas de color rojo para los positivos (haberes) y otras de color negro para los negativos (deudas). En el siglo VI, los matemáticos y astrónomos hindúes Brahmagupta, y Bháskara utilizaron los números negativos de un modo práctico sin profundizar en ellos ni definirlos.

Los logros alcanzados por los hindúes en cuanto al tratamiento con los números negativos cayeron en el vacío, pues fueron invadidos por los árabes, y los matemáticos de esta cultura no recogieron aportes importantes como la consideración de las raíces negativas, seguramente ello provenga de la estrecha relación que hacían entre número y magnitud. Los árabes debido a su mentalidad práctica ignoraron a esos “monstruos” sin soporte real, que al parecer sólo surgen de la imaginación de los hindúes. (STEWART, 2007)

La actitud de los matemáticos en la época del renacimiento fue diversa frente al reconocimiento de los negativos, pero lo que se puede confirmar es que realizaban operaciones más generalizadas. En el periodo final de esta época todavía lo negativo estaba asociado a restas indicadas con solución positiva. (GÓMEZ, 2001)

En el siglo XVII con el desarrollo de la geometría analítica el uso de los números negativos se extiende como artificios de cálculo. A medida que se iba trabajando o generalizando el uso del álgebra era común el empleo de las cantidades negativas aisladas. (SCHUBRING, 1988), manifiesta que los números negativos no constituyen un concepto aislado en las matemáticas sino que surgen más allá del concepto de número en el nivel de los fundamentos, convirtiéndose en un desafío para las mismas.

En el álgebra las cantidades no sólo necesitaban para su determinación su valor absoluto sino que también había que atender a su sentido para referirse, por ejemplo, al tiempo

-pasado o futuro-, dinero que se tiene o se adeuda, movimiento hacia atrás o adelante, entre otras. Estas cantidades algebraicas eran las que iban acompañadas del signo más (+) o del menos (-). Así pues se generaron aquellos números menores que cero o menores que cualquier cantidad positiva.

(EULER, 1797) En sus *Elementos de Álgebra* plantea que la multiplicación de cantidades con signo es conmutativa y razona por eliminación diciendo que $-a$ por $-b$ será ab ya que no puede ser $-ab$ que es lo que vale $-a$ por b.

En el siglo XIX los números negativos son aceptados como números pero no porque representen cantidad sino porque se incorporan como una extensión de los números naturales, en donde se continúan cumpliendo leyes de la aritmética. Surge entonces la necesidad de estudiar los fundamentos de los diferentes sistemas numéricos y entre ellos los números negativos, es decir, de alguna manera se trata de dotar de contenido matemático a los números negativos. Es por ello que la regla de los signos se pasa a considerar como un acuerdo para que se conserve el principio de permanencia aritmética. (MEN, 2006).

Así podemos darnos cuenta que al ir trabajando situaciones con números enteros a través de la historia fueron surgiendo obstáculos que algunos autores fueron haciéndole el quite o rechazándolos. Sin embargo, al superar éstos obstáculos permitieron aceptar los números negativos como cantidades reales y justificar su estructura aditiva, pero no así la multiplicativa (CID, 2000), ya que en ésta se encontraron con la regla de los signos de la cual surgieron múltiples justificaciones para dar claridad de su significado y funcionamiento. En la actualidad se utilizan los números negativos con las operaciones de una manera axiomática, el docente las comunica y el estudiante las utiliza por medio de la mecanización de sus reglas.

2.2 Aspecto disciplinar

2.2.1 Los números enteros y sus propiedades

En el siglo XIX, Weierstrass (1815-1897) introdujo la definición de número entero, como una clase de pares de naturales mediante una relación de equivalencia, con el propósito de permitir la "resta" de naturales. Esta idea permite definir constructivamente dentro de la teoría de conjuntos a los números enteros a partir de los números naturales dotados de la estructura $< N, +, \cdot, 0, 1 >$ en donde la suma y la multiplicación son asociativas, conmutativas, modulativas y se cumple la propiedad distributiva.

Ahora consideremos el conjunto $N \times N = \{(n, m): n \in N, m \in N\}$ en el cual se define la relación binaria $\sim$ como sigue:

$$(n, m) \sim (r, s) \Leftrightarrow n + s = m + r$$

donde $(n, m), (s, r) \in N \times N$. Esta relación es una relación de equivalencia como lo veremos enseguida.

2.2.1.1 Relación de equivalencia

Definición 1. Una relación de equivalencia R en un conjunto $A \neq \emptyset$ es una relación $R \subseteq A \times A$ que satisface:

I. R es reflexiva, si $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$.
II. R es simétrica, si $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \in R$ para todo $a, b \in A$.
III. R es transitiva, si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ entonces $(a, c) \in R$ para todo $a, b, c \in A$.

Veamos que la relación $\sim$ definida anteriormente en $N \times N$ es una relación de equivalencia. En efecto:

- Es reflexiva porque $n + m = m + n$ para todo $n, m \in N$ por la propiedad conmutativa de la suma en los números naturales, luego $(n, m) \sim (n, m)$.

- Es simétrica porque $si\ (n, m) \sim (r, s)\ entonces\ n + s = m + r$, aplicando nuevamente la propiedad conmutativa de la suma en los naturales se tiene $s + n = r + m$ y por simetría de la igualdad $r + m = s + n$ lo que implica por definición que $(r, s) \sim (n, m)$.

- Es transitiva porque, si suponemos que $(n,m)\sim(r,s)$ y $(r,s)\sim(e,f)$, se tiene que $n+s=m+r$ y $r+f=s+e$ sumando miembro a miembro

$$(n+s)+(r+f)=(m+r)+(s+e)$$

y aplicando las propiedades de la suma en N se obtiene

$$(n+f)+(s+r)=(m+e)+(s+r)$$

aplicando la propiedad cancelativa en N $n+f=m+e$ lo que implica $(n,m)\sim(e,f)$.

Definición 2. Sea R una relación de equivalencia en el conjunto A. La clase de equivalencia de un elemento $a\in A$ con respecto a R, es el conjunto $\{b\in A;(a,b)\in R\}$ que se nota $[a]_R$. Es decir $[a]_R=\{b\in A/(a,b)\in R\}$.

Las clases de equivalencia forman un conjunto que denotamos por A/R y que definen una *partición* sobre A. Esto es, cumplen las siguientes condiciones:

I. $[a]_R \neq \emptyset \; para\ todo\ a \in A$
II. $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset \; si\ y\ sólo\ si\ (a,b)\notin R$
III. $\cup\, [a]_R = A\; para\ todo\ a\in A$

2.2.1.2 Los Números Enteros

Definición 3. El conjunto de clases de equivalencia de $N\times N/\sim$ se llamará el conjunto de **los números enteros** y se denotará por Z. Un **número entero** por tanto es una clase de equivalencia de $N\times N/\sim$. Por ejemplo, sea $n\in N$

$$0_z=[(n,n)]$$

$$1_z=[(n+1,n)]$$

$$-1_z=[(n,n+1)]$$

Como n es cualquiera, se puede escoger el representante que deseemos. Por ejemplo

$$0_z=[(1,1)]=[(0,0)]$$

$$1_z=[(2,1)]=[(5,4)]$$

$$-1_z=[(1,2)]=[(4,5)]$$

Claramente la intuición en la definición está en que el número entero que define la clase $[(m,n)]$ es "$m-n$".

Suma de los Números Enteros y sus propiedades

La operación suma de los números enteros está definida así:

Si $z, z' \in Z$ y tenemos que $z = [(a,b)]$ y $z' = [(c,d)]$, entonces $z + z' = [(a,b)] + [(c,d)] = [(a+c, b+d)]$ que por definición es un número entero. Luego la operación suma está bien definida.

Veamos unos ejemplos

a) Sea $-3 = [(1,4)]$ y $-6 = [(1,7)]$ entonces

$$(-3) + (-6) = [(1,4)] + [(1,7)] = [(1+1, 4+7)] = [(2,11)] = -9.$$

b) Sea $4 = [(5,1)]$ y $-7 = [(1,8)]$ entonces

$$4 + (-7) = [(5,1)] + [(1,8)] = [(5+1, 1+8)] = [(6,9)] = -3$$

c) Sea $5 = [(6,1)]$ y $2 = [(3,1)]$ entonces

$$5 + 2 = [(6,1)] + [(3,1)] = [(6+3, 1+1)] = [(9,2)] = 7$$

d) Sea $-1 = [(1,2)]$ y $12 = [(13,1)]$ entonces

$$(-1) + 12 = [(1,2)] + [(13,1)] = [(1+13, 2+1)] = [(14,3)] = 11$$

Propiedades de la suma

Con la definición anterior se puede probar que la suma en Z cumple las propiedades asociativa, conmutativa, modulativa e invertiva.

- Asociativa

$$\forall\, a, b, c \in Z, (a+b)+c = a+(b+c)$$

Demostración

Supongamos que $a = [(m,n)]$, $b = [(r,s)]$ y $c = [(f,g)]$ entonces

$$\begin{aligned}(a+b)+c &= ([(m,n)] + [(r,s)]) + [(f,g)] \\ &= ([(m+r, n+s)]) + [(f,g)] \\ &= \big[\big((m+r)+f, (n+s)+g\big)\big] \\ &= [(m+(r+f), n+(s+g))] \\ &= [(m,n)] + ([(r+f, s+g)]) \\ &= [(m,n)] + ([(r,s)] + [(f,g)]) = a+(b+c)\end{aligned}$$

Llegando así a la igualdad deseada

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

- Conmutativa

$$\forall\, a,b \in Z, a+b=b+a$$

Demostración

Sea $a=[(m,n)]$ y $b=[(r,s)]$ entonces

$$a+b=[(m,n)]+\ [(r,s)]=[(m+r,n+s)]=[(r+m,s+n)]$$
$$=[(r,s)]+\ [(m,n)]=b+a$$

Quedando demostrada la propiedad $a+b=b+a$.

- Modulativa

$$\forall\, a \in Z, 0+a=a=a+0$$

Demostración

Sea $a=[(m,n)]$ y $0=[(0,0)]$ entonces

$$a+0=[(m,n)]+\ [(0,0)]=[(m+0,n+0)]=[(m,n)]=a$$
$$0+a=[(0,0)]+\ [(m,n)]=[(0+m,0+n)]=[(m,n)]=a$$

Por lo tanto queda demostrada la propiedad $a+0=a=0+a$.

- Invertiva

$$\forall\, a \in Z, \exists\, b \in Z \; tal\; que\; a+b=0=b+a$$

Demostración

Sea $a=[(m,n)]$ y $b=[(n,m)]$ entonces

$$a+b=[(m,n)]+\ [(n,m)]=[(m+n,n+m)]=[(0,0)]$$
$$b+a=[(n,m)]+\ [(m,n)]=[(n+m,m+n)]=[(0,0)]$$

Por lo tanto queda demostrada la propiedad, con la cual dado a existe un número, el opuesto aditivo de a, que denotaremos $-a$ tal que

$$a+(-a)=(-a)+0=0$$

Obsérvese que si $a=[(m,n)]$, entonces $-a=[(n,m)]$.

Esta última propiedad que no tienen los naturales es la que permite definir la sustracción en los números enteros.

Definición 4. Sean $z_1, z_2 \in Z$ definimos $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

Veamos unos ejemplos

a) Sea $-5 = [(1,6)]$ y $-3 = [(1,4)]$ entonces

$$(-5) - (-3) = (-5) + (-3) = [(1,6)] + [(4,1)] = [(1 + 4, 6 + 1)] = [(5,7)] = -2$$

Ahora observemos lo que ocurre si cambiamos de orden el minuendo y el sustraendo

$$(-3) - (-5) = (-3) + (-5) = [(1,4)] + [(6,1)] = [(1 + 6, 4 + 1)] = [(7,5)] = 2$$

El resultado de cada operación es distinto por lo tanto esta operación no es conmutativa.

b) Sea $2 = [(3,1)]$, $-7 = [(1,8)]$ y $4 = [(5,1)]$ entonces

$$\begin{aligned}\big(2 - (-7)\big) - 4 &= (2 + 7) + (-4) = ([(3,1)] + [(8,1)]) + [(1,5)] \\ &= [(3 + 8, 1 + 1)] + [(1,5)] = [(11,2)] + [(1,5)] \\ &= [(11 + 1, 2 + 5)] = [(12,7)] = 5\end{aligned}$$

Asociemos de otra manera y observemos

$$\begin{aligned}2 - \big((-7) - 4\big) &= 2 - \big((-7) + (-4)\big) = [(3,1)] - ([(1,8)] + [(1,5)]) \\ &= [(3,1)] - ([(1,8)] + [(1,5)]) = [(3,1)] - [(1 + 1, 8 + 5)] \\ &= [(3,1)] - [(2,13)] = [(3,1)] + [(13,2)] \\ &= [(3 + 13, 1 + 2)] = [(16,3)] = 13\end{aligned}$$

El resultado de cada operación es distinto, lo que indica que en la sustracción no se cumple la propiedad asociativa.

Multiplicación de los números enteros y sus propiedades

La multiplicación de números enteros está definida como sigue:

Si $z, z' \in Z$ y tenemos que $z = [(a, b)]$ y $z' = [(c, d)]$, entonces $z \times z' = [(a, b)] \times [(c, d)] = [(ac + bd, ad + bc)]$ que por definición es un número entero y por lo tanto la multiplicación está bien definida.

Veamos unos ejemplos donde se verifique la definición anterior

a) Sea $-2 = [(1,3)]$ y $4 = [(5,1)]$

$$\begin{aligned}(-2) \times 4 &= [(1,3)] \times [(5,1)] = [(1 \times 5 + 3 \times 1, 1 \times 1 + 3 \times 5)] \\ &= [(5 + 3, 1 + 15)] = [(8, 16)] = -8\end{aligned}$$

Lo que indica

$$(-2) \times 4 = -8$$

Caso particular de la ley de los signos en la que se puede observar que

$$(-) \times (+) = -$$

b) Sea $-5 = [(1,6)]$ y $-3 = [(1,4)]$

$$(-5) \times (-3) = [(1,6)] \times [(1,4)] = [(1 \times 1 + 6 \times 4, 1 \times 4 + 6 \times 1)]$$
$$= [(1 + 24, 4 + 6)] = [(25, 10)] = 15$$

Lo que indica

$$(-5) \times (-3) = 15$$

Caso particular de la ley de los signos en la que se puede observar que

$$(-) \times (-) = +$$

c) Sea $3 = [(4,1)]$ y $3 = [(5,2)]$

$$3 \times 3 = [(4,1)] \times [(5,2)] = [(4 \times 5 + 1 \times 2, 4 \times 2 + 1 \times 5)]$$
$$= [(20 + 2, 8 + 5)] = [(22, 13)] = 9$$

Lo que indica

$$3 \times 3 = 9$$

Caso particular de la ley de los signos en la que se puede observar que

$$(+) \times (+) = +$$

d) Sea $1 = [(2,1)]$ y $-2 = [(1,3)]$

$$1 \times (-2) = [(2,1)] \times [(1,3)] = [(2 \times 1 + 1 \times 3, 2 \times 3 + 1 \times 1)]$$
$$= [(2 + 3, 6 + 1)] = [(5, 7)] = -2$$

Lo que indica

$$1 \times (-2) = -2$$

Caso particular de la ley de los signos en la que se puede observar que

$$(+) \times (-) = -$$

Propiedades de la multiplicación

En Z se cumplen las propiedades asociativa, conmutativa, modulativa, distributiva con relación a la suma y la ley cancelativa.

Para lo que sigue vamos a suponer que $a = [(m,n)]$, $b = [(r,s)]$ y $c = [(f,g)]$ son elementos de Z.

- Asociativa

$$\forall\, a,b,c \in Z, (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

Demostración

$$(a \times b) \times c = ([(m,n)] \times [(r,s)]) \times [(f,g)]$$
$$= ([(mr+ns, ms+nr)]) \times [(f,g)]$$
$$= \left[\left((mr+ns) \times f + (ms+nr) \times g, (mr+ns) \times g + (ms+nr) \times f\right)\right]$$
$$= [(mrf + nsf + msg + nrg, mrg + nsg + msf + nrf)]$$
$$= \left[\left(m(rf+sg) + n(sf+rg), m(rg+sf) + n(sg+rf)\right)\right]$$
$$= \left[\left(m(rf+sg) + n(rg+sf), m(rg+sf) + n(rf+sg)\right)\right]$$
$$= [(m,n)] \times ([(rf+sg, rg+sf)])$$
$$= [(m,n)] \times ([(r,s)] \times [(f,g)]) = a \times (b \times c)$$

Llegando así a la igualdad deseada, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

- Conmutativa

$$\forall\, a,b \in Z, a \times b = b \times a$$

Demostración

$$a \times b = [(m,n)] \times [(r,s)] = [(mr+ns, ms+nr)] = [(rm+sn, sm+rn)]$$
$$= [(r,s)] \times [(m,n)] = b \times a$$

Quedando demostrada la propiedad, $a \times b = b \times a$.

- Modulativa

$$\forall\, a \in Z, 1 \times a = a = a \times 1$$

Demostración

$$a \times 1 = [(m,n)] \times [(1,0)] = [(m \times 1 + n \times 0, m \times 0 + n \times 1)] = [(m+0, 0+n)]$$
$$= [(m,n)] = a$$
$$1 \times a = [(1,0)] \times [(m,n)] = [(1 \times m + 0 \times n, 0 \times m + 1 \times n)] = [(m+0, 0+n)]$$
$$= [(m,n)] = a$$

Por lo tanto queda demostrada la propiedad $1 \times a = a = a \times 1$.

- Distributiva

$$\forall\, a, b, c \in Z, a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

Demostración

$$a \times (b + c) = [(m, n)] \times ([(r, s)] + [(f, g)]) = [(m, n)] \times [(r + f, s + g)]$$
$$= \big[\big(m \times (r + f) + n \times (s + g), m \times (s + g) + n \times (r + f)\big)\big]$$
$$= [(mr + mf + ns + ng, ms + mg + nr + nf)]$$
$$= [(mr + ns + mf + ng, ms + nr + mg + nf)]$$
$$= [(mr + ns, ms + nr)] + [(mf + ng, mg + nf)]$$
$$= [(m, n)] \times [(r, s)] + [(m, n)] \times [(f, g)] = a \times b + a \times c$$

Por lo tanto

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

- Cancelativa

$$\forall\, a, b, c \in Z, si\ a \times c = b \times c\ entonces\ a = b$$

Demostración

Sean $[(m, n)], [(r, s)], [(f, g)] \in Z$ con $[(f, g)] \neq [(0,0)]$. Entonces

$[(m, n)] \times [(f, g)] = [(r, s)] \times [(f, g)]$. Luego

$[(mf + ng, mg + nf)] = [(rf + sg, rg + sf)]$.

Esto es equivalente a

$$mf + ng + rg + sf = mg + nf + rf + sg$$
$$f(m + s) + g(n + r) = f(n + r) + g(m + s)$$

Como $[(f, g)] \neq [(0,0)]$ entonces $f \neq g$. Como $f, g \in N$ podemos suponer por definición del orden en N que $f > g$ entonces se tiene que $f = g + k$ para un $k \in N^*$, donde $N^* = N - \{0\}$.

Por lo tanto

$\big((g + k) \times (m + s)\big) + \big(g \times (n + r)\big) = \big((g + k) \times (n + r)\big) + \big(g \times (m + s)\big)$.

Entonces

$$g(m + s) + k(m + s) + g(n + r) = g(n + r) + k(n + r) + g(m + s)$$

y aplicando la propiedad cancelativa de la suma en N se tiene que

$$k(m + s) = k(n + r)$$

y como $k \in N^*$se sigue que $m + s = n + r$ de donde $[(m, n)] = [(r, s)]$
Quedando así demostrada la propiedad cancelativa.

Relación de orden en los Números Enteros

Definición 5. Dada la relación de orden en N diremos que $z = [(m, n)]$ es positivo si $m > n$.

Definición 6. Sean a y b dos enteros, diremos que a es menor o igual que b**,** y lo denotamos por $a \leq b$, si y sólo si $b = a + k$ para algún $k \in N$.

Teorema. La relación $\leq$ en Z anteriormente definida es una relación de orden.

Demostración

I. Es reflexiva

Efectivamente, como $a = a + 0$ entonces $a \leq a$ para todo $a \in Z$.

II. Es antisimétrica

Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $b = a + k$ para algún $k \in N$ y $a = b + k'$ para algún $k' \in N$. Por lo tanto $b = (b + k') + k = b + (k' + k)$ de donde se tiene que $k' + k = 0$ y como $k', k \in N$ entonces $k' = k = 0$. Luego $a = b$.

III. Transitiva

Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $b = a + k$ para algún $k \in N$ y $c = b + k'$ para algún $k' \in N$. Por lo tanto $c = (a + k) + k' = a + (k + k')$ donde $k + k' \in N$. Luego $a \leq c$.

Definición 7. $a < b$ si y sólo si $a \leq b$ y $a \neq b$.

Definición 8. $a \geq b$ si y sólo si $b \leq a$.

Con las propiedades anteriores, el problema de solución de una ecuación de tipo $x + b = c$ con $a, b, c \in N$ queda completamente resuelto, simplemente $x = c - b,$ donde $x \in Z$.

En el conjunto de los números enteros encontramos que la división no está bien definida, pero si se pueden determinar divisores de un entero.

Definición 9. **Divisibilidad.** Un entero b es divisible por un entero a, no cero, si existe un entero x tal que $b = ax$ y se escribe $a|b$. En el caso en que b no sea divisible por a se escribe $a \nmid b$.

Con esta definición se puede afirmar lo siguiente: si $a|b$ entonces b es un múltiplo de a, a divide a b, la división b entre a es exacta y su resultado es un número entero.

2.3 Sentido numérico

En los Lineamientos (MEN, 1998), y Estándares de Competencias en Matemáticas del MEN se reitera que además de trabajar los sistemas numéricos formales: concepto de número, sistema de numeración, relaciones y operaciones, es fundamental en los niveles básicos dar significado a los conceptos y estructuras y desarrollar, en un principio, el sentido numérico de los estudiantes.

(GODINO, J. *et al* 2009) Definen el Sentido Numérico como la comprensión general que tiene una persona sobre los números y sus operaciones, junto con la capacidad para usar esta comprensión de manera flexible para emitir juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles para resolver problemas complejos. Implica, por tanto, la posesión de una competencia que se desarrolla gradualmente. En esta dirección The *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1989) propone componentes que caracterizan el sentido numérico, tales como: tener un buen entendimiento del significado de los números; desarrollar múltiples relaciones entre los números; reconocer la magnitud relativa de los números; conocer el efecto relativo de las operaciones en los números, y desarrollar referentes para medir objetos comunes y situaciones de su entorno.

Sin embargo autores tales como McIntosch *et al* (1992), citado por (ALMEIDA, *et al* 2014), ofrecen otras componentes que llevan al desarrollo del sentido numérico, algunas de ellas basadas en las dadas por la NCTM. Adicionaron además una relacionada con la búsqueda de métodos eficientes de cálculo y el uso de estrategias numéricas adecuadas.

En investigaciones posteriores los autores citados reúnen componentes de las dos partes y como producto surgen las siguientes componentes:

1. *Comprender el significado de los números*
El sentido numérico implica comprender cómo está organizado el sistema de numeración decimal y las múltiples relaciones que se dan entre los números. Un aspecto importante de esta componente es manejar el valor posicional, incluyendo su aplicación a los números naturales y decimales, y comprender las distintas expresiones de los números.

2. *Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números*
Es la habilidad para reconocer o estimar el tamaño absoluto de un número, cantidad o medida, o el tamaño relativo en relación con otro número, cantidad o medida. Se suele incluir en esta componente el tener estrategias útiles para comparar y ordenar números, y para identificar números entre dos dados.

3. *Usar puntos de referencia*
Es la habilidad para utilizar referentes mentales (matemáticos o reales) para pensar sobre los números y resolver problemas. Los puntos de referencia son valores con los que una persona «se siente cómoda» haciendo comparaciones o cálculos. Muchas veces son personales y están asociados a situaciones reales.

4. *Utilizar la composición y descomposición de los números*
Esta componente implica la habilidad para componer y descomponer los números, de una forma equivalente, con el objetivo de obtener el resultado de una operación, presentando mayor fluidez procedimental. Por ejemplo, cuando al sumar cantidades se descomponen en centenas, decenas y unidades.

5. *Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones*

El sentido numérico se manifiesta al utilizar diferentes representaciones (gráficas o pictóricas) para resolver problemas numéricos de manera efectiva y flexible. Esto es, modelar la situación del problema planteado con algo del dominio del estudiante.

6. *Comprender el efecto relativo de las operaciones*

Se incluye la habilidad para identificar cómo las diferentes operaciones afectan al resultado final de los problemas numéricos, lo que se suele denominar «comprender el efecto relativo de las operaciones» y «saber relacionar las operaciones». También incluye emplear propiedades para llegar más fácilmente a los resultados.

7. *Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta*

El sentido numérico se refleja cuando se siguen estrategias adecuadas en función de la tarea (método gráfico, cálculo escrito, estimación, cálculo mental, etc.) y se tiene la habilidad para evaluar si un resultado es razonable.

Aunque se presentan de manera independiente, estas componentes tienen fuertes relaciones entre ellas dependiendo de la tarea o del sujeto que la realice (McIntosh et al., 1992).

2.3.1 Estado del arte sobre didáctica de los enteros.

La enseñanza-aprendizaje de los Números Enteros ha sido objeto de investigaciones a lo largo de los tiempos, entre las cuales destacamos:

(BRUNO, 1997), en un artículo sobre su tesis doctoral plantea que el conjunto de los números enteros negativos no se debe abordar en el aula como un conjunto aislado, se debe trabajar de manera interrelacionada con sus diferentes aspectos: abstracto, de recta y contextual, y esto permitirá que los estudiantes adquieran un concepto más significativo de este conjunto numérico.

En (ALMEIDA, 2014), los investigadores hacen referencia a su trabajo con docentes de matemáticas en formación y evidencian cómo estos, a pesar de sus estudios, presentan falencias en su sentido numérico. Concluyen que sus carencias provienen de la manera como trabajaron los conceptos numéricos en la educación básica.

(BELL, 1986), profesor de la Universidad de Nottingham, en *Enseñanza por Diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros* referencia las situaciones que inducen a los estudiantes a encontrar sus errores al solucionar problemas con números enteros.

(GLAESER, 1981), resaltó que algunos matemáticos (Stiven, D'Alembert, Carnot) aceptaron la existencia de números negativos para dar soluciones a ciertas ecuaciones pero no fueron tomados como números reales sino ficticios; en este Trabajo Final se plantean situaciones cotidianas en donde el estudiante verifica la existencia y lo real que es el uso y significado de los números enteros, más específicamente los enteros negativos.

SCHUBRING (1986, 1988), manifiesta que un obstáculo epistemológico que se tiene para el aprendizaje de los números enteros es la tardía diferenciación entre número, cantidad y magnitud. Hoy día se trabaja los números enteros como tal. En esta unidad didáctica encontraremos situaciones en donde los enteros negativos vienen indicando alguna posición basándose en la recta numérica, cantidad cuando la situación lo requiera y magnitud cuando representa lo relativo con algo específico.

CID (2000), plantea que al resolver un problema utilizando situaciones cotidianas genera un conocimiento pero tal solución como lo plantea BELL (1986) puede ocasionar errores entre diferentes alumnos por las concepciones distintas que tengan cada uno de ellos. Por lo tanto, manifiesta CID que los conocimientos de un alumno sobre una noción matemática dependerán de la experiencia adquirida afrontando situaciones en las que dicha noción está implicada.

La referencia didáctica de esta investigación son las situaciones problemas en contexto cotidianos de los estudiantes, porque así se presentará la motivación a formular, plantear y solucionar dichas situaciones generando la evidencia del desarrollo del sentido numérico con el uso de los números enteros negativos.

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas del MEN plantean que al ir resolviendo problemas los estudiantes van tomando confianza en el uso de las matemáticas y les permite generar una mejoría en la comunicación simbólica propia de la disciplina y en los procesos de pensamiento, y esto no es ajeno al trabajar los números enteros.

3. Unidad didáctica para desarrollar el sentido numérico teniendo como base a los enteros negativos

3.1 Metodología general

Este trabajo de grado presenta una investigación de tipo experimental, ya que se implementó en un grupo de estudiantes una estrategia metodológica para observar los efectos o los cambios en sus niveles de aprendizaje.

La población estudiantil con que se trabajó este proyecto está compuesta por los estudiantes de uno de los grupos de grado séptimo de la Institución Educativa de Educación Media de Aguas Blancas, en Valledupar.

Las siguientes son las estrategias que se utilizaron para alcanzar los objetivos planteados:

1. Identificar conceptos previos de los estudiantes respecto a los números enteros y sus operaciones.

   Se aplicó una prueba diagnóstica diseñada con ítems de situaciones problemas para que plasmen sus argumentos de cada solución (ver anexo A). El análisis de los resultados de dicha prueba permitió identificar sus fortalezas y debilidades conceptuales. El grupo 701 fue catalogado como grupo experimental y el grupo 702 como el de control.

2. Determinar los aspectos histórico-epistemológicos, disciplinares, curriculares y didácticos relacionados con los números enteros y sus operaciones.

Para el cumplimiento de este objetivo se empezó con una búsqueda bibliográfica para establecer qué aspectos históricos inciden en la construcción del concepto de número entero y en sus operaciones básicas, para esto tomaré como base a (SCHUBRING, Os números negativos-exemplos de obstáculos epistemológicos?, 2012).

El análisis del aspecto disciplinar se llevó a cabo con el estudio de los conceptos, las operaciones básicas con sus propiedades de los números enteros. Esta teoría se confrontó con los Estándares Básicos de Competencia y Lineamientos Curriculares de Matemáticas correspondientes al grado séptimo con la finalidad de escoger específicamente lo necesario para cubrir el tema propuesto.

Las situaciones problema fueron la referencia didáctica de esta investigación ya que por medio de la formulación, el tratamiento y su resolución que suscita dicha situación, le permitió al niño y niña, desarrollar buena parte del sentido numérico con respecto a los enteros, particularmente a los enteros negativos.

3. Estructurar las actividades que conformarán la unidad didáctica.

   Las actividades de la presente unidad didáctica estuvieron enfocadas en el desarrollo de algunos de los componentes del sentido numérico de los estudiantes con respecto a los enteros y sus operaciones, empleando las situaciones problema contextualizadas a partir de las experiencias cotidianas, buscando una actitud participativa por parte de los estudiantes, contribuyendo a la diversidad de estrategias para la resolución, y a su vez estos resultados ser debatidos en plenaria.

4. Validar algunas actividades con los estudiantes de séptimo grado.

   Se aplicó la unidad didáctica al grupo experimental y se analizó su validez o pertinencia contrastando los resultados de la prueba diagnóstica y los resultados de las evaluaciones de cada actividad que conforma la unidad didáctica.

3.2 Estructura de la unidad didáctica

En la unidad didáctica se propuso el desarrollo del sentido numérico de los estudiantes respecto a los números enteros; en este trabajo final solo se trabajaron los siguientes aspectos:

- ✓ Comprender el significado de los números.
- ✓ Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones
- ✓ Comprender el efecto relativo de las operaciones
- ✓ Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta

La parte disciplinar trabajada con los estudiantes fue la identificación de las propiedades de los números enteros a partir de situaciones cercanas a su contexto social y familiar, teniendo en cuenta el desarrollo propio de la edad y de sus experiencias personales.

Las actividades tienen una estructura sencilla y continua en donde el estudiante puede seguir su ejecución de una manera práctica. Estas constan, cada una, de un objetivo, un **Sabías que!** donde le clarifica o instruye al estudiante sobre el tema tratado, luego, algunas situaciones específicas y por último la respectiva evaluación.

La actividad N°1 que se denomina **“Familiarízate con los números enteros”** tiene como objetivo explorar las propiedades de los números enteros a partir de situaciones concretas propias del contexto en donde se desenvuelven los estudiantes de la Institución.

La actividad N°2 que se titula **“Adición y sustracción de los números enteros”** particulariza su objetivo en aplicar las reglas de la adición y sustracción de números enteros para resolver problemas propuestos.

Y por último, la actividad N°3 **“Multiplicación de los números enteros”** plantea en su objetivo aplicar la ley de los signos para resolver productos de números enteros en problemas propuestos.

4. Resultados y análisis

En este trabajo experimental se ha alcanzado a estructurar una unidad didáctica basándose en el desarrollo de algunas componentes del sentido numérico respecto a los números enteros. Los resultados se muestran teniendo en cuenta: la prueba diagnóstica aplicada al grupo experimental, el desarrollo de las actividades y las evaluaciones por actividad.

4.1 Prueba diagnóstica. Análisis

Según el MEN, la evaluación diagnóstica es un instrumento que permite identificar los diferentes niveles de desempeño que tienen los estudiantes en un grado con respecto a uno o varios temas de interés, generar hipótesis sobre las dificultades en la comprensión de algunos saberes y proporcionar un material educativo para el aula y la formación de los estudiantes.

La evaluación diagnóstica se aplicó a 32 alumnos del grado 701 de la jornada mañana de la Institución Educativa de Educación Media de Aguas Blancas (Valledupar- Cesar), cuyo objetivo fue identificar algunos conceptos respecto a los números enteros y sus operaciones básicas por medio de la resolución de problemas.

La prueba constó de 7 ítems, algunos de ellos con varios incisos, y permitió evidenciar algunos de los componentes del Sentido Numérico de los Enteros, tales como: dar significado al concepto de número, usar múltiples representaciones de los números y comprender el efecto relativo de las operaciones.

Seguidamente se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes y un análisis de los mismos, los nombres utilizados son ficticios para facilitar la presentación de los resultados.

Ítem 1. Escribe un número entero que describa la situación propuesta

- La Sierra Nevada de Santa Marta se encuentra a una altitud de 5775 metros sobre el nivel del mar y Andrés se encuentra buceando a 200 m bajo el agua.

  ____

- Valledupar presenta una temperatura promedio de 33 °C en el día y la ciudad de Nueva York de 3 °C bajo cero en la noche

  ____

- Ana debe al señor de la tienda $ 26400 y María tiene un saldo a favor de $30000

  ____

- Las primeras monedas fueron inventadas por los fenicios en el año 680 a.C. y el dinero en papel apareció en China el año 680 d.C.

  ____

Con el primer ítem se buscó el uso interpretativo que le dan los estudiantes a los números enteros para representar situaciones de la vida diaria, asignándoles los signos positivo (+) o negativo (-) según el caso. Así, esta primera situación apoyó al componente del sentido numérico “usar representaciones de los números”, en el cual los resultados fueron: 19 estudiantes respondieron correctamente, 11 en forma equivocada o errada, 1 no respondió el ítem y 1 lo dejó incompleto.

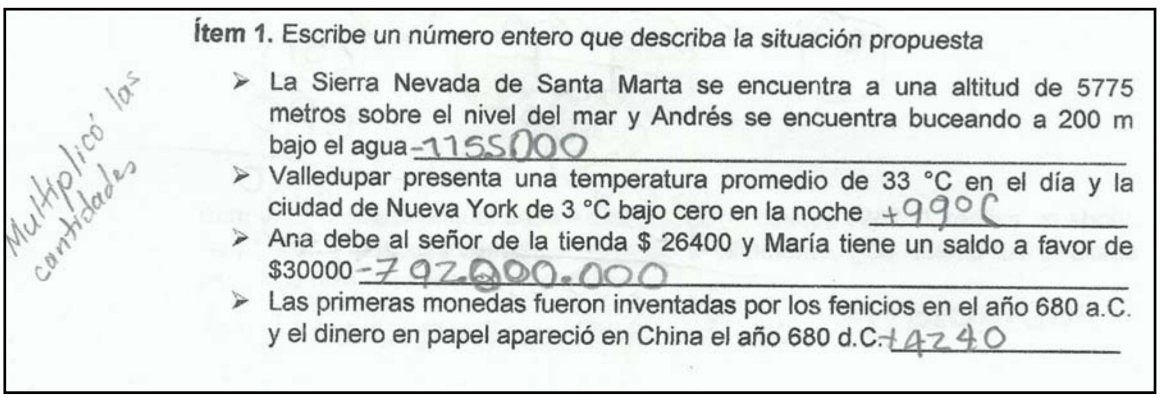
Los que respondieron bien al ítem mostraron entender el significado de las palabras y lo que representan, como se verifica en la figura 4-1, altitud con el signo positivo, bajo el agua con el signo negativo, deuda con el signo negativo, saldo a favor con el signo positivo y con la temperatura también acertó.


Ítem 1. Escribe un número entero que describa la situación propuesta

- La Sierra Nevada de Santa Marta se encuentra a una altitud de 5775 metros sobre el nivel del mar y Andrés se encuentra buceando a 200 m bajo el agua +5775 -200
- Valledupar presenta una temperatura promedio de 33 °C en el día y la ciudad de Nueva York de 3 °C bajo cero en la noche +33°c -3°c
- Ana debe al señor de la tienda $ 26400 y María tiene un saldo a favor de $30000 -26400 +30000
- Las primeras monedas fueron inventadas por los fenicios en el año 680 a.C. y el dinero en papel apareció en China el año 680 d.C. -680 +680

Figura 4- 1: Prueba diagnóstica. Respuesta Ítem 1

Algunos estudiantes se equivocaron en esta situación ya que operaron las cantidades, unos las sumaron y otros pocos las multiplicaron, claramente se observó que no interpretaron bien el enunciado del ítem. (Ver figura 4-2)


Ítem 1. Escribe un número entero que describa la situación propuesta

Multiplicó las cantidades

- La Sierra Nevada de Santa Marta se encuentra a una altitud de 5775 metros sobre el nivel del mar y Andrés se encuentra buceando a 200 m bajo el agua -1155000
- Valledupar presenta una temperatura promedio de 33 °C en el día y la ciudad de Nueva York de 3 °C bajo cero en la noche +99°C
- Ana debe al señor de la tienda $ 26400 y María tiene un saldo a favor de $30000 -792.000.000
- Las primeras monedas fueron inventadas por los fenicios en el año 680 a.C. y el dinero en papel apareció en China el año 680 d.C. +4240

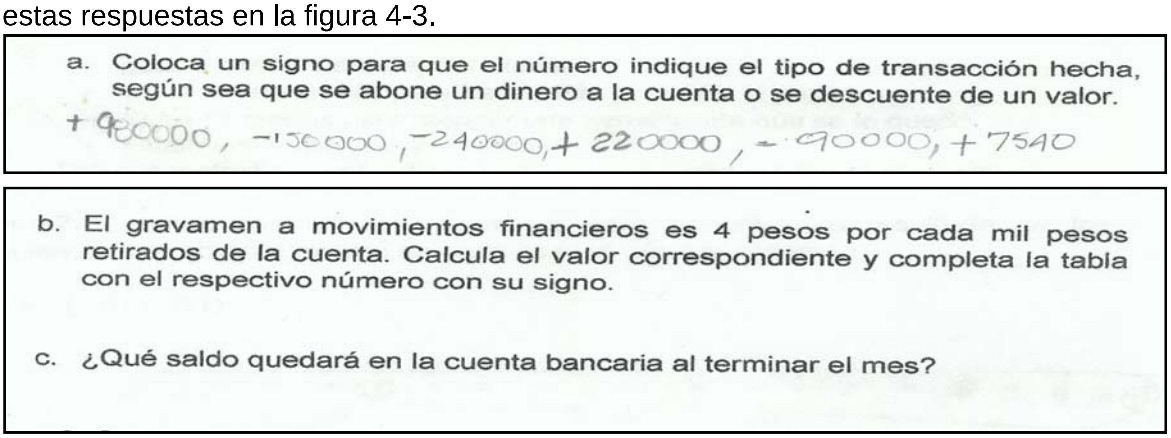
Figura 4- 2: Prueba diagnóstica. Respuesta Ítem 1

Ítem 2. A continuación aparece el registro de los movimientos realizados en una cuenta bancaria.

MES	*DÍA*	*CLASE DE MOVIMIENTO*	*PESOS*
06	12	Consignación prima de servicio	980000
06	13	Retiro	150000
06	15	Retiro	240000
06	20	Consignación	220000
06	21	Retiro	90000
06	30	Rendimientos financieros	7540
06	30	Gravamen a movimientos financieros	

a. Coloca un signo para que el número indique el tipo de transacción hecha, según sea que se abone un dinero a la cuenta o se descuente de un valor.
b. El gravamen a movimientos financieros es 4 pesos por cada mil pesos retirados de la cuenta. Calcula el valor correspondiente y completa la tabla con el respectivo número con su signo.
c. ¿Qué saldo quedará en la cuenta bancaria al terminar el mes?

El segundo ítem permitió buscar la comprensión del efecto relativo de las operaciones, el desarrollo de una secuencia estratégica adecuada en función de la tarea y la habilidad para evaluar si un resultado es razonable; obteniendo cero aciertos, 8 estudiantes con respuesta errada, 4 que no respondieron y 20 de forma incompleta, resaltando aquí con éstos, que respondieron bien el inciso ***a*** y los otros dos no. Se muestra ejemplo de una de estas respuestas en la figura 4-3.


a. Coloca un signo para que el número indique el tipo de transacción hecha, según sea que se abone un dinero a la cuenta o se descuente de un valor.
+980000, −150000, −240000, + 220000, − 90000, + 7540

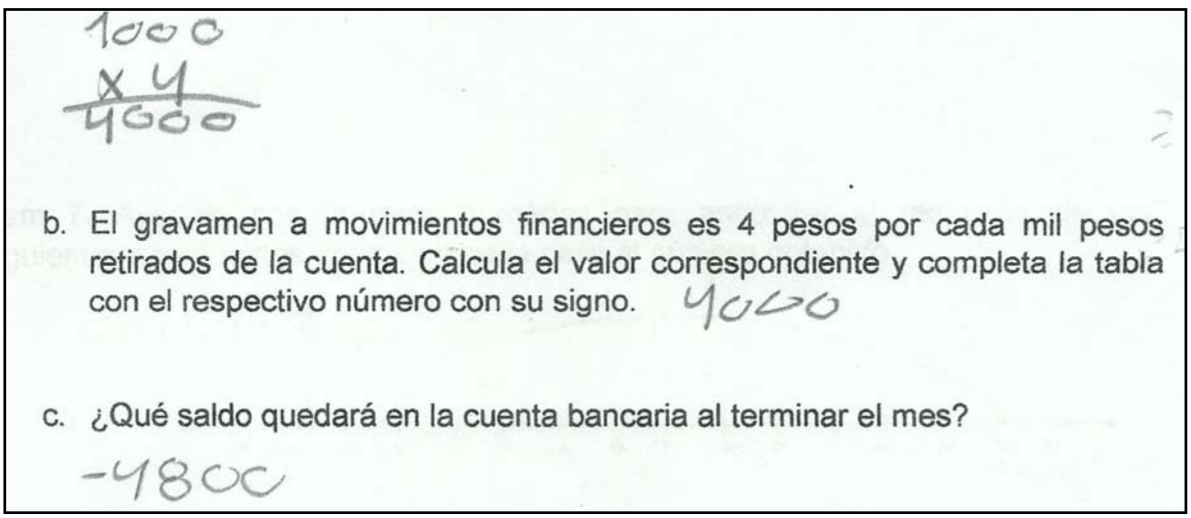
b. El gravamen a movimientos financieros es 4 pesos por cada mil pesos retirados de la cuenta. Calcula el valor correspondiente y completa la tabla con el respectivo número con su signo.

c. ¿Qué saldo quedará en la cuenta bancaria al terminar el mes?

Figura 4- 3. Prueba diagnóstica. Respuesta Ítem 2

Con este ítem los estudiantes preguntaron en repetidas ocasiones “¿qué hay que hacer aquí profesor?”, dejando ver que no comprendieron lo que pedían el inciso b y el c, y claro, no alcanzaron a responder satisfactoriamente dichas preguntas. Una vez más, el joven de este grado, en matemática, se despreocupa por la interpretación de los enunciados y sólo espera el qué hacer (que diga el profesor lo que hay que hacer), con cada pregunta, para ellos actuar. La lectura en matemáticas, para ellos, no es trascendente para solucionar un ejercicio o problema. La falta de educación financiera en los estudiantes es notoria y sería muy interesante inmiscuir ejercicios de este tipo en el trabajo de las demás áreas, lo cual ayudaría a que se fueran familiarizando con este aspecto de la sociedad.

Aquí una de las respuestas de los estudiantes en este ítem en la figura 4-4.



1000
x 4
4000

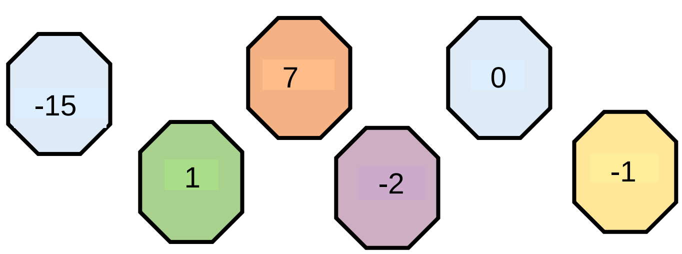
b. El gravamen a movimientos financieros es 4 pesos por cada mil pesos retirados de la cuenta. Calcula el valor correspondiente y completa la tabla con el respectivo número con su signo. 4000

c. ¿Qué saldo quedará en la cuenta bancaria al terminar el mes?

-4800

Figura 4- 4. Prueba diagnóstica. Respuesta Ítem 2

Ítem 3. Camila tiene 6 fichas, cada una marcada por un número entero. Ella desea ordenar de mayor a menor las fichas. Ayúdala a cumplir con su deseo.



La componente de “dar significado al concepto de número” también la verificamos en el ítem 3, ya que debieron manejar el valor posicional de los números enteros. De los 32 alumnos que presentaron la prueba, 7 respondieron correctamente, ellos emplearon la recta numérica, ubicaron bien los números enteros y luego escribieron de mayor a menor los números enteros que aparecen en las fichas; 6 lo dejaron incompleto, es decir, hicieron la recta numérica con los números de las fichas pero no plantearon la respuesta; 19 se equivocaron, ya que realizaron el ordenamiento de menor a mayor, lo contrario. Ver figura 4-5.

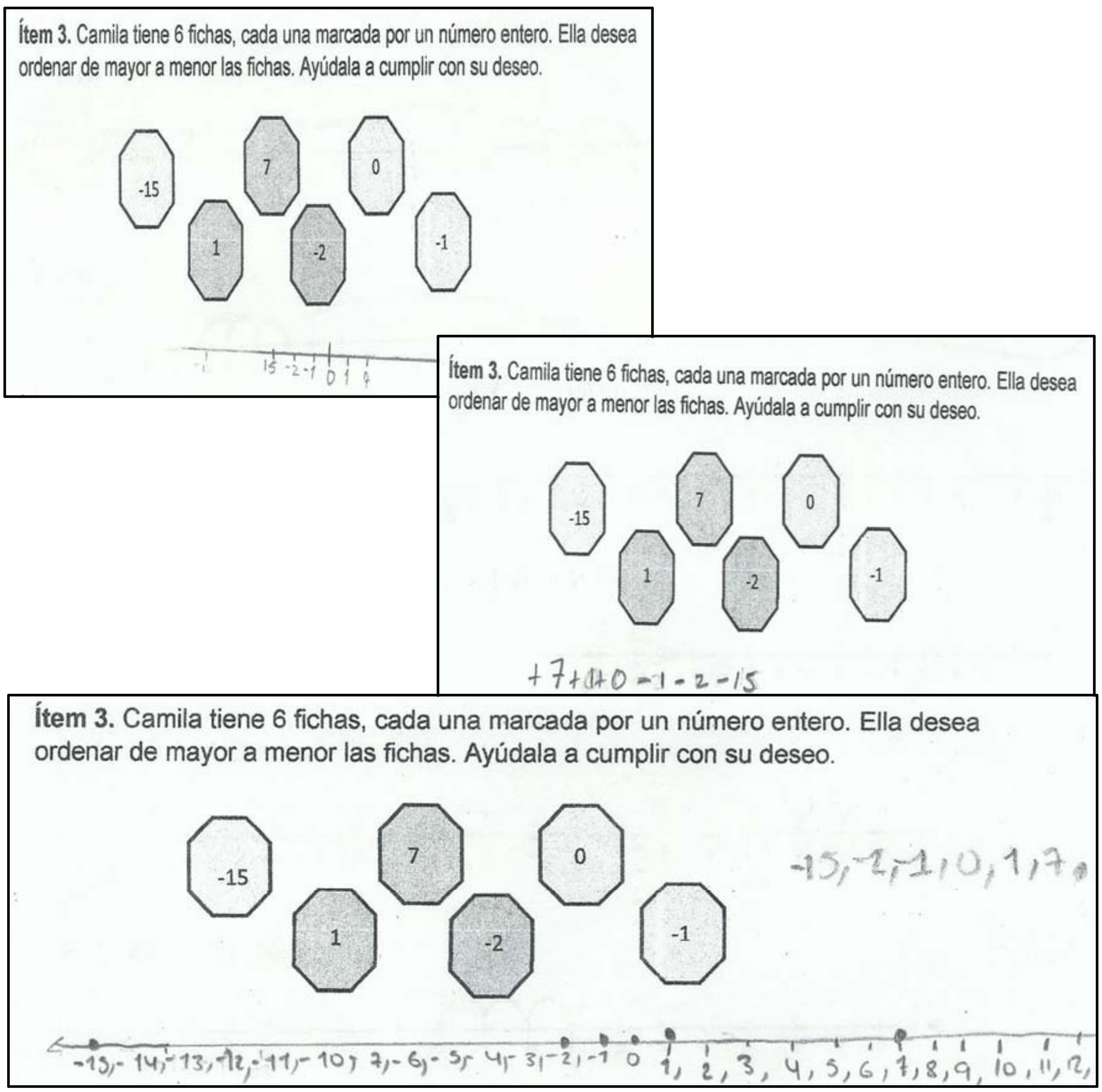
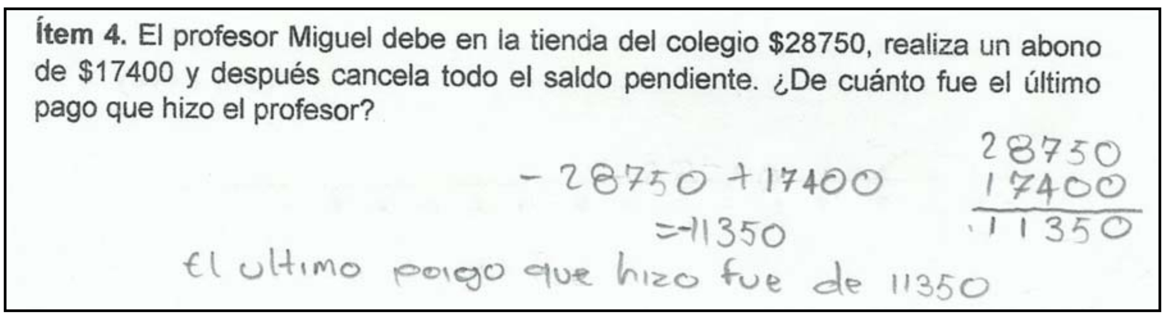


Figura 4- 5. Prueba diagnóstica. Respuestas Ítem 3

Ítem 4. El profesor Miguel debe en la tienda del colegio $28750, realiza un abono de $17400 y después cancela todo el saldo pendiente. ¿De cuánto fue el último pago que hizo el profesor?

Con el ítem 4 se buscó evidenciar la habilidad del estudiante para identificar cómo las diferentes operaciones afectan al resultado final de los problemas numéricos. En este caso, la solución correcta la encontraron 24 alumnos, dando muestra de la interpretación adecuada y de la operación indicada; a 7 les quedó errada la respuesta, ya que al restar las cantidades no hicieron bien las cuentas; y un estudiante no respondió al ítem manifestando que el tiempo no le alcanzó. He aquí una de las respuestas correctas (Figura 4-6) y una errada (Figura 4-7).


Ítem 4. El profesor Miguel debe en la tienda del colegio $28750, realiza un abono de $17400 y después cancela todo el saldo pendiente. ¿De cuánto fue el último pago que hizo el profesor?

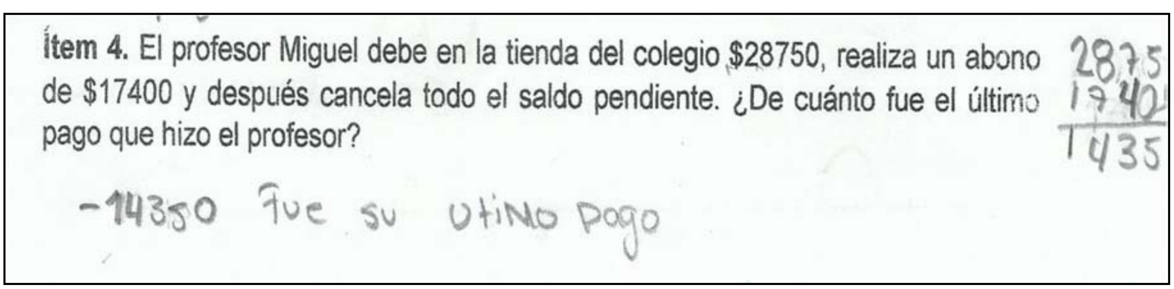
$-28750 + 17400 = -11350$

28750
17400
11350

El ultimo pago que hizo fue de 11350

Figura 4- 6. Prueba diagnóstica. Respuesta Ítem 4

En la figura 4-6, el estudiante emplea los números signados para plantear la operación que le permitirá encontrar la solución.


Ítem 4. El profesor Miguel debe en la tienda del colegio $28750, realiza un abono de $17400 y después cancela todo el saldo pendiente. ¿De cuánto fue el último pago que hizo el profesor?

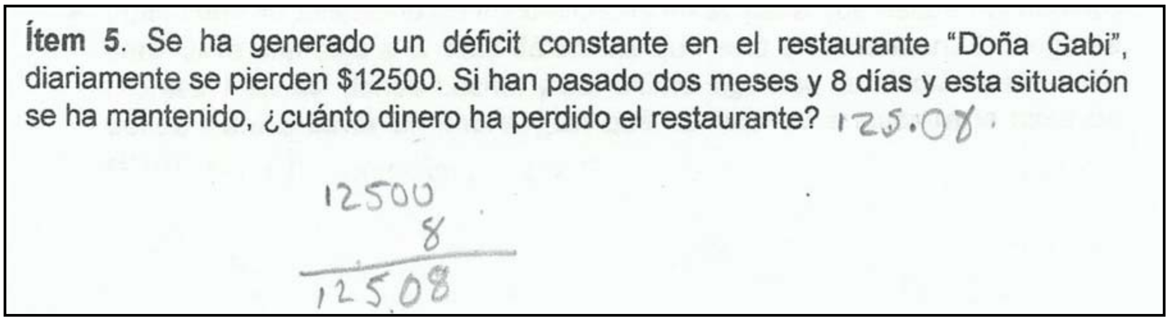
2875
1940
1435

-14350 fue su utino pago

Figura 4- 7. Prueba diagnóstica. Respuesta Ítem 4

Ítem 5. Se ha generado un déficit constante en el restaurante "Doña Gabi", diariamente se pierden $12500. Si han pasado dos meses y 8 días y esta situación se ha mantenido, ¿cuánto dinero ha perdido el restaurante?

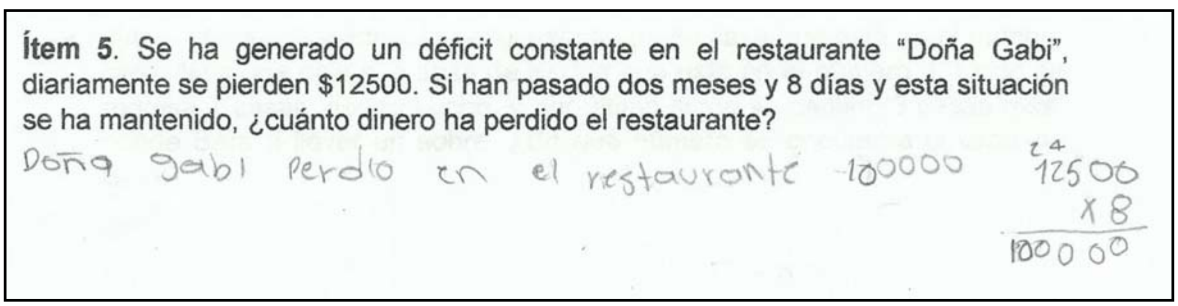
Con este ítem fue lo contrario a los resultados del ítem inmediatamente anterior ya que 23 alumnos respondieron erradamente porque emplearon las dos cantidades que aparecen en el enunciado y, algunos las sumaron como se evidencia en la figura 4-8.


Ítem 5. Se ha generado un déficit constante en el restaurante "Doña Gabi", diariamente se pierden $12500. Si han pasado dos meses y 8 días y esta situación se ha mantenido, ¿cuánto dinero ha perdido el restaurante? 125.08

12500
8
12508

Figura 4- 8. Prueba diagnóstica. Respuesta Ítem 5

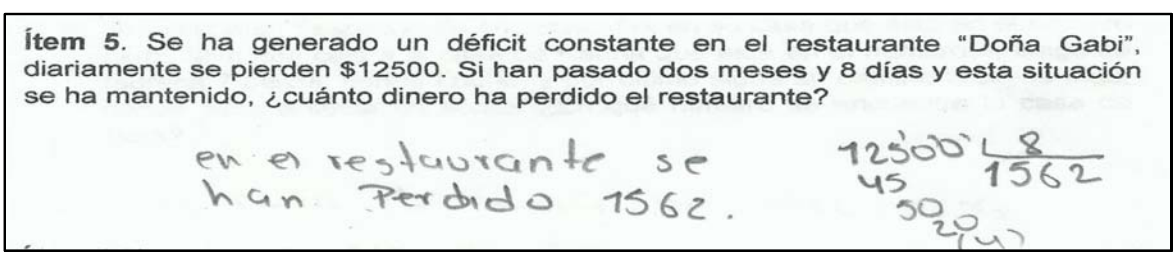
Otros las multiplicaron, un ejemplo es el que se muestra en la Figura 4-9, y otros dividieron las dos cantidades como lo muestra la figura 4-10.


Ítem 5. Se ha generado un déficit constante en el restaurante "Doña Gabi", diariamente se pierden $12500. Si han pasado dos meses y 8 días y esta situación se ha mantenido, ¿cuánto dinero ha perdido el restaurante?

Doña gabi perdio en el restaurante 100000

24
12500
x 8
100000

Figura 4- 9. Prueba diagnóstica. Respuesta Ítem 5

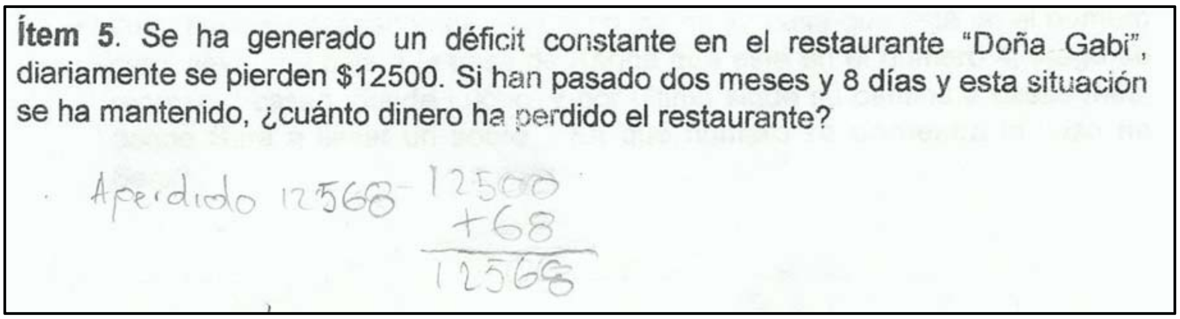

Ítem 5. Se ha generado un déficit constante en el restaurante "Doña Gabi", diariamente se pierden $12500. Si han pasado dos meses y 8 días y esta situación se ha mantenido, ¿cuánto dinero ha perdido el restaurante?

en el restaurante se han Perdido 1562.

12500 | 8
1562
45
50
20
(4)

Figura 4- 10. Prueba diagnóstica. Respuesta Ítem 5

No hubo respuesta correcta al ítem, pero sí estuvieron cerca porque tuvieron en cuenta los días del mes y los sumaron para luego multiplicarlos con los $12500 de pérdida, sólo que en el resultado fallaron en ciertas cantidades; 4 alumnos no respondieron y 3 lo dejaron incompleto, sumaron los días de los dos meses y los 8 días y al final sumaron el resultado con los $12500, fue un proceso no completo, se puede verificar en la figura 4-11.


Ítem 5. Se ha generado un déficit constante en el restaurante "Doña Gabi", diariamente se pierden $12500. Si han pasado dos meses y 8 días y esta situación se ha mantenido, ¿cuánto dinero ha perdido el restaurante?

A perdido 12568

$$\begin{array}{r} 12500 \\ +68 \\ \hline 12568 \end{array}$$

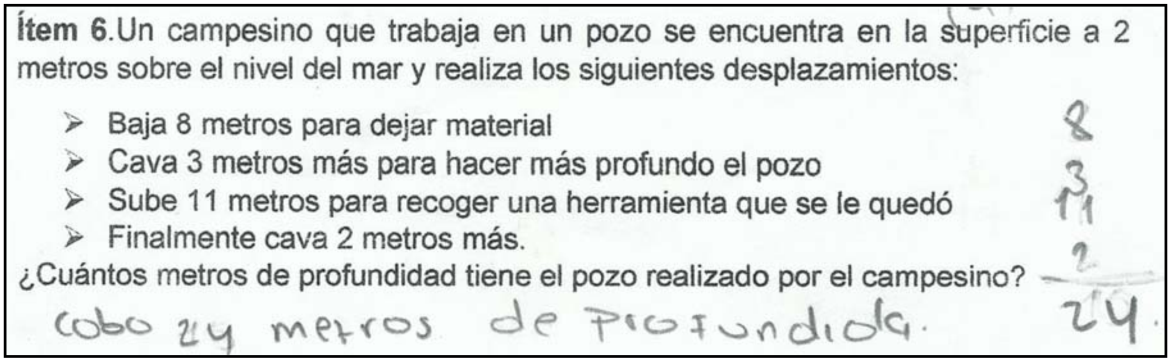
Figura 4- 11. Prueba diagnóstica. Respuesta Ítem 5

Ítem 6. Un campesino que trabaja en un pozo se encuentra en la superficie a 2 metros sobre el nivel del mar y realiza los siguientes desplazamientos:

- Baja 8 metros para dejar material
- Cava 3 metros más para hacer más profundo el pozo
- Sube 11 metros para recoger una herramienta que se le quedó
- Finalmente cava 2 metros más.

¿Cuántos metros de profundidad tiene el pozo realizado por el campesino?

El sexto ítem mostró las representaciones que utilizan los estudiantes de los números enteros para resolver problemas de manera efectiva, y la secuencia estratégica para la solución y verificación de sus resultados. La mayoría, esto es, 28 alumnos, se equivocaron en la respuesta, ellos realizaron el conteo con los números signados, cuando baja le colocaron el signo menos (-) y cuando sube el signo más (+) sin tener en cuenta la altura de la plataforma que se encontraba a 2 metros sobre el nivel del mar, con base a este criterio de solución les dio como resultado 13 metros de profundidad del pozo; también una estrategia empleada por ellos fue sumar todas las cantidades que aparecen en el enunciado; el resto de los alumnos no respondieron al ítem. (Ver figura 4-12 y 4-13)



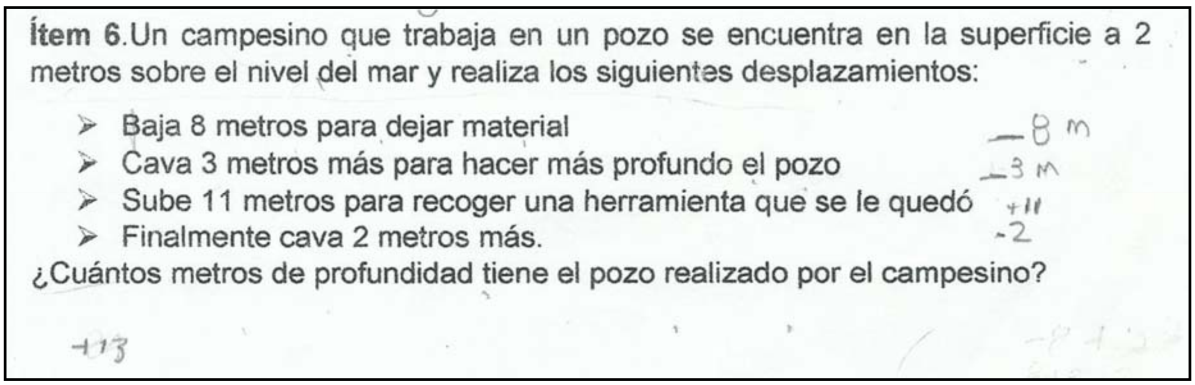
Ítem 6.Un campesino que trabaja en un pozo se encuentra en la superficie a 2 metros sobre el nivel del mar y realiza los siguientes desplazamientos:

- Baja 8 metros para dejar material 8
- Cava 3 metros más para hacer más profundo el pozo 3
- Sube 11 metros para recoger una herramienta que se le quedó 11
- Finalmente cava 2 metros más. 2

¿Cuántos metros de profundidad tiene el pozo realizado por el campesino?

cobo 24 metros de profundida. 24.

Figura 4- 12. Prueba diagnóstica. Respuesta Ítem 6



Ítem 6.Un campesino que trabaja en un pozo se encuentra en la superficie a 2 metros sobre el nivel del mar y realiza los siguientes desplazamientos:

- Baja 8 metros para dejar material −8 m
- Cava 3 metros más para hacer más profundo el pozo −3 m
- Sube 11 metros para recoger una herramienta que se le quedó +11
- Finalmente cava 2 metros más. -2

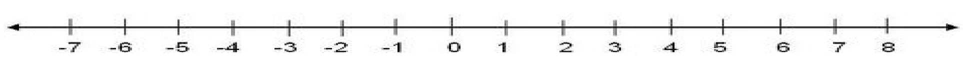
¿Cuántos metros de profundidad tiene el pozo realizado por el campesino?

+13

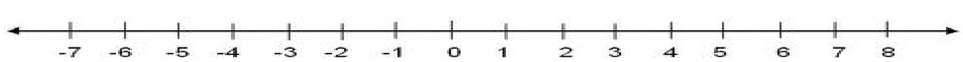
Figura 4- 13. Prueba diagnóstica. Respuesta Ítem 6

Ítem 7. Ayúdate con la recta numérica para encontrar el resultado de las siguientes operaciones, marca en cada caso el número obtenido.

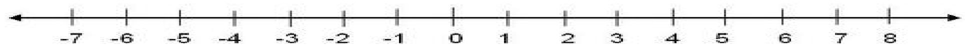
a. $(-4) + (11)$



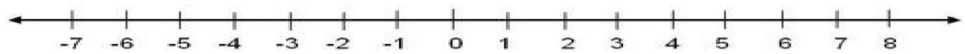
b. $(-12) + (+9) + (-7)$



c. $(-2)+(-5)$



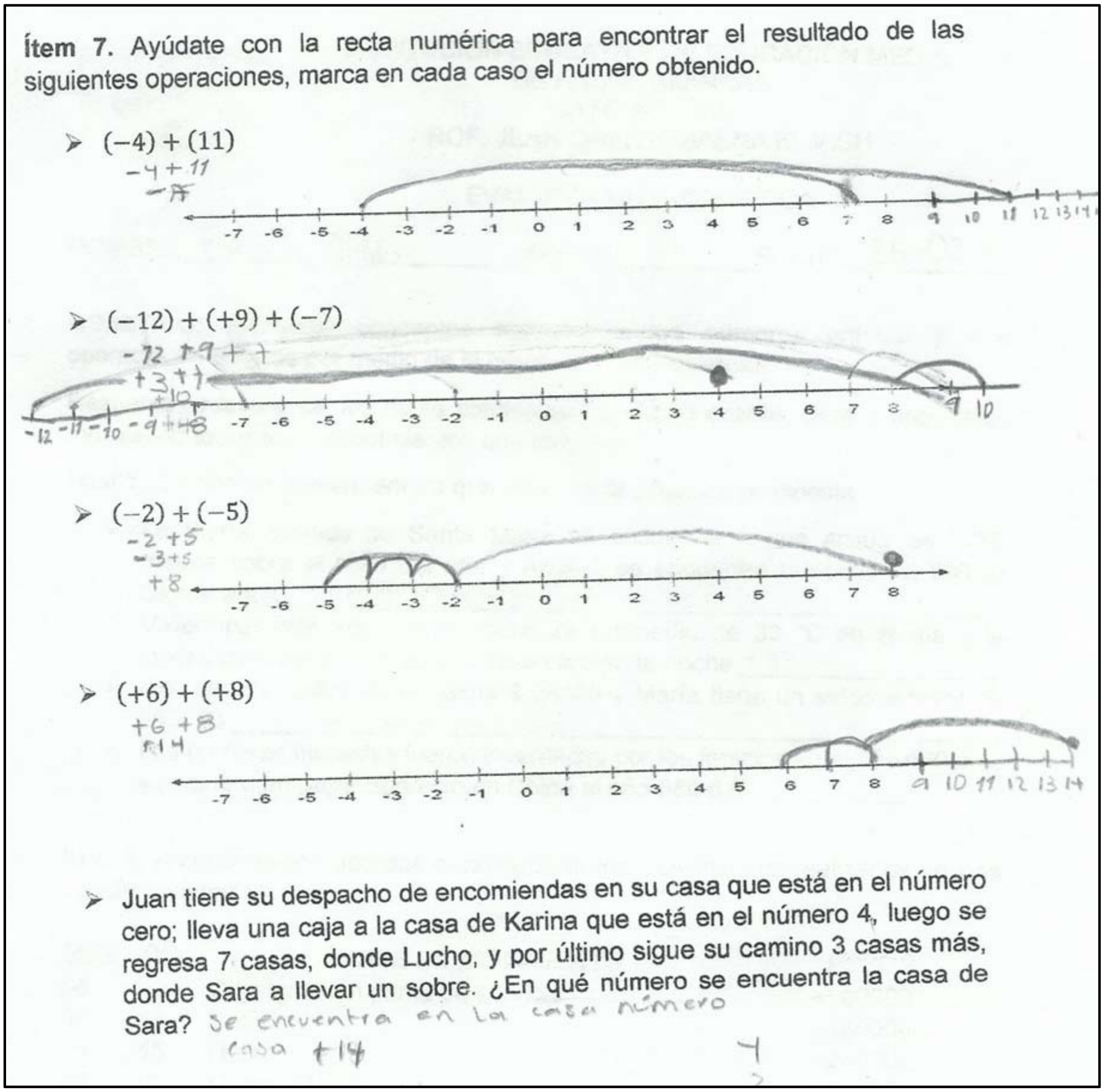
d. $(+6)+(+8)$



e. Juan tiene su despacho de encomiendas en su casa que está en el número cero; lleva una caja a la casa de Karina que está en el número 4, luego se regresa 7 casas, donde Lucho, y por último sigue su camino 3 casas más, donde Sara a llevar un sobre. ¿En qué número se encuentra la casa de Sara?

El séptimo y último ítem de la prueba tuvo por objetivo mostrar el desplazamiento que hacen los niños y niñas en la recta numérica para encontrar la solución de los ejercicios. Los resultados arrojaron que a 18 estudiantes se le dificultan el manejo del valor posicional de los números enteros realizando los desplazamientos en la recta numérica; 6 hicieron en forma correcta el procedimiento representativo con flechas; 7 no lograron realizar todos los ejercicios y 1 no lo hizo.

Llama la atención Carmen con su respuesta, ella realizó primero las operaciones analíticamente y luego las representó en la recta numérica correctamente.



Ítem 7. Ayúdate con la recta numérica para encontrar el resultado de las siguientes operaciones, marca en cada caso el número obtenido.

- $(-4) + (11)$

  -4 + 11

- $(-12) + (+9) + (-7)$

  -12 +9 +7

  +3 +7

  +10

- $(-2) + (-5)$

  -2 +5

  -3 +5

  +8

- $(+6) + (+8)$

  +6 +8

  +14

- Juan tiene su despacho de encomiendas en su casa que está en el número cero; lleva una caja a la casa de Karina que está en el número 4, luego se regresa 7 casas, donde Lucho, y por último sigue su camino 3 casas más, donde Sara a llevar un sobre. ¿En qué número se encuentra la casa de Sara? se encuentra en la casa número casa +14

Figura 4- 14. Prueba diagnóstica. Respuesta Ítem 7

En la siguiente tabla se encuentra un resumen de los ítems respondidos en calidad de correcto, incompleto, errado y no contestado.

Calificación	**Ítem1**	**Ítem2**	**Ítem3**	**Ítem4**	**Ítem5**	**Ítem6**	**Ítem7**
Correcto	19	0	7	24	2	0	6
Incompleto	1	20	6	0	3	0	7
Errado	11	8	19	7	23	28	18
No contestado	1	4	0	1	4	4	1

Tabla 4- 1. Resultados de la Prueba diagnóstica

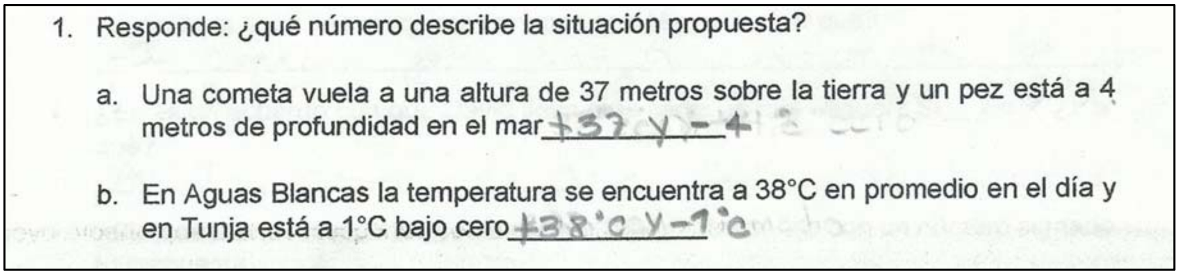
Los estudiantes del grado séptimo se limitan sólo a la parte operativa, así como lo demostraron en el proceso de ejecución de la prueba, para ellos es tedioso la lectura y la interpretación de la información dada en los ítems, esto ocasiona el mayor de las dificultades para solucionar alguna situación problema. No tienen el sentido numérico desarrollado en la mayoría de sus componentes por lo tanto no les permite optar por varias alternativas de solución y por ende llegar a la respuesta correcta, en la tabla anterior podemos visualizar que en el renglón de las respuestas correctas el número de estudiantes es relativamente bajo con respecto al total de los que participaron en la etapa diagnóstica.

4.2 Evaluaciones. Análisis.

Las evaluaciones de cada una de las actividades realizadas (anexos B, C y D) se plantearon según el objetivo de las mismas, por lo tanto, el siguiente análisis se hace por actividad y al finalizar se muestra una tabla consolidando los resultados bajo los calificativos de correcto, incompleto, errados y no contestados.

Recordemos que el objetivo de la primera actividad es *explorar las propiedades de los números enteros en situaciones concretas* por lo tanto los ítems que conforman a la evaluación está direccionado a la verificación y comprobación del cumplimiento de éste.

En la evaluación de la actividad N° 1 se observó que la mayoría, 27 de 32 alumnos, en la primera situación respondieron correctamente dando muestra del significado numérico que representa la situación propuesta, 5 mostraron equivocación en la respuesta y ninguno en calidad de incompleto o no contestado.



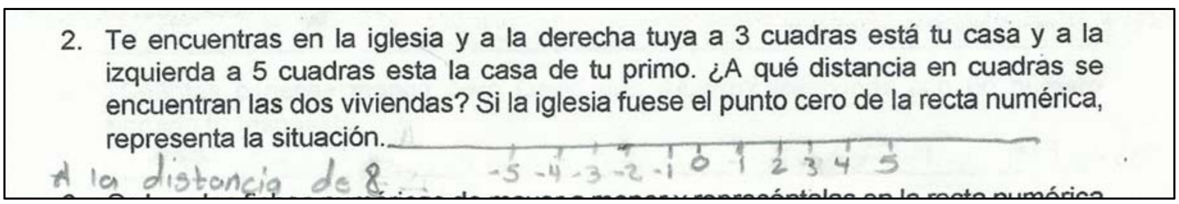
1. Responde: ¿qué número describe la situación propuesta?

a. Una cometa vuela a una altura de 37 metros sobre la tierra y un pez está a 4 metros de profundidad en el mar +37 y -4

b. En Aguas Blancas la temperatura se encuentra a 38°C en promedio en el día y en Tunja está a 1°C bajo cero +38°c y -1°c

Figura 4- 15. Evaluación actividad 1. Respuesta punto 1

En la segunda situación dieron respuesta correcta al problema 20 alumnos, 4 lo dejaron incompleto, 7 errados y 1 no contestó el problema. Claramente los estudiantes representan la ubicación de las casas en la recta numérica y sin tener en cuenta los números signados se fijan en la distancia de un punto a otro en este caso -5 y 3.

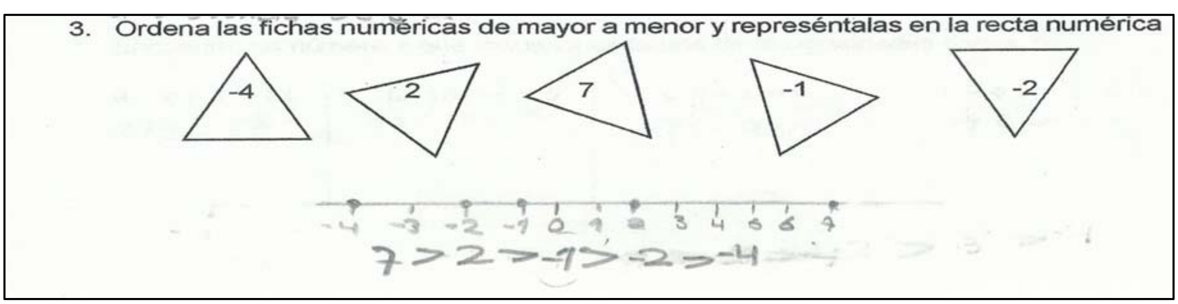


2. Te encuentras en la iglesia y a la derecha tuya a 3 cuadras está tu casa y a la izquierda a 5 cuadras esta la casa de tu primo. ¿A qué distancia en cuadras se encuentran las dos viviendas? Si la iglesia fuese el punto cero de la recta numérica, representa la situación.

A la distancia de 8.

Figura 4- 16. ***Evaluación actividad 1. Respuesta punto 2***

En el último punto de la evaluación fue evidente la comprensión de los estudiantes con respecto al orden que existe entre los números enteros, 29 alumnos acertaron la respuesta, no hubo respuestas incompletas, a 3 les quedó errado por no respetar las distancias de un número a otro en la recta y ninguno lo dejó sin contestar.



3. Ordena las fichas numéricas de mayor a menor y represéntalas en la recta numérica

Figura 4- 17. ***Evaluación actividad 1. Respuesta punto 3***

Al desarrollar la actividad N° 2 cuyo objetivo planteado fue *aplicar las reglas de la adición y sustracción de número enteros para resolver problemas propuestos* se observó en los dos puntos de la evaluación que un poco más de la mitad de los alumnos alcanzaron el cumplimiento del mismo, es decir, en el caso del primer punto de la actividad, 17 alumnos lograron solucionar correctamente la situación, fueron propositivos, se demoraron en encontrar sus respuestas (más de lo previsto) pero aun así mostraron la habilidad de diferenciar operaciones que afectan al resultado final de los problemas numéricos, a 6 estudiantes les quedó incompleto la solución, a 7 no les resultó bien su solución y 2 estudiantes no contestaron.

1. En la siguiente tabla encuentra dos números diferentes que al sumarlos den como resultado el número dado cumpliendo con las condiciones establecidas.

Número	Diferencia de dos enteros positivos	Entero negativo menos enteros positivo	Diferencia de dos enteros negativos
-9	-6 - (3)	(-4) - (5)	(-10) - (-1)
5	(+15) - (-10)	(+10) - (-5)	-6 - (-11)
-12	-8+4 = -12	(-7) - (+3)	(-5 - (-7)

Figura 4- 18. ***Evaluación actividad 2. Respuesta punto 1***

Ya teniendo un poco de claridad gracias al derrotero realizado en la actividad N° 2, el punto 2 de la evaluación arrojó estos datos: 18 estudiantes respondieron en forma correcta al problema planteado, pues ellos desarrollaron ciertas estrategias apropiadas pero la mayoría de éstos no evaluaron lo razonable de su respuesta, sin embargo, a estos alumnos no les quedó mal su solución, una vez más manifestaron por escrito la parte algorítmica y no la analítica, 6 estudiantes dejaron incompleta su respuesta, 6 respondieron equivocadamente y 2 no contestaron.

2. Rodrigo se dirige al cajero automático el lunes para ver su saldo: es de $1.520.652 y decide retirar $250.000, el martes es día de pago y le consignan a su cuenta $1.375.400, el miércoles saca $560.000 y el jueves retira $1.010.000 para la cuota del carro. Representa en una recta numérica la situación y responde:

   a. ¿Rodrigo cuenta con saldo en la cuenta para pagar otra cuota del carro? Justifica tu respuesta. si porque le queda mas plata de lo que da la cuota

   b. La entidad bancaria le cobra a Rodrigo el impuesto $4 por mil cuando retira, con este gravamen financiero ¿le alcanza el saldo a Rodrigo para pagar otra cuota del carro? Justifica tu respuesta. si le alcanza porque le queda 1.076.052

1.520.652 − 250.000 = 1.270.652
1.270.652 + 1.375.400 = 2.646.052
2646052 − 560.000 = 2.086.052
2.086.052 − 1.010.000 = 1.076.052

Figura 4- 19. ***Evaluación actividad 2. Respuesta punto 2***

La última evaluación correspondiente a la actividad N° 3 está enmarcada en el objetivo de *aplicar la ley de los signos para resolver productos de números enteros en problemas propuestos*. En el primer punto de la misma, los estudiantes usaron representaciones numéricas y operaciones tales como la resta y la multiplicación para encontrar soluciones, al presentar sus evidencias escritas se pudo validar de la siguiente manera: 17 alumnos respondieron correctamente, 8 lo dejaron incompleto, de estos respondieron entre 1 y 2 renglones de la tabla, 7 les quedó errado y 5 no contestaron por falta de tiempo dijeron algunos de ellos. (Ver figura 4-20)

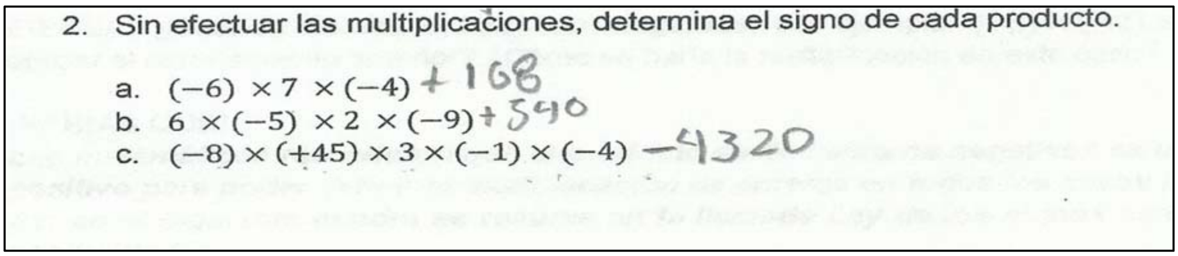
1. En un molino almacenan la harina en un silo, que tiene un embudo por donde extraen la harina que van a empacar. Los datos de entraba y salida de harina se consignan en una tabla, en donde se usaron números signados para indicar si entra harina al silo (con el signo +) o si sale (con el signo -).

Tiempo	Libras por minuto	Total de libras movidas
9:00 a 9:20	-30	-600
9:21 a 10:28	+32	224
10:29 a 11:30	-25	-25
11:31 a 12:12	+45	1890

a. Completa la tabla
b. Entre las 9:00 y las 12:12 responde:
   a. ¿Cuánta harina entró? 2114
   b. ¿Cuánta harina salió? 625
   c. ¿Entró más harina al silo de la que salió? Justifica tu respuesta. Si Pq Entro 211 y Salio -625
   d. ¿Cuál es la diferencia de los entró con respecto a los salió? 2.739

Figura 4- 20. ***Evaluación actividad 3. Respuesta punto 1***

En el segundo punto de la evaluación los estudiantes estaban como peces en el agua, ya que se trató de operaciones directas sin tener en cuenta situaciones problemas, aquí quise resaltar la habilidad operativa que ellos tienen con los números enteros y efectivamente los resultados fueron los esperados, tales como se muestran a continuación: 25 de los 32 alumnos respondieron correctamente a las operaciones planteadas, ningún alumno dejó en calidad de incompleto el punto 2, 7 alumnos presentaron equivocaciones en los signos y ningún estudiante dejó de contestar a este punto de la evaluación.


2. Sin efectuar las multiplicaciones, determina el signo de cada producto.

a. $(-6) \times 7 \times (-4)$ + 168
b. $6 \times (-5) \times 2 \times (-9)$ + 540
c. $(-8) \times (+45) \times 3 \times (-1) \times (-4)$ −4320

Figura 4- 21. ***Evaluación actividad 3. Respuesta punto 2***

Seguidamente se presenta una tabla que recoge en resumen los resultados de los estudiantes.

Calificación	Evaluación 1			Evaluación 2		Evaluación 3	
	Pto 1	Pto 2	Pto 3	Pto 1	Pto 2	Pto 1	Pto 2
Correcto	27	20	29	17	18	17	25
Incompleto	0	4	2	6	6	8	0
Errado	5	7	1	7	6	7	7
No contestado	0	1	0	2	2	5	0

Tabla 4- 2. ***Resultados de las evaluaciones por actividad***

Los estudiantes del grado séptimo mostraron mejoría en la interpretación de los enunciados, sin embargo todavía considero que falta trabajar mejor en este aspecto. Al observar el renglón de los no contestados, la cantidad de estudiantes es baja relacionada con la cantidad total que presentaron las evaluaciones, eso es una muestra de que generaron trabajo alrededor del sentido numérico teniendo como base algunas de las componentes evaluadas.

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

Al finalizar la unidad didáctica se pudo concluir:

- ✓ Algunas propiedades de los números enteros fueron entendidos por parte de los estudiantes que participaron en el desarrollo de la misma, tales como: la ubicación de los números enteros en la recta numérica, la existencia de un antecesor y un sucesor de cada número, la infinitud del conjunto numérico y el orden de los enteros. Asimismo, los resultados de las operaciones elaboradas por ellos al resolver problemas fue un poco mejor con respecto al grupo de séptimo que no participó en la unidad didáctica. Esto se pudo observar al comparar las tablas de resultados en cada uno de los renglones de las respuestas correctas, erradas, incompletas y no contestadas que obtuvieron los estudiantes.

- ✓ El desarrollo del sentido numérico del grupo experimental fue un poco mejor respecto al sentido numérico de los estudiantes del otro grupo de séptimo, basándose en las componentes trabajadas tales como: el comprender el significado de los números, el uso de múltiples representaciones de los números y las operaciones, el comprender el efecto relativo de las operaciones, y el desarrollo de estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta.

- ✓ La presente unidad didáctica mejora el aprendizaje de los estudiantes de séptimo grado, no a grandes escalas pero si al frente de la enseñanza tradicional conductista. Por tal motivo la considero provechosa en este tema y en este contexto.

5.2 Recomendaciones

A partir de la aplicación de esta unidad didáctica con respecto a los números enteros se pueden aportar las siguientes recomendaciones o sugerencias:

- ✓ A temprana etapa académica es importante incluir en el desarrollo de los temas en matemáticas el sentido numérico y la resolución de problemas en contextos para así los estudiantes opten o apropien las actividades como si fueran situaciones de ellos.
- ✓ Las actividades que se planteen en los diferentes temas matemáticos deben estar relacionadas y continuas para que no se noten como asiladas y mantengan estructura de una secuencia.
- ✓ No proponer actividades extensas para que no se vean obligados en interrumpirlas y continuarlas en la próxima clase porque así se presentaría alguna condición que afectaría al proceso continuo y al alcance de los objetivos.

A. Anexo: Prueba diagnóstica

INSTITUCIÓN EDUCATIVA DE EDUCACIÓN MEDIA
DE AGUAS BLANCAS
MATEMÁTICAS
PROF. JEAN CARLOS BAENA ELJACH

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

NOMBRE:________________________GRADO:_________FECHA:__________

OBJETIVO: Identificar conceptos respecto a los números enteros y sus operaciones básicas por medio de la resolución de problemas.

Resuelve cada uno de los ítems planteados en forma escrita, clara y ordenada, mostrando todos los procedimientos que empleas.

Ítem 1. Escribe un número entero que describa la situación propuesta

- La Sierra Nevada de Santa Marta se encuentra a una altitud de 5775 metros sobre el nivel del mar y Andrés se encuentra buceando a 200 m bajo el agua ____
- Valledupar presenta una temperatura promedio de 33 °C en el día y la ciudad de Nueva York de 3 °C bajo cero en la noche _________________________
- Ana debe al señor de la tienda $ 26400 y María tiene un saldo a favor de $30000 ____
- Las primeras monedas fueron inventadas por los fenicios en el año 680 a.C. y el dinero en papel apareció en China el año 680 d.C. ____

Ítem 2. A continuación aparece el registro de los movimientos realizados en una cuenta bancaria.

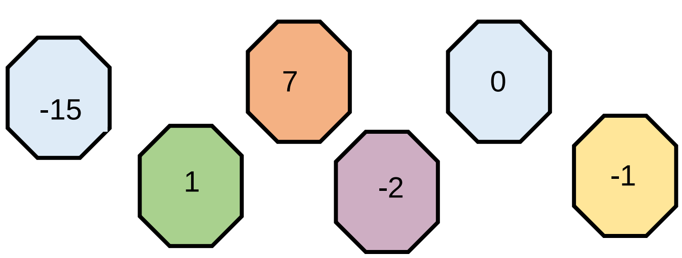
MES	*DÍA*	*CLASE DE MOVIMIENTO*	*PESOS*
06	12	Consignación prima de servicio	980000
06	13	Retiro	150000
06	15	Retiro	240000
06	20	Consignación	220000
06	21	Retiro	90000
06	30	Rendimientos financieros	7540
06	30	Gravamen a movimientos financieros	

a. Coloca un signo para que el número indique el tipo de transacción hecha, según sea que se abone un dinero a la cuenta o se descuente de un valor.

b. El gravamen a movimientos financieros es 4 pesos por cada mil pesos retirados de la cuenta. Calcula el valor correspondiente y completa la tabla con el respectivo número con su signo.

c. ¿Qué saldo quedará en la cuenta bancaria al terminar el mes?

Ítem 3. Camila tiene 6 fichas, cada una marcada por un número entero. Ella desea ordenar de mayor a menor las fichas. Ayúdala a cumplir con su deseo.



Ítem 4. El profesor Miguel debe en la tienda del colegio \$28750, realiza un abono de \$17400 y después cancela todo el saldo pendiente. ¿De cuánto fue el último pago que hizo el profesor?

Ítem 5. Se ha generado un déficit constante en el restaurante “Doña Gabi”, diariamente se pierden \$12500. Si han pasado dos meses y 8 días y esta situación se ha mantenido, ¿cuánto dinero ha perdido el restaurante?

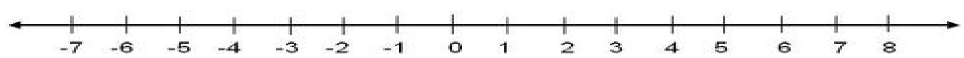
Ítem 6.Un campesino que trabaja en un pozo se encuentra en la superficie a 2 metros sobre el nivel del mar y realiza los siguientes desplazamientos:

- Baja 8 metros para dejar material
- Cava 3 metros más para hacer más profundo el pozo
- Sube 11 metros para recoger una herramienta que se le quedó
- Finalmente cava 2 metros más.

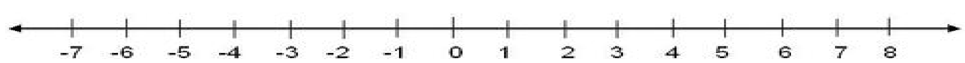
¿Cuántos metros de profundidad tiene el pozo realizado por el campesino?

Ítem 7. Ayúdate con la recta numérica para encontrar el resultado de las siguientes operaciones, marca en cada caso el número obtenido.

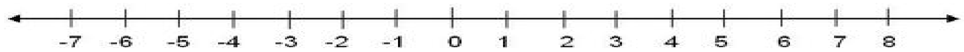
a. $(-4) + (11)$



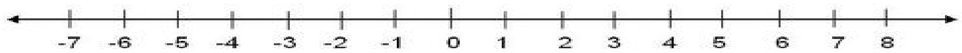
b. $(-12) + (+9) + (-7)$



c. $(-2) + (-5)$



d. $(+6) + (+8)$



e. Juan tiene su despacho de encomiendas en su casa que está en el número cero; lleva una caja a la casa de Karina que está en el número 4, luego se regresa 7 casas, donde Lucho, y por último sigue su camino 3 casas más, donde Sara a llevar un sobre. ¿En qué número se encuentra la casa de Sara?

B. Anexo: Actividad N°1

INSTITUCIÓN EDUCATIVA DE EDUCACIÓN MEDIA
DE AGUAS BLANCAS
MATEMÁTICAS
PROF. JEAN CARLOS BAENA ELJACH

ACTIVIDAD 1. FAMILIARÍZATE CON LOS NÚMEROS ENTEROS

NOMBRE:____________________________GRADO:_________FECHA:___________

OBJETIVO: Explorar las propiedades de los números enteros en situaciones concretas.

¡SABÍAS QUE!

Un número signado es un número acompañado por un símbolo + o -, que indica una de dos situaciones contrapuestas: positiva o negativa respectivamente.

Teniendo en cuenta la información anterior desarrolla la presente actividad en forma clara y ordenada.

1. En la siguiente tabla se indica el número de canecas de agua del mismo tamaño que llevan 4 jóvenes: Juan, Alberto, Miguel y David. Con base en los datos ahí suministrados responde:

PERSONAS	CANTIDAD
JUAN	2
ALBERTO	7
MIGUEL	4
DAVID	3

- ¿Juan lleva más o lleva menos canecas que Miguel? ¿Por qué?

____

- ¿Estás de acuerdo con que David lleva más canecas que Miguel? Sí__ No__ ¿Por qué?

____

- ¿Cuántas canecas más llevó Alberto que David? Responde con un número signado tu respuesta

____

- ¿Cuántas canecas menos llevó David que Alberto? Responde con un número signado tu respuesta.

____

2. Encuentra un número x que resuelva cada una de las igualdades dadas.

a. $x+3=12$	b. $18-x=5$	c. $9+x=0$	d. $9+x=5$

e. ¿Qué valor encontraste para x en los incisos c y d?

Teniendo en cuenta lo anterior la comunidad matemática extendió el conjunto de los números naturales creando el conjunto de los números enteros.

¡SABÍAS QUE!

El conjunto de los Números Enteros, que se notó por Z, es la unión de los enteros negativos, signados con -, el cero (0) y los enteros positivos, signados con +.

$\boldsymbol{Z = Z^{-} \cup \{0\} \cup Z^{+}}$ **es decir** $\boldsymbol{Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}}$

¡SABÍAS QUE!

Se presentan tres situaciones al ordenar los Números Enteros:

- $\boldsymbol{a > b}$ **si $\boldsymbol{a}$ está a la derecha de $\boldsymbol{b}$ en la recta**
- $\boldsymbol{b > a}$ **si $\boldsymbol{a}$ está a la izquierda de $\boldsymbol{b}$ en la recta**
- $\boldsymbol{a = b}$

3. Dibuja la recta numérica.

    a. Ubica en ella los siguientes números enteros $\boldsymbol{5, -1, 1, 0, -4, 3.}$

b. ¿Cuál es el mayor de todos en esa lista?, ¿por qué?
____

c. ¿Cuál el menor?, ¿por qué?
____

EVALUACIÓN

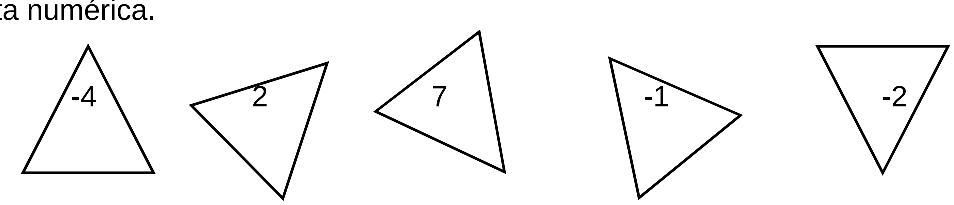
1. Responde: ¿qué número describe la situación propuesta?

   a. Una cometa vuela a una altura de 37 metros sobre la tierra y un pez está a 4 metros de profundidad en el mar____________

   b. En Aguas Blancas la temperatura se encuentra a 38°C en promedio en el día y en Tunja está a 1°C bajo cero_____________

2. Te encuentras en la iglesia y a la derecha tuya a 3 cuadras está tu casa y a la izquierda a 5 cuadras esta la casa de tu primo. ¿A qué distancia en cuadras se encuentran las dos viviendas? Si la iglesia fuese el punto cero de la recta numérica, representa la situación.

3. Ordena las fichas numéricas de mayor a menor y representa los números en la recta numérica.



C. Anexo: Actividad N°2

INSTITUCIÓN EDUCATIVA DE EDUCACIÓN MEDIA
DE AGUAS BLANCAS
MATEMÁTICAS
PROF. JEAN CARLOS BAENA ELJACH

ACTIVIDAD 2. ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS

NOMBRE:____________________________GRADO:_________FECHA:___________

OBJETIVO: Aplicar las reglas de la adición y sustracción de Números Enteros para resolver problemas propuestos.

¡SABÍAS QUE!

Para sumar un entero positivo con un entero negativo se restan sus valores absolutos y al resultado se le antepone el signo del entero con mayor valor absoluto.

Desarrolla la presente actividad en forma clara y ordenada.

1. A Carmen la sorprendió Doña Tita en la calle y enseguida le cobró $16700 que le debe. Si Carmen sólo le pudo abonar a la deuda $5500, ¿cómo queda la cuenta de Carmen con Doña Tita?

a) Representa la respuesta con un número entero signado. ______________

b) Escribe la operación que realizaste con sus respectivos signos en cada número de la cuenta.

2. Plantea una situación en donde las cantidades numéricas enteras tengan el mismo signo para luego encontrar la suma de ellas.

3. Completa el ¡sabías que!

¡SABÍAS QUE!

Para sumar dos enteros con ______ signo se suman sus valores absolutos y al resultado se le antepone ________________________.

4. Realiza las siguientes operaciones.

a. $(4-17)+(21+3)$
b. $(-12)+(-65+8)$
c. $7-(6-32)$
d. $(7-6)-32$

5. Representa y resuelve en la recta numérica la siguiente situación:

En una ciudad, la temperatura en la noche fue de $-3°C$ y en la madrugada llegó a $-8°C$. ¿Qué diferencia de temperatura hubo en esas horas?

¡SABÍAS QUE!

Para hallar la diferencia entre dos números enteros, se suma el minuendo con el opuesto del sustraendo.

Ejemplo:

$$4-7=4+(-7)=-3$$

Encuentra un número entero para que cumpla con la igualdad.

b. $4+\square=-5$ b. $-3+\square=2$ c. $-8-\square=12$ d. $\square-9=-5$

EVALUACIÓN

1. En la siguiente tabla encuentra dos números diferentes que al sumarlos den como resultado el número dado cumpliendo con las condiciones establecidas.

Número	Diferencia de dos enteros positivos	Entero negativo menos enteros positivo	Diferencia de dos enteros negativos
-9			
5			
-12			

2. Rodrigo se dirige al cajero automático el lunes para ver su saldo: es de \$1.520.652 y decide retirar \$250.000, el martes es día de pago y le consignan a su cuenta \$1.375.400, el miércoles saca \$560.000 y el jueves retira \$1.010.000 para la cuota del carro. Representa en una recta numérica la situación y responde:

a. ¿Rodrigo cuenta con saldo en la cuenta para pagar otra cuota del carro? Justifica tu respuesta.

b. La entidad bancaria le cobra a Rodrigo el impuesto \$4 por mil cuando retira, con este gravamen financiero ¿le alcanza el saldo a Rodrigo para pagar otra cuota del carro? Justifica tu respuesta.

D. Anexo: Actividad N°3

INSTITUCIÓN EDUCATIVA DE EDUCACIÓN MEDIA
DE AGUAS BLANCAS
MATEMÁTICAS
PROF. JEAN CARLOS BAENA ELJACH

ACTIVIDAD 3. MULTIPLICACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS

NOMBRE:_____________________________GRADO:_________FECHA:___________

OBJETIVO: Aplicar la ley de los signos para resolver productos de Números Enteros en problemas propuestos.

Desarrolla la presente actividad en forma escrita, clara y ordenada.

La multiplicación de números se puede expresar como una suma repetida de un mismo número. Con lo anterior resuelve:

a. $5 \times (-3)$ b. 7×4 c. $(-6) \times 5$ d. $(-52) \times 3$ e. 4×10 f. $6 \times (-15)$

¡OBSERVA QUE!

El producto de un entero positivo y un entero negativo es un entero negativo.
El producto de dos enteros positivos es positivo.

PIENSA: ¿Cuando los dos enteros son negativos, por ejemplo: $(-3) \times (-2)$ se puede aplicar el razonamiento anterior? ¿Cómo se haría la multiplicación en este caso?

¡SABÍAS QUE!

Los matemáticos resolvieron que el producto de dos enteros negativos es un entero positivo para poder definir la multiplicación de enteros en todos los casos posibles. Así en el siguiente cuadro se resume en la llamada Ley de los signos esas cuatro posibilidades:

$+ \times +$	$+$
$- \times -$	$+$
$+ \times -$	$-$
$- \times +$	$-$

Ya podemos responder por el valor de $(-3) \times (-2) = 6$.

1. Emplea la Ley de los signos en los siguientes ejercicios.

a. $(26) \times (-7)$ | b. $(-354) \times (-37)$ | c. $(-82) \times (+14)$ | d.$(+71) \times (+45)$

2. Una tortuga marina desciende 3 metros cada 2 minutos. ¿A qué profundidad estará después de 8 minutos?

EVALUACIÓN

1. En un molino almacenan la harina en un silo, que tiene un embudo por donde extraen la harina que van a empacar. Los datos de entrada y salida de harina se consignan en una tabla, en donde se usaron números signados para indicar si entra harina al silo (con el signo +) o si sale (con el signo -).

Tiempo	Libras por minuto	Total de libras movidas
9:00 a 9:20	-30	
9:21 a 10:28	+32	
10:29 a 11:30	-25	
11:31 a 12:12	+45	

a. Completa la tabla
b. Entre las 9:00 y las 12:12 responde:

- ¿Cuánta harina entró?
- ¿Cuánta harina salió?
- ¿Entró más harina al silo de la que salió? Justifica tu respuesta.
- ¿Cuál es la diferencia de los entró con respecto a los salió?

2. Sin efectuar las multiplicaciones, determina el signo de cada producto.
   a. $(-6) \times 7 \times (-4)$
   b. $6 \times (-5) \times 2 \times (-9)$
   c. $(-8) \times (+45) \times 3 \times (-1) \times (-4)$

Bibliografía

ALMEIDA, e. a. (2014). Estrategia de sentido numérico en estudiantes de grado Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 9-34.

BELL, A. (1986). *Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros.* Universidad de Nottingham.

BRUNO, A. (1997). La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. *Números. Revista de didáctica de las Matemáticas N° 29*, 5-18.

CID, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números enteros. *Boletin 10° Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas.*

EULER. (1797). *Elementos del Álgebra. .* Traducido del francés con anotaciones críticas e históricas de M. Bernoulli, añadidas por M. De la Grange. Vol. I. London: J. Johnson.

FRANK AYRES, J. (1991). *ÁLGEBRA MODERNA.* McGraw-Hill.

GARCÍA, L. (2009). *Las unidades didácticas I.* Ed. Del Bened.

GLAESER, G. (1981). Epistemologie des nombres relatifis. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.

GODINO, e. a. (2009). El sentido numérico como articulación flexible de los significados parciales de los números. *Investigación en el aula de Matemáticas. Sentido numérico.* Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Maemática de la Universidad de Granada.

GÓMEZ, B. (2001). *La justificación de la regla de los signos en los libros de texto:¿Por qué menos por menos es más?* Valencia - España.

MC INTOSH, A. *et al* (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics.*

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas.* Bogotá.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2006). *Estándares básicos de competencias.* Bogotá.

NCTM. (1989). Curriculum and evaluación standards for school mathemathics. *Reston, VA: NCTM*.

NIVEN & ZUCKERMAN, (1969). *Introducción a la teoría de los números*. Ed. Limusa, México

SCHUBRING, G. (1988). Discussions epistémologique sur le statut des nombres négatifs et leur représentation dans les manuels allemands et francais des mathématiques entre 1795 et 1845. *Actas des premier colloque franco-allemand de didáctique des mathématiques et de l'informatique.* Ed. la Penseé sauvage.

SCHUBRING, G. (2012). *Os números negativos-exemplos de obstáculos epistemológicos?* Rio de Janeiro: LIMC-UFRJ.

STEWART, I. (2007). *Historia de las Matemáticas en los últimos 10000 años.* Barcelona.