Las fracciones egipcias como herramienta didáctica para resolver ecuaciones que involucran fracciones

Nancy González Manosalva

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias,

Bogotá, Colombia

2017

Las fracciones egipcias como herramienta didáctica para resolver ecuaciones que involucran fracciones

Nancy González Manosalva

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magister en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Asesor

PhD. Agustín Moreno Cañadas

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias,

Bogotá, Colombia

2017

Agradecimientos

Primero que todo, agradezco a Dios por darme sabiduría y discernimiento al momento de realizar cada proyecto en mi vida y, así, darle cumplimiento a cada uno de ellos; a su vez, le agradezco por cada ángel que puso en mi camino para llevar a cabo esta tesis tan anhelada.

Desde el momento en el que me inscribí en esta aventura, el camino hacia la meta estuvo lleno de oportunidades, saberes, conocimientos nuevos y experiencias fascinantes, así como de esfuerzos y sacrificios. Agradezco a mi adorada familia, a mis amigos, a mis docentes y sobre todo a mi esposito por ayudarme a recorrerlo, su apoyo y comprensión incondicional han dado sus frutos. Gracias esposo mío por colaborarme, sin ti esto no habría sido posible; gracias por el amor incondicional que siempre me demuestras, por tu paciencia y entendimiento. Te amo.

Gracias padres por ser tan considerados conmigo, por ese amor, ejemplo, inteligencia, dedicación que siempre me han inculcado, estos frutos de mi vida han sido gracias a ustedes, son mis ángeles permanentes. Gracias hermana mía, tu siempre me has dado ánimo y apoyo para continuar, por eso te admiro mucho y siempre te tomo como ejemplo, me siento muy orgullosa de ti y esto es por ti. Adorados Sobrinos, ustedes saben que son los hijos que no he tenido; y por ello, quiero que se sientan orgullosos de su tía, gracias por ayudarme a realizar esta tesis, gracias por comprender que no podía estar con ustedes este tiempo de estudio, y darme voces de aliento para terminar.

Gracias a mis amigos Lily, Nancy, Angie, Eimmy, Diana, Juan Manuel, Wilson, Mabel, Ethel, Liliana, Viviana, Erika, y a todos aquellos que han contribuido a este proyecto de vida, por su apoyo, dedicación, conocimiento, tiempo, amistad y complicidad, que bendición tan grande me ha dado Dios con ustedes.

Por último y no menos importante gracias a mis respetados Docentes, en especial a mi director de tesis Agustín Moreno Cañadas y la Docente Myriam Margarita Acevedo, su conocimiento, dedicación, contribución y apoyo incondicional, han dado sus resultados. Infinitas Gracias.

Nota de aceptación

Jurado

Jurado

Jurado

Agustín Moreno Cañadas PhD.

Director

Bogotá D. C. 2017

Resumen

Los estudiantes de diferentes grados de escolaridad del colegio Cafam, en la ciudad de Bogotá, presentan dificultades al momento de resolver distintas ecuaciones. No obstante, estas dificultades se incrementan cuando los estudiantes de grado octavo resuelven ecuaciones que involucran números fraccionarios. Por ello y teniendo en cuenta las dificultades que presentan los estudiantes al solucionar este tipo de ecuaciones, se realizó un estudio exploratorio sobre las fracciones a través de la historia y las ecuaciones Diofánticas; a su vez, se diseñó y aplicó una secuencia didáctica que aborda las fracciones unitarias y las ecuaciones Diofánticas como una alternativa para la solución de problemas con ecuaciones que involucran números fraccionarios.

Palabras clave: fracción, fracción unitaria, resolución de problemas, ecuaciones Diofánticas lineales.

Abstract

The students of different grades of schooling of the Cafam School, in the city of Bogota, present difficulties when they solve different equations. However, these difficulties increase when eighth grade students solve operations involving fractional numbers. For this reason, and taking into account the difficulties presented by the students in solving this type of equations, an exploratory study about the fractions through the history and the Diophantan equations was made; at the same time, a didactic sequence that addresses unit fractions and Diophantine equations as an alternative for solving problems with equations involving fractional numbers was designed and applied.

Keywords: fraction, unit fraction, problem solving, linear Diophantine equations

Contenido

Introducción **1**
Objetivos **4**
1. Contexto Teórico **5**
1.1 Aspecto curricular 5
1.2 Aspecto didáctico 6
2. Contexto histórico **9**
2.1 Números fraccionarios 9
2.1.1 Cultura egipcia 9
2.1.2 Cultura babilónica 24
2.1.3 Cultura china 26
2.1.4 Cultura griega e hindú 29
2.2 Ecuaciones 32
2.2.1. Ecuaciones Lineales o de primer grado 32
2.2.2 Ecuaciones Diofánticas 34
3. Contexto disciplinar **38**
3.1 Fracciones 38
3.1.1 Fracciones equivalentes 41
3.1.2 Simplificación de fracciones 42
3.2 Fracciones unitarias 44
3.2.1 Teorema 1 46
3.2.2 Teorema 2 48
3.3 Ecuaciones Diofánticas lineales 51
4. Estudio exploratorio **55**
4.1 Primer punto 55
4.2 Segundo punto 57
4.3 Tercer punto 61
4.4 Cuarto punto 62
4.5 Quinto punto 64

4.6 Análisis general de la prueba diagnóstico 66
5. Propuesta didáctica 68
5.1 Resultados de la secuencia didáctica 69
5.1.1 Taller 1 69
5.1.2 Taller 2 71
5.1.3 Taller Final punto 1 77
5.1.4 Taller final punto 2 79
5.1.5 Taller final punto 3 83
5.1.6 Taller final punto 4 85
5.2 Análisis general de la secuencia didáctica 87
Conclusión 88
Bibliografía 90
Anexo A – Prueba Diagnóstico I
Anexo B – Taller Uno IV
Anexo C – Taller Dos VI
Anexo D – Taller Tres IX
Anexo E – Taller XII

Lista de ilustraciones

Ilustración 2-1. Papiro de Ahmes 11
Ilustración 2-2. Jeroglíficos de fraccionarios del papiro de Ahmes. 12
Ilustración 2-3. Jeroglíficos de numeración egipcia. 12
Ilustración 2-4. Foto del Ojo de Horus. 13
Ilustración 2-5. Partes del ojo de Horus. 14
Ilustración 2-6. Ojo de Horus con fracciones unitarias. 14
Ilustración 2-7. Tabillas de Arcilla Plimpton 322. 24
Ilustración 2-8. Jeroglíficos de fracciones cuneiformes babilónicas. 25
Ilustración 2-9. Número 873 y 8073 en la cultura China antigua. 27
Ilustración 2-10. Jeroglíficos chinos en caparazón de tortuga. 28
Ilustración 2-11. Símbolos numeración griega. 29
Ilustración 2-12. Ejemplos de escritura de números griegos. 30

Ilustración 3-1. Gráfica de fracciones equivalentes 42
Ilustración 3-2. Repartición de 6 panes entre 10 personas. 44

Ilustración 4-1. Foto de tres soluciones primer punto prueba diagnóstico. 56
Ilustración 4-2. Foto de dos soluciones punto dos inciso a. 59
Ilustración 4-3. Foto de tres soluciones punto dos inciso b. 60
Ilustración 4-4. Foto de dos soluciones punto 3 prueba diagnóstico. 62
Ilustración 4-5. Foto de tres soluciones punto 4 prueba diagnóstico. 64
Ilustración 4-6. Foto de tres soluciones punto 5 prueba diagnóstico. 66

Ilustración 5-1. Collage aplicación de talleres. 68
Ilustración 5-2. Foto Solución Taller 1. 70
Ilustración 5-3. Ubicación de objetos fracciones unitarias. 72
Ilustración 5-4. Mínimo común múltiplo. 72
Ilustración 5-5. Repisa tamaño 30/40. 73
Ilustración 5-6. Foto Solución Taller 2 – Ubicación dos objetos. 74

Ilustración 5-7. Foto Solución Taller 2 – Verificación dos objetos, ubicación y verificación tres objetos. 75
Ilustración 5-8. Foto solución taller 2 – Ubicación y verificación de seis objetos. 75
Ilustración 5-9. Foto solución Taller final punto 1.....78
Ilustración 5-10. Foto solución Taller final punto 2a - 2b.....80
Ilustración 5-11. Foto solución Taller final puntos 3 y 4. 84

Lista de tablas

Tabla 2-1. Tabla de Contenido del papiro de Ahmes. 10
Tabla 2-2 . Tabla de 2/n en lenguaje moderno del papiro de Ahmes. 15
Tabla 2-3. Tabla del sistema de numeración chino. 27
Tabla 2-4. Tabla sistema de numeración griego 30

Tabla 4-1. Soluciones primer punto prueba diagnóstico. 55
Tabla 4-2. Soluciones segundo punto inciso a prueba diagnóstico. 57
Tabla 4-3. Soluciones segundo punto inciso b prueba diagnóstico. 57
Tabla 4-4 . Soluciones tercer punto prueba diagnóstico. 61
Tabla 4-5. Soluciones cuarto punto prueba diagnóstico. 63
Tabla 4-6. Soluciones quinto punto prueba diagnóstico. 65

Tabla 5-1. Soluciones primer taller. 70
Tabla 5-2. Soluciones segundo taller. 76
Tabla 5-3. Soluciones taller final punto 1. 78
Tabla 5-4. Soluciones taller final punto 2a. 81
Tabla 5-5. Soluciones taller final punto 2b. 81
Tabla 5-6. Soluciones taller final punto 3. 84
Tabla 5-7. Soluciones taller final punto 4. 86

Lista de gráficas

Gráfica 4-1. Soluciones primer punto prueba diagnóstico. 55
Gráfica 4-2. Soluciones segundo punto inciso a prueba diagnóstico. 58
Gráfica 4-3. Soluciones segundo punto inciso b prueba diagnóstico. 59
Gráfica 4-4. Soluciones tercer punto prueba diagnóstico.....61
Gráfica 4-5. Soluciones cuarto punto prueba diagnóstico.....63
Gráfica 4-6. Soluciones quinto punto prueba diagnóstico. 65

Gráfica 5-1. Soluciones taller 1. 71
Gráfica 5-2. Soluciones taller 2. 76
Gráfica 5-3. Soluciones taller final punto 1. 79
Gráfica 5-4. Soluciones taller final punto 2a. 81
Gráfica 5-5. Soluciones taller final punto 2b. 82
Gráfica 5-6. Soluciones taller final punto 3. 85
Gráfica 5-7. Soluciones taller final punto 4. 86

Introducción

La propuesta que se presenta en este documento se desarrolló con veinte estudiantes del grado octavo del colegio Cafam, ubicado en la ciudad de Bogotá, en la localidad décima (Engativá). Este es un establecimiento de carácter mixto, privado, de calendario A, y cuenta con una población aproximada de 4.000 estudiantes, de los grados transición a undécimo; en el grado de nuestro interés, hay aproximadamente 320 estudiantes. La institución ofrece una educación formal, con subsidios y tarifas diferenciales de acuerdo con el nivel de ingresos de los afiliados, aunque se privilegia a los estudiantes de menos ingresos (el 75% de los estudiantes pertenece a las categorías A y B).

Durante el trabajo desarrollado con los estudiantes de grado octavo, se ha evidenciado que estos tienen dificultad al resolver ecuaciones, especialmente cuando estas implican números racionales (no enteros). Al resolver ecuaciones y expresiones con números fraccionarios, los estudiantes no presentan solución alguna, plantean expresiones incorrectas o convierten los números fraccionarios en números decimales, resultado de operar incorrectamente los coeficientes, principalmente en operaciones aditivas.

Investigadores como: Kieran (1992), Warren (2003), Kaput y Socas (1997, 2001, 2007), Palarea (1998), Blanton (2004), entre otros han reiterado que las dificultades que presentan los estudiantes respecto a la interpretación, operación, lenguaje, representación y estructura es mayor cuando se trabaja el sistema numérico de los números racionales o cuando se utiliza este dominio numérico en otro dominio matemático, el algebraico, por ejemplo.

En el marco de pruebas internacionales como: TIMSS (Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias, por su nombre en inglés) y PISA (Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes, por su nombre en inglés), se reconoce la complejidad de la apropiación

de los números fraccionarios, puesto que los desempeños relacionados con él se categorizan en el nivel alto de competencia: Aplicar comprensión y conocimiento matemático en una amplia variedad de situaciones relativamente complejas: “Ordenar, relacionar y hacer cálculos con fracciones y decimales para resolver problemas planteados” (Educarchile, s.f., web). Se presume, entonces, que este sistema numérico incrementa la dificultad en cualquier tipo de situación, problema o ejercicio que lo involucre.

Igualmente, al dar un vistazo a los estándares del Ministerio de Educación Nacional, vemos que el estudio de los números fraccionarios debe ser abordado desde el grado primero hasta el grado undécimo, lo que nos haría pensar que, en grado octavo, los estudiantes deberían tener un buen dominio sobre el tema, cosa que no sucede, tal vez, por la forma en la que es enseñado desde los primeros años de escolaridad; además, porque los textos de apoyo utilizados para la enseñanza de los números fraccionarios están orientados, en su mayoría, a las mismas problemáticas y desde las mismas perspectivas.

En cuanto al tema, se reportan numerosas investigaciones y propuestas didácticas, las cuales hacen referencia, también, a la complejidad del proceso de enseñanza-aprendizaje de los números racionales, entre ellas: Gallardo y Rojano (1988), Vasco (1994), Obando (1999), Llinares y Sánchez (1998), Chaffe-Stengel y Nodding (1982) y Mancera (1998) proponen (entre otros) la construcción de los números racionales desde el contexto escolar, dando significado, inicialmente, a la fracción desde sus diferentes interpretaciones: como una medida, una razón, parte-todo, un operador y un reparto.

En cuanto a las ecuaciones, es un tema que se inician intuitivamente en los primeros años de escolaridad, pero es en secundaria donde tiene mayor interés y desarrollo en las clases, ya que, permite trabajar con todos los conjuntos numéricos. Sin embargo, se puede observar en los

Lineamientos Curriculares y Estándares básicos de competencias en matemáticas en Colombia, que las ecuaciones Diofánticas lineales no son incluidas como tema de estudio, han sido relegadas, a pesar de ofrecer recursos pedagógicos e históricos que vale la pena abordar en la escuela.

Teniendo en cuenta los referentes mencionados y el hecho de que uno de los obstáculos que tienen los estudiantes para trabajar con ecuaciones y expresiones se relaciona con el manejo de la estructura de los números racionales, surge la siguiente pregunta: ¿Qué tipo de estrategia didáctica podría permitir a los estudiantes avanzar en la comprensión de las ecuaciones donde se hace uso de los números racionales de la forma a/b?

A partir de propuestas y estudios de algunos autores, así como de la experiencia en el curso de Temas de Aritmética y Algebra, se diseñó una secuencia didáctica que involucra tanto las ecuaciones Diofánticas, como las fracciones egipcias, con la intención de dar a conocer a los estudiantes otros tipos de ecuaciones con fracciones únicamente unitarias, las cuales podrían resultar más fáciles de interpretar, ordenar y operar, partiendo de retos y haciendo uso de las ecuaciones Diofánticas.

Objetivos

Objetivo General

Elaborar una secuencia didáctica, que permita, a los estudiantes del grado octavo del colegio Cafam, avanzar en la comprensión de ecuaciones con números fraccionarios a través del análisis del método de descomposición de fracciones unitarias, haciendo uso de las ecuaciones Diofánticas.

Objetivos específicos

- Reconocer algunas de las dificultades que tienen los estudiantes del grado séptimo y octavo para interpretar y operar números racionales.
- Indagar, en textos y artículos, sobre la historia de la aritmética, especialmente los aspectos relacionados con el método egipcio de descomposición de fracciones y ecuaciones Diofánticas.
- Seleccionar aspectos disciplinares, histórico-epistemológicos, pertinentes a la secuencia didáctica.
- Estructurar actividades que integran la secuencia didáctica.
- Validar la secuencia didáctica con algunos estudiantes del grado octavo del Colegio Cafam.

1. Contexto Teórico

1.1 Aspecto curricular

El Ministerio de Educación Nacional (MEN), en los Estándares básicos de competencias en matemáticas, menciona los cinco procesos generales de la actividad matemática; dentro de ellos tenemos: i) la modelación y el razonamiento, que en este trabajo de grado son muy importantes; ii) la formulación, el tratamiento y la resolución de problemas; iii) la comunicación y la formulación, y iv) la comparación y la ejercitación de procedimientos. En estos cuatro procesos, los estudiantes se ven motivados a formular conjeturas y razonamientos que les servirán como pistas para avanzar en demostraciones, dando justificaciones coherentes y con la capacidad de mirar en qué casos sirven y en qué casos no, dejando atrás la memorización de algoritmos sin significado y buscando un sentido a las matemáticas.

En cuanto a esto, en los lineamientos curriculares (MEN, 1998), en el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, también se menciona la comprensión del sentido y significado de las operaciones y de las relaciones entre los números, el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación, proponiendo que, en los primeros años de escolaridad, los estudiantes sean capaces de percibir regularidades, justificar, conjeturar, admitir o rechazar dichas conjeturas, para luego ser usadas y relacionadas, comprobadas e interpretadas.

En este sentido, las fracciones, como sistema numérico, se encuentran inmersas en este pensamiento y se abordan desde el grado 1° hasta el grado 11°, miremos: “Los números y cómo se organizan” Grados 1° a 3°: “Uso fracciones para medir, repartir y compartir.”; en nuestro caso particular, Grados 8 y 9: “Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los

números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos" (Ministerio de Educación Nacional, s.f., p. 26); cabe precisar que, en estos grados, las fracciones ya no se ven como un sistema aparte, sino como un subconjunto de los números reales.

Por otra parte, en este mismo documento, se ve la necesidad de abordar temas matemáticos desde la parte histórica, ya que se debe ver como algo que fue surgiendo, resultado del estudio de varias culturas, por lo que no ha terminado y sigue en constante cambio.

Teniendo en cuenta lo anterior, se infiere la gran importancia de la comprensión, por parte de los estudiantes, de los números fraccionarios en sus diferentes representaciones, para que, así, le den significado a este sistema numérico y sean capaces de enfrentarse a cualquier situación que los involucre.

1.2 Aspecto didáctico

Según estos lineamientos, los estudiantes tienen un concepto de números racionales no enteros desde temprana edad; sin embargo, por qué no realizan o temen realizar operaciones que los involucren. Analizando textos escolares de diferentes épocas, se puede observar que el concepto de número racional siempre es el mismo "Un número racional es un número que se puede expresar de la forma a/b, donde a y b son enteros y b no es igual a cero" (Foster y Burrill, 2000, p. 72), o "número fraccionario: es el que está formado de unidades fraccionarias, consta de 2 términos: denominador: indica las partes en que se ha dividido la unidad (algo), Numerador: indica las partes que hemos tomado de la unidad" (Olmos y Martínez, 1998, p. 67); en textos más recientes, vemos que la fracción no es vista únicamente como parte todo,

> La fracción se puede interpretar como: Parte todo: una parte de la unidad. La fracción como razón: Cuando se comparan dos cantidades de un mismo conjunto o magnitud, la fracción que expresa dicha relación se denomina razón. La fracción como cociente: una fracción se puede interpretar como el cociente indicado de dos números. (Galarza, 2012, p. 96)

Los ejercicios planteados en los libros observados siempre son de la misma índole, representación de la fracción, simplificar y amplificar una fracción, conversiones de fracciones a números decimales y viceversa, entro otros, dejando a un lado el proceso y aplicaciones que tuvieron los números fraccionarios en el cambiar de los tiempos.

La enseñanza de los números fraccionarios es un asunto complejo y difícil para los estudiantes, según lo afirma Mancera (1992); eso se debe a que

> Uno de los problemas en el aprendizaje de las fracciones es que el símbolo $\frac{x}{y}\ donde\ x, y\ \in\ Z\ , y\ \neq 0$, está asociado a diversos significados (homonimia); en efecto puede representar una razón, un número racional, un operador etc. En ese sentido inverso, el concepto de fracción puede representarse como un cociente de enteros o una expresión decimal, un porcentaje (sinonimia).

Otros autores, como Chaffe-Stengel y Nodding (1982), dicen que enseñar la fracción como parte de un todo genera un obstáculo en los estudiantes, ya que se construye de cosas que no son números, lo que genera un abismo conceptual en el momento en el que se le pide al estudiante operar principalmente con fracciones con diferente denominador, esto lleva al estudiante a aprender una serie de algoritmos que dan solución a la operación, pero que no tiene ningún significativos para ellos.

Por lo anterior, se propone abordar la fracción desde un enfoque histórico-cultural, no tanto para adquirir el concepto, sino por incorporar al estudiante en el desarrollo del sistema numérico.

Como manifiesta Leóntiev (2003), en su Teoría de la actividad, el aprendizaje ocurre cuando participamos en la creación de este, reproduciendo las actividades históricas, apropiándonos de producción histórica para “hacer” matemática; esto le da la oportunidad al estudiante de conjeturar, establecer relaciones, buscar particularidades, sugerir soluciones, entre otras.

2. Contexto histórico

2.1 Números fraccionarios

Los números racionales surgen de la necesidad de dividir números, cosas, objetos en partes más pequeñas que la unidad, divisiones que no eran posibles realizar en el conjunto de los números naturales. Según algunos documentos, estos coinciden en que las primeras fracciones datan de la civilización egipcia; estas fracciones reciben el nombre de fracciones egipcias debido a su cultura y, al mismo tiempo, son fracciones unitarias debido a que, en su mayoría, tienen como numerador el número uno y su denominador es cualquier número entero positivo mayor que 1, cabe resaltar que para esta época la fracción no era vista como un número, sino como una acción de reparto únicamente.

2.1.1 Cultura egipcia

Según autores como Boyer (1986) y Smith (1953) el uso de las fracciones se remonta casi 4000 años atrás, estas aparecen por primera vez en la cultura egipcia. Los egipcios basaron su conocimiento matemático en un sistema de numeración decimal no posicional y utilizaban el principio aditivo para la ubicación de los símbolos que empezaba desde las unidades y llegaba a números hasta de 7 cifras. El uso de las fracciones en ese tiempo era exclusivamente para problemas de reparto, o sea, como parte de un todo; en cuanto a su escritura, tenían dos formas de representación numérica, una jeroglífica y otra hierática; con ambas (que datan aproximadamente del año 2000 a.C.), notaron fracciones, especialmente, fracciones unitarias,

Evidencias de estos hallazgos se pueden observar en el papiro del Rhind, o papiro de Ahmes, el cual data del año 2000 al 1800 a.C., donde es posible apreciar ochenta y siete problemas, y su resolución de temas que tratan de aritmética, fracciones, geometría, reparto proporcional, ecuaciones lineales y trigonometría. Según Richard J. Gillins en “Mathematics in the time of the Pharaohs” estos ochenta y siete problemas se encuentra distribuidos en el papiro de Rhind de la siguiente manera.

Tabla 2-1. Tabla de Contenido del papiro de Ahmes.

Problemas	Descripción
1 - 6	Reparto de 1, 2, 6, 7, 8 y 9 barras entre 10 hombres.
7 - 20	Multiplicación de fracciones.
21 - 23	Sustracción.
24 - 29	Búsqueda de números (28 y 29) y ecuaciones resueltas por "regula falsi" (24 a 27).
30 - 34	Ecuaciones lineales más complicadas resueltas mediante divisiones.
35 - 38	Ecuaciones lineales más complicadas resueltas mediante la regla de la falsa posición.
39 - 40	Progresiones aritméticas.
41 - 46	Volúmenes.
47	Tabla de fracciones de 1 hekat en fracciones ojo de Horus.
48 - 55	Áreas de triángulos, rectángulos, trapecios y círculos.
56 - 60	Pendientes, alturas y bases de pirámides.
60 - 61B	Tabla de una regla para encontrar 2/3 de impares y fracciones unitarias.
62	Peso de metales preciosos.
63	Repartos proporcionales.
64	Progresión aritmética.
65	División proporcional de granos en grupos de hombres.
69 - 78	Intercambios, proporción inversa, cálculos de "pesu".
79	Progresión geométrica.
80 - 81	Tablas de fracciones ojo de Horus de grano en términos de hinu.
82 - 84	Problemas, no claros, sobre cantidades de comida de gansos, pájaros y bueyes.
85	Escritura enigmática. En el papiro aparece al revés.
86 - 87	Memorando de ciertas cuentas e incidentes, gran parte perdida.

Fuente: http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm

Ilustración 2-1. Papiro de Ahmes

Fuente: http://www.neoteo.com/el-papiro-de-rhind-matematica-antigua/

En este papiro, se puede ver que los egipcios ya manejaban el concepto de fracción; no obstante, extrañamente empleaban y operaban únicamente fracciones unitarias a excepción de la fracción $\frac{2}{3}$. Para representar las fracciones unitarias, los egipcios utilizaron un símbolo en forma de óvalo encima del número (como se muestra en la ilustración 2-2) y un ovalo con un arco entrelazado para la fracción $\frac{2}{3}$; los símbolos eran escritos de derecha a izquierda no posicional, sino aditivo; también se aprecia en el papiro que la forma de operar estas fracciones era aditiva, aunque se desarrollaban ejercicios de multiplicación a partir de duplicaciones y mediciones.

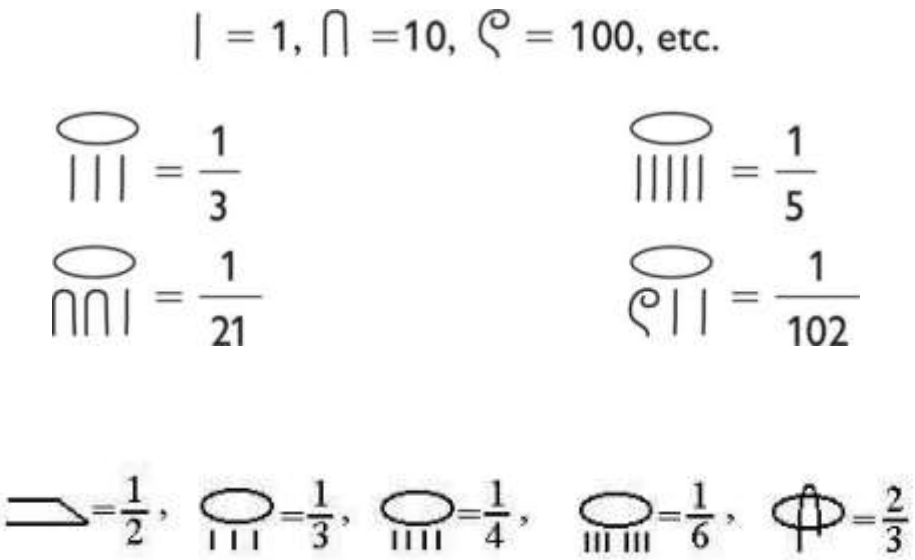


Ilustración 2-2. Jeroglíficos de fraccionarios del papiro de Ahmes.

Fuente: https://sites.google.com/site/salonsosanz/egipto4.JPG

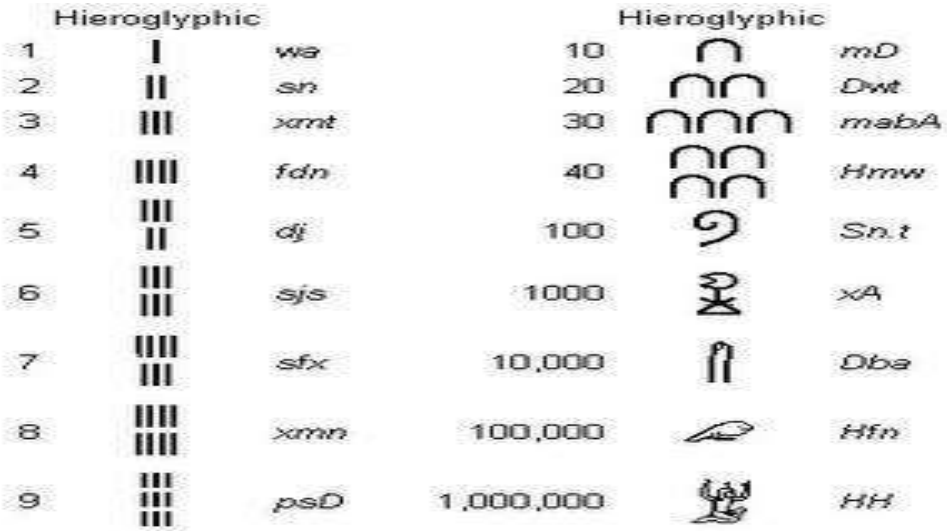


Ilustración 2-3. Jeroglíficos de numeración egipcia.

Fuente: http://sobrehistoria.com/simbolos-numericos-egipcios/

Otra evidencia del uso de las fracciones unitarias en la cultura egipcia es el ojo de Horus, utilizado por los antiguos Egipcios en las medidas de capacidad para cereales; mientras que para medidas agrarias utilizaron un procedimiento gráfico que les permitía escribir las seis primeras fracciones unitarias con denominador potencias de 2, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$, o sea, de la forma $\frac{1}{2^n}$.

Según René Taton (1971), los símbolos se derivaban de un mito arcaico, donde el ojo del dios halcón, Horus, le fue arrancado y despedazado por el dios Seth. El ojo completo de Horus, llamado Udyat, combina el ojo humano con los trazos cromáticos que rodean el ojo del halcón.

Ilustración 2-4. Foto del Ojo de Horus.

Fuente: http://piedrasenbruto.blogspot.com.co/2012/03/el-ojo-de-horus.html

Después de despedazarlo, y de tomarlas por separado, cada una de la partes de este ojo mágico designan una fracción unitaria, las cuales, al ser sumadas, dan un total de $\frac{63}{64}$, y se supone que la parte faltante $\frac{1}{64}$ para completar el ojo o sea la unidad, fue recuperada mágicamente por Thost, el dios Ibis, quien al recuperar y reunir el ojo despedazado se lo devolvió a su dueño.

Cada parte del ojo de Horus representaba una fracción unitaria y, a su vez, una parte del ojo, es así como la ceja equivalía a $\frac{1}{8}$, la pupila era $\frac{1}{4}$, la parte izquierda de la pupila $\frac{1}{2}$, la parte derecha $\frac{1}{16}$, la parte inferior vertical bajo el ojo $\frac{1}{32}$ y, por último, la parte inferior diagonal del ojo $\frac{1}{64}$.

Ilustración 2-5. Partes del ojo de Horus.

Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Ojo_de_Horus

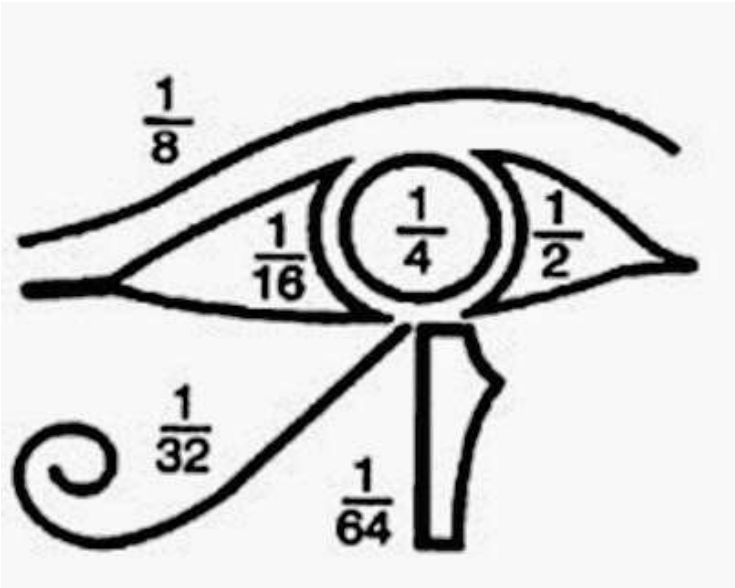


Ilustración 2-6. Ojo de Horus con fracciones unitarias.

Fuente: https://simbolosysignificados.blogspot.com.co/2014/06/ojo-de-horus-udyat.html

Debido a que las fracciones unitarias eran la única forma de expresión y operación entre fracciones, los egipcios realizaron, en el papiro de Ahmes, una tabla con la descomposición en fracciones unitarias de las fracciones de la forma 2/n salvo la fracción 2/3; no obstante, solo hasta

hace pocos años, según Milo Gardner (2006 y 2011), pudo ser interpretada la forma en la que fue escrita la tabla. La Tabla del Papiro de Rhind, en escritura moderna significa: [Numerador 2 y denominador o divisor (Div.) Número impar desde 3 hasta 101].

Tabla 2-2 . Tabla de 2/n en lenguaje moderno del papiro de Ahmes.

Div.	Descomposición	Div.	Descomposición
3	2/3	53	1/30 + 1/318 + 1/795
5	1/3 + 1/15	55	1/30 + 1/330
7	1/4 + 1/28	57	1/38 + 1/114
9	1/6 + 1/18	59	1/36 + 1/236 + 1/531
11	1/6 + 1/66	61	1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610
13	1/8 + 1/52 + 1/104	63	1/42 + 1/126
15	1/10 + 1/30	65	1/39 + 1/195
17	1/12 + 1/51 + 1/68	67	1/40 + 1/335 + 1/536
19	1/12 + 1/76 + 1/114	69	1/46 + 1/138
21	1/14 + 1/42	71	1/40 + 1/568 + 1/710
23	1/12 + 1/276	73	1/60 + 1/219 + 1/292 + 1/365
25	1/15 + 1/75	75	1/50 + 1/150
27	1/18 + 1/54	77	1/44 + 1/308
29	1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232	79	1/60 + 1/237 + 1/316 + 1/790
31	1/20 + 1/124 + 1/155	81	1/54 + 1/162
33	1/22 + 1/66	83	1/60 + 1/332 + 1/415 + 1/498
35	1/30 + 1/42	85	1/51 + 1/255
37	1/24 + 1/111 + 1/296	87	1/58 + 1/174
39	1/26 + 1/78	89	1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890
41	1/24 + 1/246 + 1/328	91	1/70 + 1/130
43	1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301	93	1/62 + 1/186
45	1/30 + 1/90	95	1/60 + 1/380 + 1/570
47	1/30 + 1/141 + 1/470	97	1/56 + 1/679 + 1/776
49	1/28 + 1/196	99	1/66 + 1/198
51	1/34 + 1/102	101	1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606

Fuente: Berciano Alcaraz, 2007, p. 126.

Aún se desconoce por qué utilizaban las fracciones unitarias si es evidente que los cálculos se hacen más difíciles. Se tiene la teoría de que podría ser la facilidad en hacer comparaciones, ya que con el numerador siendo siempre uno, era más fácil determinar el orden; otro factor pudo ser

la notación, pues era sencillo interpretar que un número con un ovalo encima significaba una fracción de la forma 1/n. Esta notación y uso se siguió utilizando por siglos, inclusive oponiéndose a la idea de Ptolomeo, quien afirmaba que la notación babilónica era mucho mejor.

En los siguientes ejemplos podemos observar los cálculos que los escribas egipcios realizaban para descomponer una fracción en la suma de dos o más fracciones unitarias.

Descomponer $\frac{15}{24}$ en fracciones unitarias.

Para ello se buscan los divisores de 24 que sumados den 15.

$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

15 = 12 + 3

15 = 12 + 2+ 1

15 = 8 + 6 + 1

15 = 8 + 4 + 3

15 = 6 + 4 + 3 + 2

Una de las posibles descomposiciones como sumas de fracciones de $\frac{15}{24}$ es:

$$\frac{12}{24} + \frac{3}{24}$$

Fracciones que al ser simplificadas quedan expresadas como la siguiente suma de fracciones unitarias

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

Es decir que $\frac{15}{24}$ se puede expresar como la suma de $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

Descomponer $\frac{13}{70}$ en fracciones unitarias.

Buscamos divisores de 70 que sumados den 13.

D_{70} = {1, 2, 5, 7, 10, 14, 35,70}

13 = 1 + 5 + 7

13 = 1 + 2 + 10

Una de las posibles descomposiciones como sumas de fracciones de $\frac{13}{70}$ es:

$$\frac{1}{70} + \frac{2}{70} + \frac{10}{70}$$

Fracciones que al ser simplificadas quedan expresadas como la siguiente suma de fracciones unitarias

$$\frac{1}{70} + \frac{1}{35} + \frac{1}{7}$$

Es decir que $\frac{13}{70}$ se puede expresar como la suma de $\frac{1}{70} + \frac{1}{35} + \frac{1}{7}$

Por ultimo miremos el siguiente ejemplo,

Descomponer $\frac{29}{210}$ en fracciones unitarias.

Buscamos divisores de 210 que sumados den 29.

D_{210} = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210}

29 = 21+7+1

29 = 21+6+2

29 = 21+5+3

29 = 21+5+2+1

29 = 15+14

29 = 15+10+4

29 = 15+10+3+1

29 = 15+7+6+1

29 = 15+7+5+2

29 = 15+6+5+3

29 = 15+6+5+2+1

29 = 14+10+5

29 = 14+10+3+2

29 = 14+7+6+2

29 = 14+7+5+2+1

Algunas de las posibles descomposiciones como sumas de fracciones de $\frac{29}{210}$ es:

$$\frac{15}{210} + \frac{14}{210}$$

Fracciones que al ser simplificadas quedan expresada como la siguiente suma de fracciones unitarias

$$\frac{1}{14} + \frac{1}{15}$$

o,

$$\frac{14}{210} + \frac{7}{210} + \frac{5}{210} + \frac{2}{210} + \frac{1}{210}$$

Simplificada,

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{105} + \frac{1}{210}$$

Es decir que $\frac{29}{210}$ se puede expresar como la suma de $\frac{1}{14}+\frac{1}{15}$ o también como la suma de $\frac{1}{15}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{105}+\frac{1}{210}$.

Como podemos observar, la descomposición de una fracción en sumas de fracciones unitaria, no siempre es única, pueden existir varias soluciones dependiendo de las posibles sumas que nos den el numerador con los divisores del denominador.

Ahora bien, los egipcios no solo descomponían las fracciones en fracciones unitarias, sino que también realizaban sumas entre ellas, veamos algunos ejemplos sobre como sumaban las fracciones unitarias.

Un ejemplo que aparece en el Papiro de Rhind es $1\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=1\frac{1}{2}$

¿Pero cómo obtuvieron el resultado?, los escribas se basaban en tablas que registraban los resultados de sumas realizadas previamente, algunas particularidades de estas, técnicas de agrupación y desagrupación de fracciones iguales, buscando fracciones nuevamente fracciones unitarias o la unidad y por último la técnica de aplicación de “números rojos”, lo cual consistía en multiplicar un mismo número (número rojo) a todas o algunas fracciones unitarias, de tal forma que se obtuviera una cantidad entera, estas cantidades enteras se suman y luego se busca una fracción unitaria que multiplicada por el número rojo de como resultado la suma obtenida anteriormente, esta fracción unitaria es el resultado de la suma de las fracciones unitarias a las cuales se les aplico el número rojo. Miremos nuevamente nuestro ejemplo,

$$1\,\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=1\,\frac{1}{2}$$

Como $1\,\frac{1}{3}$ posee una parte entera y otra fraccionaria, la parte entera no se opera por el momento solo las partes fraccionarias, entonces sumamos;

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$$

Aplicando la técnica del número rojo, tenemos

$$\frac{1\times 18}{3}+\frac{1\times 18}{9}+\frac{1\times 18}{18}$$

$$\frac{18}{3}+\frac{18}{9}+\frac{18}{18}$$

$$6+\ 2+\ 1=9$$

Ahora buscamos una fracción unitaria que multiplicada por el número rojo nos dé como resultado 9.

$$\frac{1}{n}\ \times 18=9$$

$$\frac{18}{n}=\ 9$$

$$18=\ 9\,n$$

$$\frac{18}{9}=\ n=2$$

$$\frac{1}{n}=\ \frac{1}{2}$$

Por lo tanto el resultado de esta suma de fracciones unitarias es $\frac{1}{2}$, ahora le sumamos la parte entera inicial, lo que nos da como resultado final $1\frac{1}{2}$.

Observemos otros ejemplos;

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$$

Aplicando la técnica del número rojo, tenemos

$$\frac{1 \times 30}{10} + \frac{1 \times 30}{15}$$

$$\frac{30}{10} + \frac{30}{15}$$

$$3 + 2 = 5$$

Ahora buscamos una fracción unitaria que multiplicada por el número rojo nos dé como resultado 5.

$$\frac{1}{n} \times 30 = 5$$

$$\frac{30}{n} = 5$$

$$30 = 5\,n$$

$$\frac{30}{5} = n = 6$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{6}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$$

Por ultimo encontraremos el resultado de la siguiente suma de fracciones

$$\frac{12}{30}+\frac{17}{20}$$

Estas fracciones descompuestas en fracciones unitarias son:

$$\frac{12}{30}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$

$$\frac{17}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente suma de fracciones unitarias:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}$$

Al igual que los escribas vamos a agrupar algunas fracciones para utilizar resultados de operaciones anteriores,

$$\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$$

Como ya sabemos

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6}$$

Entonces tenemos,

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$$

Nuevamente agrupamos,

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

Aplicamos solamente a $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ el número rojo,

$$\frac{1\times 6}{3}+\frac{1\times 6}{6}=2+1=3$$

$$\frac{1 \times 6}{n} = 3$$

$$\frac{6}{n} = 3$$

$$n = 2$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

Encontrado este resultado tenemos,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

Ahora haremos la siguiente agrupación, con el fin de encontrar valores enteros.

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{2} + \frac{1}{4}$$

$$1 + \frac{1}{4}$$

En conclusión,

$$\frac{12}{30} + \frac{17}{20} = 1 + \frac{1}{4}$$

El uso de las fracciones egipcias fue reemplazado por las fracciones que conocemos hoy en día en tiempos posteriores a los medievales; sin embargo, siguen siendo objeto de estudio en las matemáticas modernas, gran parte de ellas son la base de la teoría de números.

2.1.2 Cultura babilónica

Además de los egipcios, otra civilización que se dedicó a estudiar los números fraccionarios fue la de los babilonios quienes basaron su conocimiento matemático en un sistema de numeración sexagesimal (base 60) y posicional, la cual se representaba separando los números de dos en dos por comas; en caso de ser números decimales, se emplea un punto y coma para indicar dichos valores. Gracias a este sistema, se lograron grandes avances en el campo matemático, ya que los babilonios no utilizaron las fracciones solamente para representar la parte todo, sino como el cociente de una fracción.

Los conocimientos y evidencias de esta cultura se basan en tabillas de arcilla provenientes de la dinastía Hammurabi (1800-1600 a.C.), trazada en escritura cuneiforme (pictogramas plasmados con una cuña en tablas de arcilla húmeda y luego secadas al sol o en hornos), en donde se podían apreciar operaciones con fracciones, problemas de algebra, ecuaciones cuadráticas, entre otros.

Ilustración 2-7. Tabillas de Arcilla Plimpton 322.

Fuente: http://villacarlos15.blogspot.es/tags/matematica/

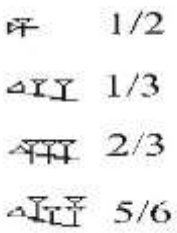


Ilustración 2-8. Jeroglíficos de fracciones cuneiformes babilónicas.

Fuente:

http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Parte1/Cap01/Parte02_01.htm

En cuanto a las fracciones, los babilonios, tal vez, escogieron el sistema sexagesimal debido a la variedad de divisores que tiene el número sesenta, lo que hace que el manejo de partes fraccionarias sea más simple que con otros sistemas numéricos, claro está que en algunas ocasiones era necesario recurrir a uno o más números sexagesimales.

Por ejemplo, para hallar el cociente de $\frac{1}{16}$, se debe tener en cuenta que 16 no es divisor de 60; además, que cada unidad es un grupo de 60 y no de diez, como en nuestro sistema de numeración.

Observemos:

Uno dividido 16 da 0,

$$\begin{array}{r|l} 1 & 16 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad 1 * 60$$

Entonces, se agrega un grupo de sesenta al dividendo para seguir dividiendo.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 16 \\ \hline 12 & 3 \end{array} \qquad 12 * 60$$

Esta división da como cociente 3 y residuo 12, pero este residuo son 12 grupos de sesenta, entonces se multiplica 12 * 60 y se sigue dividiendo.

$$\begin{array}{r|l} 720 & 16 \\ \hline 0 & 45 \end{array}$$

El cociente de $\frac{1}{16}$ es el valor de cada división realizada anteriormente separada por un punto y como, ya que son números decimales: 0; 03; 45, que escrito como la sumas de números enteros y fraccionarios corresponde a $0 + \frac{03}{60} + \frac{45}{60^2}$.

En esta fracción, las divisiones para hallar el resultado en número sexagesimal fueron relativamente pocas y fáciles, ya que, al igual que en nuestro sistema de numeración, la división de un número entre otro no siempre suele ser exacta y mucho menos finita. Tal es el caso de $\frac{1}{19}$ cuyo resultado es 0;03;09;28;25;15;47;22;06;18;56;50;31;34;44;12;37;53;41.

Para la cultura babilónica era relativamente fácil conseguir muy buenas aproximaciones por este método de sistema de notación fraccionaria, la cual permitió, para esta época y épocas posteriores, hacer cálculos más exactos.

2.1.3 Cultura china

La matemática antigua china está basada en el sistema numérico decimal posicional, el cual se representa por medio de símbolos para los números de 0 a 9 y símbolos para potencias de 10. Su representación se hace teniendo en cuenta cuántos miles, cuántas centenas, cuántas decenas y cuántas unidades tiene el número; además, el número cero debe nombrarse solamente una vez si se

encuentra en intermedio del número, independiente de que el número tenga dos o más ceros intermedios consecutivos.

Tabla 2-3. Tabla del sistema de numeración chino.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**100**	**1000**	**10000**	**100000000**
Tradi-tional	零	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	萬	億
Simpli-fied	零	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	万	亿
Formal Trad. (Daxie)	零	壹	貳	參	肆	伍	陸	柒	捌	玖	拾	佰	仟	萬	億
Formal Simp. (Daxie)	零	壹	贰	参	肆	伍	陆	柒	捌	玖	拾	佰	仟	万	亿
Pinyin	ling 2	yi1	er4	san 1	si4	wu 3	liu 4	qi1	ba 1	jiu 3	shi2	bai3	qian 1	wan 4	yi 4

Fuente: http://www.mandarintools.com/

Por ejemplo, para escribir 20.056, en numeración china es: 二 萬 零 五 十 六, que significa "dos diez mil, cero, cinco diez, seis"; en este caso, el cero representa cero unidades de mil y cero centenas.

Otra forma de representación hallada en la cultura china fue por medio de varillas de numeración, cada varilla, ubicada de forma vertical o de forma horizontal, era una unidad y una colocada perpendicular a las unidades, eran cinco unidades; para diferenciar entre unidades, decenas y centenas, cada posición iba intercalada, se escribía de forma vertical y la otra de forma horizontal y el cero se indicaba con una posición vacía.

Por ejemplo, el número 873 y el número 8073.

Ilustración 2-9. Número 873 y 8073 en la cultura China antigua.

En cuanto a la escritura de números fraccionarios, esta es muy similar a la utilizada actualmente, se ubica el numerador encima del denominador, pero sin la línea fraccionaria. Por ejemplo, para representar un octavo, seria:

Las inscripciones más antiguas de la matemática china se remontan a la Dinastía Shang, siglos VI – XI a.C., donde se encontraron inscritos en huesos y caparazones de tortuga (parte interna) algunas representaciones matemáticas.

Ilustración 2-10. Jeroglíficos chinos en caparazón de tortuga.

Fuente: http://espanol.cri.cn/921/2009/05/05/1s177554.htm

Los hallazgos, en cuanto a números fraccionarios, datan aproximadamente del 300 a.C., con el libro Chou Pei Suan Ching. Este contiene cálculos astronómicos, algunas propiedades del triángulo y operaciones con fracciones; más que un libro de operaciones es un diálogo entre un ministro y su príncipe, y se evidencia, al igual que en otras culturas, la necesidad de repartir (fracción como parte todo) y la agrimensura.

Otro libro que fundamenta la historia de las matemáticas en la cultura china, es *Los nueve capítulos sobre el arte matemático*, su origen se remonta al periodo de la Dinastía Zhou (475-221 a.C.); en este, se enuncian problemas que, posteriormente, dan su solución con la explicación, este

trata sobre las matemáticas y cálculos para la elaboración de objetos de la época arco, flechas, carruajes, entre otros; su relación con los fraccionarios está definida como el cociente de una división y esta lijada a medidas y términos, tal como “una novena parte de una pulgada”.

Las operaciones con números fraccionarios registradas en este libro son algunas de las utilizadas actualmente, en diferentes capítulos de los nueve escritos aparecen operaciones de suma, resta, multiplicación y división, además de simplificación de fracciones por el método de sustracción sucesiva y búsqueda de denominadores comunes, entre otras.

2.1.4 Cultura griega e hindú

Los griegos tomaron como sistemas de numeración el sistema ático o herodiano y el sistema Jonio o alfabético, juntos, basados en el sistema de numeración decimal posicional, no incluido el cero. El sistema ático data del siglo VI a.C., es aditivo y sus signos provienen de palabras griegas, excepto el número uno.

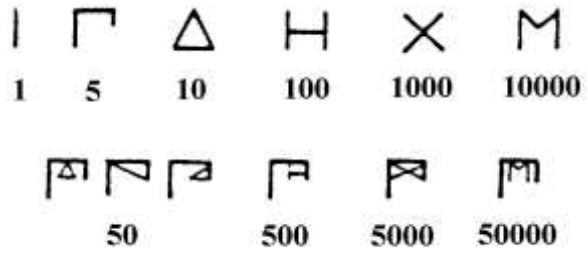


Ilustración 2-11. Símbolos numeración griega.

Fuente: https://line.do/es/sistemas-de-numeracion/r4j/vertical

Ilustración 2-12. Ejemplos de escritura de números griegos

Fuente: http://www.librosmaravillosos.com/aritmeticarecreativa/capitulo01.html

El sistema de numeración jónico se utilizó desde el siglo V a.C., también basado en letras del alfabeto griego; no obstante, debido a que este solo tenía 24 letras y los números eran 27, fue necesario añadir tres letras más digamma (F) o stigma (ς) para el 6, goppa (ϙ) para el 90 y sampi (ϡ) para el 900. Para números mayores a novecientos, se usaron las primeras 9 letras del alfabeto precedidas con un acento los que diferenciaba de unidades a unidades de mil.

Tabla 2-4. Tabla sistema de numeración griego

Letra	Valor		Letra	Valor		Letra	Valor		Letra	Valor
α´	1		ι´	10		ρ´	100		,α´	1000
β´	2		κ´	20		σ´	200		,β´	2000
γ´	3		λ´	30		τ´	300		,γ´	3000
δ´	4		μ´	40		υ´	400		,δ´	4000
ε´	5		ν´	50		φ´	500		,ε´	5000
ϝ´ / ς´ / στ´	6		ξ´	60		χ´	600		,ϝ´ / ,ς´ / ,στ´	6000
ζ´	7		ο´	70		ψ´	700		,ζ´	7000
η´	8		π´	80		ω´	800		,η´	8000
θ´	9		ϙ´ / ϟ´	90		ϡ´	900		,θ´	9000

Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Numeraci%C3%B3n_griega

A diferencia de las otras culturas, los griegos no poseen fuentes originales, solo copias realizadas muchos siglos después; esto es extraño ya que su auge fue posterior a los egipcios y babilonios.

En cuanto a los números fraccionarios, los griegos también usaron fracciones unitarias, su representación era el número entero seguido de un apostrofe; pero si la fracción no era unitaria, el entero que correspondía al numerador llevaba un apostrofe al final y el entero que correspondía al denominador llevaba doble apostrofe al final.

$$\mu\ \theta' = \frac{1}{49}$$

$$\alpha\ \beta'\ \kappa\ \varepsilon'' = \frac{12}{25}$$

Las fracciones eran consideradas como una razón o relación entre dos números, al principio se ubicaba al revés el numerador debajo del denominador y sin la raya fraccionaria, en esta cultura se destaca el temático Herón de Alejandría, quien combinó sus operaciones con fraccionarios entre el sistema sexagesimal de los babilonios y las fracciones unitarias de los Egipcios; sin embargo, el uso más continuo para sus avances los hizo con fracciones unitarias, mientras que las sexagesimales las utilizó básicamente en astronomía y física. La raya fraccionaria solo fue introducida hasta el tiempo de Leonardo de Pisa (1170-1240), quien, difundiendo en Europa el sistema de numeración indo-arábigo, agrego este símbolo para diferenciar el numerador del denominador.

En la cultura Hindú, al igual que en otras culturas, se sabe que tuvieron un gran avance en la matemática, mas, no existen textos antiguos que lo prueben, los antecedentes más antiguos acerca de la resolución de problemas con números fraccionarios son de Aryabhata, en el siglo VI d.C., gracias a él debemos las reglas para operar números fraccionarios y los fraccionarios fueron escritos numerador sobre denominador, como hoy en día, pero sin la raya fraccionaria.

2.2 Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las cuales algunos de sus términos son desconocidos, a estos términos desconocidos se les llama incógnitas y son representados generalmente con las ultimas letras del abecedario. Cada ecuación contiene al menos una incógnita y esta puede ser de diferentes grados. Para que una ecuación sea verdadera la igualdad debe cumplirse o sea debe existir por lo menos un número que al ser reemplazado en la incógnita satisfaga la igualdad de la ecuación, de no existir este número se dice que la ecuación no tiene solución

2.2.1. Ecuaciones Lineales o de primer grado

La ecuación lineal o de primer grado con una incógnita, se define como una igualdad en la que hay un número desconocido; representado usualmente por la letra x (aunque puede ser representado por cualquier letra del abecedario), llamado incógnita; elevado al grado 1, o sea de la forma $ax + b = 0$ o $a_1x + a_0 = 0$ con $a, b, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, $a_1 \neq 0$.

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una igualdad en la que hay dos números desconocido de la forma $a_1 x + a_2 y = b$, donde a_1, a_2, y b, son constantes, y x, y, son incógnitas, de la misma manera la ecuación lineal de tres incógnitas es un espacio de tres dimensiones de la forma $a_1 x + a_2 y + a_3 z = b$, donde a_1, a_2, a_3 y b, son constantes y x, y, z son incógnitas.

De manera general una ecuación lineal en *n* incógnitas $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$, es aquella de la forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n = b$$

Donde los coeficientes $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, son números reales y el termino constante b es también un número real, todas las incógnitas aparecen elevadas a la potencia 1 y no hay productos entre incógnitas.

En cuanto a las ecuaciones en la cultura egipcia, se encontró en el papiro de Rhind, un problema que corresponde a la vida cotidiana y que fue resuelto por los egipcios por el método de la falsa posición.

"Un montón, sus dos tercios, su mitad, todos juntos hacen trece. ¿Cuál es la cantidad? (cabe resaltar que los egipcios y en general todas las culturas hicieron uso de simbología muchos años después), escrito como una ecuación tenemos:

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x = 13$$

Esta se realiza por la regla de la falsa posición. Se reemplaza *x* por un valor falso, y se corrige para encontrar la solución de la ecuación.

Si $x = 12$ tenemos,

$$12 + \frac{2}{3}12 + \frac{1}{2}12$$

$$12 + 8 + 6 = 26$$

Ahora,

$$\frac{12}{26} \; como \; \frac{x}{13}$$

$$\frac{12 * 13}{26} = x$$

$$x = 6$$

2.2.2 Ecuaciones Diofánticas

Las ecuaciones Diofánticas son aquellas ecuaciones con una o más incógnitas que tiene solución en el conjunto de los números enteros. Entre las ecuaciones Diofánticas se encuentra las ecuaciones Diofánticas lineales o de primer orden, las cuales tienen dos o tres incógnitas de la forma $ax + by = c$, donde a y b son números enteros y solo uno de ellos puede ser cero. Estas ecuaciones pueden no tener solución, tener infinitas soluciones o tener una única solución. También están las ecuaciones Diofánticas cuadráticas o de segundo orden de la forma $x^2 + y^2 = n$, donde x, y, pertenecen al conjunto de los números enteros y n pertenece al conjunto de los números naturales.

Un ejemplo de ecuación Diofántica lineal sin solución es $2x + 4y = 15$, si analizamos la ecuación nos damos cuenta que tanto $2x$ como $4y$ son números pares, por lo tanto la suma de dos números pares da como resultado otro número par y 15 es un número impar; en consecuencia, la ecuación no tiene solución.

Un ejemplo de ecuación Diofántica con infinitas soluciones es $x + y = 100$, si observamos x, y puede tomar infinitas soluciones en el conjunto de los números enteros que satisfacen la igualdad como 99 + 1, 50 + 50, 25 + 75 o 3 + 97, entre otras, por lo tanto, esta ecuación tiene infinitas soluciones.

Un ejemplo de ecuación Diofántica con una única solución es:

$$14x + 22y = 50 \quad \text{Donde } x, y \in \mathbb{N}$$

Los únicos valores enteros positivos que satisfacen esta ecuación son:

$$x = 2 \quad y = 1$$

Las ecuaciones Diofánticas datan de la época helénica, reciben su nombre gracias al matemático Diofanto de Alejandría; como tal, la época en la que vivió Diofanto es un misterio, solo pequeños apartados de diferentes textos lo ubican en esta época, en particular del siglo II a.C. al siglo IV d.C., ya que en los escritos de los números poligonales nombra a Hipsicles Siglo II y luego en el año 370 d.C., es nombrado como un autor clásico según una nota de Theon de Alejandría.

De la edad de Diofanto se tiene un epitafio que dice:

> Esta es la tumba que guarda las cenizas de Diofanto. Es verdaderamente maravillosa porque, gracias a un artificio aritmético, descubre toda su existencia. Dios le permitió ser niño durante 1/6 de su vida; luego de 1/12 sus mejillas se cubrieron de barba; después de 1/7 se encendió la llama del matrimonio, del que, a los cinco años, tuyo un hijo; pero ese niño, desgraciado aunque amado apasionadamente, murió apenas llegado a la mitad de la vida alcanzada por su padre, el cual vivió cuatro años más mitigando su dolor con investigaciones sobre la ciencia de los números. (Vera, 1970, p. 1020)

Planteando y resolviendo la ecuación de este epitafio enuncia, se puede decir que Diofanto murió a una edad de 84 años.

$$Edad\ de\ Diofanto = ED$$

$$\frac{ED}{6} + \frac{ED}{12} + \frac{ED}{7} + 5 + \frac{ED}{2} + 4 = Edad\ de\ Diofanto$$

$$\frac{14ED + 7ED + 12ED + 420 + 42ED + 336}{84} = ED$$

$$\frac{75ED + 756}{84} = ED$$

$$75ED + 756 = 84ED$$

$$756 = 84ED - 75ED$$

$$756 = 9ED$$

$$\frac{756}{9} = ED = 84$$

En la época de Diofanto, aparecen ideas nuevas, la cuales no seguían un patrón helénico ni tampoco anterior a este, su obra aparece solitaria, la diferenció de la Logística colocando el nombre de Aritmética, que cambiaba el concepto de número y su método. La obra Aritmética consta de 13 libros, de los cuales se conocen seis los otros se dan por perdidos.

En el primero, expone conocimientos para leer su obra, tal como signos (símbolos) que utilizará y sus reglas operatorias, estos signos son letras que indican la incógnita y para los números Diofanto hizo uso del alfabeto griego con 27 símbolos diferentes, cada nueve representaban grupos diferentes, nueve para unidades, nueve para decenas y los últimos nueve para centenas, a parte de estas indicaciones contiene 39 problemas, 25 de ecuaciones de primer grado, veintiuno de ellos determinados y cuatro indeterminados. Y los otros 14 de ecuaciones de segundo grado.

Los escritos permiten deducir que es Diofanto quien introduce procesos algebraicos sistematizados para solucionar ecuaciones no lineales indeterminadas, matemáticos como Fermat basaron sus estudios en su libro Aritmética, tal es el caso del ejercicio 8 del libro II, que dio origen al teorema de Fermat.

Los libros son tratados como problemas, determinados e indeterminados, utiliza un simbolismo similar al nuestro, haciendo uso de letras en los polinomios, no tiene orden para

plantear los problemas, ni tampoco para resolverlos; aparecen métodos distintos en cada caso, y su ingenio para resolverlos se ven reflejados en problemas de análisis de primero hasta cuarto grado.

3. Contexto disciplinar

En cuanto al aspecto disciplinario, se tienen dos conceptos relevantes en este trabajo, las fracciones, en particular, las fracciones egipcias o unitarias y las ecuaciones, en particular, las ecuaciones Diofánticas Lineales.

3.1 Fracciones

En el artículo "Algunas conjeturas sobre fracciones egipcias" (Mora y Lima, 2004), se muestra cómo los egipcios representaban una fracción como la suma de la descomposición de la fracción en varias fracciones todas unitarias (numerador 1) y diferentes, método que utilizaban en la antigüedad para repartir, ya que la fracción en esta época no era vista como un número; este tipo de fracciones es comúnmente utilizado en la escuela al iniciar los primeros acercamientos de las fracciones con los estudiantes; por lo general, en la educación primaria.

Si miramos nuestro contexto, vemos que las fracciones han pasado de ser utilizadas únicamente para el reparto (Culturas antiguas) y ha tomado varios significados a través de la historia, aunque siguen siendo la parte de un todo; en cada contexto que se manejen, tienen un significado diferente, según Fandiño (2005), las fracciones se ven como 14 contextos diferentes, los cuales son: la fracción como parte de un todo, la fracción como cociente, la fracción como operador, la fracción en probabilidad, la fracción en los puntajes, la fracción como número racional, la fracción como punto de una recta orientada, la fracción como medida, la fracción como indicador de una cantidad de elección en el todo, la fracción como porcentaje, la fracción en el lenguaje

cotidiano, la conceptualización de la fracción en la teoría de Vergnaud, y la conceptualización signo – objeto de Duval.

Al igual que Fandiño (2005), Gallardo (2008) afirma que la fracción manifiesta significados diferentes según el contexto; no obstante, hace una clasificación menos extensa; de acuerdo con investigaciones realizadas por Kiere, Behr, Harel, Escolano y Gairin, estas se reducen a cinco contextos, estos son: la fracción como parte todo, cociente, operador, razón y medida.

a. **Fracción como Parte – todo.** Según Fandiño (2009) el concepto de fracción es muy similar en todo el mundo; una determinada unidad dividida en partes iguales y se toman algunas partes o todas, esta interpretación es la base para comprender las demás. Así la fracción vista como parte todo seria $\frac{parte}{todo}$, por ejemplo $\frac{4}{7}$, significa que un todo fue dividido en 7 partes y de estas solo se consideraron 4.

b. **Fracción como cociente.** Según Obando (2006), corresponde al resultado de dividir uno o varios objetos entre un número de personas o partes. Este es un valor numérico obtenido de la división del numerador entre el denominador de la fracción; de allí, la importancia para entender los números racionales. Ejemplo $\frac{2}{5} = 0{,}4$.

c. **Fracción como medida.** En este caso, la fracción es utilizada para medir determinada magnitud, en la cual está contenida la fracción a/b veces. Así si decimos que 2/9 se repiten tres veces, obtendremos 6/9. Lo que significa de 2/9 está contenido en 6/9 tres veces.

d. **Fracción como razón.** En este contexto, se hace una comparación entre diferentes magnitudes, generalmente se lee como *a* es a *b*, (*a:b*); y se usa comúnmente para formar proporciones, diciendo *a* es a *b*, como *c* es a *d* (*a:b = c:d*), de allí podemos determinar

fracciones equivalentes, porcentajes, entre otros. Así si tenemos $\frac{3}{4}$ a lo que se refiere es que por cada 3 de algo, hay cuatro de otros, Digamos tres manzanas por cada cuatro peras.

e. **Fracción como operador.** La fracción opera sobre un número n, transformándolo de tal forma que multiplica el número por el numerador y lo divide por el denominador; en este el número racional, puede cambiar el conjunto numérico. Digamos $\frac{2}{6} \times 9 = \frac{18}{6} = 3$, aquí la fracción $\frac{2}{6}$ actuó como operador sobre el número 9, transformándolo y obteniendo como resultado el número 3.

El mirar el significado que en la mayoría de textos se tiene sobre fracción, no hace referencia a ninguno de estos contextos, en general, una fracción es un número de la forma *a/b* donde *a* es cualquier número entero (claro está que podría ser cualquier número real) y *b* debe ser diferente de cero y se entiende como la división de la unidad en un número cualquiera de partes iguales.

De acuerdo con el libro "Matemáticas" de Luis Postigo (1965), si dividimos la unidad en un número cualquiera de partes iguales; cada una de estas partes recibe el nombre de unidad fraccionaria. El conjunto de varias de estas partes recibe el nombre de número fraccionario; número quebrado o fracción.

Para representar un número quebrado es preciso emplear dos números; uno se llama denominador y expresa el número de partes iguales en que se ha dividido la unidad; el otro se llama numerador e indica cuántas partes de aquellas en las cuales se ha dividido la unidad se han tomado. El numerador y denominador juntos constituyen los términos del quebrado. Dentro de esta definición, se establecen algunas propiedades de los números fraccionarios que son:

a. Todo fraccionario es la suma de unidades fraccionarias, cuyo número de sumandos está expresado por el numerador

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

b. Si el numerador y el denominador de un fraccionario son iguales; esta fracción equivale a la unidad

$$\frac{12}{12} = 1$$

c. Si el numerador de un fraccionario es menor que el denominador; este fraccionario es menor a la unidad

$$\frac{5}{14} < 1$$

d. Si el numerador de un fraccionario es mayor que el denominador; este fraccionario es mayor a la unidad

$$\frac{9}{4} > 1$$

e. En caso de tener dos fraccionarios con denominadores iguales; es mayor el que tenga mayor numerador.

$$\frac{5}{17} > \frac{3}{17}$$

f. En caso de tener dos fraccionarios con numeradores iguales; es mayor aquel que tenga menor denominador.

$$\frac{8}{3} > \frac{8}{9}$$

3.1.1 Fracciones equivalentes

Las fracciones equivales son aquellas que representar la misma parte del todo.

$$\frac{2}{5}\ y\ \frac{4}{10}$$

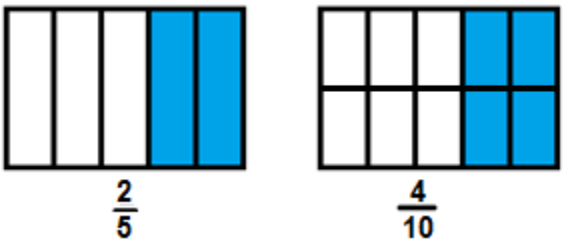


Ilustración 3-1. Gráfica de fracciones equivalentes

Fuente: Elaboración propia.

Como se observa en la ilustración 2-4, la parte sombreadas de $\frac{2}{5}$ es igual a la parte sombreada de $\frac{4}{10}$; por lo tanto, son equivalentes. Hay que tener en cuenta que no son las únicas fracciones equivalentes entre sí, si se saca la *n-ésima* parte de un número y se toman *n* pedazos, se obtendrá el mismo número; por ende, se obtienen infinitas fracciones equivalentes.

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} = \cdots$$

O sea,

$$\frac{a}{b} = \frac{na}{nb}$$

Donde $b \neq 0$ y n es un número natural diferente de cero.

3.1.2 Simplificación de fracciones

La simplificación tiene como objetivo convertir una fracción en otra equivalente de términos menores. Si sus dos términos no tienen un divisor en común; se dice que la fracción es irreducible.

Para simplificar una fracción y reducirla a su mínima expresión (fracción irreducible); basta con hallar el máximo común divisor (m.c.d.) entre el numerador y el denominador, y dividir el numerador y el denominador entre el m.c.d.

Ejemplo;

$$\frac{426}{568}$$

El máximo común divisor de estos dos valores es 142; ahora dividiendo; queda simplificada la fracción.

$$\frac{426 \div 142}{568 \div 142} = \frac{3}{4}$$

Reducir fraccionarios a denominador común.

Ya sea multiplicando o dividiendo por un mismo número los dos términos de un fraccionario; este se convierte en otro fraccionario equivalente.

Para reducir varios fraccionarios en un denominador común, se halla el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores; quien será ahora el denominador común; y los numeradores de cada fraccionario se multiplican por el cociente entre el denominador común (m.c.m.) y el antiguo denominador.

Ejemplo

$$\frac{2}{5}; \frac{4}{3}; \frac{6}{20}$$

m.c.m. (5; 3; 20) = 60

$$\frac{2 \times (60 \div 5)}{60}; \frac{4 \times (60 \div 3)}{60}; \frac{6 \times (60 \div 20)}{60}$$

$$\frac{2 \times 12}{60}; \frac{4 \times 20}{60}; \frac{6 \times 3}{60}$$

$$\frac{24}{60}; \frac{80}{60}; \frac{18}{60}$$

3.2 Fracciones unitarias

Llamada así por tener como numerador el número 1 y denominador cualquier número natural mayor que 1, fueron introducidas por la cultura egipcia hacia el año 2.000 a.C., en el papiro de Ahmes, todas las fracciones eran escritas como la suma de dos o más fracciones unitarias diferentes. De esta forma, fracciones como 2/7, se podía escribir como la suma de 1/28 + 1/4 y nunca como 1/7 + 1/7. Sin duda, lo más extraño de la matemática en Egipto; fue su forma de trabajar las fracciones; ya que el hecho de que cada fracción debiera ser descompuesta en la suma de fracciones unitarias hace más largo cualquier operación matemática.

En la actualidad existen varios métodos diferentes para hallar estas fracciones unitarias, en este documento mencionaremos cuatro de ellos con el objetivo de entender como posiblemente los escribas egipcios hallaban estas fracciones unitarias.

Uno de ellos está basado en el simple manejo gráfico de la situación que nos describe la fracción; por ejemplo, problemas como repartir 6 panes entre 10 personas o sea $\frac{6}{10}$, da como solución la suma de las fracciones unitarias:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$$

Miremos esto gráficamente; cada pan es dividido inicialmente en mitades y se reparten 5 panes entre las diez personas; el último pan nuevamente es dividido en 10 partes iguales y repartidos nuevamente entre las diez personas. Así la repartición es exacta y en fracciones unitarias.

Ilustración 3-2. Repartición de 6 panes entre 10 personas.

Fuente: Elaboración propia.

El siguiente método se basa en amplificar la fracción tantas veces sea necesaria hasta hallar divisores del denominador que sumados den el numerador de la fracción resultante, posteriormente se simplifican y se hallan las fracciones unitarias. La amplificación depende del número de fracciones unitarias que queramos sumar.

En la fracción $\frac{2}{31}$, al ser 31 un número primo sus divisores son solo 1 y 31, y no existen dos números diferentes entre los divisores de 31 que sumados me den 2, por lo tanto amplifico la fracción 20 veces

$$\frac{(2\ x\ 20\ )}{(31\ x\ 20)} = \frac{40}{620}$$

Con esta nueva fracción equivalente a la inicial obtenemos los divisores de 620 los cuales serían: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 31, 62 124, 155, 310 y 620.

Ahora buscamos entre los divisores la menor cantidad de números que sumados nos den 40, en este caso son tres números los cuales que son: 31, 5 y 4. Para encontrar las fracciones unitarias ubicamos cada uno de estos números como numerador de las tres fracciones y como denominador 620,

$$\frac{31}{620} + \frac{5}{620} + \frac{4}{620} = \frac{40}{620}$$

Y simplificamos cada fracción hasta obtener las fracciones unitarias

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155} = \frac{40}{620}$$

Si no se hubiese encontrado divisores que sumados nos dieran 40, habría sido necesario amplificar nuevamente la fracciones y encontrar nuevos divisores que sumados son dieran el numerador de la nueva fracción.

El tercero método se basa en la siguiente formula

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1}$$

Miremos este ejemplo: 1/24, donde n = 24

$$\frac{1}{24} = \frac{1}{24(25)} + \frac{1}{25}$$

$$\frac{1}{24} = \frac{1}{600} + \frac{1}{25}$$

$$\frac{1}{24} = \frac{1+24}{600}$$

$$\frac{1}{24} = \frac{25}{600}$$

Que simplificado da $\frac{1}{24}$, este método aunque efectivo solo sirve para descomposición de fracciones unitarias, en la suma de otras fracciones unitarias.

El cuarto método está basado en el algoritmo de Fibonacci quien en 1202 afirmo que toda fracción $\frac{a}{b} < 1$ se puede expresar como la suma de fracciones unitarias distintas.

Una demostración de este algoritmo con $a > 1$, aparece en el libro Liber Abaci de Leonardo Pisano, nombrado por J. García en Historia de las Matemáticas. Capítulo I: Egipto y Babilonia tercer curso de matemáticas 2009-2010, y es la siguiente:

3.2.1 Teorema 1

Toda fracción $\frac{a}{b} < 1$ se puede expresar como la suma de fracciones unitarias distintas.

Demostración:

Por inducción vamos a suponer que el teorema es cierto para toda fracción menor que 1 con numerador mayor a, para cierto a > 1.

$$\text{Sea } \frac{a}{b} < 1 \text{ , } \exists\ q \in \mathbb{N} \text{ tal que } \frac{1}{q} < \frac{a}{b} < \frac{1}{q-1}$$

Entonces,

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q} + \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q} + \frac{aq-b}{bq}$$

De la desigualdad,

$$\frac{a}{b} < \frac{1}{q-1}$$

Se obtiene que,

$$a < \frac{b}{q-1}$$

$$aq - a < b$$

$$aq - b < a$$

Ahora como $aq - b < a$, por la hipótesis de inducción nos dice que $\frac{aq-b}{bq}$ se puede descomponer como la suma de fracciones unitarias distintas. Ninguna es $\frac{1}{q}$ pues $aq - b < a < b$.

Entonces

$$\frac{aq-b}{bq} < \frac{1}{q}$$

Por ejemplo si tenemos $\frac{4}{9}$ este se pude descomponer en la suma de fracciones unitarias. Para esto buscamos un fraccionario unitario menor que $\frac{4}{9}$ y que sea el mayor de estos, los posibles

fraccionarios unitarios menores $\frac{4}{9}$ son infinitos : $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \frac{1}{n}$ $(n > 2)$, sin embargo el mayor de estos es $\frac{1}{3}$, Entonces,

$$\frac{4}{9} = \frac{1}{3} + \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{12-9}{27}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{1}{3} + \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{3}{27}$$

Como podemos observar no es necesario repetir el procedimiento con $\frac{3}{27}$, ya que este fraccionario se puede simplificar obteniendo una fracción unitaria equivalente a esta, que será $\frac{1}{9}$.

Finalmente tendremos,

$$\frac{4}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

Con respecto a este algoritmo, Charles N. Friedman en el documento Sumas y divisores y fracciones egipcias, enuncia el teorema 2., que es el siguiente;

3.2.2 Teorema 2

Todo número racional *X* de la forma $\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{p^n}}$ con *X Є [0, R)* tiene una representación como fracción unitaria.

Tener en cuenta *p* denota un conjunto de números primos no necesariamente sucesivos que van en incremento (3, 5, 7, 11, 13, 23, 37,…), p = $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$, $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, p_i primos, p se llama impar si todos los p_i son impares (De lo contrario se llama solo p).

Suponer que $p = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$ es un conjunto de números primos sucesivos el cual es "abundante" y satisface $p_k < p_1^r < 2p_k$ para algún r. Sea $R = \prod i \frac{p_i}{p_i - 1} - 1$. Suponer que para cada entero ξ que satisface $1 < \xi < p_i$, se cumple una ecuación de la siguiente forma:

$$\xi \boldsymbol{p^b} = \boldsymbol{p^{c1}} + \cdots + \boldsymbol{p^{cj}}$$

Donde $\boldsymbol{p^b} > 1$ y los c_i son distintos. (b, los c_i y j pueden depender con ξ.).

Entonces todo número racional X de la forma $\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{p^n}}$ con $X \in [0, R)$ tiene una representación como fracción unitaria

$$X = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}, x_i \text{ distintos, de la forma } p^{a_i}.$$

Prueba del Teorema: Al restar términos apropiados de X, podemos asumir que $0 \leq \frac{A}{p^a} < \frac{2}{p_1^{r-1}}$ se satisface; además podemos asumir que $\boldsymbol{\alpha}$ es tan grande como queramos, en particular que tiene componentes positivos y $a_1 \geq r$.

Entonces, si A es entero positivo que satisface $2d_m \leq A < d_{m+1}$ para algunos m, tenemos,

$A < p_1$ o $\frac{A}{p^a} \geq \frac{2}{p_1^{r-1}}$

Esto implica que podemos aplicar repetidamente el algoritmo hasta que queda el problema de representar una forma racional $\frac{A'}{p^a}$ donde A' < p_1. Pero las ecuaciones $\xi \boldsymbol{p^b} = \boldsymbol{p^{c1}} + \cdots + \boldsymbol{p^{cj}}$ implican que $\frac{A'}{p^a}$ tiene representación como fracción egipcia siempre y cuando **d** sea lo suficientemente grande (dividir $\xi \boldsymbol{p^b} = \boldsymbol{p^{c1}} + \cdots + \boldsymbol{p^{cj}}$ por $\boldsymbol{p^{b + c_1 + \cdots + c_j}}$). Ya que podemos asumir que **α** fuera inicialmente tan grande como uno quiera, el teorema está comprobado.

Como ejemplo se hará la representación de 1 en fracciones unitarias, usando solo primos 3, 5, 7.

Primero se resta de 1 los recíprocos de los primos 3, 5,7.

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{34}{105}$$

Como este resultado no es una fracción unitaria, se siguen restando de 1 fracciones unitarias con denominadores (3x3), (3x5), (3x7), (5x7)

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{15} - \frac{1}{21} - \frac{1}{35} = \frac{66}{945}$$

Nuevamente este resultado no es una fracción unitaria, ahora se restan de 1 fracciones unitarias con denominadores (3x3x3) y (3x3x5), no se tiene en cuenta el denominador (3x3x7), porque al realizar la resta nos da un número negativo, lo que significa que las fracciones unitarias restadas de 1 son mayores que 1.

Entonces,

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{15} - \frac{1}{21} - \frac{1}{35} - \frac{1}{27} - \frac{1}{45} = \frac{10}{945}$$

Ahora

$$\frac{10}{945} = \frac{1}{945} + \frac{9}{945}$$

Que simplificado es igual a:

$$\frac{10}{945} = \frac{1}{945} + \frac{1}{105}$$

Reemplazando y escribiendo la ecuación como sumas de fracciones unitaria, tenemos,

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{27} + \frac{1}{35} + \frac{1}{45} + \frac{1}{105} + \frac{1}{945}$$

Otro ejemplo Descomponer $\frac{7}{11}$ en suma de fracciones unitarias.

$$\frac{7}{11} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{17}{165}$$

Ahora,

$$\frac{17}{165} = \frac{1}{165} + \frac{5}{165} + \frac{11}{165}$$

Que simplificado queda

$$\frac{17}{165} = \frac{1}{165} + \frac{1}{33} + \frac{1}{15}$$

Reemplazando y escribiendo la ecuación como sumas de fracciones unitaria, tenemos,

$$\frac{7}{11} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{33} + \frac{1}{165}$$

3.3 Ecuaciones Diofánticas lineales

Las ecuaciones Diofánticas lineales son aquellas de la forma:

$$ax + by = n$$

Donde a, b y n son enteros dados, y se buscan los valores de x, y también enteros.

Proposición

Se dice que $ax + by = n$, tiene solución entera si y solo si mcd $(a, b) \mid n$.

Demostración

Suponga que x_o , y_o son solución entera de $ax + by = c$ o sea $ax_o + by_o = c$, si solo si mcd $(a, b) \mid c$.

Observemos que si x, y $\in Z$, y son soluciones de $ax + by = c$, entonces el término de la izquierda, es una combinación lineal de a *y* b. luego, si $d = mcd\ (a, b)$. Como $d \mid a$ *y* $d \mid b$, entonces d divide cualquier combinación lineal de a *y* b. por lo tanto $d \mid c$.

Recíprocamente, supongamos que *d = mcd (a,b)* y es divisor de *c*. Entonces, *mcd (a,b) = d entonces mcd* $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$ *= 1*. Por lo tanto

$$\exists\, p, q \in \mathbb{Z}, \frac{a}{d}p + \frac{b}{d}q = 1$$

Entonces,

$$a\frac{cp}{d} + b\frac{cq}{d} = c$$

Siendo *c/d* entero ya que por hipótesis d divisor de *c*.; por tanto, las soluciones serían

$$x_o = \frac{cp}{d}\ , y_{o=}\ \frac{cq}{d}$$

Y tendríamos que $ax_o + by_o = c$, en conclusión los enteros x_o , y_o son solución de la ecuación.

De las fracciones unitarias y las ecuaciones Diofánticas han surgido varios problemas, algunos ya resueltos y otros no, entre algunos de estos encontramos el algoritmo de Fibonacci, el algoritmo de Erdos y el algoritmo de Golomb's.

Uno de los problemas abiertos de las ecuaciones Diofánticas y las fracciones unitarias es el descrito en el libro "Unsolved Problems in Numbrer Theory" de R. K. Guy, donde se enuncia lo siguiente:

Erdös y Straus conjeturaron que la ecuación:

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Podría ser resuelta en los enteros positivos para todo $n > 1$.

De esta conjetura hay una buena explicación en el Libro Mordell, donde se muestra que la conjetura es verdadera, excepto en los casos donde n es congruente a 1^2 , 11^2, 13^2, 17^2, 19^2 o 23^2 mod 840, Varios han trabajado en el problema, incluyendo Bernstein, Obláth, Rosati, Shapiro, Straus, Yamamoto y Allan Swett, que ha verificado la conjetura para todos los n ≤ 1003162753,

Schinzel observo que la ecuación también se puede expresar como,

$$\frac{4}{at+b} = \frac{1}{x(t)} + \frac{1}{y(t)} + \frac{1}{z(t)}$$

Donde $x(t), y(t), z(t)$ son polinomios enteros en *t* coeficientes y $a \perp b$ (coprimos o primos relativos entre sí), si solo si b no es un residuo cuadrático de *a*.

Sierpinski hizo la siguiente conjetura

$$\frac{5}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Donde *x, y, z, n* son números enteros diferente de cero.

Palamà lo confirmó para todo $n \leq 922321$ y Stewart ha extendido esto a $n \leq 1057438801$ y para todo *n* de la forma $278468k + 1$.

Schinzel cambio la condición de que los números *x, y, z* fueran positivos, reemplazó los numeradores 4 y 5 por un *m* general y requirió la verdad sólo para $n > n_m$. Tal que n_m puede ser mayor que *m* es ejemplificado *ny* $n_{18} = 23$. La conjetura se ha establecido para valores sucesivamente mayores de *m* por Schinzel, Sierpinski, Sedlácek, Palamà y Stewart & Webb, que lo demuestran para $m < 36$. Breusch y Stewark mostraron de forma independiente que si $m/n > 0$ y

n es impar, entonces *m / n* es la suma de un número finito de recíprocos de números enteros impares. Vaughan a demostrado que si E_m (N) es el número de n ≤ N para cada m/n =1/x + 1/y + 1/z no tiene solución, entonces,

$$E_m(N) \ll N \exp\left\{-c(\ln N)^{2/3}\right\}$$

Donde c depende solamente m, Hofmeister & Stoll ha mostrado que si F_m (N), es el número n ≤ N para cada m/n =1/x + 1/y, no tiene solución, entonces

$$F_m(N) \ll N\,(\ln N)^{-1/\emptyset(m)}$$

Donde $\emptyset(m)$ es la función indicatriz de Euler.

4. Estudio exploratorio

Para esta fase se realizó una prueba diagnóstica que consta de 5 preguntas orientadas a la solución de problemas que involucran números fraccionarios, ecuaciones con coeficientes enteros y fracciones, y por ultimo problemas que intuitivamente se direccionan a las ecuaciones lineales con dos incógnitas, esta fue aplicada a 20 estudiantes del grado octavo del colegio Cafam Bogotá.

4.1 Primer punto

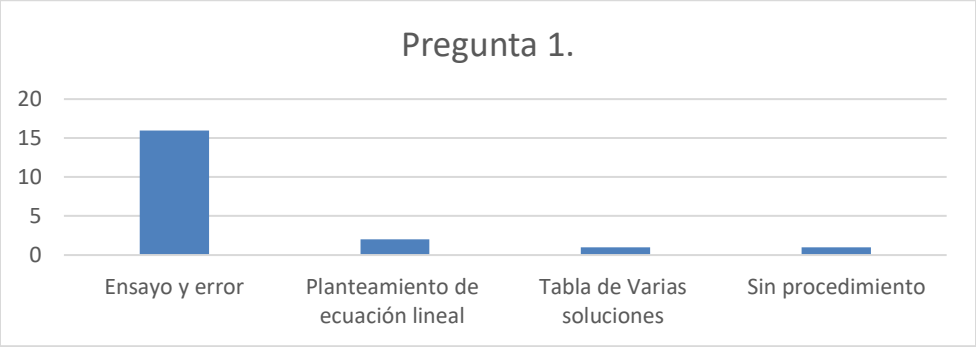
De una alcancía se sacan cierto número de monedas de $200 y de $500, si en total se sacaron $29.100 ¿Cuántas monedas se sacaron de cada nominación?

En este problema se trataba de dar un acercamiento al planteamiento de ecuaciones lineales con dos incógnitas (Ecuaciones Diofántica lineales).

Tabla 4-1. Soluciones primer punto prueba diagnóstico.

Tipos de soluciones	
Ensayo y error	16
Planteamiento de ecuación lineal	2
Tabla de Varias soluciones	1
Sin procedimiento	1

Fuente: Elaboración propia.



Gráfica 4-1. Soluciones primer punto prueba diagnóstico.

Fuente: Elaboración propia.

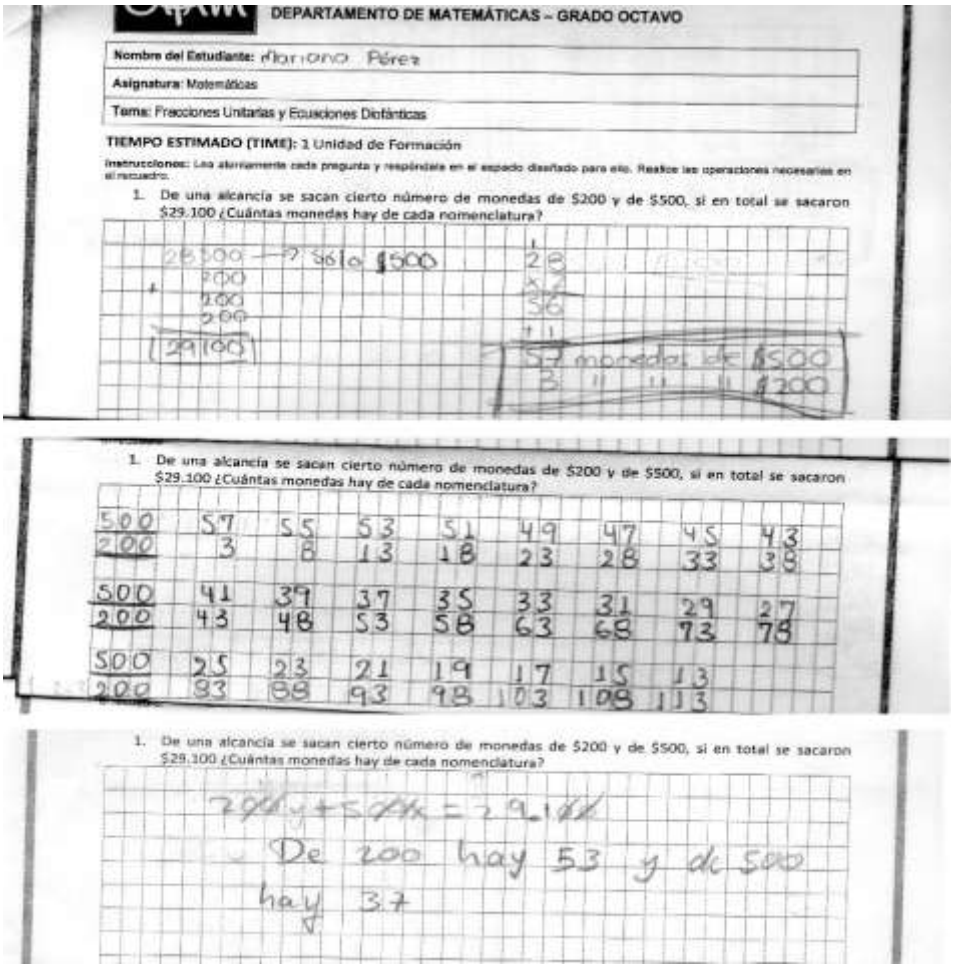


Ilustración 4-1. Foto de tres soluciones primer punto prueba diagnóstico.

Fuente: Elaboración propia.

De los 20 estudiantes, 19 resolvieron de manera correcta el problema, sin embargo, solo dos de ellos hicieron un planteamiento por medio de una ecuación lineal y se destaca el estudiante que hace un análisis más profundo no hallando una única solución al problema si no varias.

4.2 Segundo punto

Encuentre el valor de x en las siguientes ecuaciones.

$$\text{a. } 3x + 2x + 4x = 18 \text{ b. } \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{6}\,x + \frac{1}{9}\,x = \frac{40}{18}$$

En este punto se plantea para mirar el despeje de ecuaciones con una incógnita con números naturales y fraccionarios.

Inciso a.

Tabla 4-2. Soluciones segundo punto inciso a prueba diagnóstico.

Tipos de soluciones	Correcta	Incorrecta
Sumando variable y despajando x	9	
Por ensayo y error	4	
Elevando al cuadrado cada termino		3
Suma variables, sin despeje		2
Elevando las suma de todos los términos al cuadrado		2
	13	7

Fuente: Elaboración propia.

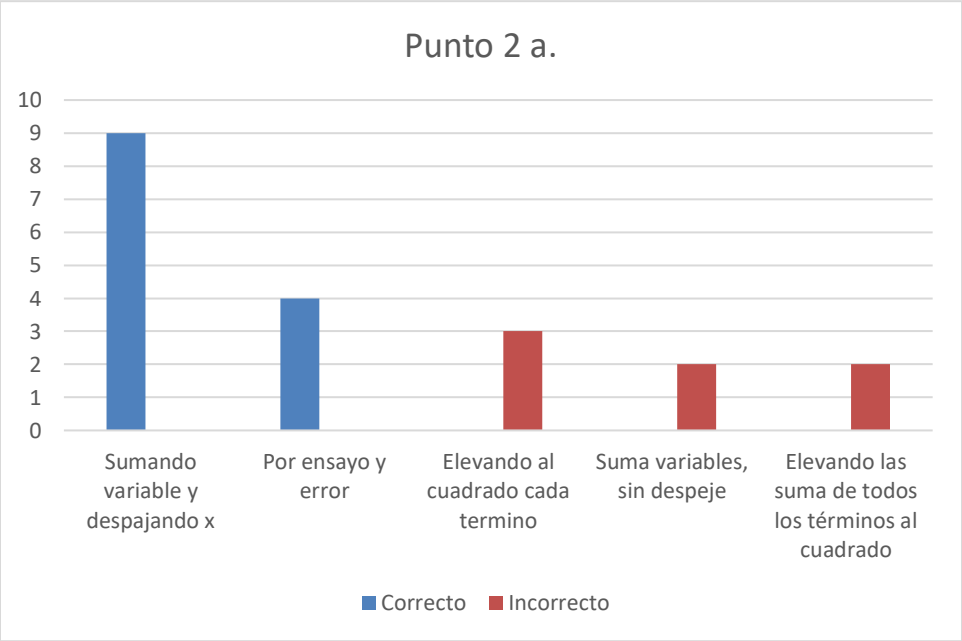
Inciso b.

Tabla 4-3. Soluciones segundo punto inciso b prueba diagnóstico.

Tipos de soluciones	Correcta	Incorrecta
Conversión a número decimal	1	
Suma hallando m.c.m., despeje correcto	2	
Amplifica fracciones, despeje correcto	1	
Suma de fracciones con m.c.m., despeje erróneo		1
Suma denominadores como $\mathbb{N}$, mantiene numerador e invierte la fracción		4

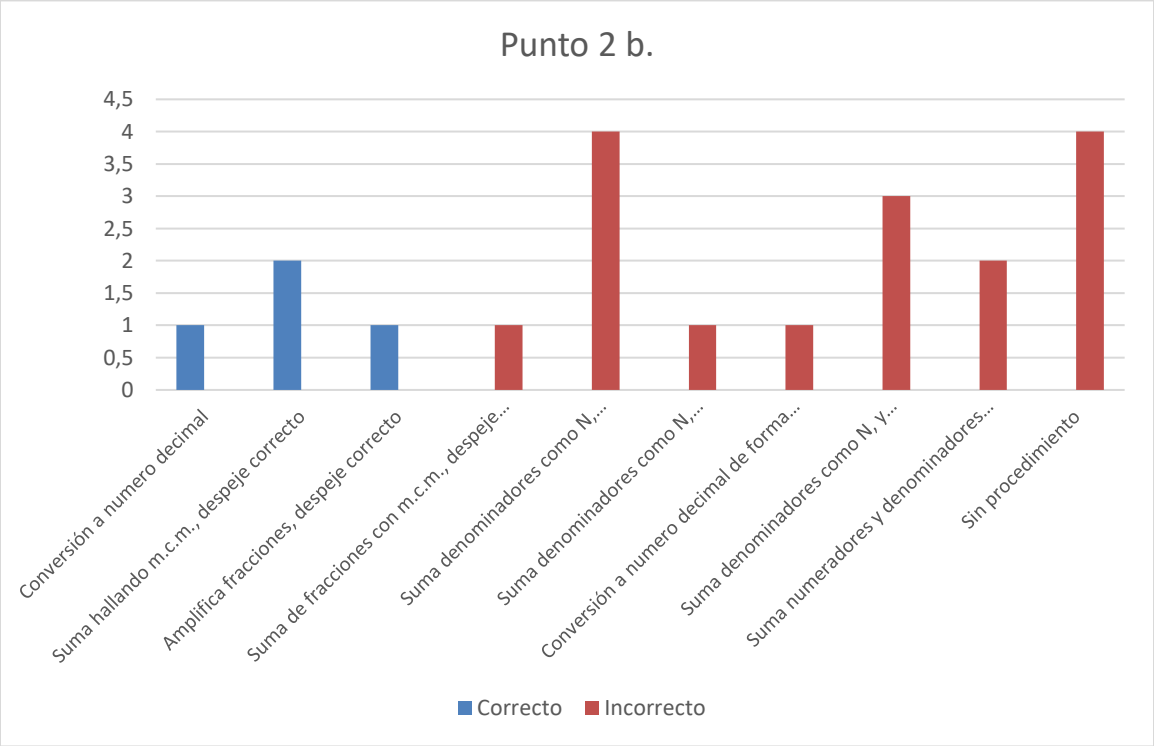
Tipos de soluciones	Correcta	Incorrecta
Suma denominadores como ℕ, mantiene numerador y despeja ecuación		1
Conversión a número decimal de forma errada		1
Suma denominadores como ℕ, y multiplica numeradores por 10		3
Suma numeradores y denominadores como ℕ y resta		2
Sin procedimiento		4
	4	16

Fuente: Elaboración propia.



Gráfica 4-2. Soluciones segundo punto inciso a prueba diagnóstico.

Fuente: Elaboración propia.



Gráfica 4-3. Soluciones segundo punto inciso b prueba diagnóstico.

Fuente: Elaboración propia.

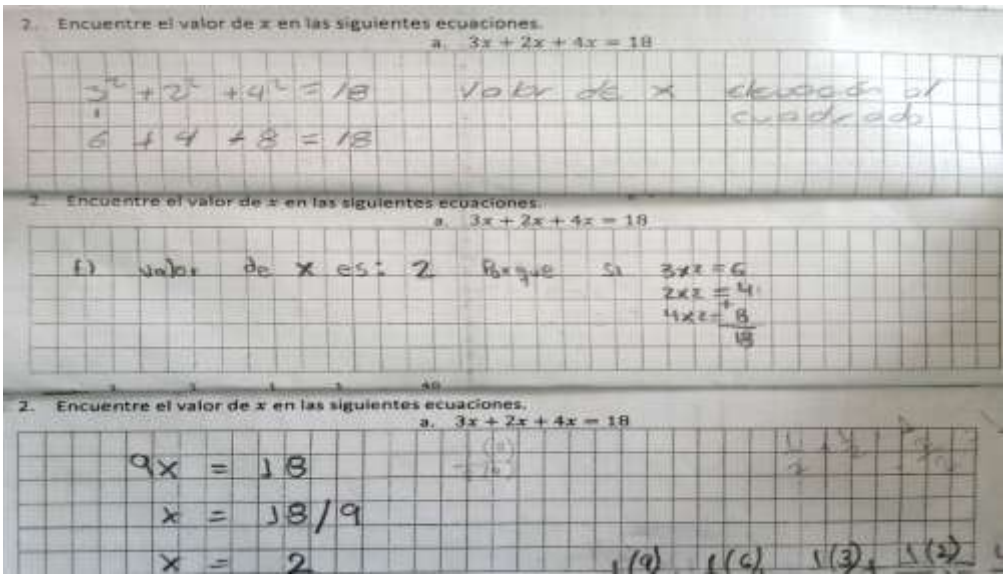


Ilustración 4-2. Foto de dos soluciones punto dos inciso a.

Fuente: Elaboración propia.

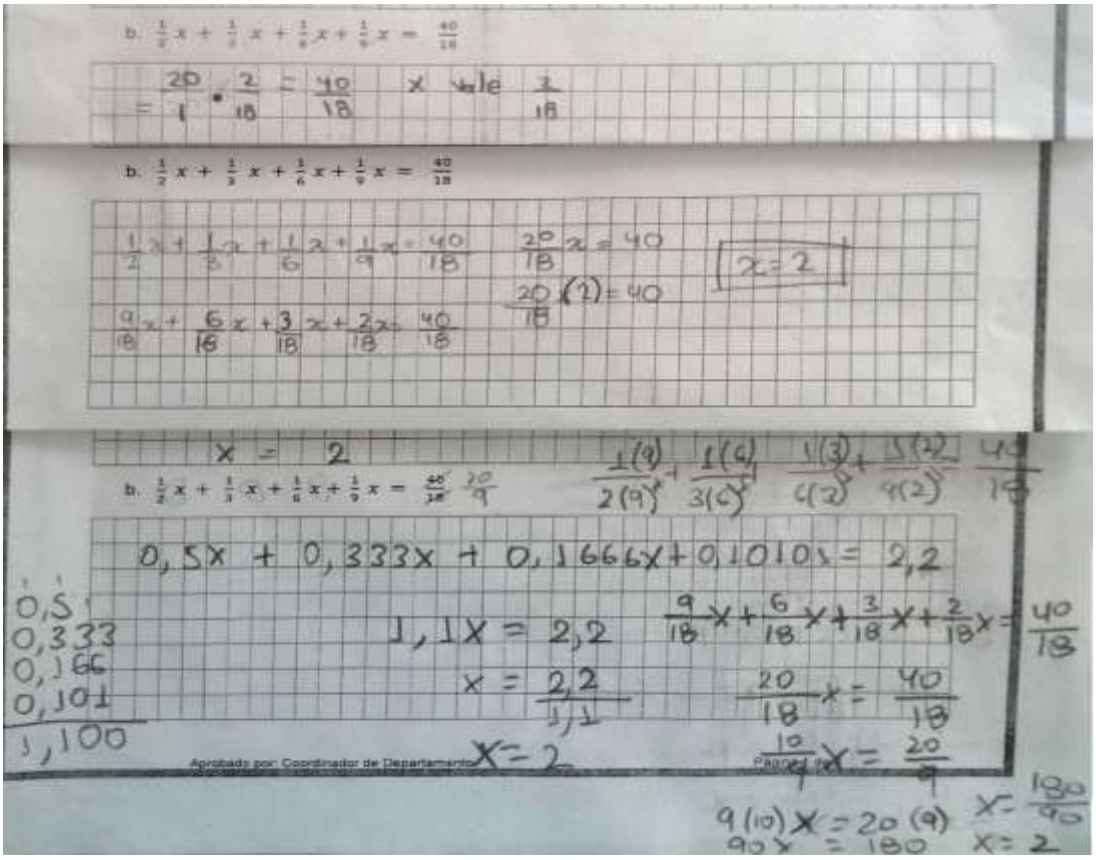


Ilustración 4-3. Foto de tres soluciones punto dos inciso b.

Fuente: Elaboración propia.

Se hace evidente que, al involucrar en las ecuaciones números fraccionarios, los estudiantes cometen demasiados errores e inclusive realizan cosas incoherentes y suelen extrapolar cálculo de los números naturales a los fraccionarios, también recurren a hallar el cociente de las fracciones para su solución. En las ecuaciones con coeficientes enteros se cometen menos errores, pero se evidencian errores donde combinan temas propios del algebra para dar solución a una ecuación.

4.3 Tercer punto

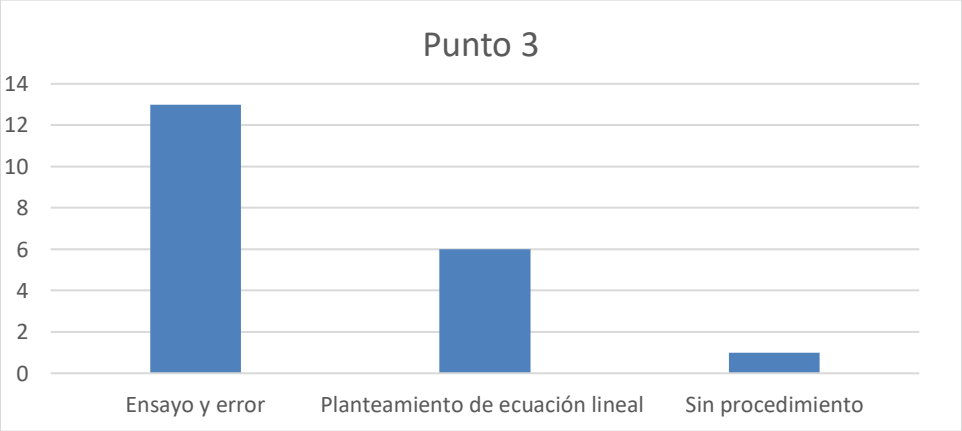
Al multiplicar el número de mis hijos por 25 y la edad del mayor por 12, la suma de los productos resultantes es 231 ¿Cuál es la edad de mi hijo mayor?

Nuevamente el objetivo en este punto es que los estudiantes den solución a un problema de ecuación lineal con dos incógnitas, ojala por medio del planteamiento de la ecuación.

Tabla 4-4 . Soluciones tercer punto prueba diagnóstico.

Tipos de soluciones	
Ensayo y error	13
Planteamiento de ecuación lineal	6
Sin procedimiento	1
	20

Fuente: Elaboración propia.



Gráfica 4-4. Soluciones tercer punto prueba diagnóstico.

Fuente: Elaboración propia.

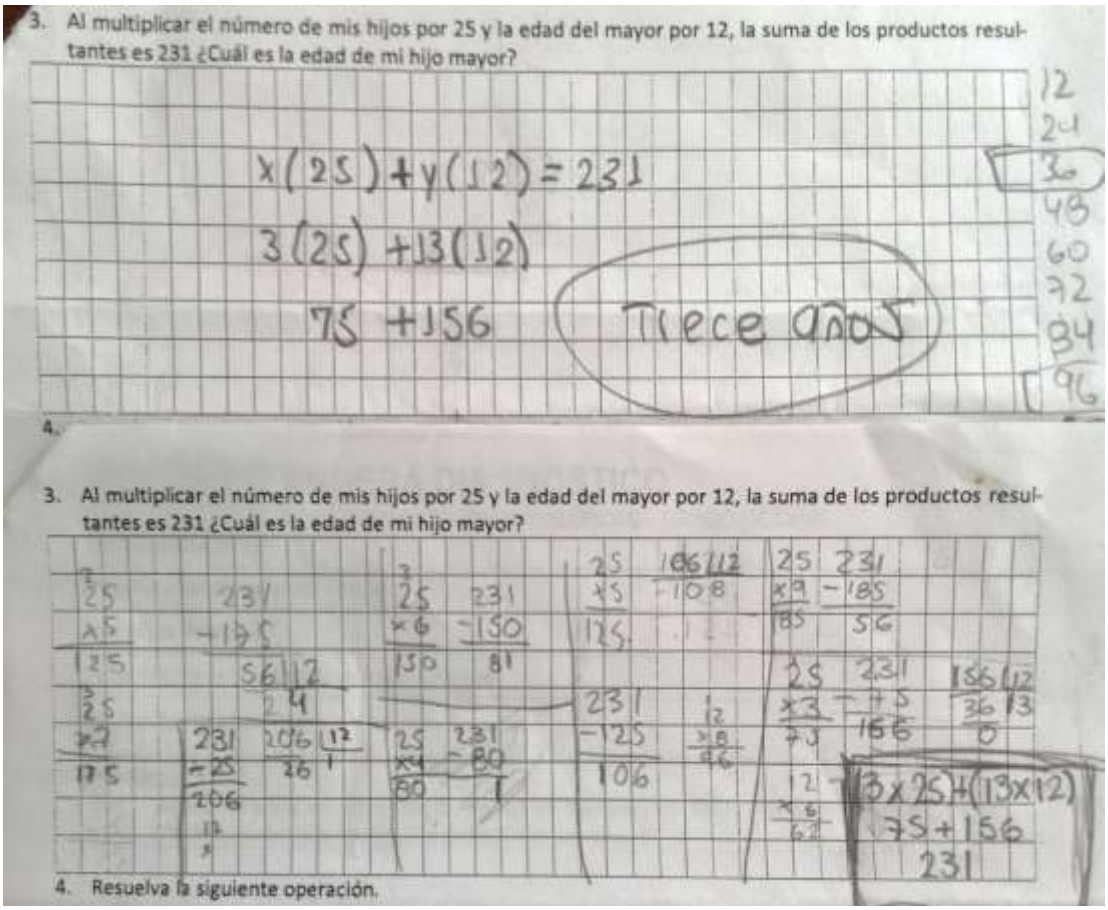


Ilustración 4-4. Foto de dos soluciones punto 3 prueba diagnóstico.

Fuente: Elaboración propia.

En este ejercicio solo uno de los estudiantes no dio solución, los demás la hallaron de forma correcta, se ve un incremento al utilizar la ecuación lineal con dos incógnitas como planteamiento de solución al problema.

4.4 Cuarto punto

Resuelva la siguiente operación.

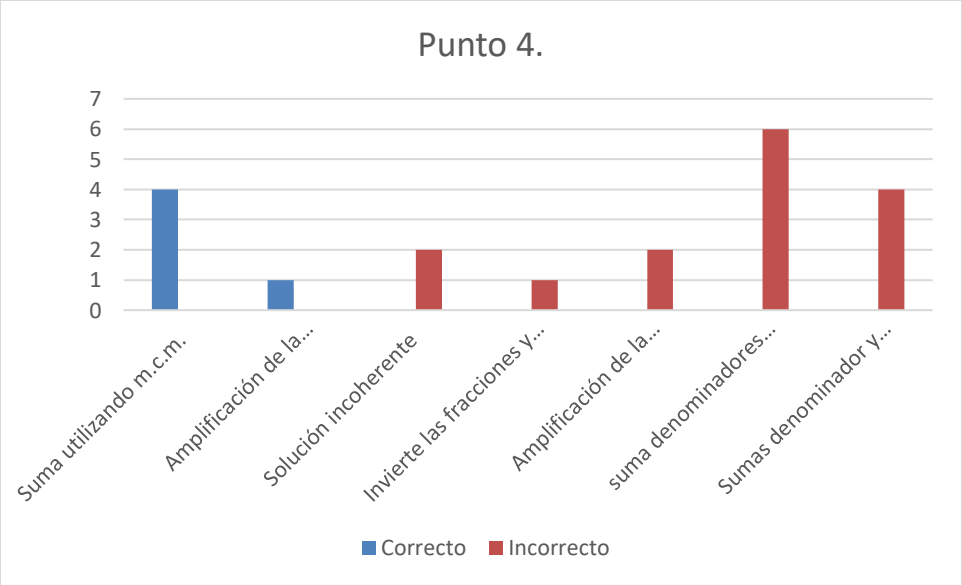
$$\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}$$

El objetivo de este punto era dar una pequeña introducción a la suma de fracciones unitarias y mirar como realizan dichas sumas.

Tabla 4-5. Soluciones cuarto punto prueba diagnóstico.

Tipos de soluciones	Correcta	Incorrecta
Suma utilizando m.c.m.	4	
Amplificación de la fracción	1	
Solución incoherente		2
Invierte las fracciones y suma como si fuesen números ℕ		1
Amplificación de la fracción de forma errada		2
suma denominadores como N y mantiene el 1 en el numerador		6
Sumas denominador y numerado como ℕ		4
	5	15

Fuente: Elaboración propia.



Gráfica 4-5. Soluciones cuarto punto prueba diagnóstico.

Fuente: Elaboración propia.

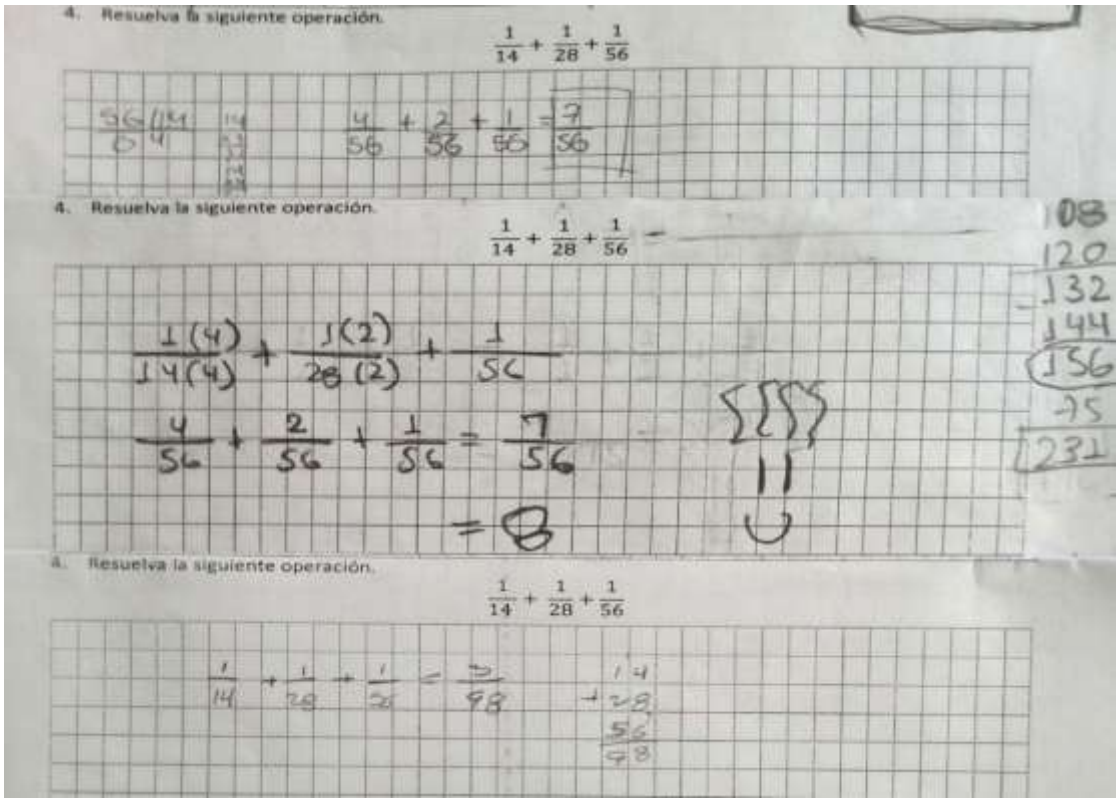


Ilustración 4-5. Foto de tres soluciones punto 4 prueba diagnóstico.

Fuente: Elaboración propia.

Nuevamente al realizar operaciones con números fraccionarios la mayoría de estudiantes (15), cometen errores, extrapolan operaciones de los números naturales a los fraccionarios y no dan solución a lo planteado, en este punto ninguno de los estudiantes recurrió a hallar el cociente de la fracción para su solución.

4.5 Quinto punto

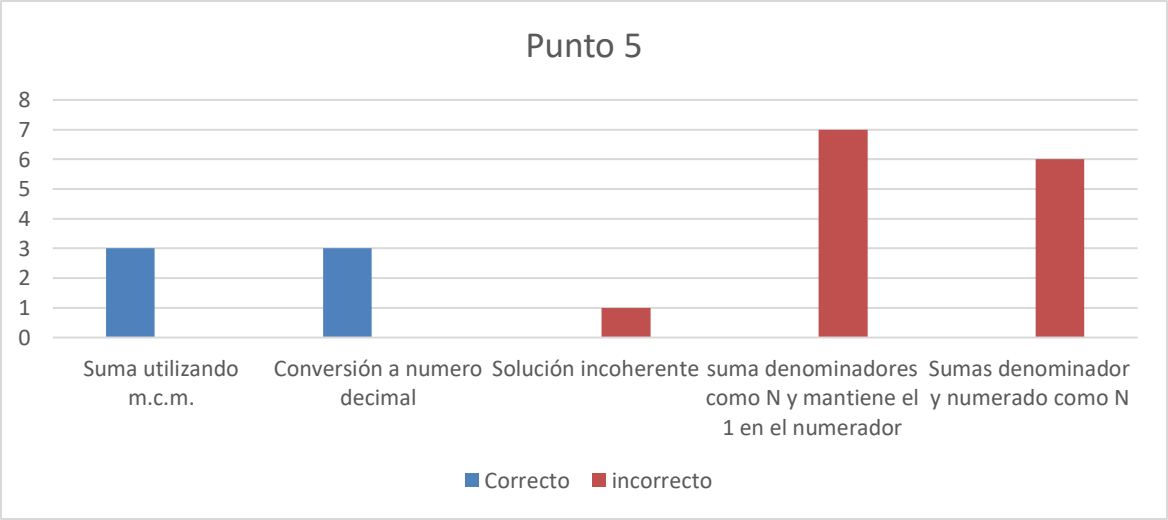
Un hombre camina en la 1ª hora $\frac{1}{2}$ Km, en la 2ª hora $\frac{1}{4}$ Km, en la 3ª hora $\frac{1}{6}$ Km y en la 4ª hora $\frac{1}{12}$ Km. ¿Cuántos kilómetros recorrió en las cuatro horas?

En este punto se indaga sobre la capacidad del estudiante de interpretar un problema, realizando las respectivas operaciones entre números fraccionarios pero hallando una solución en el conjunto de los números enteros.

Tabla 4-6. Soluciones quinto punto prueba diagnóstico.

Tipos de soluciones	Correcta	Incorrecta
Suma utilizando m.c.m.	3	
Conversión a número decimal	3	
Solución incoherente		1
suma denominadores como $\mathbb{N}$ y mantiene el 1 en el numerador		7
Sumas denominador y numerado como $\mathbb{N}$		6
	6	14

Fuente: Elaboración propia.



Gráfica 4-6. Soluciones quinto punto prueba diagnóstico.

Fuente: Elaboración propia.

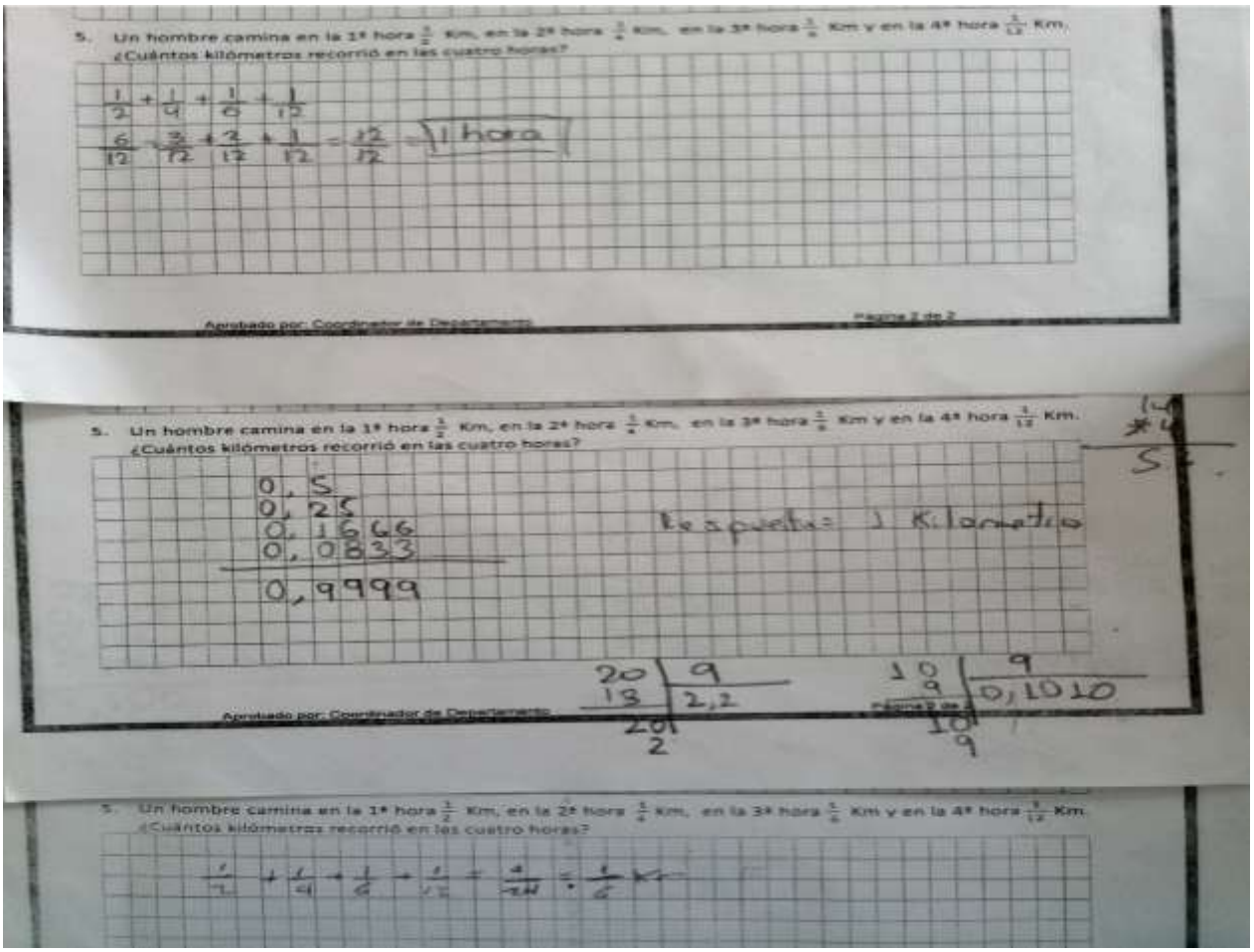


Ilustración 4-6. Foto de tres soluciones punto 5 prueba diagnóstico.

Fuente: Elaboración propia.

Al igual que en punto cuatro los errores de cálculo son muy frecuentes 14 de los 20 estudiantes los cometieron, en cuanto a los que acertaron en la repuesta, tres de ellos hallaron el cociente de cada fracción algunos los interpretaron como metros y otros como kilómetros.

4.6 Análisis general de la prueba diagnóstico

En los ejercicios donde se involucraron operaciones con números fraccionarios, se presenta errores típicos ya clasificados por investigadores como Llinares & Sánchez (1988), Egodawatte

(2011), Chamorro (2003) y Godino (2004), tales como son errores por descuido o distracción, errores por desconocimiento de la respuesta, extrapolación del cálculo de los naturales a las fracciones y error en el algoritmo de la suma, también es claro que algunos estudiantes huyen a las operaciones con fracciones y prefieren cambiar de conjunto numérico, para dar solución a estas.

En cuanto a porcentajes en los tres ejercicios donde se vieron involucrados los números fracciones (2b, 4 y 5) aproximadamente el 75% de los estudiantes cometen errores y solo el 25 % restante logra dar una respuesta acertada, aunque no todos las obtienen realizando operaciones fraccionarias.

En los ejercicios de planteamiento de ecuaciones lineales con dos incógnitas (1 y 3), la mayoría de los estudiantes (aproximadamente el 75%), encuentran la solución haciendo cálculos de ensayo y error, sin plantear la ecuación, lo que hace suponer que saben que el ejercicio tiene una solución, pero no interpretan este dato faltante o el dato a averiguar como una variable.

5. Propuesta didáctica

A partir de la prueba diagnóstico, los resultados obtenidos y el análisis de estos, se diseña una secuencia de actividades, donde las operaciones están ligadas únicamente al tratamiento de fracciones unitarias, cuyos denominadores se hallan por medio de ecuaciones Diofánticas lineales, en la actividad final de la secuencia se espera que los estudiantes conjeturen sobre una formula general para hallar las incógnitas planteadas en las ecuaciones Diofánticas.

Esta propuesta sugiere una alternativa de solución a la forma de operar los números fraccionarios y mitigar los errores que los estudiantes cometieron en la prueba diagnóstico, esta pretende que por medio de la manera en que los Egipcios operaban las fracciones unitaria, los estudiantes vean que los fraccionarios presentados en la escuela no fueron los únicos trabajados en las diferentes culturas a través de la historia y además observen que de una manera ágil se puede dar solución a una ecuación con dos o más incógnitas que involucran los números fraccionarios unitarios de la forma $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{a}{b}$, con x, y, b, mayores que 1, y a mayor o igual a 1.

Ilustración 5-1. Collage aplicación de talleres.

Fuente: Elaboración propia.

5.1 Resultados de la secuencia didáctica

5.1.1 Taller 1

Recuerda: Un número natural a es divisor de un número natural b, si la división de b entre a, es exacta.

Ejemplo: 2 es divisor de 40 ya que al dividir 40 entre 2, el cociente es 20 y el residuo es 0. Por lo tanto la división es exacta.

Hagamos una lista con los divisores (positivos) de 40: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40, cada uno de estos números divide exactamente a 40, por lo tanto estos son todos los divisores de 40.

Vamos ahora es tu turno,

Hallar todos los divisores de los siguientes números: 10, 36, 56, y 80.

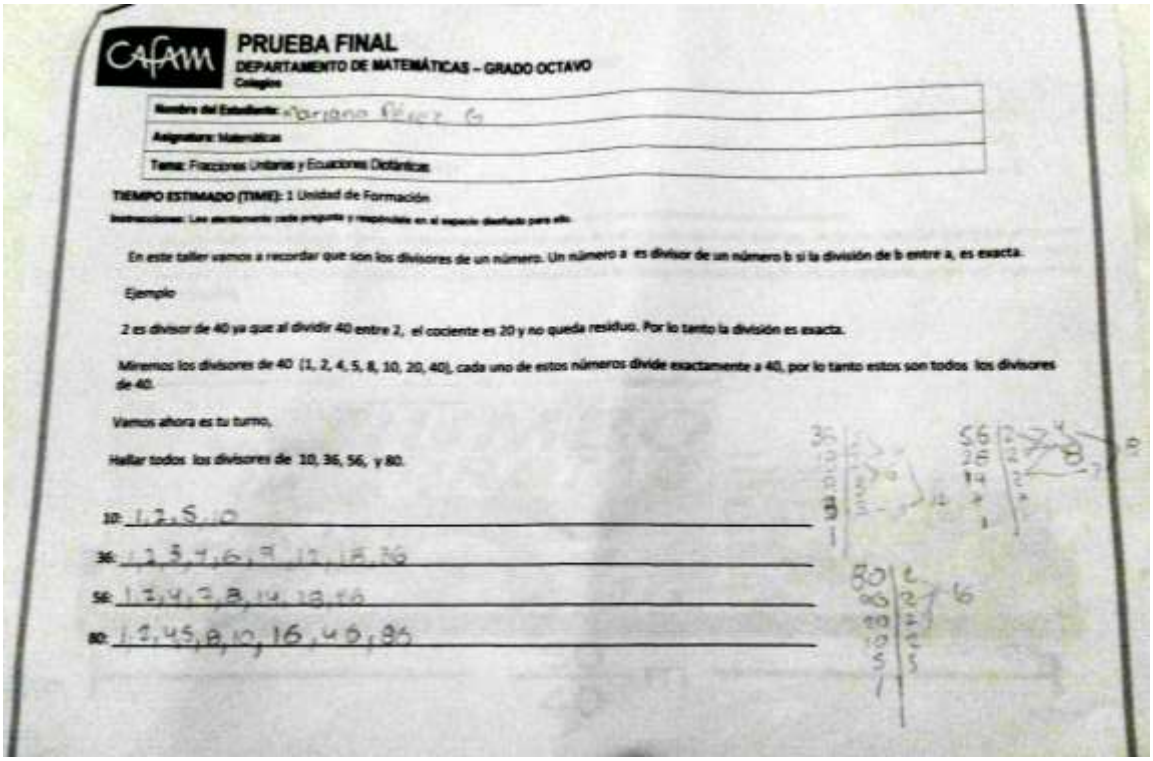
10: _____

36: _____

56: _____

80: _____

El propósito de este taller era recordarles a los estudiantes cómo hallar los divisores de un número; esto, de modo que, a medida que desarrollaban los otros talleres, hicieran uso de estos en la solución de las ecuaciones Diofánticas lineales.



CAFAM **PRUEBA FINAL**

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS – GRADO OCTAVO

Colegio:

Nombre del Estudiante: Mariana Ruiz G

Asignatura: Matemáticas

Tema: Fracciones Unitarias y Ecuaciones Diofánticas

TIEMPO ESTIMADO (TIME): 1 Unidad de Formación

Instrucciones: Lee atentamente cada pregunta y respóndele en el espacio diseñado para ello.

En este taller vamos a recordar que son los divisores de un número. Un número a es divisor de un número b si la división de b entre a, es exacta.

Ejemplo

2 es divisor de 40 ya que al dividir 40 entre 2, el cociente es 20 y no queda residuo. Por lo tanto la división es exacta.

Miremos los divisores de 40 (1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40), cada uno de estos números divide exactamente a 40, por lo tanto estos son todos los divisores de 40.

Vamos ahora es tu turno,

Hallar todos los divisores de 10, 36, 56, y 80.

10: 1, 2, 5, 10

36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

56: 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56

80: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 40, 80

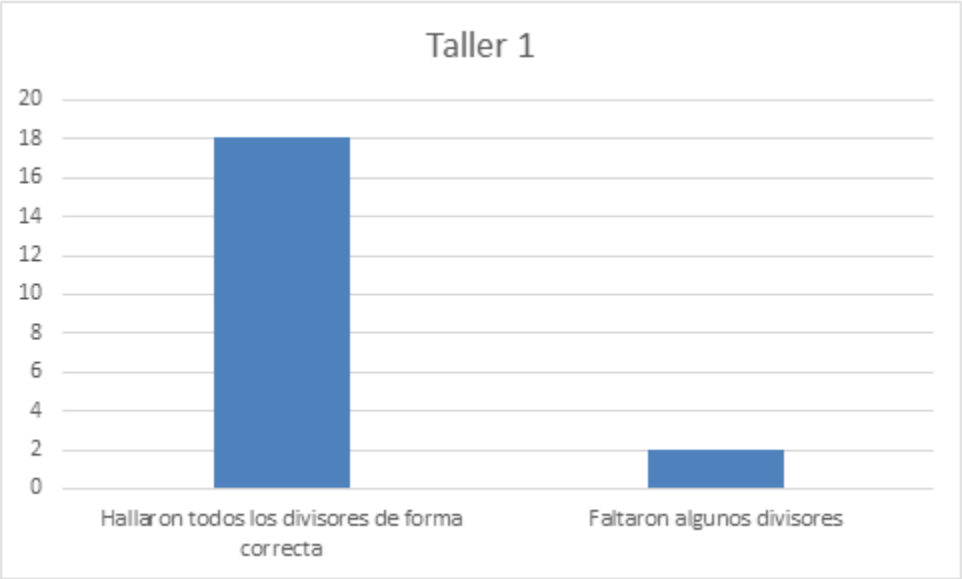
Ilustración 5-2. Foto Solución Taller 1.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5-1. Soluciones primer taller.

Tipos de solución	
Hallaron todos los divisores de forma correcta	18
Faltaron algunos divisores	2

Fuente: Elaboración propia.



Gráfica 5-1. Soluciones taller 1.

Fuente: Elaboración propia.

En la respuesta se aprecia que en este taller la mayoría de los estudiantes por medio de una previa explicación sobre los divisores de un número, fueron capaces de hallar los divisores de varios números sin ningún problema, solo dos de ellos lo hicieron de forma incompleta, dando así cumplido el objetivo.

5.1.2 Taller 2

1. En un almacén disponen de varias repisas del mismo tamaño en las cuales se van a acomodar algunos artículos. Recorte las imágenes de los artículos que aparecen en el anexo y ubícalas en las repisas una seguida de la otra sin que sobren, ni falten espacios, la ubicación debe ser exacta y las fracciones que representa la medida de los artículos distintas. Tenga en cuenta las medidas. Realiza la respectiva suma de las fracciones que representan la medida de cada artículo para

verificar que los objetos colocados son los adecuados (Recuerda que el resultado puede ser amplificado o simplificado, ya que dos o más fracciones pueden ser equivalentes)

Ejemplo: Ubica cuatro artículos en la repisa

Ilustración 5-3. Ubicación de objetos fracciones unitarias.

Fuente: Elaboración propia.

Verifica que los artículos colocados sean los correctos:

Una manera de determinar si los artículos caben exactamente en la repisa. es sumar las medidas de los artículos y comparar con la medida de la repisa. Para sumarlas se puede proceder hallando el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones que corresponden a la medida de cada artículo, como se muestra a continuación:

2	8	10	40	2
1	4	5	20	2
1	2	5	10	2
1	1	5	5	5
1	1	1	1	

m.c.m. (2, 8, 10, 40) = 2x2x2x5 = 40

Ilustración 5-4. Mínimo común múltiplo.

Fuente: Elaboración propia.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{40}$$

$$\frac{1\times(40\div 2)}{40}+\frac{1\,x\,(40\div 8)}{40}+\frac{1\,x\,(40\div 10)}{40}+\frac{1\,x\,(40\div 40)}{40}$$

$$\frac{1\times 20}{40}+\frac{1\,x\,5}{40}+\frac{1\,x\,4}{40}+\frac{1\,x\,1}{40}$$

$$\frac{20}{40}+\frac{5}{40}+\frac{4}{40}+\frac{1}{40}=\frac{30}{40}$$

Ahora es tu turno, Ubica dos artículos en la repisa.

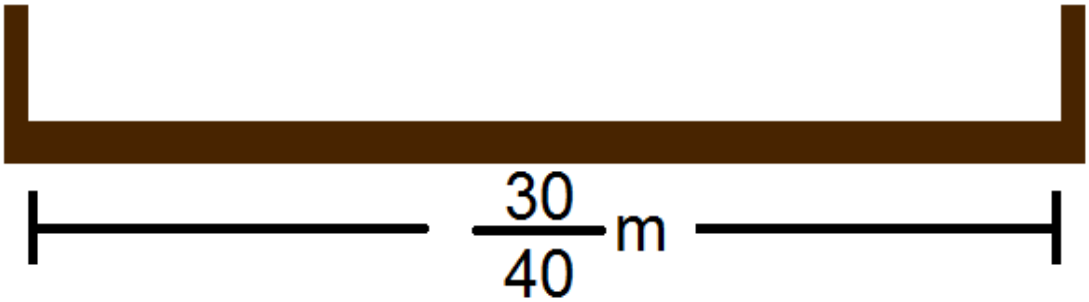


Ilustración 5-5. Repisa tamaño 30/40.

Fuente: Elaboración propia.

Verifica,

El objetivo de este taller era que a partir de material concreto (laminas autoadhesiva), los estudiantes tuvieran un acercamiento a las fracciones egipcias y a la forma de operarlas, también

de mostrarles que una misma fracción (amplificada o simplificada) se puede expresar como la suma de dos o más fracciones unitarias distintas.

Además, se le pedía al estudiante con un ejemplo dado observar las medidas de las fracciones, de tal forma que fueron intuyendo una forma de hallar estas fracciones unitarias de acuerdo al número de fracciones involucradas en la suma.

Aunque aquí solo se muestra una parte del taller es preciso decir que al estudiante se le pidió ubicar 2, 3 y seis artículos en repisas del mismo tamaño y verificar por medio de operaciones los objetos ubicados eran los correctos.

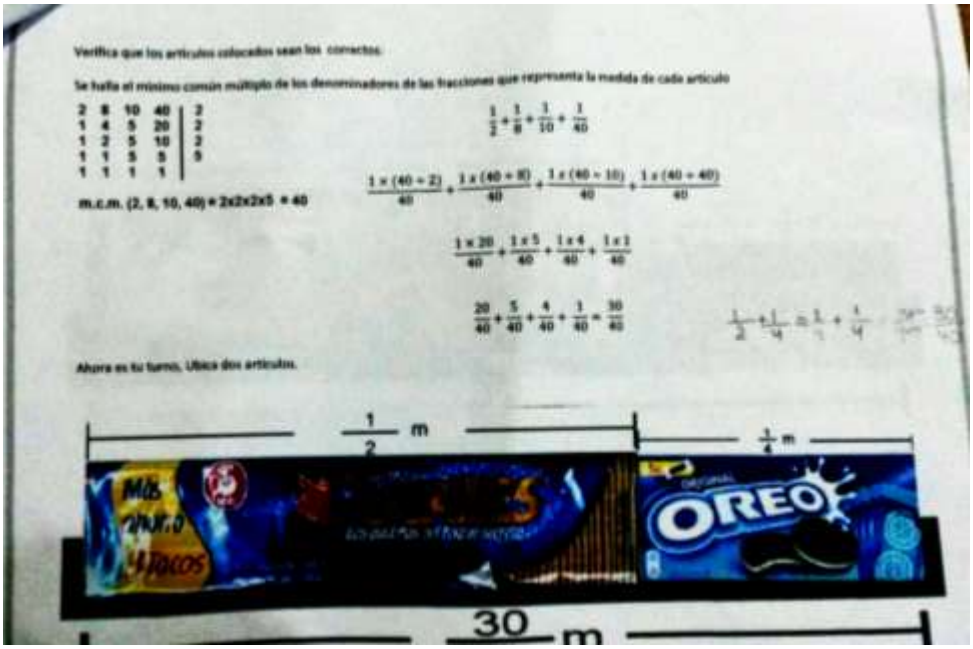


Ilustración 5-6. Foto Solución Taller 2 – Ubicación dos objetos.

Fuente: Elaboración propia.

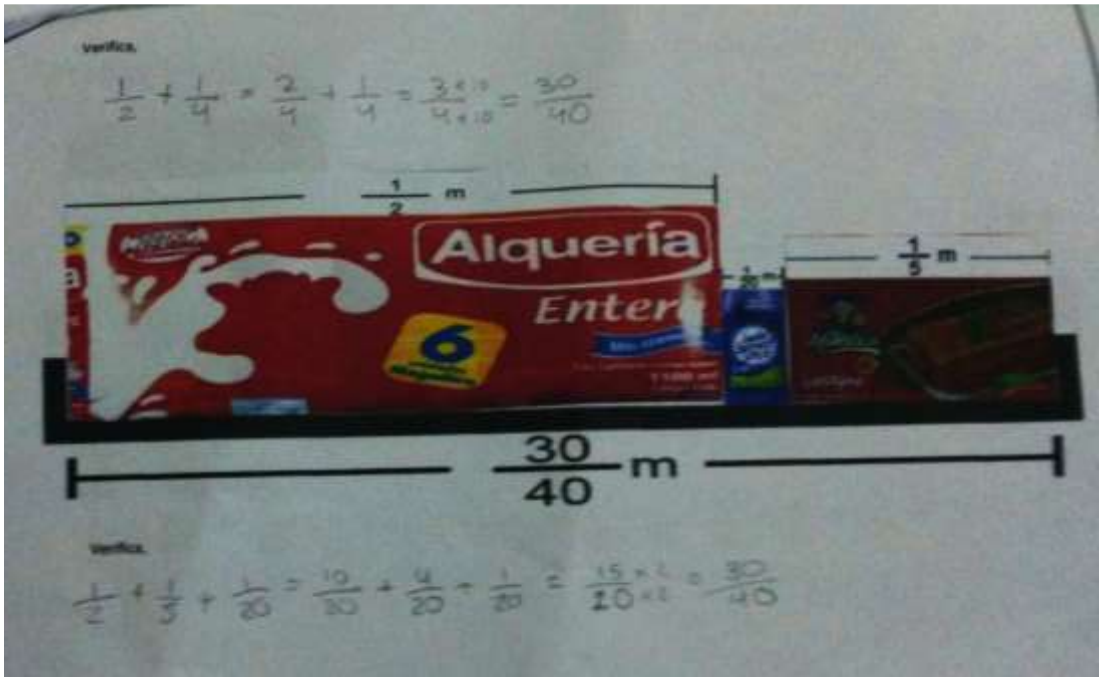


Ilustración 5-7. Foto Solución Taller 2 – Verificación dos objetos, ubicación y verificación tres objetos.

Fuente: Elaboración propia.

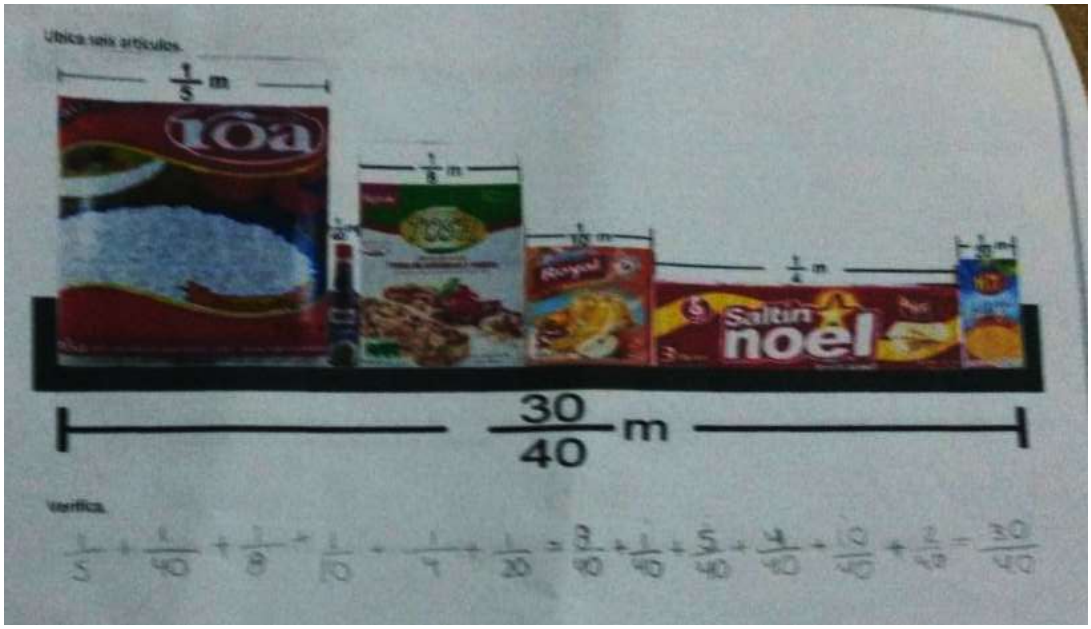


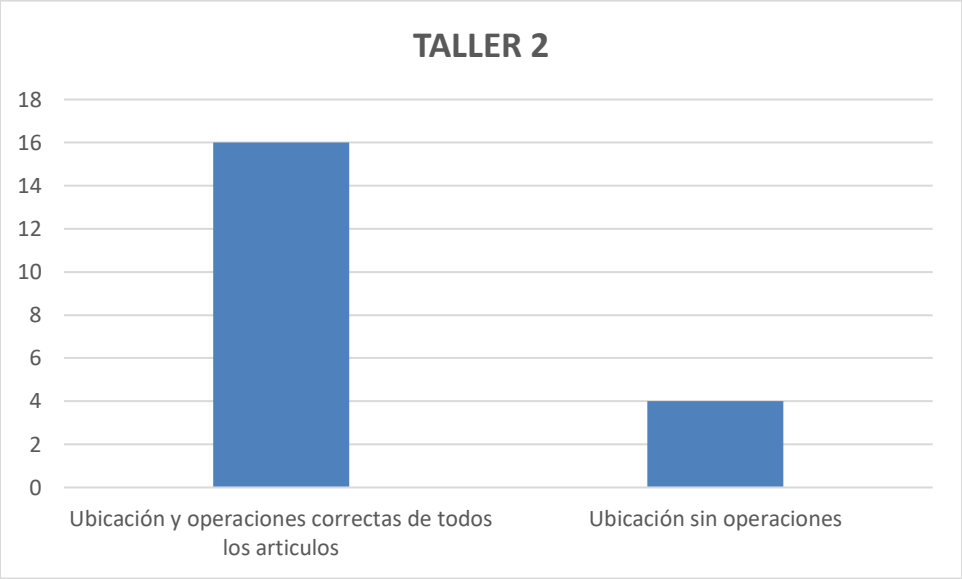
Ilustración 5-8. Foto solución taller 2 – Ubicación y verificación de seis objetos.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5-2. Soluciones segundo taller.

Tipos de solución	
Ubicación y operaciones correctas de todos los artículos	16
Ubicación sin operaciones	4

Fuente: Elaboración propia.



Gráfica 5-2. Soluciones taller 2.

Fuente: Elaboración propia.

Los estudiantes al realizar la búsqueda de los elementos a pegar, realizaban cálculos mentales antes de ubicar los objetos, inclusive realizaban las sumas en los espacios de verificación para no cometer errores y estar seguros de su elección, se evidencia en este taller que la combinación de material concreto y un ejemplo, ayudo a los estudiantes a realizar las operaciones con números fraccionarios de forma adecuada, sin cometer los errores reflejados en la prueba diagnóstico. Además se observó una actitud más relajada al momento de operar, se supone que el taller no se veía como un examen, si no como una actividad lúdica.

Los cuatros estudiantes que no realizaron las operaciones, manifestaron que no eran necesarias ya que los objetos encajaban perfectamente en las repisas de forma física, sin necesidad de cálculos.

5.1.3 Taller Final punto 1

Los egipcios realizaban operaciones con fraccionarios utilizando únicamente fracciones unitarias (son aquellas cuyo numerador es uno y cuyo denominados es cualquier natural diferente de cero) y afirmaban que toda fracción se puede expresar como la suma de dos o más fracciones unitarias. Ejemplo de esto se ve reflejado en el ojo de Horus y el papito de Ahmes.

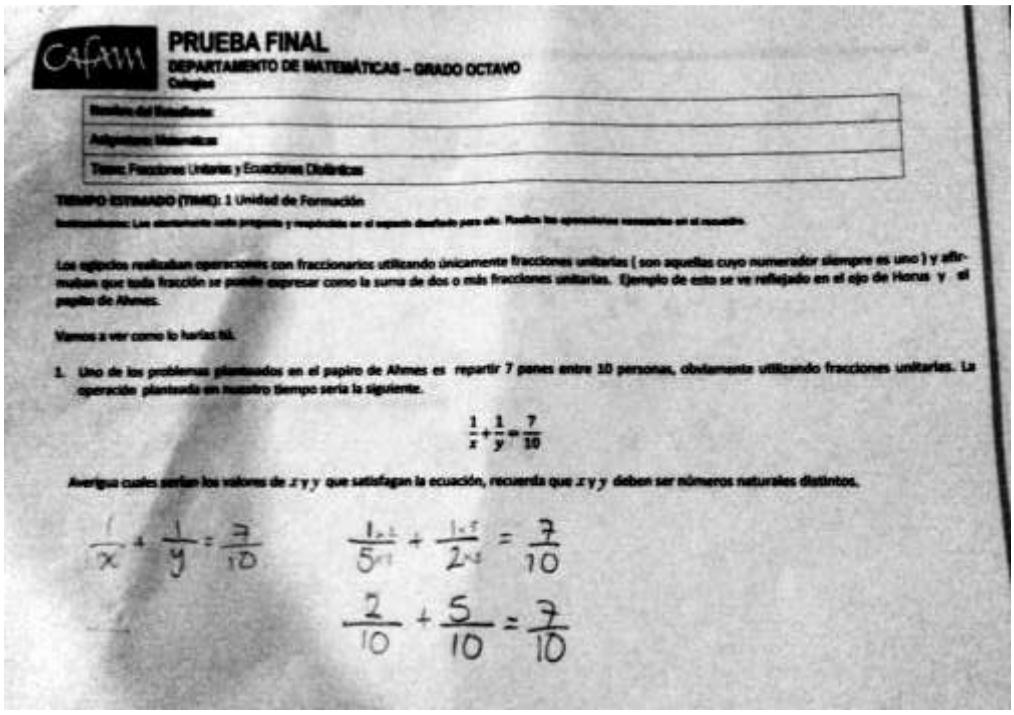
Vamos, a ver como lo harías tú.

1. Uno de los problemas planteados en el papiro de Ahmes es repartir 7 panes entre 10 personas (es decir dividir 7 entre 10), utilizando fracciones unitarias. La operación planteada con nuestros símbolos seria la siguiente.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{10}$$

Averigua cuales serían los valores de x y y que satisfagan la ecuación, recuerda que x y y deben ser números naturales distintos.

El objetivo del taller final era dar a conocer a los estudiantes una breve descripción de las fracciones unitarias y su historia y a partir de esta plantearle algunos ejercicios propuestos en el papiro de Ahmes. Además y no menos importante buscar las solución de una ecuación de dos incógnitas cuyas soluciones deben ser números enteros distintos.



PRUEBA FINAL

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS – GRADO OCTAVO

Colegio

Nombre del Estudiante:

Asignatura: Matemáticas

Tema: Fracciones Unitarias y Ecuaciones Diofánticas

TIEMPO ESTIMADO (TIME): 1 Unidad de Formación

Instrucciones: Lee detenidamente cada pregunta y respóndala en el espacio diseñado para ello. Realiza las operaciones necesarias en el recuadro.

Los egipcios realizaban operaciones con fraccionarios utilizando únicamente fracciones unitarias (son aquellas cuyo numerador siempre es uno) y afirmaban que toda fracción se puede expresar como la suma de dos o más fracciones unitarias. Ejemplo de esto se ve reflejado en el ojo de Horus y el papiro de Ahmes.

Vamos a ver como lo harías tú.

1. Uno de los problemas planteados en el papiro de Ahmes es repartir 7 panes entre 10 personas, obviamente utilizando fracciones unitarias. La operación planteada en nuestro tiempo sería la siguiente.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{10}$$

Averigua cuáles serían los valores de x y y que satisfagan la ecuación, recuerda que x y y deben ser números naturales distintos.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{10} \qquad \frac{1\times 2}{5\times 2}+\frac{1\times 5}{2\times 5}=\frac{7}{10}$$

$$\frac{2}{10}+\frac{5}{10}=\frac{7}{10}$$

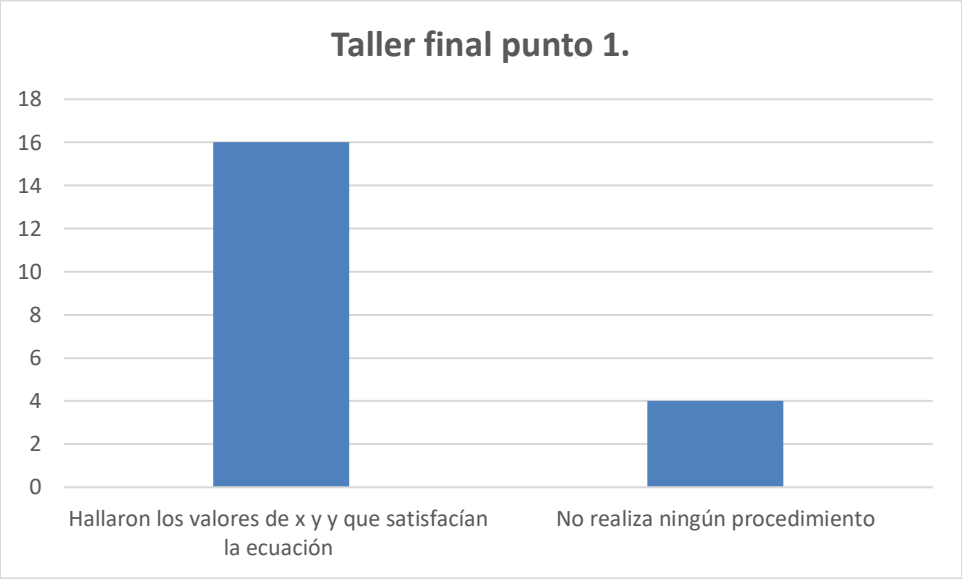
Ilustración 5-9. Foto solución Taller final punto 1.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5-3. Soluciones taller final punto 1.

Tipos de solución	
Hallaron los valores de x y y que satisfacían la ecuación	17
No realiza ningún procedimiento	3

Fuente: Elaboración propia.



Gráfica 5-3. Soluciones taller final punto 1.

Fuente: Elaboración propia.

Los estudiantes encuentran los valores de x y y de forma fácil, y realizan operaciones con fraccionarios teniendo en cuenta las realizadas en el taller 2. Cabe notar que tres estudiantes realizaron dibujos de panes hacer la repartición, encontrando también la solución a la ecuación.

Los tres estudiantes que no realizaron ningún procedimiento fueron los mismos que en el taller 2, ya que no sabían cómo operar dichas fracciones.

5.1.4 Taller final punto 2

1. Ahora supón que tienes 15 panes y deseas repartirlos entre 36 personas, pero en este caso vas a expresar la fracción primero como suma de dos fracciones unitarias y luego como suma de tres fracciones unitarias. Recuerda que $\frac{15}{36} = \frac{5}{12} = \frac{30}{72}$ entre otras, ya que son fracciones equivalentes.

   a. ¿Cuáles serían los valores de x y y que satisfacen la ecuación?

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{36}$$

b. ¿Cuáles serían los valores de x, y y z que satisfacen la ecuación?

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{15}{36}$$

El objetivo de este punto era reforzar el procedimiento que habían adquirido en el punto anterior en la forma de hallar dos fracciones unitaria que sumadas dieran la fracción dada, pero además mirar si este mismo método de solución, servía para hallar tres fracciones unitarias que dieran la misma fracción dada.

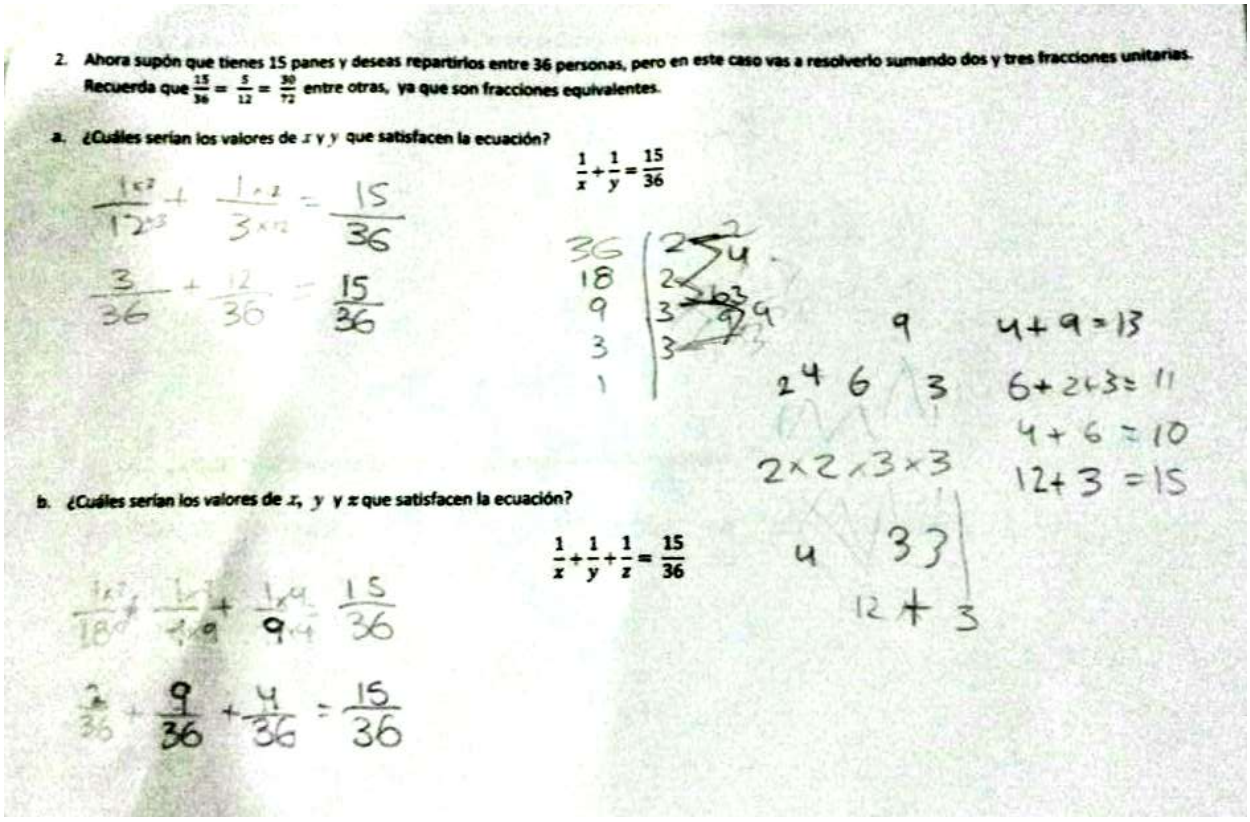


Ilustración 5-10. Foto solución Taller final punto 2a - 2b.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5-4. Soluciones taller final punto 2a.

Tipos de solución	
Hallaron los valores de x y y que satisfacían la ecuación	16
No realiza ningún procedimiento	4

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 5-4. Soluciones taller final punto 2a.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5-5. Soluciones taller final punto 2b.

Tipos de solución	
Hallaron los valores de *x*, *y* y *z* que satisfacían la ecuación	14
No realiza ningún procedimiento	6

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 5-5. Soluciones taller final punto 2b.

Fuente: Elaboración propia.

En este punto en el inciso a., 16 estudiantes encontraron las soluciones que satisfacían la ecuación, de los cuatro restantes uno de ellos no pudo encontrar las soluciones aunque lo intento, los otros siguieron sin realizar procedimientos, los tres estudiantes que habían utilizado un método grafica para la solución, recurrieron como la gran mayoría a descomponer el denominador de la fracción dada y encontrar divisores que sumados les dieran el numerador de dicha fracción, mediante divisiones y simplificaciones encontraron las fracciones unitarias.

El procedimiento que realizaron la gran mayoría de estudiantes (14), de hallar divisores, descomposición y simplificación, volvieron a utilizarlo en el punto 2 inciso b, donde se solicitaba encontrar los valores de x, y, z, que satisficieran la ecuación, sin embargo el número de estudiantes que no logro hacerlo incremento en dos, siendo ya 6 estudiantes los que no lograron realizarlo, aunque tres de ellos estaba aún tratando de dar solución, al punto anterior.

5.1.5 Taller final punto 3

Resuelve el siguiente ejercicio haciendo uso de las fracciones unitarias, pero descomponiendo la fracción como suma de cinco de ellas.

¿Cuáles serían los valores de v, w, x, y y z que satisfacen la ecuación?

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{w}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{58}{56}$$

Este punto, aunque ya no tenía ninguna situación de reparto como los dos anteriores, tenía el objetivo de concretar el método que están utilizando para hallar las soluciones de las ecuaciones planteadas, de tal forma que el estudiante se diera cuenta que si servía para dos, tres y cinco incógnitas, tal vez serviría para infinitas incógnitas diferentes en una misma ecuación dada.

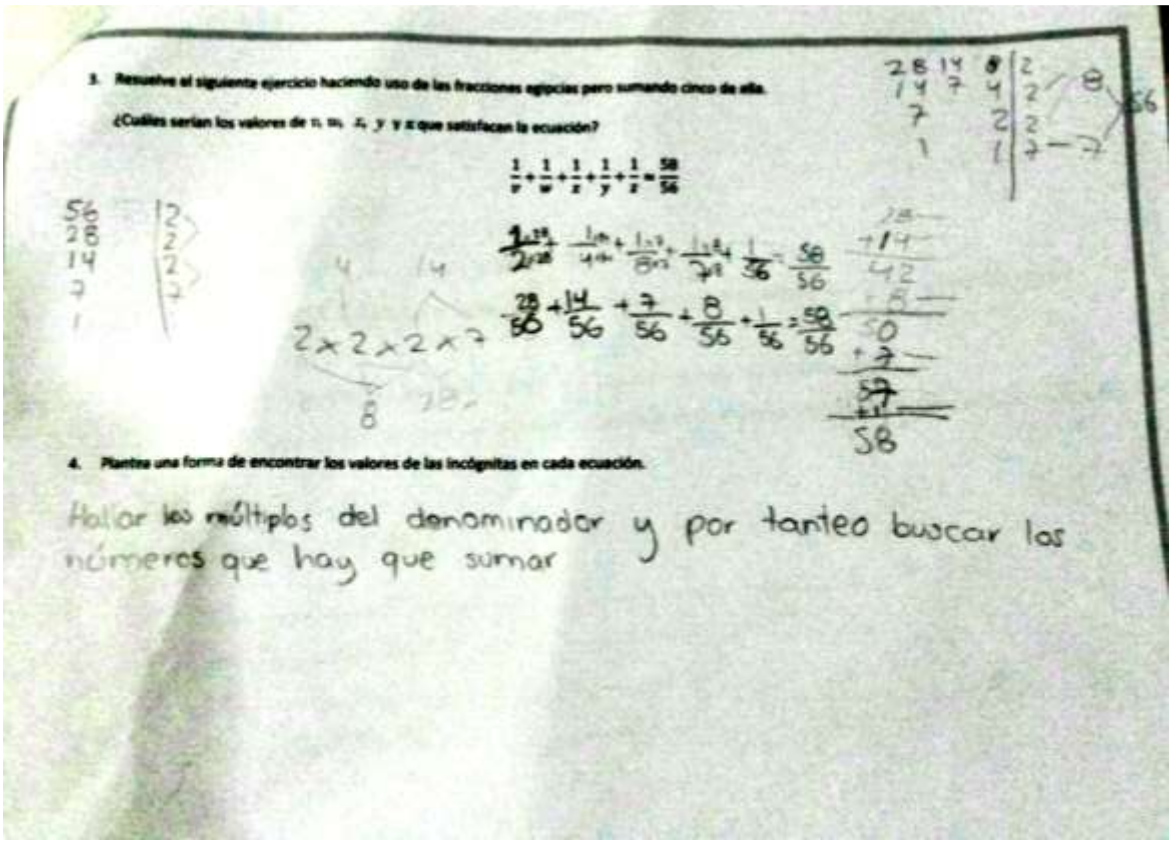


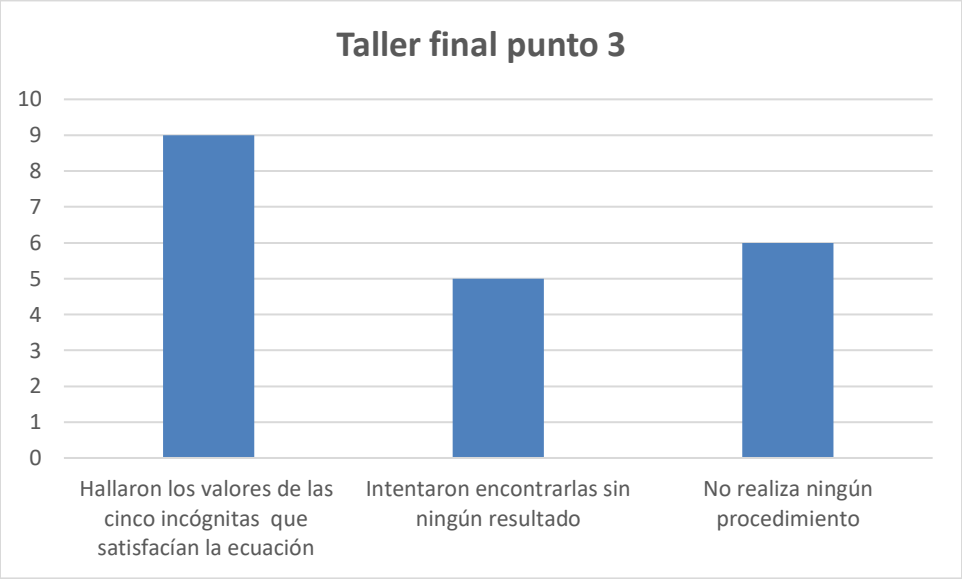
Ilustración 5-11. Foto solución Taller final puntos 3 y 4.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5-6. Soluciones taller final punto 3.

Tipos de solución	
Hallaron los valores de las cinco incógnitas que satisfacían la ecuación	9
Intentaron encontrarlas sin ningún resultado	5
No realiza ningún procedimiento	6

Fuente: Elaboración propia.



Gráfica 5-6. Soluciones taller final punto 3.

Fuente: Elaboración propia.

En este punto el número de estudiantes que logro encontrar el valor de las cinco incógnitas fue menor (9), sin embargo los estudiantes que no lo lograron (11), estaban realizando procedimientos errados en la suma de las fracciones, circunstancia que llevo al no éxito de la prueba en cuanto a este punto, nuevamente se evidencia que los cálculos con fracciones aunque mejoraron considerablemente con respecto a la prueba diagnóstico, siguen causando dificultad en los procesos matemáticos de los estudiantes.

5.1.6 Taller final punto 4

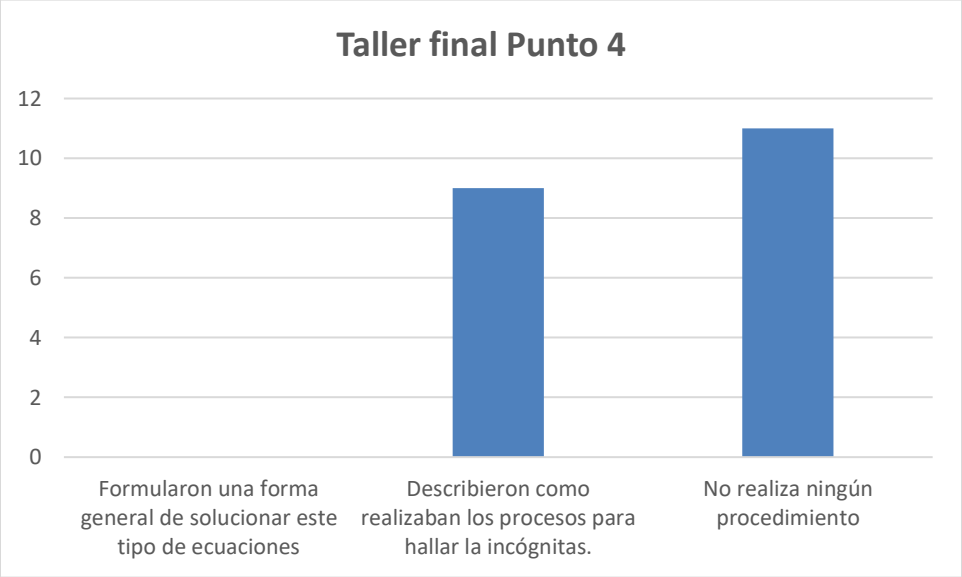
Plantea una forma de encontrar los valores de las incógnitas en cualquier tipo de ecuación donde estén involucradas la suma de fracciones unitarias.

Este punto tenía como finalidad formalizar el procedimiento que los estudiantes estaban realizando para encontrar los valores de las incógnitas, consiguiendo una formula general para hacerlo.

Tabla 5-7. Soluciones taller final punto 4.

Tipos de solución	
Formularon una forma general de solucionar este tipo de ecuaciones	0
Describieron como realizaban los procesos para hallar las incógnitas.	9
No realiza ningún procedimiento	11

Fuente: Elaboración propia.



Gráfica 5-7. Soluciones taller final punto 4.

Fuente: Elaboración propia.

Al tratar que los estudiantes argumentaran y formalizaran los procedimientos y procesos para hallar las incógnitas en las ecuaciones Diofánticas de forma general, el 100% de los estudiantes no lo logro, sin embargo 9 de ellos escribieron un paso a paso de como lo hacían, repuestas como

“hallo los múltiplos del denominador y por tanteo voy buscando los que hay que sumar para que al simplificar me de la fracción unitaria”, son similares en todos los estudiantes.

5.2 Análisis general de la secuencia didáctica

La secuencia didáctica realizada, permitió que los estudiantes manipular las fracciones de otra manera, además de dar soluciones a ecuaciones que para ellos antes eran poco factibles de resolver, sin embargo este trabajo requiere que los estudiantes no cometan errores en las operaciones con fraccionarios, si bien se pudo reducir en cierta medida los errores cometidos en la prueba diagnóstica, esto no garantiza que ellos vuelvan a cometerlos en otros contextos, prueba de esto se evidencio cuando la suma de fracciones unitarias constaba de 5 términos.

En cuanto a las conjeturas y generalización que debían realizar los estudiantes para dar una posible solución a las ecuaciones Diofánticas que involucran fracciones unitarias, se evidencio que ellos realizan procedimientos y saben cómo hacerlos para cada ejercicio y describen con claridad sus pasos realizados, sin embargo, no observar un patrón y se les dificulta generalizar.

Conclusión

Esta propuesta dio como resultado una secuencia didáctica, que permita a los estudiantes del grado octavo, avanzar en la comprensión de las fracciones a través del análisis del método de descomposición de fracciones de los egipcios, haciendo uso de las ecuaciones Diofánticas.

Dentro de esta secuencia didáctica se desarrolla el concepto de ecuación lineal con dos o más variables involucradas, con el fin de encontrar la descomposición de una fracción, en la suma finita de fracciones unitarias. Estas pueden ser solucionadas por ensayo y error, o por métodos ya establecidos con anterioridad tales como el algoritmo voraz de Fibonacci.

En este camino la secuencia contribuyo a que los estudiantes realizaran operaciones con números fraccionarios, pero a la vez hallar las posibles soluciones que satisfagan una ecuación Diofántica lineal compuesta por fracciones unitarias. Además, se propició un ambiente en el cual el estudiante fuera capaz no solo de resolver la secuencia, si no también generalizar y conjeturar sus procesos.

Al realizar una comparación entre los procesos realizados por los estudiantes en la prueba diagnóstico y la secuencia didáctica, se evidencio un pequeño avance al operar fracciones, sin embargo, no deja de ser preocupante y objeto de estudio, los diversos errores que los estudiantes cometen, esto abre un gran interrogante en nuestro que hacer docente, ya que no solamente estamos en el deber de divulgar el conocimiento, si no darle sentido a este en la escuela.

Como recomendaciones se sugiere que el docente diseñe actividades donde el estudiante a través de la historia de las matemáticas, experimente y conjeture sobre situaciones dadas y que los matemáticos debieron resolver, esto contribuye a dar un significado y a ver las matemáticas, no solo como una seria de procesos sin sentido.

Los razonamientos de los estudiantes, aunque no siempre válidos, son creados por ellos, por lo tanto, son importantes y significativos. Así está en la labor del docente guiarlo para que los demuestre, los refute y los transforme.

Por ultimo creo que la secuencia didáctica desarrollada puede servir como una primera actividad para que los estudiantes se interesen en la solución de ecuaciones Diofánticas lineales con fracciones unitarias, y debería ser implementada en grados como sexto y séptimo. Además, se sugiere implementar el taller del anexo E, después de la prueba diagnóstico.

Bibliografía

Olmos, A y Martínez, L (1998), *Matemática práctica 7*. Bogotá: Voluntad.

Galarza, R, Rodríguez, N . (2012). *Matemáticas proyecto sé 6*. Bogotá: SM.

Foster y Burrill. (2000). *Matemáticas aplicaciones y conexiones 8*. México : McGraw Hill.

Meavilla, V. (2014). *Matemática sagrada: El ojo de Horus y otras historias científicas sobre las matemáticas y las religiones*. España: Editorial Guadalmazán

Campistrous, L. A., López, J. M. (2001), *La calculadora como herramienta heurística*, Revista Uno, Número 28. páginas 84-99.

Lopez, J. M. (2002) *Problemas de investigación matemática para la escuela secundaria, Fascículo de los Centros Regionales de Adiestramiento en Instrucción Matemática* (CRAIM), Universidad de Puerto Rico, Río

Piedras Ávila, A. & Mancera, E. (1989). La fracción: una expresión difícil de interpretar. *Pedagogía. Revista de la Universidad Pedagógica Nacional*, Vol. 6 (No.17), paginas 21-26

Benito, M.; Fernández, E. & Sánchez, M. (2007). *Diofanto de Alejandría. La Aritmética y el libro sobre los números poligonales*. España: Nivola Libros ediciones.

Berciano-Alcaraz, A. Matemáticas en el antiguo Egipto. *Un paseo por la geometría* (pp. 119-136). Recuperado de: http://www.ehu.eus/aba/div/paseo-06- 07.pdf

Boyer, C. B. (1996). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Callejo, M. L. (1995). *La enseñanza de las matemáticas*. España: Narcea S.A.

Educarchile. (s.f.). Evaluación estandarizada. Evaluaciones Internacionales. En: Educarchile. Recuperado de: http://ww2.educarchile.cl/Portal.Base/Web/verContenido.aspx?ID=217419

Friedman, C. N. *Sums of divisors and Egyptian fractions*. Departamento de matemáticas, Universidad de Texas.

Gallardo, J.; González, J. & Wencewslao, Q. (2008). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración sobre las interferencias en el uso de significados de la fracción. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 11 (No. 3), 355-382.

Gutiérrez, Á. (1955). *Área de conocimiento. Didáctica de las matemáticas*. España: Editorial Síntesis.

Guy, R. K. (2004). *Unsolved problems in numbrer theory* (Tercera Edición). Nueva York: Springer.

Guzmán, J.; Mesa, F. & Correa, G. (2010). *Mesopotamia y Egipto: cultura, matemática y didáctica*. Pereira: Postergraph S.A.

http://faculty.fiu.edu/~decarlil/History/Notes/Egyptian%20fractions.pdf

http://www.academia.edu/4069900/La_Psicologia_Historico_Cultural_De_Vygot

Laura. (2012, 11 de dciembre). Ecuaciones Diofánticas. En: *La Guía*. Recuperado de: http://matematica.laguia2000.com/general/ecuaciones-diofanticas

Llinares, S. (2003). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Madrid: Pearson Educación S.A.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Magisterio

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (s.f.). *Estándares de Matemáticas*. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85458_archivo_pdf1.pdf

Mora, L. & Lima, I. (2003). *Algunas conjeturas sobre Fracciones egipcias*. Bogotá.

Postigo, L. (1965). *Matemáticas*. Barcelona: Ramón Sopena S.A.

Sánchez, R & Velasco, A. (1971). *Conceptos básicos de teoría de números y ecuaciones Diofánticas*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

sky_a_Leontiev "La Psicología Histórico Cultural de Vigotsky y Leóntiev".

Vera, F. (1970). *Científicos griegos* (Tomo II). Madrid: Aguilar S.A. de ediciones.

Zaldivar, F. (2012). *Introducción a la teoría de números*. México: Fondo de cultura Económica.

Torres J. (2010) Matrices y sistemas de ecuaciones lineales. Medellín. Sello editorial.

Correa B, Muñoz L. &Villegas C. (2015) Álgebra Guía de clase para 90 lecciones. Medellín. Universidad Nacional de Colombia.

Egoavil J. (2015) Fundamentos de matemáticas Introducción a nivel universitario, Bogotá. Editorial UPC, Ediciones de la U.

Sáenz J. (2014) Diseño de una unidad didáctica basada en métodos informales para la resolución de ecuación de primer grado con una incógnita (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Anton H. (1994) Introducción al algebra lineal. México. Noriega Editores.

Larson R.(2015) Fundamentos del algebra lineal séptima edición. México. Cengage Learning.

Ortega A. (2012). Unidad didáctica: Ecuaciones de primer grado. Tesis de master. España: Universidad de Granada.

Rey J. (2012) Unidad didáctica sobre ecuaciones de primer grado. Tesis de maestría. España: Universidad de Granada

Anexo A – Prueba Diagnóstico

PRUEBA DIAGNOSTICO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS – GRADO OCTAVO
Colegios

Nombre del Estudiante:
Asignatura: Matemáticas
Tema: Fracciones Unitarias y Ecuaciones Diofánticas

TIEMPO ESTIMADO (TIME): 1 Unidad de Formación

Instrucciones: Lea atentamente cada pregunta y respóndala en el espacio diseñado para ello. Realice las operaciones necesarias en el recuadro.

1. De una alcancía se sacan cierto número de monedas de $200 y de $500, si en total se sacaron $29.100 ¿Cuántas monedas hay de cada nomenclatura?

2. Encuentre el valor de x en las siguientes ecuaciones.

   a. $3x + 2x + 4x = 18$

b. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{9}x = \frac{40}{18}$

3. Al multiplicar el número de mis hijos por 25 y la edad del mayor por 12, la suma de los productos resultantes es 231 ¿Cuál es la edad de mi hijo mayor?

4. Resuelva la siguiente operación.

$$\frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56}$$

5. Un hombre camina en la 1ª hora $\frac{1}{2}$ Km, en la 2ª hora $\frac{1}{4}$ Km, en la 3ª hora $\frac{1}{6}$ Km y en la 4ª hora $\frac{1}{12}$ Km. ¿Cuántos kilómetros recorrió en las cuatro horas?

Anexo B – Taller Uno

TALLER UNO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS – GRADO OCTAVO
Colegios

Nombre del Estudiante:
Asignatura: Matemáticas
Tema: Divisores de un número

TIEMPO ESTIMADO (TIME): 1 Unidad de Formación.

Instrucciones: Lea atentamente cada pregunta y respóndala en el espacio diseñado para ello.

Recuerda: Un número natural a es divisor de un número natural b, si la división de b entre a, es exacta.

Ejemplo

2 es divisor de 40 ya que al dividir 40 entre 2, el cociente es 20 y el residuo es 0. Por lo tanto, la división es exacta.

Hagamos una lista con los divisores (positivos) de 40: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40, cada uno de estos números divide exactamente a 40, por lo tanto, estos son todos los divisores de 40.

Vamos, ahora es tu turno,

Hallar todos los divisores de los siguientes números: 10, 36, 56, y 80.

10: _____

36: _____

56: _____

80: _____

Anexo C – Taller Dos

TALLER DOS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS – GRADO OCTAVO
Colegios

Nombre del Estudiante:
Asignatura: Matemáticas
Tema: Suma de fracciones unitarias

TIEMPO ESTIMADO (TIME): 1 Unidad de Formación

Instrucciones: Lea atentamente cada pregunta y respóndala en el espacio diseñado para ello. Realice las operaciones necesarias en el recuadro.

En un almacén disponen de varias repisas del mismo tamaño en las cuales se van a acomodar algunos artículos. Recorte las imágenes de los artículos que aparecen en el anexo y ubícalas en las repisas una seguida de la otra sin que sobren, ni falten espacios, la ubicación debe ser exacta y las fracciones que representa la medida de los artículos distintas. Tenga en cuenta las medidas. Realiza la respectiva suma de las fracciones que representan la medida de cada artículo para verificar que los objetos colocados son los adecuados (Recuerda que el resultado puede ser amplificado o simplificado, ya que dos o más fracciones pueden ser equivalentes)

Ejemplo: Ubica cuatro artículos en la repisa

Verifica que los artículos colocados sean los correctos:

2	8	10	40	2
1	4	5	20	2
1	2	5	10	2
1	1	5	5	5
1	1	1	1	

m.c.m. (2, 8, 10, 40) = 2x2x2x5 = 40

Una manera de determinar si los artículos caben exactamente en la repisa. es sumar las medidas de los artículos y comparar con la medida de la repisa. Para sumarlas se puede proceder hallando el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones que corresponden a la medida de cada artículo, como se muestra a continuación:

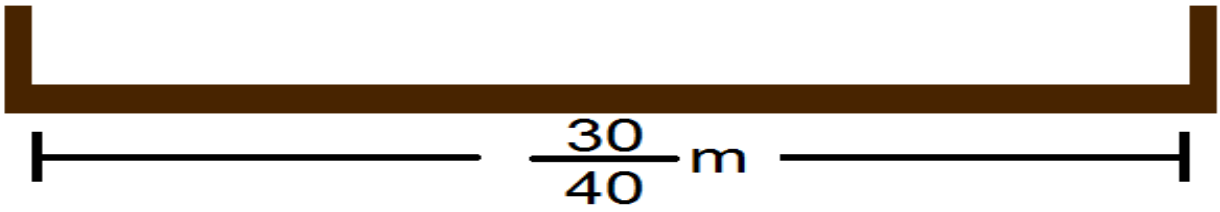
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{40}$$

$$\frac{1\times(40\div 2)}{40}+\frac{1\,x\,(40\div 8)}{40}+\frac{1\,x\,(40\div 10)}{40}+\frac{1\,x\,(40\div 40)}{40}$$

$$\frac{1\times 20}{40}+\frac{1\,x\,5}{40}+\frac{1\,x\,4}{40}+\frac{1\,x\,1}{40}$$

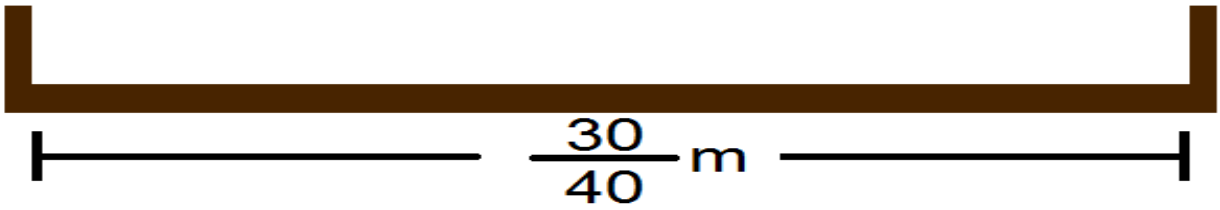
$$\frac{20}{40}+\frac{5}{40}+\frac{4}{40}+\frac{1}{40}=\frac{30}{40}$$

Ahora es tu turno, Ubica dos artículos.



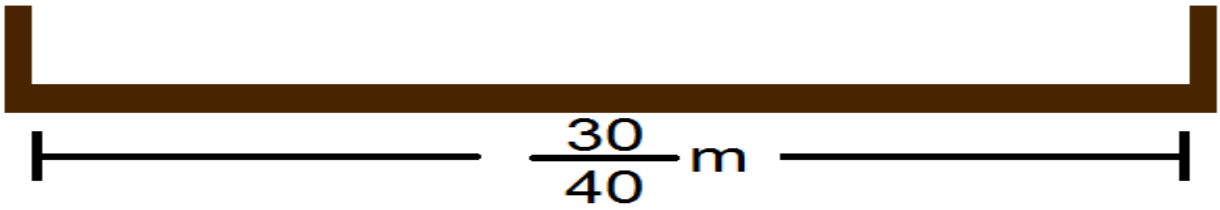
Verifica,

Ubica tres artículos.



Verifica,

Ubica seis artículos.



Verifica,

Anexo D – Taller Tres

TALLER TRES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS – GRADO OCTAVO
Colegios

Nombre del Estudiante:
Asignatura: Matemáticas
Tema: Fracciones Unitarias y Ecuaciones Diofánticas

TIEMPO ESTIMADO (TIME): 1 Unidad de Formación

Instrucciones: Lea atentamente cada pregunta y respóndala en el espacio diseñado para ello. Realice las operaciones necesarias en el recuadro.

Como ya hemos visto uno de los problemas planteados en el papiro de Ahmes es repartir 7 panes entre 10 personas, obviamente utilizando fracciones unitarias. La operación planteada como una ecuación en nuestro tiempo seria la siguiente.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{10}$$

1. Averigua cuales serían los valores de *x*, *y*, que satisfagan la ecuación, recuerda que *x*, *y,* deben ser números naturales distintos.

2. Ahora supón que tienes 15 panes y deseas repartirlos entre 36 personas, pero en este caso vas a expresar la fracción primero como suma de dos fracciones unitarias y luego como suma de tres fracciones unitarias. Recuerda que $\frac{15}{36} = \frac{5}{12} = \frac{30}{72}$ entre otras, ya que son fracciones equivalentes.

   a. ¿Cuáles serían los valores de *x* y *y* que satisfacen la ecuación?

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{36}$$

   b. ¿Cuáles serían los valores de *x, y* y *z* que satisfacen la ecuación?

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{15}{36}$$

3. Resuelve el siguiente ejercicio haciendo uso de las fracciones unitarias, pero descomponiendo la fracción como suma de cinco de ellas.

   ¿Cuáles serían los valores de *v, w, x, y* y *z* que satisfacen la ecuación?

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{58}{56}$$

4. Plantea una forma de encontrar los valores de las incógnitas en cada ecuación.

1/2 m
Alquería
Entero
6
unidades
Megalitro
Más cremoso
No contiene conservantes
1100 ml
Larga Vida

1/4 m
5x
ORIGINAL
OREO

1/5 m
La Muñeca
Lasagna

1/5 m
Loa
Fortificado
el señor arroz de las señoras

1/40 m

1/20 m
Lady Speed Stick

1/20 m
Kit
Magic

1/8 m
Nuevas
TOSH
Trozos de arándanos y nueces

1/10 m
Royal

Anexo E – Taller

TALLER

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS – GRADO OCTAVO

Colegios

Nombre del Estudiante:
Asignatura: Matemáticas
Tema: Reparto en fracciones unitarias

TIEMPO ESTIMADO (TIME): 1 Unidad de Formación

Instrucciones: Lea atentamente cada pregunta y respóndala en el espacio diseñado para ello. Realice las operaciones necesarias en el recuadro.

Los egipcios realizaban operaciones con fraccionarios utilizando únicamente fracciones unitarias, las cuales son aquellas cuyo numerador siempre es uno y el denominador cualquier número entero positivo mayor a uno, los egipcios afirmaron que toda fracción se puede expresar como la suma de dos o más fracciones unitarias. Ejemplo de esto se ve reflejado en el ojo de Horus y el papito de Ahmes.

Uno de los problemas planteados en el papiro de Ahmes es repartir 6 panes entre 10 personas o sea $\frac{6}{10}$, esta fracción escrita como la suma de las fracciones unitarias es:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$$

Miremos gráficamente como se obtuvieron dichas fracciones; cinco de los seis panes son divididos en mitades y se reparten a las diez personas, el último pan nuevamente es dividido en diez partes iguales y repartido nuevamente entre las diez personas. Así la repartición para cada persona es exacta. Por lo tanto $\frac{6}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$.

Veamos otro ejemplo

Repartir 2 panes entre 5 personas

Para este ejercicio se dividieron primero en tres partes iguales cada pan y sobro una tercera parte de la repartición, ahora esta tercera parte se dividió en 5 partes, encontrando así la solución.

Miremos:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3}}{5}$$

Entonces

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

Pon en práctica lo aprendido.

1. Se tiene 2 sacos de cereal y se deben repartir entre 7 personas. Realiza el grafico correspondiente y encuentra la suma de fracciones unitarias correspondiente al ejercicio. (Recuerda las fracciones unitarias deben tener denominadores diferentes entre sí y ser mayores a 1).

2. Repartir 6 botellas de leche entre 8 personas

3. Repartir 5 kilos de carne entre 12 personas