TRAYECTORIA DE PARTÍCULAS CERCA DE UN AGUJERO NEGRO CARGADO INSPIRADO EN GEOMETRÍA NO-CONMUTATIVA

Kenyi Javier Calderón Sánchez
código 01189507

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Observatorio Astronómico Nacional
Bogotá, Colombia
2013

TRAYECTORIA DE PARTÍCULAS CERCA DE UN AGUJERO NEGRO CARGADO INSPIRADO EN GEOMETRÍA NO-CONMUTATIVA

Kenyi Javier Calderón Sánchez
código 01189507

Tesis de maestría sometida como
requisito parcial para optar al grado de
Magíster en Ciencias - Astronomía

director
Ph.D. Eduard Alexis Larrañaga Rubio

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Observatorio Astronómico Nacional
Bogotá, Colombia

2013

Dedicatoria

Hay personas que se nos adelantan en el camino para ir preparándonos la llegada; es por esto que quiero dedicar este trabajo al hombre que hizo posible mi pequeño éxito. "Gracias papá".

A la memoria de Gustavo Calderón

Agradecimientos

A mi madre que es el ser más maravilloso de todo el mundo. Gracias por el apoyo moral, tu amor y comprensión que desde niño me has brindado, por guiar mi camino y estar junto a mi en los momentos más difíciles. A mi padre porque desde pequeño ha sido para mi un héroe al que siempre he admirado. Gracias por guiar mi vida con energía, esto ha hecho que sea lo que soy.

A mi novia Juliana por el cariño y apoyo moral que siempre he recibido de ti y con el cual he logrado culminar mi esfuerzo. Al profesor Alexis Larrañaga, gracias a sus consejos, paciencia y comprensión he llegado a realizar una de mis grandes metas. Finalmente a mis hermanas quienes siempre me alentaron a lograr cumplir mis objetivos.

Resumen

Una clase particular de soluciones a las ecuaciones de campo corresponde a los denominados agujeros negros inspirados en geometrías no-conmutativas, las cuales presentan características como la presencia de horizontes de eventos pero que no poseen las singularidades esenciales que si aparecen en sus contrapartes de la relatividad general. Los efectos netos de la no-conmutatividad en las distribuciones de materia-energía resulta ser que no existen partículas puntuales, sino que estas deben modelarse ahora como distribuciones "difusas". Matemáticamente, esto significa que las distribuciones de materia tomadas como funciones deltas de Dirac deben ser reemplazadas por otro tipo de distribuciones, por ejemplo gaussianas. En el trabajo se considerará la métrica de un agujero negro cargado inspirado en geometría no-conmutativa la cual se obtiene al solucionar el sistema ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell y suponiendo una distribución gaussiana tanto para la densidad de materia como para la densidad de carga eléctrica. Tomando esta solución, se obtiene explícitamente la ecuación diferencial de la órbita y se estudia la precesión del pericentro en trayectorias acotada. Por ultimo se compara los resultados obtenidos con los resultados clásicos de la Relatividad General para identificar los términos adicionales que poseen un origen en la no conmutatividad de las coordenadas espacio-temporales y con ello estimar las posibles consecuencias observacionales.
Palabras claves: Agujero negro, carga eléctrica, órbitas, geometría no conmutativa, precesión.

Abstract

A particular class of solutions of the field equations corresponding to the so-called black holes inspired by non-commutative geometry, which have features such as the presence of general relativity event horizons but do not have essential singularities that appear in their counterparts are studied. The net effects of non-commutativity in the distributions of matter-energy turns to be there are no point particles, so these distributions should be modeled now as "fuzzy". Mathematically, this means that the distributions of matter taken as Dirac delta functions must be replaced by other types of distributions, i.e Gaussian. In this work we consider the metric of a charged black hole inspired by non-commutative geometry which is obtained by solving the system of Einstein-Maxwell's field equations and assuming a Gaussian distribution for both the matter and charge distributions. Taking this solution, we obtain explicitly the differential equation of the orbit and the precession of the pericentre study in bounded trajectories. Finally we compare the results obtained with the classical results to identify additional terms that have an origin in the non-commutativity of space-time coordinates and to estimate possible observational consequences.
Keywords: Black hole, electric charge, orbits, non-commutative geometry, perihelion.

TABLA DE CONTENIDO

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

En 1971 fue publicado por Steven Hawking un extraordinario artículo [1], donde demostró que los agujeros negros se evaporan y ademas emiten radiación de cuerpo negro[2], fue así como se abrió nuevamente el interes para lograr un acertada teoría de gravedad cuantica, donde se logre establecer la relación entre la mecánica cuántica y la relatividad general, puesto que el interes de los físicos teóricos hasta entonces estaba básicamente enfocada en el modelo estándar de la física de partículas donde la gravedad se considera demasiado débil con respecto a las interacciones fundamentales ya unificadas, por lo tanto la gravedad se mantiene como una teoría clásica, y los principales esfuerzos se dirigieron hacia, el cálculo de los diagramas de Feynman y las tasas de descomposición. Despues de más de treinta años, el escenario frente a una teoría de gravedad cuántica, ha mejorado de manera satisfactoria, hoy en día dos grandes candidatos son: Teoría de cuerdas y Loop Quantum Gravity, las dos poseen la característica fundamental de cuantizar el espacio-tiempo a escalas muy pequeñas, pero hasta el momento tanto para La teoría de cuerdas como para Loop Quantum Gravity, no existe evidencia experimental, por tal razon aún siguen siendo especulaciones teóricas, físicamente muy prometedoras, estéticamente muy atractivas y matemáticamente elegantes y bien definidas [3]. Es así como la falta de evidecia experimental de la tan buscada gravedad cuántica ha sido hasta el momento una falla en la unión de dos de las más grandes teorías físicas como lo es la mecánica cuántica y la Relatividad General. Ahora bien nos podemos plantear la siguiente pregunta: ¿Cuál es el papel de los agujeros negros en este contexto? Es muy probable que los agujeros negros esten destinados a proporcionar la respuesta definitiva acerca de nuestro conocimiento de la gravedad cuántica y cerrar el camino lógico que se inició en 1975, todo a la espera de los resultados que pueda arrojar el LHC (Large Hadron Collider).

Agujeros Negros inspirados en geometría No-conmutativa es una reciente teoría donde aparece una nueva especie de principio de incertidumbre entre las coordenadas, las cuales están discretizadas y se basan en la relación de conmutación $[X^\mu, X^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$ donde $i\theta^{\mu\nu}$ es una matriz antisimétrica que determina el volumen fundamental de discretización del espacio-tiempo, de la misma forma que la constante de Planck $\hbar$ discretiza el espacio fase[4]. El efecto neto de la no-conmutatividad en las distribuciones de materia-energía resulta ser que no existen partículas puntuales [5]. Las partículas se modelan ahora como distribuciones "difusas". Matemáticamente, esto se realiza reemplazando las distribuciones de materia que se toman como funciones deltas de Dirac por otro tipo de distribuciones, por ejemplo gaussianas:

$$\rho(r) = \frac{M}{(4\pi\theta)^{3/2}} exp(-r^2/4\theta) \tag{1.0.1}$$

donde θ es una constante con la dimensión de longitud al cuadrado. Puesto que alterar el tensor de Einstein conlleva a establecer una nueva geometría en la teoría de la relatividad general, algo demasiado complejo y engorroso, para nuestro objetivo, la función de distribución de materia es incorporada en el tensor de momentum energía, como se realiza en [4]. Los resultados fenomenológicos implican que los efectos no conmutativos pueden ser observados para distancias $\sqrt{\theta} < 10^{-16} cm$. Es por tanto, que para distancias grandes en comparación con la longitud de cuantización, se esperan ligeras desviaciones de la Métrica de Schwarzschild estándar.

Teniendo esta nueva teoría era de esperarse que al igual que en la Relatividad General, se realice el estudio de los tests clásicos, como lo son: el corrimiento del perihelio de Mercurio la deflexión de la luz por un objeto masivo y la dilatación gravitacional del tiempo, este estudio se llevó acabo en [6], donde emplearon la Métrica de Scharzschild no conmutativa [4] y realizaron un análisis detallado de dichos fenómenos, allí se muestran interesantes resultados debido a la no conmutatividad de las coordenadas espacio-temporales. Para el presente trabajo tomamos solo uno de estos tests clásicos; el corrimiento del perihelio, para ello utilizamos la solución de un agujero negro cargado inspirado en geometría no conmutativa [7], y a partir de esta calculamos la ecuación diferencial de la órbita generalizada para una partícula de prueba.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1. Geodésicas

En R^N las rectas son trayectorias curvas preferidas por dos razones principales. La primera razón es que son las curvas más cortas entre dos puntos p y q. La segunda es que es la única curva donde el vector tangente está transportado paralelamente a si mismo a lo largo de la curva. Veremos como generalizar estos conceptos a variedades más generales [8].
Consideramos primero la generalización de la segunda caracteristíca: una geodésica afín es aquella curva $x^\mu(\tau)$ donde el vector tangente a la curva $u^\mu = \dot{x}^\mu(\tau)$ es transportado de manera paralela a lo largo de la curva, la condición de transporte paralelo del vector esta determinada por

$$0 = u^\nu \nabla_\nu u^\mu = \ddot{x} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\dot{x}^\nu \dot{x}^\rho. \tag{2.1.1}$$

Es importante resaltar que en este caso τ es solo un parametro afín que parametriza la curva $x^\mu(\tau)$ y no es el tiempo propio como en el caso de curvas temporales.
La otra generalización de una recta en cualquier variedad es buscar la curva más corta entre dos puntos. Las geodésicas de este tipo se llaman geodésicas métricas y para conexiones arbitrarios no coinciden con las geodésicas afines.
La mejor manera de definir la distancia más corta entre dos puntos es a través de cálculo variacional:una geodésica métrica es la curva $x^\mu(\tau)$ entre dos puntos p y q cuya longitud

$$s = \int_p^q d\tau \sqrt{\mid g_{\mu\nu} \mid \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}, \tag{2.1.2}$$

es estacionaria bajo pequeñas variaciones de la curva y de la métrica

$$x^\mu \to x^\mu + \delta x^\mu, \qquad\qquad g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \partial_\rho g_{\mu\nu} \delta x^\rho. \tag{2.1.3}$$

En esta ecuación τ parametriza la curva $x^\mu(\tau)$, y la derivada se realiza con respecto a este parámetro por lo tanto $\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$. La geodésica corresponde por lo tanto a la curva por la cual $\delta s = 0$, y esta dado por la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\delta L}{\delta x^\mu} = 0, \tag{2.1.4}$$

donde esta definida como $L = ds/d\tau = \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$ es el funcional definido en la ecuación (2.1.2). Ahora si multiplicamos (2.1.4) por un factor de 2L, eliminammos la raíz cuadrado. la ecuación (2.1.2) se escribe de la siguiente forma

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\delta L^2}{\delta \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\delta L^2}{\delta x^\mu} = 2\frac{\delta L}{\delta \dot{x}^\mu}\frac{\delta L}{d\tau}. \tag{2.1.5}$$

Reemplazando L en el lado izquierdo de la ecuación (2.1.5) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\delta L^2}{\delta \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\delta L^2}{\delta x^\mu} &= \frac{d}{d\tau}\left(2g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho}\dot{x^\nu}\dot{x^\rho}\right)\\ &= 2g_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu + 2\partial_\rho g_{\mu\nu}\dot{x^\nu}\dot{x^\rho} - \partial_\mu g_{\nu\rho}\dot{x^\nu}\dot{x^\rho}\\ &= 2g_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu + \left(\partial_\nu g_{\mu\rho} + \partial_\rho g_{\nu\mu} - \partial_\mu g_{\nu\rho}\right)\dot{x^\nu}\dot{x^\rho}\\ &= 2g_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu + 2g_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\rho}\dot{x^\nu}\dot{x^\rho},\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

donde se define los simbolos de Christoffel como

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}\left(\partial_{nu}g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right). \tag{2.1.7}$$

Ahora bien en el lado derecho de la ecuación (2.1.5) obtenemos

$$\begin{aligned}2\frac{\delta L}{\delta \dot{x}^\mu}\frac{\delta L}{d\tau} &= 2\frac{g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu x^\nu}}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)\\ &= 2L^{-1}g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu\frac{d^2 s}{d\tau^2}\\ &= 2g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu(\ddot{s}/\dot{s}).\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Reemplazando lo obtenido en la ecuación (2.1.5) y multiplicando con $g^{\sigma\mu}$ encontramos que la ecuación de Euler-lagrange se reducen a

$$\ddot{x}^\sigma + \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho = \dot{x}^\sigma(\ddot{s}/\dot{s}). \tag{2.1.9}$$

El lado derecho de esta ecuación depende de la parametrización de la curva, lo que en realidad no tiene significado físico. De hecho, eligiendo una parametrizacion lineal de la geodésica métrica $s(\tau) = \tau$ el lado derecho es cero y la ecuación de la geodésica es

$$\ddot{x}^{\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\rho} = 0. \tag{2.1.10}$$

Para métricas lorentzianas existen tres tipos de geodésicas: temporales, espaciales y nulas, dependiento si la distancia entre los puntos p y q es temporal, espacial o nula [8]. En el caso de que la geodésica es temporal, el parametro τ tiene la interpretación del tiempo propio de la partícula que viaja a lo largo de la geodésica. Si la geodésica es espacial o nula, el paramétro τ no tiene un signifcado físico especial. Para distinguir los tres casos hay que anadir a (2.1.10) una ecuación más que especifica el tipo de geodésica a través del vector tangente a la curva

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = K, \tag{2.1.11}$$

donde

$$K = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x^{\nu}(\tau) \text{ es temporal} \\ 0 & \text{si} \quad x^{\nu}(\tau) \text{ es nulo} \\ -1 & \text{si} \quad x^{\nu}(\tau) \text{ es espacial} \end{cases}$$

2.2. La Métrica de Schwarzschild

A los pocos meses de haberse publicado la Relatividad General, en 1916 Karl Schwarzschild (1873 - 1916) hallo la solución exacta de un objeto estático con simetría esférica, por lo tanto es una buena descripción para el campo gravitatorio causado por objetos masivos esféricos, tales como estrellas y planetas [8]. En particular, si queremos calcular correcciones en relatividad general a las órbitas planetarias, tenemos que recurrir dicha solución.
Las ecuaciones de campo en el vacío es decir en ausencia de materia y energía el tensor momentum-energía $T_{\mu\nu}$ es cero, por lo tanto la parte sin traza esta dada por

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{2.2.1}$$

Bien es sabido que las ecuaciones de Einstein son demasiado difíciles de resolver directamente, pero gracias a la simetría de la solución de Schwarzschild podemos escribir un Ansatz de la forma:

$$ds^2 = e^{2A(r)}dt^2 - e^{2B(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2sin^2\theta d\phi^2. \tag{2.2.2}$$

Ahora sustituimos este Ansatz en la ecuaciones de campo en el vacío (2.2.1). Los símbolos de Christoffel no triviales vienen dados por

$$\begin{array}{lll} \Gamma^r_{tt} = e^{(A-B)}A' & \Gamma^\theta_{r\theta} = r^{-1} & \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta \\ \Gamma^r_{tr} = A' & \Gamma^\phi_{r\phi} = r^{-1} & \Gamma^r_{\phi\phi} = -r\sin^2\theta e^{B`} \\ \Gamma^r_{rr} = B' & \Gamma^r_{\theta\theta} = -re^{-2B} & \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta, \end{array} \tag{2.2.3}$$

donde la prima denota la derivada con respecto a r. Ahora obtenemos las componentes del tensor de Ricci que no son cero

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -e^{2(A-B)}[A'' + (A')^2 - A'B' + 2r^{-1}A'] \\ R_{rr} &= A'' + (A')^2 - A'B' - 2r^{-1}B' \\ R_{\theta\theta} &= e^{-2B}[rA' - rB' + 1] - 1 \\ R_{\Phi\Phi} &= sin^2\theta R_{\theta\theta}. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Al igualar estas ecuaciones a cero como lo indica el tensor de Ricci, nos proporciona cuatro ecuaciones diferenciales no-lineales acopladas para dos incognitas. Para dar solución a estas ecuaciones, multiplicamos R_{tt} por $e^{-2(A-B)}$ y sumándolo con R_{rr} [8], obtenemos

$$\begin{aligned} & e^{-2(A-B)}R_{tt} + R_{rr} = 0 \\ & -2r^{-1}(A' + B') = 0 \\ & -2r^{-1}(A' + B') = 0 \\ & A' - B' = 0. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Integrando obtenemos que $B(r) = -A(r) + c_0$. La constante de integración c_0 no tiene significado físico, ya que se puede redefinir en la coordenada temporal $t' = e^{c_0}t$. Sin pérdida de generalidad podemos colocar $c_0 = 0$ y la solución general esta determinada por

$$A(r) = -B(r). \tag{2.2.6}$$

Sustituyendo esta condición en la ecuación $R_{\theta\theta}$ encontramos

$$0 = e^{2A}[2rA' + 1] - 1 = [re^{2A}]^{`} - 1, \tag{2.2.7}$$

luego de integrar obtenemos

$$e^{2A} = 1 - \frac{2M}{r}, \tag{2.2.8}$$

donde $2M$ es una constante de integración que denominamos de esta manera para futuras conveniencias. La solución de Schwarzschild viene por lo tanto dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega_2^2, \tag{2.2.9}$$

donde $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\Phi^2$ es el elemento de línea de dos-esferas.

2.3. Ecuación de la órbita

Consideramos un espacio-tiempo con la métrica de Schwarzschild y estudiamos cómo son, las geodésicas temporales, esto es, la trayectoria de una partícula dentro de dicho espacio en caída libre.

En primer lugar, demostramos que la órbita ha de ser plana [9]. Esto simplifíca las ecuaciones de las geodésicas. Además, resulta que dos de ellas las podemos integrar directamente y obtenemos cuentas análogas a las del caso Newtoniano. Finalmente, imponiendo que se trata de una curva temporal cuyo parámetro es el tiempo propio τ se llega a la ecuación diferencial de la órbita. Consideremos el elemento de línea (2.2.9) podemos diferenciar con respecto al parametro de tiempo propio τ y definir una geodésica como de tiempo

$$2K = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 - r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 1. \tag{2.3.1}$$

Utilizando las ecuación de Euler-Lagrange.

$$\frac{\partial K}{\partial x^{\alpha}} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^{\alpha}}\right) = 0, \tag{2.3.2}$$

para los valores de $\alpha = 0, 2, 3$ obtenemos (ver A.1)

$$\frac{d}{d\tau}\left[1 - \frac{2m}{r}\frac{dt}{d\tau}\right] = 0, \tag{2.3.3}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[r^2 \frac{d\vartheta}{d\tau}\right] - \left[r^2 sin\vartheta cos\vartheta \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right] = 0, \tag{2.3.4}$$

y

$$\frac{d}{d\tau}\left(r^2 sin^2\vartheta \frac{d\varphi}{d\tau}\right) = 0. \tag{2.3.5}$$

Es así como tenemos nuestras cuatro ecuaciones

$$t = t(\tau), \qquad r = r(\tau), \qquad \vartheta = \vartheta(\tau), \qquad \varphi = \varphi(\tau).$$

La ecuaciones (2.3.1),(2.3.3) y (2.3.5) nos proporcionan un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales. Ademas sabemos que en la teoría Newtoniana podemos restringir el movimiento a un plano, esto tambien se puede realizar en Relatividad General. Para ello consideremos el movimiento en el plano ecuatorial $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ (en el plano (x,y)). En este plano $\frac{d\vartheta}{d\tau} = 0$, y por (2.3.4) tenemos que $\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} = 0$. Diferenciando (2.3.4) se encuentra que todas las derivadas de orden superior desaparecen por lo tanto se deduce que el movimiento en un plano es posible [9]. La ecuación (2.3.5) se puede integrar de manera directa

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = h, \tag{2.3.6}$$

donde h es una constante de integración. En [9] se demuestra que esta constante de integración, se relaciona con la conservación del momentum angular. Ahora al integrar (2.3.3)

$$\left[1 - \frac{2m}{r}\right]\frac{dt}{d\tau} = \kappa, \tag{2.3.7}$$

donde κ es una constante. Sustituyendo (2.3.7) en (2.3.1) se obtiene

$$\kappa^2\left[1-\frac{2m}{r}\right]^{-1}-\left[1-\frac{2m}{r}\right]^{-1}\frac{dr^2}{d\tau}-r^2\frac{d\varphi^2}{d\tau}=1. \tag{2.3.8}$$

Realizando un cambio de variable, como se realiza habitualmente en mecánica clásica $u=r^{-1}$ encontramos

$$\frac{dr}{d\tau}=-h\frac{du}{d\varphi}. \tag{2.3.9}$$

Finalmente usando (2.3.6) y (2.3.8) obtenemos

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2=\frac{\kappa^2-1}{h^2}+\frac{2m}{h^2}u+2mu^3. \tag{2.3.10}$$

Esta es la ecuación diferencial de la órbita en primer orden para una partícula de prueba. Por último al diferenciar con respecto a φ (2.3.10) se obtiene la ecuación en segundo orden,

$$2\frac{d^2u}{d\varphi^2}+2u\frac{du}{d\varphi}=\frac{2m}{h^2}\frac{du}{d\varphi}+6mu^2\frac{du}{d\varphi} \tag{2.3.11}$$

$$2\frac{du}{d\varphi}\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u-\frac{m}{h^2}-3mu^2\right)=0$$

donde se tiene dos soluciones; la primera,

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\varphi}&=0\\ u&=cte\\ \frac{1}{r}&=cte\\ r&=cte.\end{aligned}$$

Esta solución corresponde a un movimiento circular. mientras que

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{m}{h^2}+3mu^2, \tag{2.3.12}$$

representa una sección cónica.

2.3.1. Corrimiento del Perihelio de Mercurio

La ecuación (2.3.12) es la versión relativista de la ecuación de Binet y difiere de la versión Newtoniana por la presencia del último término [9]. Para órbitas planetarias este termino es bastante pequeño, porque la relación de los dos terminos del lado derecho de (2.3.12) es $3\frac{h^2}{r^2}$ que para Mercurio por ejemplo es del orden de 10^{-7} ver (A.2). En este contexto, se puede resolver la ecuación por medio de un metodo de perturbaciones. Para ello introducimos el parámetro

$$\varepsilon = 3\frac{m^2}{h^2}. \tag{2.3.13}$$

Si denotamos la derivada con respecto a φ por la notación primada, entonces (2.3.12) queda de la forma

$$u'' + u = \frac{m}{h^2} + \varepsilon\left(\frac{h^2u^2}{m}\right) \tag{2.3.14}$$

suponemos una solución de la forma

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2). \tag{2.3.15}$$

Sustituyendo en (2.3.14) tenemos

$$u_0'' + u_0 - \frac{m}{h^2} + \left(u_1'' + u_1 - \frac{h^2u^2}{m}\right) + O(\varepsilon)^2 = 0, \tag{2.3.16}$$

donde la solución de u_0 es la tradicional sección cónica que esta determinada de la siguiente manera

$$u_0 = \frac{m}{h^2}\left(1 + ecos\varphi\right), \tag{2.3.17}$$

donde, por conveniencia, $\varphi_0 = 0$ (*Tomando como punto de inicio el perihelio*). La ecuación a primer orden es

$$u_1'' + u_1 = \frac{h^2}{m}u_0^2. \tag{2.3.18}$$

Sustiyendo u_0 tenemos

$$\begin{aligned} u_1'' + u_1 &= \frac{m}{h^2}\left(1 + ecos\varphi\right)^2 \\ &= \frac{m}{h^2}\left(1 + 2ecos\varphi + e^2cos^2\varphi\right) \\ &= \frac{m}{h^2}(1 + \frac{1}{2}e^2) + \frac{2me}{h^2}cos\varphi + \frac{me^2}{2h^2}cos2\varphi. \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

Si proponemos una solución particular de la forma

$$u_1 = A + B\varphi sin\varphi + Ccos2\varphi, \tag{2.3.20}$$

entonces encontramos, (ver A.3)

$$A = \frac{m}{h^2}(1 + \frac{1}{2}e^2), \qquad B = \frac{me}{h^2}, \qquad C = -\frac{me^2}{6h^2}. \tag{2.3.21}$$

De modo que la solución a primer orden viene dada por

$$u \simeq u_0 + \varepsilon\frac{m}{h^2}\left[1 + e\varphi sin\varphi + e^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}cos2\varphi\right)\right]. \tag{2.3.22}$$

De los términos de corrección, el primero es constante y no es de nuestro interes, pues solamente cambia los parámetros de la órbita no perturbada, el tercero tampoco es interesante pues es periódico y por lo tanto no es observable. El segundo es el más importante porque es proporcional en φ y representa por lo tanto un efecto acumulativo. Despreciando los otros términos y quedándonos solo con términos hasta orden ε, podemos escribir (2.3.22) como

$$u \simeq \frac{m}{h^2}\left[1 + ecos\varphi + \varepsilon e\varphi sin\varphi\right], \tag{2.3.23}$$

ó

$$u \simeq \frac{m}{h^2}\left[1 + ecos\left(\varphi(1 - \varepsilon)\right)\right]. \tag{2.3.24}$$

Esta ecuación es muy parecida a la del elipse, solo que hay una perturbacion de orden ε en la dependencia angular. Por lo tanto, la curva (2.3.24) representa en primera aproximación un elipse, pero el periodo de la trayectoria no es de 2π, sino un poco mayor,

$$\frac{2\pi}{1-\varepsilon} \approx 2\pi(1+\varepsilon). \tag{2.3.25}$$

Esto quiere decir que el planeta no sigue una trayectoria perfectamente el elíptica, sino que el elipse se va girando de a poco por cada revolución, de modo que el planeta alcanza su perihelio más tarde cada vez. El retraso viene dado precisamente por el parámetro ε.[9]

2.4. Agujeros Negros Clásicos

Los agujeros negros son unos de los más fascinantes objetos que la teoría de la relatividad general de Einstein predice. Los agujeros negros tienen una historia interesante y han dado origen a muchas sorpresas teóricas que han conducido a una mejor comprensión de la naturaleza del espacio-tiempo [8]. En 1795 el matemático francés Pierre Simon Laplace (1749 - 1827) realizando un cálculo sencillo, ideaba un cuerpo cuya razón entre masa y radio fuera tal, que la velocidad de escape de este cuerpo superara la velocidad de la luz, por lo tanto sería imposible ver algún rayo proveniente de este, por lo que fueron llamados los Objetos Oscuros de Laplace. No obstante, el cociente entre la masa del cuerpo y el radio tomaba valores extraordinarios, siendo entonces un objeto extremadamente denso, que para la época sobrepasaba por mucho las observaciones, por lo tanto para los contemporáneos de Laplace un cuerpo de tal magnitud era impensable y su existencia fue descartada.

Luego de ser encontrada la primera solución de las ecuaciones de campo, sorprendentemente, el radio crítico para la velocidad de escape, calculado con métodos pura mente newtonianos, coincide exactamente con el radio de Schwarzschild, el radio desde donde la luz ya no puede salir hacia el exterior. La interpretacion, sin embargo es distinta, ya que en la mecánica newtoniana, la velocidad de la luz no es un límite superior, de modo que el "objeto oscuro" de Laplace no es un agujero negro en el sentido estricto de la palabra. En la relatividad general, más que la velocidad de escape, la cantidad física importante es la curvatura del espacio-tiempo: cuanto más se comprime la masa, más aumenta la curvatura alrededor del objeto y una vez que toda la masa esté comprimido en un volumen más pequeño que el radio de Schwarzschild, ya no hay manera de parar el colapso gravitacional.

La curvatura es tan grande que la luz se queda atrapada, ya que incluso las geodésicas nulas están dirigidas hacia el centro.[8]

2.4.1. Agujero negro de Schwarzschild

Sabemos que la única solución para el exterior de una distribución esférica de materia está dada por la métrica de Schwarzschild. Esto significa que el campo gravitacional en el exterior de un objeto bajo colapso esféricamente simétrico está dado por la métrica de Schwarzschild.[10] Al tomar el límite cuando $r \to \infty$ en la métrica de Schwarzschild escrita en la forma (2.2.9) es inmediato obtener la métrica del espacio-tiempo plano de la relatividad especial en coordenadas esféricas,

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega. \tag{2.4.1}$$

Esto muestra que el espacio-tiempo de Schwarzschild es asintóticamente plano. Además de esta característica la métrica presenta dos comportamientos singulares: el primero para el radio,

$$r \equiv r_s = 2M, \tag{2.4.2}$$

llamado el radio de Schwarzschild, podemos observar que las coordenadas elegidas para describir la solución de Schwarzschild cubren solamente una porción de la variedad. Así, por ejemplo, es claro que las coordenadas (t, r, θ, φ) no cubren los ejes $\theta = 0$ $\pi = 0$ ya que el elemento de línea se vuelve singular allí, esta singularidad se puede remover si se utilizan coordenadas cartesianas definidas de la forma,

$$x = rsin\theta cos\varphi, \tag{2.4.3}$$

$$y = sin\theta sin\varphi, \tag{2.4.4}$$

$$z = rcos\theta. \tag{2.4.5}$$

Por otro lado una segunda singularidad, es en el punto $r = 0$ es claro observarla en la métrica (2.2.9), ya que el elemeto de línea diverge. Esta singularidad no puede removerse con cambios de coordenadas y por ello se le denomina intrínseca, física, real o simplemente singularidad esencial. El hecho de no poder removerse con un cambio de coordenadas se puede evidenciar al calcular algunos escalares de curvatura. En este caso el escalar de Ricci, $R = R^{\mu}_{\mu}$ es idénticamente igual a cero y por ello no permite ninguna conclusión. Sin embargo, el escalar de Kretschman (contracción de Riemann con el mismo), resulta ser

$$K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2}{r^6}. \tag{2.4.6}$$

Nótese que este escalar no presenta ningún problema en $r = 2M$ mostrando que esta es una singularidad coordenada; mientras que para $r = 0$ diverge, por lo cual ésta es una singularidad esencial.

Para la descripción de objetos como estrellas, la solución de Schwarzschild corresponde al espacio-tiempo exterior del cuerpo esférico con radio $R > 2M$. De esta forma, la métrica en la región interior de la estrella, $r < R$ corresponde a una solución de las ecuaciones de campo de Einstein con alguna distribución de materia diferente de vacio y que se une suavemente con la solución de Schwarzschild en $r = R$. Por esta razón, la superficie $r = 2M$ y la singularidad $r = 0$ no son consideradas en la descripción

Sin embargo, cuando se considera el proceso de colapso gravitacional y la masa del objeto se concentra en $r = 0$, la superficie $r = 2M$ aparece como una división de la variedad en dos componentes. La región I, donde $2M < r < \infty$, las coordenandas t y r tienen un carácter temporal y espacial respectivamente mientras que en la región II, donde $0 < r < 2M$ la coordenadas t y r invierten su carácter. En el estudio de los agujeros negros, las hipersuperficies $r = 2M$ posee características muy importantes y definirá la frontera de estos objetos. [10]

2.4.2. Agujero negro de Reissner-Nordström

A continuación se realiza el estudio de un agujero negro eléctricamente cargado. A pesar que desde el punto de vista de la astrofísica existe una baja probabilidad de tener objetos estelares con una carga eléctrica neta, físicamente existe la posibilidad de agregar carga a un agujero negro y realizar un estudio del comportamiento del espacio-tiempo en su exterior[10]. Para obtener las ecuaciones de campo correspondientes, tomamos la acción de Einstein-Hilbert.

$$S_H = \frac{1}{16\pi}\int \sqrt{|g|} R d^4x, \tag{2.4.7}$$

y agregamos la acción del campo electromagnético para obtener la acción total

$$S_H = \frac{1}{16\pi}\int \sqrt{|g|}\left[R - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] d^4x, \tag{2.4.8}$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor electromagnético. Al realizar la variación de esta acción con respecto a los campos, obtenemos el conjunto de ecuaciones de Einstein-Maxwell,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} = 2\left[F_{\mu\sigma}F^{\sigma}_{\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right] \tag{2.4.9}$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0. \tag{2.4.10}$$

En la métrica del agujero negro con carga se debe suponer un tensor métrico esféricamente simétrico el cual debe reducirse a Schwarzschild cuando la carga sea cero. Por ello, se propone un elemento de línea como

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{2.4.11}$$

En este caso las ecuaciones de campo no se plantean en el vacio, sino que existirá un tensor momento-energía para el campo electromagnético como se evidencia en (2.4.9) y estos campos deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell (2.4.10), ademas se debe satisfacer la simetría esférica y que posea un campo eléctrico. Por esta razón se considera un campo radial de la forma

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{r^2}\mathbf{e}(r), \tag{2.4.12}$$

donde la constante Q se interpreta como la carga eléctrica. Luego de dar solución a las ecuaciones de campo, con estas condiciones, se obtiene el elemento de línea

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{2.4.13}$$

que puede re-escribirse en la forma usual la cual es conocida como métrica de Reissner-Nordström

$$ds^2 = -\frac{\mathit{\Delta}}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{\mathit{\Delta}}ds^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{2.4.14}$$

donde:

$$\mathit{\Delta} = r^2 - 2Mr^2 + Q^2, \tag{2.4.15}$$

y el campo eléctrico asociado con el agujero es

$$E = \frac{Q}{r^2}\partial_r. \tag{2.4.16}$$

A partir de la métrica (2.4.14) se puede observar que existen tres singularidades. La primera corresponde al punto r = 0 y es una singularidad no-removible similar al caso r = 0 en Schwarzschild. Las otras dos singualaridades se encuentran en los puntos donde $\Delta = 0$. Para ser ubicados exactamente se pueden escribir

$$\mathit{\Delta} = (r - r_+)(r - r_-), \tag{2.4.17}$$

donde

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \tag{2.4.18}$$

CAPÍTULO 3

AGUJEROS NEGROS INSPIRADOS EN GEOMETRÍA NO CONMUTATIVA

3.1. Geometría No Conmutativa

En los ultimos años, un nuevo enfoque matemático ha emergido como una discución muy importante: la geometría no conmutativa, ya que existe una creencia largamente sostenida de que la gravedad cuántica debe tener un principio de incertidumbre el cual impide tener una medición precisa, más que la dada por la longitud de Planck. [3] Es así como se podría describir estos efectos, por lo menos con eficacia, por una teoría con una nueva especie de principio de incertidumbre entre las coordenadas. De la misma manera que sucede en la teoría cuántica donde se establece la imposibilidad de que sean conocidas con precisión la posición y el momento, se podría postular una nueva incertidumbre que proviene de las relaciones de conmutación de las coordenadas espacio temporales, teniendo en cuenta la posibilidad de una variedad no conmutativa.
La idea de introducir unas coordenadas espacio temporales no conmutativas, aparece en la busqueda de un *cutoff* ultravioleta efectivo capaz de controlar las divergencias que habían aparecido en las teorías cuánticas de la epoca. Fue Snyder quien formalizó por primera vez estas ideas en un artículo totalmente dedicado a este tema.[11]
La idea base de la no conmutatividad del espacio-tiempo esta basada por conceptos de mecánica cuántica. Un espacio de fases cuántico se define reemplazando las variables canónicas por operadores hermíticos que obedecen las relaciones de conmutación de Heisenberg $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ este espacio se encuentra difuminado y la noción de punto es reemplazada por una celda de Planck. Es evidente que en el límite $\hbar \to 0$ la incertidumbre en las variables deja de aparecer y se recupera el espacio-tiempo clásico. Uno de los pioneros fue Von Neumann quién se dedicó a describir de forma rigurosa tales espacios cuánticos y el nacimiento de la geometría no conmutativa tuvo gran influencia en las álgebras que llevan su nombre. En este contexto [12][13][14] el estudio de las propiedades de los espacios no

conmutativos se realizó puramente en términos algebraicos (dejando de lado la idea de un punto) y permitió importantes generalizaciones [15].

Al igual que con la cuantización de un espacio de fases clásico, definimos un espacio-tiempo no conmutativo reemplazando las coordenadas espacio- temporales x^i por operadores hermíticos $\hat{x^i}$ generadores de un álgebra no conmutativa que satisface la siguiente relación

$$\left[\hat{x^i}, \hat{x^j}\right] \neq 0, \tag{3.1.1}$$

$$\left[\hat{x^i}, \hat{x^j}\right] = \hat{x^i}\hat{x^j} - \hat{x^j}\hat{x^i} = i\theta^{ij}, \tag{3.1.2}$$

donde, en el caso más sencillo, θ^{ij} es una matriz anti-simétrica, real, DxD (donde D es la dimensión del espacio-tiempo), Tal matriz es la que determina el volumen fundamental de discretización del espacio-tiempo, de la misma forma que la constante de Planck $\hbar$ discretiza el espacio fase.[16][17]. Dado que las coordenadas ya no conmutan, no pueden ser simultáneamente diagonalizadas y todo el espacio-tiempo es reemplazado por un espacio de estados de Hilbert por lo tanto

$$\Delta x^i, \Delta x^j \geq \frac{1}{2}\left[\theta^{ij}\right]. \tag{3.1.3}$$

La relación (3.1.2) proporciona un sutil proceso de cuantificación de la variedad espacio-tiempo M que se define en términos de una clase de atlas equivalentes, sin tener en cuenta cualquier tipo de campo o cualquier tensor definido sobre ella. Sólo después de haber construido esta base podemos pensar en introducir diversos tipos de estructuras sobre la variedad, sin importar que M este sujeta a un comportamiento no conmutativo. Entre las estructuras posibles, podemos considerar independientemente campos de materia, ψ_α que se propagen en la variedad M o cualquier tipo de cantidad tensorial, incluyendo un tensor métrico $g_{\mu\nu}$ que describe las propiedades de curvatura de M.[3]

La no conmutatividad podría ser también capaz de describir una posible violación de Lorentz: la estructura Irregular del espacio significaría que diferentes longitudes de onda de la luz podrían viajar a velocidades diferentes y desempeñar un papel en el umbral de energía inesperada de los rayos cósmicos. Sin embargo, la violación de la invariancia de Lorentz puede o no ocurrir en la geometría no conmutativa: de hecho existen muchas formulaciones, basadas en diferentes formas de aplicar deformaciones no locales en las teorías de campos, a partir de una relación no conmutativa y así preservar la simetría de Lorentz. [18] [19]

3.2. Agujero Negro de Schwarzschild inspirado en geometría no conmutativa

La formulación de una teoría General de la Relativad no conmutativa es un objetivo de bastante interés para varios investigadores en el mundo, actualmente existe una vasta literatura en este campo [3]. De hecho una vez que se asume una geometría no conmutativa se quiere investigar como resultan las ecuaciones de campo y la curvatura del espacio-tiempo en una variedad no conmutativa. En la actualidad, a pesar de la prometedora labor en este campo, todavía se esta lejos de una teoría ampliamente reconocida de Gravedad no conmutativa, que, en cierto sentido, se espera que proporcione sin problemas a la imagen fibrosa del espacio-tiempo. En este trabajo, no vamos a entrar en el debate acerca de la exactitud de los modelos propuestos de gravedad no conmutativa en la literatura, pero vamos a presentar la formulación que concretamente llevó a nuevas métricas, obtenidas mediante la resolución, exacta o aproximada, de las ecuaciones de Einstein en la versión no conmutativa con el fin de estudiar sus efectos en la física de los agujeros negros resultantes.

Antes de dar comienzo a la solución de las ecuaciones de Einstein en la versión no conmutativa es importante aclarar que este tipo de soluciones se consideran cuasi-clásicas, ya que los cálculos que se realizan tienen la apariencia de los de la Relatividad General clásica, pero son interpretados desde la mecánica cuántica. La razón de esto se puede encontrar en el empleo de las coordenadas no conmutativas. Por lo tanto, será natural que algunas de las características de la solución tienen su explicación sólo en términos de la gravedad cuántica.
Tenemos las ecuaciones de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}. \tag{3.2.1}$$

En principio se podría pensar en modificar la acción de Einstein-Hilbert en cuatro dimensiones, para incorporar los efectos no conmutativos. En [3][20][21][22][23] se demuestra que no es necesario realizar este tipo de modificación y que los efectos no conmutativos se pueden implementar actuando solo sobre la fuente de materia. La línea de razonamiento a grosso modo es la siguiente: La métrica es una estructura geométrica definida sobre una variedad subyacente. La curvatura mide la intensidad del campo métrico, es decir, es la respuesta a la presencia de una distribución de materia-energía. Lo que sabemos a ciencia cierta, es que la no conmutatividad es una propiedad intrínseca de la misma variedad, en lugar de una estructura geométrica superpuesta. En este sentido, que afecta a la gravedad de una manera sutil e indirecta. Mediante el estudio de la mecánica cuántica y la teoría cuántica de campos en variedades no conmutativas simples, por ejemplo, en un plano, se ve que la no conmutatividad influencia a la materia-energía y a la distribución y propagación del momentum. Por otro lado la densidad de energía-momentum determina la curvatura del espacio-tiempo, por lo tanto se puede llegar a la conclusión que en Relativad General los efectos de la noconmutatividad pueden ser tenidos en cuenta en la modificación del tensor momentum-energía, y dejando el tensor de Einstein de la manera estandar. Es exactamente como se realiza en la teoría cuántica de campos, además se ha demostrado [24][25] que la no conmutatividad elimina el punto como estructura, y ahora se toma una distribución "difusa". Matemáticamente, esto se realiza reemplazando las distribuciones de materia que se toman como funciones deltas de Dirac por otro tipo de distribuciones gaussianas de anchura mínima $\sqrt{\theta}$

$$\rho(r) = \frac{M}{(4\pi\theta)^{3/2}} exp(-r^2/4\theta). \tag{3.2.2}$$

La masa M de una partícula, en lugar de ser perfectamente localizada en un punto, es en cambio, difundida a través de una región lineal i.e. unidimensional $\sqrt{\theta}$ esto es gracias a la incertidumbre intrínseca que se establecio en (3.1.3). La fenomenología esperada para esta clase de soluciones implica que los efectos no conmutativos deberían ser observados para distancias $\theta < 10^{-6}cm$ pero incluso para distancias grandes en comparación con la longitud de cuantización se pueden esperar ligeras desviaciones con respecto a los resultados conocidos para la métrica de Schwarzschild.

Con estas consideraciones, se desea encontrar una métrica que sea asintóticamente de Schwarzschild, pero que sea solución a las ecuaciones de campo con una densidad de energía que tenga en cuenta el efecto de la deslocalización de la materia dada por (3.2.2) Evidentemente la métrica deseada debe poseer simetría esférica y ser estática. Con el fin de definir el tensor momentum-energía, nos basamos en la ecuación de continuidad $T^{\mu\nu};\nu = 0$, la cual viene dada por

$$\partial_r T^r_r = -\frac{1}{2} g^{00} \partial_r g_{00} (T^r_r - T^0_0) - g^{\theta\theta} \partial_r g_{\theta\theta} (T^r_r - T^\theta_\theta), \tag{3.2.3}$$

para que la condición de la métrica de Schwarschild $g_{00} = -g_{rr}^{-1}$ se cumpla es necesario que $T^r_r = T^0_0 = -\rho_\theta(r)$ (ver C.1). Por lo tanto se puede encontrar una solución para T^θ_θ que dice

$$T^\theta_\theta = -\rho(r) - \frac{r}{2} \partial_r \rho(r), \tag{3.2.4}$$

por lo tanto nos encontramos con un tensor momentum-energía de la forma

$$T^\nu_{\theta\mu} = \begin{pmatrix} -\rho(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_\perp \end{pmatrix}.$$

El tensor de momentum-energía anterior es bastante inusual porque difiere del tensor de fluido perfecto convencional, que exhibe términos de presión isotrópicas Este resultado indica que no solo es indispensable trabajar con la ecuación de un fluido (no se puede satisfacer las condiciones asintóticas de la métrica con un modelo de polvo, es decir, con la forma más simple del tensor momento-energía que es no nulo en la componente T^0_0) sino que además, es necesario la introducción de una presión tangencial, lo que muestra que la fuente de gravedad es un fluido anisotrópico de densidad $\rho(\theta)$, de presión radial $p_r = -\rho(\theta)$ y presión tangencial

$$p_\perp = -\rho(r) - \frac{r}{2} \partial_r \rho(r). \tag{3.2.5}$$

Este tipo de presiones son el resultado de la no conmutatividad del espacio-tiempo y el origen de toda una nueva física a escalas del orden de $\sqrt{\theta}$. Al resolver las ecuaciones de Einstein con (3.2.2) como fuente de materia se obtiene el elemento de línea

$$ds^2 = \left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta})\right) dt^2 - \left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta})\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \tag{3.2.6}$$

donde $\gamma(\frac{3}{2},\frac{r^2}{4\theta})$ es la función Gamma incompleta,

$$\gamma(\frac{3}{2},\frac{r^2}{4\theta}) = \int_0^{r^2/4\theta} t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt. \tag{3.2.7}$$

La métrica de Schwarzschild se obtiene de (3.2.6) en el límite $\frac{r}{\sqrt{\theta}} \to \infty$ y la ecuación (3.2.2) conduce a la distribución de materia

$$m(r) = \frac{2M}{\sqrt{\pi}}\gamma(\frac{3}{2},\frac{r^2}{4\theta}), \tag{3.2.8}$$

donde M es la masa total de la fuente [3].

3.3. Agujero Negro Cargado inspirado en Geometría No conmutativa

Como era de esperarse en el marco de la no conmutativdad de las coordenadas espacio-temporales, es natural considerandar la métrica de Reissner–Nordstrom, la cual nos presenta un agujero negro con carga eléctrica, esféricamente simétrico y que se reduce a Schwarzschild cuando la carga sea cero como se estudio en el capítulo 2. Para encontrar este tipo de solución en el marco de la geometría no conmutativa, se debe solucionar el sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell, con una fuente de materia similar a la que se considero en la solución de Schwarzschild, o sea una función gaussiana de anchura mínima $\sqrt{\theta}$. Ahora bien dejemos la fuentes de materia y energía de lado por un momento, y centremonos en la carga fundamental, para ello consideramos una densidad de corriente efectiva dada por

$$J^{\mu}(r) = \rho_{el}.(r)\delta_0^{\mu}, \tag{3.3.1}$$

donde ρ_{el} es una función gaussiana de la forma

$$\rho(r)_{el} = \frac{Q}{(4\pi\theta)^{3/2}}exp(-r^2/4\theta). \tag{3.3.2}$$

Como consecuencia, el campo eléctrico $E(r)$ resulta,

$$E(r) = \frac{2Q}{\sqrt{\pi}r^2}\gamma(\frac{3}{2},\frac{r^2}{4\theta}) \tag{3.3.3}$$

dando lugar a un campo de Maxwell no singular $F^{\mu\nu} = \left(\delta^{0\mu}\delta^{r\nu} - \delta^{r\mu}\delta^{\nu 0}\right) E(r)$. [7] Con estas consideraciones se obtiene un sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell cuasiclásico de la forma

$$R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu} R = 8\pi \left(T^{\mu}_{\nu}\ |_{matt} + T^{\mu}_{\nu}\ |_{el}\right) \tag{3.3.4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}\left(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\right) = J^{\nu}, \tag{3.3.5}$$

donde $T^{\mu}_{\nu}\ |_{matt}$ es el que consideramos en la solución de Schwarzschild, [4] que describe el contenido de materia y energía, mientras que $T^{\mu}_{\nu}\ |_{el}$ son las contribuciones del campo eléctromagnetico. Por lo tanto se busca un elemento de línea de la forma:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{3.3.6}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se encuentra,

$$f(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{Q^2}{\pi r^2} F(r), \tag{3.3.7}$$

$$m(r) = \frac{2M}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right), \tag{3.3.8}$$

$$F(r) = \gamma^2\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) - \frac{r}{\sqrt{2\theta}}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{2\theta}\right). \tag{3.3.9}$$

Para tener una comprensión más profunda de la solución anterior, es conveniente introducir el total de masa-energía del sistema

$$M = \oint_{\Sigma} d\sigma^{\mu}\left(T^{0}_{\nu}\ |_{matt} + T^{0}_{\nu}\ |_{el}\right). \tag{3.3.10}$$

En términos de M la solución está determinada por

$$f(r) = 1 - \frac{4M}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) + \frac{Q^2}{\pi r^2}\left[F(r) + \sqrt{\frac{2}{\theta}} r\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right)\right], \tag{3.3.11}$$

la cual exhibe el comportamiento asintótico esperado, que reproduzca la geometría de Reissner-Nordström a grandes distancias [7] .

CAPÍTULO 4

ECUACIÓN DE LA ÓRBITA

4.1. Órbitas en agujeros negros cargados inspirados en geometría no conmutativa

A lo largo de una geodésica parametrizada se define,

$$2K = g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}. \tag{4.1.1}$$

Utilizando el elemento de línea (3.3.6) se calcula la ecuación de la órbita generalizada. Para ello utilizamos una geodésica temporal,

$$\begin{aligned}2K = &\left(1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{Q^2}{\pi r^2}F(r)\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2m(r)}{r} - \frac{Q^2}{\pi r^2}F(r)\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2\\ &- r^2 sin^2(\vartheta)\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 1.\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Por medio de la ecuación de Euler-Lagrange, para valores de $\alpha = 0, 2, 3$ se tiene

$$\frac{d}{d\tau}\left[1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{Q^2}{\pi r^2}F(r)\frac{dt}{d\tau}\right] = 0 \tag{4.1.3}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[r^2\frac{d\vartheta}{d\tau}\right] - \left[r^2 sin(\vartheta)cos(\vartheta)\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right] = 0 \tag{4.1.4}$$

y

$$\frac{d}{d\tau}\left(r^2 sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{d\tau}\right) = 0 \tag{4.1.5}$$

Considerando el movimiento en el plano ecuatorial, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. la ecuación (4.1.5) resulta

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = h, \tag{4.1.6}$$

Integrando la ecuación (4.1.3), obtenemos

$$\left[1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{Q^2}{\pi r^2} F(r)\right] \frac{dt}{d\tau} = \kappa, \tag{4.1.7}$$

donde h y κ son constantes de integración. Sustituyendo (4.1.7) en (4.1.2), se obtiene

$$\kappa^2 \left[1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{Q^2}{\pi r^2} F(r)\right]^{-1} - \left[1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{Q^2}{\pi r^2} F(r)\right]^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 1. \tag{4.1.8}$$

Como se realiza usualmente se define $u \equiv r^{-1}$ por lo tanto

$$\frac{dr}{d\tau} = -h \frac{du}{d\varphi}. \tag{4.1.9}$$

Utilizando las ecuaciones (4.1.6),(4.1.7) y (4.1.9) en la ecuación (4.1.8), ver (D.1) nos encontramos con la siguiente ecuación diferencial para la órbita de una partícula cerca de un agujero negro cargado inspirado en geometría no conmutativa

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{\kappa^2 - 1}{h^2} + \frac{2um(u)}{h^2} + 2u^3 m(u) - \frac{Q^2 u^2}{\pi h^2} F(u) - \frac{Q^2 u^4}{\pi} F(u), \tag{4.1.10}$$

donde

$$m(u) = \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) \tag{4.1.11}$$

$$F(u) = \gamma^2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) - \frac{1}{u^2 \sqrt{2\theta}} \gamma \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\theta u^2}\right) \tag{4.1.12}$$

Diferenciando (4.1.10) encontramos la ecuación de la órbita en segundo orden (ver D.2)

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=&\frac{M}{h^2}+3Mu^2-Q\left(2u^3+\frac{u}{h}+\frac{1}{h^2u\sqrt{2\pi\theta}}+\frac{2u}{\sqrt{2\pi\theta}}\right)\\
&-\frac{e^{-1/4\theta u^2}}{\sqrt{\pi\theta}}\left(\frac{M}{h^2u}+3Mu-\frac{M}{2h^2u^3\theta^3}-\frac{M}{2u\theta^3}+\frac{Q^2}{h^2}+Q^2u^2\right)\\
&-Q^2\frac{e^{-1/2\theta u^2}}{\pi}\left(2+\frac{1}{h^2}-2u^2-\frac{1}{2h^2u^2\theta}-2u^3-\frac{1}{2\theta}\right)
\end{aligned}
\tag{4.1.13}
$$

Los dos primeros terminos concuerdan con los resultados habituales de la Relatividad General [9], ahora si hacemos que $Q=0$ obtenemos la ecuación diferencial de la órbita en la métrica de Schwarzschild no conmutativo [6]. Por último los demás términos son las contribuciones de la carga eléctrica y a los efectos debidos a la no conmutatividad de las coordenadas espacio-temporales.

4.2. Corrimiento del pericentro

Para realizar los calculos de la precesión utilizaremos el metodo planteado en [26] el cual consiste en una derivación simplificada, utilizando una aproximación post-newtoniana para un elemento de línea de simetría esférica general. Por lo tanto consideraremos una función de la forma

$$
\Phi(R)=\left(1-\frac{1}{R^2}\int_0^R r\left[g_{rr}^{(2)}(r)+g_{rr}^{(4)}(r)\right]dr\right)\left[1-\frac{1}{2}g_{tt}^{(2)}(R)-\frac{1}{2}g_{tt}^{(4)}(R)\right] \tag{4.2.1}
$$

Si se aplica un incremento de $d\varphi$ a $d\varphi'$ obtenemos la expresión

$$
\Delta\varphi'=\int_0^{\Delta\varphi=2\pi}\Phi(R)d\varphi. \tag{4.2.2}
$$

Para llevar a cabo la integración de la derecha vamos a considerar la elipse Kepleriana utilizando $\frac{p}{1+\epsilon\cos\varphi}$ donde p es el *latus rectum* y ϵ la excentricidad.

Tomado el elemento de línea,

$$
f(r)=1-\frac{2m(r)}{r}+\frac{Q^2}{\pi r^2}F(r). \tag{4.2.3}
$$

Utilizando las aproximaciones para la función Gamma dadas por (B.0.5), (B.0.6), (B.0.7),(B.0.8). Tenemos

$$m(r) \approx M - \frac{Mr}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}}e^{-r^2/4\theta} \tag{4.2.4}$$

$$F(r) \approx \pi - \frac{4\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}}{r}e^{-r^2/4\theta} + \frac{4\theta}{r^2}e^{-r^2/2\theta} - re^{-r^2/2\theta} - \frac{r^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\theta}} \tag{4.2.5}$$

Por lo tanto el elemento de línea queda de la forma

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{M}{\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}}e^{-r^2/4\theta} - \frac{4Q^2\sqrt{\theta}}{r^3\sqrt{\pi}}e^{-r^2/4\theta} + \frac{4Q^2\theta}{r^4\pi}e^{-r^2/2\theta} - \frac{Q^2}{r\pi}e^{-r^2/2\theta} + \frac{Q^2}{\sqrt{\theta}\sqrt{\pi}} - \frac{Q^2}{r^2} \tag{4.2.6}$$

En el límite no conmutativo $\frac{r}{\sqrt{\theta}} \to \infty$ tenemos que las funciones asintóticamente se hacen cero $e^{-r^2/4\theta} \approx 0$ y $e^{-r^2/2\theta} \approx 0$. Entonces,

$$g_{rr}^{(2)}(r) = g_{tt}^{(2)}(R) = -\frac{2M}{r}, \tag{4.2.7}$$

$$g_{tt}^{(4)}(R) = -\frac{Q^2}{r^2} + \frac{Q^2}{\sqrt{\theta}\sqrt{\pi}}, \tag{4.2.8}$$

$$\Phi(R) = \left(1 - \frac{1}{R^2}\int_0^R -2M dr\right)\left[1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{2M}{R}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{Q^2}{R^2} + \frac{Q^2}{\sqrt{\theta}\sqrt{\pi}}\right)\right], \tag{4.2.9}$$

$$\Phi(R) = \left(1 + \frac{2M}{R}\right)\left[1 + \frac{M}{R} + \frac{Q^2}{2R^2} - \frac{Q^2}{2\sqrt{\theta}\sqrt{\pi}}\right]. \tag{4.2.10}$$

Por lo tanto el incremento $\Delta\varphi$ queda de la siguiente manera

$$\Delta\varphi = \int_0^{2\pi} \Phi(R) d\varphi, \tag{4.2.11}$$

Para llevar a cabo la integral consideramos nuevamente que $R(\varphi) = \frac{p}{1+\epsilon\cos\varphi}$

$$\Delta\varphi = \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{2M(1+\epsilon\cos\varphi)}{p}\right)\left(1 + \frac{M(1+\epsilon\cos\varphi)}{p} + \frac{Q^2(1+\epsilon\cos\varphi)^2}{2p^2} - \frac{Q^2}{2\sqrt{\pi\theta}}\right) d\varphi. \tag{4.2.12}$$

Finalmente obtenemos el corrimiento del pericentro para la trayectoria de una partícula de prueba cerca de un agujero negro cargado inspirado en geometría no conmutativa

$$\Delta\varphi = 2\pi + \frac{6\pi M}{p} + \frac{2\pi M^2}{p^2}\left(2+\epsilon^2\right) + \frac{Q^2\pi}{2p^2}\left(2+\epsilon^2\right) + \frac{Q^2\pi M}{p^3}\left(2+3\epsilon^2\right) - \frac{Q^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\theta}}\left(\frac{2M}{p}+1\right). \tag{4.2.13}$$

Empleando la relación del *latus rectum* con el momentum angular de la masa orbitante respecto al origen

$$p = \frac{h^2}{M}, \tag{4.2.14}$$

observamos que el $\Delta\varphi$ consta de tres partes, la primera correspondiente a la masa

$$\Delta\varphi \approx \frac{6\pi M^2}{h^2} + \frac{2\pi M^3}{h^4}\left(2+\epsilon^2\right), \tag{4.2.15}$$

una parte eléctrica

$$\Delta\varphi \approx \frac{MQ^2\pi}{2h^3}\left(2+\epsilon^2\right) + \frac{Q^2\pi M^2}{h^4}\left(2+3\epsilon^2\right), \tag{4.2.16}$$

finalmente una tercera parte, la cual se debe a los efectos de la no conmutatividad de las coordenadas espacio-temporales.

$$\Delta\varphi_{NC} \approx -\frac{Q^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\theta}}\left(\frac{2M^2}{h^2}+1\right). \tag{4.2.17}$$

Las ecuaciones (4.2.15) y (4.2.16) concuerdan con los resultados obtenidos en [26] y [27] en este último realizaron este calculo por un metodo distinto y encontraron el corrimiento del perihelio a primer orden. Por otra parte en la teoría Newtoniana el momentum angular viene dado por $h^2 \approx \frac{GM}{c^2}(1-e^2)a$ donde e es la excentricidad y a el semieje mayor de la órbita [28]. Utilizando esta relación en la ecuación (4.2.17).

$$\Delta\varphi_{NC} \approx -\frac{Q^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\theta}}\left(\frac{2Mc^2}{G(1-e^2)a}+1\right). \tag{4.2.18}$$

Para tener una estimación de la precesión del perihelio adicional, consideremos el movimiento de Mercurio alrededor del sol. Para este caso tenemos $\frac{GM}{c^2} \simeq 1.48\text{x}10^3 m$, $e = 0.2056$, $a = 5.79\text{x}10^{10} m$ y $\theta \sim 10^{-72} m^2$. Por otra parte la existencia de agujeros negros cargados en la naturaleza es casi imposible, pero desde un contexto de gravitación Newtoniana se ha demostrado que para que existan dichos objetos se debe tener que la razón carga-masa debe ser mayor que 10^{-18} [29]. Esto significa que los agujeros negros en principio deberían tener aproximadamente una carga de $10^2 C$. Para el caso no conmutativo, encontramos una relación de carga-masa de 10^{-23}, por lo tanto se debería tener un valor para la carga eléctrica de $10^{-3} C$ ver (D.3). Lo que significa que la presencia de la carga en agujeros negros no conmutativos sería imperceptible en la naturaleza, y por ende los efectos que podrían causar en la preseción de las órbitas mucho mas difícil de observar. Pero esto no quiere decir que estos efectos no sean importantes, si se llegase a descubrir la aparición de los micro agujeros negros, este tipo de fenómenos toman mucha más relevancia que en los agujeros negros astrofísicos.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

El efecto de la no conmutatividad es una propiedad intrínseca de la propia variedad, y se implementa en la Relatividad General mediante la modificación de la fuente de materia. De hecho podemos aplicar la no conmutatividad cambiando sólo la parte de la materia de la ecuación de Einstein y dejando el lado izquierdo de la ecuación intacta. El Tensor momentum energía necesario para esta descripción es de la forma de un fluido perfecto y requiere una presión no trivial. Además estos efectos son pequeños asintóticamente, lo que es razonable esperar, ya que lejos de la distribución de materia se pueda considerar como una solución de Schwarzschild. De igual importancia los análisis de las soluciones de los agujeros negros en cuatro dimensiones, tanto para los casos neutros y cargados, pueden aparecer, en una primera instancia, como los nuevos elementos de línea no singulares de la Relatividad General. Una de las principales diferencias entre las teorías no conmutativas y conmutativa se deriva del hecho de que en un espacio no conmutativo los operadores de coordenadas no tienen vectores propios de posición debido a la ecuación (3.1.2). Por otro lado, los efectos no conmutativos deberían producir cambios significativos debidos a la discretización de las coordenadas espacio temporales, y sus efectos toman importancia a distancias $\sqrt{\theta} < 10^{-16}cm$, ya que el comportamiento de la gravedad cuántica, solo es necesaria a distancias menores de $10^{-33}cm$.

Al analizar los efectos de la no conmutatividad, en la trayectoria de una partícula libre cerca de un agujero negro cargado inspirado en geometría no conmutativa, se encuentran varias características importantes en la ecuación diferencial de la órbita. En primer lugar, los dos primeros términos de la ecuación (4.1.13) son los habituales de la Relatividad General, por lo tanto es fácil ver que en el limite de $\frac{r}{\sqrt{\theta}} \to \infty$, se recupera la ecuación de la órbita habitual, con la presencia de carga eléctrica [27]. Como segunda instancia, los términos debidos a la no conmutatividad se caracterizan por estar en función de la longitud de cuantización, estos los podemos definir en dos partes: la primera son los que contienen términos de masa, los cuales concuerdan con los obtenidos en [6]. la segunda son términos que contienen carga, en ellos observamos que tienen una contribución negativa. La solución de la ecuación (4.1.13), es demasiado complicada, se espera que a futuro se logre solucionar, tal vez mediante un metodo perturbativo.

Finalmente un término extra de precesión aparece contribuyendo de manera negativa al corrimiento del perihelio, este contiene la presencia de carga eléctrica y de la longitud de cuantización, su valor numérico se calcula utilizando los datos de observación de Mercurio, donde se obtiene un valor para la carga del orden de $10^{-3}C$, el cual es bastante pequeño para un objeto astrofísico. Sin embargo a pesar de que este efecto no conmutativo es muy pequeño, no deja de ser importante ya que refleja la naturaleza de la estructura del espacio-tiempo en el caso de la fenomenología de los micro agujeros negros.

APÉNDICE A

ÓRBITAS EN RELATIVIDAD GENERAL

A.1. Ecuaciones de las geodésicas

Utilizando la ecuación de Euler-Lagrange.

$$\frac{\partial K}{\partial x^{\alpha}} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^{\alpha}}\right) = 0, \tag{A.1.1}$$

donde K,

$$K = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{r^2}{2}\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 - \frac{r^2 \sin^2\vartheta}{2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2. \tag{A.1.2}$$

Para $\alpha = 0$ tenemos

$$\frac{\partial K}{\partial x^0} = \frac{\partial K}{\partial t} = 0, \tag{A.1.3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^0} &= \frac{\partial K}{\partial \dot{t}} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right) 2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right) \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right), \end{aligned} \tag{A.1.4}$$

por lo tanto,

$$\frac{d}{d\tau}\left[1 - \frac{2m}{r}\frac{dt}{d\tau}\right] = 0. \tag{A.1.5}$$

Para $\alpha = 2$ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial x^2} &= \frac{\partial K}{\partial \vartheta} \\
&= -\frac{2r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \\
&= -r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2,
\end{aligned} \tag{A.1.6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^2} &= \frac{\partial K}{\partial \dot{\vartheta}} \\
&= -\frac{2r^2}{2} \left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right) \\
&= -r^2 \left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right),
\end{aligned} \tag{A.1.7}$$

finalmente,

$$\frac{d}{d\tau}\left[r^2 \frac{d\vartheta}{d\tau}\right] - \left[r^2 sin\vartheta cos\vartheta \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right] = 0. \tag{A.1.8}$$

Para $\alpha = 3$ tenemos

$$\frac{\partial K}{\partial x^3} = \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0, \tag{A.1.9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^3} &= \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \\
&= -\frac{2r^2 \sin^2\vartheta}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right) \\
&= -r^2 \sin^2\vartheta \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right),
\end{aligned} \tag{A.1.10}$$

por ultimo,

$$\frac{d}{d\tau}\left(r^2 sin^2\vartheta \frac{d\varphi}{d\tau}\right) = 0. \tag{A.1.11}$$

A.2. Relación de la ecuación de Binet con su versión Relativista

Tenemos la versión relativista de la ecuación de Binet en términos del radio de Schwarzschild $r_s = \frac{2Gm}{c^2}$,

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - \frac{r_s}{2h^2} - \frac{3}{2}r_s u^2 = 0 \tag{A.2.1}$$

Si se compara esta ecuación con la obtenida en mecánica newtoniana

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - \frac{Gm}{L^2} = 0, \tag{A.2.2}$$

donde

$$L = r^2 \frac{d\varphi}{dt} \tag{A.2.3}$$

y notando que $r^2\dot{\varphi} = h$, la relación entre las dos ecuaciones es

$$\begin{aligned} \frac{r_s}{2h^2} &= \frac{Gm}{c^2h^2} \\ &= \frac{Gm}{c^2(r^2\dot{\varphi})^2} \\ &= \frac{GM}{c^2(r^2\frac{d\varphi}{ds})^2} \\ &= \frac{GM}{c^2(r^2\frac{d\varphi}{cdt})^2} \\ &= \frac{GM}{(r^2\frac{d\varphi}{dt})^2} \\ &= \frac{GM}{L^2} \end{aligned} \tag{A.2.4}$$

donde se ha utilizado la aproximación $ds \simeq cdt$, válida para velocidades pequeñas en comparación con la velocidad de la luz. Así, teniendo en cuenta la definición del radio de

Schwarzschild $r_s = \frac{2Gm}{c^2}$ se tiene que $c * h = L$. Se observa entonces que la ecuación relativista contiene el término adicional $\frac{3}{2} r_s u^2$, el cual, para el caso de la órbita de Mercurio, es pequeño comparado con el término $\frac{r_s}{2h^2}$, pues tomando en cuenta que $ds \simeq cdt$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{3/2 r_s u^2}{r_s/2h^2} &= 3h^2u^2 \\ &= 3\frac{1}{r^2}(r^2\dot{\varphi}) \\ &\simeq \frac{3}{c^2}\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\ &\simeq 3\frac{v_\perp^2}{c^2} \\ &\sim 7.7 * 10^{-8}, \end{aligned} \tag{A.2.5}$$

donde $v_\perp$ es la velocidad de Mercurio perpendicular al radio vector. Por esta razón, se puede resolver la ecuación de movimiento relativista para la órbita de Mercurio, tratando el término $\frac{3}{2} r_s u^2$ como una perturbación.

A.3. Calculo de los coeficientes indeterminados de la ecuación lineal homogénea

Dada la ecuación

$$u_1'' + u_1 = \frac{m}{h^2}(1 + \frac{1}{2}e^2) + \frac{2me}{h^2} cos\varphi + \frac{me^2}{2h^2} cos2\varphi. \tag{A.3.1}$$

Proponemos una solución particular de la forma

$$u_1 = A + B\varphi sin\varphi + Ccos2\varphi, \tag{A.3.2}$$

donde,

$$u_1' = B\sin\varphi + B\varphi\cos\varphi - 2C\sin 2\varphi, \tag{A.3.3}$$

$$u_1'' = B\cos\varphi + B\cos\varphi - B\varphi\sin\varphi - 4C\cos 2\varphi, \tag{A.3.4}$$

entonces,

$$\begin{aligned} u_1'' + u_1 &= B\cos\varphi + B\cos\varphi - B\varphi\sin\varphi - 4C\cos 2\varphi + A + B\varphi sin\varphi + Ccos2\varphi \\ &= A + 2B\cos\varphi - 3Ccos2\varphi \end{aligned} \tag{A.3.5}$$

Reemplazando (A.3.5) en (A.3.1)

$$A + 2B\cos\varphi - 3Ccos2\varphi = \frac{m}{h^2}(1 + \frac{1}{2}e^2) + \frac{2me}{h^2}cos\varphi + \frac{me^2}{2h^2}cos2\varphi \tag{A.3.6}$$

Comparando término a término,

$$A = \frac{m}{h^2}(1 + \frac{1}{2}e^2), \tag{A.3.7}$$

$$2B = \frac{2me}{h^2}cos\varphi \rightarrow \qquad B = \frac{me}{h^2}cos\varphi, \tag{A.3.8}$$

$$-3C = \frac{me^2}{2h^2}cos2\varphi \rightarrow \qquad C = -\frac{me^2}{6h^2}cos2\varphi. \tag{A.3.9}$$

APÉNDICE B

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN GAMMA

Derivadas de la función Gamma incompleta

$$\frac{\partial}{\partial z}\gamma\left(\frac{a}{b}, z\right) = -e^{-u}u^{-1+\frac{a}{b}}. \tag{B.0.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) = \frac{e^{-1/4\theta u^2}}{4\theta u^3}\sqrt{\frac{1}{\theta u^2}}. \tag{B.0.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\theta u^2}\right) = \frac{e^{-1/2\theta u^2}}{\theta u^3\sqrt{\frac{1}{2\theta u^2}}}. \tag{B.0.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\gamma^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) = \frac{2e^{-1/4\theta u^2}}{\theta u^3\sqrt{\frac{1}{\theta u^2}}}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right). \tag{B.0.4}$$

Aproximación de γ para distancias largas

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\theta}}\frac{e^{-1/4\theta u^2}}{u}. \tag{B.0.5}$$

$$\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\theta u^2}\right) \simeq \sqrt{\pi} - \sqrt{2\theta}ue^{-1/2\theta u^2}. \tag{B.0.6}$$

$$\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) \simeq \sqrt{\pi} - 2\sqrt{\theta}ue^{-1/4\theta u^2}. \tag{B.0.7}$$

$$\gamma^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) \simeq \left(\sqrt{\pi} - 2\sqrt{\theta}ue^{-1/4\theta u^2}\right)^2 = \pi - 4\sqrt{\pi\theta}ue^{-1/4\theta u^2} + 4\theta u^2e^{-1/2\theta u^2}. \tag{B.0.8}$$

APÉNDICE C

GEOMETRÍA NO CONMUTATIVA

C.1. Relación entre las componentes temporal y radial del tensor momento-energía

El tensor momentum energía debe cumplir la ecuación de continuidad $T^{\mu\nu};\nu = 0$ que para condiciones de simetría esférica viene dado por

$$\partial_r T^r{}_r = -\frac{1}{2} g^{00}\partial_r g_{00}(T^r{}_r - T^0{}_0) - g^{\theta\theta}\partial_r g_{\theta\theta}(T^r{}_r - T^\theta{}_\theta) \tag{C.1.1}$$

Dado que se quiere una métrica asintótica a Schwarzschild, la métrica tiene que ser diagonal, entonces tanto la matriz del tensor de Einstein como la matriz del tensor momento energía son diagonales. Las componentes covariantes y contravariantes de los tensores se relacionan del siguiente modo

$$T^\sigma_\mu = g^{\sigma\mu} T_{\mu\nu}, \tag{C.1.2}$$

por lo tanto,

$$T^0_0 = g^{00} T_{00} \qquad\qquad T^r_r = g^{rr} T_{rr}, \tag{C.1.3}$$

además las componentes covariantes y contravariantes del tensor métrico deben cumplir

$$g^{\sigma\mu} g_{\mu\nu} = \delta^\sigma_\nu. \tag{C.1.4}$$

Por medio de la condición de Schwarzschild $g_{00} = -g_{rr}^{-1} = f(r)$ se encuentran las componentes contravariantes del tensor metrico

$$g_{00} = f(r) \qquad g^{00} = 1/f(r) \qquad g_{rr} = -1/f(r) \qquad g^{rr} = -f(r), \tag{C.1.5}$$

por lo tanto

$$T_0^0 = \frac{1}{f(r)} T_{00} \qquad T_r^r = -f(r) t_{00}. \tag{C.1.6}$$

Las dos primeras componentes de las ecuaciones de campo no nulas son

$$G_{00} = \frac{f(r)}{r^2}[\partial_r(f(r))r - 1 + f(r)] = -8\pi T_{00} \tag{C.1.7}$$

$$G_{rr} = -\frac{1}{f(r)r^2}[\partial_r(f(r))r - 1 + f(r)] = -8\pi T_{rr} \tag{C.1.8}$$

Multiplicando (C.1.7) por $\frac{1}{f(r)}$ y la ecuación (C.1.8) por -$f(r)$ obtenemos

$$\frac{G_{00}}{f(r)} = \frac{8\pi}{f(r)} T_{00} = \frac{[\partial_r(f(r))r - 1 + f(r)]}{r^2} \tag{C.1.9}$$

$$-f(r)G_{rr} = -8\pi\left(-f(r)T_{rr}\right) = \frac{[\partial_r(f(r))r - 1 + f(r)]}{r^2} \tag{C.1.10}$$

Observe que la ecuaciones (C.1.9) y (C.1.10) son iguales y además corresponden a lo que se planteo en (C.1.6). Por lo tanto conociendo la distribución de materia se cumple

$$T_0^0 = T_r^r = -\rho_\theta \tag{C.1.11}$$

C.2. Comprobación de la Métrica de Schwarzschild no conmutativo

La primera componente no nula del tensor de Einstein esta dada por

$$G_{00} = \frac{f(r)}{r^2}[\partial_r(f(r))r - 1 + f(r)] = -8\pi T_{00}, \tag{C.2.1}$$

donde

$$f(r) = g_{00} = 1 - \frac{2m(r)}{r} \tag{C.2.2}$$

y para el tensor momentum-energía se tiene

$$T_0^0 = \rho(r) \qquad T_{00} = g_{00}T_0^0 \qquad T_{00} = f(r)\rho(r). \tag{C.2.3}$$

Reemplazando

$$\begin{aligned}
&\frac{f(r)}{r^2}[\partial_r(f(r))r - 1 + f(r)] = -8\pi f(r)\rho(r)\\
&\frac{1}{r^2}[\partial_r(f(r))r - 1 + f(r)] = -8\pi\rho(r)\\
&[\partial_r(f(r))r - 1 + f(r)] = -8r^2\pi\rho(r)\\
&\partial_r(f(r))r - \frac{2m(r)}{r} = -8r^2\pi\rho(r)\\
&\left(\frac{2m(r)}{r^2} - \frac{2}{r}\partial_r m(r)\right)r - \frac{2m(r)}{r} = -8r^2\pi\rho(r).
\end{aligned} \tag{C.2.4}$$

Finalmente tenemos

$$\partial_r m(r) = 4r^2\pi\rho(r). \tag{C.2.5}$$

Por otra parte,

$$m(r) = \frac{2M}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) \qquad \rho(r) = \frac{M}{(4\pi\theta)^{3/2}}exp(-r^2/4\theta) \tag{C.2.6}$$

Empleando la deriva de la función Gamma incompleta (B.0.1), obtenemos

$$\partial_r m(r) = M\frac{r^2 e^{-r^2/4\theta}}{2\theta\sqrt{\pi\theta}}, \tag{C.2.7}$$

reemplazando en (C.2.5)

$$\begin{aligned}
&M\frac{r^2 e^{-r^2/4\theta}}{2\theta\sqrt{\pi\theta}} = 4r^2\pi\rho(r)\\
&M\frac{e^{-r^2/4\theta}}{2\theta\sqrt{\pi\theta}} = 4\pi\rho(r)\\
&M\frac{e^{-r^2/4\theta}}{2\theta\sqrt{\pi\theta}} = 4\pi\left(\frac{M}{(4\pi\theta)^{3/2}}e^{-r^2/4\theta}\right)\\
&M\frac{e^{-r^2/4\theta}}{2\theta^{3/2}\pi^{1/2}} = M\frac{e^{-r^2/4\theta}}{2\theta^{3/2}\pi^{1/2}}.
\end{aligned} \tag{C.2.8}$$

APÉNDICE D

ÓRBITAS EN GEOMETRÍA NO CONMUTATIVA

D.1. Ecuación de la órbita en espacio-tiempo no conmutativo

Considerando el movimiento en el plano ecuatorial $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, la ecuación (4.1.2), queda de la forma

$$\left(1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{Q^2}{\pi r^2}F(r)\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2m(r)}{r} - \frac{Q^2}{\pi r^2}F(r)\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 1. \tag{D.1.1}$$

de la ecuación (4.1.6) tenemos,

$$\begin{aligned} & r^2\frac{d\varphi}{d\tau} = h \\ & \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{h}{r^2} \\ & \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \frac{h^2}{r^4} \end{aligned} \tag{D.1.2}$$

Sustituyendo (D.1.2) en (D.1.1) tenemos

$$\left(1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{Q^2}{\pi r^2}F(r)\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2m(r)}{r} - \frac{Q^2}{\pi r^2}F(r)\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{h^2}{r^2} = 1. \tag{D.1.3}$$

Al definir $u \equiv r^{-1}$ se obtiene

$$\frac{dr}{d\tau} = -h\frac{du}{d\varphi}. \tag{D.1.4}$$

Reemplazando (D.1.4) en (D.1.3),

$$\left(1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{Q^2}{\pi r^2}F(r)\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2m(r)}{r} - \frac{Q^2}{\pi r^2}F(r)\right)^{-1}\left(-h\frac{du}{d\varphi}\right)^2 - h^2u^2 = 1,$$

$$(D.1.5)$$

de la ecuación (4.1.8),

$$\begin{aligned}
&\left[1-\frac{2m(r)}{r}+\frac{Q^2}{\pi r^2}F(r)\right]\frac{dt}{d\tau}=\kappa\\
&\frac{dt}{d\tau}=\frac{\kappa}{1-\frac{2m(r)}{r}+\frac{Q^2}{\pi r^2}F(r)}\\
&\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2=\left(\frac{\kappa}{1-\frac{2m(r)}{r}+\frac{Q^2}{\pi r^2}F(r)}\right)^2,
\end{aligned} \tag{D.1.6}$$

por último sustituyendo (D.1.6) en (D.1.5),

$$\begin{aligned}
&\left[1-2m(u)u+\frac{Q^2}{\pi r^2}F(u)\right]^{-1}\kappa^2-\left[1-2m(u)u+\frac{Q^2u^2}{\pi}F(u)\right]^{-1}\left(-h\frac{du}{d\varphi}\right)^2-h^2u^2=1\\
&\left[1-2m(u)u+\frac{Q^2}{\pi r^2}F(u)\right]^{-1}\kappa^2-\left[1-2m(u)u+\frac{Q^2u^2}{\pi}F(u)\right]^{-1}\left(-h\frac{du}{d\varphi}\right)^2=1+h^2u^2\\
&\left[\kappa^2-\left(h\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]\left[1-2m(u)u+\frac{Q^2u^2}{\pi}F(u)\right]^{-1}=1+h^2u^2\\
&\kappa^2-\left(h\frac{du}{d\varphi}\right)^2=1-2m(u)u+\frac{Q^2u^2}{\pi}F(u)+h^2u^2\left[1-2m(u)u+\frac{Q^2u^2}{\pi}F(u)\right]\\
&\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=-\frac{1}{h^2}+\frac{2m(u)u}{h^2}-\frac{Q^2u^2}{h^2\pi}F(u)-u^2\left[1-2m(u)u+\frac{Q^2u^2}{\pi}F(u)\right]+\frac{\kappa^2}{h^2}\\
&\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=-\frac{1}{h^2}+\frac{2m(u)u}{h^2}-\frac{Q^2u^2}{h^2\pi}F(u)-u^2+2m(u)u^3-\frac{Q^2u^4}{\pi}F(u)+\frac{\kappa^2}{h^2}\\
&\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=\frac{\kappa^2-1}{h^2}+\frac{2m(u)u}{h^2}-\frac{Q^2u^2}{h^2\pi}F(u)-u^2+2m(u)u^3-\frac{Q^2u^4}{\pi}F(u)\\
&\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2=\frac{\kappa^2-1}{h^2}+\frac{2um(u)}{h^2}+2u^3m(u)-\frac{Q^2u^2}{h^2\pi}F(u)-\frac{Q^2u^4}{\pi}F(u).
\end{aligned} \tag{D.1.7}$$

D.2. Ecuación de la órbita de segundo orden en espacio-tiempo no conmutativo

Derivando la ecuación (D.1.7), donde las funciones $F(u)$ y $m(u)$ son,

$$m(u) = \frac{2M}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) \tag{D.2.1}$$

$$F(u) = \gamma^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) - \frac{1}{u^2\sqrt{2\theta}}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\theta u^2}\right), \tag{D.2.2}$$

tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = {} & \frac{2M}{\sqrt{\pi}h^2}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) + \frac{6Mu^2}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) + \frac{u}{h^2}\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\frac{\partial m}{\partial u} + u^3\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\frac{\partial m}{\partial u} \\ & - \frac{Q^2u}{\pi h^2}F(u) - \frac{Q^2u^2}{2\pi h^2}\frac{\partial F(u)}{\partial u} - \frac{2Q^2u^2}{2\pi h^2}\gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\theta u^2}).\end{aligned} \tag{D.2.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = {} & \frac{2M}{\sqrt{\pi}h^2}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) + \frac{6Mu^2}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) + \frac{M}{2h^2\sqrt{\pi\theta^3}}\frac{e^{-1/4\theta u^2}}{u^3} + \frac{M}{2\sqrt{\pi\theta^3}}\frac{e^{-1/4\theta u^2}}{u} \\ & - \frac{Q^2u}{\pi h^2}F(u) - \frac{Q^2u^2}{2\pi h^2}.\end{aligned} \tag{D.2.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = {} & \frac{2M}{\sqrt{\pi}h^2}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) + \frac{6Mu^2}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) - \frac{M}{2h^2\sqrt{\pi\theta^3}}\frac{e^{-1/4\theta u^2}}{u^3} - \frac{M}{2\sqrt{\pi\theta^3}}\frac{e^{-1/4\theta u^2}}{u} \\ & - \frac{Q^2u}{\pi h^2}F(u) - \frac{2Q^2u^2}{2\pi h^2}\frac{\partial F(u)}{\partial u} - \frac{Q^2u^4}{2\pi}\frac{\partial F(u)}{\partial u}.\end{aligned} \tag{D.2.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = {} & \frac{2M}{\sqrt{\pi}h^2}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) + \frac{6Mu^2}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) - \frac{M}{2h^2\sqrt{\pi\theta^3}}\frac{e^{-1/4\theta u^2}}{u^3} - \frac{M}{2\sqrt{\pi\theta^3}}\frac{e^{-1/4\theta u^2}}{u} \\ & - \frac{Q^2u}{\pi h^2}\gamma^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) + \frac{Q^2}{\pi h^2\sqrt{2\theta}u}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\theta u^2}\right) - \frac{2Q^2u^3}{\pi}\gamma^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) \\ & + \frac{2Q^2u}{\pi\sqrt{2\theta}}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\theta u^2}\right) - \frac{Q^2u^2}{2\pi h^2}\frac{\partial F(u)}{\partial u} - \frac{Q^2u^4}{2\pi}\frac{\partial F(u)}{\partial u}.\end{aligned}$$

(D.2.6)

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{2M}{\sqrt{\pi}h^2}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) + \frac{6Mu^2}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) - \frac{M}{2h^2\sqrt{\pi\theta^3}}\frac{e^{-1/4\theta u^2}}{u^3} - \frac{M}{2\sqrt{\pi\theta^3}}\frac{e^{-1/4\theta u^2}}{u}$$
$$- \frac{Q^2 u}{\pi h^2}\gamma^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) + \frac{Q^2}{\pi h^2\sqrt{2\theta}u}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\theta u^2}\right) - \frac{2Q^2u^3}{\pi}\gamma^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right)$$
$$+ \frac{2Q^2u}{\pi\sqrt{2\theta}}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\theta u^2}\right) - \frac{Q^2e^{-1/4\theta u^2}}{\pi h^2\sqrt{\theta}}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) + \frac{Q^2}{2\pi h^2\theta}\frac{e^{-1/2\theta u^2}}{u^2}$$
$$- \frac{Q^2u^2e^{-1/4\theta u^2}}{\pi\sqrt{\theta}}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\theta u^2}\right) + \frac{Q^2e^{-1/2\theta u^2}}{2\pi\theta}, \tag{D.2.7}$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{M}{h^2} + 3Mu^2 - \frac{M}{\sqrt{\pi\theta}h^2}\frac{e^{-1/4\theta u^2}}{u} - \frac{3M}{\sqrt{\pi\theta}}ue^{-1/4\theta u^2} + \frac{M}{2h^2\sqrt{\pi\theta^3}}\frac{e^{-1/4\theta u^2}}{u^3}$$
$$+ \frac{M}{2\sqrt{\pi\theta^3}}\frac{e^{-1/4\theta u^2}}{u} - \frac{Q^2u}{\pi h^2}\gamma^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) + \frac{Q^2}{h^2\sqrt{2\pi\theta}u} - \frac{Q^2}{\pi h^2}e^{-1/2\theta u^2}$$
$$- \frac{2Q^2u^3}{\pi}\gamma^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) + \frac{2Q^2u}{\sqrt{2\pi\theta}} - \frac{2Q^2}{\pi}u^2e^{-1/2\theta u^2} - \frac{Q^2e^{-1/4\theta u^2}}{\pi h^2\sqrt{\theta}}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\theta u^2}\right)$$
$$+ \frac{Q^2}{2\pi h^2\theta}\frac{e^{-1/2\theta u^2}}{u^2} - \frac{Q^2e^{-1/4\theta u^2}}{\pi\sqrt{\theta}}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4\theta u^2}\right) + \frac{Q^2e^{-1/2\theta u^2}}{2\pi\theta}. \tag{D.2.8}$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{M}{h^2} + 3Mu^2 - \frac{M}{\sqrt{\pi\theta}h^2}\frac{e^{-1/4\theta u^2}}{u} - \frac{3M}{\sqrt{\pi\theta}}ue^{-1/4\theta u^2} + \frac{M}{2h^2\sqrt{\pi\theta^3}}\frac{e^{-1/4\theta u^2}}{u^3}$$
$$+ \frac{M}{2\sqrt{\pi\theta^3}}\frac{e^{-1/4\theta u^2}}{u} - \frac{Q^2u}{h^2} + \frac{4Q^2\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}h^2}u^2e^{-1/4\theta u^2} - \frac{4Q^2\theta u}{\pi h^2}u^3e^{-1/2\theta u^2} + \frac{Q^2}{h^2\sqrt{2\pi\theta}u}$$
$$- \frac{Q^2}{\pi h^2}e^{-1/2\theta u^2} - 2Q^2u^3 + \frac{8Q^2\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}}u^4e^{-1/4\theta u^2} - \frac{8Q^2\theta}{\pi}u^5e^{-1/2\theta u^2} + \frac{2Q^2u}{\sqrt{2\pi\theta}}$$
$$- \frac{2Q^2}{\pi}u^2e^{-1/2\theta u^2} - \frac{Q^2u^2e^{-1/4\theta u^2}}{\sqrt{\pi}\theta} + \frac{2Q^2}{\pi}u^3e^{-1/2\theta u^2} + \frac{Q^2e^{-1/2\theta u^2}}{2\pi\theta}. \tag{D.2.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=&\frac{M}{h^2}+3Mu^2-\frac{Q^2u}{h^2}-2Q^2u^3-\frac{M}{\sqrt{\pi\theta}h^2}\frac{e^{-1/4\theta u^2}}{u}-\frac{3M}{\sqrt{\pi\theta}}ue^{-1/4\theta u^2}\\&+\frac{M}{2h^2\sqrt{\pi\theta^3}}\frac{e^{-1/4\theta u^2}}{u^3}+\frac{M}{2\sqrt{\pi\theta^3}}\frac{e^{-1/4\theta u^2}}{u}+\frac{Q^2}{h^2\sqrt{2\pi\theta}u}-\frac{Q^2}{\pi h^2}e^{-1/2\theta u^2}\\&+\frac{2Q^2u}{\sqrt{2\pi\theta}}+\frac{2Q^2}{\pi}u^2e^{-1/2\theta u^2}-\frac{Q^2e^{-1/4\theta u^2}}{h^2\sqrt{\pi\theta}}+\frac{2Q^2}{\pi}e^{-1/2\theta u^2}+\frac{Q^2}{2\pi h^2\theta}\frac{e^{-1/2\theta u^2}}{u^2}\\&-\frac{Q^2u^2e^{-1/4\theta u^2}}{\sqrt{\pi\theta}}+\frac{2Q^2}{\pi}u^3e^{-1/2\theta u^2}+\frac{Q^2e^{-1/2\theta u^2}}{2\pi\theta}.\end{aligned}\tag{D.2.10}$$

Factorizando

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=&\frac{M}{h^2}+3Mu^2-Q\left(2u^3+\frac{u}{h}+\frac{1}{h^2u\sqrt{2\pi\theta}}+\frac{2u}{\sqrt{2\pi\theta}}\right)\\&-\frac{e^{-1/4\theta u^2}}{\sqrt{\pi\theta}}\left(\frac{M}{h^2u}+3Mu-\frac{M}{2h^2u^3\theta^3}-\frac{M}{2u\theta^3}+\frac{Q^2}{h^2}+Q^2u^2\right)\\&-Q^2\frac{e^{-1/2\theta u^2}}{\pi}\left(2+\frac{1}{h^2}-2u^2-\frac{1}{2h^2u^2\theta}-2u^3-\frac{1}{2\theta}\right)\end{aligned}\tag{D.2.11}$$

D.3. Estimados numéricos para el valor de la carga en agujeros negros no conmutativos

Teniendo en cuenta que los efectos de la no conmutatividad no han sido observados aún en la naturaleza, se asume que el valor no conmutativo debe ser menor al valor encontrado en la Relatividad General.

$$\frac{Q^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\theta}}\left(\frac{2M^2}{h^2}+1\right)<\frac{6\pi GM^2}{c^2h^2}\tag{D.3.1}$$

Consideremos el movimiento de Mercurio alrededor del sol. Para este caso tenemos los siguiente valores numéricos $\frac{GM}{c^2}\simeq 1.48\text{x}10^3m$, $e=0.2056$, $a=5.79\text{x}10^{10}m$ y $\theta\sim 10^{-72}m^2$. Ademas el valor de algunas constantes fundamentales,

Constante de Gravitación	$G=6.6720\text{x}10^{-11}N.m^2/kg^2$
Constante de Coulomb	$k=1/4\pi\epsilon_0=8.98752\text{x}10^9N.m^2/C^2$

Velocidad de la luz en el vacío $c = 2.99792\text{x}10^8 m/s.$
En la teoría Newtoniana el momentum angular viene dado por $h^2 \approx \frac{GM}{c^2}(1-e^2)a$ entonces tenemos,

$$h \approx 9.05923\text{x}10^6 m. \tag{D.3.2}$$

Reemplazando estos valores en el término de la precesión que se obtiene en la Relatividad General, y recuperando las constantes universales

$$\frac{6\pi G M^2}{c^2 h^2} \approx 5.28038\text{x}10^{-7}. \tag{D.3.3}$$

Ahora procedemos a calcular un estimado para la relación carga-masa, teniendo en cuenta que este valor debe ser menor que el obtenido en (D.3.3), por lo tanto, multiplicando y dividendo por M^2

$$\frac{Q^2\sqrt{\pi}}{M^2\sqrt{\theta}}\left(\frac{2M^3}{h^2} + M^2\right) < 5.28038\text{x}10^{-7}, \tag{D.3.4}$$

obtenemos una relación carga-masa,

$$\frac{Q}{M} < 1.99095\text{x}10^{-23}. \tag{D.3.5}$$

Teniendo en cuenta las unidades geométricas, obtenemos un valor aproximado para la carga eléctrica

$$\frac{Q}{M}\left(\frac{\sqrt{Gk}}{c^2}\right) < 1.99095\text{x}10^{-23} \tag{D.3.6}$$

$$Q < 1.99095\text{x}10^{-23} * 1.48\text{x}10^3 * 1.1616\text{x}10^{17}$$

$$Q < 3.422\text{x}10^{-3} C$$

BIBLIOGRAFÍA

[1] S. W. Hawking. *Commun. Math. Phys.* (1975).

[2] B. S. DeWitt. *Quantum Field Theory In Curved Space,* . AIP Conf. Proc., 1975.

[3] P Nicolini. Noncommutive Black Holes, The final appeal to quantum gravity: a review. *International Journal of Modern Physics A* (2009).

[4] P.Nicolini, A. Smailagic, and E. Spallucci. Noncommutative geometry inspired Schwarzschild black hole . *Phys Lett B 632 547* (2006).

[5] A. Larrañaga and J.M. Tejeiro. Three Dimensional Charged Black Hole Inspired by Noncommutative Geometry. *The Abraham Zelmanov Journal 4, 28-35* (2010).

[6] S. Akhshabi and K. Nozari. Orbits of particles in noncommutative Schwarzschild spacetime. *Europhys.Lett.80:20002,* (2007).

[7] P.Nicolini, E. Spallucci, A. Smailagic, and A. Ansoldi. Noncommutative geometry inspired charged black holes. *Phys.Lett.B645:261-266* (2007).

[8] B. Janssen. *Relatividad General.* Notas de Clase. Universidad de Granada, 2011.

[9] R. d'inverno d'inverno. *Introducing Einstein's Relativity, 1.* Oxford University Press, USA, 1992.

[10] A. Larrañaga. *Agujeros Negros Clásicos.* Notas de Clase, 2009.

[11] H. Snyder. Quantized space-time . *Phys. Rev., 71:38–41* (1947).

[12] A. Connes. Noncommutative geometry . *Academic Press* (1994).

[13] G. Landi. An introduction to noncommutative spaces and their geometry. (1997).

[14] J. Madore. An introduction to noncommutative differential geometry and itsphysical applications. . *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser., 257:1–371* (2000).

[15] P. Scuracchio. *Efectos cuánticos en teorías no conmutativas renormalizables* . Master's thesis, Universidad Nacional de Cuyo, 2010.

[16] A. Smailagic and E. Spallucci. *J. Phys. A 37, 1* (2004).

[17] S. Doplicher, K. Fredenhagen , and J. E. Roberts. Spacetime quantization induced by classical gravity. *Phys. Lett. B 331, 39* (1994).

[18] M. Douglas and N. Nekrasov. Noncommutative field theory. *Rev. Mod. Phys. 73, 977–1029* (2001).

[19] R. Szabo. Quantum field theory on noncommutative spaces. *Phys. Rept. 378, 207* (2003).

[20] A. H. Chamseddine. Deforming Einstein's gravity. *Phys. Lett. B 504, 33* (2001).

[21] M. Chaichian, A. Tureanu, and G. Zet. Corrections to Schwarzschild solution in noncommutative gauge theory of gravity. *Phys. Lett. B 660, 573* (2008).

[22] M. Kontsevich. *Lett. Math. Phys. 66, 157* (2003).

[23] E. Harikumar and V. O. Rivelles. *Class. Quant. Grav. 23, 7551* (2006).

[24] A. Smailagic and E. Spallucci. *J. Phys. A 36 L467.* (2003).

[25] A. Smailagic and E. Spallucci. *J. Phys. A 36 L517.* (2003).

[26] A. Larrañaga and L. Cabarique. Advance of Planetary Perihelion in Post-Newtonian Gravity. *Bulg. J. Phys. 40 33–39* (2013).

[27] Chaliasos. E. Perihelion Shift in the Reissner-Nordstroem Field. *Celestial Mechanics and Dynamical atronomy* **79:134-144** (2001).

[28] S.M. Carroll. *An Introduction to General Relativity: Spacetime and Geometry,.* Addison Wesley, 2004.

[29] P.Nicolini and L Modesto. Charged rotating noncommutative black holes . *Phys. Rev. D* **82** (2010):104035.

[30] B. Mirza and M. Dehghani. *Commun. Theor. Phys.* 42, 2004.

[31] S.A Alavi. Reissner-Nordstrom Black Hole in Noncommutative Spaces. *Acta Physica Polonica B* **40** (2009).

[32] T.G. Rizzo. Noncommutative Inspired Black Holes in Extra Dimensions. *hep-ph/0606051* (2002).

[33] D. Lawden. *An Introduction to Tensor Calculus and Relativity.* Wiley, 1962.

[34] J.B. Hartle. *Gravity:An introduction to Einstein's General Relativity.* Addison-Wesly, 2002.

[35] H. Groenewold. On the principles of elementary quantum mechanics. *Physica 12, 405* (1946).

[36] J. E. Moyal. Quantum mechanics as a statistical theory. *Proc. Cambridge Phil. Soc. 45, 99* (1949).

[37] H. Weyl. The Theory of Groups and Quantum Mechanics **Dover, New York** (1931).

[38] E. P. Wigner. *Phys. Rev. 40, 749* (1932).