UN ANÁLISIS EN LOS LIBROS DE TEXTO DEL CONCEPTO DE PRODUCTO PUNTO Y SU ENSEÑANZA, BASADO EN LA TEORÍA DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES

Rosa María Bautista Santos

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Manizales, Caldas

2017

UN ANÁLISIS EN LOS LIBROS DE TEXTO DEL CONCEPTO DE PRODUCTO PUNTO Y SU ENSEÑANZA, BASADO EN LA TEORIA DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO

Rosa María Bautista Santos

Director

Dr. FABIÁN FERNANDO SERRANO SUÁREZ

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Manizales, Caldas

2017

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mis padres,

por su acompañamiento en toda mi vida,

a mis hermanos y a mi sobrino, porque

siempre me han mostrado su apoyo incondicional.

Agradecimientos

Doy Gracias a Dios por permitirme la vida, por el estudio y el empleo que me regala, Gracias a la universidad Nacional sede Manizales por darme la oportunidad ser un miembro más de esta hermosa familia, agradezco al profesor Fabián Fernando Serrano, quien me oriento para hacer este trabajo, a todos los profesores de la maestría por regalarme el conocimiento con amor y dedicación en cada clase recibida, a cada uno de mis compañeros de estudio, por brindarme su amistad.

Contenido

Págs.

Listado de tablas

Págs.

Listado de figuras

Págs.

Resumen

El objetivo principal de este estudio es analizar el concepto y la enseñanza del producto punto en diferentes libros de texto, basado en la teoría del pensamiento matemático avanzado, para esto se introduce todo lo relacionado al Pensamiento matemático avanzado, para alcanzar, los objetivos propuestos en el estudio.

Para este estudio, se hace un breve desarrollo histórico del concepto de producto punto o producto escalar, se justifica el análisis de los libros de texto como parte fundamental en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se hacen algunos antecedentes de investigación realizados anteriormente sobre análisis de libro de texto, por último se hace el análisis de textos, teniendo en cuenta la metodología usada para realizar el análisis seguidamente análisis de los textos elegidos, finalmente se dan las conclusiones obtenidas, teniendo en cuenta el análisis se puede evidenciar que no todos los libros de texto tienen implicados los procesos de pensamiento matemático avanzado.

Palabras claves: Pensamiento matemático, producto punto, David Tall, análisis de texto.

Abstract

An analysis in the textbooks of the point product concept and its teaching, based on the theory of advanced mathematical thinking

The main objective of this study is to analyze the concept and teaching of the dot product in different textbooks, based on the theory of advanced mathematical thinking, for this is introduced everything related to Advanced Mathematical Thinking, to achieve the objectives proposed in the study.

For this study, a brief historical development of the product point or scalar product concept is made, the analysis of textbooks is justified as a fundamental part in the teaching and learning of mathematics, some previous research history is done on analysis Of textbook, finally the analysis of texts is done, taking into account the methodology used to perform the analysis followed by analysis of the chosen texts, finally the conclusions are obtained, taking into account the analysis it can be evidenced that not all Textbooks have involved the processes of advanced mathematical thinking.

Keywords: Mathematical thinking, product point, David Tall, text analysis.

Introducción

El paso que se hace del colegio a la universidad, genera cambio en la gran mayoría de los estudiantes, algunos tomando con rechazo de entrada ciertas materias, como lo es en el caso de las matemáticas (cálculo, algebra lineal, etc.) algunos estudiantes desde el inicio de sus carreras conciben alguna apatía para seguir, causa de algunas deserciones universitarias, el cambio es tan fuerte y brusco, que prefieren no continuar, pero gran parte de esto también se debe a las motivaciones previas realizadas, en este momento los personajes competentes para ello son los docentes orientadores de áreas o materias asignadas, por eso cabe mencionar que si se tiene en cuenta el paso o el cambio del pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático avanzado, los resultados serían muy favorables, y más porque el beneficiado es el estudiante, son muchos los factores que influyen para tal motivación mencionada, en el momento de una clase, como se decía los docentes, pero ellos solos no, cabe mencionar que si se está hablando de una materia de matemáticas, un buen libro de texto, sería una buena estrategia y de mucha ayuda, pero no es fácil, escoger el libro, algunos se acomodan a las necesidades, otro no.

El corazón de las matemáticas está en resolver problemas, algunos de los libros son tan mecánicos que solo se dedican a la realización de ejercicios usando una serie de algoritmos, pero no van más allá, no miden realmente la esencia de lo que se quiere enseñar, de lo que se quiere aprender, para un estudiante sería muy agradable y emotivo resolver problemas, reales, donde observen y cuestionen de situaciones presentadas, en la vida.

Según, Luis Santaló (1985) citado por (Polya, 1945), hace referencia a un gran matemático Español, Luis Santaló quien expresó: “Enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemáticas no debe ser otra cosa que pensar en la solución de problemas” El libro de texto se ha diseñado, pensando en enriquecer los conocimientos que se puedan dirigir en un aula de clase, estos cuentan con mayor información y más contendidos de los que se alcanzan a trabajar en el momento de una clase de aula.

Es por esta razón que se ha querido hacer en este trabajo el análisis a cuatro libros de texto, para observar el proceso de enseñanza aprendizaje, teniendo como referente el pensamiento matemático avanzado(paso de la matemática simple a la matemática avanzada) de David Tall.

Capítulo I

1. Titulo

Un análisis en los libros de texto del concepto de producto punto y su enseñanza, basado en la teoría del pensamiento matemático avanzado.

1.1 Planteamiento del problema

La matemática es una ciencia que no se puede dejar pasar desapercibida, es imposible ocultarla, pues se encuentra en la vida diaria, inconscientes o conscientes los seres humanos usamos matemáticas, y mucho más cuando de academia se trata, por ejemplo un estudiante de ingeniería el corazón de su carrera corresponde a esta hermosa ciencia, uno de los tantos elementos donde se apoya un estudiante para indagar sobre algún tema de interés o de estudio en alguna materia de matemáticas es en los libros de texto. A juicio del autor, los libros de texto son un material de suma importancia para el proceso de enseñanza- aprendizaje, siendo el docente el puente para trasmitir algún conocimiento, tema, o concepto de cualquier área, en este caso especial de matemáticas, sin embargo como algunos investigadores han determinado, es relevante la forma en cómo se presenta algún concepto en estudio para dar paso a la transposición didáctica, en muchas ocasiones la presentación de los conceptos carecen de objetos didácticos (ejemplos o problemas de aplicación que enfoque centralmente el tema), parece pertinente e interesante escudriñar las diferentes alternativas que tienen algunos libros de texto de algebra lineal acerca del producto punto, observar si la parte aplicativa tiene un mayor peso, en donde no solo los ejercicios se limiten a solucionarse siguiendo una serie de algoritmos o formulas, sería interesante ver ejercicios donde la parte mecánica no sea una prioridad, sino que la prioridad sea la parte aplicativa donde se encuentre la verdadera esencia de la existencia en este caso del concepto de producto punto, o producto interior de vectores. Teniendo como referente la metodología del pensamiento matemático avanzado, escrita por (Tall, 1991), quien de una manera muy completa y detallada considera las matemáticas del bachillerato y las matemáticas de la universidad.

1.2 Justificación

Hoy en día para nadie es un secreto que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se encuentra en un trance bastante complejo en donde se ve la decadencia y así en algunas ocasiones se pierde la generalidad y la esencia en los temas de matemáticas, la deserción escolar a causa de las materias relacionadas con las matemáticas es cada vez más grande y evidente, es por esta razón que parece importante hacer un análisis a algunos libros de algebra lineal para conocer más de cerca la manera como es presentado el tema anteriormente mencionado y así poder dar un enfoque diferente a la enseñanza, apoyado de la teoría del pensamiento matemático avanzado (Tall, 1991).

Los libros de Texto son el principal material educativo de los maestros, su forma de utilización es diversa ya sea desde la aplicación directa con los alumnos, hasta como medio para la formación continua a veces, personal e informal del maestro. Además siguen siendo los únicos documentos de lectura existentes en las comunidades aisladas.

En este trabajo se presenta un estudio realizado a diferentes libros de texto de algebra lineal acerca del producto punto, se pretende observar cómo se aborda el tema, que posibilidades existen de aplicación a los contextos reales (ejemplos, problemas de aplicación).

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general.

Analizar el concepto y la enseñanza del producto punto en diferentes libros de texto, basado en la teoría del pensamiento matemático avanzado.

1.3.2 Objetivos específicos

Estudiar la teoría del pensamiento matemático avanzado.

Hacer un recorrido histórico acerca del concepto de producto punto.

Observar que etapas del pensamiento matemático avanzado se presentan en los libros de texto sobre el concepto de producto punto.

Identificar contexto y elementos del concepto del producto punto, bien sea en ejemplos o ejercicios propuestos.

Capitulo II

2. Marco de referencia

2.1 Antecedentes de investigación

2.1.1 Desde el punto del pensamiento matemático avanzado.

El autor (Tall, 1991), realizó una investigación llamada *"The Transition to advanced mathematical thinking: funtionns, limits, infinity and proof*" (la transición a pensamiento matemático avanzado: funciones, limites, infinito y prueba) acerca de la conceptualización de conceptos avanzados sobre la noción de función, limite e infinito, y el proceso de prueba matemática.

Las primeras definiciones dadas por el autor son concepto definición (las definiciones escritas en los libros de texto) y concepto imagen (imágenes mentales y propiedades asociadas a un objeto matemático). A continuación describe los fundamentos matemáticos y raíces cognitivas que según (Tall, 1991) en la construcción de un plan de estudios es natural que intente empezar desde ideas sencillas y moverse constantemente a conceptos más complejos como el estudiante crece en experiencia.

El concepto según (Tall, 1991) es: "Sean $A\, y\, B$ conjuntos AXB denota el producto cartesiano de $A\, y\, B.$ Un f subconjunto de AXB es una función si cuando $(x_{1\,,}y_{1\,,})$ y $(x_{2\,,}y_{2,})$ son elementos de f y si $x_1 = x_{2\,,}$ entonces $y_1 = y_2$"

Según (Tall, 1991) toma una actividad realizada por los señores Dreyfus y Vinner (1982, 1989), donde realizaron una serie de cuestiones conceptuales sobre las funciones a una muestra representativa de 271 estudiantes y 36 profesores de una universidad. Las respuestas a la noción de función incluyen no solo la norma de definición sino las variantes tales como:

Una correspondencia entre dos variables.

Una regla de correspondencia.

Una manipulación u operación (en un solo número para obtener otro).

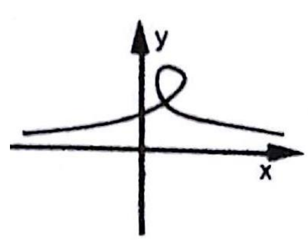
Una formula, expresión algebraica o ecuación

Un gráfico.

Tomando la actividad hallada en el texto de Tal (Tall, 1991)l de los autores Dreyfus y Vinner (1982, 1989) que dice:

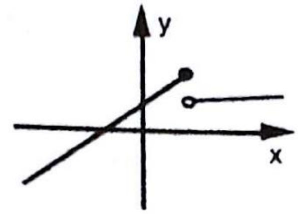
Existe una gráfica cuya función es:

Figura 1. Gráfica de no función



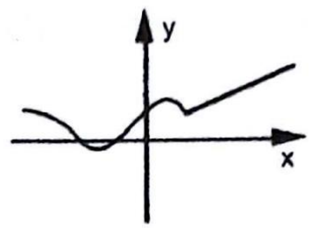
Fuente: (Tall, 1991)

Figura 2. Gráfica de función por secciones



Fuente: (Tall, 1991)

Figura 3. Gráfica de función continúa



Fuente: (Tall, 1991)

¿Existe una función que asigna a cada número diferente del cero su cuadrado y a 0 asigna 1 ?

¿Qué en su opinión es una función?

La siguiente tabla muestra el porcentaje de estudiantes cuyas respuesta se adjudicó correcta.

Tabla 1. Porcentaje estudiantes respuestas correctas

NIVEL MATEMÁTICA	BAJO	INTERMEDIO	ALTO	MAYORES EN MATEMÁTICA	PROFESORES
Pregunta: 1	55%	66%	64%	74%	97%
2	27%	48%	67%	86%	94%
3	36%	40%	53%	72%	94%
4	9%	22%	50%	60%	75%

Fuente: (Tall, 1991)

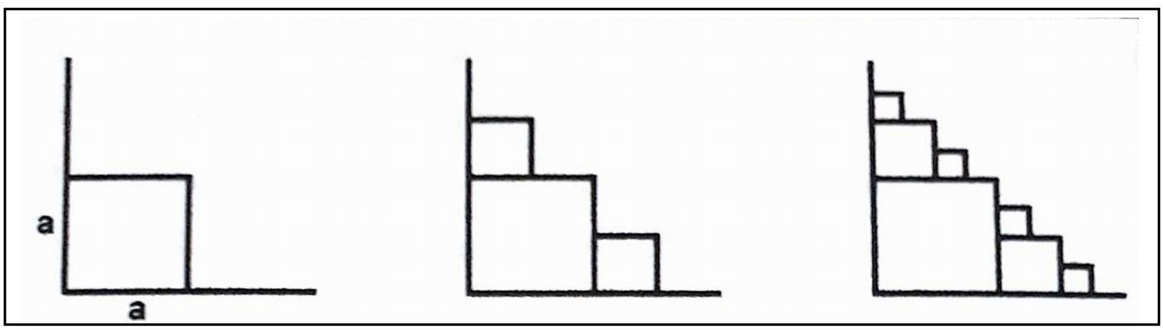
Los porcentajes mejoran con la capacidad y la experiencia, pero no en mayores de matemáticas en particular, tienen un alto porcentaje de respuestas incorrectas. Las razones de las respuestas incluyen no solo la definición estándar y las variantes antes mencionadas, sino también evocados como: la gráfica es continua o cambia su carácter (por ejemplo, dos líneas rectas diferentes), el dominio de la función de “divide”, hay un punto excepcional.

Siguiendo con las actividades plasmadas por (Tall, 1991), a continuación, se mostrará el estudio realizado por Tall acerca de enseñanza y aprendizaje de los límites basado en el pensamiento matemático avanzado.

Para (Tall, 1991), el concepto de un límite significa el paso a un plano más elevado del pensamiento matemático, este es el primer concepto matemático en el que loe estudiantes encuentran el resultado de un cálculo matemático sencillo. Los limites ocurren en diferentes contextos matemáticos, incluyendo el límite de una sucesión, de una serie, de una función ($\lim_{x\to a} f(x)$ ó $\lim_{x\to\infty} f(x)$) es la noción de continuidad, de diferenciabilidad, de la integración. En un sentido matemático, sería conveniente distinguir entre estos diversos tipos diferentes de límite.

Según (Tall, 1991), no es ninguna sorpresa que el intento de simplificar la noción de límite mediante el lenguaje cotidiano, puede conducir a serios problemas conceptuales. Orton (1980) citado por (Tall, 1991) investigó el concepto de límite de los estudiantes usando una escalera con peldaños en los que se insertan peldaños adicionales de tamaño medio entre cada peldaño, luego el proceso es repetido sucesivamente con peldaños de tamaño medio de nuevo, como se observa en la figura 4:

Figura 4. Definición concepto de limite



Fuente: (Tall, 1991)

Tall plantea una entrevista acerca de la anterior figura:

Si este procedimiento se repite indefinidamente, ¿Cuál es el resultado final?.

¿Cuantas veces van estos pasos a repetirse para que el resultadso final sea alcanzado?.

¿Cuál es el área de la forma final en terminos de a , es decir cuál es el area debajo de la escalera final?.

Si una formula se da en (c), preguntó se puede utilizar esta formula para obtener el termino final o limite de la sucesión?.

La expresion resultado final se utlizó de nuevo en un intento de ayudar a los estudiantes a comprender el sentido de los limites. Él seguramente no esta solo en su intento de ayudar al estudiante por una presentación informal, pero una frase como la escalera final es susceptible de crear un concepto limite generico en el que el estudiante imagina una escalera con un numero infinito de pasos y esto es precisamente la respuesta que recuerda. Frente a tales dificultades en la noción dinamica de un límite , no es sorpresa que la definición formal tambien esta plegada de problemas cognitivos, incluso la frase dado un épsilon mayor que cero… puede ser interpretado como teniendo épsilon arbitrariamente pequeño, todo ocurre como si no existe un numero muy pequeño, pero sin embargo no cero.

Para (Tall, 1991) la representación $\lim_{x\to a} f(x)$ muestra una versión para el caso de límite de una fución de cálculo sencillo, que el estudiante grabará en su mente, como un procedimiento algorítmico muy alejado del verdadero sentido matemático del ímite de una función. Toda la evidencia apunta una vez más al hecho de que, aunque el concepto de límite (sentido formal) es una buena base matemática, que deja ser una raíz cognitiva adecuada, si es difícil comenzar con el proceso de límite en temas como el cálculo, lo que se dispone de alternativas, en lugar de introducir las ideas de límites explícito en la diferenciación, Tall comienza magnificando gráficos. Esto se basa en la tesis de que una raíz cognitiva para el cálculo es la idea de que una función diferenciable tiene un gráfico que magnifica a mirar de frente. Para dar a la imagen un concepto rico.

Tall despues de realizar las investigaciones anteriormente nombradas, obtuvo las siguientes reflexiones:

Mirando hacía atrás en las pruebas reunidas, hay una gran cantidad de datos para apoyar la existencia de un conflicto cognitivo grave en el aprendizaje de las matemática mas avanzada, procesos y conceptos tales como funciones, limites y la prueba. Lo que parece estar claro es que las definiciones formales de las matemáticas, que son tan importantes bases para la lógica del sujeto, son menos apropiados como raices cognitivas para el desarrollo curricular, su sutileza y generalidad son demasiados grandes para el cultivo de la mente para dar cabida a todos a la vez, sin un alto riesgo de conflicto provocado por inadvertencia de irregularidades en las experiancias particulares encontrados. Hay pliegues de la mente en todas partes: en los docentes, en los matemáticos profesionales , educadores matematicos, estudiantes.

La segunda etapa es la de realizar observaciones clínicas mas detalladas del proceso, como el proceso masivo de reestructuración cognitiva. Esta transición implica un número de cambios cognitivos:

Desde el concepto considerado como un proceso (la función como un proceso, que tiende a un límite).

Para el concepto encapsulado como un único objeto que se le da un nombre (el funcionar como un objeto).

A través de la abstracción de propiedades al concepto dado en términos de una definición (funcionan como un conjunto de pares ordenados, el límite de épsilon-delta).

Para la contrucción de las propiedades del objeto definidas través de deducción lógica.

Relaciones entre las distintas representaciones del concepto (incluyendo verbal, de procedimiento, simbólico, numérico, gráfico).

Existe un estudio realizado por (Acero, 2008), enfocado en el análisis de los libros de texto de algebra lineal, denominando *"estructura del libro de texto universitario"*, mediante el pensamiento matemático avanzado realizo un estudio a priori de la estructura de libros de nivel universitario, con conceptos y temas propios de algebra lineal.

(Acero, 2008) en su estudio realizado, según su temática central plantea cuatro categorías:

El texto en el currículo,

El texto en sus contextos.

El texto en su evolución.

El texto y su estructura.

En cada una de estas categorías el autor hace la respectiva investigación de sus antecedentes y de cada una de las definiciones, teniendo en cuenta la influencia en los libros de texto, analizando la evolución a través del tiempo.

Seguidamente definió y organizó las fases del pensamiento matemático avanzado según el escrito de (Tall, 1991), para seguir los procesos como los indica en su libro. Además específico el estilo de prosa que por registro de un lenguaje natural se entiende una forma especial de ese lenguaje utilizada para un propósito específico, puede caracterizarse la presentación de un texto mediante los modos de combinar los dos registros, que se denomina estilo de prosa. Los estudios de las variedades de prosa matemática, introducen una clasificación con tres tipos el estilo rotulado (una especia de manual de ingeniería con todos los parágrafos etiquetados y numerados), el estilo narrativo (cuando el estilo está formado por definición, teorema, observación, ejemplo y ejercicio) y el estilo mixto (corresponde a un término medio a la escala de estilos de extremos), llegando al resultado que el estilo de prosa se distribuye con cierta uniformidad en la población de textos, siendo ligeramente mayoritario el estilo mixto, el menos representado el estilo narrativo, ubicándose el estilo narrativo, ubicándose el estilo rotulado en una posición intermedia. Encontró que la fase del pensamiento matemático avanzado más utilizados son la operatividad y la aplicación, dejando de lado la mayoría de las otras fases. Viéndose reflejado la carencia del pensamiento matemático avanzado.

2.2 Marco teórico

2.2.1 Pensamiento matemático avanzado.

El pensamiento matemático avanzado fue desarrollado por (Tall, 1991) en su libro Advance Mathematics Thinking. El pensamiento matemático avanzado es una línea de estudio y análisis de cómo se da el paso de la matemática simple a la matemática avanzada, donde uno de sus componentes principales es la prueba matemática.

Según (Tall, 1991) algunos de los autores de los textos están interesados en encontrar una distinción entre pensamiento matemático avanzado y no avanzado. La mayoría coincide en que la manera de convencerse a uno mismo y a otros, cambia cuando se exigen pruebas y que esto va de la mano con el reconocimiento de objetos matemáticos a través de la presentación explicita de sus propiedades en vez de a través de la clasificación intuitiva de ejemplos. Aunque en las matemáticas escolares (matemáticas consideradas como objeto de enseñanza y aprendizaje) pueden encontrarse algunos elementos de este cambio de enfoque, de clasificar objetos por similitudes a abstraer axiomas o propiedades, es este el que determina un progreso significativo en cómo se espera que los estudiantes piensen y este cambio lo que interesa a la mayoría de los investigadores.

Según Vinner y Hershkowitz (1983) citado por (Hernández, 2013) “adquirir un concepto cual sea posible identificar y construir todos los ejemplos del concepto tal como está concebido por la comunidad matemática” por esta razón entre más prototipos de un concepto tenga el estudiante, mayor será su imagen conceptual e identificara con más facilidad los ejemplos del concepto.

2.2.1.1 Concepto definición y concepto imagen.

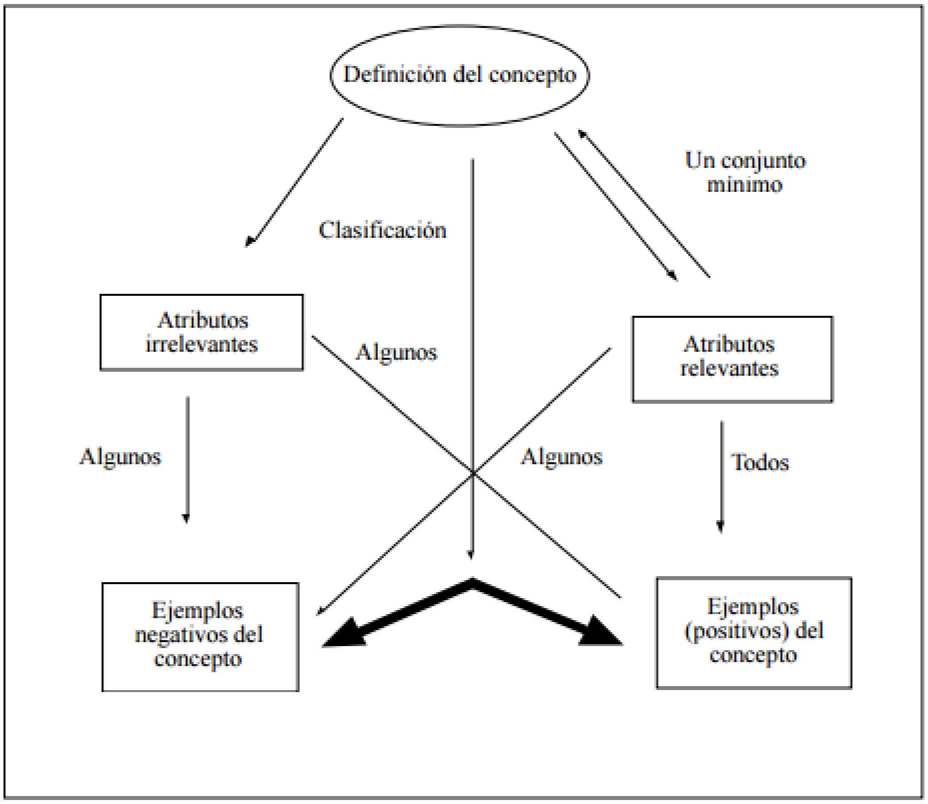
Según (Tall, 1991) los términos concepto definición y concepto imagen fueron introducidos por Vinner Y Hershkowiz (1980) el pensamiento matemático avanzado, según (Tall, 1991) está compuesto por concepto imagen y concepto definición, para este estudio se verá como está expuesto el concepto de definición que serían las definiciones expuestas de producto punto en los libros de texto.

Según, (Tall & Vinner, 1981) citado por (Barroso, 2000), hacen referencia que la mente humana no es puramente lógica; la forma compleja como funciona varía a menudo de la lógica matemática. El comprender cómo ocurre este proceso, tanto éxitos como con errores, lleva a formular una distinción entre el concepto matemático formalmente conocido y el proceso cognitivo por el que se concibe. El esquema conceptual describe la estructura cognitiva completa que está asociada al concepto, con inclusión de todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados al mismo. Se construye a lo largo de los años, mediante experiencias de todo tipo, cambiando cuando el individuo se encuentra con nuevos estímulos y hechos.

De acuerdo a (Tall & Vinner, 1981) establecen la definición de un concepto o concepto definición como “las palabras usadas para especificarlo. Puede ser personal o formal, siendo esta última la que es aceptada por la comunidad matemática”**.**

En seguida se muestra la forma de relacionar los atributos del concepto Hershkowitz (1990), citado por (Barroso, 2000) las relaciones entre los atributos del concepto quedan reflejadas en el siguiente esquema. Señala que el prototipo es la base para el juicio prototípico. Para cada concepto, los individuos usan el ejemplo prototípico como un modelo en su juicio de otros casos.

Figura 5. Definición del concepto



Fuente: (Barroso, 2000)

2.2.1.2 Etapas implicadas en el pensamiento matemático avanzado.

Según (Azcarate, 1998), cuando se hace referencia a procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático avanzado se piensa en procesos matemáticos entre los que se destaca el de la abstracción que se puede definir como substitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente humana. La abstracción no es una característica de las matemáticas superiores, como tampoco lo son otros procesos cognitivos de componentes matemáticas tales como analizar, categorizar, conjeturar, definir, demostrar y formalizar. Pero es evidente que estos tres últimos adquieren mayor importancia en los cursos superiores. La progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, analizar y formalizar. Entre los procesos cognitivos de componente psicológica, además de abstraer, se puede conceptualizar, inducir y visualizar.

La diferencia entre generalizar y abstraer es la modificación de la naturaleza del concepto, es decir cuando un concepto se abstrae.

Según (Acero, 2008) los procesos o fases del pensamiento matemático avanzado son: conocimiento (calcular y reconocer), aplicación (representar y aplicar) y razonamiento (analizar, generalizar, abstraer e integrar):

Calcular es ejecutar un procedimiento algorítmico simple respecto a un tema específico.

Reconocer es identificar los significados relacionados con los conceptos.

Representar es generar diversas representaciones alternativas equivalentes de objetos matemáticos o de sus relaciones mutuas o de un conjunto de información.

Aplicar es generar y seleccionar una estrategia adecuada a partir de un modelo de procedimientos familiar para resolver problemas rutinarios.

Analizar es determinar las relaciones entre las variables pertinentes de un conjunto de información para resolver un problema, desarrollando inferencias válidas.

Generalizar es extender el alcance de los análisis a un campo más vasto manteniendo su naturaleza.

Abstraer es extender el alcance de los análisis campo más vasto con modificación de su naturaleza.

Integrar es combinar varios procedimientos o resultados para establecer nuevos resultados, resolver problemas en contextos no familiares o de complejidad superior a los tratados de modo regular, crear objetos.

Teniendo en cuenta la investigación de (Garbin, 2015) donde se cuestiona el siguiente interrogante. **¿Existe una clara división entre el PME y el PMA?**

En donde PME hace referencia al pensamiento matemático elemental y PMA pensamiento matemático avanzado. Donde su respuesta es la siguiente.

Por etapa elemental se entiende normalmente aquella que tiene lugar hasta Secundaria y la etapa avanzada aquella que está relacionada con la Enseñanza de la Matemática en la Universidad. Pero entre ambas se puede ubicar una etapa de transición, que aparece en diferentes momentos y distintas duraciones, según el País y a veces según el área de Matemática que se está enseñando. Delimitar ambas etapas y saber reconocer dicha transición ha sido de especial interés para para Tall quien afirma que el lugar donde el pensamiento matemático elemental (PME) se convierte en avanzado no se ha definido con precisión. Los procesos cognitivos que intervienen en la resolución de cuestiones que involucran conceptos matemáticos propios de la etapa avanzada, son procesos como el de representación, translación y abstracción entre otros. Otra distinción entre una etapa y otra, está en relación con la característica y el nivel de los estudiantes como, por ejemplo, los cursos preuniversitarios o universitarios. Al comparar el pensamiento avanzado con el elemental señalan:

Se enseña una mayor cantidad de conceptos en menor tiempo.

Se enseña con mayor frecuencia los contenidos del currículo de manera formal antes de que el estudiante se haya familiarizado con ellos de manera informal.

Se enseñan conceptos que históricamente evolucionaron muy lentamente y, al mismo tiempo, se exige el aprendizaje de demostraciones estándar y la realización de construcciones mentales abstractas.

Se enseña una mayor cantidad de conocimientos matemáticos y se exige la comunicación de los mismos y el aumento de estrategias de trabajo; se espera, además, que los estudiantes adquieran la habilidad de distinguir entre pensamiento matemático y metamatemático.

Se evalúa a los estudiantes en tiempo cortos y se reducen las actividades a tareas elementales; de esta manera se dificulta una evaluación que tome en cuenta la comprensión, el análisis y la síntesis, y no sólo la reproducción de conocimientos por parte del estudiante.

2.2.1.3 La prueba matemática.

Según (Tall, 1991) en términos matemáticos, se dice que una prueba o demostración es una serie de pasos lógicos, donde cada paso se sigue de manera lógica de los anteriores, encontrándose que el último escalón es justamente la afirmación que se quiere probar. Al enfrentarse a una demostración se deben entender todas las hipótesis así como el resultado al que se quiere llegar.

Según (Tall, 1991) para cualquier docente de matemáticas no solo es un reto la enseñanza de las matemáticas sino explicar de manera sencilla como abordar una prueba. Algunos textos simplemente no abordan la prueba como una herramienta en el desarrollo de su temática esto es lo que se conoce como matemática simple o elemental.

Tall en su escrito asume que para un dicente de matemáticas no solo es un reto la enseñanza de las matemáticas sino explicar de manera sencilla una prueba.

2.2.1.4 La matemática creativa

En cuanto (Sequera, 2007) cita en su Tesis Doctoral a Gontran (1991) quien expresa: En una época en la que los contenidos de las matemáticas elementales están siendo determinadas más claramente en los currículos y estándares nacionales, hay movimientos complementarios para animar a los jóvenes a jugar su propio papel en la generación del conocimiento a hacer conjeturas a esperar errores, a ver la necesidad de comprobaciones, a convencer a probar. En una sociedad que cambia rápidamente, una forma flexible de pensar, más allá de la mera aplicación de algoritmos, se está convirtiendo no solo en deseable sino cada vez más necesaria. La creatividad sólo en su más bajo nivel ya no es aceptable.

La creatividad está al alcance de todos; solo es cuestión de estimularla. No es un don especial, misterioso, que únicamente pertenece a unos pocos. Está al alcance de los que sientan la necesidad de probar, de explorar nuevas posibilidades, de dejar las cosas un poco mejor que antes

Los acertijos, la resolución de ejercicios, la matemática llevada al contexto actual, son claros ejemplos de matemática creativa, la persona que se enfrente a algunos de estos, tendrá que usar su ingenio y creatividad para resolverlos.

El autor (Sequera, 2007) destaca la idea de Gontran (1991) que los estudios sobre creatividad matemática suelen ser escasos. Al parecer muchos matemáticos no están interesados en el análisis de sus propios procedimientos de pensar y no describen como trabajan o como construyen sus teorías.

Poincaré, (1908), citado por (Sequera, 2007) sostenía que la invención matemática consiste precisamente en no construir combinaciones inútiles sino solas las que puedan ser útiles, que no son más que una ínfima minoría. Inventar es discernir, es elegir. Según esto aquellos elementos están armoniosamente dispuestos, de tal manera que el espíritu del matemático pueda sin esfuerzo abarcar todo el conjunto penetrando en los detalles. Afirma que las combinaciones útiles son precisamente las más bellas, las que pueden encantar más a esa sensibilidad especial que los matemáticos conocen pero que los profanos ignoran hasta el punto de sonreírse.

2.2.2 Historia y desarrollo del producto vectorial.

La historia de la operación producto vectorial se encuentra íntimamente unida al origen del algebra y la propia evolución natural de la teoría de números, en el mismo período de tiempo que llevó a la introducción del análisis vectorial. Entre los siglos XVI y XVIII tuvo lugar una auténtica revolución matemática, consistente en la puesta en común de la Geometría Clásica Euclídea y el álgebra aparecida en el Renacimiento. Mediante los métodos de la Geometría

Analítica, y del recién inventado Cálculo infinitesimal, se produjo una explosión de nuevos y poderosos resultados pero también al planteamiento de nuevas dificultades. Así, a finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX, quedaban ya pocos matemáticos atados a los métodos exclusivamente geométricos, usando preferentemente también ya los nuevos desarrollos algebraicos procedentes de la teoría de ecuaciones. Sin embargo, conviene destacar que esta curiosa operación, el producto vectorial, no apareció en primer lugar con los vectores, sino que fue más bien al revés, los vectores y las distintas operaciones entre ellos se crearon a partir de la solución algebraica de un problema concreto, que no es otro que la de la generalización de la noción de número complejo.

2.2.2.1 Génesis del producto de vectores.

2.2.2.1.1 William Rowan Hamilton.

Todo lo presentado en seguida se toma de (Sanchéz, 2011). Hamilton Nació en Dublín 4 de Agosto de 1805. El 7 de julio de 1823, el joven Hamilton ocupó el primer puesto entre 100 candidatos en los exámenes del Trinity College. Su fama le precedía, y como se esperaba, fue pronto una celebridad. En efecto, sus conocimientos humanistas y matemáticos cuando todavía no había obtenido su título excitaron la curiosidad de los círculos académicos en Inglaterra y Escocia, así como de Irlanda, llegando a hacer pensar a algunos que había aparecido un segundo Newton. A los 30 años desempeñó un cargo importante en la Asociación Británica para el Progreso de la Ciencia. La ceremonia ritual de su investidura se celebró en Dublín en presencia del por entonces Gobernador de Irlanda quien le armó caballero tocándole en ambos hombros con la espada del Estado y le dijo, “Arrodillaos, profesor Hamilton”, y luego añadió, “Alzaos, Sir William Rowan Hamilton”.

Ésta fue una de las pocas ocasiones en la que Hamilton no supo qué decir. A los 30 años fue nombrado presidente de la Real Academia Irlandesa, y a los 38 le fue asignada una pensión vitalicia de 200 libras al año, concedida por el gobierno británico, siendo entonces Primer Ministro del Reino Unido Sir Robert Peel, quien sentía poco afecto por Irlanda. Poco después de esto, Hamilton realizó su descubrimiento capital, los **cuaterniones.** Un honor que le produjo una de sus mayores satisfacciones ocurrió al final de sus días, cuando ya se hallaba en su lecho de muerte, y se trata de su elección como primer miembro extranjero de la Academia Nacional de Ciencias de los Estados Unidos, fundada durante la guerra civil. Este honor fue concedido en reconocimiento por su obra sobre los cuaterniones, que por alguna razón desconocida produjo entre los matemáticos americanos de aquel tiempo (sólo había uno o dos, siendo el principal Benjamin Peirce de Harvard) una conmoción más profunda que las restantes matemáticas A lo largo de toda su vida, Hamilton se dedicó a investigar en multitud de disciplinas. Cabe destacar que en el año 1857, vendió por 25 libras los derechos de un juego que denominó el "juego icosiano", o el "juego del viajero", que consistía en conectar mediante un camino simple los vértices de una figura formada por tres pentágonos concéntricos encajados unos dentro de los otros. Este juego serviría para desarrollar en mayor medida la denominada Teoría de Grafos. Lo denominó de este modo, porque en el siglo XVII era común en Europa proveer a los pueblos y ciudades de productos diversos de distinta necesidad.

El *agente viajero* o *agente de ventas* llevaba un catálogo consigo para realizar una ruta por diferentes lugares y recoger los pedidos además de para realizar la captación de nuevos clientes. Se procuraba que las rutas de estos agentes describieran un camino cuya longitud fuera la mínima posible con el fin de minimizar los gastos de establecimiento y transporte. Esta clase de recorridos se denominan en Teoría de Grafos *ciclos hamiltonianos* en su honor. El 5 de febrero de

1930, en un coloquio en Viena, el matemático Karl Menger planteó por primera vez el problema del agente viajero en lenguaje matemático formal. Menger afirmaba que el problema de determinar rutas de mínima distancia entre dos localidades era una herramienta para encontrar ciclos hamiltonianos de distancia mínima. En la última parte de su vida, Hamilton se dedicó casi exclusivamente a la elaboración de los cuaterniones (incluyendo sus aplicaciones a la dinámica, a la astronomía, y a la teoría de la luz) Hamilton comenzó a trabajar en lo que sería su última obra *Los Elementos de los Cuaterniones,* aunque desafortunadamente el mal estado de salud a finales de agosto le impidió finalizarla. Murió el 2 de septiembre.

2.2.2.1.2 Cuaterniones un antecesor del producto de vectores.

Los llamados cuaterniones fueron una teoría que surgió antes del producto punto y producto escalar, los cuaterniones son un conjunto de números de la forma:

$$a + bi + cj + dk$$

En el año 1833, Hamilton, presentó un importante artículo, en el que introducía un algebra formal de parejas de números reales, donde la multiplicación de parejas es:

$$(a, b).(\alpha, \beta) = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha)$$

Las reglas de combinación son las que se dan hoy en día para el sistema de los números complejos, en este caso se puede observar la versión definitiva del concepto de numero complejo como una par ordenado de números reales, Hamilton en este momento se dio cuenta que sus pares ordenados podían interpretarse como entidades dirigidas en el plano, de la misma manera intento extender la idea, a tres dimensiones pasando de los números complejos binarios $a + bi$ a las ternas de números ordenados $a + bi + cj$. La operación de sumar no producía ninguna dificultad, pero durante diez años lo tuvo desconcertado la multiplicación de n-uplas, para n mayor que dos. Hamilton cierto día de 1843, cuando se encontraba paseando con su esposa, tuvo una serie de inspiración, las dificultades, que se le habían presentado durante vario tiempo desaparecerían si usaba cuádruplas en vez de ternas y si abandonaba la propiedad conmutativa de la multiplicación, para cuádruplas de números $a + bi + cj + dk$ se debería tomar, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, Hamilton vería claramente, $i.j = k$, pero $j.i = -k$, análogamente, $j.k = i = -k.j$ y $k.i = j = -i.k$. asi para todo, las leyes que rigen las operaciones serían las del algebra usual. Hamilton siempre considero, el descubrimiento de los cuaterniones como su obra más importante.

Los cuaterniones de Hamilton tienen muchas propiedades, nuevas y muy interesantes, tanto así que llegaron a encantar al mismo Hamilton, por lo que Hamilton pasa la mayor parte de su tiempo. Dichas propiedades, propiedades con cierto grado de abstracción, son de gran importancia para el producto escalar y vectorial que se conocen hoy en día, estas propiedades, son:

Los cuaterniones son pares de números complejos, asi:

$$Q = a + bi + cj + dk = a + bi + cj + dij$$

$$= (a + bi) + (c + di)j$$

$$= z_1 + z_2 j$$

Todo Cuaternion tiene un conjugado y un inverso para el producto. En efecto, se define el cuaternion conjugado a

$$Q = a + bi + cj + dk$$

Denotado por:

$$Q^* = a - bi - cj - dk$$

El producto de Q y Q^* es el cuadrado del módulo del cuaternión es decir

$$N(Q) = |Q|^2 = QQ^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

Entonces el inverso multiplicativo de un cuaternion no nulo,

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{QQ^*}$$

El producto de cuaterniones, aunque es no conmutativo, es asociativo.

Los cuaterniones con las operaciones suma definida por componentes de la forma usual y las reglas para el producto (1) tiene un algebra normada con división pero no es un cuerpo como los números reales o complejos.

Cualquier cuaternión se puede dividir en la suma de una parte escalar, también llamada pura, $S(Q) = V(Q)$ de la siguiente forma:

$$Q = S(Q) = V(Q)$$

$$S(Q) = a$$

$$V(Q) = bi + cj + dk$$

Donde Hamilton llamo a la parte imaginaria, vector, porque en latín significa “dirigir, direccionar” La parte imaginaria era la teoría de tripletes que buscaba para el espacio, pero no contaba con que existiría la parte escalar, Esto trajo consigo algunos cuestionamientos y debates para la interpretación de estos nuevos cuaterniones, precisamente porque parece que permiten, sumar puntos y vectores. En el momento de dar una interpretación a estos nuevos cuaterniones y llevando a cancelar esa parte escalar que en su momento no era de mucha utilidad, entonces el producto de dos vectores imaginarios o queda:

$$q_1q_2 = (x_1i + y_1j + z_1k)(x_2i + y_2j + z_2k)$$

$$q_1q_2 = (y_1z_2 - y_1z_2)i + (z_1x_2 - x_1z_2)j - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$$

Se puede observar en la expresión anterior, las componentes del producto escalar como del producto vectorial.

2.2.3 Libros de texto

Según una investigación realizada por la señora (Celis, 2011), comenta en su escrito lo siguiente: “La gran mayoría de los debates e investigaciones que se han generado tanto a nivel nacional como internacional acerca del libro de texto coinciden en definirlo como un factor fundamental en la formación de los sujetos y, por tanto, como un elemento indispensable para la transmisión del conocimiento. ¿Qué se entiende por un libro de texto? Sin el ánimo de realizar una definición de carácter rígido, conviene señalar que existe una multiplicidad de respuestas: una materialidad, una propuesta curricular, un portador de significados, una publicación periódica de alta circulación, un mediador entre maestro-alumno, entre otras. Si se hace referencia al lenguaje cotidiano de la escuela es posible encontrar una gran variedad de denominaciones respecto al libro de texto. Así son utilizados términos como: libro escolar, manual escolar, libro guía, texto escolar, etc. haciéndose un uso indistinto en su definición.

(Celis, 2011) en su artículo cita a autores como Jonhsen (1996) en un estudio sobre las investigaciones en torno al libro de texto destaca que cuando estas hacen referencia a su definición, generalmente involucran desde un sentido amplio a uno estrecho dependiendo de las características de la investigación a realizarse. Así señala, “la definición del libro de texto puede ser tan general como para incluir otros libros hechos y publicados para propósitos educativos, o incluso cualquier libro utilizado en el aula”. Tal definición alude a un texto que, indistintamente para lo que fue creado, se utiliza en un medio escolar. Sin embargo, es preciso apuntar que definir al libro de texto obliga a delimitarlo conceptualmente con respecto a otros géneros literarios diferentes. Así mismo (Celis, 2011) resalta lo siguiente: Al respecto Stray (1991) elabora una descripción que ayuda a acotar con mayor certeza la definición sobre el libro de texto, partiendo de una interesante distinción entre libros de texto y libros escolares. Para dicho autor “El primer término puede quedar reservado para libros escritos, diseñados y producidos específicamente para su uso en la enseñanza, mientras que el segundo se utilizaría para libros empleados en la enseñanza, pero menos íntimamente ligados a las secuencias pedagógicas.

Se sigue en este texto la diferenciación descrita por este autor estadounidense, pues ayuda a delimitar con mayor certidumbre el concepto de libro de texto que interesa destacar en este análisis y que tiene que ver inicialmente con el texto que se elabora específicamente para ser la guía dentro de un espacio educativo. Al respecto, se ha de considerar que dentro del ámbito escolar, el libro de texto cumple con al menos tres funciones que delimitan su definición. En primer término es una evidencia clara y contundente del currículo escolar; segundo, es también un instrumento de apoyo en el proceso enseñanza aprendizaje; y tercero, proporciona información y cumple con una función ideológica. Dichas funciones adjetivan su definición como un recurso educativo básico para la formación de las personas, como un apoyo indispensable para maestros y alumnos, y como un reflejo de la enseñanza. XI Congreso Nacional de Investigación Educativa / 13. Política y Gestión / Ponencia 3 Al respecto, Escolano (2000), citado por (Celis, 2011) señala que el libro de texto encierra básicamente tres perspectivas, la primera alude al libro de texto como objetivación cultural del currículo en todas sus dimensiones"; la segunda como constructor de nuevas concepciones y prácticas sobre su uso en la educación y, finalmente, la que concibe al libro de texto como aquel que objetiva las relaciones entre discursos y representaciones sociales.

Por su parte. Choppin, (1998) citado por (Celis, 2011), desde la órbita francesa insiste en la complejidad que tiene el concepto de libro de texto por su variedad de funciones: a) como herramienta pedagógica porque facilita el aprendizaje; b) como soporte de la verdad que la sociedad cree necesario transmitir a las jóvenes generaciones, por lo que cambia considerablemente según lugar, época y régimen político; y c) como medio de comunicación "muy potente" que tiende a uniformar el discurso que transmite.

Por todas estas características, el libro de texto participa activamente en el proceso de socialización, de aculturación y de adoctrinamiento de las jóvenes generaciones. Pero también se señala que los libros de texto son un producto material "fabricado, difundido y consumido". Desde dicha perspectiva se pone de relieve un factor adicional respecto al libro de texto. Se trata de la intencionalidad con la que se elabora y produce un libro de texto. Es decir, al tratar de definirlo considera, por lo menos, tres cosas: las partes que intervienen en su proceso de elaboración; las distintas motivaciones con las que se conciben y finalmente la diversidad de grupos y personas a los que está dirigido.

2.2.3.1 Importancia de los libros de texto en la enseñanza.

En el momento de elegir un libro de texto o varios como guía para orientar una clase, se debe tener en cuenta diversos factores, se debe tener cuidado, en el momento en el que se quiere trasmitir a los estudiantes el contenido, o los conceptos de algún tema específico a tratar, observando el nivel en el que aparece los temas expuestos en los diferentes libros, es factible pensar que para ver un resultado final satisfactorio en un aula de clase, cierto porcentaje se debe al libro guía que se está usando, por ejemplo a un estudiante de matemáticas puras en la materia algebra lineal, no le serviría mucho un libro de algebra lineal para ingenieros, puede que los temas presentados en ambos libros sean los mismos, pero cada uno de ellos tiene un enfoque diferente, al estudiante de matemáticas le interesa el origen, el ¿Por qué?, la demostración, la aplicación, a un estudiante de ingeniería lo anteriormente mencionado para algunos tal vez sea de su interés pero para la gran mayoría les interesa la aplicación de las fórmulas de las ecuaciones ya existentes, el donde aplico, el cómo aplico lo ya establecido, retomando el ejemplo de las dos carreras matemáticas vs ingeniería en el área algebra lineal, si tenemos el mismo libro para ambas carreras se evidenciaran los diferentes comportamientos de los estudiantes frente a esta materia.

Los ejercicios de un libro de matemáticas tendrán un nivel más alto que un libro de algebra lineal para ingenieros, en el libro para matemáticos en la sección de ejercicios existe una probabilidad alta en la que para la resolución de dichos ejercicios necesiten conceptos rigurosos matemáticos vistos con anterioridad, conceptos que tal vez un estudiante de ingeniería no haya visto, porque no es de su competencia, y lo mismo sucedería si el libro guía para las dos carreras fuese libro para ingenieros, que sucede con los estudiantes de matemáticas, tal vez pierdan la esencia y el verdadero enfoque que se debería llevar en dicha materia. Según (Cabero, 1995)de la diversidad de medios didácticos y audiovisuales que la sociedad tecnológica contemporánea le ofrece al profesor para desarrollar su actividad profesional de la enseñanza de un medio destaca sin lugar a dudas por su uso y presencia sobre los demás: el Libro de texto.

El autor (Cabero, 1995) cita a (Gimeno y Fernández, 1980; De Pablos, 1988; Junta de Andalucía, 1989; Barquín, 1991; Ortega y Velasco. 1991, y Conea y Area, 1992), donde expresan que los estudios e investigaciones que se han preocupado por conocer qué medios preferentemente utilizan los profesores y qué funciones les asignan, ejemplifican claramente lo que estamos comentando, y lo ejemplifican con una cierta persistencia en el tiempo Los libros de texto son los mediadores curriculares básicos que se utilizan en las escuelas. Esta utilización no significa que exista una uniformidad en las opiniones sobre sus potencialidades para la educación y la instrucción, frente a esto se encuentran diferentes posturas que van desde los que niegan su utilidad y proclaman lo pernicioso del modelo educativo que originan debido a su tradicionalismo, hasta los que de poca utilidad que el currículum debe de estar dirigido por ellos y que la función básica del profesor consiste en seguir su estructura y pasos de actuación sugeridos, y desde los que les confieren un carácter básico para la mejora e implementación de las reformas escolares asegurando la igualdad de oportunidades y facilitando la tarea del estudiante, hasta los que los perciben como instrumentos tradicionales que impiden el avance y desarrollo de innovaciones educativas.

El libro de texto es uno de los recursos didácticos más usados en el aula de clase, cabe destacar algunas ventajas que tiene el uso de los libros de texto como lo manifiesta (Calderero, 2002)“Presentan la información de forma organizada y sistemática, concreta un modo determinado de desarrollar los contenidos, evitando la ambigüedad y la dispersión que podría producirse mediante el uso exclusivo de la transmisión oral, ahorra tiempo a los alumnos y profesores, al poder dedicarse en las clases a la asimilación de los contenidos, al desarrollo de destrezas y a la asunción de valores pudiéndose prescindir de la necesidad de dedicar tiempo a procedimientos de transmisión de contenidos y/o de enunciados de las diferentes actividades prácticas” pero también así mismo existen algunos inconvenientes presentados en el momento tal como lo resalta el autor anteriormente mencionado, “Peligro de ceñirse excesivamente al libro de texto, perdiendo o disminuyendo, de esta forma, los aspectos idiosincráticos de alumnos y profesores centrándose en exceso en los aspectos epistemológicos con posible deterioro de la adquisición, por parte del alumno, de determinadas estrategias de aprendizaje, a riesgo de que los contenidos queden obsoletos, debido fundamentalmente a algunos factores:

El largo tiempo que transcurre desde que el autor inicia la redacción hasta que, después de haber recorrido el imprescindible camino de acabar la redacción.

Hacer las correcciones, ser aceptada la posibilidad de editarlo, hacer una primera prueba de imprenta, corregir las pruebas, obtener la aprobación de las autoridades educativas, imprimirlo definitivamente, presentarlo en el mercado, efectuar la distribución comercial e implantarlo en las aulas.

El tiempo de vigencia mínima que, en algunos países, establecen los organismos oficiales".

Según Maldonado, Rodriguez y Tuyud, (2007) citado por (Hernández, 2013) los libros de texto son usados, en su mayoría como fuente de información para preparar las clases, estos autores plantean que el profesor busca (en el libro de texto) características que beneficien su proceso de enseñanza, así no sean conscientes de los aspectos cognitivos, epistemológicos, didácticos, y socioculturales de los mismos, en la mayoría de ocasiones se busca en un libro de texto con un discurso matemático escolar adecuado en todos sus aspectos el cual llene todas las necesidades tanto de un docente como de un estudiante.

Según una publicación realizada por el Periódico (El Tiempo, 2015) afirma que "Los estudiantes que tienen y usan textos escolares rinden significativamente más que los que no los tienen", argumentando este comentario con un estudio realizado por La Cámara Colombiana del Libro, donde asegura "que de los 500 colegios con mejores resultados en las Pruebas Saber 11, el 81 por ciento usa texto escolar, mientras que de los 500 peores colegios, sólo el dos por ciento lo utilizan". Es un claro y real ejemplo donde se comprueba que la utilización de un libro o varios libros de texto como guía para una materia, es importante y su uso se verá reflejado en las diferentes pruebas presentadas, que maravilla sería que todos los planteles educativos de Colombia contaran con excelente material bibliográfico, así permitiendo resultados exitosos y educación de mejor calidad.

Teniendo en cuenta las etapas del pensamiento matemático avanzado, PME (Pensamiento matemático elemental), PMA (Pensamiento matemático avanzado), para algunos investigadores ha sido una tarea compleja descubrir el momento en el que pasa de la etapa elemental a la etapa avanzada, sin embargo en esta sección se dará a conocer como en algunos libros de texto enfocan, en este caso el concepto de producto punto, teniendo como referente la teoría del pensamiento matemático avanzado.

Según (Tall, 1991) hablando de algebra lineal, en la transición del espacio vectorial concreto R^3 a la noción de un espacio vectorial abstracto, las relaciones entre los vectores se convierten en el centro de atención, mientras que sus la realización como triples de números se deja caer. Para hacer esta transición, es necesario ser capaz de concebir el objeto "vector" puramente en términos de sus relaciones con otros o diferentes objetos (vectores o escalares), y aceptar que el objeto en sí no es más especificado por cualquier propiedad intrínseca. Teniendo en cuenta únicamente estas relaciones, se concluye de los mismos que serán generalmente válidas, independientemente de las propiedades intrínsecas de los vectores. De esta manera, gran parte del poder de las matemáticas deriva desde la abstracción.

El proceso de abstracción está así íntimamente ligado a la generalización. Uno de los principales incentivos para la abstracción es la naturaleza general de los resultados que se pueden obtener. El incentivo es el logro de la síntesis, a donde queremos llegar.

La abstracción es probable que implique una reconstrucción mental. En la Transición, por ejemplo, de números reales a complejos, alcanzamos la generalización al no insistir más por encargo pero seguimos trabajando con objetos que están representados explícitamente usando números que podemos agregar y multiplicar de una manera familiar.

Capitulo III

3. Diseño metodológico

3.1 Diseño de investigación

La investigación realizada en este trabajo es descriptiva que según (Bisquerra, 1989) en clasificación de los métodos de investigación de la universidad Nacional de Barcelona no se manipula ninguna variable. Se limita a observar y a describir fenómenos. Se incluyen dentro de la investigación descriptiva, estudios correlaciónales, estudios de seguimiento, análisis de tendencias, series temporales, estudios etnográficos, investigación histórica, etc. La metodología cualitativa es fundamentalmente descriptiva. Sin embargo, la investigación descriptiva puede utilizar metodología cuantitativa o cualitativa.

A partir de esto se seleccionó por una metodología cualitativa que según (Bisquerra, 1989), en clasificación de los métodos de investigación de la universidad Nacional de Barcelona: CEAC es una investigación "desde dentro" que supone una preponderancia de lo individual y subjetivo. Es una investigación interpretativa, referida al individuo, a lo particular, En este caso concreto se refiere a los procesos del Pensamiento Matemático Avanzado.

3.2 Objeto de estudio

En este trabajo se consideraron cuatro libros para este trabajo detallados en la sección instrumento, los lineamientos curriculares son los que describen la metodología de la enseñanza y educación, los textos fueron: (Apóstol, 1999), (Grossman, 2012), (Kolman, 2006), (Lay, 2007).

3.3 Instrumento

El autor (Acero, 2008) diseño una matriz a la cual llamó matriz de demandas cognitivas, fue tomada como referencia para este trabajo adaptada a los libros de textos antes mencionados, la matriz que aparece en la siguiente figura fue tomada del trabajo de (Acero, 2008) sin ninguna modificación, los símbolos ID que aparecen es identificación de cada una de las demandas cognitivas, siendo estas los procesos del pensamiento matemático avanzado.

Figura 6. Demandas cognitivas

Categoría	ID	Dimensión	Definición
Conocimiento	D1	Calcular	Ejecutar un procedimiento algorítmico simple y cerrado (v.g. derivar, resolver una ecuación).
	D2	Reconocer	Reconocer los significados de los conceptos relacionados en el enunciado, identificar representaciones equivalentes, recuperar la información relevante.
Aplicación	D3	Representar	Generar diversas representaciones alternativas equivalentes de objetos matemáticos o de sus relaciones mutuas o de un conjunto de información.
	D4	Aplicar	Generar y seleccionar una estrategia adecuada a partir de un modelo de procedimientos familiar para resolver problemas rutinarios.
Razonamiento	D5	Analizar	Determinar las relaciones entre las variables pertinentes de un conjunto de información para resolver un problema, desarrollando inferencias válidas.
	D6	Generalizar	Extender el alcance de los análisis a un campo más vasto manteniendo su naturaleza.
	D7	Abstraer	Extender el alcance de los análisis a un campo más vasto con alguna modificación de su naturaleza.
	D8	Integrar	Combinar varios procedimientos o resultados para establecer nuevos resultados, resolver problemas en contextos no familiares o de complejidad superior a los tratados de modo regular, crear objetos pertinentes.

Fuente: (Acero, 2008)

La matriz demanda cognitiva está compuesta por cinco filas, en la primera se encuentran las diferentes demandas cognitivas y los textos, en las demás filas se muestra la presencia, en los diferentes textos, en las demás filas se muestra la presencia, en los diferentes textos de los procesos del Pensamiento Matemático Avanzado.

3.4 Procedimiento

Para tener un análisis más claro de cómo se presenta y cómo afecta a la enseñanza y el aprendizaje, la ausencia y el modo de presentar los libros de texto los procesos del pensamiento matemático avanzado. Primero se relacionaron mediante la matriz de demanda cognitivas la respectiva presencia y luego se estudiaran proceso por proceso para identificar el modo en que son presentados según las consideraciones de (Tall, 1991).

Capitulo IV

4. Resultados

4.1 Análisis de resultados

Teniendo en cuenta la matriz de demanda cognitiva se procede a analizar los libros anteriormente mencionados donde se identifican en la siguiente figura.

Tabla 2. Identificación de libros de texto

ID	Texto
T1	Tom M. Apostol, Calculus, volumen 1
T2	Stanley Grossman
T3	Bernard Kolman
T4	Algebra lineal y sus aplicaciones. (David C. Lay)

Fuente: (Acero, 2008)

4.2 Análisis del contenido de los libros de texto

Mediante la matriz de demandas cognitivas se quiso identificar los procesos del Pensamiento Matemático Avanzado, en los libros de texto para el tema estudiado en este caso "producto punto".

Después se muestra la matriz elaborada para el caso concreto el concepto de producto punto, teniendo como referente la matriz de demandas cognitivas de (Acero, 2008).

Tabla 3. Matriz de producto punto

TEXTO	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8
T1								
T2								
T3								
T4								

Fuente: (Acero, 2008)

La tabla 3 muestra la matriz demanda cognitiva para el concepto definición del objeto matemático, producto punto se puede evidenciar que los libros (Apóstol, 1999) y (Grossman, 2012), presentan en su totalidad para este tema específico, producto punto, los procesos implicados en el Pensamiento Matemático Avanzado, (Ejecuta un procedimiento algorítmico simple y cerrado, reconoce los significados de los conceptos relacionados en el enunciado, genera diversas representaciones alternativas equivalentes de objetos matemáticos, genera y selecciona una estrategia adecuada a partir de un modelo de procedimientos familiar para resolver problemas rutinarios, determina las relaciones entre las variables pertinentes de un conjunto de información para resolver un problema, extiende el alcance de los análisis a un campo más vasto manteniendo su naturaleza, combina varios procedimientos o resultados para establecer nuevos resultados, resuelve problemas en contexto no familiares.) si se sigue observando el cuadro indica que el texto de Bernard (Kolman, 2006) carece en su concepto y lanzamiento del tema de producto punto, en los dos siguientes procesos del Pensamiento Matemático avanzado, en la abstracción e integración, Según Tall la falta de abstracción en matemáticas determina que no se desarrolla la habilidad de hacer consciente abstracciones de situaciones matemáticas, por otro lado en el texto

Algebra lineal y sus aplicaciones carece de los tres últimos procesos generalizar, abstraer e integrar, este libro hace todo lo contrario a lo que se define generalizar, el autor inmediatamente lanza la definición con un campo extendido, no parte del orden que se debería, en este caso partir de lo particular a lo general.

4.3 Análisis de los libros de texto.

4.3.1 Análisis de contenido del libro; TOM M. Apóstol, Calculus, volumen 1.

En este libro se muestra la definición del objeto matemático de estudio (producto escalar o producto punto), además plantea la metodología de cómo se debe enseñar el concepto matemático.

Para abordar cualquier tema en matemáticas teniendo en cuenta el proceso de enseñanza aprendizaje, se deben abordar tres grandes ejes los cuales son: conocimientos básicos, proceso y contexto, según el texto de Tom (Apóstol, 1999) muy bien estructurado que tiene que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático, se puede observar que en después de dar la definición matemática, da una explicación con palabras , lo cual puede ser de más comprensión para un estudiante que no había tenido contacto, con algún tema relacionado con vectores, producto de vectores, etc.

Teniendo en cuenta la matriz de demandas cognitivas, figura 6 y relacionándola con el texto en estudio, se observa lo siguiente:

4.3.1.1 Dimensión: Calcular y reconocer.

El ejercicio número 1. Dice "Sean $A = (1,2,3,4), B = (-1, 2, -3,0)$ $y\ C = (0,1,0,1)$ de v_4". Calcular cada uno de los siguientes productos:

(a) $A.B$; (b) $B.C$; (c) $A\ .C$ (d) $A.(B + C)$; (e) $(A - B)$.C

En su solución de este ejercicio el estudiante está ejecutando un procedimiento simple, cumpliendo con dos de los procesos del pensamiento matemático avanzado, que es calcular y reconocer los significados de los conceptos.

Sin embargo cabe resalta que el texto carece de ejemplos, para tener una mejor visión del tema.

4.3.1.2 Dimensión: Representar y aplicar.

Figura 7. Definición del producto escalar

Producto escalar

DEFINICIÓN. *Si* $A = (a_1, \ldots, a_n)$ y $B = (b_1, \ldots, b_n)$ *son dos vectores de* V_n, *su producto escalar se representa con* $A \cdot B$ *y se define con la igualdad*

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k .$$

Así pues, para calcular $A \cdot B$ multiplicamos los componentes correspondientes de A y B y sumamos luego todos los productos. Esta multiplicación tiene las propiedades algebraicas siguientes.

Fuente: (Apóstol, 1999)

Figura 6 definición del producto escalar, libro Tom (Apóstol, 1999), calculus, volumen 1. Analizando las demandas cognitivas representar y aplicar, se observa que Apóstol, toma dos alternativas para definir el objeto matemático en estudio, “producto escalar” una de ellas es la definición rigurosa matemática, que en principio para un estudiante recién graduado del colegio, y que hasta ahora este asimilando el cambio de colegio a universidad, esta definición podría presentar un nivel de dificultad, por tanto Apóstol escribe su otra definición, en palabras, quedando así muy explícito lo que se pretende hacer, teniendo aquí representada una estrategia para la enseñanza de la definición del objeto matemático.

4.3.1.3 Dimensión: Analizar

Figura 8. Propiedades del producto punto

TEOREMA 12.2. *Para todos los vectores A, B, C de V_n y todos los escalares c, se tienen las propiedades siguientes:*

(a) $A \cdot B = B \cdot A$ (*ley conmutativa*),

(b) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (*ley distributiva*),

(c) $c(A \cdot B) = (cA) \cdot B = A \cdot (cB)$ (*homogeneidad*),

(d) $A \cdot A > 0$ *si* $A \neq O$ (*positividad*),

(e) $A \cdot A = 0$ *si* $A = O$.

Demostración. Las tres primeras propiedades son fáciles consecuencias de la definición y se dejan como ejercicios. Para demostrar las dos últimas, usamos la relación $A \cdot A = \sum a_k^2$. Puesto que cada término es no negativo, la suma es no negativa. Además, la suma es cero si y sólo si cada término de la suma es cero y esto tan sólo puede ocurrir si $A = O$.

Fuente: (Apóstol, 1999)

En la figura 8 propiedades del producto punto libro Tom (Apóstol, 1999), Calculus, volumen 1**.** En el teorema 12.2 como lo llama Apóstol, existe un razonamiento en que resuelve su demostración de este mismo, relacionando y usando la definición del objeto matemático, cumpliendo así la dimensión de analizar.

4.3.1.4 Dimensión: Generalizar, abstraer e integrar.

Figura 9. Desigualdad triangular

TEOREMA 12.5. DESIGUALDAD TRIANGULAR. *Si A y B son vectores de V_n, tenemos*

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| .$$

Además, el signo igual es válido si y sólo si uno de los vectores es el producto del otro por un escalar.

Demostración. Para evitar las raíces cuadradas, escribimos la desigualdad triangular en la forma equivalente

$$\|A + B\|^2 \leq (\|A\| + \|B\|)^2 . \tag{12.5}$$

El primer miembro de (12.5) es

$$\|A + B\|^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A \cdot A + 2A \cdot B + B \cdot B = \|A\|^2 + 2A \cdot B + \|B\|^2 ,$$

mientras que el segundo miembro es

$$(\|A\| + \|B\|)^2 = \|A\|^2 + 2\|A\| \; \|B\| + \|B\|^2 .$$

Fuente: (Apóstol, 1999)

Figura 9 desigualdad triangular, libro (Apóstol, 1999), calculus, volumen 1. Según (Tall, 1991). En la enseñanza de la matemática avanzada es de suma importancia la abstracción, en un tema, porque se desarrolla la habilidad de hacer conscientes las formas y representaciones implícitas.

En este teorema 12.5 se observa la generalización, trabajando en un espacio de n dimensiones, el cual ayuda al estudiante, para realizar un problema en un espacio de cualquier dimensión, además en la demostración de la desigualdad triangular combina algunos procedimientos y usa resultados ya obtenidos para llegar a la solución, es decir existe la integración, un proceso del pensamiento matemático avanzado.

4.3.2 Análisis de contenido del libro; Stanley Grossman.

4.3.2.1 Dimensión: Calcular reconocer y aplicar.

En la presentación del tema del libro de (Grossman, 2012) se puede observar en la figura 8.4, que inicia el tema con un ejemplo de aplicación, para (Tall, 1991) el concepto de un tema, debe ir en paralelo con su respectivo ejemplo, es decir el proceso de pensamiento matemático avanzado Reconocer se encuentra muy bien estructurado en el texto.

Figura 10. Ejemplo de aplicación

EJEMPLO 2.2.1 Producto de un vector de demanda y un vector de precios

Suponga que un fabricante produce cuatro artículos. Su demanda está dada por el **vector de demanda** $\mathbf{d} = (30 \;\; 20 \;\; 40 \;\; 10)$ (una matriz de 1×4). El precio por unidad que recibe el fabricante

2.2 Productos vectorial y matricial 63

por los artículos está dado por el **vector de precios** $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \$20 \\ \$15 \\ \$18 \\ \$40 \end{pmatrix}$ (una matriz de 4×1). Si se cumple la demanda, ¿cuánto dinero recibirá el fabricante?

Solución La demanda del primer artículo es 30, y el fabricante recibe \$20 por cada artículo vendido. Por consiguiente recibe $(30)(20) = \$600$ de las ventas del primer artículo. Si se sigue este razonamiento, se ve que la cantidad total de dinero que recibe es

$$(30)(20) + (20)(15) + (40)(18) + (10)(40) = 600 + 300 + 720 + 400 = \$2\,020$$

Este resultado se escribe como

$$\begin{pmatrix} 30 & 20 & 40 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 18 \\ 40 \end{pmatrix} = 2\,020$$

Fuente: (Grossman, 2012)

4.3.2.2 Dimensión: Analizar y Generalizar

El autor (Grossman, 2012) en su texto hace una generalización del producto escalar, igual que en (Apóstol, 1999), parte de un espacio de n- dimensiones, como se puede observar en la figura 8.5, haciendo más adelante ejemplos con dimensiones particulares, y generaliza con las propiedades del objeto matemático en estudio de la siguiente manera, en la página 247, de la sección 4.2 (El producto escalar y las proyecciones en R^2), en este capítulo muestra los muchos temas relacionados con la generalización del producto escalar.

Figura 11. Definición producto escalar

Definición 2.2.1

Producto escalar

Sean $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ dos vectores. Entonces el **producto escalar** de **a** y **b** denotado por $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, está dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \qquad \textbf{(2.2.1)}$$

Debido a la notación en (2.2.1), el producto escalar se llama con frecuencia **producto punto** o **producto interno** de los vectores. Observe que el producto escalar de dos vectores de dimensión n es un escalar (es decir, es un número).

Fuente: (Grossman, 2012)

4.3.2.3 Dimensión: Abstracción e integración.

En el teorema 4.2.2 (Figura 12) se evidencia las dimensiones abstracción e integración, se tiene la combinación de resultados anteriormente vistos para un estudiante que este cursando la materia de algebra lineal, como es la ley de cosenos, para así establecer un nuevo resultado, en este caso la demostración de dicho teorema. En este momento cabe resaltar lo que propone (Tall, 1991), primero se dan ejemplos de aplicación y luego mediante actividades se desarrolla proceso cognitivo en el estudiante para resolver problemas de aplicación, se está utilizando una metodología deductiva.

Figura 12. Teorema del texto

Teorema 4.2.2

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores diferentes de cero. Si φ es el ángulo entre ellos, entonces

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}} \tag{4.2.3}$$

Demostración

La ley de los cosenos (vea el problema 3.4.10, página 223) establece que en el triángulo de la figura 4.12

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

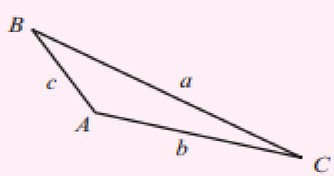


Figura 4.12
Triángulo con lados a, b y c.

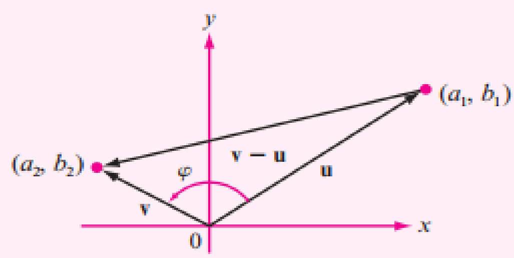


Figura 4.13
Triángulo con lados $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ y $|\mathbf{v}-\mathbf{u}|$.

Ahora se colocan las representaciones de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ con los puntos iniciales en el origen de manera que $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$ (vea la figura 4.13). Entonces de la ley de los cosenos, $|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2 - 2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\varphi$. Pero

$$\begin{aligned}|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2 &\overset{\text{de (4.2.2)}}{=} (\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \overset{\text{teorema 2.2.1 iii), página 64}}{=} \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\\ &= |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + |\mathbf{u}|^2\end{aligned}$$

Así, después de restar $|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2$ en ambos lados de la igualdad, se obtiene $-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\varphi$, y el teorema queda demostrado.

Fuente: (Grossman, 2012)

4.3.3. Análisis de contenido del libro; Algebra lineal, Bernard Kolman

4.3.3.1 Dimensión: Calcular, reconocer y aplicar

En principio (Kolman, 2006) presenta su definición de producto punto o producto interior de una manera general, después enriquece la definición con un ejemplo concreto de vectores de 4 dimensiones, ejecutando así un procedimiento, un algoritmo para la solución de este, también a su vez, está reconociendo el significado de los concepto relacionado en este tema concreto, por tanto la dimensión calcular y reconocer está presente.

En el ejemplo 3 se puede evidenciar un problema de aplicación en el contexto real, llamado cálculo de la calificación promedio de un curso, es así como se muestra la dimensión cognitiva aplicar, los estudiante se enfrentan a la resolución de un problema real, es mucho más emotivo e interesante para un aprendiz de cualquier conocimiento aprender explorando vivencias reales, es aquí con este ejemplo donde se encuentra presente la dimensión aplicar.

4.3.3.2 Dimensión: Analizar y generalizar.

El tema en estudio sigue representado en este libro en el capítulo 4, sección, 4.1 anunciado, vectores en el plano, determinando las variables necesarias para la resolución de ejercicios, como es el caso del ejemplo 13, 14, 15 utilizando aquí dos de las dimensiones que para (Tall, 1991) son relevantes en el proceso de enseñanza aprendizaje analizar y generalizar. En este texto se evidencia la carencia de la dimensión abstracción, por lo tanto no se encuentra la dimensión integrar.

Figura 13. Aplicación de producto escalar, texto

EJEMPLO 3 (**Aplicación: cálculo de la calificación promedio de un curso**) Suponga que un profesor utiliza cuatro notas para determinar la calificación promedio que obtiene un estudiante en un curso: cuestionarios, dos exámenes de una hora y un examen final. Cada una de estas notas tiene una ponderación de 10, 30, 30 y 30%, respectivamente. Si las calificaciones de un estudiante son, en cada rubro, 78, 84, 62 y 85, podemos calcular el promedio del curso haciendo

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.30 \\ 0.30 \\ 0.30 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 78 \\ 84 \\ 62 \\ 85 \end{bmatrix}$$

y calculando

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{g} = (0.10)(78) + (0.30)(84) + (0.30)(62) + (0.30)(85) = 77.1.$$

Así, el promedio del curso del estudiante es 77.1.

Fuente: (Kolman, 2006)

En este texto de (Lay, 2007) podemos observar que igual que en los anteriores empieza con la definición general del producto interior, en el capítulo 6.1 describe las características del producto interior, además enuncia el producto interno como la operación de producto de matrices, es así que el estudiante en el momento de abordar el tema, debe tener conocimiento previo de matrices, debe conocer algunos conceptos de como la transpuesta de una matriz, se muestra la representación del objeto matemático en estudio mediante otro objeto presentado en este libro con anterioridad, aquí está presente las dimensiones reconocer, calcular identifica representaciones importantes, utilizando información relevante. En el existe carencia de generalizar, abstraer e integrar.

Figura 14. Definición de producto interior, texto

El producto interior

Si **u** y **v** son vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces **u** y **v** se consideran como matrices de $n \times 1$. La transpuesta $\mathbf{u}^T$ es una matriz de $1 \times n$ y el producto matricial $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ es una matriz de 1×1, la cual se escribe como un solo número real (un escalar) sin corchetes. Al número $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ se le llama **producto interior** de **u** y **v**, y se escribe a menudo como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Este producto interior, mencionado en los ejercicios de la sección 2.1, también se conoce como **producto punto**. Si

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

entonces el producto interior de **u** y **v** es

$$\boxed{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n}$$

Fuente: **(Lay, 2007)**

Conclusiones

En los diferentes libros de texto, se muestra algunas carencias de los procesos del pensamiento matemático avanzado, haciendo así más complejo para un estudiante algún tema en estudio.

El libro Tom (Apóstol, 1999) muy bien estructurado, cabe mencionar que está diseñado para un estudiante de una ciencia pura, para un estudiante de ingeniería hace falta más problemas de aplicación, enfocados a contexto real.

Cuando los diferentes procesos no se encuentran plenamente o correctamente desarrollados no existe una transición de la matemática elemental a la matemática avanzada (Tall, 1991).

En los cuatro textos estudiados, existe la definición formal del concepto de producto punto o producto escalar, aunque algunos no presentan el cambio de naturaleza del concepto, este cambio se podría efectuar, por la existencia de la definición formal.

La aplicación de los procesos del pensamiento matemático avanzado en un aula de clase, sería una estrategia que ayudaría de manera relevante en el proceso de enseñanza –aprendizaje, porque se evidencia el paso de pensamiento elemental a pensamiento avanzado

Recomendaciones

Los libros de texto son herramientas fundamentales en el momento de enseñanza-aprendizaje, es de suma importancia la aplicación de los procesos del pensamiento, matemático avanzado, para enseñar cualquier concepto de matemáticas.

Cuando un docente, desee abordar un objeto matemático para socializarlo a los estudiantes en sus clases, para que el proceso enseñanza aprendizaje tenga buenos resultados, deberá introducir ejemplos en paralelo con su definición y problemas de aplicación donde esté involucrado contexto real, para que así el estudiante se enfrente a problemas reales.

Investigaciones futuras

El objeto matemático en estudio de este trabajo fue el concepto definición de producto escalar, una futura investigación apoyada de este trabajo seria, analizar el concepto imagen, basado en el pensamiento matemático avanzado.

Se puede elaborar un módulo compuesto de los procesos del pensamiento matemático avanzado teniendo como referente los textos mencionados en este trabajo

Bibliografía

Acero, F. (2008). *Estructura del libro de texto universitario , un análisis de texto de álgebra líneal.* Maestría en Educación , Universidad de San Andrés , Buenos Aires - Argentina . Recuperado el 20 de Marzo de 2017 , de http://udesa.edu.ar/sites/ default/ files/resumenacero.pdf

Apóstol, T. M. (1999). *Calculus* (Segunda ed., Vol. 1). México: Reverté.

Azcarate, C. (1998). Acerca de los procesos del pensamiento matemático avanzado. *Gaceta de la Real Socierdad Matemática, Española*. Obtenido de https://dialnet.unirioja.es/ servlet/ articulo;jsessionid=5DFE702634810321C8AAD9611985C59C.dialnet01?codigo=1963630

Barroso, R. (2000). El proceso de definir en matemáticas un caso. El triangulo. Obtenido de file:///C:/Users/USUARIO/Downloads/21672-21596-1-PB%20(3).pdf

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa: Guia práctica.* Barcelona: CEAC.

C Lay, D. (2007). *Algebra lineal y sus aplicaciones* (Tercera ed.). México: Pearson.

Cabero, J. (1995). Medios audiovisuales y nuevas tecnologias de la información y comunicacióp n. *Universidad de Sevilla*.

Calderero, J. (2002). *Estudios de libros de texto de ciencias de la naturaleza, mediante el análisis cuantitativo, basado en la teoría de grafos.* Universidad complutense de Madrid, Madrid - España.

Celis, Z. (2011). Los libors gratuitos de México, vigencia y perspectivas. *XI congreso nacional de investigación educativa.* México.

El Tiempo. (19 de Noviembre de 2015). *Desempeño académico mejora sustancialmente con el uso del texto escolar*. Obtenido de https://www.uninorte.edu.co/ web/observaeduca/ noticias/-/asset_publisher/3Lkb/content/noticia-desempeno-academico-mejora-sustancial mente-con-uso-del-texto-escolar/pop_up?_101_INSTANCE_3Lkb_viewMode =print&_ 101_INSTANCE_3Lkb_languageId=es_ES

Garbin, S. (2015). Investigar en pensamiento matemático avanzado. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/8361/1/Capítulo_10_Investigar_en_PMA_SG.pdf

Grossman, S. (2012). *Algebra lineal* (Séptima ed.). México: McGraw Hill.

Hernández, M. (2013). *Tratamiento didáctico de temas específicos en textos de geometría descriptiva.* Mestría en educación, Universidad de Pamplona, Pamplona- Colombia.

Kolman, B. (2006). *Algebra lineal* (Octava ed.). México: Pearson.

Polya, G. (1945). *Propuesta de un manual para resolver problemas* . Obtenido de http://inst-mat.utalca.cl/~cdelpino/tesis1/capitulos/04-cap2.pdf

Sanchéz, J. (2011). Historias de Matématicas Hamilton y el Descubrimiento de los cuaterniones. *Pensamiento Matemático*. Obtenido de http://www2.caminos.upm.es/ Departamentos/ matematicas/revistapm/revista_impresa/numero_1/hamilton_y_el_descubrimiento_de_los_cuaterniones.pdf

Sequera, C. (2007). *Creatividad y desarrollo profesional docente en matemáticas para la educación primaria.* Tesis doctoral, Universidad de Barcelona, Barcelona- España. Obtenido de http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/1317/01.ECSG_PARTE_1.pdf

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematics Thinking* (Vol. 11). New York: Published in Grouws. Recuperado el 15 de Marzo de 2017, de https://pendidikanmatematikausn. files.wordpress.com/2015/11/mathematics_education_library_d-_tall-advanced_ mathematical_thinking_mathematics_education_lib.pdf

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concepto imagen y concepto definición en matemáticas con referencia particular en limite y continuidad. *Springer, 12*. Obtenido de http://citations.springer.com/item?doi=10.1007/BF00305619