

Serie estocástica de Taylor-Itô y métodos numéricos para ecuaciones diferenciales estocásticas

Stochastic Taylor expansion (Taylor-Itô) and numerical methods for stochastic differential equations

Oscar Alberto Rodríguez Melendez^{1,a}

Resumen. En este manuscrito se revisa la versión estocástica de la serie de Taylor. Esta versión se obtiene mediante el cálculo de Itô. Usando la serie de Taylor-Itô se deducen algunos métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas. Finalmente se presenta una aplicación a un modelo de finanzas.

Palabras claves: Taylor-Itô, métodos numéricos para EDE's, Euler-Maruyama, Milstein, CEV, polinomios de Hermite.

Abstract. In this manuscript, the stochastic version of the Taylor series is reviewed. It is obtained by using the Itô calculus. Using the obtained Taylor-Itô series some numerical methods for solving stochastic differential equations are derived. Finally an application is presented in which we consider a model in mathematical finance.

Keywords: Taylor-Itô, stochastic differential equations, Euler-Maruyama, Milstein, Hermite polynomials.

Mathematics Subject Classification: 53C21, 53C42.

Recibido: mayo de 2016

Aceptado: junio de 2016

1. Introducción

Las *Ecuaciones Diferenciales Deterministas* (EDD's) modelan muchos fenómenos interesantes en la práctica, pero éstas no son adecuadas para modelos con parámetros o resultados aleatorios. En muchos casos para obtener modelos realistas es necesario introducir aleatoriedad a los modelos. Se obtienen las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE). Al introducir la parte aleatoria el cálculo clásico no es adecuado, por lo que se hace necesario usar el cálculo de Itô para comprender el sentido de los modelos y los métodos numéricos relacionados. Esto trae consigo particularidades a la hora de diseñar, implementar

¹Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

^aosarodriguezme@unal.edu.co

y analizar métodos numéricos adecuados. En este manuscrito se presenta una introducción al cálculo estocástico unidimensional, seguido de la aplicación del cálculo de Itô a la serie de Taylor para escribir su versión estocástica. De una forma análoga al caso determinista se deducen métodos numéricos para encontrar una aproximación a la solución de las EDE's.

En particular se muestra como a partir de la serie de Taylor-Itô, se pueden deducir los métodos numéricos Euler-Maruyama, Milstein y una variante de estos métodos para una EDE que satisfaga una condición especial.

El análisis mostrado puede servir como punto de partida para una mejor comprensión de estos métodos y para diseñar nuevos esquemas de aproximación. Finalmente se presenta una aplicación práctica de los métodos relacionados a un modelo de finanzas cuantitativas, el modelo CEV. En particular se implementa en MatLab las soluciones numéricas al modelo usando los metodos de Euler-Maruyama y Milstein.

2. Introducción a las EDE's Lineales

Se denota por (Ω, F) con $\Omega \neq \emptyset$ y F una σ -álgebra, un espacio medible. Una filtración en (Ω, F) es una familia no decreciente $\{F_t : t \geq 0\}$ de sub- σ -álgebras de F . Una función $X : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, que es medible para todo $t \in [0, \infty)$ fijo, es llamada proceso estocástico y es denotada $X_t(\omega) = X(\omega, t)$.

En la siguiente definición Nor denota la distribución Normal o también llamada distribución gaussiana.

Definición 2.1. El proceso $B_t : t \in [0, \infty)$ sobre (Ω, F, P) se dice que es un Movimiento Browniano (MB) si:

- i. $B_0 = 0$, es decir $P\{\{w : B_0(w) \neq 0\}\} = 0$.
- ii. $B_t \sim \text{Nor}(0, t)$. Si $s < t$ se tiene $B_t - B_s \sim \text{Nor}(0, t - s)$ o de forma alternativa $B_t - B_s \sim \sqrt{t - s}\text{Nor}(0, 1)$.
- iii. $\{B_t\}_{t \geq 0}$ tiene incrementos independientes y estacionarios.
- iv. B_t es continua en casi toda parte.

En la Figura 1 se presenta una simulación del MB.

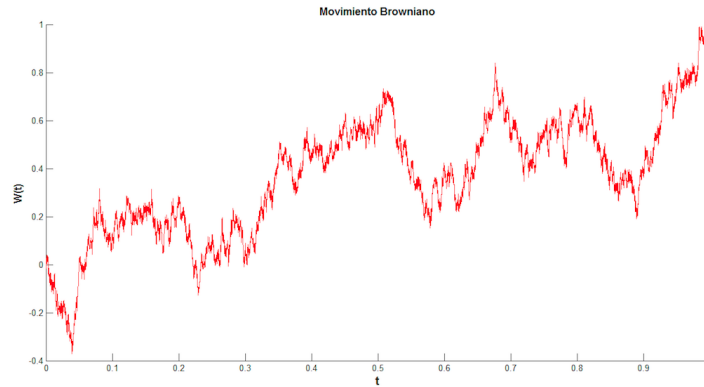


Figura 1: Simulación del MB en un intervalo de tiempo $[0,1]$

Suponga que el precio de un activo X_t varía con una distribución normal y sus incrementos son proporcionales a los incrementos de las fluctuaciones del mercado, es decir, se modela su variación como,

$$dX_t = \sigma dB_t \quad \text{donde } \sigma \in (0, \infty).$$

Las fluctuaciones del mercado son modeladas como la variación en el tiempo de un MB que denotamos por B_t . Cuando σ es constante la solución de esta ecuación viene dada por,

$$X_t = X_0 + \sigma B_t.$$

Por otro lado si fuese tomado el precio relativo proporcional a las fluctuaciones del mercado, se tendría, el modelo

$$\frac{dX_t}{X_t} = \sigma dB_t,$$

que es equivalente a

$$dX_t = \sigma X_t dB_t.$$

Integrando la ecuación anterior deberíamos obtener

$$X_t = X_0 + \sigma \int_0^t X_s dB_s. \quad (1)$$

Pero ¿cómo se le puede dar un sentido a (1) y calcular el término $\int_0^t X_s dB_s$? Para responder a este interrogante se debe introducir el cálculo de Itô. Con cálculo de Itô se puede dar sentido a la expresión (1).

2.1. La integral de Itô

Como fue observado anteriormente se quiere realizar cálculos con términos de la forma

$$\int_0^t \sigma(t, X_t) dB_t. \quad (2)$$

Para esto vamos a recordar rápidamente la definición de la integral de Itô en un intervalo de tiempo $[0, t]$. El lector interesado en más detalles puede consultar [4]. Considere $\sigma_t = \sigma(t, X_t)$ un proceso simple, donde $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es medible con respecto a la σ -álgebra de Borel. Se asume que X_t es medible y es adaptado con respecto a una filtración $F = \{F_t\}$ generada por el MB. De esta forma σ_t es también adaptado a la filtración F .

Sea $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = t\}$ una partición de $[0, t]$, definimos la integral de Itô, $I(\sigma)$ por,

$$I(\sigma) := \int_0^t \sigma(s) dB_s \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \sigma(t_{k-1})(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}). \quad (3)$$

El límite anterior es en el sentido de las funciones con cuadrado integrable [4, Cap. 2]. Esta integral cumple las propiedades de linealidad usuales de la integral.

Sea X_t un proceso de Itô que es dado por

$$\frac{dX_t}{dt} = \alpha(t, X_t) + \sigma(t, X_t) dW_t,$$

donde formalmente $W_t = \frac{dB_t}{dt}$. Esta última igualdad debe ser interpretada de una forma adecuada (ruido blanco) pues los caminos del MB no son diferenciables. La fórmula anterior puede ser interpretada usando notación integral,

$$X_t - X_0 = \int_0^t \alpha(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s,$$

o equivalentemente,

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s. \quad (4)$$

Donde la última integral es la integral de Itô (3). En notación diferencial se puede escribir,

$$dX_t = \alpha(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t. \quad (5)$$

2.2. Fórmula de Itô Unidimensional

Sea X_t un proceso de Itô [4] que viene dado por,

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s. \quad (6)$$

Sea $g(t, x) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$. Definimos $Y_t = g(t, X_t)$. Tenemos que Y_t es un proceso de Itô y se tiene,

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial X}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2. \quad (7)$$

Donde $(dX_t)^2$ es calculado con las siguientes reglas:

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, \quad dB_t \cdot dB_t = dt.$$

También se puede escribir ésta fórmula en términos del MB sustituyendo la ecuación (7) y simplificando,

$$dY_t = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \alpha \frac{\partial g}{\partial X} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} \right) (t, X_t)dt + \sigma \frac{\partial g}{\partial X}(t, X_t)dB_t, \quad (8)$$

donde $\alpha = \alpha(t, X_t)$ y $\sigma = \sigma(t, X_t)$.

Teorema 2.2 (Integral por partes). *Suponga que $f(s, w)$ es un proceso de Itô continuo y de variación acotada con respecto a $s \in [0, t]$ para todo $w \in F$, entonces,*

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_s df_s. \quad (9)$$

Demostración. Considere el proceso

$$g(t, X_t) = f(t)X_t, \quad (10)$$

donde $X_t = B_t$. Así, por la fórmula de Itô (8), se obtiene

$$dg(t) = df(t)B_t + f(t)dB_t.$$

En representación integral, se observa que

$$g(t) = \int_0^t df(s)B_s + \int_0^t f(s)dB_s + g(0),$$

donde $g(0) = f(0)B_0 = 0$ pues $B_0 = 0$. Sustituyendo este valor y $g(t)$ en (10) se obtiene

$$f(t)B_t = \int_0^t B_s df(s) + \int_0^t f(s)dB_s.$$

Así, se puede reorganizar para obtener

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_s df(s).$$

□

Ahora se presenta algunos ejemplos de aplicación de las fórmulas de Itô y de integración por partes.

Ejemplo 2.3. Se calculará la integral

$$I = \int_0^t B_s dB_s.$$

Sea $Y_t = g(t, X_t) = X_t^2$ e $dX_t = udt + vdB_t$. Aplicando la fórmula de Itô (7), se obtiene

$$dY_t = dg(t, X_t) = 0dt + 2X_t dX_t + (dX_t)^2 = 2X_t dX_t + 1dt.$$

Tomando $u = 0$ y $v = 1$, se tiene

$$dY_t = 2X_t dB_t + 1dt.$$

En forma integral,

$$Y_t = \int_0^t 2X_s dB_s + \int_0^t ds.$$

Sustituyendo $g(t, X_t) = X_t^2$

$$X_t^2 = 2 \int_0^t X_s dB_s + t.$$

Resolviendo la segunda integral,

$$\frac{1}{2}(X_t^2 - t) = \int_0^t X_s dB_s.$$

Para $dX_t = dB_t$, $X_t = B_t$, se obtiene

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t). \quad (11)$$

Ejemplo 2.4. Probar que

$$\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s ds. \quad (12)$$

Sea $Y_t = g(t, X_t) = \frac{1}{3}X_t^3$, con $X_t = B_t$. Se tiene $\frac{\partial g}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial g}{\partial X} = X^2$ y $\frac{\partial^2 g}{\partial X^2} = 2X$. Sustituyendo en (8) se obtiene

$$dY_t = X_t^2 dX_t + X_t dt.$$

En forma integral, se escribe

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t X_s^2 dX_s + \int_0^t X_s ds.$$

Sustituyendo Y_t y Y_0 vemos que

$$\frac{1}{3}B_t^3 = \frac{1}{3}\underbrace{B_0^3}_0 + \int_0^t B_s^2 dB_s + \int_0^t B_s ds.$$

Así, reorganizando llegamos a que

$$\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s ds. \quad (13)$$

Obteniendo el resultado buscado.

Los anteriores ejemplos serán de ayuda para calcular algunos términos de la expansión en serie de Taylor-Itô que es la versión estocástica de la serie de Taylor.

3. Expansión estocástica de Taylor (Taylor-Itô)

Considere el proceso $\{X_t\}_{t \geq 0}$ de forma integral,

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha(X_s) ds + \int_0^t \beta(X_s) dB_s. \quad (14)$$

Sea f una función dos veces diferenciable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Por la formula de Itô (8), se obtiene

$$df(X_t) = \left(\alpha(X_t) \frac{\partial}{\partial X} f(X_t) + \frac{1}{2} \beta(X_t)^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} f(X_t) \right) dt + \beta(X_t) \frac{\partial}{\partial X} f(X_t) dB_t.$$

En forma integral, escribimos,

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t \left(\alpha(X_s) \frac{\partial}{\partial X} f(X_s) + \frac{1}{2} \beta(X_s)^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} f(X_s) \right) ds \\ &\quad + \int_0^t \beta(X_s) \frac{\partial}{\partial X} f(X_s) dB_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t L^0 f(X_s) ds + \int_0^t L^1 f(X_s) dB_s. \end{aligned} \quad (15)$$

Donde definimos los operadores

$$L^0 = \alpha \frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \quad \text{y} \quad L^1 = \beta \frac{\partial}{\partial X}.$$

Es claro que si $f(X_t) = X_t$ entonces (15) es de la forma (14). Note que se puede aplicar (15) a los procesos $\alpha(X_t)$ y $\beta(X_t)$, si en (14) sustituimos $\alpha(X_t)$ y $\beta(X_t)$

(asumiendo que son dos veces diferenciables), se obtiene para el proceso X_t en (14) la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t \left(\alpha(X_0) + \int_0^s L^0 \alpha(X_{s_1}) ds_1 + \int_0^s L^1 \alpha(X_{s_1}) dB_{s_1} \right) ds \\ &\quad + \int_0^t \left(\beta(X_0) + \int_0^s L^0 \beta(X_{s_1}) ds_1 + \int_0^s L^1 \beta(X_{s_1}) dB_{s_1} \right) dB_{s_1}. \\ &= X_0 + \alpha(X_0) \int_0^t ds + \beta(X_0) \int_0^t dB_s + R. \end{aligned} \quad (16)$$

Donde el resto R es definido como sigue,

$$\begin{aligned} R &= \int_0^t \int_0^s L^0 \alpha(X_{s_1}) ds_1 ds + \int_0^t \int_0^s L^1 \alpha(X_{s_1}) dB_{s_1} ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^s L^0 \beta(X_{s_1}) ds_1 dB_s + \int_0^t \int_0^s L^1 \beta(X_{s_1}) dB_{s_1} dB_s. \end{aligned}$$

Esta expansión en serie de Taylor es una representación truncada no trivial, es decir en forma integral con sumas finitas. Otra forma de escribir (16) es,

$$X_t = X_0 + \alpha(X_0)I_{(0)}(t) + \beta(X_0)I_{(1)}(t) + R, \quad (17)$$

donde introducimos,

$$I_{(0)}(t) = \int_0^t ds, \quad e \quad I_{(1)}(t) = \int_0^t dB_s. \quad (18)$$

Si se continúa con la expansión de R , se tiene la siguiente expansión,

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \alpha(X_0) \int_0^t ds + \int_0^t \int_0^s \left(\alpha(X_{s_1}) \alpha'(X_{s_1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \beta^2(X_{s_1}) \alpha^{(2)}(X_{s_1}) \right) ds_1 ds + \int_0^t \int_0^s \beta(X_{s_1}) \alpha'(X_{s_1}) dB_{s_1} ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^s \alpha(X_{s_1}) \beta'(X_{s_1}) ds_1 dB_s + \int_0^t \int_0^s \beta(X_{s_1}) \beta'(X_{s_1}) dB_{s_1} dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^s \beta^2(X_{s_1}) \beta^{(2)}(X_{s_1}) ds_1 dB_s + \beta(X_0) \int_0^t dB_s. \end{aligned}$$

Sustituyendo los términos anteriores por (18) y agrupando, se obtiene

$$\begin{aligned}
X_t = & X_0 + \alpha(X_0)I_0 + \beta(X_0)I_{(0)} + \int_0^t \int_0^s \left(\alpha(X_{s_1})\alpha^{(1)}(X_{s_1}) \right. \\
& + \frac{1}{2}\beta^2(X_{s_1})\alpha^{(2)}(X_{s_1}) \left. \right) ds_1 ds + \int_0^t \int_0^s \beta(X_{s_1})\alpha^{(1)}(X_{s_1}) dB_{s_1} ds \\
& + \int_0^t \int_0^s \left(\alpha(X_{s_1})\beta^{(1)}(X_{s_1}) + \frac{1}{2}\beta^2(X_{s_1})\beta^{(2)}(X_{s_1}) \right) ds_1 dB_s \\
& + \int_0^t \int_0^s \beta(X_{s_1})\beta^{(1)}(X_{s_1}) dB_{s_1} dB_s.
\end{aligned}$$

Por la expansión (15),

$$\begin{aligned}
X_t = & X_0 + \alpha(X_0)I_0 + \beta(X_0)I_{(0)} + \int_0^t \int_0^s \left(\alpha(X_0)\alpha^{(1)}(X_0) \right. \\
& + \int_0^{s_1} L^0(\alpha(X_{s_2})\alpha^{(1)}(X_{s_2})) ds_2 + \int_0^{s_1} L^1(\alpha(X_{s_2})\alpha^{(1)}(X_{s_2})) dB_{s_2} \left. \right) ds_1 ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^s \left(\beta^2(X_0)\alpha^{(2)}(X_0) + \int_0^{s_1} L^0(\beta^2(X_{s_2})\alpha^{(2)}(X_{s_2})) ds_2 \right. \\
& + \int_0^{s_1} L^1(\beta^2(X_{s_2})\alpha^{(2)}(X_{s_2})) dB_{s_2} \left. \right) ds_1 ds + \int_0^t \int_0^s \left(\beta(X_0)\alpha^{(1)}(X_0) \right. \\
& + \int_0^{s_1} L^0(\beta(X_{s_2})\alpha^{(1)}(X_{s_2})) ds_2 + \int_0^{s_1} L^1(\beta(X_{s_2})\alpha^{(1)}(X_{s_2})) dB_{s_2} \left. \right) dB_{s_1} ds \\
& + \int_0^t \int_0^s \left(\alpha(X_0)\beta^{(1)}(X_0) + \int_0^{s_1} L^0(\alpha(X_{s_2})\beta^{(1)}(X_{s_2})) ds_2 \right. \\
& + \int_0^{s_1} L^1(\alpha(X_{s_2})\beta^{(1)}(X_{s_2})) dB_{s_2} \left. \right) ds_1 dB_s + \int_0^t \int_0^s \left(\beta(X_0)\beta^{(1)}(X_0) \right. \\
& + \int_0^{s_1} L^0(\beta(X_{s_2})\beta^{(1)}(X_{s_2})) ds_2 + \int_0^{s_1} L^1(\beta(X_{s_2})\beta^{(1)}(X_{s_2})) dB_{s_2} \left. \right) dB_{s_1} dB_s \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^s \left(\beta^2(X_0)\beta^{(2)}(X_0) + \int_0^{s_1} L^0(\beta^2(X_{s_2})\beta^{(2)}(X_{s_2})) ds_2 \right. \\
& + \int_0^{s_1} L^1(\beta^2(X_{s_2})\beta^{(2)}(X_{s_2})) dB_{s_2} \left. \right) ds_1 dB_s.
\end{aligned}$$

Desarrollando los términos anteriores y agrupando términos se verifica que en el resto R incluye integrales triples y que en (17) aparecen más términos constantes como se podrá observar a continuación,

$$\begin{aligned}
X_t = & X_0 + \alpha(x_0)I_{(0)} + \beta(X_0)I_{(1)} + \left(\alpha(X_0)\alpha^{(1)}(X_0) \right. \\
& + \frac{1}{2}\beta^2(X_0)\alpha^{(2)}(X_0) \left. \right) \int_0^t \int_0^s ds_1 ds + \beta(X_0)\alpha^{(1)}(X_0) \int_0^t \int_0^s dB_{s_1} ds \\
& + \left(\alpha(X_0)\beta^{(1)}(X_0) + \frac{1}{2}\beta^2(X_0)\beta^{(2)}(X_0) \right) \int_0^t \int_0^s ds_1 dB_s \\
& + \beta(X_0)\beta^{(1)}(X_0) \int_0^t \int_0^s dB_{s_1} dB_s \\
& + \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} \left(\alpha(X_{s_2}) \left(\alpha(X_{s_2})\alpha^{(2)}(X_{s_2}) + \beta(X_{s_2})\beta^{(1)}(X_{s_2})\alpha^{(2)}(X_{s_2}) \right. \right. \\
& + \frac{1}{2}\beta^2(X_{s_2})\alpha^{(3)}(X_{s_2}) + \left. \left. \left(\alpha^{(1)}(X_{s_2}) \right)^2 \right) + \frac{1}{2}\beta^2(X_{s_2}) \left(\alpha(X_{s_2})\alpha^{(3)}(X_{s_2}) \right. \right. \\
& + \left. \left. \left(\left(\beta^{(1)}(X_{s_2}) \right)^2 + \beta(X_{s_2})\beta^{(2)}(X_{s_2}) \right) \alpha^{(2)}(X_{s_2}) \right. \right. \\
& + \left. \left. 2\beta(X_{s_2})\beta^{(1)}(X_{s_2})\alpha^{(3)}(X_{s_2}) + 3\alpha^{(1)}(X_{s_2})\alpha^{(2)}(X_{s_2}) \right) \right. \\
& + \left. \frac{1}{4}\beta^4(X_{s_2})\alpha^{(4)}(X_{s_2}) \right) ds_2 ds_1 ds \\
& + \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} \left(\alpha(X_{s_2}) \left(\alpha(X_{s_2})\beta^{(2)}(X_{s_2}) + \beta(X_{s_2})\beta^{(1)}(X_{s_2})\beta^{(2)}(X_{s_2}) \right. \right. \\
& + \alpha^{(1)}(X_{s_2})\beta^{(1)}(X_{s_2}) + \frac{1}{2}\beta^2(X_{s_2})\beta^{(3)}(X_{s_2}) \left. \right) + \\
& \frac{1}{2}\beta^2(X_{s_2}) \left(\alpha^{(2)}(X_{s_2})\beta^{(1)}(X_{s_2}) + 2\alpha^{(1)}(X_{s_2})\beta^{(2)}(X_{s_2}) \right. \\
& + \alpha(X_{s_2})\beta^{(3)}(X_{s_2}) + \left. \left. \left(\left(\beta^{(1)}(X_{s_2}) \right)^2 + \beta(X_{s_2})\beta^{(2)}(X_{s_2}) \right) \beta^{(2)}(X_{s_2}) \right. \right. \\
& + \left. \left. 2\beta(X_{s_2})\beta^{(1)}(X_{s_2})\beta^{(3)}(X_{s_2}) + \frac{1}{2}\beta^2(X_{s_2})\beta^{(4)}(X_{s_2}) \right) \right) ds_2 ds_1 dB_s \\
& + \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} \left(\alpha(X_{s_2}) \left(\beta^{(1)}(X_{s_2})\alpha^{(1)}(X_{s_2}) + \beta(X_{s_2})\alpha^{(2)}(X_{s_2}) \right) \right. \\
& + \frac{1}{2}\beta^2(X_{s_2}) \left(\beta^{(2)}(X_{s_2})\alpha^{(1)}(X_{s_2}) + 2\beta^{(1)}(X_{s_2})\alpha^{(2)}(X_{s_2}) \right. \\
& + \left. \left. \beta(X_{s_2})\alpha^{(3)}(X_{s_2}) \right) \right) ds_2 dB_{s_1} ds \\
& + \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} \left(\alpha(X_{s_2}) \left(\left(\beta^{(1)}(X_{s_2}) \right)^2 + \beta(X_{s_2})\beta^{(2)}(X_{s_2}) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \beta^2(X_{s_2}) \left(\beta^{(2)}(X_{s_2}) \beta^{(1)}(X_{s_2}) + 2\beta^{(1)}(X_{s_2}) \beta^{(2)}(X_{s_2}) \right. \\
 & \left. + \beta(X_{s_2}) \beta^{(3)}(X_{s_2}) \right) ds_2 dB_{s_1} dB_s \\
 & + \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} \left(\beta(X_{s_2}) \left(\alpha(X_{s_2}) \alpha^{(2)}(X_{s_2}) + \left(\alpha^{(1)}(X_{s_2}) \right)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \beta(X_{s_2}) \beta^{(1)}(X_{s_2}) \alpha^{(2)}(X_{s_2}) + \frac{1}{2} \beta^2(X_{s_2}) \alpha^{(3)}(X_{s_2}) \right) \right) dB_{s_2} ds_1 ds \\
 & + \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} \left(\beta(X_{s_2}) \left(\alpha(X_{s_2}) \beta^{(2)}(X_{s_2}) + \alpha^{(1)}(X_{s_2}) \beta^{(1)}(X_{s_2}) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \beta(X_{s_2}) \beta^{(1)}(X_{s_2}) \beta^{(2)}(X_{s_2}) + \frac{1}{2} \beta^2(X_{s_2}) \beta^{(3)}(X_{s_2}) \right) \right) dB_{s_2} ds_1 dB_s \\
 & + \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} \left(\beta(X_{s_2}) (\alpha^{(1)}(X_{s_2}) \beta^{(1)}(X_{s_2}) + \alpha^{(2)}(X_{s_2}) \beta(X_{s_2})) \right) dB_{s_2} dB_{s_1} ds \\
 & + \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} \left(\beta(X_{s_2}) ((\beta^{(1)}(X_{s_2}))^2 + \beta(X_{s_2}) \beta^{(2)}(X_{s_2})) \right) dB_{s_2} dB_{s_1} dB_s.
 \end{aligned}$$

Lo anterior puede ser escrito de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
 X_t & = X_0 + \alpha(X_0)I_{(0)} + \beta(X_0)I_{(1)} + \beta(X_0)\beta^{(1)}(X_0)I_{(1,1)} \\
 & + \beta(X_0)\alpha^{(1)}(X_0)I_{(1,0)} + \left(\alpha(X_0)\beta^{(1)}(X_0) + \frac{1}{2}\beta^2(X_0)\beta^{(2)}(X_0) \right) I_{(0,1)} \quad (19) \\
 & + \left(\alpha(X_0)\alpha^{(1)}(X_0) + \frac{1}{2}\beta^2(X_0)\alpha^{(2)}(X_0) \right) I_{(0,0)} + R.
 \end{aligned}$$

Note que se introducen los términos $I_{(1,1)}$ y $I_{(0,0)}$, para continuar con este procedimiento y de una forma general se define,

$$I_{(i_1, i_2, \dots, i_n)}(t) := \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} dB_{s_n}^{(i_1)} \dots dB_{s_2}^{(i_{n-1})} dB_{s_1}^{(i_n)}, \quad (20)$$

para $i_j \in \mathbb{N}$. Si $i_k = 0$ para algún k entonces $dB_s^{(k)} = ds$ y si $i_j = m$ donde $m \neq 0$ de lo anterior se obtiene $I_{(m)} = \int_0^t dB_s^m$.

A continuación se introduce los *polinomios de Hermite* que serán de ayuda para calcular algunas integrales estocásticas en la expansión en series de Taylor-Itô. Se define

$$H_n(t, x) = \frac{(-t)^n}{n!} \exp\left(\frac{x^2}{2t}\right) \frac{\partial^n}{\partial x^n} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right), \quad n \geq 0. \quad (21)$$

Considere $H_n(t, B_t)$ y usando (14) para obtener,

$$dH_n = \left(\frac{\partial H_n}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial H_n}{\partial x} dB_t = H_{n-1} dB_t, \quad (22)$$

donde $H_0 = 1$, y así $dH_1 = dB_t$. Entonces se observa que existe una relación directa entre las integrales múltiples Brownianas (20) y los polinomios de Hermite (21). Para aclarar esta relación se presenta la siguiente proposición.

Proposición 3.1. Sean $B_{s_1}, B_{s_2}, \dots, B_{s_n}$ movimientos Brownianos y H_n el n -ésimo polinomio de Hermite. Entonces, se tiene la siguiente igualdad,

$$H_n(t, B_t) = \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} dB_{s_n} \dots dB_{s_2} dB_{s_1}. \quad (23)$$

Demostración. Se procederá a demostrar el teorema por inducción. Suponga que (23) es válido para $n = k$ y se quiere probar que (23) es válido para $n = k + 1$. Por hipótesis de inducción se tiene la siguiente igualdad,

$$H_k(t, B_t) = I_{(\mathbf{1}_k)}.$$

Donde $\mathbf{1}_k$ representa un vector de unos en \mathbb{R}^k . Usando (22) se tiene que para $n = k + 1$,

$$dH_{k+1}(t, B_t) = H_k dB_t = I_{(\mathbf{1}_k)} dB_t.$$

Integrando en un intervalo $[0, t]$ en ambos lados de la igualdad se obtiene,

$$\begin{aligned} \int_0^t dH_{k+1}(s, B_s) &= \int_0^t I_{(\mathbf{1}_k)} dB_s. \\ H_{k+1}(t, B_t) - H_{k+1}(0, B_0) &= \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_k} dB_{s_{k+1}} \dots dB_{s_2} dB_{s_1}. \\ H_{k+1}(t, B_t) &= \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_k} dB_{s_{k+1}} \dots dB_{s_2} dB_{s_1}. \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra la proposición. \square

Con el resultado anterior se puede presentar una simplificación de (20),

$$I_{(i_1, i_2, \dots, i_n)}(t) = \int_0^s I_{(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})}(t) dB_{s_n}^{(i_n)}. \quad (24)$$

Se presentan algunos ejemplos que ayuden a la comprensión de lo expuesto [5]. Por ejemplo, para $n = 2$, por (21), $H_2(t, x) = \frac{1}{2}(x^2 - t)$. Por (22), $dH_2(t, B_t) = H_1(t, B_t) dB_t = B_t dB_t$, de donde se tiene que $H_2(t, B_s) = \int_0^t B_s dB_s$. Igualando los resultados anteriores para $x = B_t$ se tiene,

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t). \quad (25)$$

Esto coincide con (11). Siguiendo con el mismo razonamiento para $n = 3$, se puede escribir,

$$dH_3(t, B_t) = H_2(t, B_t)dB_t = \frac{1}{2} (B_t^2 - t) dB_t = \frac{1}{2} B_t^2 dB_t - \frac{1}{2} t dB_t.$$

Por lo tanto

$$H_3(t, B_t) = \frac{1}{2} \int_0^t B_s^2 dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t s dB_s. \quad (26)$$

Por (21), se tiene que

$$H_3 = \frac{1}{3!} (B_t^3 - 3tB_t) = \frac{1}{6} B_t^3 - \frac{1}{2} t B_t. \quad (27)$$

Igualando (26) y (27) se obtiene la igualdad,

$$\int_0^t B_s^2 dB_s - \int_0^t s dB_s = \frac{1}{3} B_t^3 - t B_t.$$

Pero, por (13), se tiene que,

$$\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3} B_t^3 - \int_0^t B_s ds.$$

Y por tanto, igualando los dos resultados anteriores se obtiene,

$$\int_0^t s dB_s = t B_t - \int_0^t B_s ds. \quad (28)$$

Análogamente, para $n = 4$ se puede demostrar que,

$$\int_0^t s B_s dB_s = -\frac{t^2}{4} + \frac{1}{2} t B_t^2 - \frac{1}{2} \int_0^t B_s^2 ds, \quad (29)$$

y

$$\int_0^t B_s^3 dB_s = \frac{1}{4} B_t^4 - \frac{3}{2} \int_0^t B_s^2 ds. \quad (30)$$

Con estos resultados (23) y (25) se puede escribir,

$$I_{(1,1)} = \int_0^s I_{(1)} dB_s = \frac{1}{2} (B_t^2 - t) = \frac{1}{2} (I_{(1)}^2 - t). \quad (31)$$

En particular se tiene las siguientes igualdades,

$$\begin{aligned}
I_{(\mathbf{1}_2)} &= \frac{1}{2!} \left(I_{(1)}^2 - t \right), \\
I_{(\mathbf{1}_3)} &= \frac{1}{3!} \left(I_{(1)}^3 - 3tI_{(1)} \right), \\
I_{(\mathbf{1}_4)} &= \frac{1}{4!} \left(I_{(1)}^4 - 6tI_{(1)}^2 + 3t^2 \right), \\
I_{(\mathbf{1}_5)} &= \frac{1}{5!} \left(I_{(1)}^5 - 10tI_{(1)}^3 + 15t^2I_{(1)} \right), \\
I_{(\mathbf{1}_6)} &= \frac{1}{6!} \left(I_{(1)}^6 - 15tI_{(1)}^4 + 45t^2I_{(1)}^2 - 15t^3 \right), \\
I_{(\mathbf{1}_7)} &= \frac{1}{7!} \left(I_{(1)}^7 - 21tI_{(1)}^5 + 105t^2I_{(1)}^3 - 105t^3I_{(1)} \right).
\end{aligned}$$

También se puede ver que $I_{(\mathbf{0}_n)} = \frac{t^n}{n!}$ donde $\mathbf{0}_n$ denota un vector de ceros en \mathbb{R}^n . Todo lo anterior fue realizado para obtener la serie de Taylor-Itô [3]. Así para el proceso (14) se obtiene la forma truncada del siguiente grado de la expansión,

$$\begin{aligned}
X_t &= X_0 + C_{(0)}I_{(0)} + C_{(1)}I_{(1)} + C_{(0,0)}I_{(0,0)} + C_{(0,1)}I_{(0,1)} + C_{(1,0)}I_{(1,0)} \\
&\quad + C_{(1,1)}I_{(1,1)} + C_{(0,0,0)}I_{(0,0,0)} + C_{(0,0,1)}I_{(0,0,1)} + C_{(0,1,0)}I_{(0,1,0)} \\
&\quad + C_{(0,1,1)}I_{(0,1,1)} + C_{(1,0,0)}I_{(1,0,0)} + C_{(1,0,1)}I_{(1,0,1)} + C_{(1,1,0)}I_{(1,1,0)} \\
&\quad + C_{(1,1,1)}I_{(1,1,1)} + R. \tag{32}
\end{aligned}$$

Los coeficientes C se presentan en la TABLA 1. Esta es una representación truncada en serie de Taylor que permite presentar de una forma unificada y compacta, los próximos métodos numéricos que son diferentes truncamientos de ésta serie.

$$\begin{aligned}
C_{(0)} &= \alpha \\
C_{(1)} &= \beta \\
C_{(0,0)} &= \left(\alpha\alpha^{(1)} + \frac{1}{2}\beta^2\alpha^{(2)} \right) \\
C_{(0,1)} &= \left(\alpha\beta^{(1)} + \frac{1}{2}\beta^2\beta^{(2)} \right) \\
C_{(1,0)} &= \beta\alpha^{(1)} \\
C_{(1,1)} &= \beta\beta^{(1)} \\
C_{(0,0,0)} &= \alpha \left(\alpha\alpha^{(2)} + (\alpha^{(1)})^2 + \beta\beta^{(1)}\alpha^{(2)} + \frac{1}{2}\beta^2\alpha^{(3)} \right) + \frac{1}{4}\beta^4\alpha^{(4)} \\
&\quad + \frac{1}{2}\beta^2 \left(\alpha\alpha^{(3)} + 3\alpha^{(1)}\alpha^{(2)} + \left((\beta^{(1)})^2 + \beta\beta^{(2)} \right) \alpha^{(2)} \right. \\
&\quad \left. + 2\beta\beta^{(1)}\alpha^{(3)} \right) \\
C_{(0,0,1)} &= \alpha \left(\alpha^{(1)}\beta^{(1)} + \alpha\beta^{(2)} + \beta\beta^{(1)}\beta^{(2)} + \frac{1}{2}\beta^2\beta^{(3)} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\beta^2 \left(\alpha^{(2)}\beta^{(1)} + 2\alpha^{(1)}\beta^{(2)} + \alpha\beta^{(3)} + \left((\beta^{(1)})^2 + \beta\beta^{(2)} \right) \beta^{(2)} \right. \\
&\quad \left. + 2\beta\beta^{(1)}\beta^{(3)} + \frac{1}{2}\beta^2\beta^{(4)} \right) \\
C_{(0,1,0)} &= \alpha \left(\beta^{(1)}\alpha^{(1)} + \beta\alpha^{(2)} \right) + \frac{1}{2}\beta^2 \left(\beta^{(2)}\alpha^{(1)} + 2\beta^{(1)}\alpha^{(2)} + \beta\alpha^{(3)} \right) \\
C_{(0,1,1)} &= \alpha \left((\beta^{(1)})^2 + \beta\beta^{(2)} \right) + \frac{1}{2}\beta^2 \left(\beta^{(2)}\beta^{(1)} + 2\beta^{(1)}\beta^{(2)} + \beta\beta^{(3)} \right) \\
C_{(1,0,0)} &= \beta \left(\alpha\alpha^{(2)} + (\alpha^{(1)})^2 + \beta\beta^{(1)}\alpha^{(2)} + \frac{1}{2}\beta^2\alpha^{(3)} \right) \\
C_{(1,0,1)} &= \beta \left(\alpha\beta^{(2)} + \alpha^{(1)}\beta^{(1)} + \beta\beta^{(1)}\beta^{(2)} + \frac{1}{2}\beta^2\beta^{(3)} \right) \\
C_{(1,1,0)} &= \beta \left(\alpha^{(1)}\beta^{(1)} + \alpha^{(2)}\beta \right) \\
C_{(1,1,1)} &= \beta \left((\beta^{(1)})^2 + \beta\beta^{(2)} \right)
\end{aligned}$$

Tabla 1: Coeficientes en la aproximación de Taylor-Itô en (32) (donde α y β se encuentran evaluados en X_0).

Ya sabemos como calcular $I_{(\mathbf{0}_n)}$ e $I_{(\mathbf{1}_n)}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, pero aún hay términos integrales en la expansión en los cuales no han sido determinados, a continuación presentaremos algunos ejemplos de cálculos.

Ejemplo 3.2. Se calculará una expresión para $I_{(0,1)} + I_{(1,0)}$.

Observe que

$$\begin{aligned}
I_{(1,0)} &= \int_0^t \int_0^s dB_{s_1} ds. \\
&= \int_0^t B_s ds. \\
&= tB_t - \int_0^t s dB_s \text{ por (28).} \\
&= tB_t - I_{(0,1)}.
\end{aligned}$$

De donde se obtiene

$$I_{(0,1)} + I_{(1,0)} = tB_t. \quad (33)$$

Ejemplo 3.3. Se calculará una expresión para $I_{(0,1,1)} + I_{(1,0,1)} + I_{(1,0,0)}$. Se tiene,

$$\begin{aligned}
 I_{(1,0,1)} &= \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} dB_{s_2} ds_1 dB_s. \\
 &= \int_0^t \int_0^s B_{s_1} ds_1 dB_s. \\
 &= \int_0^t \left(sB_s - \int_0^s s dB_{s_1} \right) dB_s \quad \text{por (28)}. \\
 &= \int_0^t sB_s dB_s - \int_0^t \int_0^s s_1 dB_{s_1} dB_s. \\
 &= \int_0^t sB_s dB_s - \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} ds_2 dB_{s_1} dB_s. \\
 &= \int_0^t sB_s dB_s - I_{(0,1,1)}. \\
 &= -\frac{t^2}{4} + \frac{1}{2}tB_t^2 - \frac{1}{2} \int_0^t B_s^2 ds - I_{(0,1,1)}. \quad \text{por (29)}
 \end{aligned}$$

Luego,

$$I_{(1,0,1)} + I_{(0,1,1)} = -\frac{t^2}{4} + \frac{1}{2}tB_t^2 - \frac{1}{2} \int_0^t B_s^2 ds.$$

Ahora para la expresión para $I_{(1,1,0)}$. Tenemos,

$$\begin{aligned}
 I_{(1,1,0)} &= \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} dB_{s_2} dB_{s_1} ds. \\
 &= \int_0^t \int_0^s B_{s_1} dB_{s_1} ds. \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^t (B_s^2 - s) ds \quad (11). \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^t B_s^2 ds - \frac{1}{2} \int_0^t s ds.
 \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned}
 I_{(1,0,1)} + I_{(0,1,1)} + I_{(1,1,0)} &= -\frac{t^2}{4} + \frac{1}{2}tB_t^2 - \frac{1}{2} \int_0^t B_s^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t B_s^2 ds \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t s ds. \\
 &= -\frac{t^2}{4} + \frac{1}{2}tB_t^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2} \right). \\
 &= \frac{1}{2}tB_t^2 - \frac{2t^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Así

$$I_{(0,1,1)} + I_{(1,0,1)} + I_{(1,0,0)} = \frac{t}{2} (B_t^2 - t). \quad (34)$$

Nota 3.4. Como se puede notar en los ejemplos anteriores es claro que que términos como $I_{(0,1,1)}$ no tiene un resultado sin integrales, razón por la cual al momento de deducir algunos métodos numéricos para aproximar EDE's a partir de la expansión en serie de Taylor-Itô, podemos buscar condiciones para poder agrupar términos como $I_{(0,1,1)} + I_{(1,0,1)} + I_{(1,0,0)}$ y así obtener un resultado sin integrales, es decir, en términos explícitos o más fáciles de calcular. Para ello en la siguiente sección se presentará la deducción de algunos métodos usando las ideas hasta ahora presentadas.

4. Deducción de algunos métodos numéricos desde la expansión en serie de Taylor-Itô

En base de lo presentado en secciones previas se presentarán algunos truncamientos de la serie estocástica de Taylor que resultan ser buenas aproximaciones a la solución de las EDE's.

4.1. Deducción de algunos métodos numéricos para resolver EDE's

Consideremos $\{X_t\}_{T \geq t \geq 0}$ un proceso de Itô que satisface la ecuación en forma diferencial $dX_t = \alpha(t, X_t) dt + \beta(t, X_t) dB_t$, y valor inicial $X(0) = X_0$ con α y β funciones dos veces diferenciables, la expansión en series de Taylor-Itô para X_t como podemos observar en (19) puede ser truncada a la siguiente expresión,

$$X_t \approx X_0 + \alpha(X_0)I_{(0)} + \beta(X_0)I_{(1)} + \beta(X_0)\beta^{(1)}(X_0)I_{(1,1)}. \quad (35)$$

Sea $\{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n\}$ una discretización del intervalo $[0, T]$ tal que $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_n = T$. Por la definición de integral en sumas, se tiene que para una suma finita,

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} ds \approx \Delta\tau_{i+1} \quad \text{y} \quad \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} dB_s \approx \Delta B_{i+1}.$$

Donde $\Delta\tau_{i+1} = \tau_{i+1} - \tau_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, y $\Delta B_{i+1} = B_{\tau_{i+1}} - B_{\tau_i}$. De otra forma, la ecuación (35), por lo visto en (18) y (31),

$$X_t \approx X_0 + \alpha \int_0^t ds + \beta(X_0) \int_0^t dB_s + \frac{1}{2} \beta(X_0)\beta^{(1)}(X_0) (I_{(1)}^2 - t). \quad (36)$$

Así se puede expresar (36) en un intervalo $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ desde la aproximación de las integrales como se sigue,

$$X_{\tau_{i+1}} \approx X_{\tau_i} + \alpha(X_{\tau_i})\Delta\tau_{i+1} + \beta(X_{\tau_i})\Delta B_{\tau_{i+1}} + \frac{1}{2}\beta(X_{\tau_i})\beta^{(1)}(X_{\tau_i})((\Delta B_{\tau_{i+1}})^2 - t).$$

Ahora en un intervalo $[0, T]$ ($0 \leq t \leq T$), para X_t , realizamos una discretización del intervalo $[0, T]$ en N partes con $N \in \mathbb{N}$, siendo $\Delta t = T/N$ y se define $\tau_j := j \Delta t$, $j = 0, 1, \dots, N$. Es claro que $\tau_{j+1} - \tau_j = (j+1) \Delta t - j \Delta t = (j+1-j) \Delta t = \Delta t$. Haciendo uso de los resultados anteriores, restringiendo (36) a $X_t \approx X_0 + \alpha \int_0^t ds + \beta(X_0) \int_0^t dB_s$, se obtiene una aproximación de la forma,

$$X_j = X_{j-1} + \alpha(X_{j-1}) \Delta t + \beta(X_{j-1}) \Delta B_{\tau_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (37)$$

Este método es conocido como el método de *Euler-Maruyama (EM)* [2]. Tomando (36), es obtenida la siguiente expresión,

$$X_j = X_{j-1} + \alpha(X_{j-1}) \Delta t + \beta(X_{j-1}) \Delta B_{\tau_j} + \frac{1}{2} \beta(X_{j-1}) \beta^{(1)}(X_{j-1}) ((\Delta B_{\tau_j})^2 - \Delta t), \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, N. \quad (38)$$

Este método es conocido como el método de *Milstein* [2].

Ahora veamos como podría deducirse un método alternativo a los anteriormente presentados, para ello utilizaremos los resultados obtenidos en (33) y (19), donde para poder obtener la expresión (33) debemos obtener la siguiente igualdad,

$$\beta(X_0) \alpha^{(1)}(X_0) = \alpha(X_0) \beta^{(1)}(X_0) + \frac{1}{2} \beta^2(X_0) \beta^{(2)}(X_0). \quad (39)$$

Que se reduce a una ecuación diferencial de la siguiente forma,

$$xy^{(1)} = yx^{(1)} + \frac{1}{2} x^2 x^{(1)(1)} \quad (40)$$

En la que se puede deducir fácilmente para una condición inicial $y(0) = 0$ que la solución explícita es la siguiente ecuación.

$$y = \frac{1}{2} x x^{(1)} \quad (41)$$

Aplicado este modelo a (39), se obtiene

$$\alpha(X_t) = \frac{1}{2} \beta(X_t) \beta^{(1)}(X_t). \quad (42)$$

Ahora reemplazando la condición (42) en (19) se obtiene la siguiente expresión,

$$\begin{aligned}
X_t &= X_0 + \frac{1}{2}\beta(X_0)\beta^{(1)}(X_0)I_{(0)} + \beta(X_0)I_{(1)} + \beta(X_0)\beta^{(1)}(X_0)I_{(1,1)} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\beta(X_0)(\beta^{(1)}(X_0))^2 + \beta^2(X_0)\beta^{(2)}(X_0)\right)I_{(1,0)} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\beta(X_0)(\beta^{(1)}(X_0))^2 + \beta^2(X_0)\beta^{(2)}(X_0)\right)I_{(0,1)} \\
&\quad + \frac{1}{4}\left(\beta(X_0)(\beta^{(1)}(X_0))^3 + \beta^2(X_0)\beta^{(1)}(X_0)\beta^{(2)}(X_0)\right. \\
&\quad \left.+ 3\beta^2(X_0)\beta^{(1)}(X_0)\beta^{(2)}(X_0) + \beta^2(X_0)\beta^{(3)}(X_0)\right)I_{(0,0)} + R. \\
&= X_0 + \frac{1}{2}\beta(X_0)\beta^{(1)}(X_0)I_{(0)} + \beta(X_0)I_{(1)} + \beta(X_0)\beta^{(1)}(X_0)I_{(1,1)} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\beta(X_0)(\beta^{(1)}(X_0))^2 + \beta^2(X_0)\beta^{(2)}(X_0)\right)(I_{(1,0)} + I_{(0,1)}) \\
&\quad + \frac{1}{4}\left(\beta(X_0)(\beta^{(1)}(X_0))^3 + \beta^2(X_0)\beta^{(1)}(X_0)\beta^{(2)}(X_0)\right. \\
&\quad \left.+ 3\beta^2(X_0)\beta^{(1)}(X_0)\beta^{(2)}(X_0) + \beta^2(X_0)\beta^{(3)}(X_0)\right)I_{(0,0)} + R. \\
&= X_0 + \frac{1}{2}\beta(X_0)\beta^{(1)}(X_0)(t) + \beta(X_0)(B_t) + \beta(X_0)\beta^{(1)}(X_0)\left(\frac{1}{2}(B_t^2 - t)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\beta(X_0)(\beta^{(1)}(X_0))^2 + \beta^2(X_0)\beta^{(2)}(X_0)\right)(tB_t) \\
&\quad + \frac{1}{4}\left(\beta(X_0)(\beta^{(1)}(X_0))^3 + \beta^2(X_0)\beta^{(1)}(X_0)\beta^{(2)}(X_0)\right. \\
&\quad \left.+ 3\beta^2(X_0)\beta^{(1)}(X_0)\beta^{(2)}(X_0) + \beta^2(X_0)\beta^{(3)}(X_0)\right)\left(\frac{t^2}{2}\right) + R.
\end{aligned}$$

Del anterior resultado son conocidos todos los términos, con lo que se pueden deducir nuevos métodos para EDE's que satisfagan la condición (42).

4.2. Ilustraciones numéricas

Se presentan algunas comparaciones de los modelos con el Movimiento Browniano Geométrico para poder observar su nivel de efectividad.

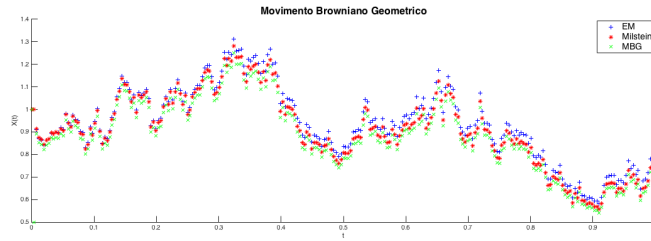


Figura 2: EM vs Milstein simulando el movimiento Browniano geométrico con 2^8 iteraciones

Podemos ver un acercamiento de la Figura 2 en la Figura 3 observando una mayor proximidad de los puntos generados por el método Milstein con respecto a la solución real del MBG.

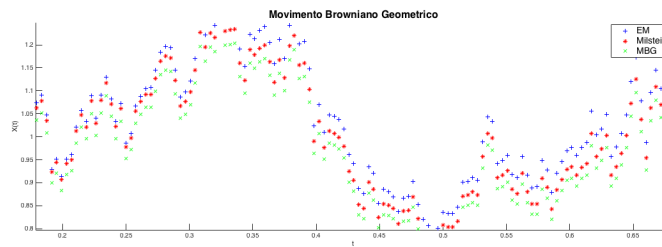


Figura 3: EM vs Milstein simulando el movimiento Browniano geométrico con 2^8 iteraciones

En la Figura 4 se puede observar en una muy pequeña escala la proximidad entre los tres datos obtenidos, con lo que podríamos pensar que para un gran número de pasos en el tiempo, el método de Euler-Maruyama y el de Milstein van a converger a los mismos puntos.

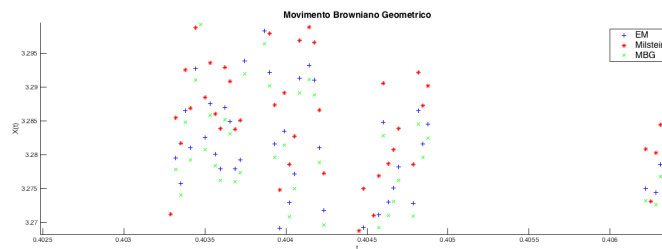


Figura 4: EM vs Milstein simulando el movimiento Browniano geométrico con 2^{15} iteraciones

En las simulaciones hechas se puede apreciar como era de esperarse que el método de Milstein sea más próximo a la solución real en comparación con

el método de Euler-Maruyama, puesto que EM es un truncamiento de menor orden de la serie de Taylor, es decir el resto (R) de EM es mayor que el resto (R) de Milstein, haciendo mayor el error de uno con respecto al otro. En la siguiente sección se presentará un modelo financiero en forma de EDE con el que podrán aplicar estos modelos a situaciones reales.

4.3. Modelo CEV (Elasticidad Constante de la Varianza)

En ésta sección se presenta una breve introducción al modelo CEV sin profundizar mucho en el tema, si el lector desea profundizar más en el tema puede consultar [1] de donde fueron tomadas las ideas para esta sección.

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t^\beta dB_t, \quad (43)$$

donde son parámetros constantes σ , α y β y satisfacen las condiciones $\sigma > 0$ y $\beta > 0$. El parámetro β controla la relación entre la volatilidad y el precio, y es la característica central del modelo. Cuando $\beta < 1$ vemos el llamado efecto de palanca, comúnmente observada en los mercados de valores, donde la volatilidad de una acción aumenta a medida que su precio cae. Por el contrario, en los mercados de productos básicos, a menudo observamos $\beta > 1$, el llamado efecto de palanca es inverso, por lo que la volatilidad del precio de una mercancía tiende a aumentar a medida que sus aumentos de precios. Para aplicar este modelo el activo debe cumplir las siguientes hipótesis:

- La tasa de interés instantánea α es conocida y constante.
- El precio de la acción es solución a una EDE, lo que implica que σ y β son constantes y conocidos.
- No se pagan dividendos de la acción durante la vida de la opción.
- No hay costos de transacción, impuestos diferenciales, restricciones o las ventas son al descubierto.
- Es posible operar con cualquier fracción de las acciones u opción.

Como se puede observar en (43) se presenta una EDE donde S_t es el valor del activo en el tiempo t , el modelo cuenta con una solución bajo condiciones de frontera, hipótesis de no arbitraje, entre otros, dado que el objetivo es hallar una aproximación a la solución mediante los modelos propuestos, se presentará una aplicación a la valoración del dolar en Colombia suponiendo las hipótesis dadas y aplicando a (43). Dados los datos del cuadro (2), procedemos a la aplicación del modelo CEV y asumimos que el precio del dólar solo se ve afectado por lo sucedido en el último mes de este.

t	S_t	R_t	t	S_t	R_t
1	3299.36	0	16	3180.87	0.001208634
2	3356.00	0.007392247	17	3155.22	-0.003516274
3	3328.08	-0.003628195	18	3149.47	-0.00079217
4	3317.72	-0.001354026	19	3149.47	0
5	3333.37	0.002043792	20	3149.47	0
6	3337.68	0.000561174	21	3149.47	0
7	3337.68	0	22	3149.47	0
8	3337.68	0	23	3213.24	0.008705689
9	3332.70	-0.000648475	24	3203.86	-0.001269634
10	3307.24	-0.00333051	25	3250.69	0.006302025
11	3255.19	-0.006889369	26	3287.28	0.004861142
12	3172.03	-0.011239057	27	3268.37	-0.002505482
13	3172.03	0	28	3268.37	0
14	3172.03	0	29	3268.37	0
15	3172.03	0	30	3268.37	0

Tabla 2: Histórico de los precios del dólar en Colombia (14/12/2015 - 12/01/2016), tomado de <http://www.banrep.gov.co/es/trm>

Donde t es el tiempo en días, S_t el precio del dólar y R_t es el log-retorno (ver [1]) del dólar en un momento t , es decir $R_t = \log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$. Ahora se va a encontrar la media (α) o valor esperado y la varianza (σ^2) de R_t .

$$\begin{aligned}\alpha &= -0.001457235, \\ \sigma^2 &= 0.0000042471, \\ \sigma &= 0.002060842, \\ S_0 &= 3299.36, \quad (\text{Valor inicial}) \\ T &= 60 \quad (\text{Tiempo final}).\end{aligned}$$

Entonces la ecuación obtenida para el modelo CEV es,

$$dS_t = -0.001457235S_t dt + 0.002060842S_t^\beta dB_t \quad \text{con } \beta \geq 0. \quad (44)$$

Ahora realizando la simulación para $\beta = 1.2$ se obtiene los siguientes resultados,

β	1.2
S_T EM	3337.50
S_T Milstein	3337.50

Tabla 3: Simulación del precio del dólar en el tiempo final $T = 60$ (11/02/16)

Se puede verificar en el histórico del dólar en Colombia que el precio del activo para el 11/02/16 era de \$3385.65, luego realizando la simulación como podemos

ver en el cuadro (3) que se obtiene una muy buena aproximación para este activo bajo los valores dados con los métodos presentados, convergiendo estos al mismo resultado en un mismo número de pasos en el tiempo.

Referencias

- [1] Freddy Delbaen and Hiroshi Shirakawa, *A note on option pricing for the constant elasticity of variance model*, Asia-Pacific Financial Markets **9** (2002), no. 2, 85–99.
- [2] Desmond J Higham, *An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations*, SIAM review **43** (2001), no. 3, 525–546.
- [3] Peter E Kloeden and Eckhard Platen, *Numerical solution of stochastic differential equations springer-verlag*, New York (1992).
- [4] Bernt Oksendal, *Stochastic differential equations: an introduction with applications*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [5] Luis J. Roman, *A short introduction to numerical analysis of stochastic differential equations*, IMPA, 2005.