

# ESTUDIO DE NUCLEOSÍNTESIS PRIMORDIAL EN UN MODELO CON ENERGÍA OSCURA TEMPRANA

LUZ ANGELA GARCÍA PEÑALOZA  
CÓDIGO 189486



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
OBSERVATORIO ASTRONÓMICO NACIONAL  
BOGOTÁ, COLOMBIA  
2012

# ESTUDIO DE NUCLEOSÍNTESIS PRIMORDIAL EN UN MODELO CON ENERGÍA OSCURA TEMPRANA

LUZ ANGELA GARCÍA PEÑALOZA  
CÓDIGO 189486

TRABAJO DE TESIS PARA OPTAR TÍTULO DE  
MAGÍSTER EN CIENCIAS - ASTRONOMÍA

DIRECTOR  
JUAN MANUEL TEJEIRO SARMIENTO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
OBSERVATORIO ASTRONÓMICO NACIONAL  
BOGOTÁ, COLOMBIA

2012

---



---

## TABLA DE CONTENIDO

Índice de figuras	1
<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2. Modelo Estándar de la Cosmología</b>	<b>10</b>
2.1. Modelo cosmológico del universo en expansión . . . . .	10
<b>3. Medición de las abundancias primordiales</b>	<b>14</b>
3.1. Deuterio Primordial . . . . .	14
3.2. Helio-3 . . . . .	15
3.3. Helio-4 . . . . .	15
3.4. Litio-7 . . . . .	16
<b>4. Nucleosíntesis Primordial (BBN)</b>	<b>18</b>
4.1. Termodinámica del Universo Temprano . . . . .	18
4.1.1. Equilibrio Termodinámico . . . . .	18
4.1.2. Dinámica de expansión a $T \approx 1$ MeV . . . . .	20
4.1.3. Desacople de los neutrinos y aniquilación de pares [11] . . . . .	21
4.2. Abundancia primordial de neutrones y $^4\text{He}$ [?] . . . . .	24
4.3. Los otros núcleos ligeros [63, 65, 64] . . . . .	38
<b>5. Modelos de energía oscura</b>	<b>45</b>
5.1. Energía Oscura . . . . .	45
5.2. Campos escalares como Energía Oscura Dinámica . . . . .	47
5.2.1. Quintaesencia con acople minimal . . . . .	47
5.2.2. Quintaesencia no minimalmente acoplados a la gravedad . . . . .	49
5.2.3. Campos escalares fantasmas . . . . .	50
5.2.4. Campo Taquiónico . . . . .	51
5.2.5. Gas tipo Chaplygin . . . . .	52
5.3. “Campo magnético primordial” . . . . .	52
5.4. Modelo $\Lambda(t)$ [30] . . . . .	53
<b>6. Campos escalares de K-esencia como Energía Oscura Dinámica</b>	<b>56</b>

6.1.	Ecuaciones de movimiento . . . . .	57
6.2.	Ecuación de estado efectiva a partir de los atractores y la condición <i>tracker</i> . . .	67
6.2.1.	Densidad de energía del campo de K-esencia . . . . .	68
6.3.	Fracción de energía oscura de K-esencia . . . . .	69
6.3.1.	Velocidad del campo de K-esencia . . . . .	79
6.3.2.	Término cinético no canónico de la acción $Q(v)$ en términos de $a$ . . . . .	82
<b>7.</b>	<b>Análisis complementario de la parametrización</b>	<b>84</b>
7.1.	Evolución de las inhomogeneidades de materia . . . . .	84
7.2.	Anisotropías en el CMB . . . . .	86
7.2.1.	<i>CMB shift parameter</i> $R$ . . . . .	87
7.2.2.	$A(z_{BAO})$ . . . . .	88
7.2.3.	Test de Alcock-Paczynski . . . . .	88
7.3.	Edad del Universo con el modelo propuesto . . . . .	89
7.4.	Desviación de K-esencia respecto al modelo $\Lambda$ CMD . . . . .	89
<b>8.</b>	<b>Nucleosíntesis Primordial en presencia de K-esencia como energía oscura</b>	<b>92</b>
8.1.	Influencia de las abundancias con grados de libertad adicionales en el fluido cosmológico . . . . .	92
<b>9.</b>	<b>Abundancias calculadas con los códigos numéricos</b>	<b>95</b>
9.1.	Códigos numéricos para el estudio de BBN . . . . .	95
9.1.1.	Fast BBN . . . . .	96
9.1.2.	BBN reactions . . . . .	96
9.1.3.	Public Big Bang Code . . . . .	96
9.1.4.	Abundancias primordiales calculadas con los códigos . . . . .	97
9.2.	Estimación de parámetros de BBN . . . . .	98
<b>10.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>104</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>110</b>

---



---

## ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Curvas de verosimilitud de $\Omega_m$ y $\Omega_\Lambda$ . [17] . . . . .	12
3.1. Columna de densidad de deuterio . . . . .	15
3.2. Regresiones lineales de la fracción de masa de $^4\text{He}$ vs. la abundancia de oxígeno y nitrógeno para un total de 82 regiones H II en 76 galaxías compactas azules. En los páneles a y b, la abundancia de $^4\text{He}$ se deriva usando las líneas de emisión $\lambda 4471$ , $\lambda 5876$ y $\lambda 6678$ de He I, y en c y d, usando las líneas del mismo elemento $\lambda 3889$ , $\lambda 4471$ , $\lambda 5876$ , $\lambda 6678$ y $\lambda 7065$ [18]. . . . .	16
3.3. Contribución del enriquecimiento de Li primordial por diferentes factores estelares: Estrellas AGB (línea entrecortada corta), SNeII (línea punteada), gigantes rojas de baja masa (línea entrecortada larga) y novas (línea punteada entrecortada) [18].	17
5.1. Distancia angular vs. redshift para modelos $\Lambda(t)$ . Las curvas corresponden a $\Omega_m = 0.3$ y longitud propia $l = 26.46h^{-1}\text{pc}$ [30]. . . . .	54
5.2. Comparación entre los diferentes modelos de energía oscura descrita con campos escalares y gas de Chaplygin [28]. . . . .	55
6.1. Minimización de la función $\chi^2$ con respecto a $m$ y $\Omega_{\phi_0}$ . . . . .	73
6.2. Evolución de $f(z)$ para el mejor ajuste de $m$ . Este gráfico representa de forma esquemática la evolución de $\rho_\phi$ , teniendo en cuenta que $f(z) = \frac{\rho_\phi}{\rho_{\phi 0}}$ . . . . .	74
6.3. Evolución de $q(z)$ vs. $z$ . . . . .	75
6.4. Parámetro de la ecuación de estado de K-esencia con respecto al factor de escala $a$ .	76
6.5. Parámetro de la ecuación de estado de K-esencia $\omega_\phi$ vs. $z$ . . . . .	77
6.6. Distancia de luminosidad en función del redshift. . . . .	78
6.7. $\Omega_\phi$ vs. $a$ . . . . .	79
6.8. Velocidad adiabática del sonido de las perturbaciones del campo de K-esencia en el plasma cosmológico. . . . .	80
6.9. Velocidad del campo de K-esencia vs. $a$ . . . . .	81
6.10. Término cinético no canónico $Q(v)$ de K-esencia vs. $a$ . . . . .	83
7.1. Factor de crecimiento de las inhomogeneidades $D_+$ vs. $z$ . . . . .	85
7.2. Espectro de anisotropías del CMB usando <i>CMBfast</i> . . . . .	87
7.3. Mapa de anisotropías en temperatura del CMB usando <i>Healpix</i> . El cuadro muestra el resultado con el modelo propuesto en este trabajo. . . . .	88

7.4. Curva de los parámetros de Statefinder $r, s$ para K-esencia. Los modelos $\Lambda$ CDM y K-esencia como energía oscura hoy corresponde al punto azul y amarillo respectivamente. . . . .	90
9.1. Cadena de reacciones implícitas en los códigos que resuelven BBN. Tomado de [62].	95
9.2. Abundancias primordiales para los núcleos ligeros vs. $t$ usando <i>Fast BBN</i> . . . . .	97
9.3. Abundancias primordiales para los núcleos ligeros vs. $t$ usando <i>BBN reactions</i> . . . . .	98
9.4. Abundancias primordiales para los núcleos ligeros vs. $t$ usando <i>Public Big bang</i> . . . . .	99
9.5. Abundancias primordiales de $D$ , ${}^3\text{He}$ , ${}^4\text{He}$ y ${}^7\text{Li}$ variando $\eta_B$ usando <i>Public BBN</i> . . . . .	101
9.6. Abundancias primordiales de $D$ , ${}^3\text{He}$ , ${}^4\text{He}$ y ${}^7\text{Li}$ vs. $\log(\eta_B)$ comparando los códigos <i>Public BBN</i> (línea continua) y <i>NUC123</i> (línea punteada). . . . .	102
9.7. Abundancias primordiales de $D$ , ${}^3\text{He}$ , ${}^4\text{He}$ y ${}^7\text{Li}$ calculadas variando la contribución de energía oscura de $b = 0.0$ (negro), $b = 5.0 \times 10^{-3}$ (verde), $b = 5.0 \times 10^{-2}$ (azul), $b = 0.1$ (rojo) y $b = 0.2$ (amarillo) usando <i>Public BBN</i> . . . . .	103

---

---

## OBJETIVOS

### Objetivo general

Estudiar el proceso de Nucleosíntesis Primordial (BBN), teniendo en cuenta un modelo de energía oscura temprana que permita refinar las predicciones en las abundancias relativas de los elementos ligeros, así como el valor estimado de los parámetros cosmológicos  $\eta_B$  y  $\Omega_B$ .

### Objetivos específicos

- Estudiar un modelo de energía oscura en el dominio de radiación y su influencia en la ecuación de Boltzmann a través de la relación existente con el parámetro de Hubble.
- Realizar una comparación cuantitativa de las abundancias relativas de núcleos ligeros obtenidas con el modelo que incorpora energía oscura y el modelo “estándar” de nucleosíntesis cosmológica.
- Determinar los parámetros cosmológicos implícitos en la formulación estándar de la Nucleosíntesis Primordial ( $\eta_B, \Omega_B$ ), mediante el análisis del espectro de anisotropías del CMB.

---

---

## ABSTRACT

### Resumen

Esta tesis ha sido realizada en el marco de dos temas muy actuales y apasionantes en Cosmología: Nucleosíntesis Primordial y la Energía Oscura. Ambos tópicos son fundamentales para entender el universo temprano y la naturaleza de la expansión acelerada del universo y en consecuencia, conseguir un refinamiento en los valores predichos por el modelo estándar, para compararlos con los datos observacionales que se encuentran disponibles.

En este contexto, hemos propuesto un modelo de energía oscura (EDE) que evoluciona durante las diferentes épocas cosmológicas para considerar su influencia en la abundancia de BBN. Esta contribución se ha modelado como un campo escalar K-esencia en el marco del universo FRW con una parametrización efectiva de la ecuación de estado en función del factor de escala con la condición *tracker* durante el dominio de radiación, y a su vez exigiendo una expansión acelerada en etapas tardías para alcanzar el efecto de la constante cosmológica. Hemos seleccionado un campo escalar de K-esencia, ya que no necesita un *fine-tuning* del valor del campo y su velocidad en etapas tempranas. Además, el comportamiento de este campo es el indicado para satisfacer la condición *tracker* durante el dominio de radiación. Con la parametrización que se ha construido, es posible encontrar las variables dinámicas del sistema de EDE y usando de distancias de luminosidad de la SNIA fue posible obtener las mejores estimaciones de los parámetros libres del modelo.

Así, es posible calcular los grados de libertad adicionales los cuales están relacionados con la contribución no nula del modelo de energía oscura y su influencia en la tasa de Hubble, el tiempo y, por último, la abundancia primordial de núcleos ligeros en la teoría de BBN. Se resumen las condiciones necesarias para lograr predicciones BBN y la expansión acelerada del universo en etapas tardías.

Esta nueva perspectiva se evita el procedimiento usual que consiste en considerar más grados de libertad durante el dominio de radiación como materia oscura (neutrinos, axiones, neutralinos, partículas Kaluza, etc.) ó los modelos asociados con la gravedad modificada.

## Abstract

This thesis have been made in the frame of two current and exciting topics in Cosmology: Primordial Nucleosynthesis and Dark Energy. Both are fundamental fields that must be studied in order to understand the Early Universe and the nature of the accelerated expansion of the Universe and consequently, it is possible to achieve an enhancement of the predicted values that must be compared with available observational data.

In this context, we have proposed this thesis with the aim to study a model of Dark Energy which evolves during the different cosmological epochs and its influence in BBN abundances. This contribution has been modeled as a K-essence scalar field in the framework of FRW universe using an effective parametrization of the state equation as a function of the scale factor with the tracker condition during radiation domination, but also demanding an accelerated expansion at late times emulating cosmological constant. We have selected a K-essence field because it does not need a *fine tuning* of the value of the field and its velocity at very early times. Also, the behaviour of this field is the right one to get the tracker condition during radiation domination. With the parametrization that has been constructed, we find all the dynamical variables of the EDE system and use the luminosity distances of the SNIA to obtain the best estimations for the free parameters of the model.

At this point, it is possible to compute the additional degrees of freedom which are related with the non null contribution of the dark energy model and its influence on the Hubble rate, the time and finally, the primordial abundances of light nuclei in BBN theory. We summarize the necessary conditions to achieve BBN predictions and the accelerated expansion of the universe at late times.

This new perspective avoids the ordinary procedure which is to consider additional degrees of freedom during radiation domination as dark matter (neutrinos, axions, neutralinos, Kaluza particles, etc.) or models associated with modified gravity that also affects the dynamic quantities related with BBN theory.

---

---

## PARÁMETROS COSMOLÓGICOS FIDUCIALES

En este trabajo se utilizarán los siguientes parámetros cosmológicos tomados de **WMAP-7** a partir de observaciones de *CMB+Sachs Wolfe effect+Gravitational Lensing*. La tabla completa se encuentra disponible en [1]:

$h$	$0.710 \pm 0.025$
$H_0$	$71.0 \pm 2.5 \text{ km/s/Mpc}$
$t_0$	$13.75 \pm 0.13 \text{ Gyr}$
$z_{eq}$	$3196 \pm 134$
$\Omega_B$	$0.0449 \pm 0.0028$
$\Omega_B h^2$	$0.02258 \pm 0.00057$
$\Omega_{CDM}$	$0.222 \pm 0.026$
$\Omega_\Lambda$	$0.734 \pm 0.029$
$\Omega_m$	$0.266 \pm 0.029$
$\Omega_m h^2$	$0.1334 \pm 0.0056$
$R$	$1.719 \pm 0.019$
$A_{BAO}(z = 0.35)$	$0.463 \pm 0.021$

---

Salvo que se diga lo contrario, en los desarrollos de este trabajo se fijarán las constantes fundamentales  $c = \hbar = K_B = 1$ .

---

---

## INTRODUCCIÓN

Paralelo al desarrollo en los años 30 del modelo estándar de la cosmología, que describe el universo a gran escala, por parte de Friedmann, Roberson, Walker y Lemaitre, en el campo de la física nuclear se desarrollaban arduos esfuerzos por entender el proceso de formación de los núcleos en la naturaleza, las partículas que los constituyen y las interacciones que median entre las mismas.

Estos trabajos fueron retomados a finales de los cuarentas por George Gamov, entre otros, [2, 3] en un intento por encontrar que elementos químicos pudieron formarse en etapas tempranas del universo, teniendo en cuenta las cadenas de reacciones presentes, las interacciones fundamentales y la expansión del universo. Gamov concluyó que sólo los primeros núcleos podían formarse en este escenario, en virtud de la existencia de la barrera de Coulomb y la ausencia de núcleos fuertemente ligados con número atómico entre 5 y 8.

Estos resultados fueron corroborados por Wagoner en 1974 [4, 5], mediante el uso de un código numérico que soluciona la ecuación de Boltzmann para las reacciones presentes en la Nucleosíntesis Primordial (decaimiento del neutrón, formación del deuterio, 3-He, 4-He y 7-Li) en  $0.1s < t < 3\text{min}$ .

Desde ese momento hasta hoy, el conocimiento alrededor de esta etapa del universo ha crecido tremendamente, impulsada por el avance teórico de la cosmología, así como de la física de altas energías que ha incluido detalles fundamentales en el modelo de Big Bang Nucleosíntesis (BBN), el refinamiento de las técnicas de medición de las abundancias de estos elementos primordiales a altos *redshift* y el desarrollo computacional. Adicionalmente, el estudio del espectro de anisotropías de la Radiación Cósmica de Fondo (**CMB**) ha permitido encontrar de forma precisa e independiente algunos parámetros cosmológicos y compararlos con sus valores obtenidos con BBN, por lo que el análisis conjunto de estas dos herramientas ha permitido acotar parámetros libres del modelo cosmológico.

Actualmente, la Nucleosíntesis Primordial es uno de los pilares del modelo estándar de la Cosmología, y representa una de las formas más poderosas de testear la física fundamental. Es por esto que en este trabajo se estudia la BBN, incluyendo un modelo de energía oscura dinámica que contribuya en el dominio de radiación, y de esta manera, modifique el parámetro de expansión de Hubble y pueda dar cuenta de las discrepancias en las abundancias relativas de los elementos ligeros que se calculan por este método, y los valores observados.

De otro lado, observaciones actuales revelan que el universo se expande de forma acelerada y que existe una contribución de materia-energía del orden del 70% de la densidad crítica, con distribución muy suave en el fluido cósmico y con presión negativa <sup>1</sup> (efecto repulsivo a la gravedad <sup>2</sup>). Su naturaleza es desconocida por el momento, pero tiene una marcada relevancia en la evolución reciente del universo.

Para describir su origen se han propuesto una amplia gama de modelos: el primero adoptado fue la constante cosmológica como una contribución de materia-energía y no de carácter geométrico, asociada con la energía de vacío de los campos cuánticos. No obstante, esta interpretación presenta una marcada discrepancia entre el valor calculado en teoría cuántica de campos y el encontrado en cosmología, además de otros desafíos teóricos como el problema de coincidencia y el mecanismo que da lugar a  $\Lambda$  [14].

Ahora, si la constante cosmológica es nula, deben existir candidatos que generen los efectos mencionados. De las ecuaciones de Friedmann se encuentra que se produzca la expansión acelerada en etapas tardías la componente no material adicional debe tener una ecuación de estado  $\omega < -\frac{1}{3}$ . Por ello, modelos que inicialmente fueron propuestos para inflación fueron abordados: Quintae-sencia ( $\omega = \text{cte}$ ), K-esencia, Campos Taquiónicos, defectos cosmológicos frustrados, dimensiones extra, campos masivos (o sin masa) tanto bosónicos como fermiónicos, galileones, parametrizaciones efectivas, campos magnéticos primordiales, modelos holográficos, etc. para modelar esta contribución que es predicha por las ecuaciones de Friedmann en el marco de la Relatividad General.

Existen otras posibilidades como gravedad modificada, donde el efecto de expansión acelerada es geométrico y no debido a algún tipo de materia-energía.

Sin embargo, el paradigma sigue siendo  $\Lambda$ CDM pues es el modelo que mejor se adapta a las

---

<sup>1</sup>Dado que su presión es comparable en magnitud a su densidad de energía, es relativista y tipo *energía*.

<sup>2</sup>Se ha sugerido que si la energía oscura es un campo escalar muy liviano podría existir una interacción de largo alcance diferente a las ya conocidas.

observaciones, aún a pesar de los problemas conceptuales que implica la constante cosmológica.

En este trabajo se pretende implementar un modelo que de cuenta de energía oscura temprana y modifique el parámetro de Hubble de la forma:

$$H' = \left( \frac{4\pi G}{45} g'_{eff} \right), \quad (1.0.1)$$

donde  $g'_{eff}$  es el número de grados de libertad relativistas asociado a partículas adicionales [6, 7, 8] o bien, a campos escalares [9] que puedan dar cuenta de la diferencia entre las abundancias que predice el modelo y los valores medidos por métodos astrofísicos, sin que estos afecten las reacciones intrínsecas que producen los elementos ligeros.

Una vez que se conoce la forma funcional de  $H'$ , se procederá a calcular las abundancias relativas de cada núcleo usando la ecuación de Boltzmann, y de esta forma, se completará el proceso de nucleosíntesis con el nuevo modelo (con la duración y el parámetro de Hubble modificados). En esta misma línea, pueden acotarse los parámetros cosmológicos implícitos en la nucleosíntesis ( $\eta_B$  y  $\Omega_B$ ).

Adicionalmente, los parámetros libres de BBN pueden ser contrastados mediante el análisis y reducción del espectro de anisotropías del CMB, que se trabajará de forma paralela al desarrollo anteriormente mencionado. Esto se hará con el fin de conocer la confiabilidad del modelo que modifica la nucleosíntesis “estándar”.

Finalmente, con el modelo de energía oscura de K-esencia, se encontró la evolución de todas las variables dinámicas del problema, los parámetros libres y se analizaron diferentes pruebas para testear el modelo propuesto, con excelentes resultados que nos permiten considerar como un buen candidato a energía oscura nuestro modelo.

# CAPÍTULO 2

---

---

## MODELO ESTÁNDAR DE LA COSMOLOGÍA

### 2.1. Modelo cosmológico del universo en expansión

El Modelo Estándar de la Cosmología está basado en dos principios: la homogeneidad e isotropía a grandes escalas del universo. Estos postulados permiten escribir el elemento de línea en un universo máximalmente simétrico por medio de la métrica de Roberson-Walker (en unidades de  $c = 1$ ) [10, 11]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (2.1.1)$$

siendo  $a(t)$  el factor de escala y  $k$ , el parámetro que da cuenta de la curvatura espacial del universo, tal que  $k = 0$ ,  $k = 1$  ó  $k = -1$  para geometría plana, esférica o hiperbólica respectivamente. Estos postulados, también conducen a un forma del tensor de momentum-energía para el fluido perfecto dada por:

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

siendo  $p$  la presión del fluido y  $\rho$  la densidad de energía.

Las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica para la métrica (2.1.1) con el tensor de momentum-energía (2.1.2) son [12]:

$$H^2 = \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad \text{Componente temporal} \quad (2.1.3)$$

y

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) + \Lambda, \quad \text{Componentes espaciales} \quad (2.1.4)$$

en donde se ha definido el parámetro de Hubble como  $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ . La conservación de energía, expresada por la ecuación de conservación de la energía ( $T^{0\beta}_{;0} = 0$ ) queda definida de la forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (2.1.5)$$

Para resolver estas ecuaciones es necesario conocer la relación existente entre la presión  $p$  y la densidad de energía  $\rho$ . La forma más general para la ecuación de estado para un fluido barotrópico: [11]:

$$p = \omega \rho, \quad (2.1.6)$$

con  $\omega$  un parámetro, que máximo depende del tiempo  $\omega = \omega(t)$ . Al conjunto de ecuaciones (2.1.3), (2.1.4) y (2.1.5) se les conoce como *Ecuaciones de Friedmann-Lemaitre* y junto con la ecuación de estado (2.1.6) determinan el modelo cosmológico. Los modelos más trabajados son los de polvo ( $\omega = 0$ ) y radiación ( $\omega = 1/3$ ), los cuales dan cuenta de la evolución de las componentes materiales conocidas del universo.

Sin embargo, actualmente existe evidencia de la expansión acelerada del universo [13], lo que hace necesario considerar modelos con constante cosmológica no nula ó alguna componente adicional, que cumpla la condición  $\ddot{a} > 0$ , y por tanto  $\omega < -1/3$ . Los modelos con ecuaciones de estado de esta forma se denominan de Quintaesencia [6]. El caso con  $\omega = -1$  se obtiene suponiendo en la ecuación (2.1.5) que la densidad de energía es constante, lo que nos lleva a una ecuación de estado de la forma:

$$p = -\rho, \quad (2.1.7)$$

es decir, una ecuación de estado con presión negativa ( $\Lambda$  como Energía Oscura). Podemos entonces asociar una densidad, que llamaremos densidad de energía del vacío relacionada con la constante cosmológica por la relación [14]:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (2.1.8)$$

Se define la fracción de densidad de energía para el modelo  $\Lambda$ CDM (contribución no nula de constante cosmológica y materia oscura fría) de la siguiente manera:

$$\Omega_m = \frac{8\pi G \rho}{3H^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad \Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2}, \quad (2.1.9)$$

La primera ecuación de Friedmann queda escrita de la forma:

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1, \quad (2.1.10)$$

la relación anterior se conoce como regla de suma cósmica. Las curvas de verosimilitud que consideran distintos métodos permiten determinar en muy buena aproximación los valores de estos parámetros hoy ( $a_0 = 1$ ) [10, 15, 11, 16],

$$\Omega_{m0} \approx 0.28, \quad \Omega_{\Lambda 0} \approx 0.72, \quad \Omega_{k0} \approx 0. \quad (2.1.11)$$

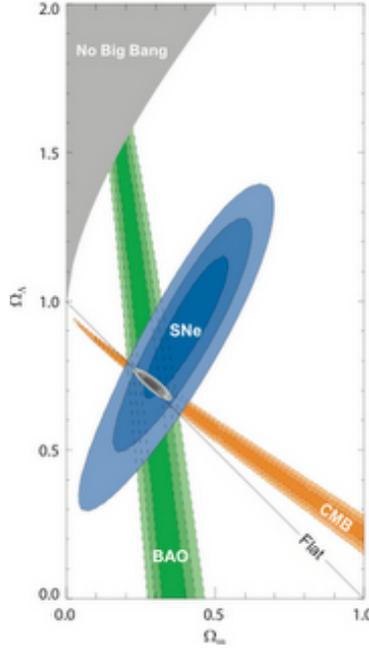


Figura 2.1: Curvas de verosimilitud de  $\Omega_m$  y  $\Omega_\Lambda$ . [17]

Adicionalmente, estudios recientes del espectro de anisotropías de la Radiación Cósmica de Fondo (CMB) por medio del proyecto Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP), muestran que el contenido actual del universo es: un 72.1 % de energía oscura, un 23.3 % de materia oscura fría y un restante 4.6 % de materia bariónica<sup>1</sup>[15].

No obstante, si se considera un modelo de energía oscura diferente de la constante cosmológica, la fracción de densidad de energía asociada a la energía oscura está dada por:

$$\Omega_{de} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_{de}, \quad (2.1.12)$$

donde  $\rho_{de}$  depende del modelo. El comportamiento dinámico de este tipo de modelos depende de la forma paramétrica de  $w_{de}$ .

De otra parte, existe una ecuación fundamental que permite relacionar las observaciones astrofísicas (medidas con respecto al corrimiento al rojo o *redshift*  $z$ ) con el factor de escala  $a(t)$  que

<sup>1</sup>los valores de las dos últimas también pueden inferirse del estudio de Nucleosíntesis Primordial

se obtiene al resolver las ecuaciones de Friedmann (2.1.3), (2.1.4):

$$a = \frac{1}{1+z}, \quad (2.1.13)$$

donde se usó el hecho que una señal emitida hoy tiene *redshift* nulo que implica la normalización  $a_0 = 1$ .

# CAPÍTULO 3

---

---

## MEDICIÓN DE LAS ABUNDANCIAS PRIMORDIALES

Del estudio de BBN es posible calcular las abundancias relativas de los elementos ligeros como función de  $\eta_B$  ó  $\Omega_B h^2$ , así como de otros parámetros físicos involucrados [7, 77, 4, 78]. De otro lado, cuando se miden dichas abundancias usando técnicas espectroscópicas, las abundancias son función de la metalicidad y se miden en regiones de *redshift* muy altos.

### 3.1. Deuterio Primordial

El deuterio primordial suele observarse en nubes muy viejas del medio interestelar local; es estimado por su línea de absorción de Lyman  $\alpha$  en regiones de alto *redshift* en la línea de visión de los cuasares.

Teniendo en cuenta los niveles de energía del átomo de Deuterio y la serie de Lyman:

$$E_n = - \left( \frac{\mu_D e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \right) \frac{Z^2}{2n^2}$$

con  $\mu_D = \frac{m_e \cdot m_D}{m_e + m_D}$  la masa reducida del átomo hidrogenoide y  $m_D = Zm_p + Nm_n - B(A, Z)$  la masa propia del núcleo de deuterio.

Considerando el espectro de energías del átomo de deuterio, se encuentra un relación para la fórmula de Rydberg:

$$\frac{1}{\lambda} = R' \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

con  $R' = \frac{R}{1 + \mu_D}$  y  $R = 1.09737(02) \times 10^7 \text{m}^{-1}$ .

El corrimiento de las líneas de deuterio en el ultravioleta se detecta al medir velocidades aparentes de cuasares a alto redshift con  $c\delta z \approx 82 \text{km/s}$ .

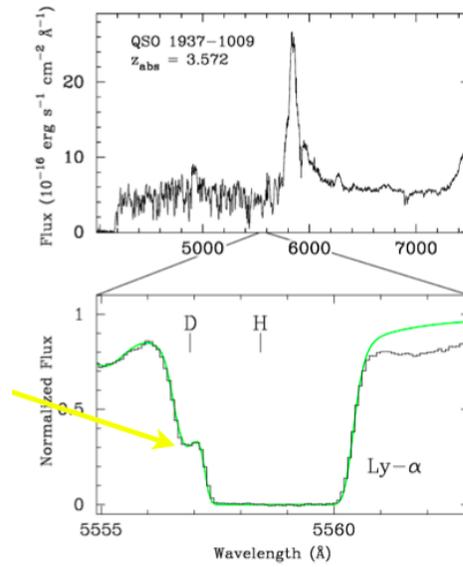


Figura 3.1: Columna de densidad de deuterio

De las observaciones se obtiene una abundancia relativa de deuterio:

$$2 \times 10^{-5} < \frac{Y_D}{Y_H} < 2 \times 10^{-4} \quad (3.1.1)$$

$$\Rightarrow 4.7 \times 10^{-10} < \eta_B < 6.5 \times 10^{-10} \quad (3.1.2)$$

### 3.2. Helio-3

- Cuando las estrellas se acercan a la secuencia principal queman D en  ${}^3\text{He}$  a  $T > 0.5 \times 10^6 \text{K}$ . Por esto, la medida de  $\frac{\text{D} + {}^3\text{He}}{\text{H}}$  es más confiable que cada isótopo por separado.
- Aunque es muy difícil detectarlo, existe una línea análoga a la de 21 cm en el  ${}^3\text{He}^+$  de 3.46 cm.
- Se ha observado que se quema más  ${}^3\text{He}$  del que se produce en las estrellas, por lo que las observaciones solo dan una cota inferior para este elemento.

### 3.3. Helio-4

La abundancia de helio primordiales obtiene midiendo en regiones extragalácticas **HII** en galaxias irregulares (nubes de hidrógeno ionizado) de baja metalicidad.

La cota inferior para la abundancia de este elemento se encuentra a través de la correlación  $Y_{\text{He}}$  con la metalicidad de las estrellas en estas regiones, teniendo en cuenta que el valor más bajo

de metalicidad corresponde al valor primordial, dado que las estrellas no ha sido enriquecida por procesos nucleares secundarios:

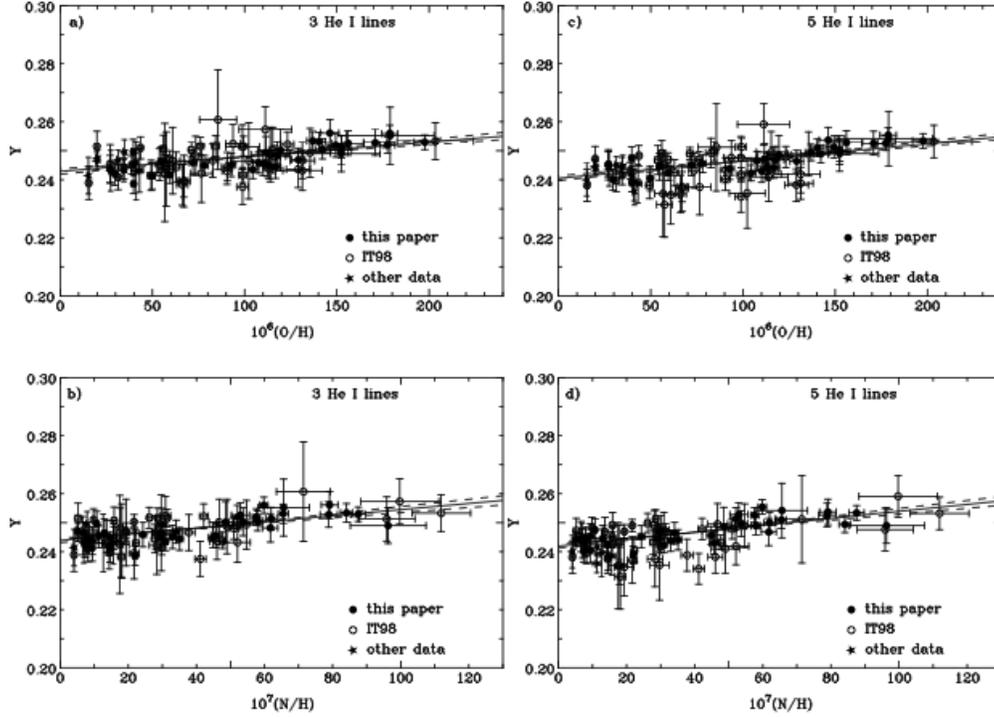


Figura 3.2: Regresiones lineales de la fracción de masa de  $^4\text{He}$  vs. la abundancia de oxígeno y nitrógeno para un total de 82 regiones H II en 76 galaxias compactas azules. En los paneles a y b, la abundancia de  $^4\text{He}$  se deriva usando las líneas de emisión  $\lambda 4471$ ,  $\lambda 5876$  y  $\lambda 6678$  de He I, y en c y d, usando las líneas del mismo elemento  $\lambda 3889$ ,  $\lambda 4471$ ,  $\lambda 5876$ ,  $\lambda 6678$  y  $\lambda 7065$  [18].

La abundancia de  $^4\text{He}$  queda definida [19]:

$$Y_{4\text{He}} = 0.23 + 0.011 \ln(\eta_{10}) + 0.013(N_\nu - 3). \quad (3.3.1)$$

### 3.4. Litio-7

La abundancia de este elemento es inferida de estrellas muy viejas de halo intergaláctico dada su baja metalicidad. Tales estrellas muestran una abundancia de Li aproximadamente constante (*Spite Plateau*) con respecto a la temperatura superficial. Este valor es supuesto como el valor primordial. Sin embargo, si toman lugar procesos que destruyan el litio en el halo, dicho valor sería mayor al medido en el *plateau*.

- Se detecta litio primordial en estrellas de baja metalicidad tipo (POP II) alojadas en el halo de nuestra galaxia, pues no se produce este elemento en la evolución estelar.

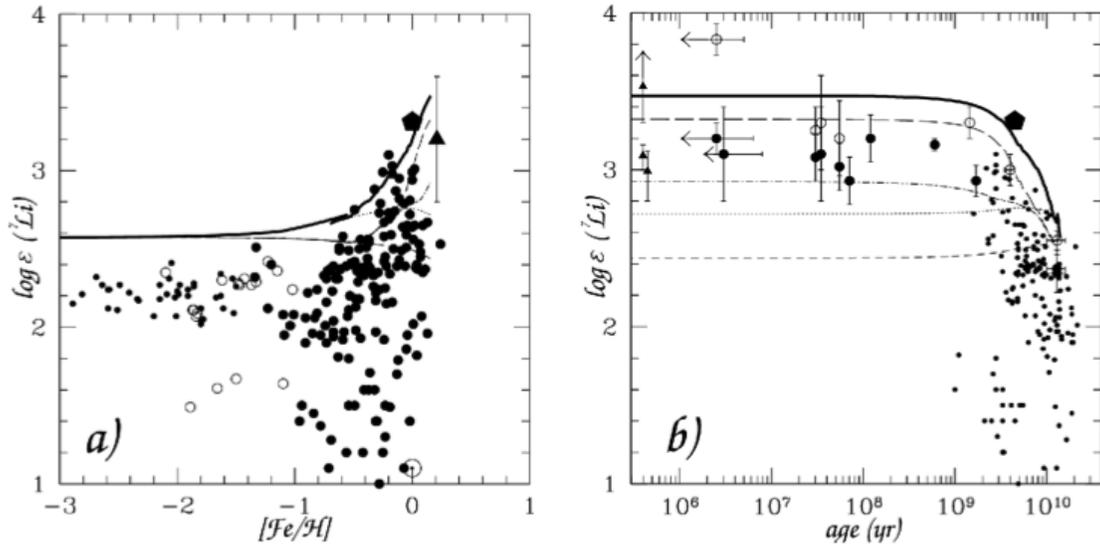


Figura 3.3: Contribución del enriquecimiento de Li primordial por diferentes factores estelares: Estrellas AGB (línea entrecortada corta), SNeII (línea punteada), gigantes rojas de baja masa (línea entrecortada larga) y novae (línea punteada entrecortada) [18].

- ${}^7\text{Li}$  se destruye a  $T > 2 \times 10^6\text{K}$ .
- Se tiene un 50 % de incertidumbre en su medición debido a *inputs* en las secciones eficaces consideradas.

Además, de los valores inferidos de la observación de las abundancias primordiales, es posible encontrar cotas para el valor de  $\Omega_B = \frac{\rho_B}{\rho_{cr}}$ , conociendo  $H_0$ :

$$0.017 < \Omega_B h^2 < 0.024. \quad (3.4.1)$$

# CAPÍTULO 4

---

---

## NUCLEOSÍNTESIS PRIMORDIAL (BBN)

### 4.1. Termodinámica del Universo Temprano

Durante el dominio de radiación en el modelo de FRWL ( $z \gtrsim 3600$ ) la densidad de energía del fluido evoluciona como  $a^{-4}$ . El término de curvatura y la contribución de la constante cosmológica  $\Lambda$  (alrededor de 30 órdenes de magnitud por debajo de la densidad de energía del fluido cosmológico) son despreciables. Una suposición crucial que se impone en la descripción del universo temprano es la existencia de una fase de equilibrio termodinámico que implica que las interacciones que se presentan entre las diferentes especies relativistas sean más rápidas que la expansión del universo. De lo contrario, el camino libre medio entre las partículas es tan grande que la eficiencia de las interacciones cae exponencialmente [20].

Mientras las interacciones necesarias para que las funciones de distribución de las partículas se ajusten al cambio de temperatura más rápido que el factor de expansión, el universo evoluciona a través de una sucesión de estados cuasiestacionarios con  $T \propto a^{-1}$ .

#### 4.1.1. Equilibrio Termodinámico

El plasma en el universo temprano es en muy buena aproximación en equilibrio termodinámico.

La existencia del estado de equilibrio termodinámico implica enormes simplificaciones, dado que todas las cantidades de interés sólo dependen de la temperatura y de los potenciales químicos. La historia previa del sistema termodinámico no necesita ser conocido, salvo por la complejidad del valor de algunos potenciales químicos  $\mu_i$  que deben derivarse de la física de partículas.

En equilibrio térmico, la densidad número de partículas  $n$  de la especie  $i$  en un gas débilmente interactuante con  $g$  grados de libertad, en términos de sus funciones de distribución  $f(p)$  en el espacio de fase:

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(p) d^3p, \quad (4.1.1)$$

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int E(p) f(p) d^3p, \quad (4.1.2)$$

$$p = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{|\vec{p}|^2}{3E} f(p) d^3p, \quad (4.1.3)$$

donde la expresión de la energía proviene del invariante relativista  $P^\mu P_\mu = -m^2 = -E^2 + a^2 p^i p_i$  usando la métrica (2.1.1) con  $k = 0$ .

Para especies en equilibrio cinético, la ocupación en el espacio de fase esta dado por las funciones de distribución cuánticas  $f(p) = (\exp((E - \mu)/T) \pm 1)^{-1}$ , donde + corresponde a Fermi-Dirac y - a la de Bose-Einstein, respectivamente.

En el límite relativista  $T \gg m$  y  $T \gg \mu$  (fermiones no degenerados), las cantidades termodinámicas son:

$$\rho = \begin{cases} \frac{g\pi^2}{30} T^4 & \text{Bose-Einstein} \\ \frac{7}{8} \frac{g\pi^2}{30} T^4 & \text{Fermi-Dirac} \end{cases} \quad (4.1.4)$$

$$n = \begin{cases} \zeta(3) \frac{g}{\pi^2} T^3 & \text{Bose-Einstein} \\ \frac{3}{4} \zeta(3) \frac{g}{\pi^2} T^3 & \text{Fermi-Dirac} \end{cases} \quad (4.1.5)$$

$$p = \frac{\rho}{3}. \quad (4.1.6)$$

La relación anterior que un gas de partículas relativistas se comporta como radiación pues el parámetro de la ecuación de estado es justamente  $\frac{1}{3}$ .

Para partículas relativistas, no degeneradas:

$$\langle E \rangle = \frac{\rho}{n} = \begin{cases} \frac{\pi^4}{30\zeta(3)} T & \text{Bose-Einstein} \\ \frac{7\pi^4}{180\zeta(3)} T & \text{Fermi-Dirac} \end{cases} \quad (4.1.7)$$

Para el caso no relativista, dichas distribuciones se reducen a las de Boltzmann:

$$\rho = mn, \quad n = g \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \exp(-(m - \mu)/T), \quad p = nT \ll \rho. \quad (4.1.8)$$

Dado que  $\rho$  y  $p$  son muy pequeñas para partículas no relativistas ( $m \gg T$ ), es conveniente definir estas cantidades incluyendo sólo las especies relativistas:

$$\rho_{rad} = \frac{\pi^2}{30} g_{eff} T^4 \quad (4.1.9)$$

$$p_{rad} = \frac{\rho_{rad}}{3} = \frac{\pi^2}{90} g_{eff} T^4 \quad (4.1.10)$$

con

$$g_{eff} = \sum_{i=b} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=f} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 \quad (4.1.11)$$

Para  $100\text{MeV} \gtrsim T \gtrsim 1\text{MeV}$  se presenta un estado de equilibrio termodinámico entre pares electrón–positrón  $e^\pm$ , 3 generaciones de neutrinos: electrónico  $\nu^\pm$ , muónico  $\mu^\pm$  y taónico  $\tau^\pm$  (que suponemos son no degenerados) y fotones  $\gamma$ , tal que  $g_{eff} = 10.75$ .

Además, si las partículas se encuentran en equilibrio químico, el potencial químico total  $\mu$  debe conservarse en una reacción de  $i$  cuerpos, tal que:

$$i + j \longleftrightarrow k + l \quad \text{entonces} \quad \mu_i + \mu_j = \mu_k + \mu_l.$$

Adicionalmente, si el sistema se encuentra en equilibrio estadístico, se cumple la relación:

$$\frac{\partial \ln \Omega_1}{\partial E_1} = \frac{\partial \ln \Omega_2}{\partial E_2}, \quad (4.1.12)$$

con  $\Omega$  el número de microestados y  $E$ , la energía asociada a dicho estado.

De otro lado, es importante definir la densidad de entropía por volumen comóvil usando la primera ley de la termodinámica  $TdS = d(\rho V) + pdV$  (haciendo  $\mu \approx 0$ ):

$$d \left[ \frac{(\rho + p)a^3}{T} \right] = 0 \quad \therefore \quad s = \frac{S}{a^3} = \frac{(\rho + p)}{T} = \text{cte}, \quad (4.1.13)$$

para partículas relativistas la entropía total  $S = \frac{2\pi^2}{45} g_*(T \cdot a)^3 = \text{cte}$ , entonces  $T \propto a^{-1}$ .

#### 4.1.2. Dinámica de expansión a $T \approx 1 \text{ MeV}$

El escenario cosmológico donde toma lugar la nucleosíntesis es un plasma a alta temperatura compuesto por protones  $p$ , neutrones  $n$ , neutrinos y sus correspondientes antipartículas  $\nu_i^\pm$ , pares electrón–positrón  $e^\pm$  y fotones  $\gamma$  en equilibrio térmico.

La nucleosíntesis primordial ocurre en el periodo de dominio de radiación ( $T \approx 1$  MeV,  $z \approx 10^9$  y  $t =$  algunos s), donde las ecuaciones (4.1.4), (4.1.5) y (4.1.6) son válidas para las partículas mencionadas mientras su masa sea menor que la temperatura del fluido cosmológico.

### 4.1.3. Desacople de los neutrinos y aniquilación de pares [11]

A etapas tempranas las partículas se mantienen en equilibrio térmico por sus rápidas colisiones. La interacción entre neutrones y protones con los leptones se dan a través de:

$$\nu_e + n \leftrightarrow p + e^-, \quad e^+ + n \leftrightarrow p + \bar{\nu}_e, \quad n \leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (4.1.14)$$

que también mantienen esos bariones en equilibrio químico. Además se asume que los leptones tienen potencial químico nulo. En realidad es muy pequeño por lo que es posible despreciarlo<sup>1</sup> y que existe el mismo número de electrones que de protones lo que garantiza la neutralidad del universo. Bajo estas suposiciones y (4.1.8), la razón de la densidad número de neutrones a protones para ese momento está dado por:

$$\frac{n_n(T)}{n_p(T)} = e^{-\frac{Q}{T}}. \quad (4.1.15)$$

La relación (4.1.15) muestra que las interacciones que dan lugar a la **BBN** son la nuclear fuerte, que da origen a la diferencia de masas  $Q$  entre ambos nucleones (diferentes estados de isospín) y la gravitacional que está presente en el *background* cosmológico y en sí mismo en la presencia de las masas<sup>2</sup>.

La diferencia de masas  $Q$  es definida como:

$$Q = m_n - m_p \approx 1.297 \text{ MeV}, \quad (4.1.16)$$

A la temperatura de 100 MeV la razón de neutrones a protones es muy cercana a la unidad. De esta manera es posible expresar la tasa de neutrones a el número total de bariones como:

$$X(T) = \frac{n_n(T)}{n_n(T) + n_p(T)}. \quad (4.1.17)$$

Mientras el equilibrio químico se mantiene:

<sup>1</sup> $\mu_l \neq 0$  garantiza que hay un ligero exceso de partículas con respecto a las antipartículas.

<sup>2</sup>No obstante, la interacción nuclear débil toma lugar hasta tanto se desacoplen los neutrinos cuando las reacciones (4.1.19) dejan de ser eficientes.

$$X(T) = X_{eq}(T) = \frac{1}{1 + e^{Q/T}}. \quad (4.1.18)$$

Dado el proceso de expansión del universo, la temperatura del plasma cae, por lo que el equilibrio químico de los bariones se rompe dado que las interacciones de los neutrinos son muy débiles para reforzar el mismo.

En este punto  $T \sim 1\text{MeV}$ , la interacción débil de los neutrinos establecida a través de las reacciones:

$$e + \bar{\nu} \leftrightarrow e + \bar{\nu}, \quad \nu + \bar{e} \leftrightarrow \nu + \bar{e}, \quad e + \bar{e} \leftrightarrow \nu + \bar{\nu}, \quad (4.1.19)$$

cesa y la fracción de neutrones a bariones se aproxima a su valor  $X(T \sim 0)$ .

De otra parte, a temperaturas de  $T > 0.511\text{MeV}$  se presentan las reacciones  $e + \bar{e} \leftrightarrow 2\gamma$  y dispersión Compton en equilibrio. Para estos procesos es válido:

$$\mu_e + \mu_{\bar{e}} = 2\mu_\gamma = 0.$$

Para temperaturas menores a la masa de reposo del electrón  $m_e = 0.511\text{MeV}$ , la aniquilación continúa, sin embargo la creación cesa pues los fotones no disponen de la energía umbral para producir  $e^\pm$ . Los pares transfieren su entropía a los fotones, entonces, los neutrinos ahora desacoplados del plasma caen con una temperatura proporcional a  $a^{-1}$ , ligeramente menor a la de los fotones:  $T_\nu < T_\gamma$ .

Considérese la entropía por volumen comóvil en los siguientes instantes:

- $s(a_1)$  antes de la aniquilación ( $g_{eff} = \frac{11}{2}$ ):

$$s(a_1) = \frac{2\pi^2}{45} T_1^3 \left( 2 + \frac{7}{8}(10) \right) = \frac{43\pi^2}{90} T_1^3, \quad (4.1.20)$$

- $s(a_2)$  instante posterior a la aniquilación ( $g_{eff} = 2$ ):

$$s(a_2) = \frac{2\pi^2}{45} \left( 2T_\gamma^3 + \frac{7}{8}(6)T_\nu^3 \right) = \frac{4\pi^2}{45} \left( 2 \left( \frac{T_\gamma}{T_\nu} \right)^3 + \frac{21}{8} \right) T_\nu^3, \quad (4.1.21)$$

usando la conservación de la entropía por volumen comóvil se tiene la igualdad:

$$s(a_1)a_1^3 = s(a_2)a_2^3 \quad (4.1.22)$$

$$\begin{aligned}
\frac{43\pi^2}{90}(T_1 a_1)^3 &= \frac{4\pi^2}{45} \left( 2 \left( \frac{T_\gamma}{T_\nu} \right)^3 + \frac{21}{8} \right) (T_\nu a_2)^3 \\
\frac{43}{2}(T_1 a_1)^3 &= 4 \left( \left( \frac{T_\gamma}{T_\nu} \right)^3 + \frac{21}{8} \right) (T_\nu a_2)^3 \\
\frac{43}{8} - \frac{21}{8} &= \left( \frac{T_\gamma}{T_\nu} \right)^3 \\
T_\nu &= \left( \frac{4}{11} \right)^{1/3} T_\gamma.
\end{aligned}$$

La temperatura del CMB hoy es de  $T_\gamma = 2.73\text{K}$ , lo que conduce a una temperatura de los neutrinos hoy de  $T_\nu = 1.96\text{K}$ .

Durante la época que nos concierne, el término de curvatura en la expansión del universo es despreciable. Por el momento se considerará que la contribución de energía oscura, cualquiera sea su manifestación es nula (en el capítulo 8 se incorporará al cálculo una contribución de EDE que se justificará en el capítulo 6).

Con estas condiciones, la primera ecuación de Friedmann (2.1.3) por un único término de densidad de energía de materia:

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho. \tag{4.1.23}$$

## 4.2. Abundancia primordial de neutrones y ${}^4\text{He}$ [?]

La forma más adecuada de encontrar las abundancias primordiales resulta de conocer la abundancia de neutrones cuando el universo evoluciona. Denotamos  $\lambda_{pn}(t)$  la tasa de conversión de protones en neutrones y  $\lambda_{np}$  la tasa del proceso inverso.

Dada la reacción  $n + \nu_e \rightarrow p + e^-$  y teniendo en cuenta la expresión para la tasa de decaimiento  $\lambda_{np}$ :

$$\lambda_{np} = n_{e\nu}^0 \langle \sigma v \rangle, \quad (4.2.1)$$

con  $\langle \sigma v \rangle$  dado por la expresión:

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{1}{n_n^0 n_{\nu_e}^0} \int \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_n} \int \frac{d^3 p_\nu}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_\nu} \int \frac{d^3 p_p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \int \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_e} e^{-(E_n + E_\nu)/T} \times \\ (2\pi)^4 \delta^3(p_n + p_\nu - p_n - p_e) \delta(E_n + E_\nu - E_n - E_e) |M|^2. \quad (4.2.2)$$

teniendo en cuenta que  $n_n = 2 \left( \frac{m_n T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m_n/T}$ , e integrando sobre  $p_n$  se tiene:

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{1}{n_\nu^0} \frac{e^{m_n/T}}{\left( \frac{m_n T}{2\pi} \right)^{3/2}} e^{-m_n/T} \left( \frac{m_n T}{2\pi} \right)^{3/2} (2\pi)^2 \int dp_p p_p^2 \delta^3(p_\nu - (p_n + p_e)) \int \frac{d^3 p_\nu}{(2\pi)^3} \frac{e^{-p_\nu/T}}{2p_\nu} \times \\ \int \frac{d^3 p_\nu}{(2\pi)^3} \frac{e^{-p_\nu/T}}{2p_\nu} \int \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_e} \delta(Q - E_\nu - E_e) |M|^2, \\ \langle \sigma v \rangle = \frac{1}{n_\nu^0} \frac{\pi}{4m^2} \int \frac{d^3 p_\nu}{(2\pi)^3} \frac{e^{-p_\nu/T}}{2p_\nu} \int \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_e} \delta(Q - E_n - E_e) |M|^2,$$

donde se han usado las expresiones de las energía dependiendo de si la especie es relativista ( $e^\pm$ ,  $\gamma$ ,  $\nu_i^\pm$ ) o no ( $p$ ,  $n$ ). Con estas consideraciones se obtiene:

$$\lambda_{np} = n_\nu^0 \langle \sigma v \rangle = \frac{\pi}{4m^2} \int \frac{d^3 p_\nu}{(2\pi)^3} \frac{e^{-p_\nu/T}}{2p_\nu} \int \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_e} \delta(Q + p_\nu - p_e) |M|^2, \quad (4.2.3)$$

La amplitud al cuadrado de esta reacción débil está dada por  $|M|^2 = 32G_F^2(1+3g_A^2)m_p^2 p_\nu p_e$ , donde  $g_A$  es el vector axial acoplado del nucleón y está relacionado con su constante de estructura. La mejor medición de  $g_A$  se hace vía la vida media del neutrón,  $\tau_n = \lambda_0 G_F^2(1+3g_A^2) \frac{m_e^5}{(2\pi)^3}$  donde  $\lambda_0$  está definido por la integral en el espacio de fase es:

$$\lambda_0 = \int_0^{Q/m_e} dx \cdot x(x - Q/m_e)(x^2 - 1)^{1/2} = 1.636, \quad (4.2.4)$$

y la variable adimensional  $x$  queda definida por  $x = \frac{E}{T}$ .

De esta manera, la expresión (4.2.3) puede escribirse en términos de  $\tau_n$ :

$$\begin{aligned}\lambda_{np} &= n_\nu^0 \langle \sigma v \rangle = \frac{\pi}{4m^2} \int \frac{d^3 p_\nu}{(2\pi)^3 2p_\nu} e^{-p_\nu/T} \int \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3 2p_e} \delta(Q + p_\nu - p_e) (32G_F^2 (1 + 3g_A^2) m_p^2 p_\nu p_e), \\ &= n_\nu^0 \langle \sigma v \rangle = \frac{\pi}{4m^2} \int \frac{d^3 p_\nu}{(2\pi)^3 2} e^{-p_\nu/T} \int \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3 2} \delta(Q + p_\nu - p_e) (32G_F^2 (1 + 3g_A^2) m_p^2),\end{aligned}$$

Sin embargo, a la reacción anterior también contribuyen dos tasas de decaimiento, así como el decaimiento del mismo electrón, y la reacción inversa  $p \rightarrow n$ :

$$\lambda(\nu + n \rightarrow p + e^-) = A \int_0^\infty dp_\nu p_\nu^2 p_e E_e e^{-p_\nu/T}, \quad (4.2.5)$$

$$\lambda(e^+ + n \rightarrow p + \bar{\nu}) = A \int_0^\infty dp_e p_e^2 p_\nu E_\nu e^{-p_e/T}, \quad (4.2.6)$$

$$\lambda(n \rightarrow p + \bar{\nu} + e^-) = A \int_0^\infty dp_e p_e^2 p_\nu E_\nu, \quad (4.2.7)$$

haciendo  $p_e = E_e = Q + p_\nu$  en (4.2.5) se tiene:

$$\begin{aligned}\lambda(\nu + n \rightarrow p + e^-) &= A \int_0^\infty dp_\nu p_\nu^2 (Q + p_\nu)^2 e^{-p_\nu/T}, \\ &= A \int_0^\infty dp_\nu p_\nu^2 (Q^2 + 2Qp_\nu + p_\nu^2) e^{-p_\nu/T},\end{aligned}$$

usando el cambio de variable  $u = \frac{p_\nu}{T}$  e integrando la función Gamma de orden  $n$ <sup>3</sup>:

$$\begin{aligned}\lambda(\nu + n \rightarrow p + e^-) &= A (Q^2 T^3 \Gamma(3) + 2QT^4 \Gamma(4) + T^5 \Gamma(5)), \\ &= A (2Q^2 T^3 + 12QT^4 + 24T^5), \\ &= 2AT^3 (Q^2 + 6QT + 12T^2) = \lambda(n + e^+ \rightarrow p + \bar{\nu}).\end{aligned}$$

Adicionalmente, debe recordarse que la tasa de decaimiento del neutrón libre es igual a  $1/\tau_n$ . Haciendo  $p_\nu = Q^2 - p_e^2$  y llamando  $p_0 = (Q^2 - m_e^2)^{1/2}$  se tiene:

---

<sup>3</sup> $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$

$$\begin{aligned}
\lambda(n \rightarrow p + \bar{\nu} + e^-) &= A \int_0^{p_0} dp_e p_e^2 (Q - p_e)^2, \\
&= A \int_0^{p_0} dp_e p_e^2 (Q^2 - 2Qp_e + p_e^2), \\
&= A \left[ Q^2 \int_0^{p_0} dp_e p_e^2 - 2Q \int_0^{p_0} dp_e p_e^3 + \int_0^{p_0} dp_e p_e^4 \right], \\
&= A \left[ \frac{Q^2}{3} (Q^2 - p_e^2)^{3/2} - \frac{Q}{2} (Q^2 - p_e^2)^2 + \frac{1}{5} (Q^2 - p_e^2)^{5/2} \right], \\
&= \frac{A}{5} (Q^2 - p_e^2)^{1/2} \left[ \frac{1}{6} Q^4 - \frac{3}{4} Q^2 m_e^2 - \frac{2}{3} m_e^4 \right] + \frac{1}{4} A m_e^4 Q \cosh^{-1} \left( \frac{Q}{m_e} \right).
\end{aligned}$$

Como  $\lambda(n \rightarrow p + \bar{\nu} + e^-) = \frac{1}{\tau_n}$ ,  $Q = 1.293$  MeV y  $m_e = 0.511$  MeV, entonces:

$$\frac{1}{\tau_n} = 0.0157 A Q^5, \quad (4.2.8)$$

conduciendo a la constante de normalización  $A$  de las reacciones anteriores:

$$4A = a \frac{Q^{-5}}{\tau_n} \quad \text{con } a = 255, \quad (4.2.9)$$

las reacciones  $\lambda(\nu + n \rightarrow p + e^-)$  y  $\lambda(e^+ + n \rightarrow p + \bar{\nu})$  quedan escritas de la forma (usando la variable adimensional  $x = \frac{Q}{T}$ ):

$$\lambda(\nu + n \rightarrow p + e^-) = \lambda(n + e^+ \rightarrow p + \bar{\nu}) = a \frac{Q^5}{\tau_n} T^3 (Q^2 + 6QT + 12T^2), \quad (4.2.10)$$

$$= \frac{a}{\tau_n} \frac{1}{x^5} (x^2 + 6x + 12), \quad (4.2.11)$$

$$= \frac{255}{x^5 \tau_n} (x^2 + 6x + 12). \quad (4.2.12)$$

Considerando este decaimiento y teniendo en cuenta que los leptones ( $e^\pm, \nu^\pm$ ) están en completo equilibrio  $n_l^0 = n_l$ , la ecuación de Boltzmann puede escribirse:

$$a^{-3} \frac{d(n_n a^3)}{dt} = n_n^0 n_l^0 \langle \sigma v \rangle \left[ \frac{n_p n_l}{n_p^0 n_l^0} - \frac{n_n n_l}{n_n^0 n_l^0} \right]$$

$$a^{-3} \frac{d(n_n a^3)}{dt} = \frac{n_n^0}{n_n} n_l^0 \langle \sigma v \rangle \left[ n_p \frac{n_n^0}{n_p^0} - n_n \right]$$

$$a^{-3} \frac{d(n_n a^3)}{dt} = n_l^0 \langle \sigma v \rangle \left[ n_p e^{-Q/T} - n_n \right],$$

identificando  $\lambda_{np} = n_l^0 \langle \sigma v \rangle$  y  $X_n = \frac{n_n}{n_n + n_p}$ , la expresión anterior se puede escribir de la forma:

$$a^{-3} \frac{d(X_n(n_n + n_p)a^3)}{dt} = \lambda_{np} \left[ n_p e^{-Q/T} - X_n(n_p + n_n) \right] \quad (4.2.13)$$

$$a^{-3}(n_n + n_p)a^3 \frac{dX_n}{dt} = \lambda_{np} \left[ n_p e^{-Q/T} - X_n(n_p + n_n) \right] \quad (4.2.14)$$

$$\frac{dX_n}{dt} = \lambda_{np} \left[ \frac{n_p}{n_n + n_p} e^{-Q/T} - X_n \right] \quad (4.2.15)$$

$$\frac{dX_n}{dt} = \lambda_{np} \left[ (1 - X_n) e^{-Q/T} - X_n \right], \quad (4.2.16)$$

La ecuación (4.2.16) tiene como solución:

$$X(t) = \int_{t_0}^t dt' I(t, t') \lambda_{pn}(t') + I(t, t_0) X(t_0), \quad (4.2.17)$$

donde el factor integrante esta dado por:

$$I(t, t') = \exp \left[ - \int_{t'}^t dt'' \Lambda(t'') \right], \quad (4.2.18)$$

con

$$\Lambda(t) = \lambda_{pn} + \lambda_{np}. \quad (4.2.19)$$

Las tasas  $\lambda_{pn}$  y  $\lambda_{np}$  son muy altas en etapas muy tempranas cuando  $T$  es del orden de 100 MeV. Para un tiempo inicial  $t_0$  cercano a 0, el factor integrante  $I(t, t')$  de la ecuación (4.2.17) es muy pequeño por  $t \sim 1/\Lambda(t_0)$ , entonces la integral puede calcular desde 0 y la diferencia en las contribuciones de tiempos iniciales es despreciable.

Asimismo, para tiempos  $t$  posteriores a  $t_0$ , las reacciones que toman lugar borran las condiciones iniciales de la integral.

Entonces,  $X(t)$  queda de la forma:

$$X(t) = \int_0^t dt' I(t, t') \lambda_{pn}(t'). \quad (4.2.20)$$

Para mostrar que el población de neutrones esta en equilibrio aún después de salir de su valor de equilibrio  $X_{eq}(t)$ , se usa que:

$$I(t, t') = \frac{1}{\Lambda(t')} \frac{d}{dt'} I(t, t'), \quad (4.2.21)$$

integrando por partes se obtiene:

$$X(t) = \frac{\lambda_{pn}(t)}{\Lambda(t)} - \int_0^t dt' I(t, t') \frac{d}{dt'} \left[ \frac{\lambda_{pn}(t')}{\Lambda(t')} \right], \quad (4.2.22)$$

En el régimen donde la tasa total de la reacción  $\Lambda(t)$  es muy grande en comparación con la tasa de variación temporal de las mismas, el último término en la ecuación (4.2.22) resulta ser una pequeña corrección, como se muestra cuando se realiza una segunda integración por partes:

$$X(t) \simeq \frac{\lambda_{pn}(t)}{\Lambda(t)} - \frac{1}{\Lambda(t)} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\lambda_{pn}(t)}{\Lambda(t)} \right], \quad (4.2.23)$$

donde los términos de orden  $(d\lambda/dt)^2$  y  $d^2\lambda/dt^2$  han sido despreciados.

Los leptones se mantienen en equilibrio térmico con los fotones por dispersión Compton, por lo que el balance de las interacciones débiles entre bariones exige:

$$\lambda_{pn} = \exp \left[ -\frac{Q}{T(t)} \right] \lambda_{np}, \quad (4.2.24)$$

entonces:

$$\frac{\lambda_{pn}(t)}{\Lambda(t)} = \frac{\lambda_{pn}(t)}{\lambda_{pn}(t) + \lambda_{np}(t)} = \frac{1}{1 + e^{\frac{Q}{T(t)}}} = X_{eq}(T), \quad (4.2.25)$$

Con el nivel de precisión trabajado hasta ahora, la ecuación (4.2.23) puede expresarse como una expansión de Taylor:

$$X_n(t) \simeq X_{eq} \left[ T \left( t - \frac{1}{\Lambda(t)} \right) \right], \quad (4.2.26)$$

lo que implica que a primera aproximación la población de neutrones su valor de equilibrio, pero en etapas tempranas, el tiempo se ve retardado por un factor  $\frac{1}{\Lambda(t)}$ . El resultado anterior puede reexpresarse de la forma:

$$X_n(t) \simeq X_{eq} - \frac{1}{\Lambda(t)} \frac{d}{dt} \left( \frac{\lambda_{pn}(t)}{\Lambda(t)} \right) X_{eq} \quad (4.2.27)$$

$$X_n(t) \simeq X_{eq} \left( 1 - \frac{1}{\Lambda(t)} \dot{T} \frac{d}{dT} \right), \quad (4.2.28)$$

$$(4.2.29)$$

Dada la relación  $aT = \text{cte}$ , entonces  $X(t) = X_{eq}(T_{eff}(t))$  con  $T_{eff}(t) = \left( 1 + \frac{1}{\Lambda(t)} \frac{\dot{a}}{a} \right)$ . La condición de equilibrio se mantiene hasta el tiempo definido por  $\frac{\dot{a}}{a} \simeq \Lambda$ .

Sin embargo, la solución (4.2.16) puede expresarse usando la variable adimensional  $x = \frac{Q}{T}$ , tal que  $\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t} \frac{dT}{dt}$  o de forma equivalente,  $dx = -\frac{x}{t} dT$  y  $\frac{dX}{dt} = \frac{dX}{dx} \frac{dx}{dt}$ .

Adicionalmente, de la ecuación de Friedmann puede deducirse que  $\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -\sqrt{\frac{4\pi^3}{45} g_{eff} Q^4 x^2}$

$$\frac{dX_n}{dx} = \frac{\lambda_{np}}{xH(x=1)}(X_n - (1 - X_n)e^{-x}), \quad (4.2.30)$$

La solución formal de esta ecuación diferencial esta dada por:

$$X_n(x) = \int_{x_i}^x dx' \frac{\lambda_{np}(x')}{x'H(x')} e^{-x'} \exp(\mu(x') - \mu(x)), \quad (4.2.31)$$

donde  $x_i$  es algún valor inicial definido para muy alta temperatura y la función  $\mu(x)$ :

$$\mu(x) = \int_{x_i}^x \frac{dx'}{x'H(x')} (1 + e^{-x'}) \lambda_{np}(x'). \quad (4.2.32)$$

Usando (4.2.24) se encuentra  $\Lambda(x) = (1 - e^{-x})\lambda_{np}(x)$ , el factor integrante de la solución de la ecuación de Boltzmann (4.2.31) puede expresarse en términos de la variable  $x$ :

$$I(x, x') = \exp \left[ - \int_{x'}^x dx'' \frac{dt''}{dx''} \Lambda(x'') \right], \quad (4.2.33)$$

Para calcular el jacobiano de la transformación  $\frac{dt''}{dx''}$ , se recurre a la ecuación de Friedmann y  $(aT) = \text{cte}$ :

$$\frac{dt}{dx} = \left( \frac{4\pi^3 g_{eff}}{45 m_{pl}^2} Q^2 \right)^{-1/2} x^{-3}, \quad (4.2.34)$$

con el elemento (4.2.34):

$$\begin{aligned} I(x, x') &= \exp \left[ - \int_{x'}^x dx'' \left( \frac{45 m_{pl}^2}{4\pi^3 g_{eff} Q^2} \right)^{1/2} x'' (1 - e^{-x''}) \lambda_{np}(x'') \right] \\ I(x, x') &= \exp \left[ \int_{x_i}^{x'} \frac{dx''}{H(x'')} \frac{(1 - e^{-x''})}{x^{-1''}} \lambda_{np}(x'') - \int_{x_i}^x \frac{dx''}{H(x'')} \frac{(1 - e^{-x''})}{x^{-1''}} \lambda_{np}(x'') \right] \\ I(x, x') &= \exp [\mu(x') - \mu(x)]. \end{aligned}$$

Conocido el factor integrante, se encuentra la solución de la abundancia de los neutrones en términos de  $x$ :

$$\begin{aligned} X_n(x) &= \int_{x_i}^x dx' I(x, x') \frac{d}{dx'} \left( \frac{e^{-x'} \lambda_{np}(x')}{\Lambda(x')} \right) \\ X_n(x) &= \int_{x_i}^x dx' I(x, x') e^{-x'} \lambda_{np}(x') \left( \frac{1}{x'H(x')} \right) \\ X_n(x) &= \int_{x_i}^x \frac{dx'}{x'H(x')} e^{-x'} \lambda_{np}(x') \exp [\mu(x') - \mu(x)]. \end{aligned}$$

No obstante, es necesario conocer cual es el valor de  $\mu(x)$  para tiempos lejanos  $x \rightarrow \infty$ , reemplazando (4.2.10) en (4.2.32) se tiene:

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \frac{255}{\tau_n Q} \left( \frac{4\pi^3 G g_{eff} Q^2}{45} \right)^{-1/2} \int_{x_i}^x \frac{x'}{x'^5} (12 + 6x' + x'^2)(1 + e^{-x'}) dx' \\ \mu(x) &= \frac{255}{\tau_n Q} \left( \frac{4\pi^3 G g_{eff} Q^2}{45} \right)^{-1/2} \int_{x_i}^x (12x'^{-4} + 6x'^{-3} + x'^{-2})(1 + e^{-x'}) dx' \\ \mu(x) &= \frac{255}{\tau_n Q} \left( \frac{4\pi^3 G g_{eff} Q^2}{45} \right)^{-1/2} [4x'^{-3} + 3x'^{-2} + x'^{-1}]_{x_i}^x \\ &+ 12 \int_{x_i}^x dx' (12x'^{-4} + 6x'^{-3} + x'^{-2}) e^{-x'} \\ \mu(x) &= \frac{255}{\tau_n Q} \left( \frac{4\pi^3 G g_{eff} Q^2}{45} \right)^{-1/2} \left[ (4x'^{-3} + 3x'^{-2} + x'^{-1}) + (4x'^{-3} + x'^{-2}) e^{-x'} \right]_{x_i}^x.\end{aligned}$$

Integrando numéricamente la expresión anterior bajo la consideración que  $x_i \rightarrow 0$  ( $T \rightarrow \infty$ ) se tiene:

$$\mu_0 = -\frac{255}{\tau_n Q} \left( \frac{4\pi^3 G g_{eff} Q^2}{45} \right)^{-1/2} \cdot 1.73,$$

usando  $\tau_n = 886.7s$ ,  $Q = 1.293\text{MeV}$ ,  $G = 1.22 \times 10^{22}\text{MeV}$  y  $g_{eff} = 10.75$ , se encuentra:

$$\mu_0 = -0.2509,$$

entonces:

$$\mu(x) = 0.2509 \left[ (4x_i^{-3} + 3x_i^{-2} + x_i^{-1}) + (4x_i^{-3} + x_i^{-2}) e^{-x_i} \right] \quad (4.2.35)$$

Para encontrar la abundancia final de neutrones es necesario reescribir (4.2.23) en términos de  $x$  y usar la relación (4.2.25), tal que:

$$X_n(x) = \frac{\lambda_{np}(x)}{\Lambda(x)} + \int_0^\infty dx' e^{x'} \frac{1}{(1 + e^{-x'})^2} \exp [\mu(x') - \mu(x)]$$

Teniendo en cuenta la expresión (4.2.35), el término  $\mu(x') - \mu(x) = -2\mu(x)$ .

La abundancia final de neutrones para la época de la nucleosíntesis resulta:

$$X_n(x \rightarrow \infty) = \frac{1}{1 + e^x} + \int_0^\infty dx' e^{x'} \frac{1}{(1 + e^{-x'})^2} e^{-2\mu(x)} \quad (4.2.36)$$

$$X_n(x \rightarrow \infty) = 0.151. \quad (4.2.37)$$

Una vez conocida la evolución de la abundancia de neutrones, es necesario considerar que algunos neutrinos van a protones vía decaimiento beta. Para contar esta contribución, se cambiará de notación  $X(x) \rightarrow \bar{X}(x)$ , usando barra para la abundancia encontrada en (4.2.36). Incluyendo el efecto del decaimiento del neutrón (con tiempo de vida  $\tau$ ) en la ecuación de Boltzmann (4.2.16) queda de la forma:

$$X(t) = e^{-t/\tau} \bar{X}(x(t)), \quad (4.2.38)$$

dado que  $\bar{X}(x)$  no varía notablemente durante el periodo en el que los neutrones decaen.

Cuando la temperatura cae por debajo del valor de la energía de ligadura del deuterio  $B_D$ , los neutrones son capturados para formar deuterio, y este elemento, a su vez interactúa para dar lugar al  ${}^4\text{He}$ . El tiempo en que los neutrones son capturados en se  ${}^4\text{He}$  define como  $t_c$ .

En un cálculo aproximado, cuando se reemplaza el tiempo de captura  $t_c$  en la ecuación (4.2.38) y el valor asintótico de  $\bar{X}(x)$  determinado previamente, se encuentra la abundancia relativa de neutrones y con esto, la fracción de masa  $Y_{4\text{He}}$  de helio que es producido en el universo temprano. Dado que el efecto del decaimiento del neutrón da solo una pequeña corrección, una estimación de  $t_c$  dará una aproximación bastante razonable de  $Y_4$ .

Usando las ecuación (4.1.23) y la relación:

$$a(t)T_\nu(t) = \text{cte}, \quad (4.2.39)$$

se obtiene:

$$\frac{1}{T_\nu(t)} \frac{dT_\nu(t)}{dt} = - \left( \frac{8\pi G}{3} \rho \right)^{1/2}, \quad (4.2.40)$$

que al ser integrada da:

$$t = \int_{T_\nu}^\infty \frac{dT_\nu(t')}{T_\nu(t')} \frac{dT_\nu(t)}{dt} \left( \frac{3m_{pl}^2}{8\pi\rho} \right)^{1/2}, \quad (4.2.41)$$

donde se ha usado la relación  $G = m_{pl}^{-2}$ . Dado que para nuestro momento de interés el plasma se compone de fotones y neutrinos desacoplados. Con (4.1.4) y el número de grados de libertad asociados a las especies mencionadas:

$$g = g_\nu \frac{\pi^2}{30} T_\nu^4 + g_\gamma \frac{\pi^2}{30} T_\gamma^4 = g_{eff} \frac{\pi^2}{30} T_\nu^4, \quad (4.2.42)$$

con  $N_{eff}$  definida por:

$$g_{eff} = g_\nu + g_\gamma \left(\frac{11}{4}\right)^{4/3} = \frac{21}{4} + 2 \left(\frac{11}{4}\right)^{4/3}, \quad (4.2.43)$$

entonces:

$$t = \left(\frac{45}{16\pi^3 g_{eff}}\right)^{1/2} \frac{m_{pl}}{T_\nu^2} + t_0, \quad (4.2.44)$$

$$t = \left(\frac{45}{16\pi^3 g_{eff}}\right)^{1/2} \left(\frac{11}{4}\right)^{2/3} \frac{m_{pl}}{T_\gamma^2} + t_0. \quad (4.2.45)$$

La constante de integración puede ser estimada realizando un análisis perturbativo de la integral (4.2.41) alrededor de  $\rho$ . Para ello se computa al primer orden la cantidad  $\rho - \rho_0$ :

$$t_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{3m_{pl}^2}{8\pi}\right)^{1/2} \int_{T_\nu}^{\infty} \frac{dT'_\nu}{T'_\nu} \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0^{3/2}}. \quad (4.2.46)$$

Con:

$$\rho - \rho_0 = \rho_{e\gamma} - 2 \left(\frac{11}{4}\right)^{4/3} \frac{\pi^2}{30} T_\nu^4, \quad (4.2.47)$$

donde  $\rho_{e\gamma}$  es la densidad de energía del subsistema electrón-fotón. Dado que  $\rho_0 \sim T_\nu^4$ , se tiene:

$$\frac{1}{T'_\nu} \frac{1}{\rho_0^{3/2}} = -\frac{1}{6} \frac{d}{dT'_\nu} \rho_0^{-3/2}. \quad (4.2.48)$$

Integrando por partes se obtiene:

$$t_0 = -\frac{1}{12} \left(\frac{3m_{pl}^2}{8\pi}\right)^{1/2} \int_{T_\nu}^{\infty} dT'_\nu \rho_0^{-3/2} \frac{d}{dT'_\nu} (\rho - \rho_0), \quad (4.2.49)$$

tal que:

$$t_0 \simeq 2s. \quad (4.2.50)$$

La expresión (4.2.44) es la más general para el periodo comprendido entre la aniquilación de pares y la recombinación, luego debe usarse para calcular  $t_c$ .

En equilibrio los neutrones, protones y deuterios se comportan como gases libres no relativistas con densidad número:

$$n_a = g_a \cdot e^{(\mu_a + m_a)/T_\gamma} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-p^2/2m_a T_\gamma}, \quad (4.2.51)$$

$$= g_a \cdot e^{(\mu_a + m_a)/T_\gamma} \left( \frac{m_a T_\gamma}{2\pi} \right)^{3/2}. \quad (4.2.52)$$

donde  $g_a$  es el número de grados de libertad de cada especie en la reacción  $g_n = g_p = 2$ ,  $g_D = 3$  y  $\mu_a, m_a$  el potencial químico y la masa asociada a cada partícula; a etapas tempranas, estos gases se encuentran en equilibrio químico, entonces:

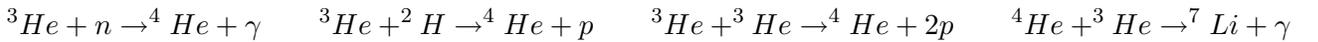
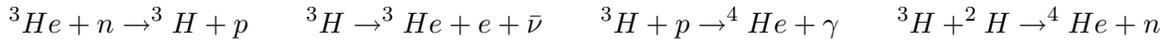
$$\mu_D = \mu_n + \mu_p. \quad (4.2.53)$$

entonces:

$$\frac{n_n n_p}{n_D} = \frac{g_n g_p}{g_D} \left( \frac{m_n m_p}{m_D} \right)^{3/2} \left( \frac{T_\gamma}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-B_D/T_\gamma} \quad (4.2.54)$$

con  $B_D = m_p + m_n - m_D$ , la energía de ligadura del deuterio. La ecuación anterior se conoce como Ecuación de Saha ó Equilibrio Estadístico Nuclear (NSE).

Sin embargo, bajo la condición de NSE se produce una fracción muy baja de deuterios hasta tanto la temperatura del plasma  $T_\gamma$  no este por debajo de la energía de ligadura del elemento. Esta situación se conoce como el *deuteron bottleneck* que inhibe la producción de  ${}^4\text{He}$  por reacciones de dos cuerpos, como las mostradas a continuación:



Desde este punto, se tratarán las abundancias de los elementos que pueden formar durante la etapa de la nucleosíntesis cosmológica, por lo que es conveniente usar las fracciones de abundancias  $X_a$  normalizadas a la densidad número de bariones  $n_B$ . De esta manera, un nucleón  $a$ -esimo

tiene una densidad número  $X_a = n_a/n_B$  y además se cumple la relación  $X_p + X_n + 2X_D + 3X_{3He} + 4X_{4He} + \dots = 1$ .

Usando la razón de bariones a fotones  $\eta = \frac{n_B}{n_\gamma}$  y la expresión de  $n_\gamma$ , la ecuación de NSE (4.2.54) puede reescribirse de la forma:

$$\frac{X_n X_p}{X_D} = G_{np}, \quad (4.2.55)$$

donde

$$G_{np} = \frac{\pi^{1/2}}{12\zeta(3)} \frac{1}{\eta} \left( \frac{m_p}{T_\gamma} \right)^{3/2} e^{-B_D/T_\gamma}. \quad (4.2.56)$$

Dado que  $\eta = 5.5 \times 10^{-10}$ , se encuentra que para  $T_\gamma > 0.1\text{MeV}$ , que implica que el término  $G_{np}$  es muy grande, luego la proporción de la abundancia  $X_D$  en general es muy pequeña (del orden de  $10^{-4}$ ) y no hay una población suficiente para producir  ${}^4\text{He}$  por reacciones de dos cuerpo como las mencionadas previamente.

Para determinar cuantitativamente el tiempo de captura del neutrón, es necesario examinar las tasas que dan lugar a dichas reacciones. Para este fin, se definirá la variable adimensional de temperatura escalada:

$$z = \frac{B_D}{T_\gamma}, \quad (4.2.57)$$

entonces, es posible definir un parámetro escalado para las tasas de las reacciones así:

$$R = n_B \frac{dt}{dz} \langle \sigma v \rangle_T, \quad (4.2.58)$$

donde  $\langle \sigma v \rangle_T$  representa la sección eficaz térmicamente promediada de una reacción determinada. Usando (4.2.44) para calcular  $\frac{dt}{dz}$  y expresando la densidad número de bariones  $n_B$  en términos de la razón de bariones a fotones  $\eta_B$  de la forma  $n_B = \eta_B n_\gamma$  y (4.1.5), la expresión anterior queda de la forma:

$$R = \frac{\eta_B}{z^2} \left( \frac{45}{\pi^7 N_{eff}} \right)^{1/2} \left( \frac{11}{4} \right)^{2/3} \zeta(3) \epsilon_D m_{pl} \langle \sigma v \rangle_T. \quad (4.2.59)$$

La población de neutrones y protones para el momento está definida por:

$$\frac{dX_n}{dz} = -R_{np}(X_n X_p - G_{np} X_D) + \dots \quad (4.2.60)$$

$$\frac{dX_p}{dz} = -R_{np}(X_n X_p - G_{np} X_D) + \dots \quad (4.2.61)$$

El factor de Saha  $G_{np}$  aparece en la reacción inversa satisfaciendo la condición de equilibrio entre  $X_n$  y  $X_p$ . Dado que el proceso de captura neutrón–protón es exotérmico, el producto  $\sigma_{np}v$  es constante a bajas temperaturas que son los de nuestro interés. Con el valor  $\sigma_{np}v = 4.55 \times 10^{-20} \text{cm}^3/\text{s}$  [21], calculamos el valor de la ecuación (4.2.59):

$$R_{np} \simeq 6.2 \left( \frac{29}{z} \right)^2 \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right), \quad (4.2.62)$$

donde  $\eta_0 = 6.2 \times 10^{-10}$  es el valor nominal dado por WMAP-7, y que se asumirá para los demás desarrollos del trabajo. Como se puede observar, para tiempos previos al tiempo de captura del neutrón:  $z < 29$  y la rata es razonablemente grande,  $R \gtrsim 5$ . Entonces, si la población de deuterios no aumenta por otras reacciones como las presentadas arriba, protones, neutrones y deuterios se mantienen en equilibrio con  $X_n + X_p + 2X_D = 1$  y  $X_D = G_{np}^{-1} X_p X_n$ . Mientras  $G_{np}^{-1}$  sea muy pequeño, también lo será la población de deuterio y es posible hacer la aproximación:

$$X_D^{(1)} = G_{np}^{-1} X_p^{(0)} X_n^{(0)} \quad (4.2.63)$$

donde  $X_p^{(0)}$  y  $X_n^{(0)}$  son las tasas de los nucleones no perturbados que obedecen  $X_p^{(0)} + X_n^{(0)} = 1$ . Usando esta primera aproximación se tiene:

$$X_n + X_p \simeq 1 - 2G_{np}^{-1} X_p^{(0)} X_n^{(0)}, \quad (4.2.64)$$

considerando (4.2.56), el valor de  $z$  que nos concierne es  $z \sim 30$ ; la mayor dependencia  $G_{np}$  con  $z$  está controlado por el factor  $e^z$ . Entonces se encuentra a primer orden:

$$\frac{d(X_n + X_p)}{dz} \simeq -2G_{np}^{-1} X_p^{(0)} X_n^{(0)}, \quad (4.2.65)$$

Sumando las ecuaciones (4.2.60) y usando la ecuación (4.2.63) se encuentra que en primera aproximación:

$$R_{np}(X_n X_p - G_{np} X_D) \simeq X_D^{(1)}. \quad (4.2.66)$$

Hasta este punto se ha descrito la situación donde la producción de deuterio solo depende de la población de nucleones. Sin embargo existen varios canales que llevan a la producción de deuterio dadas por la ecuación de Boltzmann:

$$\frac{dX_D}{dz} = R_{np}(X_n X_p - G_{np} X_D) - R_{DD}(2X_D^2 - G_{DD} X_T X_p) + \dots \quad (4.2.67)$$

con  $R_{DD}$  es la tasa escalada para la reacción asociada al tritio y  $G_{DD}$  es el factor de Saha que da el valor de equilibrio para la razón  $2X_D^2/X_T X_p$ . Por esta razón,  $G_{DD}$  queda de la forma:

$$G_{DD} = \frac{9}{4} \left( \frac{m_D^2}{m_T m_p} \right)^{3/2} e^{B/T\gamma}, \quad (4.2.68)$$

donde  $B$  es la energía liberada en esta reacción,  $B = 2m_D - m_p - m_T \simeq 4.02 \text{ MeV}$ . En contraste con  $G_{np}$ ,  $G_{DD}$  es siempre una cantidad pequeña.

De otro lado,  $R_{DD}$  depende de la sección eficaz  $\sigma_{DD}$  para el proceso  $D+D \rightarrow T+p$ . Este proceso es altamente inhibido por la barrera de Coulomb entre las dos deuterones cargados incidentes, que es relevante para bajas energías en el factor de penetración de Coulomb  $(2\pi\alpha/v)\exp[-(2\pi\alpha/v)]$ , donde  $v$  es la velocidad relativa de los dos deuterios incidentes y  $\alpha$ , la constante de estructura fina. La escala de la sección eficaz está determinada por  $\sim (1/m_p \epsilon_D)^{1/2}$ . La reacción es exotérmica, luego la sección eficaz contiene un factor  $1/v$ , que puede escribirse en términos del parámetro adimensional  $(\epsilon_D/m_p v^2)^{1/2}$ . Estos aspectos fundamentalmente fenomenológicos dan una forma de la sección eficaz así:

$$\sigma_{DD} = \frac{0.87}{m_p \epsilon_D} \left( \frac{\epsilon_D}{m_p v^2} \right)^{1/2} \frac{2\pi\alpha}{v} \exp \left[ -\frac{2\pi\alpha}{v} \right], \quad (4.2.69)$$

donde el factor numérico 0.87 se toma del ajuste realizado por Peebles [22, 23].

Se requiere la sección eficaz térmica  $\sigma_{DD}v$  y para obtenerla usaremos los factores de Boltzmann para los deuterios  $f(v_1)f(v_2) \sim \exp(-\frac{1}{2}m_D(v_1^2 + v_2^2))$  en términos de la velocidad relativa  $v = v_1 - v_2$  y la velocidad de centro de masa  $V = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$  para obtener:

$$\langle \sigma_{DD}v \rangle_T = \left( \frac{m_p}{2} \right)^{3/2} \int (d^3v) \sigma_{DD}v \exp \left( -\frac{m_p v^2}{2T} \right), \quad (4.2.70)$$

donde se ha aproximado la masa del deuterio  $m_D$  a dos veces la masa del protón. Usando (4.2.69) para la sección eficaz promedio, se encuentra que el integrando es una función con un pico pronunciado, por lo que se integra con el método del paso descendente, que da en muy buena aproximación ([21]):

$$\langle \sigma_{DD}v \rangle_T = 0.87 \frac{4\pi_S}{(3\epsilon_D m_p T^2)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{3\pi\alpha}{v_s} \right], \quad (4.2.71)$$

con  $v_S = \left( \frac{2\pi\alpha T}{m_p} \right)^{1/3}$ .

Sustituyendo este resultado en  $R_{DD}$  y evaluando numéricamente se obtiene:

$$R_{DD} = 2.98 \times 10^7 \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right) z^{-4/3} e^{1.44z^{1/3}}. \quad (4.2.72)$$

Cuando la población de deuterones comienza a decrecer, el número de neutrones no es mantenido por la fotodisociación del deuterio, y la cadena de reacciones es iniciada convirtiendo casi todos los neutrones en helio. Por esto, se identifica  $T_{c,\gamma}$  a aquel en que los neutrones son capturados, o equivalentemente  $z_c = \frac{\epsilon_D}{T_{c,\gamma}}$  por la condición:

$$\frac{dX_D}{dz} \Big|_{z=z_c} \simeq 0. \quad (4.2.73)$$

Como ya se encontró  $z \approx 30$  y que  $G_{DD}$  es del orden de  $e^{-60}$ , una cantidad despreciable para efectos de cálculo. La condición (4.2.73) en conjunto con las ecuaciones (4.2.63) y (4.2.66) y la aproximación  $X_D \simeq X_D^{(1)}$  da como resultado:

$$2X_D^{(1)} R_{DD} \simeq 1. \quad (4.2.74)$$

De otro lado, se encontró que la abundancia de equilibrio de los neutrones  $X_n^{(0)} \simeq 0.15$ , que reemplazando en (4.1.15) da como resultado  $X_n^{(0)} X_p^{(0)} \simeq 0.13$ . Computando numéricamente (4.2.63), (4.2.72) y (4.2.56), se encuentra que la condición de captura se reduce a:

$$3.05 \times 10^{-6} \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right)^2 z_c^{-17/6} e^{-1.44z_c^{1/3}} e^{z_c} \simeq 1. \quad (4.2.75)$$

Haciendo  $\eta = \eta_0$  y  $z = 26$ , se obtiene la temperatura de captura:

$$T_{c,\gamma} = \epsilon_D/26 = 0.088 \text{ MeV}. \quad (4.2.76)$$

Cabe decir que este resultado es solo una aproximación dadas todas las simplificaciones que se han hecho de las secciones eficaces asociadas a los procesos previos. Sin embargo, es una excelente determinación de  $T_{c,\gamma}$ , pues el resultado solo afecta los factores exponenciales que caen rápidamente en el tiempo.

Entonces si se hace  $T_{c,\gamma} = T_\gamma = 0.088 \text{ MeV}$  en (4.2.44) se encuentra que el tiempo de captura, bajo las consideraciones previas es del orden de:

$$t_c \simeq 183 \text{ s}. \quad (4.2.77)$$

A la temperatura  $T_{c,\gamma}$  la población de neutrones  $\bar{X}(x)$  en ausencia de decaimientos ha alcanzado su valor asintótico. Entonces, la fracción de neutrones presentes para captura en deuterio (4.2.38) y por tanto en  $4 - He$  está dado por:

$$X(t = 183s) = \exp\left(-\frac{183}{886.7}\right) \bar{X}(x \rightarrow \infty) \quad (4.2.78)$$

$$X(t = 183s) = 0.814 \times 0.151 = 0.123. \quad (4.2.79)$$

Si en muy buena aproximación la fracción de  $^4\text{He}$  es el doble de neutrones presentes en la etapa de nucleosíntesis se obtiene:

$$Y_4 = 2X(183s) = 0.247. \quad (4.2.80)$$

El valor encontrado en (4.2.80) es un excelente estimado de la abundancia de  $^4\text{He}$  pues está dentro de las cotas observacionales. Además la fracción de masa de las  $\alpha$  es muy poco sensible a la cadena de reacciones nucleares que se considerarán en la próxima sección.

### 4.3. Los otros núcleos ligeros [63, 65, 64]

Apesar del notable interés en el campo de la nucleosíntesis primordial, las abundancias del deuterio,  $^3\text{He}$  y  $^7\text{Li}$  se calculan con precisión solo con códigos computacionales, que reproducen resultados, pero no dan cuenta de los procesos físicos subyacentes.

No existe un procedimiento análogo al mostrado en la sección anterior para calcular en algunos casos siquiera el orden de magnitud de las abundancias de los demás núcleos ligeros. Esto ha conducido a complicaciones a la hora de modificar los códigos para tener en cuenta efectos adicionales.

Por ello, se mostrará un tratamiento que utiliza las secciones eficaces de los códigos más usados, teniendo en cuenta sólo los términos que contribuyen en las ecuaciones más generales de Boltzmann para cada núcleo, con el espíritu de replicar este método cuando se considere una contribución no nula de energía oscura en dominio de radiación.

La ecuación que gobierna la abundancia de cada elemento  $i$  tiene la forma:

$$\dot{f}_i = J - \Gamma f_i, \quad (4.3.1)$$

donde  $J(t)$  y  $\Gamma(t)$  son los términos de fuente y sumidero que dependen de las abundancias de los demás elementos. Si el término de fuente es grande, entonces las tasas de las reacciones son más eficientes que la expansión del universo (condición  $\Gamma \gg H$ ) ó de forma equivalente que la función de distribución de la especie  $i$  -ésima sigue una solución estática dependiente del tiempo:

$$f_i = \frac{J}{\Gamma}, \quad (4.3.2)$$

es claro de la expresión anterior, que si los dos términos son del mismo orden, entonces  $\dot{f}_i \simeq 0$ . Esta condición es la que denominamos equilibrio estadístico nuclear (**NSE**) en la sección anterior. Sin embargo, cuando  $\Gamma \sim H$ , las reacciones responsables del cambio de abundancias se relajan, por la dilución de las partículas que se produce dada la expansión y porque las barreras de Coulomb crecen considerablemente para núcleos con número de masa  $A > 5$ , inhibiendo cada vez más procesos. En este punto, la partícula determinada se desacopla del plasma, y este evento se denomina  $t_f$ . Durante el **NSE** se produce el desacople y  $J$  y  $\Gamma$  decrecen rápidamente en el tiempo, entonces:

$$f(\infty) \simeq \frac{J(t_f)}{\Gamma(t_f)}. \quad (4.3.3)$$

De hecho, la condición de *NSE* implica  $|\dot{\Gamma}/\Gamma - \dot{J}/J| \ll \Gamma$  y la condición de desacople se define por  $\int_{t_f}^{\infty} \dot{f} dt \geq f(t_f)$ . Sin embargo, estos términos completos son bastante complicados de calcular incluso numéricamente, pero pueden hacerse notables simplificaciones en los cálculos de nucleosíntesis pues varias reacciones no contribuyen de forma significativa y las reliquias de las abundancias no se desvían mucho de su valor de desacople (a tiempo  $t_f$ ).

Por esta razón es fundamental identificar solo los términos de fuente y sumidero que contribuyen de forma determinante para cada especie teniendo en cuenta la condición de equilibrio casi-estático, encontrar el tiempo del desacople y evaluar la condición **NSE** en el tiempo  $t_f$  para conocer la abundancia final de cada especie.

La abundancia final del núcleo  $i$  debería depender solamente de la razón entre el término fuente y el de sumidero para especies desacopladas.

Conocida la razón de bariones a fotones presentes en el momento en el que se produce la nucleosíntesis, solo a partir el tiempo  $t_f$  las reacciones nucleares pueden competir con el proceso de fotodisociación de elementos por fotones de muy alta energía ( $E \sim 1MeV$ ) inmersos en el plasma caliente. El código de Kawano incluye casi 100 reacciones de producción y destrucción de los elementos primordiales, y sus respectivas reacciones inversas, pero sólo algunas de estas son realmente importantes. Por ejemplo, el deuterio es producido esencialmente por fusión de  $n - p$ ; elementos de número atómico 3 son producidos a través de reacciones de fusión de  $D - D$ ,  $D - p$  y  $D - n$ ;  ${}^4\text{He}$  es producido a través de reacciones  $D - T$ ,  $D - 3$  y  $p - T$  y elementos de

masa 7 por  $T - \alpha$  y fusión de  $3 - \alpha$ . Para baja temperatura es posible despreciar las reacciones inversas, excepto las de disociación  $n + p \leftrightarrow D + \gamma$  y aquellas donde el producto resultante es el protón,  $n + {}^3\text{He} \leftrightarrow T + p$ . Las densidades número de elementos de masa 6 y 7 están altamente suprimidas comparadas con las definidas para  $m$  de valor 2 y 3, dado que no hay estados ligados para masa 5 y deben ser producidos por dispersión de núcleos por debajo de 5 que tienen una alta barrera de Coulomb. Entonces, la presencia de elementos de número atómico 6 y 7 puede ser suprimida como fuente y/o sumidero en las ecuaciones de  $n$ ,  $D$ ,  $T$ ,  ${}^3\text{He}$  y  ${}^4\text{He}$ . Las ecuaciones de las reacciones para los núcleos ligeros resultan:

$$\begin{aligned}\dot{X}_n &= X_D X_D [DDn3] + X_D X_T [DTn\alpha] + X_p X_T [pTn3] - X_n X_p [npD\gamma] - X_n X_3 [n3Tp] - X_n [n], \\ \dot{X}_D &= X_n X_3 [n3Tp] - 2X_D X_D ([DDpT] + [DDn3]) - X_D X_T [DTn\alpha] - X_D X_3 [D3p\alpha] \\ &\quad - X_D X_\alpha [D\gamma np] - X_D X_p [Dp3\gamma], \\ \dot{X}_3 &= X_D X_p [pd3\gamma] + X_T X_p [pTn3] + X_D X_D [DDn3] - X_D X_3 [D3p\alpha] - X_n X_3 [n3pT], \\ \dot{X}_7 &= X_n X_6 [n67\gamma] + X_n X_B [nBp7] + X_T X_\alpha [T\alpha7\gamma] - X_p X_7 [p7\alpha\alpha] - X_n X_7 [n78\alpha], \\ \dot{X}_\alpha &= X_D X_3 [D3p\alpha] + X_n X_3 [n3\alpha\gamma] + X_D X_T [DTn\alpha] + X_p X_T [pT\gamma\alpha].\end{aligned}$$

Las tasas  $[ijkl]$  son tomadas del código de Kawano [24].

Generalmente, las tasas de las reacciones inversas son iguales a la de la reacción directa, salvo porque esta suprimida un factor  $e^{-B/T}$ . Para los neutrones, la reacción inversa y directa son del orden de la vida media de los mismos.

Existen otras reacciones para la ecuación de Boltzmann del neutrón que son inversas a las mencionadas previamente, sin embargo, son altamente suprimidas por la fotodisociación de núcleos de número atómico entre 4 y 7; además, la producción de núcleos de 6 y 7 es muy baja para contarla como un sumidero de neutrones. Se considera el decaimiento de neutrones, la captura de protones y la captura por  ${}^3\text{He}$  como sumideros mientras que la captura por núcleos de mayor número atómico son ignorados dada su baja sección eficaz. También se ignora la interacción con leptones. Por tanto, esta ecuación solo es valida cuando estos se han desacoplado.

En la ecuación de Boltzmann asociada al deuterio, la única fuente significativa es la reacción  $p(n, \gamma)d$ . La fotodisociación de tritio y helio así como la destrucción de helio por protones están altamente suprimidas debido a sus altas energías de ligadura y las altas barreras de Coulomb debido a la presencia de 2 protones. Los principales sumideros que se mantienen en la ecuación son las que llevan a la producción de  ${}^3\text{He}$  y  $T$  y fotodisociación de deuterio.

En la formación de  ${}^3\text{He}$ , se consideran básicamente las fuentes provenientes del deuterio y

como sumidero, la reacción que da lugar al tritio via  ${}^3\text{He}(n, p)\text{T}$ . La formación de partículas  $\alpha$  es ignorada en esta ecuación dado que se produce por interacción electromagnética, no nuclear, y en esta escala la segunda es predominante frente a la primera interacción. Los demás procesos que se ignoran no contribuyen significativamente dada su alta barrera de Coulomb que inhibe la formación de  ${}^3\text{He}$  o bien, porque son fotodisociados rápidamente.

En el caso del tritio, las principales fuentes son debidas a reacciones del deuterio y/o  ${}^3\text{He}$  con nucleones, mientras que los sumideros son procesos de formación de  $\alpha$ , que no contribuyen significativamente por su carácter electromagnético. Los procesos que llevan a la formación de  ${}^6\text{Li}$  tampoco se tienen en cuenta dada su alta barrera de Coulomb y procesos inversos que llevan a deuterio estan suprimidos por un factor  $e^{-B_D/T}$ .

De otro lado, dada su estabilidad ( $B_4 \sim 28\text{MeV}$ ), una vez que se ha formado,  ${}^4\text{He}$  no se destruye eficientemente. Las principales fuentes de formación vienen de núcleos más ligeros, mientras que, los procesos provenientes de núcleos más pesados (Li, Be, B) pueden ser ignorados dado que su abundancia es baja y no contribuyen en un orden de magnitud con la formación de partícula  $\alpha$ . Como ya se mostró, en muy buena aproximación la abundancia de  ${}^4\text{He}$  puede calcularse sólo conociendo la abundancia final de neutrones a tiempo  $t_f$ .

Por último,  ${}^7\text{Li}$  puede producirse por fusión de  ${}^3\text{He} - \alpha$ . La colisión con neutrones y protones pueden verse como el canal principal de destrucción de  ${}^7\text{Li}$ .

### Abundancias de núcleos ligeros con $\Omega_B h^2$ dado por WMAP

Si todos los núcleos alcanzan el equilibrio cuasiestático, se espera que una solución aproximada se obtenga haciendo las derivadas temporales iguales a 0. Sin embargo, esta solución perfectamente estática es inconsistente, dado que todos los elementos satisfacen la ligadura de conservación del número neutrónico.

$$\dot{X}_n + \dot{X}_D + \dot{X}_3 + 2\dot{X}_T + 2\dot{X}_\alpha = -X_n [n]. \quad (4.3.4)$$

Haciendo los primeros 4 términos de la izquierda iguales a cero,  $\dot{X}_\alpha \leq 0$  y proporcional a la tasa de decaimiento de los neutrones. Sin embargo, la ec. de Boltzmann para las partículas  $\alpha$  solo tiene fuentes, luego debe ser estrictamente positiva.

Es posible resolver la evolución temporal de un elemento y obtener los demás a partir de las soluciones del NSE. Inicialmente, la derivada temporal de la densidad de neutrones debe dominar sobre los demás elementos simplemente porque existen más neutrones. Para temperaturas menores que la del desacople de las interacciones débiles, se tiene:

$$\dot{X}_n = -2\dot{X}_\alpha - X_n [n], \quad (4.3.5)$$

$$\dot{X}_D = \dot{X}_3 = \dot{X}_7 = 0, \quad (4.3.6)$$

$$\dot{X}_\alpha = X_d X_3 [D3p\alpha] + X_n X_3 [n3\alpha\gamma] + X_D X_T [DTn\alpha] + X_p X_T [pT\gamma\alpha]. \quad (4.3.7)$$

De la ecuación (4.2.56) se sigue el valor de equilibrio del deuterio y es equivalente a la solución NSE del deuterio cuyo mayor sumidero es:

$$X_D = \frac{X_n X_p [npD\gamma]}{X_\gamma [D\gamma np]}, \quad (4.3.8)$$

$$X_\gamma = 1.083 \times 10^{10} T^{3/2} e^{-B_D/T} \frac{[npD\gamma]}{(\rho_B/gcm^{-3})}. \quad (4.3.9)$$

Las solución de equilibrio estadístico nuclear para el  $^3\text{He}$ :

$$X_3 = \frac{X_D X_p [pd3\gamma] + X_D X_D [DDn3] + X_T X_p [pTn3]}{X_D X_3 [D3p\alpha] + X_n X_3 [n3pT]}. \quad (4.3.10)$$

De otro lado, la producción de partículas  $\alpha$  se hace eficiente cuando se satisface la condición  $2\dot{X}_\alpha = X_n [n]$  i.e. para (4.2.77). Bajo la suposición de que los únicos bariones presentes en esta etapa son neutrones y protones, y las posibles resonancias de estos bariones han decaído, es preciso decir que  $X_n + X_p \approx 1$ . Además, desconocida la abundancia de neutrones  $X_n = 0.123$ , por tanto  $Y_4 = 0.247$  y  $X_p \sim 0.75$ .

Una aproximación adicional que puede hacerse sobre las abundancias de número atómico menor a 4 es que los neutrones ya no contribuyen en reacciones que den lugar a  $^3\text{He}$  y  $T$ , pues su tiempo de vida media es menor a  $10^{-2}\text{s}$ . Entonces, la ecuación (4.3.10) se reduce notablemente:

$$X_3 = X_D \frac{[DDn3]}{[D3p\alpha]}, \quad (4.3.11)$$

Sin embargo, debe encontrarse la abundancia de deuterio, que implica conocer la temperatura para la cual el proceso dominante en la formación vence la fotodisociación:

$$T = \frac{B_D}{\left(\frac{3}{2}\ln(m_D/T) + \ln(\eta_B^{-1})\right)} \quad (4.3.12)$$

$$T = \frac{2.22\text{MeV}}{\left(\frac{3}{2}\ln(m_D/T) + 24.73\right)} \quad (4.3.13)$$

$$T \sim 0.75. \quad (4.3.14)$$

A esta temperatura la abundancia del deuterio es  $\approx 5 \times 10^{-3}$ . Sin embargo, por debajo de esta temperatura la tasa de cambio del deuterio domina sobre las demás, luego se fija  $\dot{X}_n = \dot{X}_3 = \dot{X}_T = 0$  y por tanto  $\dot{X}_D = -2\dot{X}_\alpha$ . Entonces:

$$\dot{X}_D = -2X_D X_D [DDpT],$$

aproximando la tasa  $[DDpT]$  a  $6 \times 10^8 T^{-2/3} \exp(-4.258/T^{1/3}) \rho_B$ , la solución toma la forma:

$$X_D = \left[ \frac{1}{X_{Di}} + \int_{0.75}^{T_c} T^{-2/3} \exp\left(-\frac{4.258}{T^{1/3}} + 14.5\right) \right]^{-1}, \quad (4.3.15)$$

un resultado aproximado de la integral es:

$$X_D = \left[ 8 \times 10^2 + \exp(9.46) - \exp\left(-\frac{4.258}{T^{1/3}} + 14.5\right) \right]$$

haciendo la temperatura final igual a cero (para tener un estimativo de la abundancia final del deuterio) se encuentra  $X_D \sim 9.0 \times 10^{-5}$ .

Ahora es necesario determinar los valores de *freezeout* del  ${}^3\text{He}$  y el tritio. Asumamos que la abundancia del deuterio es aproximadamente igual a su valor final cuando la producción de  ${}^3\text{He}$  y el tritio cesa. Para el primer elemento la condición de *freezeout* implica  $X_D [d3p\alpha] = \text{H}$  que puede ser resuelta para  $T$  asumiendo  $[d3p\alpha] = 4.36 \times 10^8 T^{-1/2} \exp(-1.72/T) \times \rho_B$ :

$$T_f = \frac{1.72}{14.2 + (1/2)\log T_f + \log X_D},$$

que numéricamente produce  $T_f = 0.35$  para  $X_D \sim 9.0 \times 10^{-5}$ . Cerca de esta temperatura, el término de  ${}^3\text{He}$  es aproximadamente  $[DDn3] = 5.3 \times 10^8 T^{-2/3} \exp(-4.258/T^{1/3}) \rho_B$ . Una vez se sustituye estas tasas en la solución **NSE** del  ${}^3\text{He}$  (4.3.11), la abundancia de este núcleo primordial está dada por:

$$X_3 = 1.2 X_D T^{-1/6} \exp(-4.258 T^{-1/3} + 1.72 T^{-1}),$$

que evaluado en  $T = 0.35$  da una abundancia de  $X_3 \sim 2.5 \times 10^{-5}$ . El cálculo de la temperatura de producción del tritio es similar al del  ${}^3\text{He}$ . La tasa  $[DTn\alpha]$  puede aproximarse a  $1.5 \times 10^9 T^{-2/3} \exp(-0.523/T) \times \rho_B$  que produce:

$$T_f = \frac{0.523}{15.49 + (1/3)\log T_f + \log X_D} = 0.09,$$

La tasa de producción del tritio esta gobernada por  $[DDpT]$ , que es aproximadamente igual a  $5 \times 10^8 T^{-2/3} \exp -4.258 T^{-1/3} \rho_B$ . La abundancia del tritio es entonces:

$$X_T = 0.3 X_D \exp(-4.258 T^{-1/3} + 0.523 T^{-1}),$$

que corresponde a una temperatura de desacople de  $X_T \sim 7.6 \times 10^{-6}$  a temperatura  $T_f = 0.09$ . La solución **NSE** para  ${}^7\text{Li}$  es:

$$X_7 = \frac{X_n X_6 [n67\gamma] + X_n X_B [nBp7] + X_T X_\alpha [T\alpha7\gamma]}{X_p [p7\alpha\alpha] + X_n [n78\alpha]}, \quad (4.3.16)$$

y la temperatura del desacople para este elemento:

$$T_7 = \left[ \frac{8.473}{14.65 + (1/3)\log T_7} \right]^3 = 0.203,$$

esta temperatura conduce a una abundancia final del  ${}^7\text{Li}$  de  $X_7 \sim 0.3 \times 10^{-10}$ .

---



---

## MODELOS DE ENERGÍA OSCURA

### 5.1. Energía Oscura

Como ya se ha mencionado en el capítulo 2, el modelo estándar de Cosmología  $\Lambda$ CDM predice un contenido de materia–energía de aproximadamente 5 % de materia bariónica, 25 % de materia oscura fría y 70 % de energía oscura descrita por constante cosmológica  $\Lambda$ , que es asociada a la energía de vacío de los campos cuánticos y es descrita como un fluido con ecuación de estado  $p = -\rho$ .

Sin embargo, aunque éste es el modelo más aceptado, presenta algunos desafíos teóricos como: su valor no nulo, su discrepancia con el valor calculado por QFT (en principio, infinita) y el cambio del estado de la expansión, de no acelerado a acelerado, entre otros. Por esta razón, es viable considerar modelos donde la energía oscura evolucione en el tiempo cosmológico y adquiera el valor asociado a  $\Lambda$  en el dominio de energía oscura (etapa en la que el universo se expande aceleradamente). De hecho, las ecuaciones de Friedmann pueden solucionarse sin  $\Lambda$  -incluyendo un término adicional que describa la energía oscura- y de esta manera satisfacer la condición de aceleración. Incluso, es posible estudiar dicho fenómeno mediante modelos geométricos (interpretación inicial de la constante cosmológica  $\Lambda$ ).

De hecho, el estudio de las curvas de verosimilitud de la fracción de materia y  $\omega_{eff}$ , donde  $\omega_{eff} = \frac{p_{de}}{\rho_{de}}$  revela que aunque el valor más probable de  $\omega_{eff}$  es muy cercano a  $-1$  (asociado a  $\Lambda$ ), la precisión de las observaciones no descarta valores  $0 > \omega_{eff} > -1$ .

Además, de las observaciones de SN-I es posible obtener una relación entre la densidad de energía oscura y el *redshift*  $z$  (Wang & Mukherjee 2004) que no descartan modelos dinámicos de EDE (en adelante energía oscura temprana ó en sus siglas en inglés: *early dark energy*):

$$\rho_{de}(z) = \frac{3}{8\pi G} \left( \frac{1}{(dr/dz)^2} - \Omega_m H_0^2 (1+z)^3 \right). \quad (5.1.1)$$

Adicionalmente, existen cotas bien definidas desde **BBN**, **LSS** (Large Scale Structure), **BAO** (Baryonic Acoustic Oscillations) y **CMB** (Cosmic Microwave Background), entre otras, para la densidad de energía oscura en los diferentes dominios cosmológicos, así como varios intentos de deducir un modelo para la EDE a partir de las observaciones cosmológicas más recientes [25] y descartar modelos teóricos.

Cualquier modelo que se considere para describir la energía oscura como componente dinámica y sus posibles efectos, debe satisfacer:

- $\Omega_{de_0} \sim 0.7$ ,
- Expansión acelerada del universo para la época actual,
- Problema de coincidencia,
- *Fine-tuning*: ajuste de parámetros libres del modelo,
- $-1/3 \geq w_{eff} \geq -1$ ,
- Es una componente muy diluida, que no se aglomera.
- Historia térmica del universo y cotas impuestas por las principales pruebas del modelo estándar,
- Conexión con inflación o bien, con un modelo que dé solución a los problemas de: horizonte, planitud y entropía. De no existir, debe darse cuenta de la naturaleza de ese nuevo campo y del mecanismo que lo genera.

Teniendo en cuenta las anteriores condiciones, se han sugerido y estudiado un gran número de modelos que describan acertadamente la EDE, entre ellas:  $\Lambda$  como energía del vacío, modelos geométricos:  $f(R)$ ,  $f(T)$ ,  $\Lambda$  como constante en la acción de la Relatividad General, campos escalares con un determinado acople con la gravedad (minimal o no) ó bien, con otros campos de materia ó  $\Lambda(t)$ : densidad de energía del vacío decreciente en el tiempo, entre otros.

En este trabajo se revisaron esencialmente tratamientos lagrangianos de modelos alternativos de energía oscura diferentes de la constante cosmológica. Los más destacados son ampliamente explicados en [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32]. Sin embargo, solo se mostrarán algunos de ellos, para finalmente abordar los campos de K-esencia.

## 5.2. Campos escalares como Energía Oscura Dinámica

### 5.2.1. Quintaesencia con acople minimal

Quintaesencia es un campo escalar con ecuación de estado  $p_\phi = \omega_\phi \rho_\phi$ , con  $1 > \omega_\phi > -1$ . La expansión acelerada del universo es causada por la energía potencial del campo dinámico de Quintaesencia.

Cabe decir que este modelo no da una explicación al problema de coincidencia, sin embargo su construcción permite dar una interpretación sencilla de la energía oscura, y aunque depende fuertemente de la forma del potencial, es muy flexible, pues admite acoplamiento con otras formas de materia, con otras interacciones o bien con la gravedad, si se considera un acople no minimal del campo con el escalar de curvatura.

La acción que describe los campos de Quintaesencia minimalmente acoplados a la gravedad esta dada por:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right), \quad (5.2.1)$$

la variación de la acción (5.2.1) lleva a la ecuación de movimiento para el campo:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (5.2.2)$$

Cuando se considera el tensor de momento-energía del campo descrito como un fluido perfecto de la forma (2.1.2) se obtienen los siguientes resultados para la densidad de energía, la presión y el parámetro de la ecuación de estado del campo:

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad \omega_\phi = \frac{p}{\rho} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}. \quad (5.2.3)$$

Con las relaciones (5.2.3), las ecuaciones de Friedmann quedan de la forma:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3} \left( \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right). \quad (5.2.4)$$

La condición necesaria para tener una fase acelerada del universo se da para  $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$ , que implica rodadura lenta del campo en un potencial “plano”, por lo que los parámetros que se suelen definir para la evolución del inflatón son igualmente validos en este caso.

Sin embargo, cuando se busca la forma funcional de los potenciales del campo de Quintaesencia resulta más cómodo que el campo escalar sea escalante ó “tracker” -el comportamiento de este tipo de campos será explicado más ampliamente en la siguiente sección-, definido por el parámetro adimensional:

$$\Gamma(\phi) = \frac{V(\phi)V''(\phi)}{V'(\phi)^2} \quad (5.2.5)$$

$\Gamma(\phi)$  debe ser mayor o igual a 1, y aproximadamente constante para todos los valores de campo para los cuales  $V(\phi)$  este entre el valor crítico de la densidad de energía después de inflación y hoy. Esta condición implica explorar potenciales que reproduzcan densidades de energía  $\rho_\phi$  que decaigan en el tiempo de la forma en que lo hace la materia dominante en el fluido cosmológico.

No obstante, Quintasencia es un modelo fuertemente dependiente del potencial que describe el campo. Generalmente se le exige al mismo que sea un polinomio cuadrático ó de cuarto orden, para hacerlo renormalizable.

Determinadas formas funcionales del potencial permiten hacer una conexión con inflación, lo que implica acotar parámetros libres de ambos modelos con los límites observacionales disponibles. Sin embargo, es necesario ajustar la masa efectiva y la constante de acople con gran precisión para garantizar que el campo no alcance el mínimo del potencial mucho antes de la época actual, y así, descalificar el modelo de energía oscura dinámica escogido.

Por esto, la mejor opción es especificar las propiedades deseadas del modelo de Quintaesencia y después, construir potenciales cuyas soluciones satisfagan las propiedades buscadas. Las soluciones del campo deberían satisfacer las siguientes condiciones para ser considerados: la dinámica del campo de Quintaesencia hoy debe ser insensible a valores iniciales en el universo temprano, debe ser posible explicar la pequeña contribución de la densidad de energía del campo de Quintaesencia hoy debido a su disolución causada por la expansión, debe existir un punto crítico para el cual halla un cambio del dominio de materia al de energía oscura y debe existir una alta jerarquía entre las densidades de energía de materia y energía oscura en etapas tempranas.

Los potenciales que satisfacen que  $\Gamma \sim \text{cte}$  están dados por (potencial tipo ley de potencias y exponencial, respectivamente):

$$V(\phi) = V_0 M_{pl}^4 \left( \frac{\phi}{M_{pl}} \right)^{-\alpha} \quad \Gamma > 1 \quad \Gamma = 1 + \frac{1}{\alpha}. \quad (5.2.6)$$

$$V(\phi) = V_0 M_{pl}^4 \exp\left(-\lambda \frac{\phi}{M_{pl}}\right) \quad \Gamma = 1. \quad (5.2.7)$$

con  $\lambda, \alpha > 0$  parámetros y  $M_{pl}$  la masa de Planck. Ambos potenciales decrecen monótonamente con  $\phi$  y se aproximan a su valor mínimo (cero) asintóticamente para valores muy grandes del campo.

Para potenciales exponenciales, la densidad de energía del campo de Quintasencia es proporcional a la densidad de radiación durante dicho dominio (con  $\Omega_\phi = \frac{4}{\lambda^2}$ ) y a la densidad de materia durante dominio de materia  $\Omega_\phi = \frac{3}{\lambda^2}$ .

De otro lado, potenciales tipo ley de potencias inversa son considerados viables pues su densidad de energía se diluye con la expansión cosmológica de acuerdo a la solución *tracker*, pero la fracción  $\Omega_\phi$  crece. El punto de equidad materia–energía oscura se produce para valores del campo del orden de la masa de Planck, i.e.  $V(M_{pl}) \approx M_{pl}^2 H_0^2$ .

### 5.2.2. Quintasencia no minimalmente acoplados a la gravedad

Este tipo de modelos considera que el campo escalar homogéneo  $\phi$  está acoplado con la gravedad a través de una constante de acople  $\zeta$  y acoplado con la materia solo a través de la gravedad. La naturaleza del acople no es necesariamente descrita por el modelo mismo.

Además, el campo escalar evoluciona en un potencial  $V(\phi)$  y su dinámica está dada por la acción:

$$S_\phi = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + 2R\zeta f(\phi) + 2V(\phi)], \quad (5.2.8)$$

donde  $R$  corresponde al escalar de curvatura que para el caso de FRW espacialmente plano es  $R = 6(2H^2 + \dot{H})$  y  $\zeta$  la constante de acople del campo escalar. En principio, no existe algún indicio de la forma funcional de  $f(\phi)$ . Sin embargo, formas cuadráticas del campo son las únicas que dan como resultado una constante de acople adimensional. La ecuación de evolución que se obtiene por la variación de la acción (5.2.8) con respecto al campo da una ecuación de Klein–Gordon generalizada:

$$\frac{\delta S_\phi}{\delta \phi} = 0 \iff \square \phi - \zeta R \phi - a^2 \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (5.2.9)$$

donde  $\square = \nabla^\mu \nabla_\mu$ . Para un campo  $\phi = \phi(t)$  la expresión (5.2.9) se reduce a:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} + 6\zeta(2H^2 + \dot{H})\phi = 0. \quad (5.2.10)$$

La densidad de energía y la presión asociada al campo son definidos por:

$$\rho_\phi = a^{-2} T_{00}, \quad p_\phi = \frac{1}{3} a^{-2} \delta_{ij} T^{ij}. \quad (5.2.11)$$

Recordemos que el tensor momento-energía se obtiene de variar la acción con respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$ :

$$T_{\mu\nu} = (1 - 2\zeta)\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + 2(\zeta - 1)g_{\mu\nu}\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi - 2\zeta\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + 2\zeta\phi\Box\phi g_{\mu\nu} + \zeta G_{\mu\nu}\phi^2 - V(\phi)g_{\mu\nu}. \quad (5.2.12)$$

Teniendo en cuenta la métrica (2.1.1) con  $k = 0$ :  $R = 6(2H^2 + \dot{H})$ ,  $G_{00} = 3a^2H^2$  y  $G_{ij} = -(2\dot{H} + 3H^2)a^2\delta_{ij}$  y la expresión (5.2.12), puede calcularse la densidad de energía y la presión del campo escalar:

$$\begin{aligned} \rho_\phi &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + 3H\zeta\phi(2\dot{\phi} + H\phi), \\ p_\phi &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) - \zeta((2\dot{H} + 3H^2)\phi^2 + 4H\phi\dot{\phi} + 2\phi\dot{\phi} + 2\dot{\phi}^2). \end{aligned}$$

Comparando las expresiones anteriores con (5.2.3) se ve claramente la influencia del acople ( $\zeta \neq 0$ ) en estas cantidades del campo.

Cuando se considera la ecuación de conservación del tensor de momento-energía ( $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ) se encuentra la ecuación de Klein-Gordon (5.2.9):

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = 0 \iff \frac{\delta S_\phi}{\delta\phi} = 0 \iff \Box\phi - \zeta R\phi - a^2\frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (5.2.13)$$

### 5.2.3. Campos escalares fantasmas

Existen modelos que incluyen un parámetro efectivo para la ecuación de estado  $\omega < -1$ , que no pueden ser explicados con campos escalares de Quintaesencia; estos se conocen como campos fantasma y están determinados por energías cinéticas negativas. La densidad de energía de estos campos aumenta con el factor de escala, lo que implica una singularidad futura cuando el factor de escala se hace infinito en un tiempo finito.

Su acción asociada a los campos fantasmas es:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right), \quad (5.2.14)$$

tal que,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (5.2.15)$$

$$\rho = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad \omega_\phi = \frac{p}{\rho} = \frac{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}. \quad (5.2.16)$$

De acuerdo a las cantidades termodinámicas previas, las ecuaciones de Friedmann son:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right), \quad \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3} \left( \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right). \quad (5.2.17)$$

#### 5.2.4. Campo Taquiónico

Recientemente se han estudiado condensados de taquiones, un tipo de teoría de cuerdas que podrían reproducir resultados interesantes en cosmología, especialmente como modelo de inflatones a altas energías. La acción que describe este tipo de campos está dado por (5.2.18):

$$S = \int d^4x V(\phi) \sqrt{-\det(g_{ab} + \partial_a \phi \partial_b \phi)}, \quad (5.2.18)$$

donde  $V(\phi) = \frac{V_0}{\cosh(\phi/\phi_0)}$  y  $\phi_0$  depende del tipo de modelo de cuerdas que se considere. Existen otro tipo de potenciales, pero dependen de muchos parámetros libres, por lo que resultan poco operativos. La ecuación de movimiento de este tipo de campo es:

$$\frac{\ddot{\phi}}{1 - \dot{\phi}^2} + 3H\dot{\phi} + \frac{1}{V} \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (5.2.19)$$

La densidad de energía, presión y el parámetro de la ecuación de estado del campo taquiónico son:

$$\rho = \frac{V(\phi)}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}, \quad p = -V(\phi)\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}, \quad \omega_\phi = \frac{p}{\rho} = \dot{\phi}^2 - 1. \quad (5.2.20)$$

El parámetro de Hubble y la ecuación de la aceleración serán entonces:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{V(\phi)}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3} \frac{V(\phi)}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} \left( 1 - \frac{3}{2}\dot{\phi}^2 \right), \quad (5.2.21)$$

el factor de la derecha de (5.2.21) implica  $\dot{\phi}^2 < \frac{2}{3}$  para satisfacer la expansión acelerada del universo en etapas tardías.

### 5.2.5. Gas tipo Chaplygin

Existe una diferencia notable entre la descripción CDM y energía oscura, pues la primera es una componente material sin presión que forma aglomerados a pequeñas escalas mientras que la segunda es una componente suave. Estas propiedades provienen de la ecuación de estado que las describe. Sin embargo, existe la idea de estudiar una descripción unificada, como un fluido exótico: gas tipo Chaplygin, cuya ecuación de estado más general es:

$$p_C = -\frac{A}{\rho^\alpha}, \quad (5.2.22)$$

con  $A$  y  $\alpha$  constantes positivas.

## 5.3. “Campo magnético primordial”

Existen evidencias observacionales de que existen campos magnéticos netos en galaxias y clusters de galaxias. Sin embargo, su origen es un problema abierto en astrofísica. Existen dos mecanismos que se han propuesto para generar dichos campos. El primero: la hipótesis del campo primordial, i.e. campos reliquias del universo temprano (del orden de  $10^{-10}$  a  $10^{-12}G$ ) que fueron amplificados durante dominio de radiación, o bien, campos más débiles  $10^{-19}G$  que pudieron ser amplificados en el tiempo del desacople por la rotación de las galaxias mediante el mecanismo de *dynamo*. Actualmente, el segundo es el más favorecido, pues se soporta en mecanismos astrofísicos, producción de las semillas durante inflación, transiciones de fase, rompimiento espontáneo de la invarianza Lorentz ó perturbaciones métricas. No obstante, existe una tercera opción que es considerar una teoría electromagnética modificada en presencia de gravedad. De esta manera, acoples no minimales del campo electromagnético con la curvatura del espacio-tiempo serían una forma alternativa de producir los campos durante inflación.

El modelo permite incluir un potencial electromagnético con componente temporal no nula y homogénea, por lo que puede jugar el papel de energía oscura. De hecho, estos campos pueden ser amplificados de fluctuaciones cuánticas durante inflación en forma análoga a como lo hacen las perturbaciones métricas: la amplitud inicial del campo estará dado por  $\langle A^2 \rangle^{1/2} \sim H_I$ , donde  $H_I$  es el valor de la escala de Hubble durante inflación. Entonces el campo crecerá linealmente durante las eras de radiación y materia, correspondiente a la densidad de energía de constante cosmológica a escalas cosmológicas.

Dicho efecto puede estudiarse con una densidad lagrangiana del tipo:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{\lambda}{2} (\nabla_\mu A_\mu)^2 + \sigma R_{\mu\nu} A_\mu A_\nu + \omega R A_\mu A^\mu \right], \quad (5.3.1)$$

El caso minimal se obtiene con  $\omega = \sigma = 0$  y el parámetro  $\lambda$  puede ser fijado con la normalización de los modos de las variables anteriormente mencionadas.

La ecuación de movimiento a primer orden que se obtiene de la acción es:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} + \lambda \partial^\mu (\nabla_\nu A_\nu)_{(1)} = J_g^\mu = 2 \left( \sigma R_{(1)}^{\mu\nu} + \omega R_{(1)} \eta^{\mu\nu} \right) \tilde{A}_\nu. \quad (5.3.2)$$

#### 5.4. Modelo $\Lambda(t)$ [30]

$\Lambda(t)$  es un modelo descrito en términos de dos fluidos mezclados: un medio de vacío que decae en el tiempo ( $\rho_v = \frac{\Lambda(t)}{8\pi G}$  y  $p_v = -\rho_v$ ) y una componente de fluido caracterizados por sus respectivos  $\rho$  y  $p$ , tal que:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda(t)}{3}, \quad H^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi G \rho + \Lambda(t), \quad (5.4.1)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = -\frac{\dot{\Lambda}}{8\pi G}, \quad (5.4.2)$$

la ecuación (5.4.2) puede reescribirse en términos de la tasa de entropía producida:

$$T \frac{dS}{dt} = -\frac{\dot{\Lambda} a^3}{8\pi G} \quad (5.4.3)$$

La relación anterior muestra que se si  $\Lambda$  decrece en el tiempo, transfiere su energía del vacío a la componente material. Debido a la expansión, se espera que la constante cosmológica se relaje a su valor natural  $\Lambda = 0$ . De esta manera, es posible determinar como la energía es entregada de inflatón a la radiación en etapas tempranas, así como, la aceleración del universo en el presente relacionada con el valor actual de  $\Lambda$ .

No obstante, existen dos problemas importantes en el modelo. El primero es que no existe una descripción lagrangiana que incluya el término de acople (o algún mecanismo) que gobierne el intercambio de energía entre dicho vacío y los campos de materia, por el modelo impone dicho fenómeno con términos efectivos. Por esto, se implementa una descripción de la densidad de energía del vacío  $\rho_v = \frac{\Lambda(t)}{8} = \beta \rho_T$ , donde  $\rho_T = \rho_v + \rho$  y  $0 < \beta < 1$ , un parámetro adimensional. Combinando este resultado con las ecuaciones de Friedmann, se encuentra una relación temperatura–*redshift* modificada, debido a la posibilidad de producir fotones adiabáticamente,

dada por:

$$T(z) = T_o(1+z)^{1-\beta}, \quad (5.4.4)$$

donde  $\beta$  es idénticamente cero para el modelo estándar. (5.4.4) implica una temperatura menor a un redshift dado con respecto al escenario de número de fotones conservado por volumen comóvil. Este es el segundo problema del modelo, como se ve en la siguiente gráfica, pues los valores observados favorecen el valor  $\beta = 0.0$ .

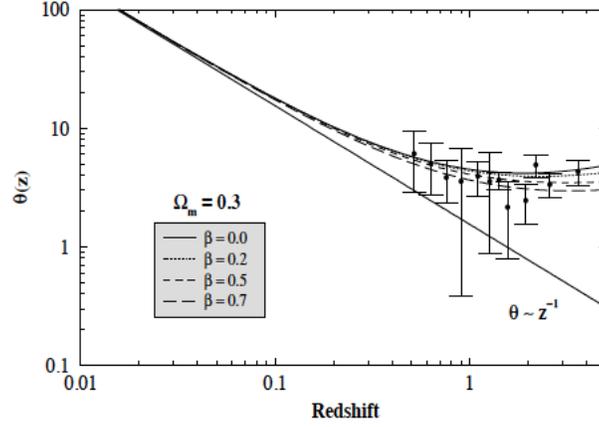


Figura 5.1: Distancia angular vs. redshift para modelos  $\Lambda(t)$ . Las curvas corresponden a  $\Omega_m = 0.3$  y longitud propia  $l = 26.46h^{-1}\text{pc}$  [30].

## Comparación de los modelos presentados

Además de los modelos previamente presentados, existe un modelo de campos escalares conocido como K-esencia, y que se considera como un caso más general que Quintaesencia, que se presentará en detalle en el próximo capítulo, pues es un modelo bastante indicado para describir energía oscura dinámica con contribución no nula en dominio de radiación, por lo que es el escogido en este trabajo.

Aquí se muestra una comparación cualitativa del comportamiento de algunos de los modelos abordados en este capítulo.

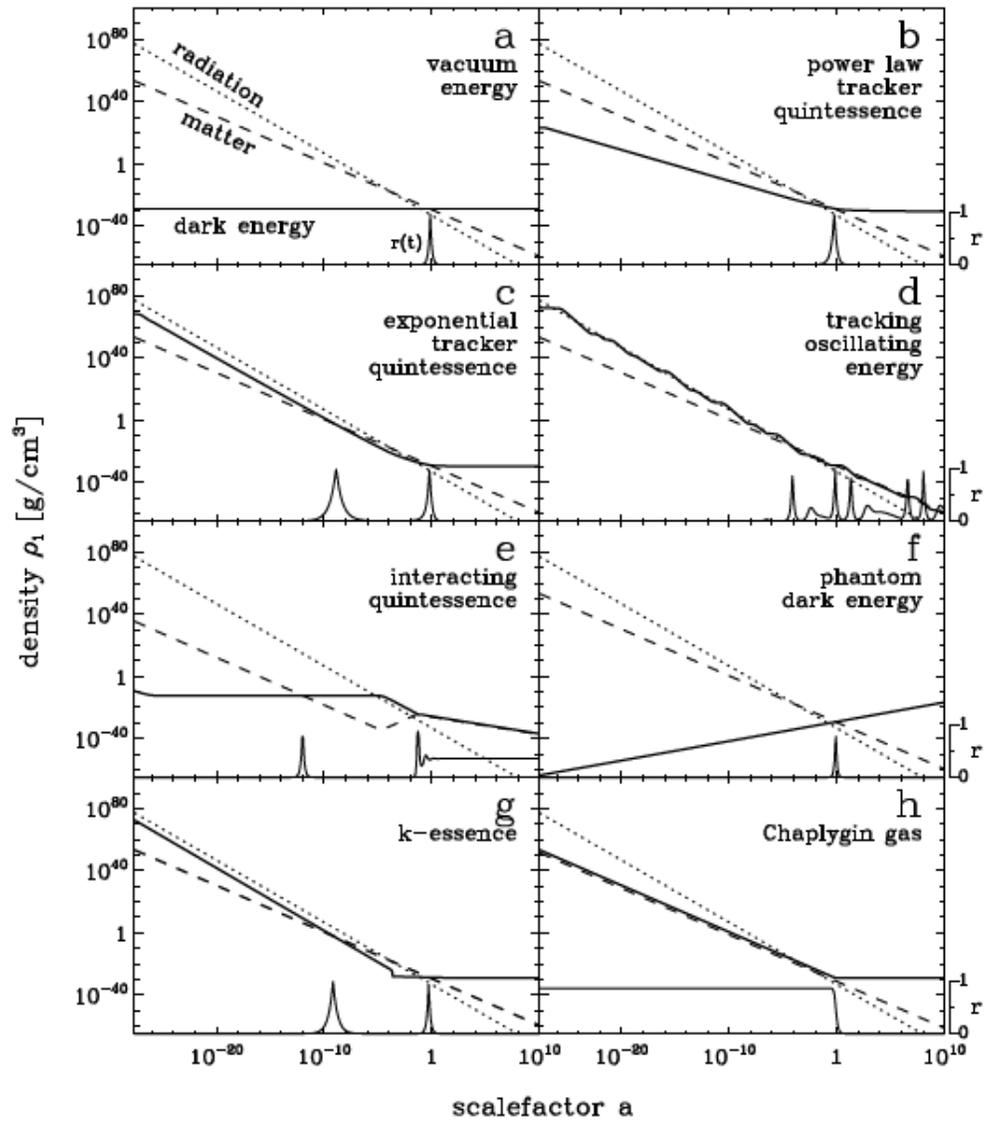


Figura 5.2: Comparación entre los diferentes modelos de energía oscura descrita con campos escalares y gas de Chaplygin [28].

---



---

## CAMPOS ESCALARES DE K-ESENCIA COMO ENERGÍA OSCURA DINÁMICA

### K-esencia

Las soluciones de Quintaesencia como forma de energía oscura imponen dos problemas: *fine-tuning* de las condiciones iniciales del campo  $\phi$  y sus derivadas temporales, así como de la forma del potencial  $V(\phi)$  y el problema de coincidencia. Para dar respuesta a los mismos, sin usar argumentos antrópicos ni fijar *ad hoc* los potenciales del campo escalar de Quintaesencia, que además deben satisfacer una condición de rodadura lenta, Armendariz-Picon, Mukhanov, *et. al* [33, 36], proponen un campo escalar de K-esencia (un caso más general de Quintaesencia con términos cinéticos no canónicos en la acción del campo proveniente de acciones efectivas de teorías de cuerdas y supergravedad).

El modelo fue primero implementado por los autores para describir inflación sin imponer un tipo de potencial que exigiese hacer un *fine-tuning* de los parámetros, y luego fue adaptado como modelo dinámico de energía oscura.

En este capítulo, se estudiará la evolución de un campo escalar  $\phi$  de K-esencia con otra componente de materia (descrito como un fluido barotrópico). Buscamos una solución escalante asintóticamente estable a partir de un lagrangiano factorizable del tipo  $p(X, \phi) = K(\phi)L(X)$  y un campo puramente dependiente del tiempo  $\phi(t)$  sin perturbaciones espaciales, con  $\rho_\phi > 0$  (densidad de energía del campo estable y libre de fantasmas), lo que implica que  $C_s^2 > 0$ , con  $C_s$  la velocidad del sónico de las perturbaciones en el fluido de *background*.

Definimos  $v = \frac{d\phi}{dt} = \sqrt{-2X} > 0$ , con  $X = -\frac{1}{2}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi$  la energía cinética del campo escalar. De esta manera, es posible escribir el lagrangiano efectivo de K-esencia en términos de  $v$ , así  $p(v, \phi) = K(\phi)Q(v)$  [34].

## 6.1. Ecuaciones de movimiento

Se estudiará el problema de K-esencia en un universo de FRW espacialmente plano, con una componente material con densidad de energía y presión asociadas  $\epsilon_m$  y  $p_m$  y un campo de K-esencia, tal que el primero satisface en cada dominio cosmológico la condición  $\frac{p_m}{\epsilon_m} = \omega_m = cte$ , una cantidad no dinámica con parámetro de ecuación de estado constante. El sistema conjunto está determinado por la acción:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{R}{2\kappa^2} + p(\phi, X) \right) + S_B, \quad (6.1.1)$$

donde  $\kappa^2 = 8\pi G$  y  $S_B$  es la acción de la materia de *background*. La variación del término geométrico de la acción con respecto al tensor métrico reproduce las ecuaciones de Campo de Einstein, mientras que de la variación del último término con respecto a los campos de materia resulta el tensor de momentum-energía de la componente material. La componente adicional en la (6.1.1) tiene asociada las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo.

$$\delta S = \int d^4x \left[ \frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} + L \delta \sqrt{-g} + \frac{\partial L}{\partial \phi} \delta \phi \sqrt{-g} + \frac{\partial S_B}{\partial g^{\alpha\beta}} \right]. \quad (6.1.2)$$

La variación de la acción de materia con respecto a la métrica conduce al tensor de momento – energía de la materia de *background*, mientras que los términos que se varían del lagrangiano de K-esencia dan lugar a las ecuaciones de movimiento del campo. La ecuación de movimiento del campo se obtiene a partir de la ecuación de Euler-Lagrange y <sup>(1, 2)</sup>

---

1

$$\frac{\partial X}{\partial(\nabla_\mu \phi)} = \frac{\partial(-1/2g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi)}{\partial(\nabla_\mu \phi)} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\mu} (2\nabla_\alpha) = -g^{\alpha\mu} \nabla_\alpha,$$

2

$$\nabla_\mu \left( -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi \right) = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta} (2 \cdot (\nabla_\mu \nabla_\alpha \phi) \nabla_\beta \phi) = -g^{\alpha\beta} (\nabla_\mu \nabla_\alpha \phi) \nabla_\beta \phi = -(\nabla_\mu \nabla_\alpha \phi) \nabla^\alpha \phi,$$

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \left( \frac{\partial L(\phi, \nabla_\nu \phi)}{\partial(\nabla_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial L(\phi, \nabla_\nu \phi)}{\partial \phi} &= 0, \\
\nabla_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial(\nabla_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0, \\
\nabla_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial X} \right) \frac{\partial X}{\partial(\nabla_\mu \phi)} + \frac{\partial L}{\partial X} \nabla_\mu \left( \frac{\partial X}{\partial(\nabla_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0, \\
\frac{\partial X}{\partial(\nabla_\mu \phi)} \left[ \nabla_\mu \phi \frac{\partial^2 L}{\partial \phi \partial X} + \nabla_\mu X \frac{\partial^2 L}{\partial^2 X} \right] + \frac{\partial L}{\partial X} \nabla_\mu \left( \frac{\partial X}{\partial(\nabla_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0, \\
- g^{\alpha\mu} \nabla_\alpha \phi \left[ \nabla_\mu \phi \frac{\partial^2 L}{\partial \phi \partial X} - (\nabla_\mu \nabla_\alpha \phi) \nabla^\alpha \phi \frac{\partial^2 L}{\partial^2 X} \right] - \frac{\partial L}{\partial X} g^{\alpha\mu} \nabla_\nu \nabla_\alpha \phi + \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0,
\end{aligned}$$

tal que:

$$\left[ \frac{\partial L}{\partial X} g^{\alpha\mu} - \frac{\partial^2 L}{\partial X^2} \nabla^\alpha \phi \nabla^\mu \phi \right] \nabla_\mu \nabla_\alpha \phi + \frac{\partial^2 L}{\partial \phi \partial X} g^{\alpha\mu} \nabla_\alpha \phi \nabla_\mu \phi - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0. \quad (6.1.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \phi - \frac{\partial^2 L}{\partial X^2} \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi \nabla_\alpha \nabla_\beta \phi + \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial \phi} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0,$$

usando las propiedades  $\nabla_\alpha v_\beta = \partial_\alpha v_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\tau v_\tau$  y  $\nabla_\alpha \phi = \partial_\alpha \phi$ :

$$\frac{\partial L}{\partial X} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \partial_\beta \phi - \frac{\partial^2 L}{\partial X^2} \partial^\alpha \phi \partial^\beta \phi \nabla_\alpha \partial_\beta \phi + \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial \phi} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \phi - \Gamma_{\alpha\beta}^\tau \partial_\tau \phi) - \frac{\partial^2 L}{\partial X^2} \partial^\alpha \phi \partial^\beta \phi (\partial_\alpha \partial_\beta \phi - \Gamma_{\alpha\beta}^\tau \partial_\tau \phi) + \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial \phi} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0,$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial X} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \phi - \frac{\partial L}{\partial X} g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\tau \partial_\tau \phi - \frac{\partial^2 L}{\partial X^2} \partial^\alpha \phi \partial^\beta \phi \partial_\alpha \partial_\beta \phi + \frac{\partial^2 L}{\partial X^2} \partial^\alpha \phi \partial^\beta \phi \Gamma_{\alpha\beta}^\tau \partial_\tau \phi \\
&+ \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial \phi} g^{00} (\partial_0 \phi)^2 - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0,
\end{aligned}$$

Las conexiones no nulas para la métrica (2.1.1) con  $k = 0$  y  $\phi = \phi(t)$ :  $\Gamma_{0j}^i = H \delta_j^i$  y  $\Gamma_{ij}^0 = \dot{a} a \delta_{ij}$ .

$$\frac{\partial L}{\partial X} g^{00} \partial_0 \partial_0 \phi - \frac{\partial L}{\partial X} (g^{00} \Gamma_{00}^\tau \partial_\tau \phi + g^{ij} \Gamma_{ij}^\tau \partial_\tau \phi) - \frac{\partial^2 L}{\partial X^2} (-2X) \ddot{\phi} + \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial \phi} \dot{\phi}^2 - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial X} + 2X\frac{\partial^2 L}{\partial X^2}\right)\ddot{\phi} - \left(-\frac{1}{a^2}\right)(a\dot{a}\delta_{ij})\frac{\partial L}{\partial X} + \frac{\partial^2 L}{\partial\phi\partial X}\dot{\phi} - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0. \quad (6.1.4)$$

Para un universo espacialmente plano las ecuaciones de movimiento se obtienen al variar la acción con respecto a  $\phi$  y  $X = -\frac{1}{2}\dot{\phi}$  [35]:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial X} + 2X\frac{\partial^2 L}{\partial X^2}\right)\ddot{\phi} + \frac{\partial L}{\partial X}(3H\dot{\phi}) + \frac{\partial^2 L}{\partial\phi\partial X}\dot{\phi} - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0. \quad (6.1.5)$$

usando  $\frac{\partial}{\partial X} = \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial v}$  y el hecho que el lagrangiano coincide con la presión, se cambiará de notación  $L = p$ :

$$\left(\frac{1}{v}\frac{\partial p}{\partial v} + v\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial p}{\partial v}\right)\right)\ddot{\phi} + \frac{\partial p}{\partial v}(3H) + v\frac{\partial^2 p}{\partial\phi\partial v} - \frac{\partial p}{\partial\phi} = 0.$$

Reorganizando términos, se obtiene la ecuación de movimiento para el campo de K-esencia [33, 36]:

$$\frac{d}{dt}(p_{,v}(\phi, v)) = p_{,\phi v}\dot{\phi} + p_{,vv}\ddot{\phi} = -3Hp_{,v} + p_{,\phi}. \quad (6.1.6)$$

Adicionalmente, usando la definición del tensor momento-energía para el campo escalar descrito como un fluido perfecto  $T_0^0 = -\rho_\phi$  se encuentra la densidad de energía asociada al campo en términos de  $X$  y  $v$ :

$$\rho_\phi = 2X\frac{\partial p}{\partial X} - p = vp_{,v} - p. \quad (6.1.7)$$

De (6.1.7) se deduce entonces que el lagrangiano de K-esencia corresponde a la presión del campo.

El parámetro de la ecuación de estado  $\omega_\phi$  para el campo  $\phi$  se define como:

$$\omega_\phi = \frac{p(\phi, v)}{\rho_\phi} = \frac{p}{vp_{,v} - p}, \quad (6.1.8)$$

teniendo en cuenta la condición de lagrangiano de K-esencia factorizable, i.e.  $p(\phi, v) = K(\phi)Q(v)$ , entonces:

$$\omega_\phi = \frac{Q}{vQ' - Q}, \quad (6.1.9)$$

$$\rho_\phi = K(\phi)\tilde{\rho}_\phi = \frac{p}{\omega_\phi} = K(\phi)(vQ' - Q), \quad (6.1.10)$$

donde se ha definido  $\tilde{\rho}_\phi = vQ' - Q$ . Además,  $K(\phi) > 0$  para que se cumpla  $\rho_\phi > 0$  (condición de energía positiva).

En este punto es necesario mencionar como se ha desarrollado el estudio de la energía oscura dinámica como K-esencia en distintos trabajos: [37, 38] consideran una forma funcional de  $\phi(t)$  o bien, de  $v(t)$ , [39, 40] lo hacen como un sistema dinámico y posteriormente, mediante una redefinición del campo reescriben en problema solo en términos de una función  $\bar{Q}(v)$ .

Sin embargo, el problema no queda ligado con variables cosmológicas ( $a, z$ ) salvo que se suponga una determinada forma de las variables dinámicas, ya sea  $K(\phi)$  ó  $Q(v)$ .

Es por esto que modelos de K-esencia con términos puramente cinéticos, donde se considera que el término dependiente del campo  $K(\phi)$  es constante, condiciones de *Slow roll* para  $K(\phi)$  ó, la condición más restrictiva: independencia del lagrangiano con  $K(\phi)$ , han sido ampliamente trabajados por varios autores tanto en el campo de BBN como en el estudio de modelos alternativos de EDE, entre ellos: [41, 42, 43, 44, 45, 46]. Esta opción ha sido muy trabajada pues permite encontrar una expresión de  $vQ(v)$  en términos de  $a$ .

No obstante, en este trabajo se continuará con un lagrangiano del tipo  $p(\phi, v) = K(\phi)Q(v)$ .

En el marco cosmológico, se tienen otras ecuaciones de movimiento para el sistema. (6.1.11) y (6.1.12) corresponden a las ecuaciones de Friedmann:

$$H = \kappa\sqrt{\rho_\phi + \rho_m}, \quad (6.1.11)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6}((1 + 3\omega_\phi)\rho_\phi + (1 + 3\omega_m)\rho_m). \quad (6.1.12)$$

y las ecuaciones de continuidad para fluidos no interactuantes:

$$\dot{\rho}_m = -3H(1 + \omega_m)\rho_m, \quad \dot{\rho}_\phi = -3H(1 + \omega_\phi)\rho_\phi, \quad (6.1.13)$$

Las anteriores ecuaciones con (6.1.6) constituyen un sistema cerrado de funciones a los que se le analizará la estabilidad asintótica ( $t \rightarrow \infty$ ).

Teniendo en cuenta que  $\rho_{tot} = \rho_\phi + \rho_m$ , se encuentra una relación para la variación temporal de la densidad de energía total dada por:

$$\dot{\rho}_{tot} = -3H\rho_{tot} \left( (1 + \omega_m) + \frac{\rho_\phi}{\rho_{tot}}(\omega_\phi - \omega_m) \right). \quad (6.1.14)$$

Como (6.1.6), (6.1.11) y (6.1.13) no dependen explícitamente del tiempo y  $\phi(t)$  es monótona en  $t$ , usaremos  $\phi$  como variable diferencial en vez de  $t$  con lo cual es posible escribir las ecuaciones que describen el sistema dinámico.

### Estabilidad del sistema autónomo

Consideremos un sistema dinámico autónomo de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. El sistema de ecuaciones diferenciales acopladas para dos variables  $x(t)$  y  $y(t)$ :

$$\dot{x} = f(x, y, t), \quad \dot{y} = g(x, y, t), \quad (6.1.15)$$

(6.1.15) es autónomo si  $f$  y  $g$  no contiene términos explícitos que dependan del tiempo.

El punto  $(x_c, y_c)$  es un punto crítico o fijo del sistema si  $(f, g)|_{(x_c, y_c)} = 0$ ; dicho punto es un atractor si se cumple la condición:  $(x(t), y(t)) \rightarrow (x_c, y_c)$  para  $t \rightarrow \infty$ .

Se puede conocer si el sistema se aproxima a uno de los puntos críticos al estudiar la estabilidad alrededor de los puntos fijos. Considérese pequeñas perturbaciones  $\delta x$  alrededor del punto crítico tal que:

$$x = x_c + \delta x, \quad y = y_c + \delta y. \quad (6.1.16)$$

Sustituyendo (6.1.16) en (6.1.15) se encuentran las ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{d(\delta x_i)}{dN} = M(\delta x_i), \quad (6.1.17)$$

con  $x_1 = x$  y  $x_2 = y$  y  $N = \ln(a)$ , el número de N-foldings que es conveniente usar para la dinámica de la energía oscura:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (6.1.18)$$

con  $M$  calculada en el punto crítico. Esta matriz tiene dos valores propios  $\mu_1$  y  $\mu_2$ . La solución general para la evolución de las perturbaciones lineales puede ser escrita como:

$$\delta x = C_1 e^{\mu_1 N} + C_2 e^{\mu_2 N}, \quad (6.1.19)$$

$$\delta y = C_3 e^{\mu_1 N} + C_4 e^{\mu_2 N}. \quad (6.1.20)$$

con  $C_1, C_2, C_3, C_4$  constantes de integración.

Entonces la estabilidad del sistema alrededor de los puntos fijos depende de la naturaleza de los valores propios:

- Nodo estable:  $\mu_1, \mu_2 < 0$ .
- Nodo inestable:  $\mu_1, \mu_2 > 0$ .
- Punto de silla:  $\mu_1 < 0$  y  $\mu_2 > 0$   $\mu_1 > 0$  y  $\mu_2 < 0$ .
- Espiral estable: El determinante de la matriz  $M$  es negativa y las partes reales de los valores propios son negativos.

Un punto fijo es un atractor en el primer y en el último caso; de otra forma no lo es.

El sistema dinámico definido para el campo de K-esencia esta dado por:

$$\frac{d\rho_m}{d\phi} = -\frac{3\kappa}{v}(1 + \omega_m)\rho_m(\rho_m + vp_{,v} - p)^{1/2}, \quad (6.1.21)$$

$$\frac{dv}{d\phi} = -\frac{vp_{,\phi v} + 3\kappa\rho_m(\epsilon_m + vp_{,v} - p)^{1/2}p_{,v} - p_{,\phi}}{vp_{,vv}}. \quad (6.1.22)$$

Definiendo la cantidad  $R = \frac{\rho_m}{\rho_m + \rho_\phi}$  con  $0 \leq R \leq 1$ , entonces:

$$\frac{dR}{d\phi} = -\frac{3H}{v}R(1 - R)(\omega_m - \omega_\phi). \quad (6.1.23)$$

lo que lleva a un sistema autónomo en términos de  $\{v(\phi), R(\phi)\}$ :

$$\frac{dv}{d\phi} = -\frac{vp_{,\phi v} + 3\kappa p_{,v} \left(\frac{vp_{,v} - p}{1 - R}\right)^{1/2} - p_{,\phi}}{vp_{,vv}}, \quad (6.1.24)$$

$$\frac{dR}{d\phi} = -\frac{3\kappa}{v}\sqrt{vp_{,v} - p}R\sqrt{1 - R}\left(\omega_m - \frac{p}{vp_{,v} - p}\right). \quad (6.1.25)$$

Usando las definiciones  $C_s^2 = \frac{Q'}{vQ''}$ ,  $\tilde{\rho}_\phi = vQ' - Q$  y  $\omega_\phi = \frac{Q}{\tilde{\rho}_\phi}$ , las relaciones quedan finalmente:

$$\frac{dv}{d\phi} = -C_s^2 \left[ \frac{(\ln K)_{,\phi} v}{1 + \omega_\phi} + 3\kappa \left( \frac{K\tilde{\rho}_\phi}{1 - R} \right)^{1/2} \right], \quad (6.1.26)$$

$$\frac{dR}{d\phi} = -\frac{3\kappa}{v}R\sqrt{1 - R}\sqrt{K\tilde{\rho}_\phi}(\omega_m - \omega_\phi). \quad (6.1.27)$$

Para encontrar una solución estable del sistema (6.1.26) y (6.1.27) se deben satisfacer las siguientes condiciones:

$$\frac{d\tilde{\rho}_\phi}{dv} = \frac{(1 + \omega_\phi)}{vC_s^2} \tilde{\rho}_\phi, \quad (6.1.28)$$

$$\frac{d\omega_\phi}{dv} = \frac{1 + \omega_\phi}{v} \left(1 - \frac{\omega_\phi}{C_s^2}\right). \quad (6.1.29)$$

## Condiciones para encontrar soluciones *tracker*

En el estudio del problema de K-esencia es fundamental considerar el campo como uno *tracker* o escalante, que es definido como uno que imita el comportamiento del fluido dominante del *background* y puede caracterizarse mediante la relación:  $\rho_\phi/\rho_m = \text{cte} \neq 0$  [47], con la intención de conectar el problema con condiciones cosmológicas realistas; de otro modo, el sistema puede no quedar completamente definido.

De esta manera, el campo escalar de K-esencia imita el comportamiento funcional de la materia dominante, salvo en dominio de materia (polvo), donde  $\omega_{mat} = 0$  viola la condición de *tracker*. Además, durante las épocas donde el campo está definido por el comportamiento del fluido barotrópico dominante, el sistema dinámico evoluciona hacia un atractor casi independientemente de las condiciones iniciales, por lo que es asintóticamente estable en los atractores definidos por determinados valores:

$$v_0 = \lim_{\phi \rightarrow \infty} v(\phi), \quad R_0 = \lim_{\phi \rightarrow \infty} \frac{\rho_m(\phi)}{\rho_{tot}(\phi)}. \quad (6.1.30)$$

## Soluciones viables

Cuando se asume una función  $K(\phi)$  de la forma:

$$K(\phi) = \frac{1 + K_0(\phi)}{\phi^2}, \quad \lim_{\phi \rightarrow \infty} K_0(\phi) = 0. \quad (6.1.31)$$

se tendrán dos atractores importantes para que el campo de K-esencia sea un candidato viable a EDE: dominio de radiación, donde existen cotas para la densidad de energía oscura para que la nucleosíntesis primordial tome lugar y el dominio de De-Sitter (comportamiento tipo constante cosmológica que en etapas tardías produce una expansión acelerada).

### Dominio de radiación $R_0 \approx 1$

Considérese el *ansatz* para  $\{v(\phi), R(\phi)\}$  en dominio de radiación:

$$v(\phi) = v_0 - A(\phi), \quad R(\phi) = R_0 - B(\phi). \quad (6.1.32)$$

donde  $A(\phi), B(\phi) \rightarrow 0$  monótonamente para  $\phi \rightarrow \infty$ .

Se solucionará (6.1.26) y (6.1.27) para conocer la forma funcional de  $A(\phi)$  y  $B(\phi)$  que satisfaga las condiciones de (6.1.32):

$$\frac{dv}{d\phi} = -\frac{dA}{d\phi} = -C_s^2 \left[ \frac{(\ln K)_{,\phi} v}{1 + \omega_\phi} + 3\kappa \sqrt{\frac{K(\phi) \tilde{\rho}_v}{1 - R}} \right], \quad (6.1.33)$$

$$\frac{dR}{d \ln \phi} = -\frac{dB}{d \ln \phi} = -\frac{3\kappa}{v} R \sqrt{1 - R} \sqrt{\tilde{\rho}_v}, \quad (6.1.34)$$

teniendo en cuenta que  $\frac{dA}{d\phi} \rightarrow 0$  para  $\phi \rightarrow \infty$  cae más rápidamente que  $\phi^{-1}$  (<sup>3</sup>, <sup>4</sup>) y  $C_s^2(v_0) \neq 0$ , entonces se deduce que el paréntesis del lado derecho tiende a cero, y por tanto,  $\sqrt{K} \propto \phi^{-1}$  y  $(\ln K)_{,\phi} \propto -\phi^{-1}$ , tal que:

$$0 < R_0 < 1, \quad R_0 = 1 - \frac{9\kappa^2 Q'^2(v_0)}{4 \tilde{\rho}_\phi(v_0)}, \quad (6.1.37)$$

$$Q(v_0) < \frac{4}{9} \kappa^2 v_0^2 \frac{\omega_m}{(1 + \omega_m)^2}, \quad (6.1.38)$$

con estas condiciones, y la ecuaciones diferenciales asociada a  $A(\phi)$  y  $B(\phi)$ , se encuentra un ecuación de segundo orden para  $B(\phi)$ :

$$\frac{d^2 B}{d(\ln \phi)^2} + \alpha_0 \frac{dB}{d(\ln \phi)} + \beta_0 B = \gamma_0 \left[ \frac{dK_0}{d \ln \phi} + K_0 \right], \quad (6.1.39)$$

con:

$$K_0 = \lim_{\phi \rightarrow \infty} K(\phi), \quad \alpha_0 = \frac{1 - \omega_m}{1 + \omega_m},$$

<sup>3</sup>Si una función  $F(\phi)$  monótonamente va una constante para  $\phi \rightarrow \infty$ , entonces  $F'(\phi)$  decae más rápidamente que  $\phi^{-1}$ , lo que se puede establecer mediante la identidad:

$$F(0) - \lim_{\phi \rightarrow \infty} F(\phi) = - \int_0^\infty F'(\phi) d\phi < \infty, \quad (6.1.35)$$

lo que significa que  $F'(\phi)$  es integrable en  $\phi \rightarrow \infty$ . Entonces  $F'(\phi)$  decae más rápido que  $\phi^{-1}$  para  $\phi \rightarrow \infty$ .

<sup>4</sup>Si una función  $F(\phi)$  es monótona, entonces  $F'(\phi) \rightarrow 0$  si y sólo si:

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} \frac{F(\phi)}{\phi} = 0. \quad (6.1.36)$$

Este argumento sigue de la regla de L'Hopital en el caso  $F(\phi) \rightarrow \infty$ , y es trivial en el caso en que  $F(\phi)$  tiene un límite finito para  $\phi \rightarrow \infty$

$$\gamma_0 = 2 \frac{C_s^2(v_0) - \omega_m}{1 + \omega_m} \omega_m^2 R_0^2 (1 - R_0), \quad \beta_0 = \frac{\gamma_0}{1 - R_0} = 2 \frac{C_s^2(v_0) - \omega_m}{1 + \omega_m} \omega_m^2 R_0^2.$$

La solución general de (6.1.39) es la suma de la solución homogénea y una inhomogénea. La sol. homogénea es estable si las raíces de la ecuación característica:

$$\lambda^2 + \alpha_0 \lambda + \beta_0 = 0, \quad (6.1.40)$$

tienen partes reales negativas, tal que:

$$Re(\lambda_1), \quad Re(\lambda_2) < 0, \quad (6.1.41)$$

es decir

$$\alpha_0 > 0, \quad \beta_0 > 0. \quad (6.1.42)$$

que es equivalente a

$$|\omega_m| < 1, \quad C_s^2(v_0) > \omega_m. \quad (6.1.43)$$

La solución homogénea esta dada por:

$$B_{ho}(\phi) = C_1 e^{\lambda_1 \phi} + C_2 e^{\lambda_2 \phi}, \quad (6.1.44)$$

Es sencillo mostrar que  $B_{ho}(\phi)$  tiende a cero para  $\phi \rightarrow \infty$  con la condición (6.1.41).

La solución no homogénea es:

$$B_{in}(\phi) = B_1(\phi) \phi^{\lambda_1} + B_2(\phi) \phi^{\lambda_2}, \quad (6.1.45)$$

$$B_1(\phi) = \frac{\gamma_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \int^{\phi} \phi^{-\lambda_1 - 1} (\phi K'_0 + K_0) d\phi, \quad (6.1.46)$$

$$B_2(\phi) = \frac{\gamma_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \int^{\phi} \phi^{-\lambda_2 - 1} (\phi K'_0 + K_0) d\phi, \quad (6.1.47)$$

como  $K_0(\phi) \rightarrow 0$  para  $\phi \rightarrow \infty$ , la solución no homogénea tiende a cero para  $\phi \rightarrow \infty$  si se satisface (6.1.41). De forma directa puede mostrarse que existe un límite superior:

$$|\phi K'_0 + K_0| < M \quad \text{para todo } \phi > \phi_M, \quad (6.1.48)$$

donde  $\phi_M$  debe escojarse para algún  $M > 0$ . Entonces  $B_{in}(\phi)$  es acotado para  $\phi > \phi_M$  por:

$$|B(\phi)| < c_1 M + c_2 \phi^{\lambda_1} + c_3 \phi^{\lambda_2}, \quad (6.1.49)$$

tal que con  $B(\phi) \rightarrow 0$  para  $\phi \rightarrow \infty$ . Bajo las mismas suposiciones, la función  $A(\phi)$  tendrá el mismo comportamiento para  $\phi \rightarrow \infty$ .

Finalmente, teniendo en cuenta (6.1.31), (6.1.32), (6.1.37), (6.1.38) y  $C_s^2(v_0) \neq 0$ , las soluciones asintóticamente estables de  $\{v(\phi), R(\phi)\} \rightarrow \{v_0, R_0\}$  quedan definidas por las condiciones:

$$\omega_m = \omega_\phi(v_0), \quad \tilde{\rho}_\phi(\phi) \neq 0, \quad C_s^2(v_0) > \omega_m \quad (6.1.50)$$

$$\omega'_\phi(v_0) = \left(1 - \frac{\omega_m}{C_s^2(v_0)}\right) \frac{1 + \omega_m}{v_0} \neq 0. \quad (6.1.51)$$

### Dominio de De-Sitter (expansión acelerada en etapas tardías)

De forma análoga, cuando se impone que el campo de K-esencia imite el comportamiento de constante cosmológica y sea subdominante en dominio de materia  $R \sim 0$  tal que:

$$\rho_{tot} \sim \rho_\phi \propto E_0 \phi^{-2} \quad \text{para} \quad \phi \rightarrow \infty. \quad (6.1.52)$$

De la ecuación de continuidad para el campo  $\phi$  (6.1.13):

$$\frac{d\rho_\phi}{d\phi} = -\frac{3K}{v} \sqrt{\rho_{tot}} (1 + \omega_\phi) \rho_\phi \propto -\frac{3K}{v_s} \rho_{tot}^{3/2} (1 + \omega_\phi), \quad (6.1.53)$$

Como la solución *tracker* no es estable si  $\omega_\phi = 0$  y se busca  $\lim_{\phi \rightarrow \infty} \omega_\phi = -1$ , con lo que se encuentran las primeras condiciones que deben satisfacer las variables dinámicas del sistema:

$$C_s^2(v) \neq 0, \quad v_s \neq 0, \quad -1 < \omega_\phi < 0. \quad (6.1.54)$$

Combinando las condiciones (6.1.52) y (6.1.53), se encuentra:

$$\frac{3K}{v} \sqrt{E_0} = \frac{2v_s}{1 + \omega_\phi(v_s)}, \quad (6.1.55)$$

Con el sistema dinámico  $\{v(\phi), R(\phi)\}$  se supone un ansatz para este dominio, de la forma:

$$v(\phi) = v_s - A(\phi), \quad R(\phi) = B(\phi). \quad (6.1.56)$$

donde  $A(\phi), B(\phi)$  deben tender a cero para  $\phi \rightarrow \infty$ .

Las ecuaciones diferenciales que se obtienen al imponer las condiciones (6.1.26) y (6.1.27) son:

$$\frac{dA}{d \ln \phi} = [(\phi K'_0 + K_0) - B] \frac{C_s^2(v_s) v_s}{1 + \omega_\phi(v_s)} - \frac{1 - \omega_m}{1 + \omega_m} A \quad (6.1.57)$$

$$\frac{dB}{d\ln\phi} = -2 \frac{\omega_m - \omega_\phi(v_s)}{1 + \omega_\phi(v_s)} B \quad (6.1.58)$$

Las soluciones de  $A(\phi)$  decaen bajo la condición  $\frac{1 - \omega_\phi(v_s)}{1 + \omega_\phi(v_s)} > 0$ . De otro lado, la solución de función  $B(\phi)$  siempre lo hace si  $\omega_m > \omega_\phi(v_s)$ , ó, de forma equivalente para  $|\omega_\phi(v_s)| < 1$ . Las soluciones que se encuentran son estables bajo las suposiciones mencionadas previamente.

## 6.2. Ecuación de estado efectiva a partir de los atractores y la condición *tracker*

Hasta el momento las ecuaciones dinámicas del problema de K-esencia han sido tratadas de forma general, sin hacer ninguna suposición sobre la forma funcional de  $Q(v)$ . Sin embargo, este desarrollo presenta el problema de que no define un sistema dinámico que pueda relacionarse con las variables físicas que permiten ligarlo con observaciones cosmológicas, y por tanto, se haría necesario hacer un *fine-tuning* del campo y su velocidad en etapas tempranas.

No obstante, si el campo presenta la característica de ser escalante en dominio de radiación, satisface los dos atractores estudiados en la sección anterior: las condiciones dadas en la vecindad de radiación (6.1.50) y (6.1.51) imponen  $\omega_\phi = 1/3|_{v_{rad}}$  y garantizan que durante este dominio la densidad de energía del campo de K-esencia puede escribirse con una fracción de la energía total dado que el campo durante este periodo tiene un comportamiento como el de la radiación, así:

$$\rho_\phi|_{rad} = b \cdot \rho_{rad} \quad 0 \leq b < 1. \quad (6.2.1)$$

La condición sobre  $b$  respeta que la contribución del campo sea subdominante en radiación pero garantiza que  $\rho_\phi|_{rad} \propto a^{-4}$ .

De otro lado, el segundo atractor: De Sitter, constituye una condición necesaria para que el campo en etapas tardías sea dominante y lleve a una expansión acelerada del universo ( $\phi \rightarrow \infty$  ó  $z \leq 1$ ). Tanto la condición de expansión acelerada  $-1 < \omega_\phi < -\frac{1}{3}$ , y la condición necesaria para este atractor (6.1.55) y (6.1.56) deben satisfacerse simultáneamente.

De esta manera, se propondrá una forma efectiva de la ecuación del parámetro de estado del campo de K-esencia (entre las infinitas que podrían construirse), de forma tal que se tengan como límites los atractores de radiación y de De Sitter, que el campo sea subdominante en radiación y materia, y se satisfagan algunas cotas cosmológicas bien conocidas.

El parámetro  $\omega_\phi$  queda definido de la forma:

$$\omega_\phi(a) = \frac{4/3}{\left(\frac{a}{a_d}\right)^m + 1} - 1, \quad (6.2.2)$$

con  $a_d = \frac{a_{eq} + a_*}{2}$  un factor de escala en el dominio de materia que permite poner los límites aproximados del mismo dominio, de tal forma que el campo pueda evolucionar de forma suave y continua de un atractor al otro. La validez de la parametrización (6.2.2) es supuesta a partir de  $a > 10^{-12}$  y dada la forma en que fue construida, se aproxima a los resultados estándar para  $a \sim a_0$  en virtud del término  $-1$ , que se ha puesto para asegurar que  $\phi \rightarrow \infty$  el modelo tienda a  $\Lambda$ CDM.

Los parámetros libres del modelo  $a_*$  y  $m$  deben calcularse de forma independiente. El primero representa el factor de escala para el cual el campo escalar de K-esencia comienza a dominar sobre la materia (equidad materia–energía oscura) y el segundo, modula el comportamiento de  $\omega_\phi(a)$  durante la transición entre el dominio de radiación y el de energía oscura.

### 6.2.1. Densidad de energía del campo de K-esencia

La densidad de energía del campo de K-esencia en términos de la parametrización (6.2.2) puede encontrarse integrando la relación (6.1.28) entre algún factor de escala  $a \ll a_0$  y hoy  $a_0 = 1$ :

$$\int_\rho^{\rho_0} \frac{d\rho'}{\rho'} = -3 \int_a^1 \frac{(1 + \omega_\phi(a'))}{a'} da', \quad (6.2.3)$$

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = 3 \int_a^1 \frac{4/3}{a' \left(\frac{a'}{a_d}\right)^m + 1} da',$$

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = 4 \int_a^1 \frac{da'}{a' \left(\frac{a'}{a_d}\right)^m + 1},$$

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \frac{4}{m} \ln\left(\frac{\left(\frac{a'}{a_d}\right)^m}{\left(\frac{a'}{a_d}\right)^m + 1}\right) \Bigg|_a^1,$$

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \ln\left[\frac{\left(\frac{1}{a_d}\right)^m \left(\left(\frac{a}{a_d}\right)^m + 1\right)}{\left(\frac{a}{a_d}\right)^m \left(\left(\frac{1}{a_d}\right)^m + 1\right)}\right]^{4/m},$$

tal que la densidad de energía del campo en términos del factor de escala  $a$  y los parámetros libres  $m$  y  $a_d(a_*)$  es:

$$\rho = \rho_0 \cdot a^{-4} \left[ \frac{\left( \left( \frac{a}{a_d} \right)^m + 1 \right)}{\left( \left( \frac{1}{a_d} \right)^m + 1 \right)} \right]^{4/m}. \quad (6.2.4)$$

La única ligadura disponible para  $\rho_0$  es  $\Omega_{\phi 0} = \frac{\rho_0}{\rho_{cr}}$ . Entonces, para tener una descripción completa del problema es necesario acotar la fracción de energía oscura de K-esencia  $\Omega_{\phi 0}$ .

### 6.3. Fracción de energía oscura de K-esencia

La fracción de densidad de energía asociada a un campo escalar de K-esencia con evolución cosmológica estará descrita por la parametrización (6.2.2) pueden verse de la forma (2.1.12), ó bien, de la siguiente manera [48]:

$$\Omega_{\phi} = \frac{\Omega_{\phi 0} \cdot f(a)}{\Omega_{\phi 0} \cdot f(a) + \Omega_{m 0} \cdot a^{-3}}, \quad (6.3.1)$$

con

$$f(a) = \exp \left[ -3 \int_a^1 \frac{(1 + \omega_{\phi}(a'))}{a'} da' \right] = a^{-4} \left[ \frac{\left( \left( \frac{a}{a_d} \right)^m + 1 \right)}{\left( \left( \frac{1}{a_d} \right)^m + 1 \right)} \right]^{4/m}, \quad (6.3.2)$$

la función que determina la evolución del modelo de energía oscura de K-esencia y  $\Omega_{\phi 0}$  la fracción de densidad de energía hoy. Sin embargo, teniendo en cuenta la regla de suma cósmica hoy  $\Omega_{\phi 0} + \Omega_{m 0} = 1$ , (6.3.1) puede ser escrita en términos de  $\Omega_{\phi 0}$  y  $m$ :

$$\Omega_{\phi} = \frac{\Omega_{\phi 0} \cdot f(a)}{\Omega_{\phi 0} \cdot f(a) + (1 - \Omega_{\phi 0}) \cdot a^{-3}}. \quad (6.3.3)$$

No existe una forma directa de determinar el valor de  $\Omega_{\phi 0}$  sin usar otro método cosmológico, por lo que se considerará la distancia de luminosidad con la forma (6.3.3) para ajustar los mejores valores de  $\{\Omega_{\phi 0}, m, z_*\}$  con  $1 + z_* = \frac{1}{a_*}$ .

Para dicho fin, hemos tomado las distancias de luminosidad de SNIa <sup>5</sup> (en términos del redshift  $z$ ) de la base de *Supernova Cosmology Project* [49] usando solo aquellos  $z > 0.8$  para minimizar la función  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N \sim 59} \frac{[\mu_i - \mu(z_i)]^2}{\sigma^2}, \quad (6.3.4)$$

<sup>5</sup>las supernovas tipo Ia son candelas estándar que provienen de la evolución de una enana blanca de 1.2 masas solares. Tienen una magnitud absoluta de  $M = -19.3$  y su característica principal es la ausencia de hidrogeno en las capas exteriores y una línea en el espectro de silicio una vez ionizado (SIII) en 615.0 nm.

donde  $\sigma$  es la desviación estándar de los datos y  $\mu$  el módulo de distancia definida por:

$$\mu = m - M = 5(\log_{10}d_L(z) - 1), \quad (6.3.5)$$

con  $m$  la magnitud aparente y  $M$  la magnitud absoluta de un determinado objeto astrofísico y  $d_L(z)$  la distancia de luminosidad medida en parsecs.

Para un objeto determinado *redshift*  $z$ , la distancia de luminosidad definida por el modelo es:

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{(\Omega_{\phi_0}f(z'; m, z_*) + (1 - \Omega_{\phi_0})(1+z')^3)^{1/2}}. \quad (6.3.6)$$

$f(z; m, z_*) = (1+z)^4 \left( \frac{\left(\frac{1+z_d}{1+z}\right)^{m+1}}{(1+z_d)^{m+1}} \right)^{4/m}$  correspondiente a la función  $f(a)$  definida por (6.3.2) pero en términos del *redshift*.

Para optimizar la minimización de (6.3.4), se deben satisfacer simultáneamente las ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^{N \sim 59} \left( \frac{\mu_i - \mu(z_i)}{\sigma^2} \right) \left( \frac{\partial \mu(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*)}{\partial \Omega_{\phi_0}} \right) = 0, \quad (6.3.7)$$

$$\sum_{i=1}^{N \sim 59} \left( \frac{\mu_i - \mu(z_i)}{\sigma^2} \right) \left( \frac{\partial \mu(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*)}{\partial m} \right) = 0, \quad (6.3.8)$$

$$\sum_{i=1}^{N \sim 59} \left( \frac{\mu_i - \mu(z_i)}{\sigma^2} \right) \left( \frac{\partial \mu(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*)}{\partial z_*} \right) = 0, \quad (6.3.9)$$

Calculemos el elemento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*)}{\partial \Omega_{\phi_0}} &= \frac{\partial(5 \cdot \log_{10}d_L(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*))}{\partial \Omega_{\phi_0}}, \\ &= \frac{5}{\ln 10} \frac{\partial(\ln(d_L(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*)))}{\partial \Omega_{\phi_0}}, \\ &= \frac{5}{\ln 10 \cdot d_L(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*)} \frac{\partial(d_L(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*))}{\partial \Omega_{\phi_0}}, \\ &= \frac{5}{\ln 10 \cdot d_L(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*)} \frac{c \cdot (1+z_i)}{H_0} \int_0^{z_i} dz' \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{(f(z'; m, z_*) - (1+z')^3)}{(\Omega_{\phi_0}f(z'; m, z_*) + (1 - \Omega_{\phi_0})(1+z')^3)^{3/2}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mu(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*)}{\partial \Omega_{\phi_0}} = -\frac{5}{2 \cdot \ln 10} \frac{\int_0^{z_i} dz' \frac{f(z'; m, z_*) - (1+z')^3}{(\Omega_{\phi_0} f(z'; m, z_*) + (1-\Omega_{\phi_0})(1+z')^3)^{3/2}}}{\int_0^{z_i} dz' \frac{1}{(\Omega_{\phi_0} f(z'; m, z_*) + (1-\Omega_{\phi_0})(1+z')^3)^{1/2}}}. \quad (6.3.10)$$

De otro lado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*)}{\partial m} &= \frac{\partial(5 \cdot \log_{10} d_L(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*))}{\partial m}, \\ &= \frac{5}{\ln 10} \frac{\partial(\ln(d_L(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*)))}{\partial m}, \\ &= \frac{5}{\ln 10 \cdot d_L(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*)} \frac{\partial(d_L(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*))}{\partial m}, \\ &= \frac{5}{\ln 10 \cdot d_L(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*)} \frac{c(1+z_i)}{H_0} \Omega_{\phi_0} \int_0^{z_i} dz' \frac{\partial f(z'; m, z_*)}{\partial m}, \end{aligned}$$

tal que:

$$\frac{\partial f(z; m, z_*)}{\partial m} = -\frac{4}{m} \frac{f(z; m, z_*)}{1+z_d} A(z; m, z_d), \quad (6.3.11)$$

con  $A(z; m, z_d)$  dado por la expresión:

$$\begin{aligned} A(z; m, z_d) &= \ln \left( \frac{\left( \frac{1+z_d}{1+z} \right)^m + 1}{(1+z_d)^m + 1} \right) + \frac{1}{\left( \frac{1+z_d}{1+z} \right)^m + 1} \times \\ &\quad \left[ \ln(1+z_d)(1+z_d)^m \left( \frac{\left( \frac{1+z_d}{1+z} \right)^m + 1}{(1+z_d)^m + 1} \right) - \left( \frac{1+z_d}{1+z} \right)^m \ln \left( \frac{1+z_d}{1+z} \right) \right], \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

entonces:

$$\frac{\partial \mu(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*)}{\partial m} = -\frac{20}{\ln 10} \frac{\Omega_{\phi_0}}{m(1+z_d)} \frac{\int_0^{z_i} dz' \frac{f(z'; m, z_*) A(z'; m, z_*)}{(\Omega_{\phi_0} f(z'; m, z_*) + (1-\Omega_{\phi_0})(1+z')^3)^{3/2}}}{\int_0^{z_i} dz' \frac{1}{(\Omega_{\phi_0} f(z'; m, z_*) + (1-\Omega_{\phi_0})(1+z')^3)^{1/2}}}. \quad (6.3.13)$$

Finalmente, calcularemos el elemento  $\frac{\partial \mu(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*)}{\partial z_*}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mu(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*)}{\partial z_*} &= \frac{\partial(5 \cdot \log_{10} d_L(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*))}{\partial z_*}, \\
&= \frac{5}{\ln 10} \frac{\partial(\ln(d_L(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*)))}{\partial z_*}, \\
&= \frac{5}{\ln 10 \cdot d_L(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*)} \frac{\partial(d_L(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*))}{\partial z_*}, \\
&= \frac{5}{\ln 10 \cdot d_L(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*)} \frac{c(1+z_i)}{H_0} \Omega_{\phi_0} \int_0^{z_i} dz' \frac{\partial f(z'; m, z_*)}{\partial z_*},
\end{aligned}$$

con:

$$\frac{\partial f(z; m, z_*)}{\partial z_*} = \frac{2}{(1+z_d)} \frac{f(z; m, z_*)}{\left(\frac{1+z_d}{1+z}\right)^m + 1} \frac{\left(\frac{1+z_d}{1+z}\right)^m - (1+z_d)^m}{(1+z_d)^m + 1}, \quad (6.3.14)$$

$$B(z'; m, z_*) = \frac{1}{(1+z_d)} \frac{1}{\left(\frac{1+z_d}{1+z}\right)^m + 1} \frac{\left(\frac{1+z_d}{1+z}\right)^m - (1+z_d)^m}{(1+z_d)^m + 1}, \quad (6.3.15)$$

Entonces:

$$\boxed{\frac{\partial \mu(z_i; \Omega_{\phi_0}, m, z_*)}{\partial z_*} = \frac{10}{\ln 10} \frac{\Omega_{\phi_0}}{(1+z_d)^2} \frac{\int_0^{z_i} dz' \frac{f(z'; m, z_*) B(z'; m, z_*)}{(\Omega_{\phi_0} f(z'; m, z_*) + (1-\Omega_{\phi_0})(1+z')^3)^{3/2}}}{\int_0^{z_i} dz' \frac{1}{(\Omega_{\phi_0} f(z'; m, z_*) + (1-\Omega_{\phi_0})(1+z')^3)^{1/2}}}}. \quad (6.3.16)$$

Usando los resultados (6.3.10), (6.3.13) y (6.3.16) en las ecuaciones (6.3.7), (6.3.8) y (6.3.9) respectivamente, y resolviendo el sistema, es posible encontrar el valor de  $\Omega_{\phi_0}$  que minimiza  $\chi^2$

Este método permite conocer el mejor ajuste para la densidad de energía oscura hoy  $\Omega_{\phi_0}$ :

$$\boxed{\Omega_{\phi_0} = 0.69.} \quad (6.3.17)$$

Sin embargo,  $m$  y  $z_*$  presentan una fuerte degeneración en el problema, y esto se evidencia con la figura anterior, pues la función (6.3.4) casi no se ve afectada por el parámetro  $m$ . No obstante, el modelo debe tener una contribución máxima (pero subdominante) en dominio de radiación, por lo que se escogerá el valor de  $m$  que reproduzca la condición  $f(z \sim 10^9) \gg 1$ , para afectar los valores estándar de las abundancias en nucleosíntesis:

$$\boxed{m = 1.0.} \quad (6.3.18)$$

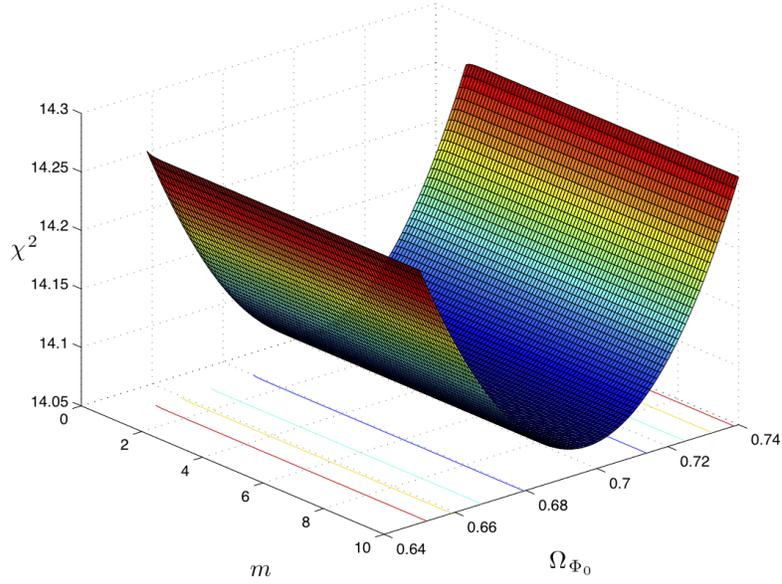


Figura 6.1: Minimización de la función  $\chi^2$  con respecto a  $m$  y  $\Omega_{\phi_0}$ .

De otro lado, la marcada degeneración de  $z_*$  se presenta en virtud de los ordenes de magnitud de  $z_{eq} = 3192$  con respecto a  $z$  de equidad materia-energía oscura, que se espera sea del orden de 1.0 para los modelos de energía oscura dinámicos propuestos en la literatura. Sin embargo, es posible romper esta degeneración al usar la ligadura definida para el parámetro de desaceleración:

$$q(z_*) = 0 \quad \text{con} \quad q(z) = (1+z) \frac{\partial H}{\partial z} - 1. \quad (6.3.19)$$

donde el elemento  $\frac{\partial H}{\partial z}$  es de la forma:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{H_0}{2} \frac{\Omega_{\phi_0} \frac{\partial f}{\partial z} + (1 - \Omega_{\phi_0})(1+z)^2}{(\Omega_{\phi_0} f(z; m, z_*) + (1 - \Omega_{\phi_0})(1+z)^3)^{1/2}}. \quad (6.3.20)$$

Computando el término  $\frac{\partial f}{\partial z}$  se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{4}{(1+z)} \left( \frac{f(z; m, z_*)}{\left(\frac{1+z_d}{1+z}\right)^m + 1} \right), \quad (6.3.21)$$

tal que:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{H_0}{2} \frac{\frac{4\Omega_{\phi_0} f(z)}{1+z} \frac{1}{\left(\frac{1+z_d}{1+z}\right)^m + 1} + (1 - \Omega_{\phi_0})(1+z)^2}{(\Omega_{\phi_0} f(z; m, z_*) + (1 - \Omega_{\phi_0})(1+z)^3)^{1/2}}, \quad (6.3.22)$$

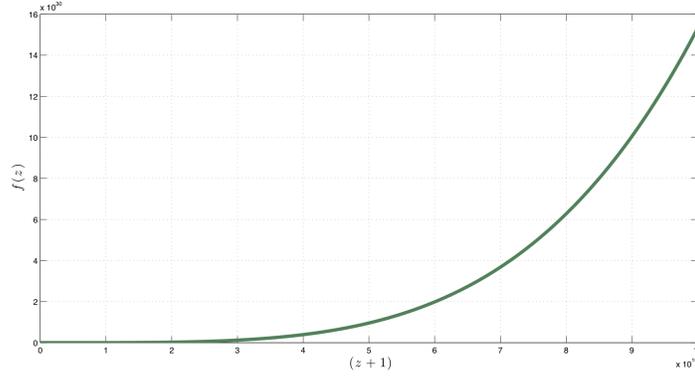


Figura 6.2: Evolución de  $f(z)$  para el mejor ajuste de  $m$ . Este gráfico representa de forma esquemática la evolución de  $\rho_\phi$ , teniendo en cuenta que  $f(z) = \frac{\rho_\phi}{\rho_{\phi 0}}$ .

Entonces, el término  $q(z)$  queda:

$$q(z) = (1+z) \frac{H_0}{2} \frac{4\Omega_{\phi_0} f(z) \frac{1}{1+z} \frac{1}{\left(\frac{1+z_d}{1+z}\right)^m + 1} + (1 - \Omega_{\phi_0})(1+z)^2}{(\Omega_{\phi_0} f(z; m, z_*) + (1 - \Omega_{\phi_0})(1+z)^3)^{1/2}} - 1. \quad (6.3.23)$$

Si  $q(z_*) = 0$ , la expresión a resolver es:

$$q(z_*) = \frac{H_0}{2} \frac{4\Omega_{\phi_0} f(z_*) \frac{1}{1+z_*} \frac{1}{\left(\frac{1+z_d}{1+z_*}\right)^m + 1} + (1 - \Omega_{\phi_0})(1+z_*)^3}{(\Omega_{\phi_0} f(z_*) + (1 - \Omega_{\phi_0})(1+z_*)^3)^{1/2}} - 1 = 0, \quad (6.3.24)$$

Reorganizando términos, se encuentra una ecuación cuadrática en  $\Omega_{\phi_0}$  de la forma:

$$A(z_*)\Omega_{\phi_0}^2 + B(z_*)\Omega_{\phi_0} + C(z_*) = 0, \quad (6.3.25)$$

$$A(z_*) = 4H_0^2 \frac{f^2(z_*)}{\left(\left(\frac{1+z_d}{1+z_*}\right)^m + 1\right)^2} - 2H_0 \frac{f(z_*)(1+z_*)^3}{\left(\left(\frac{1+z_d}{1+z_*}\right)^m + 1\right)} + \frac{H_0^2}{4}(1+z_*)^6,$$

$$B(z_*) = 2H_0 \frac{f(z_*)(1+z_*)^3}{\left(\left(\frac{1+z_d}{1+z_*}\right)^m + 1\right)} - \frac{H_0^2}{2}(1+z_*)^6 - f(z_*) + (1+z_*)^3,$$

$$C(z_*) = \frac{H_0^2}{4}(1+z_*)^6 - (1+z_*)^3,$$

$$\text{y } f(z_*) = (1+z_*)^4 \left( \frac{\left(\frac{1+z_d}{1+z_*}\right)^m + 1}{(1+z_d)^m + 1} \right)^{4/m}.$$

Resolviendo la ecuación algebraica de forma numérica se encuentra que el siguiente valor para  $z_*$ :

$$z_* = 1.48.$$

(6.3.26)

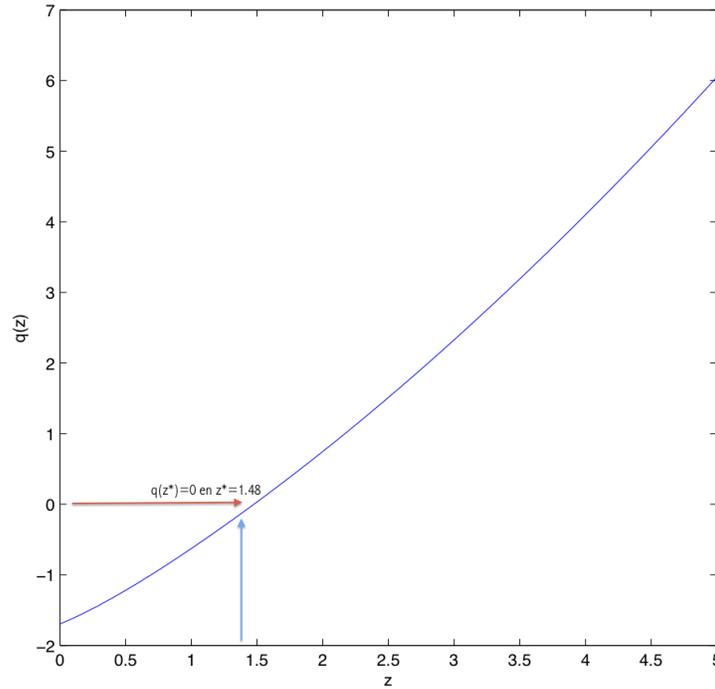


Figura 6.3: Evolución de  $q(z)$  vs.  $z$ .

Con el mejor ajuste de los parámetros libres del modelo  $\{\Omega_{\phi 0}, m, z_*\} = \{0.69, 1.0, 1.48\}$  es posible obtener el valor del parámetro de la ecuación de estado hoy  $\omega_0$ :

$$\omega_0 = -0.99.$$

(6.3.27)

Este valor muestra que el modelo tiende a  $\Lambda$ CDM para valores de  $z$  cercanos al de hoy.

El comportamiento de la parametrización es el esperado y satisface las condiciones impuestas. Se observa que durante radiación  $\omega_{\phi} = 1/3$  y tan pronto se alcanza el dominio de materia el modelo evoluciona hasta alcanzar el segundo atractor que lleva a la expansión acelerada.

Con los valores obtenidos para los parámetros, también puede compararse la distancia de luminosidad predicha por el modelo con respecto a la del modelo estándar  $\Lambda$ CDM en la figura 6.3.

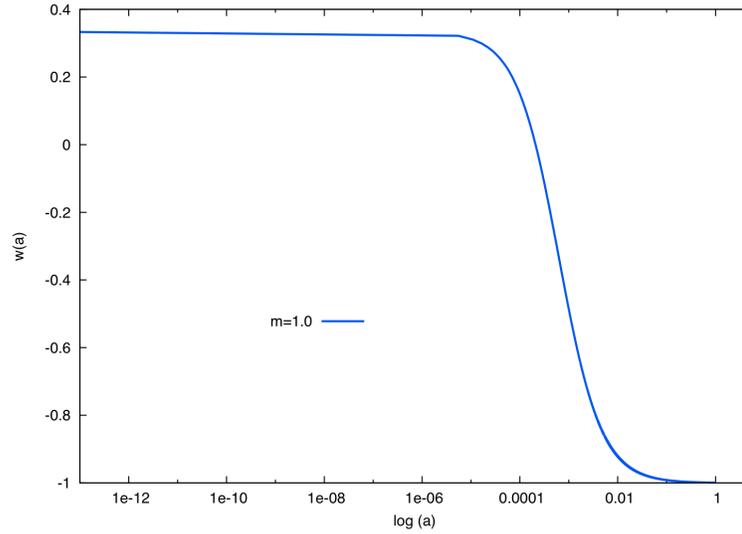


Figura 6.4: Parámetro de la ecuación de estado de K-esencia con respecto al factor de escala  $a$ .

Al analizar los resultados arrojados por la figura 6.3 se encuentra algo que se esperaba: la distancia de luminosidad del modelo con un campo escalar de K-esencia es mayor que la de  $\Lambda$ CDM pues el valor de densidad de materia hoy predicha por el modelo es mayor que el encontrado con el modelo  $\Lambda$ CDM (de acuerdo con los reportes por WMAP-7  $\{\Omega_{\phi 0}, \Omega_{m0}\} = \{0.734 \pm 0.029, 0.266 \pm 0.029\}$ <sup>6</sup>).

Sin embargo, para valores muy pequeños de *redshift* los modelos predicen valores muy cercanos pues la distancia de luminosidad  $d_L$  para dichos valores es casi insensible al modelo cosmológico y solo depende linealmente del *redshift*.

Adicionalmente, es posible conocer la evolución de la fracción de energía oscura como K-esencia con los valores de los parámetros encontrados:

### Velocidad adiabática del sonido $C_s^2$

Se definió la velocidad adiabática del sonido para el campo de K-esencia de la forma  $C_s^2 = \frac{Q'}{vQ''}$ . No obstante, nos interesa reescribir esta magnitud física en términos de  $\omega_\phi(a)$ :

$$C_s^2 = \frac{(\partial p_\phi / \partial a)}{(\partial \rho_\phi / \partial a)}, \quad (6.3.28)$$

que es válida mientras  $\frac{dv}{da} \neq 0$ . El término del denominador puede obtenerse directamente de la

<sup>6</sup><http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/dr4/parameters.cfm>

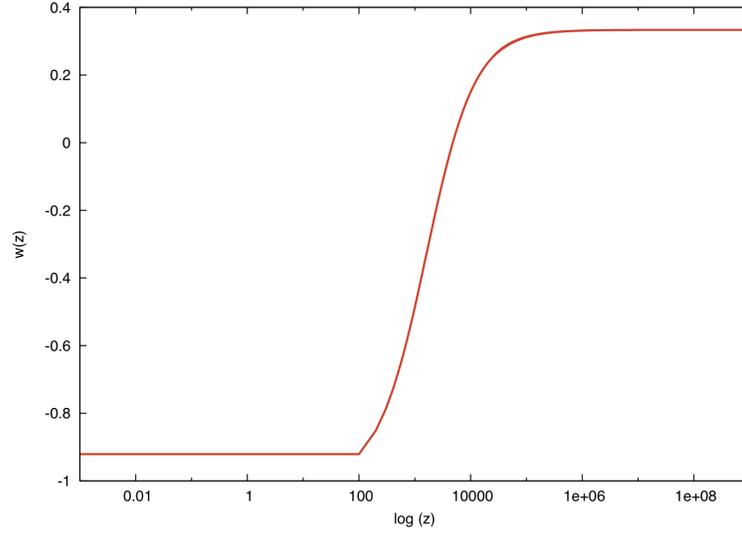


Figura 6.5: Parámetro de la ecuación de estado de K-esencia  $\omega_\phi$  vs.  $z$ .

ecuación de continuidad (6.1.13) derivando parcialmente con respecto a  $a$ , así:

$$\frac{\partial \rho_\phi}{\partial a} = -3 \frac{(1 + \omega_\phi)}{a} \rho_\phi. \quad (6.3.29)$$

mientras que  $(\partial p_\phi / \partial a)$  se obtiene teniendo en cuenta (2.1.6), tal que:

$$\frac{\partial p_\phi}{\partial a} = \frac{d\omega_\phi}{da} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial a} \omega_\phi, \quad (6.3.30)$$

$$= \frac{a(d\omega_\phi/da) - 3\omega_\phi(1 + \omega_\phi)}{a}. \quad (6.3.31)$$

reemplazando las relaciones anteriores en (6.3.28), se obtiene:

$$C_s^2 = \frac{3\omega_\phi(1 + \omega_\phi) - a(d\omega_\phi/da)}{3(1 + \omega_\phi)}. \quad (6.3.32)$$

Teniendo en cuenta (6.2.2) es fácil mostrar que:

$$a \frac{d\omega_\phi}{da} = -(4/3)m \frac{\left(\frac{a}{a_d}\right)^m}{\left(\left(\frac{a}{a_d}\right)^m + 1\right)^2}, \quad (6.3.33)$$

ó de forma equivalente:

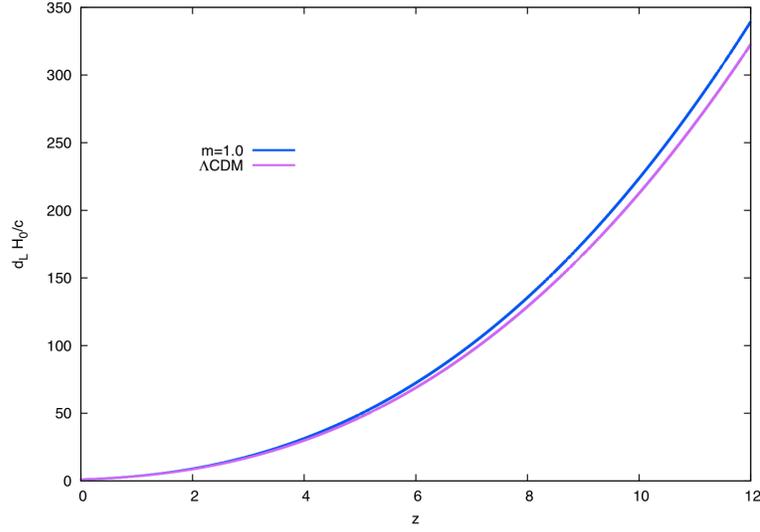


Figura 6.6: Distancia de luminosidad en función del redshift.

$$a \frac{d\omega_\phi}{da} = -(3/4)m \left( \frac{a}{a_d} \right)^m (\omega_\phi + 1)^2, \quad (6.3.34)$$

Al sustituir el resultado (6.3.34) en (6.3.32), la velocidad del sonido para el fluido de K-esencia queda de la forma:

$$C_s^2 = \omega_\phi + \frac{m}{4} \left( \frac{a}{a_d} \right)^m (\omega_\phi + 1). \quad (6.3.35)$$

que satisface la condición (6.1.50) en el atractor definido en radiación. No obstante, cabe preguntarse por la interpretación física de una velocidad del sonido adiabática en etapas de dominio de energía oscura, pues efectivamente dicha cantidad tiende al valor predicho en el modelo con constante cosmológica (en la imagen donde se asocia a  $\Lambda$  con un fluido de  $C_s^2 = -1$ ); sin embargo, este resultado conduce a un modulo de Young imaginario de las perturbaciones en el plasma. Una sugerencia es que el modelo no es estable para  $C_s^2 < 0$  [28], no obstante, solo calculando la evolución de las perturbaciones del campo de K-esencia en el fluido cosmológico y el tiempo de estabilidad de las mismas podría determinarse con exactitud si el modelo ha dejado de ser estable.

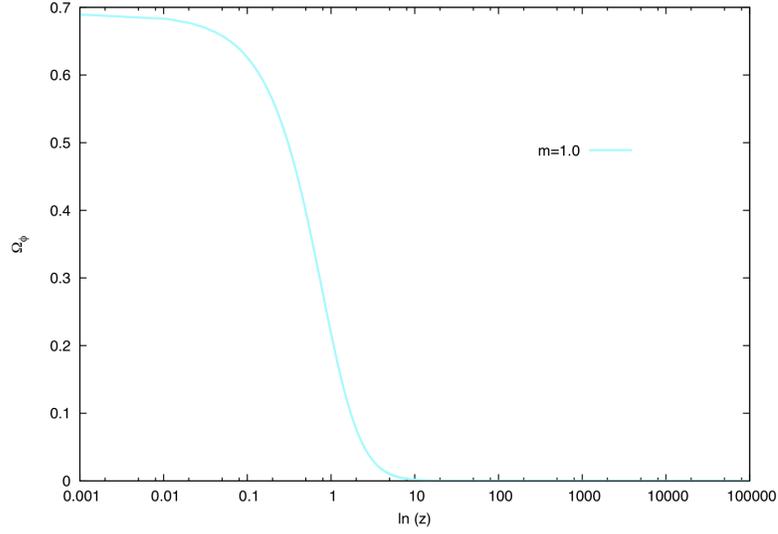


Figura 6.7:  $\Omega_\phi$  vs.  $a$

### 6.3.1. Velocidad del campo de K-esencia

Es fundamental relacionar la parametrización (6.2.2) con las variables dinámicas del problema de K-esencia, como son  $v$  y  $Q(v)$ . Teniendo en cuenta (6.1.52):

$$\frac{d\omega_\phi}{dv} = \frac{d\omega_\phi}{da} \frac{da}{dv} = \left(1 - \frac{\omega_m}{C_s^2}\right) \frac{1 + \omega_\phi}{v} \neq 0,$$

Entonces es posible escribir (mientras  $\frac{da}{d\omega_\phi} \neq 0$ )

$$v \frac{da}{dv} = \left(C_s^2 - \frac{\omega_m}{C_s^2}\right) (1 + \omega_\phi) \left(\frac{d\omega_\phi}{da}\right)^{-1},$$

$$v \frac{da}{dv} = -\frac{1}{3} \frac{a}{C_s^2} \tag{6.3.36}$$

Invirtiendo la relación anterior, se tiene:

$$\frac{dv}{v} = -3C_s^2 \frac{da}{a} \tag{6.3.37}$$

reemplazando (6.3.35) y (6.2.2) e integrando entre un factor de escala anterior a nucleosíntesis  $a$  y hoy  $a_0 = 1$  (la evolución de la velocidad para tiempos posteriores puede hacerse extendiendo los límites de integración):

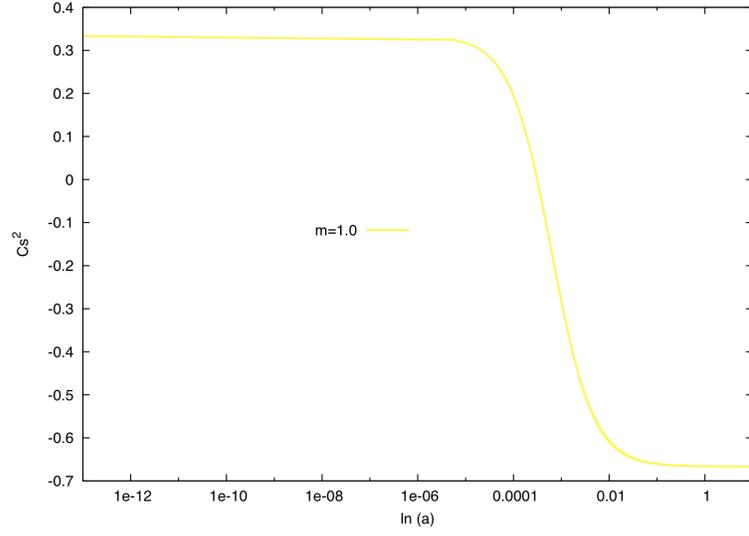


Figura 6.8: Velocidad adiabática del sonido de las perturbaciones del campo de K-esencia en el plasma cosmológico.

$$\begin{aligned}
 \int_{v_a}^{v_0} \frac{dv}{v} &= -3 \int_a^1 C_s^2 \frac{da'}{a'}, \\
 &= -3 \int_a^1 \left( \frac{\omega_\phi}{a'} + \frac{m(\omega_\phi + 1)}{4} \frac{\left(\frac{a'}{a_d}\right)^m}{a'} \right) da', \\
 &= -3 \int_a^1 \frac{4/3}{a' \left( \left(\frac{a'}{a_d}\right)^m + 1 \right)} da' + 3 \int_a^1 \frac{da'}{a'} - \frac{3}{4} m \int_a^1 \frac{4/3 \left(\frac{a'}{a_d}\right)^m}{a' \left( \left(\frac{a'}{a_d}\right)^m + 1 \right)} da',
 \end{aligned}$$

integrando por partes el primer y tercer término se tiene:

$$\int_{v_a}^{v_0} \frac{dv}{v} = -\frac{4a'}{m} \ln \left( \frac{\left(\frac{a'}{a_d}\right)^m}{\left(\frac{a'}{a_d}\right)^m + 1} \right) \Big|_a^1 - 3\ln(a) - a' \ln \left( \left(\frac{a'}{a_d}\right)^m + 1 \right) \Big|_a^1,$$

$$\ln \left( \frac{v}{v_0} \right) = \frac{4}{m} \ln \left[ \frac{\left(\frac{1}{a_d}\right)^m \left(\left(\frac{a}{a_d}\right)^m + 1\right)}{\left(\frac{a}{a_d}\right)^m \left(\left(\frac{1}{a_d}\right)^m + 1\right)} \right] + \ln(a^3) + \ln \left[ \frac{\left(\frac{1}{a_d}\right)^m + 1}{\left(\frac{a}{a_d}\right)^m + 1} \right],$$

$$\ln \left( \frac{v}{v_0} \right) = \ln \left[ a^{-m} \left( \frac{\left(\frac{a}{a_d}\right)^m + 1}{\left(\frac{1}{a_d}\right)^m + 1} \right)^{4/m} \right] + \ln(a^3) - \ln \left[ \frac{\left(\frac{a}{a_d}\right)^m + 1}{\left(\frac{1}{a_d}\right)^m + 1} \right],$$

$$\ln \left( \frac{v}{v_0} \right) = \ln \left[ a^{-1} \left( \frac{\left(\frac{a}{a_d}\right)^m + 1}{\left(\frac{1}{a_d}\right)^m + 1} \right)^{4/m-1} \right],$$

Finalmente, la velocidad del campo queda escrita en términos  $a$  y el parámetro libre  $m$  así:

$$v = v_0 \cdot a^{-1} \left( \frac{\left(\frac{a}{a_d}\right)^m + 1}{\left(\frac{1}{a_d}\right)^m + 1} \right)^{4/m-1}. \quad (6.3.38)$$

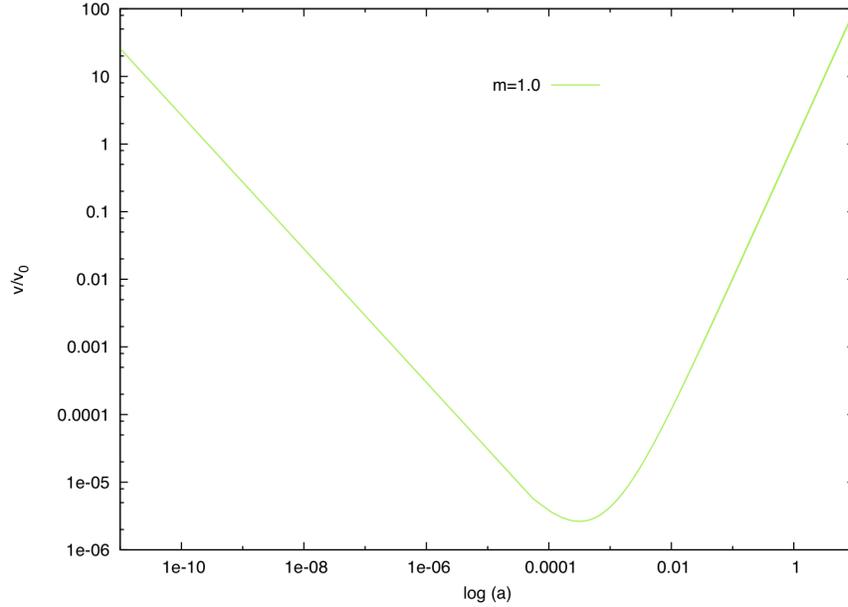


Figura 6.9: Velocidad del campo de K-esencia vs.  $a$

### 6.3.2. Término cinético no canónico de la acción $Q(v)$ en términos de $a$

Usando la regla de la cadena  $\frac{dQ}{dv} = \frac{dQ}{da} \frac{da}{dv}$  y la condición  $\tilde{\rho}_\phi \neq 0$ , es fácil reescribir (6.1.9) de la forma:

$$\begin{aligned}\omega_\phi \cdot v \cdot \frac{dQ}{da} \frac{da}{dv} &= Q(1 + \omega_\phi), \\ \frac{dQ}{da} \left( v \cdot \frac{da}{dv} \right) &= Q \left( \frac{1 + \omega_\phi}{\omega_\phi} \right),\end{aligned}$$

sustituyendo (6.3.36) en la expresión anterior se tiene:

$$\frac{dQ}{Q} = -3 \left( \frac{1 + \omega_\phi}{\omega_\phi} \right) \frac{C_s^2}{a} da, \quad (6.3.39)$$

integrando el lado de la izquierda:

$$\begin{aligned}\ln \left( \frac{Q}{Q_0} \right) &= 3 \int_a^1 \left( \frac{1 + \omega_\phi}{\omega_\phi} \right) C_s^2 \frac{da'}{a'} \\ \ln \left( \frac{Q}{Q_0} \right) &= 3 \int_a^1 \left( \frac{1 + \omega_\phi}{\omega_\phi} \right) \left( \omega_\phi + \frac{m}{4} \left( \frac{a'}{a_d} \right)^m (\omega_\phi + 1) \right) \frac{da'}{a'} \\ \ln \left( \frac{Q}{Q_0} \right) &= 3 \int_a^1 \frac{da'}{a'} \frac{4/3}{\left( \left( \frac{a'}{a_d} \right)^m + 1 \right)} + \frac{3m}{4} \int_a^1 \frac{da'}{a'} \left( \frac{a'}{a_d} \right)^m \left( \frac{\frac{16/9}{\left( \left( \frac{a'}{a_d} \right)^m + 1 \right)^2}}{\left( \frac{4/3}{\left( \frac{a'}{a_d} \right)^m + 1} \right) - 1} \right) \quad \text{copeland} \\ \ln \left( \frac{Q}{Q_0} \right) &= 4 \int_a^1 \frac{da'}{a' \left( \left( \frac{a'}{a_d} \right)^m + 1 \right)} - \frac{4m}{3} \int_a^1 \frac{\left( \frac{a'}{a_d} \right)^m da'}{a' \left( \left( \frac{a'}{a_d} \right)^m + 1 \right) \left( \left( \frac{a'}{a_d} \right)^m - 1/3 \right)}, \\ \ln \left( \frac{Q}{Q_0} \right) &= \frac{4}{m} \ln \left[ \frac{\left( \frac{a'}{a_d} \right)^m}{\left( \frac{a'}{a_d} \right)^m + 1} \right]_a^1 - \ln \left[ \frac{\left( \frac{a'}{a_d} \right)^m + 1}{\left( \frac{a'}{a_d} \right)^m - 1/3} \right]_a^1 \\ \ln \left( \frac{Q}{Q_0} \right) &= \ln \left[ a^{-m} \left( \frac{\left( \frac{a}{a_d} \right)^m + 1}{\left( \frac{1}{a_d} \right)^m + 1} \right)^{4/m} \right] - \ln \left[ \left( \frac{\left( \frac{a}{a_d} \right)^m + 1}{\left( \frac{1}{a_d} \right)^m + 1} \right) \left( \frac{\left( \frac{1}{a_d} \right)^m - 1/3}{\left( \frac{a}{a_d} \right)^m - 1/3} \right) \right], \\ \ln \left( \frac{Q}{Q_0} \right) &= \ln \left[ a^{-4} \left( \frac{\left( \frac{a}{a_d} \right)^m + 1}{\left( \frac{1}{a_d} \right)^m + 1} \right)^{4/m+1} \left( \frac{\left( \frac{1}{a_d} \right)^m - 1/3}{\left( \frac{a}{a_d} \right)^m - 1/3} \right) \right], \quad (6.3.40)\end{aligned}$$

La dependencia final del término cinético no canónico de la acción de K-esencia es:

$$Q = Q_0 \cdot a^{-4} \left( \frac{\left(\frac{a}{a_d}\right)^m + 1}{\left(\frac{1}{a_d}\right)^m + 1} \right)^{4/m+1} \left( \frac{\left(\frac{1}{a_d}\right)^m - 1/3}{\left(\frac{a}{a_d}\right)^m - 1/3} \right). \quad (6.3.41)$$

Si se observa con atención, aunque el problema ha sido reescrito en términos de  $a$ , el comportamiento de la velocidad del campo y el término no canónico es el esperado: la energía cinética es proporcional a  $v^2$  ó bien,  $\propto a^{-2}$  por (6.3.38), mientras que el término cinético no canónico  $Q$  lo hace como  $\propto a^{-4}$  de acuerdo con (6.3.41), entonces se deduce que la función  $Q(v) \propto v^4$ , es decir, es de orden dos en la energía cinética del campo.

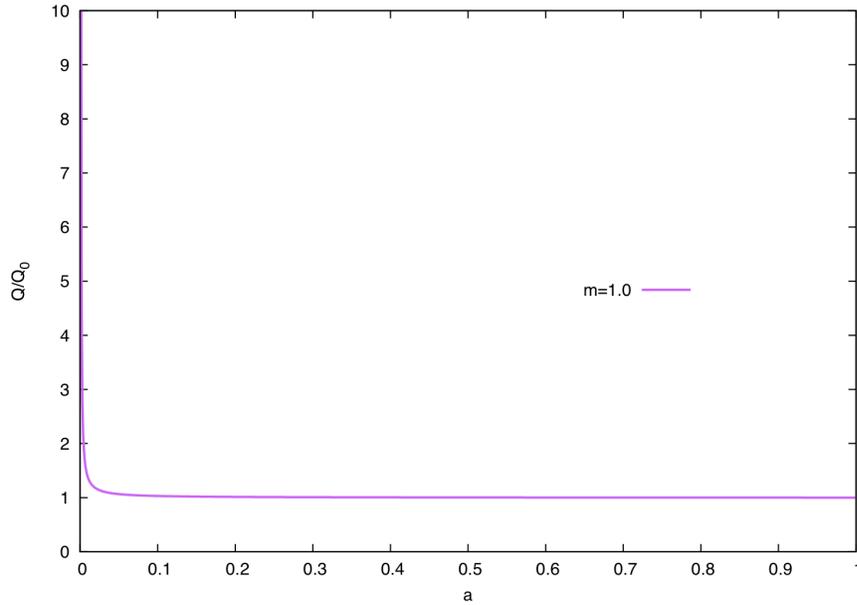


Figura 6.10: Término cinético no canónico  $Q(v)$  de K-esencia vs.  $a$

Como se observa en la figura 6.3.2, el término  $Q(v)$  decrece con  $a$ , tendiendo a hacerse cero asintóticamente, para reducirse al caso de  $\Lambda$ CDM.

# CAPÍTULO 7

---

---

## ANÁLISIS COMPLEMENTARIO DE LA PARAMETRIZACIÓN

### 7.1. Evolución de las inhomogeneidades de materia

Para probar que en diferentes etapas cosmológicas la parametrización impuesta funciona correctamente, se encontrará como evolucionan las inhomogeneidades que se encuentran dentro del horizonte a partir del dominio de materia en presencia del modelo de EDE descrita por (6.2.2).

Cuando se describe la evolución de las inhomogeneidades, cuyos modos escalares y tensoriales son resueltos por el **CMBfast**, en el dominio de materia, se centra la atención en aquellas que han entrado en el horizonte; sin embargo, la presencia de alguna forma de energía oscura retrasa los modos que se consideran en la ecuación de Meszaros.

No obstante, apesar de la composición de materia–energía del universo, una vez han entrado al horizonte, todos los modos experimentan el mismo factor de crecimiento, y dicho crecimiento uniforme es un resultado de que la materia oscura fría tiene presión nula, luego una vez que los modos entran al horizonte, no hay presión que pueda sacarlas del mismo, y por tanto, los modos evolucionan idénticamente [11].

Entonces cuando se modifica la ecuación de Meszaros, debe reescribirse el término fuente correspondiente a la ecuación de Poisson y se supone que las contribuciones de la radiación son casi nulas, luego se tiene  $4\pi G\rho_{dm} = \left(\frac{3}{2}\right) H_0^2 \Omega_m a^{-3}$ .

Considérese la variación de densidad de contraste  $\delta$  en términos del potencial gravitacional,  $y = \frac{a}{a_{eq}}$  y  $H(a)$ :

$$\frac{d^2\delta}{da^2} + \left(\frac{d(\ln H)}{da} + \frac{3}{a}\right) \frac{d\delta}{da} - \frac{3}{2} \frac{\Omega_m H_0^2}{a^5 H^2} \delta = 0, \quad (7.1.1)$$

Existen dos soluciones para la ecuación diferencial (7.1.1). Una es  $\delta \propto H$  (que sigue siendo valida en presencia de otras componentes de materia–energía). Sin embargo, está solución no es la que se busca, dado que el factor de Hubble es decreciente en este modelo, como en los actualmente

aceptados. Los modos cuya solución es buscada, son aquellos que se mantienen con una amplitud considerable después de cruzar el horizontes -los modos crecientes-

$$D_+(a) \propto H(a) \int^a \frac{da'}{(a'H(a'))^3}. \quad (7.1.2)$$

Ahora bien, la constante de proporcionalidad de la integral se encuentra teniendo en cuenta que para  $z \sim 10$  corresponde a  $D_+(a) = a$  y  $H_{mat} = H_0 \Omega_m^{1/2} a^{-3/2}$ , lo que define una factor de crecimiento de la forma:

$$D_+(a) = \frac{5}{2} \Omega_{m0} \frac{H(a)}{H_0} \int_0^a \frac{da'}{(a'H(a')/H_0)^3}. \quad (7.1.3)$$

La ecuación (7.1.3) representa una solución creciente de los modos dentro del horizonte con un factor de Hubble descrito por  $\frac{H(a)}{H_0} = \Omega_{\phi 0} \cdot f(a) + (1 - \Omega_{\phi 0}) \cdot a^{-3}$ , con  $f(a)$  una función continua que describe la contribución de nuestro modelo de EDE de K-esencia.

Usando los valores encontrados previamente para los parámetros libres del modelo, se integra numéricamente (7.1.3). Los resultados se muestran en la siguiente gráfica:

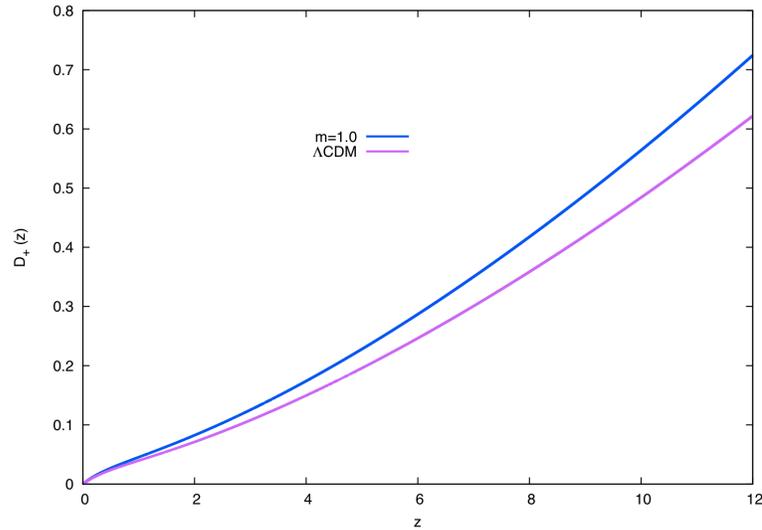


Figura 7.1: Factor de crecimiento de las inhomogeneidades  $D_+$  vs.  $z$ .

Se encuentran varios efectos en la densidad de perturbaciones: se suprime el crecimiento lineal  $\omega(a) \leq -1/2$ , con respecto al modelo  $\Lambda$ CDM donde el crecimiento es proporcional a el

factor de escala  $a$ ; en presencia de un modelo como el mostrado en este trabajo se revelan grados de inhomogeneidad en el CMB que son los justos para explicar la estructura hoy.

Este efecto de supresión de los modos lineales aumenta con  $\omega$  mayores en el dominio de materia y comienzo más temprano del dominio de energía oscura. Ambas situaciones se evidencian en nuestro modelo, y esta es una razón para que las curva en 7.1 deje de ser lineal para *redshift* bajos.

Además, la supresión de los modos proporcionales al factor de escala trae como consecuencia una alteración de la normalización del espectro de potencias hoy, expresado en términos de la valor *rms* de la fluctuación de masa en esferas de  $8h^{-1}\text{Mpc}$   $\sigma_8$ . Pore esto el número de objetos con estructura acotados a un determinado *redshift* es exponencialmente sensible al crecimiento de las perturbaciones. Conociendo el valor medido de  $\sigma_8$  podría calcularse la densidad de estructura que ha sido formada en presencia de nuestro modelo.

## 7.2. Anisotropías en el CMB

Además, es importante conocer como se modifica el espectro de las anisotropías del CMB en presencia del modelo. Para ello, se usó el código en fortran **CMBfast** [50, 51] en el modo normal y obviando la opción de normalización del **COBE**. De esta manera, se obtienen curvas con los ajustes de los parámetros del modelo y otra curva asociada a constante cosmológica como energía oscura, que permite determina que tanto se aleja el modelo de los resultados del CMB, cuyo ajuste favorece el modelo  $\Lambda\text{CDM}$ .

Se verificó que para valores de  $m > 1.0$  no se forman más de dos picos acústicos, luego, el modelo tiene una influencia muy fuerte en el dominio de radiación y materia que no corresponden con lo observado. De otro lado, valores de  $m$  por debajo de 0.5 tienden rápidamente a  $\Lambda\text{CMB}$ , por lo que son descartados pues no escalan como radiación en dicho dominio sino que tienden  $\omega_\phi \sim -1$  desde  $a \ll a_*$ .

Los picos acústicos corresponden a los modos que en el momento del desacople de la radiación cósmica de fondo estaban en la máxima compresión (picos impares) o de rarefacción (pares) y su posición es muy sensitiva a la ecuación de estado de la energía oscura. De hecho, el primer pico depende monótonamente [76] con el valor de  $\Omega_{de}$ : dado que nuestro modelo predice un valor menor que le encontrado para  $\Lambda\text{CDM}$ , el primer pico sufre un corrimiento a momentos de multipolo menores pues se produce un aumento en la predicción angular de los picos que es directamente proporcional a  $\Omega_m$  (ver (2.1.10)).

Sin embargo, no es del todo cierta esta afirmación dado que la introducción del modelo trae

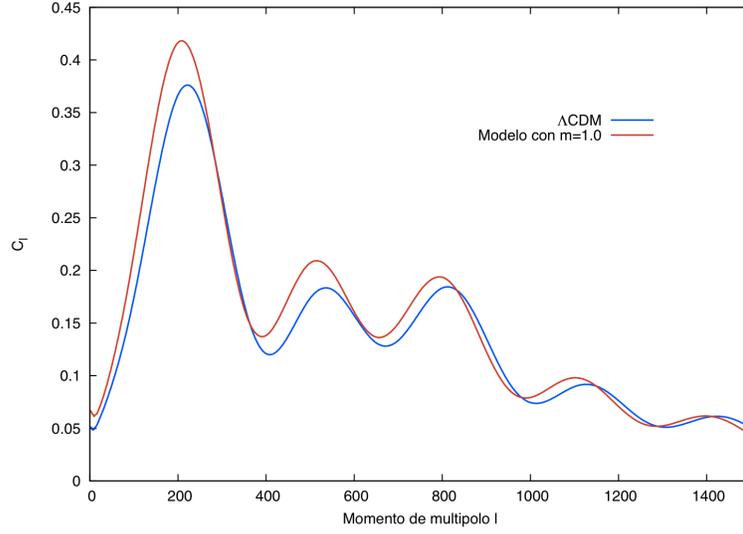


Figura 7.2: Espectro de anisotropías del CMB usando *CMBfast*.

como consecuencia un efecto adicional: aumento del número de bariones  $\Omega_B$ , que también causa corrimiento de los picos acústicos hacia la izquierda, entonces el efecto que se presenta en los picos es un efecto que superpone ambas contribuciones. De la misma manera, mayor número de bariones conlleva a que el primer pico sea más alto.

Además, la distancia de los picos disminuye si  $\Omega_m$  aumenta [15], dado que si existe más masa las oscilaciones ocurren más rápidamente debido a la interacción gravitacional entre la materia oscura y los bariones.

Por último, resulta interesante considerar como son los mapas de anisotropías en temperatura del CMB cuando se considera un modelo de EDE como el que se ha propuesto en este trabajo (los mapas se construyeron con el *software* Healpix que puede encontrarse libre en [96]).

### 7.2.1. *CMB shift parameter R*

Este parámetro mide el corrimiento de los picos de las oscilaciones bariónicas acústicas *BAO*. Es definido de la forma:

$$R = (\Omega_m H_0^2)^{1/2} \int_0^{1089} \frac{dz}{H(z)}, \quad (7.2.1)$$

y su valor medido es  $R = 1.719 \pm 0.019$  [52, 53]. Al calcular numéricamente este parámetro se

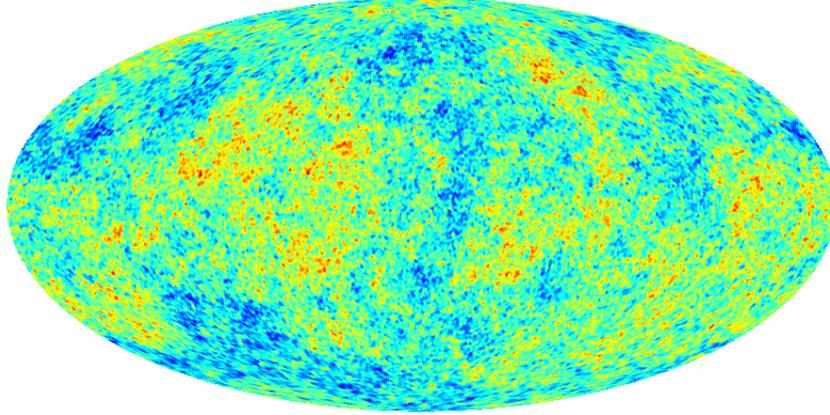


Figura 7.3: Mapa de anisotropías en temperatura del CMB usando *Healpix*. El cuadro muestra el resultado con el modelo propuesto en este trabajo.

encuentra  $R_{cal} = 1.75$ .

Existen dos hechos interesantes en este resultado: por un lado, la convergencia a este valor se garantiza desde *redshift* del orden de 200. De otra parte, [53] propone esta prueba para un modelo de energía oscura de la forma  $w(z) = w_0 + w'z$ , sin embargo, aunque nuestro modelo no es lineal, se ajusta bastante bien al valor de  $R$  medido en *WMAP-7*.

### 7.2.2. $A(z_{BAO})$

Existe otra prueba interesante que proviene de mediciones de *LSS* y *BAO* introducida por Eisenstein [54] que contiene información de la distancia diametral angular  $D_A(z)$  y de la distancia propia  $r(z) = \frac{cz}{H(z)}$ :

$$A(z_{BAO}) = \left( r^2(z_{BAO}) \frac{cz_{BAO}}{H(z_{BAO})} \right)^{1/3} \frac{(\Omega_{\phi_0} H_0^2)^{1/2}}{cz_{BAO}}. \quad (7.2.2)$$

$A(z_{BAO})$  representa una razón entre los modos radiales y tangenciales de las mediciones angulares de *BAO* [55] y es por esto que no se calcula el valor de este parámetro, pues no revela ninguna información adicional sobre el modelo, además, no se consideraron datos de *BAO* en este trabajo.

### 7.2.3. Test de Alcock-Paczynski

Es interesante considerar como cambia la distancia diametral angular (tamaño angular de un objeto con dimensiones conocidas) en presencia de modelos alternativos a  $\Lambda$ CDM, que compara el tamaño angular  $\Delta\theta$  de un objeto esférico a un *redshift*  $z$  en la extensión del *redshift*  $\Delta z$  de la forma:

$$H(z)r(z) = \frac{\Delta z}{\Delta \theta}.$$

La clave es encontrar objetos (o ensambles de objetos) que sean esféricos y evolucionar la función de correlación de las galaxias o de nubes *Lyman- $\alpha$* , que debido a la isotropía del universo debe tener la misma dependencia a través de la línea de visión del cielo. Es requerida una gran muestra uniforme para implementar este test, además de que se deben sustraer los efectos de velocidades peculiares (5 % del efecto cosmológico).

Sin embargo, en este trabajo no se consideraron este tipo de muestras que realmente son útiles en un método no paramétrico, donde lo que pretende reconstruirse es el producto  $H(z)r(z)$  y de este, el modelo cosmológico.

### 7.3. Edad del Universo con el modelo propuesto

Por supuesto, el modelo que se ha construido constituye en si mismo un modelo cosmológico cuya edad del universo es:

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{a^{-1} da}{(0.31a^{-3} + 0.69f(a))^{1/2}}, \\ t_0 &= \frac{1}{2.33873582 \times 10^{-18} s^{-1}} \cdot 0.95787, \\ t_0 &= 1.2987 \times 10^{10} \text{ year.} \end{aligned}$$

Obviamente, el resultado anterior es solo una aproximación a la edad del universo, pues la función  $f(a)$  es valida solo desde  $a > 10^{-12}$ .

Este valor discrepa en 5.5 % con la edad del universo calculada con el modelo  $\Lambda$ CDM (ver 1) y tiene una implicación interesante: en presencia de este campo escalar de K-esencia el universo evoluciona más rápidamente que en presencia de constante cosmológica pues entre más negativo sea  $\omega$ , más acelerada es la expansión y más viejo el universo para el  $H_0$ . Además [?] sugiere que los modelos más favorecidos para alcanzar tiempos cercanos al observado son aquellos con  $\omega \leq -1/2$

### 7.4. Desviación de K-esencia respecto al modelo $\Lambda$ CMD

Cuando se consideran modelos de energía oscura diferentes de constante cosmológica  $\Lambda$  pueden estudiarse mediante los parámetros de *Statefinder* [56] que dan un diagnóstico geométrico

de la desviación un determinado modelo con respecto al modelo  $\Lambda$ CMB. Los parámetros están definidos por:

$$r = \frac{\ddot{a}}{aH^3}, \quad s = \frac{r-1}{3(q-1/2)}, \quad (7.4.1)$$

donde  $q = \ddot{a}/(aH^2)$  es el parámetro de desaceleración. En el modelo  $\Lambda$ CMD espacialmente plano el comportamiento de estos parámetros corresponde al punto fijo  $\{r, s\} = \{1, -1\}$ .

Para estudiar el comportamiento del modelo de K-esencia con ecuación de estado  $\omega(a)$  y parámetro de densidad  $\Omega_\phi$  [57] mostraron que los parámetros de *Statefinder*  $\{r, s\}$  pueden ser expresados de la forma:

$$r = 1 + \frac{9}{2}\Omega_\phi\omega_\phi(1 + \omega_\phi) - \frac{3}{2}\Omega_\phi\frac{\dot{\omega}_\phi}{H}, \quad (7.4.2)$$

$$s = 1 + \omega_\phi - \frac{1}{3}\frac{\dot{\omega}_\phi}{H\omega_\phi}, \quad (7.4.3)$$

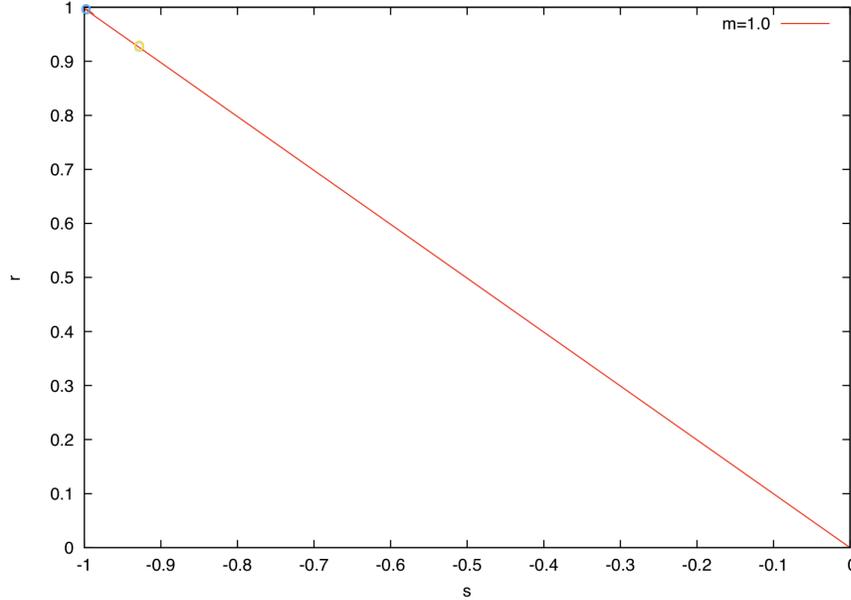


Figura 7.4: Curva de los parámetros de Statefinder  $r, s$  para K-esencia. Los modelos  $\Lambda$ CDM y K-esencia como energía oscura hoy corresponde al punto azul y amarillo respectivamente.

Como se esperaba, el modelo se aleja ligeramente de  $\Lambda$ CDM, pues la predicción del modelo para los valores de  $\Omega_{m0}$ ,  $\Omega_{\phi0}$  y  $z_*$  son mayores que los obtenidos con constante cosmológica. Sin

embargo, como se ha mostrado a lo largo de este capítulo, el modelo se relaja y tiende a  $\Lambda$ CDM para valores de  $z > 0$ .

---



---

## NUCLEOSÍNTESIS PRIMORDIAL EN PRESENCIA DE K-ESENCIA COMO ENERGÍA OSCURA

### 8.1. Influencia de las abundancias con grados de libertad adicionales en el fluido cosmológico

Existen diferentes autores que han considerado como se modifican las variables más importantes de BBN con grados de libertad adicionales, ya sea como neutrinos estériles [6], acoples no minimales con la gravedad que conducen a una constante gravitacional variable en el tiempo [58, 59] ó modelos de energía oscura que actúan como grados de libertad efectivos durante los dominios cosmológicos [60, 61], entre otros.

Así mismo, es bien conocido de estos trabajos que aumentar el parámetro de Hubble en la etapa de la nucleosíntesis primordial conlleva una densidad de radiación mayor, es decir, que a un tiempo menor los neutrones salen del equilibrio, y por esta razón, una cantidad menor de ellos decae en protones por decaimiento beta, luego existen más  $n$  disponibles para formar  ${}^4\text{He}$ . Adicionalmente, las reacciones ocurren más velozmente, tal que la producción de los núcleos ocurre más eficientemente, conduciendo a más  $He$  [62].

No obstante, cuando quiere estudiarse la influencia de componente adicionales al modelo estándar hay que tener en cuenta que salvo la incertidumbre en la medición de la densidad de bariones  $\eta_B$  y la vida media del neutrón  $\tau_n$ , existen *inputs* cosmológicos que pueden tener una influencia equivalente en las abundancias (se presenta una degeneración en el efecto sobre las mismas), luego se pueden entender como grados de libertad efectivos en la tasa de expansión de Hubble que producen un cambio en la razón de equilibrio  $\frac{n_n}{n_p}$ , en el tiempo de captura del deuterio, y en las trazas de los núcleos más ligeros que necesariamente determinan los de masas atómicas subsiguientes.

Teniendo en cuenta los desarrollos de [63, 64, 65], en este trabajo se encontrarán las abundancias de los núcleos primordiales teniendo en cuenta el modelo de energía oscura de K-esencia

presentado en el capítulo 6 con las condiciones: el campo escala como radiación en dominio de radiación con una contribución  $b$  y  $\omega_\phi|_{rad} = 1/3$ .

Considérese el factor de Hubble en términos del tiempo escalado  $x = Q/T$  y la contribución subdominante  $b$  de energía oscura de K-esencia:

$$H(x, b) = \sqrt{\frac{4\pi^3}{45} g_{eff}(b) Q^4 x^2}, \quad (8.1.1)$$

$$H(x, b) = \sqrt{\frac{4\pi^3}{45} (10.75)(1+b) Q^4 x^2}, \quad (8.1.2)$$

con  $g_{eff}(b=0) = 10.75$ . Este cambio en el factor de Hubble conduce a una variación en la solución de la ecuación de Boltzmann de los neutrones (4.2.16) como se ve a continuación:

$$\frac{dX_n}{dx} = \frac{\lambda_{np}}{xH(x=1, b)} (X_n - (1 - X_n)e^{-x}). \quad (8.1.3)$$

En este punto cabe resaltar que el campo escalar no interactúa con las demás componentes del plasma, solo lo hace gravitacionalmente. Es por esto que su influencia se hace manifiesta en la ecuaciones de Friedmann, más no modifica las reacciones que intervienen en la ecuación de Boltzmann, por eso se le asocian grados de libertad efectivos a la radiación, y aunque este hecho desconoce la naturaleza cuántica del campo, puede despreciarse mientras el campo se comporte como un fluido no interactuante.

De esta manera, la expresión para el tiempo cosmológico luego de la aniquilación de pares queda definida de la forma:

$$t = \left( \frac{45}{16\pi^3 g'_{eff}} \right)^{1/2} \left( \frac{11}{4} \right)^{2/3} \frac{m_{pl}}{T_\gamma^2} + t_0. \quad (8.1.4)$$

con  $g'_{eff} = \left( \frac{21}{4} + 2 \left( \frac{11}{4} \right)^{4/3} \right) (1+b)$ . Considerando la temperatura de captura de los neutrones en deuterio (4.2.76) e integrando (8.1.4) se tiene:

$$t_c = 169.8s. \quad (8.1.5)$$

Con la abundancia de neutrones previos a los decaimientos beta y el tiempo de captura, es posible conocer la abundancia de neutrones disponibles para formar los núcleos ligeros en presencia del campo escalar:

$$X(t = 169.8s) = \exp\left(-\frac{169.8}{886.7}\right) \bar{X}(x \rightarrow \infty) \quad (8.1.6)$$

$$X(t = 169.8s) = 0.826 \times 0.151 = 0.125. \quad (8.1.7)$$

Finalmente, usando la aproximación considerada en (4.2.80) se encuentra la abundancia del  ${}^4\text{He}$ :

$$Y_4 = 2X(t_c = 169.8s) = 0.249. \quad (8.1.8)$$

Incluyendo la contribución de la densidad del campo escalar máximo  $b = 0.2$  (eq. (6.2.1)), se obtienen los siguientes resultados para la fracción de masa del  ${}^4\text{He}$ :

	$g_{eff}(b)$	$H(b)$	$t_c$	$X_n(t_c = 169.8s)$	$Y_4$
$b = 0.0$	10.75	$1.1301 \text{ s}^{-1}$	183.0 s	0.123	0.247
$b = 0.2$	10.95	$1.2379 \text{ s}^{-1}$	169.8 s	0.125	0.249
[66]	–	–	–	–	$0.2484 \pm 0.0004$
[67]	–	–	–	–	$0.2479 \pm 0.0004$

Las abundancias de los demás núcleos ligeros no son lo suficientemente precisas para ser reportadas, de hecho su cálculo sin ningún código ya es muy impreciso como se vió en el capítulo 4 pues no se consideran todas las reacciones que se presentan en la ecuación de Boltzmann. Además, existen términos que son exponencialmente suprimidos, luego la variación en el tiempo (8.1.5) no es determinante y no afecta las abundancias.

Además no se dispone de un código que permite incorporar el modelo trabajado en esta tesis como grados de libertad efectivos para computar las abundancias de los núcleos ligeros.

Sin embargo, es notable que el valor que predice el modelo para la abundancia el  ${}^4\text{He}$  esta dentro de las cotas observacionales, luego nuestro modelo es un excelente candidato de energía oscura dinámica con contribución subdominante en el dominio de radiación.

# CAPÍTULO 9

## ABUNDANCIAS CALCULADAS CON LOS CÓDIGOS NUMÉRICOS

### 9.1. Códigos numéricos para el estudio de BBN

Los códigos que se usarán para calcular las abundancias primordiales suponen la cadena de reacciones de 30 reacciones (como mínimo) que se muestra a continuación:

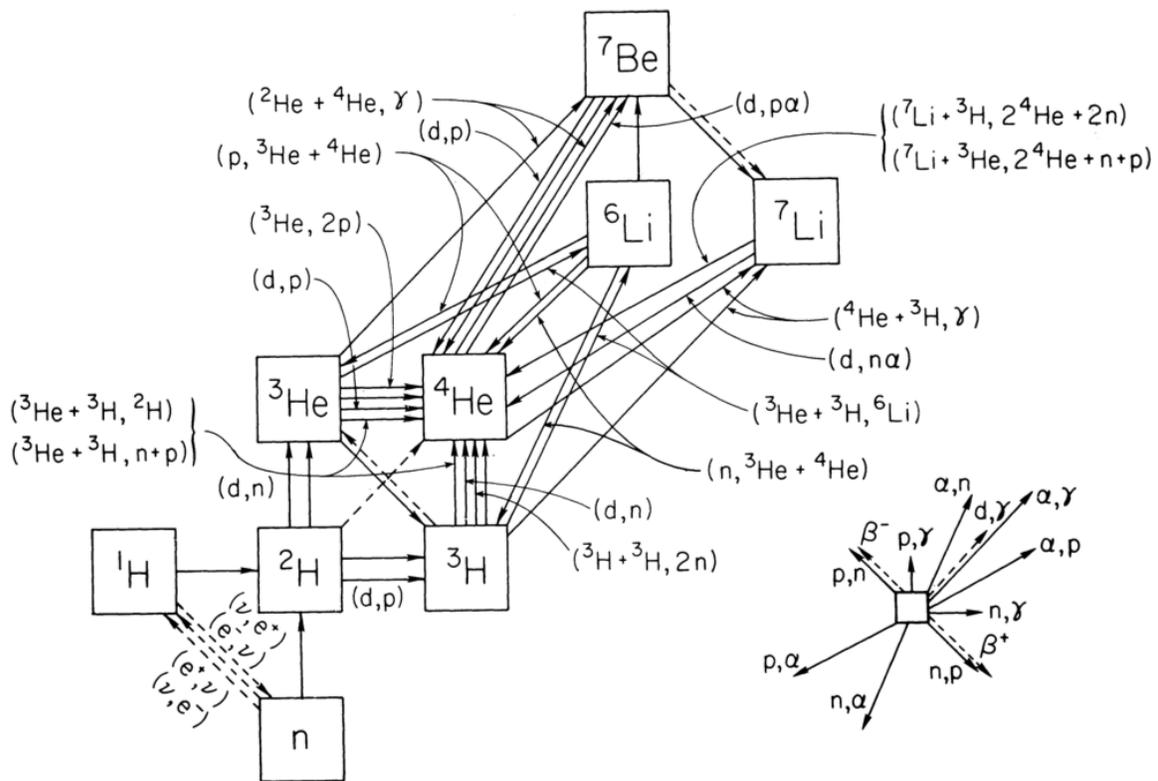


Figura 9.1: Cadena de reacciones implícitas en los códigos que resuelven BBN. Tomado de [62].

Esta cadena es suficiente para calcular de forma muy precisa las abundancias de los núcleos primordiales. Sin embargo, como mostró Wagoner [5], la abundancia calculada del  $^7\text{Li}$  está muy por debajo de lo observado, y presumiblemente este aumento se deba a procesos estelares, así como a una subestimación de las secciones eficaces que llevan a la producción de este elemento.

### 9.1.1. Fast BBN

Es un código público diseñado por Kawano (posterior al implementado por Wagoner en los 70's) [24, 68] que ha sido un punto de partida para calcular las abundancias primordiales de BBN. El código computa las abundancias de los núcleos ligeros producidos durante BBN. Comienza con condiciones de equilibrio estadístico nuclear y resuelve un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas, seguido por el final de la condición de equilibrio químico de las especies nucleares, para finalmente calcular sus abundancias asintóticas en función de los parámetros cosmológicos de entrada.

El código utiliza el método de Runge-Kutta de uno solo paso para resolver las cadenas de reacciones que producen los elementos y esta subdivido en rutinas, la principal incluye los parámetros libres en el código (*newint.f*), mientras que las demás llevan a cabo el cálculo de las reacciones nucleares (*nucrat.f*), la evolución de las cantidades termodinámicas (*nse.f*), la solución de las ecuaciones diferenciales (*nuccom.f*) y la producción del archivo de salida (*new123.f*).

A partir de *Fast BBN* se han desarrollado los códigos que se conocen hoy en día entre la comunidad. Uno de estos códigos en fortran77 es **ParthENoPE: Public Algorithm Evaluating the Nucleosynthesis of Primordial Elements** [69], [70] elaborado por el *Istituto Nazionale di Fisica Nucleare* de Italia. Sin embargo, aunque el código numérico es público, no fue implementado pues requiere de rutinas numéricas **NAG** que no fueron adquiridas por su alto costo económico.

### 9.1.2. BBN reactions

*BBN reactions* es un código libre diseñado por J. MacDonald D. J. Mullan en fortran [71].

### 9.1.3. Public Big Bang Code

*Public Big bang* es un código diseñado por F.X. Timmes [72].

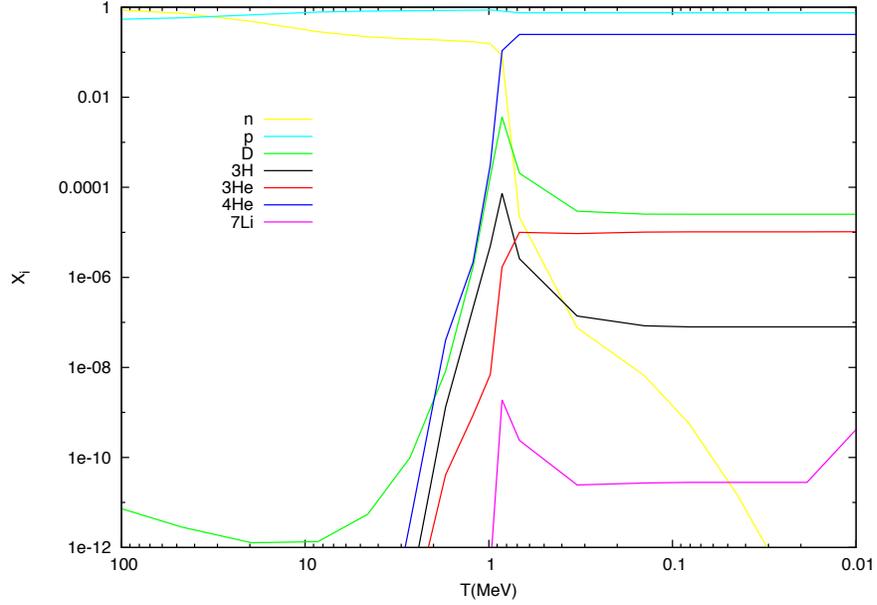


Figura 9.2: Abundancias primordiales para los núcleos ligeros vs.  $t$  usando *Fast BBN*.

#### 9.1.4. Abundancias primordiales calculadas con los códigos

Código	$b$	$D/H \times 10^{-5}$	$3\text{He}/H \times 10^{-5}$	$Y_p$	$7\text{Li}/H \times 10^{-10}$
<i>Fast BBN</i>	0.0	2.335	1.546	0.241	1.268
	$5.0 \times 10^{-3}$	2.345	1.548	0.241	1.261
	$5.0 \times 10^{-2}$	2.436	1.570	0.245	1.263
	0.1	2.537	1.594	0.249	1.261
	0.2	2.741	1.639	0.256	1.269
<i>BBN reactions</i>	0.0	4.043	2.363	0.243	1.543
<i>Public Big bang</i>	0.0	1.542	3.000	0.242	4.884
	$5.0 \times 10^{-3}$	1.547	3.002	0.242	4.907
	$5.0 \times 10^{-2}$	1.5845	3.015	0.246	5.111
	0.1	1.629	3.030	0.250	5.345
	0.2	1.717	3.059	0.257	5.825
<i>Modelo de EDE</i>	0.2	—	—	0.249	—
[66]	0.0	$2.75 \pm 0.24$	$0.93 \pm 0.055$	$0.2484 \pm 0.0004$	$3.82 \pm 0.66$
[67]	0.0	$2.60 \pm 0.18$	$1.04 \pm 0.04$	$0.2479 \pm 0.0004$	$4.15 \pm 0.47$

Tabla 1. Abundancias calculadas con los códigos incorporando la contribución de energía oscura de

K-esencia y comparación con los valores reportados

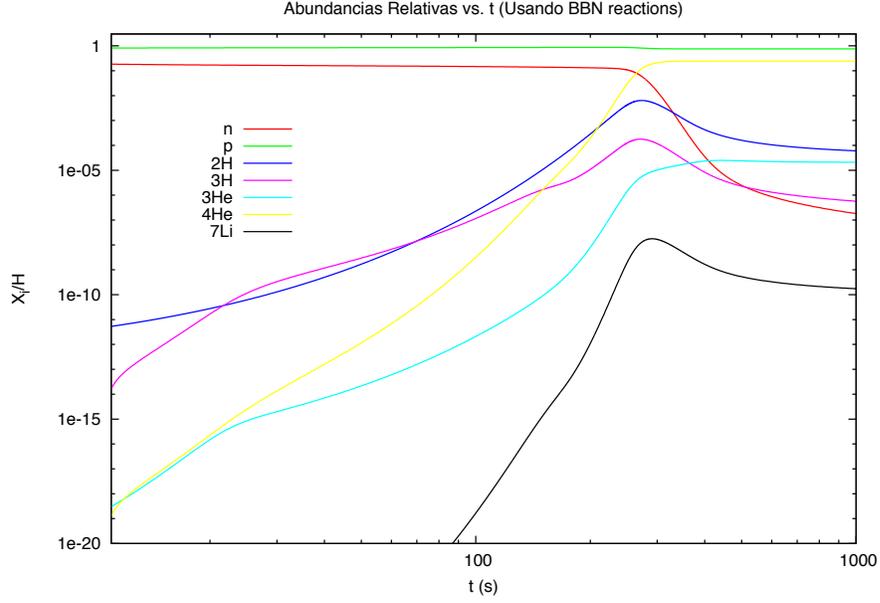


Figura 9.3: Abundancias primordiales para los núcleos ligeros vs. t usando *BBN reactions*.

## 9.2. Estimación de parámetros de BBN

Teniendo en cuenta el valor obtenido de la fracción de materia hoy  $\Omega_{m0}$  y el valor de  $\Omega_B$  obtenido a partir de los picos acústicos de las curvas del CMB, es posible calcular de forma indirecta la razón de bariones a fotones  $\eta_B$  usando la relación [11]:

$$\eta_B = \frac{n_B}{n_\gamma} = 5.5 \times 10^{-10} \left( \frac{\Omega_B h^2}{0.022} \right) \quad (9.2.1)$$

En la siguiente tabla se muestran los valores de los parámetros relacionados con BBN ( $\Omega_B$  y  $\eta_B$ ) en términos de  $b$ , donde  $b = 0.0$  es el valor asociado a  $\Lambda$ CDM y  $b = 0.2$ , la máxima contribución del campo en radiación:

$\rho_\phi$	$\Omega_m$	$\Omega_B$	$\Omega_B h^2$	$\eta_B \times 10^{-10}$
$b = 0.0$	0.31	0.044	0.02218	6.20
$b = 0.2$	0.31	0.053	0.02692	6.73
[73]	$0.266 \pm 0.029$	$0.0449 \pm 0.0028$	$0.02258 \pm 0.00057$	$6.190 \pm 0.145$

Tabla 2. Comparación de los valores de los parámetros asociados a BBN para diferentes valores de  $b$ .

El valor de  $\eta_B$  fue encontrado a partir de la razón entre el primer y el segundo pico acústico de la curva de las anisotropías de CMB con el modelo mostrado en el capítulo 6, extrayendo la

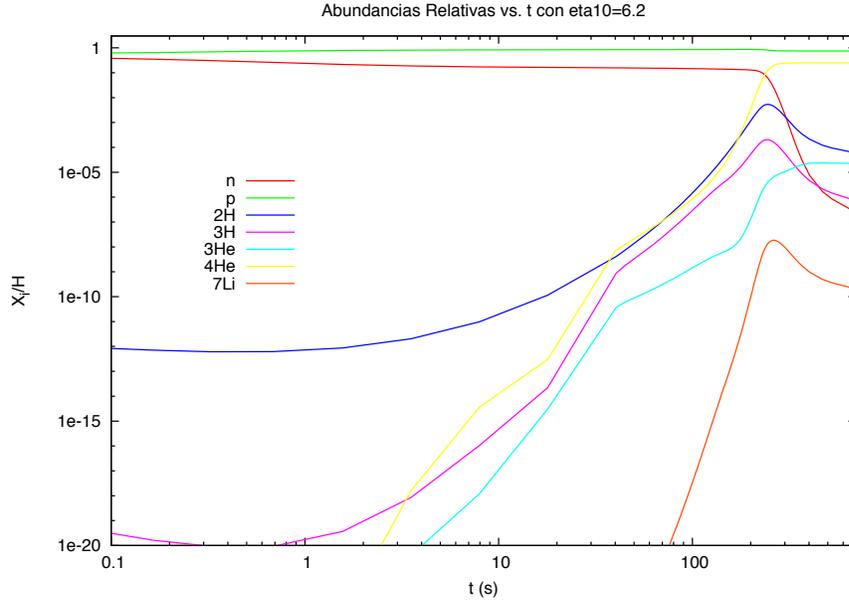


Figura 9.4: Abundancias primordiales para los núcleos ligeros vs.  $t$  usando *Public Big bang*.

información a partir del archivo resultante de **CMBfast**. Aunque, el valor es ligeramente mayor al encontrado por **WMAP7**, está en el orden de magnitud aceptado.

Además, las curvas obtenidas no tienen manejo de errores, lo que implica que este es sólo un valor aproximado, que puede ser mejorado una vez se conozcan los intervalos de confianza de cada parámetro.

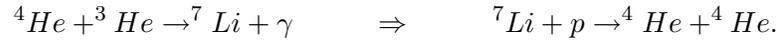
## Comportamiento de las abundancias primordiales con el parámetro $\eta_B$

Esquemáticamente, una vez se inicia la nucleosíntesis primordial y se ha formado el deuterio, este reacciona rápidamente a través de reacciones de dos cuerpos para formar  $4He$ . Sin embargo, la baja energía de ligadura del deuterio, produce un bloqueo en la producción del mismo, hasta tanto la temperatura baje significativamente comparada con  $B_D = 2.22 MeV$ .

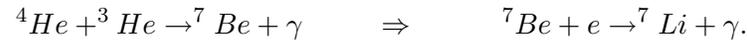
Es entonces necesario analizar que sucede cuando la razón de bariones a fotones cambia en el universo. Si  $\eta_B \gg$ , la conversión de deuterio y  $3He$  en  $4He$  es más eficiente, dado que el número de bariones aumenta (y en sí mismos los neutrones). Cuando se produce la captura, hay

mayor cantidad de neutrones disponibles para formar partículas  $\alpha$  y para decaer en protones vía decaimiento beta.

Sin embargo existe otro efecto interesante sobre las abundancias primordiales: para  $\eta_B < 3 \times 10^{-10}$ , la abundancia relativa de  ${}^7\text{Li}$  depende de la competencia entre los procesos:



Para esta reacción la abundancia de  $\text{Li}$  disminuye, pues el  $\text{He}$  queda altamente ligado y en el plasma existen muchos protones disponibles que favorecen el proceso. No obstante, si la razón de bariones a fotones crece  $\eta_B > 3 \times 10^{-10}$ , las reacciones privilegiadas son las que de Berilio llevan a  ${}^7\text{Li}$ , pues el  ${}^7\text{Be}$  tiene una energía de ligadura más baja (esta constituido por 4 protones y 3 neutrones) que el  ${}^7\text{Li}$  (3 protones y 4 neutrones) y si aumenta el número de neutrones disponibles en el plasma estos participarán en la formación de sistemas altamente ligados.



Se observa de la gráfica 9.2 que para mayor  $\eta_B$ , la síntesis de cada núcleo se produce para tiempos cada vez más tempranos como se esperaba, pues la nucleosíntesis es más eficiente si se tienen más neutrones disponibles que formen  ${}^4\text{He}$ .

La figura 9.2 evidencia que al aumentar la razón de bariones a fotones  $\eta_B$  la producción de  ${}^4\text{He}$  crece en el tiempo pues se tienen más neutrones disponibles para formar este núcleo. No sucede lo mismo con la producción de los demás isótopos, cuya producción decae para favorecer la del  ${}^4\text{He}$ . El fenómeno del  ${}^7\text{Li}$  no se observa con claridad dado que los códigos no incluyen las suficientes reacciones de formación y destrucción de este núcleo. El comportamiento inverso entre los códigos muestra que *Public Code* favorece aquellas reacciones que destruyen  $\text{Li}$  y crean  $\text{He}$  y probablemente  $\text{Be}$ , mientras que el código de Kawano tiene en cuenta más reacciones que llevan a  $\text{Li}$  y destruyen  $\text{Be}$ .

Con la figura 9.7 se evidencia que imponer nuevos grados de libertad a modo de energía oscura produce un nucleosíntesis más temprana y aumenta la abundancia del  ${}^4\text{He}$ . Como se ha dicho previamente, para  $\eta_B = 6.2 \times 10^{-10}$  fijo, el aumento en la fracción de masa de  $\text{He}$  conduce a una disminución en las abundancias de los demás núcleos ligeros.

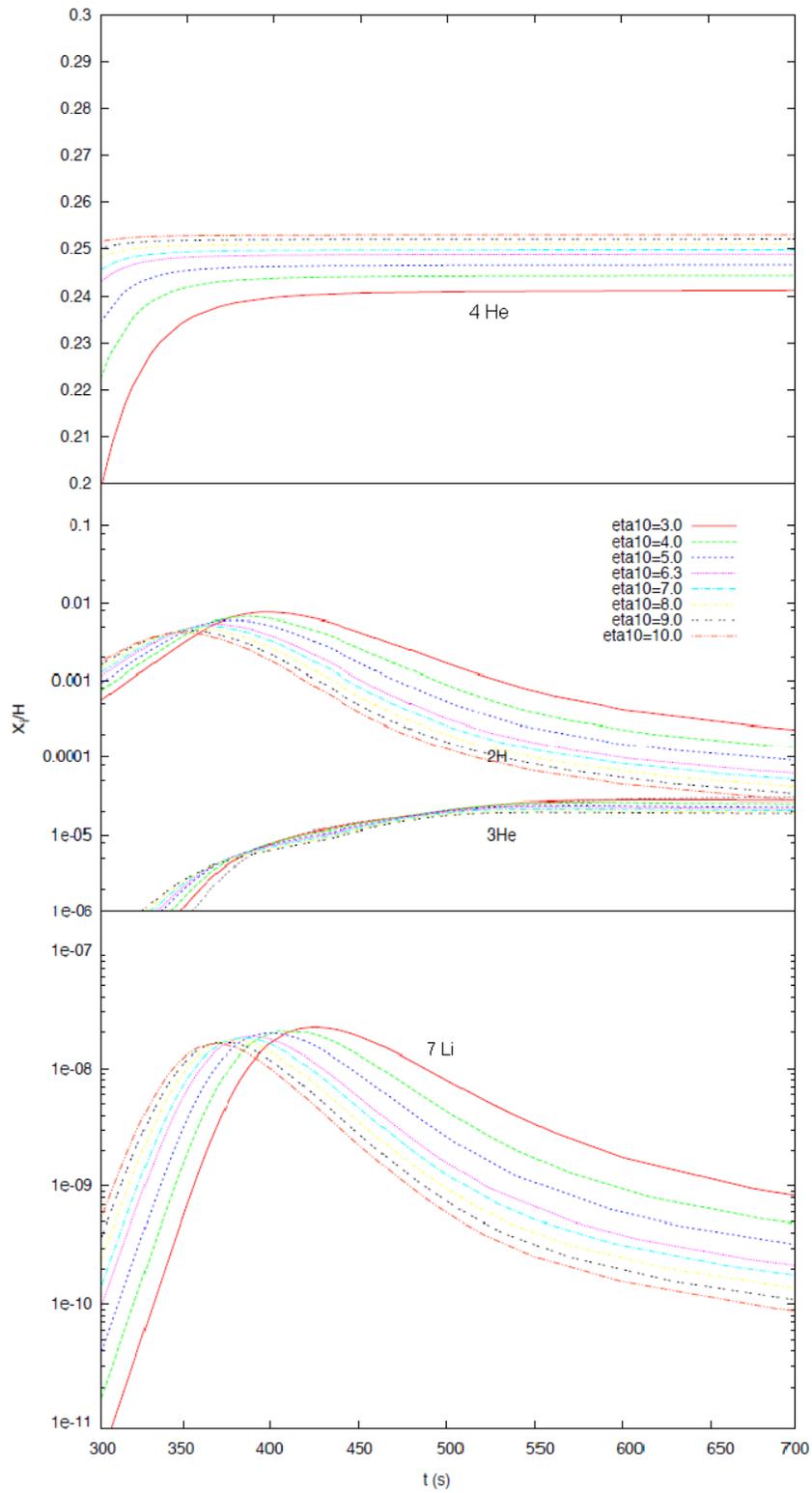


Figura 9.5: Abundancias primordiales de  $D$ ,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$  y  $^7\text{Li}$  variando  $\eta_B$  usando *Public BBN*.

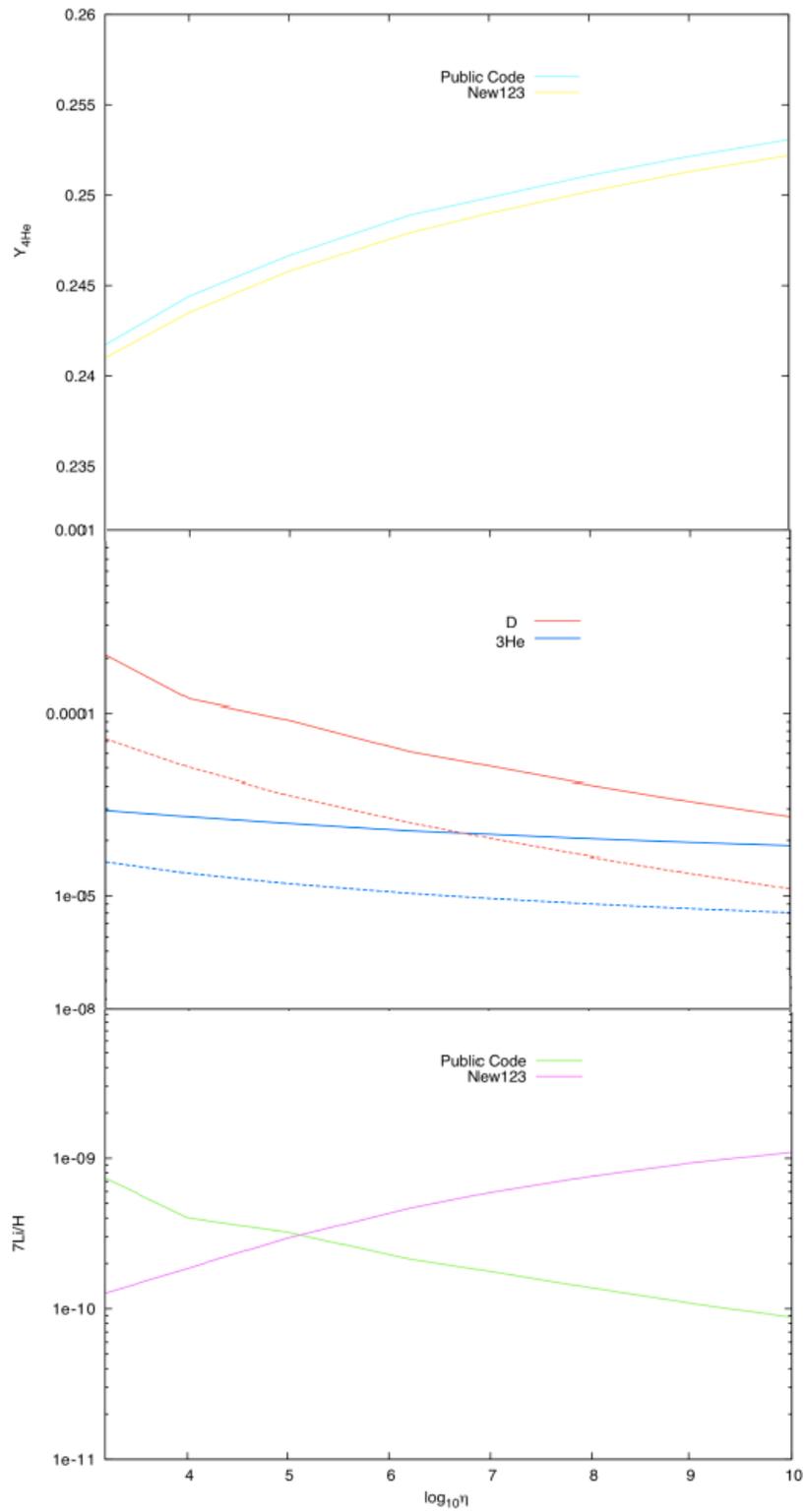


Figura 9.6: Abundancias primordiales de  $D$ ,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$  y  $^7\text{Li}$  vs.  $\log(\eta_B)$  comparando los códigos *Public BBN* (línea continua) y *NUC123* (línea punteada).

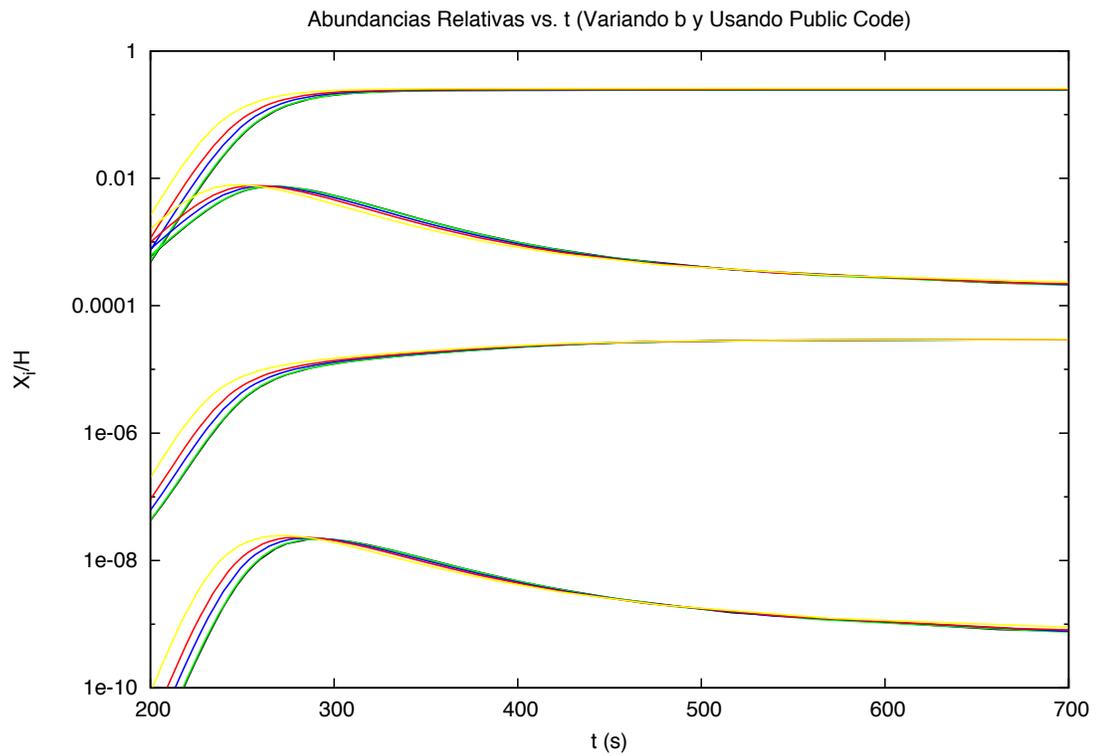


Figura 9.7: Abundancias primordiales de  $D$ ,  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^4\text{He}$  y  ${}^7\text{Li}$  calculadas variando la contribución de energía oscura de  $b = 0.0$  (negro),  $b = 5.0 \times 10^{-3}$  (verde),  $b = 5.0 \times 10^{-2}$  (azul),  $b = 0.1$  (rojo) y  $b = 0.2$  (amarillo) usando *Public BBN*.

# CAPÍTULO 10

---

---

## CONCLUSIONES

Con la parametrización propuesta para  $\omega_\phi$  (6.2.2) y la estimación de los parámetros libres del modelo a partir de la minimización de la función  $\chi^2$  con los modulus de distancia de las supernovas SNIa, se obtienen los siguientes parámetros libres:

$\Omega_{\phi_0}$	0.69
$m$	1.0
$z_*$	1.4
$\omega_{\phi_0}$	-0.99
$t_0$	$1.2987 \times 10^{10}$ year

Sin embargo, se presenta un fuerte degeneración en los parámetros  $m$  y  $z_*$  dado que la función (6.3.4) casi no se ve afectada por el parámetro  $m$ . No obstante, el modelo debe tener una contribución máxima (pero subdominante) en dominio de radiación, por lo que se escogió el valor de  $m$  que reproduzca  $f(z \sim 10^9)$  más alto, para afectar los valores estándar de las abundancias en nucleosíntesis.

De otro lado, la marcada degeneración de  $z_*$  se presenta en virtud de los ordenes de magnitud de  $z_{eq} = 3192$  con respecto a  $z$  de equidad materia–energía oscura, que se espera sea del orden de 1.0 para los modelos de energía oscura dinámicos propuestos en la literatura.

Cuando se realizó la gráfica de las curvas de anisotropías de la radiación del CMB, se observó que para valores de  $m > 1.0$  no se forman más de dos picos acústicos, luego, el modelo tiene una influencia muy fuerte en el dominio de radiación y materia que no corresponden con lo observado. De otro lado, valores de  $m$  por debajo de 0.5 tienden rápidamente a  $\Lambda$ CMB, por lo que son descartados pues no escalan como radiación en dicho dominio, sino que tienden  $\omega_\phi \sim -1$  desde  $a \ll a_*$ .

De la misma manera, se observa que al aumentar el valor de  $\Omega_m$  y simultáneamente el de  $\Omega_B$  el primer pico crece mientras decrece el segundo. Además, los picos sufren un corrimiento hacia momentos de multipolo más bajos dado que el modelo predice una contribución menor de energía oscura con respecto al modelo  $\Lambda$ CDM.

De otro lado, cuando se considera la velocidad adiabática del sónico asociada al campo escalar, se encuentra que se satisface la condición (6.1.50) en el atractor definido en radiación. No obstante, cabe preguntarse por la interpretación física de una velocidad del sonido adiabática en etapas de dominio de energía oscura, pues efectivamente dicha cantidad tiende al valor predicho en el modelo con constante cosmológica (en la imagen donde se asocia a  $\Lambda$  con un fluido de  $C_s^2 = -1$ ); sin embargo, este resultado conduce a un modulo de Young imaginario de las perturbaciones en el plasma.

Así mismo, cuando se analizan los resultados arrojados por la figura 6.6 se encuentra que la distancia de luminosidad del modelo con un campo escalar de K-esencia es mayor que la de  $\Lambda$ CDM pues el valor de densidad de materia hoy predicha por el modelo es mayor que el encontrado con el modelo  $\Lambda$ CDM (de acuerdo con los reportes por WMAP-7  $\{\Omega_{\phi 0}, \Omega_{m0}\} = \{0.734 \pm 0.029, 0.266 \pm 0.029\}$ <sup>1</sup>).

Sin embargo, para *redshift* pequeños los modelos predicen valores muy cercanos pues la distancia de luminosidad  $d_L$  es casi insensible al modelo cosmológico y solo depende linealmente del *redshift*.

De la misma manera, aunque el problema ha sido reescrito en términos de  $a$ , el comportamiento de la velocidad del campo y el término no canónico es el esperado: la energía cinética es proporcional a  $v^2$  ó bien,  $\propto a^{-2}$  por (6.3.38), mientras que el término cinético no canónico  $Q$  lo hace como  $\propto a^{-4}$  de acuerdo con (6.3.41), entonces se deduce que la función  $Q(v) \propto v^4$ , es decir, es cuadrático en energía cinética del campo.

Como se esperaba, el modelo se aleja ligeramente de  $\Lambda$ CDM, pues la predicción del modelo para los valores de  $\Omega_{m0}$ ,  $\Omega_{\phi 0}$  y  $z_*$  son mayores que los obtenidos con constante cosmológica. Para valores de  $z \sim 0$  el modelo se relaja y tiende a  $\Lambda$ CDM .

Cuando se considera la relación del modelo con BBN, que aumentar el parámetro de Hubble en la etapa de la nucleosíntesis primordial conlleva una densidad de radiación mayor, es decir, que a un tiempo menor los neutrones salen del equilibrio, y por esta razón, una cantidad menor de ellos decae en protones por decaimiento beta, luego existen más neutrones disponibles para formar  $^4\text{He}$ . Adicionalmente, las reacciones ocurren más velozmente, tal que la producción de los núcleos ocurre más eficientemente, conduciendo a más He.

---

<sup>1</sup><http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/dr4/parameters.cfm>

Incluyendo la contribución de la densidad del campo escalar máximo  $b = 0.2$  (eq. (6.2.1)), se obtienen los siguientes resultados para la fracción de masa del  ${}^4\text{He}$ :

$H(b = 0.2)$	$1.2379 \text{ s}^{-1}$
$t_c$	169.8 s
$X_n(t_c = 180\text{s})$	0.125
$Y_4$	0.249
[66]	$0.2484 \pm 0.0004$
[67]	$0.2479 \pm 0.0004$

Las abundancias de los demás núcleos ligeros no son lo suficientemente precisas para ser reportadas, de hecho su cálculo sin ningún código ya es muy impreciso como se vió en el capítulo 4 pues no se consideran todas las reacciones que se presentan en la ecuación de Boltzmann. Además, existen términos que son exponencialmente suprimidos, luego la variación en el tiempo (8.1.5) no es determinante y no afecta las abundancias.

Además no se dispone de un código que permite incorporar el modelo trabajado en esta tesis como grados de libertad efectivos para computar las abundancias de los núcleos ligeros.

Es notable que el valor que predice el modelo para la abundancia el  ${}^4\text{He}$  esta dentro de las cotas observacionales, luego nuestro modelo es un excelente candidato de energía oscura dinámica con contribución subdominante en el dominio de radiación.

Los valores de los parámetros asociados a BBN son:

$\rho_\phi$	$\Omega_m$	$\Omega_B$	$\Omega_B h^2$	$\eta_B \times 10^{-10}$
$b = 0.0$	0.298	0.044	0.02218	6.20
$b = 0.2$	0.31	0.053	0.02692	6.73
[73]	$0.266 \pm 0.029$	$0.0449 \pm 0.0028$	$0.02258 \pm 0.00057$	$6.190 \pm 0.145$

Cuando se consideran los códigos numéricos y grados de libertad efectivos (neutrinos haciendo las veces de energía oscura -esto es posible pues en dominio de radiación todas las partículas escalan como radiación incluido el campo escalar; la naturaleza cuántica de los constituyentes del plasma no se distingue en los códigos-) se produce una nucleosíntesis más temprana y aumenta la abundancia del  ${}^4\text{He}$ . Para  $\eta_B = 6.2 \times 10^{-10}$ , el aumento en la fracción de masa de He conduce a una disminución en las abundancias de los demás núcleos ligeros.

Además, cuando se aumenta la razón de bariones a fotones  $\eta_B$  la producción de  ${}^4\text{He}$  crece en el tiempo pues se tienen más neutrones disponibles para formar este núcleo. No sucede lo mismo con la producción de los demás isótopos, cuya producción decae para favorecer la del  ${}^4\text{He}$ . El fenómeno del  ${}^7\text{Li}$  no se observa con claridad dado que los códigos no incluyen las suficientes

reacciones de formación y destrucción de este núcleo.

Asimismo, es posible refinar el cálculo de los parámetros mediante el uso del método de cadenas de Markov con las rutinas de Monte Carlo (MCMC) ó bien, usar datos del CMB (de *surveys* como el CMB). Sin embargo, la estimación realizada hasta este punto satisface todas las condiciones cosmológicas que se le impusieron.

También es importante destacar que las abundancias de los núcleos ligeros deben calcularse sin usar equivalencias con neutrinos estériles en los códigos, pues este hecho desconoce la naturaleza cuántica (y posibles interacciones adicionales) del campo escalar. Sin embargo, este hecho es bien justificado por la forma en que caracterizó el modelo. Además, es conocido que los códigos de BBN son bastante limitados pues no permiten incorporar muchos parámetros.

Por último, es fundamental mencionar que en el desarrollo de este trabajo se tomó parte en los siguientes eventos:

*International Conference: The Dark Universe: **An early dark energy model and its influence on BBN.*** Heidelberg - Alemania. Octubre 4 - 7, 2011.

*Primera Escuela de Relatividad Numérica OAN 2011.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá – Colombia. Julio 25 - 29, 2011.

*Tercera Reunión Colombo–Venezolana de Relatividad, Campos y Gravitación: **Energía Oscura Temprana modelada como campos escalares de K–esencia.*** Curití - Colombia. Diciembre 1 - 3, 2010.

*Fluidos Relativistas en Coordenadas Comóviles.* Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga – Colombia. Noviembre 24 - 26, 2010.

*Escuela de Astronomía Extragaláctica.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá – Colombia. Agosto 9 - 11, 2010.

*II Congreso Colombiano de Astronomía.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá – Colombia. Agosto 3 - 6, 2010.

*Enrico Fermi Summer School: From the Big Bang to the Nucleosynthesis: **Primordial Nucleosynthesis in presence of Sterile Neutrinos.*** Varenna, Italia. Julio 19 - 24, 2010.

*Xth School of Cosmology*. Institut d Etude Scientifique de Cargèse (IESC). Corsica – Francia.  
Julio 5 - 10, 2010.

Como resultado de dichas participaciones, se realizaron los siguientes artículos:

**Primordial Nucleosynthesis in the presence of sterile neutrinos.** L. García, J. Tejeiro,  
L. Castañeda.

DOI: 10.3254/978-1-60750-974-5-309. Proceedings of the International School of Physics Enrico  
Fermi, Volume 178, 2011.

ISBN 978-1-60750-973-8.

**Energía Oscura Temprana modelada como campos escalares de K-esencia.** L. García,  
J. Tejeiro, L. Castañeda. Memorias 3<sup>ra</sup> Reunión Colombo Venezolana de Relatividad Campos y  
Gravitación. Recibido el 10 de febrero de 2011.

**Presencia de neutrinos adicionales en el dominio de Radiación y su influencia en la  
Nucleosíntesis Primordial.** L. García, J. Tejeiro. Memorias del II Congreso Colombiano de  
Astronomía.

<http://www.observatorio.unal.edu.co/eventos/pasados/cocoa/> ISBN: 978-958-44-7496-4

---

---

## AGRADECIMIENTOS

Primero que todo, deseo agradecer a mi director Juan Manuel Tejeiro por su paciencia, calidez y valiosos aportes en todo el desarrollo de la tesis. De la misma manera, quiero agradecer al profesor Leonardo Castañeda por instruirme, apoyarme y guiarme dentro y fuera del seminario. Sus anotaciones siempre han sido muy importantes.

Segundo, debo agradecerle infinitamente a mi familia. Sin ellos, sin sus consejos y apoyo irrestricto, no hubiese sido posible llevar a cabo este proyecto. Gracias por alentarme y por creer en mí.

Quiero agradecer a la Universidad Nacional de Colombia por permitirme llevar a cabo la maestría y ser beneficiaria del programa de Becas para Estudiantes Sobresalientes de Posgrados, gracias a este estímulo fue posible atender satisfactoriamente mis estudios.

También debo dar gracias a todo el cuerpo docente del Observatorio Astronómico Nacional por su colaboración y las valiosas lecciones aprendidas. Al grupo de Gravitación y Cosmología, por las interesantes charlas, correcciones y vivencias. Ha sido muy enriquecedor el proceso y he aprendido muchos con los aportes de cada uno de ustedes.

Por último, a mis amigos por compartir conmigo este proceso, sus palabras, disertaciones y risas han enriquecido este trabajo enormemente. A Richard David por estar cada día junto a mí alentándome a crecer y despertando más interés por la física y por la vida. Así mismo, a Daniel Alejandro por su grandiosa colaboración en el cálculo de los parámetros del modelo; hubiese sido un camino mucho más largo y tortuoso sin sus valiosos conocimientos.

---

---

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] <http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/dr4/parameters.cfm>.
- [2] G. Gamov R. Alpher, H. Bethe. The origin of chemical elements. *Physics Review* 73, 803:2, 1948.
- [3] G. Gamov. Expanding universe and the origin of the elements. *Physics Review* 70, 572:2, 1946.
- [4] R.V. Wagoner. Cosmological synthesis of the elements. *International Astronomical Union*, 63, n. 195:16, 1974.
- [5] R.V. Wagoner. Big bang nucleosynthesis revisited. *The Astrophysical Journal*, 179, n. 343:18, 1973.
- [6] D.N. Schramm G. Steigman and J.E. Gunn. Cosmological limits to the number of massive leptons. *Physics Letters*, 66 B, n. 2:3, 1977.
- [7] K. Olive M.S. Turner G. Steigman, D.N. Schramm and J. Yang. Primordial nucleosynthesis: a critical comparison of theory and observation. *The Astrophysical Journal*, 281, n. 493:19, 1984.
- [8] G. Steigman. Primordial nucleosynthesis. *arXiv:0308.511v2*, 2003.
- [9] J.P. Kneller G. Steigman. Bbn and cmb constrains on dark energy. *arXiv:0210.500v2*, 2003.
- [10] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.
- [11] S. Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003.
- [12] J. M. Tejeiro. *Principios de Relatividad General*. Universidad Nacional de Colombia, 2005.
- [13] W. Li B. Schmidt A. Riess, A. Filippenko. Tests of the accelerating universe with near-infrared observations of a high-redshift type ia supernova. *Astrophys.J.* 536 (2000) 62, 2000.
- [14] S. M. Carroll. The cosmological constant. *Living Rev. Relativity*, 3:1, 2001.
- [15] R.Durrer. *The Cosmic Microwave Background*. Cambridge University Press, 2008.
- [16] V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 1998.
- [17] <http://www.xray.mpe.mpg.de/theorie/cluster/index.html>.
- [18] T. Kajino M. Orito G. J. Mathews, K. Ichiki. New paradigms for primordial nucleosynthesis. *Nuclear Physics A* 718, 2003.

- [19] M.S. Turner E.W. Kolb. *The Early Universe*. Addison Wesley, 1990.
- [20] G. Borner. *The early universe: facts and fiction*. Springer-Verlag, 1993.
- [21] J. Bernstein. *Kinetic Theory in the Expanding Universe*. Cambridge University Press, 1988.
- [22] P. J. E. Peebles. Primordial helium abundance and the primordial fireball. i. *Phys. Rev. Lett.* *16*, 410, 1966.
- [23] P. J. E. Peebles. Primordial helium abundance and the primordial fireball. ii. *Astrophys. J.* *146*, 542, 1966.
- [24] L. Kawano. Lets go: The early universe ii. *Fermilab preprint FERMILAB-PUB-92/04-A*, 1992.
- [25] B. Novosyadlyja O. Sergijenko, R. Durrer. Observational constraints on scalar field models of dark energy with barotropic equation of state. *arXiv: 1102.3168v2*, 2011.
- [26] E. Papantonopoulos. *The Physics of the Early Universe*. Springer-Verlag, 2005.
- [27] CAI Rong-Gen. On theoretical models of dark energy. *HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Vol. 31, No. 9*, 2007.
- [28] S. Tsujikawa E. J. Copeland, M. Sami. Dynamics of dark energy. *arXiv: 0603057v3*, 2006.
- [29] C. H. Lineweaver C. A. Egan. Dark-energy dynamics required to solve the cosmic coincidence. *Phys.Rev.D78:083528*, 2008.
- [30] J. A. S. Lima. Alternative dark energy models: An overview. *arXiv: 0402109v1*, 2004.
- [31] L.N. Granda. Non-minimal kinetic coupling and the phenomenology of dark energy. *arXiv: 1009.3964v1*, 2010.
- [32] B. Ratra P. J. E. Peebles. The cosmological constant and dark energy. *Rev.Mod.Phys.75:559-606*, 2003.
- [33] P. Steinhardt C. Armendariz Picon, V. Mukhanov. Essentials of k.essence. *arXiv: 0006.373v1*, 2000.
- [34] S. Winitzki J. Kang, V. Vanchurin. Attractor scenarios and superluminal signals in k-essence cosmology. *Phys. Rev. D* **76**, 083511, 2007.
- [35] A. Rendall. Dynamics of k-essence. *arXiv:0511.158v1*, 2005.
- [36] T. Damour C. Armendariz Picon, V. Mukhanov. K-inflation. *Phys. Lett.B*, *458 (209)*, 1999.
- [37] T. Chiba. Tracking k-essence. *arXiv: astro-ph/0206298*, 2003.
- [38] R. Myrzakulov. F(t) gravity and k-essence. *arXiv: 1008.4486v2*, 2010.
- [39] A. R. Liddle M. Malquarti, 1 E. J. Copeland. K-essence and the coincidence problem. *arXiv: 0304277*, 2003.
- [40] S. Nojiri J. Matsumoto. Reconstruction of k-essence model. *arXiv:1001.0220v1*, 2010.

- [41] R. J. Scherrer S. Dutta. Big bang nucleosynthesis with a stiff fluid. *arXiv: 1006.4166v3*, 2010.
- [42] E. Linder R. Putter. Kinetic k-essence and quintessence. *arXiv: 0705.0400v2*, 2007.
- [43] S. Nojiri R. Saitou. The unification of inflation and late-time acceleration in the frame of k-essence. *arXiv: 1104.0558v1*, 2011.
- [44] S. Mukherjee. Some studies on k-essence lagrangian. *arXiv: 1103.0111v1*, 2011.
- [45] X. Gao R. Yang. Phase-space analysis of a class of k-essence cosmology. *arXiv: 1006.4986v3*, 2011.
- [46] R. J. Scherrer. Purely kinetic k essence as unified dark matter. *Phys. Rev. Lett. 93 011301*, 2004.
- [47] K. Indulekha R. Rakhi. Dark energy and tracker solution- a review. *arXiv: 0910.5406*, 2009.
- [48] G. Robbers M. Doran. Early dark energy cosmologies. *JCAP 06, 026*, 2006.
- [49] <http://supernova.lbl.gov/>.
- [50] U. Seljak M. Zaldarriaga. A line of sight approach to cosmic microwave background anisotropies. *ApJS 469 437-444*, 1996.
- [51] U. Seljak M. Zaldarriaga. Cmbfast for spatially closed universes. *ApJS 129 431*, 2000.
- [52] G. Panotopoulos. A dynamical dark energy model with a given luminosity distance. *arXiv: 1107.4475v1*, 2011.
- [53] P. Mukherjee Y. Wang. Robust dark energy constraints from supernovae, galaxy clustering, and three-year wilkinson microwave anisotropy probe observations. *Astrophys.J.650:1-6,2006*, 2006.
- [54] et.al D. J. Eisenstein. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies. *Astrophys.J.633:560-574,2005*, 2005.
- [55] et.al. C. Blake. The wigglez dark energy survey: testing the cosmological model with baryon acoustic oscillations at  $z=0.6$ . *arXiv: 1105.2862v1*, 2011.
- [56] R. Yang X. Gao. Geometrical diagnostic for purely kinetic k-essence dark energy. *arXiv: 1003.2786v1*, 2010.
- [57] A. A. Starobinsky U. Alam V. Sahni, T. D. Saini. *JETP Lett. 77 201*, 2003.
- [58] S.V.B. Goncalves J.A.O. Marinho F.G. Alvarenga, J.C. Fabris. An analysis of helium primordial nucleosynthesis with a variable cosmological coupling. *Braz.J.Phys. 31 546-551*, 2001.
- [59] F. L. Villante C. Bambi, M. Giannotti. The response of primordial abundances to a general modification of  $g_n$  and/or of the early universe expansion rate. *arXiv: 0503502v1*, 2005.
- [60] G. Panotopoulos J. Kang. Big-bang nucleosynthesis and wimp dark matter in modified gravity. *arXiv: 0806.1493v4*, 2008.

- [61] E. Linder A. Melchiorri L. Pagano E. Calabrese, D. Huterer. Limits on dark radiation, early dark energy, and relativistic degrees of freedom. *arXiv: 1103.4132v1*, 2011.
- [62] R. Matzner. Cosmic nucleosynthesis. *PASP 98:1049-1056*, 1986.
- [63] G. Feinberg J. Bernstein, L. S. Brown. Cosmological helium production simplified. *Reviews of Modern physics, Vol. 61, No. 1*, 1989.
- [64] S. Dimopoulos R. Esmailzadeh, G. Starkman. Primordial nucleosynthesis without a computer. *Astrophys. J. 378, 504*, 1991.
- [65] V. Mukhanov. Nucleosynthesis without a computer. *arXiv: 0303073v1*, 2003.
- [66] K. A. Olive R. H. Cyburt, B. D. Fields. Primordial nucleosynthesis in light of wmap. *Physics Letters B 567, 227-234*, 2003.
- [67] P. Descouvemont A. Adahchour C. Angulo A. Coc, E. Vangioni-Flam. Updated big bang nucleosynthesis compared with wilkinson microwave anisotropy probe observations and the abundance of light elements. *The Astrophysical Journal, 600:544-552*, 2001.
- [68] C. Kellogg. *Radiation Lab preprint OAP-714*.
- [69] F. Iocco G. Mangano G. Miele O. Pisanti P.D. Serpico, S. Esposito. Nuclear reaction network for primordial nucleosynthesis: a detailed analysis of rates, uncertainties and light nuclei yields. *JCAP 0412:010*, 2004.
- [70] S. Esposito F. Iocco G. Mangano G. Miele P.D. Serpico O. Pisanti, A. Cirillo. Parthenope: Public algorithm evaluating the nucleosynthesis of primordial elements. *arXiv:0705.0290*, 2007.
- [71] D. J. Mullan J. MacDonald. Big bang nucleosynthesis: The strong nuclear force meets the weak anthropic principle. *PHYSICAL REVIEW D 80, 043507*, 2009.
- [72] <http://cococubed.asu.edu/codepages/netbigbang.shtml>.
- [73] K. A. Olive R. H. Cyburt, B. D. Fields. Primordial nucleosynthesis in light of wmap. *Phys. Lett. B, 567, 227*, 2003.
- [74] M.S. Turner E.W. Kolb. *The Early Universe: Reprints*. Addison Wesley, 1988.
- [75] S. Sankar. Big-bang nucleosynthesis. *arXiv:0406.663v1*, 2004.
- [76] T. Padmanabhan. *After the first three minutes, the story of our universe*. Cambridge University Press, 1998.
- [77] K. Olive M.S. Turner D. N. Schramm, D.N. Schramm and J. Yang. Primordial nucleosynthesis. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Colloquium Paper*, Vol. 95, pp. 42-46, 1998.
- [78] N. Suzuki D. Tytler, J.M. O'Meara and D. Lubin. Review of big bang nucleosynthesis and primordial abundances. *arXiv:0001.318v1*, 2000.
- [79] G. Miele O. Pisanti P.D. Serpico F. Iocco, G. Mangano. The path to metallicity: synthesis of cno elements in standard bbn. *Phys. Rev. D75:087304*, 2007.

- [80] *et. al* E. Komatsu. Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Cosmological interpretation. *ApJS*, 192, 18, 2010.
- [81] *et. al* N. Jarosik. Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Sky maps, systematic errors, and basic results. *ApJS*, 192, 14, 2010.
- [82] *et. al* D. Larson. Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Power spectra and wmap-derived parameters. *ApJS*, 192, 16, 2011.
- [83] G. Steigman. Primordial nucleosynthesis after wmap. *Proceedings IAU Symposium No. 265*, 2009.
- [84] O. Pisanti G. Miele. Primordial nucleosynthesis: an updated comparison of observational light nuclei abundances with theoretical predictions. *arXiv: 0811.4479v1*, 2008.
- [85] G. Steigman. Challenges to the standard model of big bang nucleosynthesis. *Colloquium Paper Proc. Natl. Acad. Sci. USA Vol. 90*, pp. 4779-4781, 1993.
- [86] S. Perlmutter P. J. Steinhardt A. Bahcall, J. P. Ostriker. The cosmic triangle: Assessing the state of the universe. *Science* 284:1481-1488, 1999.
- [87] A. Melchiorri R. Bean, S. H. Hansen. Early-universe constraints on dark energy. *arXiv: 0104162v2*, 2001.
- [88] *et. al* A. H. Jaffe. Cosmology from maxima-1, boomerang and cobe/dmr cmb observations. *Phys.Rev.Lett.* 86 3475-3479, 2001.
- [89] M. Joyce P. G. Ferreira. Structure formation with a self-tuning scalar field. *Phys.Rev.Lett.* 79 4740-4743, 1997.
- [90] M. Joyce P. G. Ferreira. Cosmology with a primordial scaling field. *Phys.Rev.* D58 023503, 1998.
- [91] J. N. Trurur M. S. Turner S. Burles, K. M. Nollett. Sharpening the predictions of big-bang nucleosynthesis. *Phys.Rev.Lett.* 82 4176-4179, 1999.
- [92] T. Kajino M. Orito M. Yahiro G. J. Mathews, K. Ichiki. New paradigms for primordial nucleosynthesis. *Nuclear Physics A718 15c-22c*, 2003.
- [93] A. Coc. Sharpening the predictions of big-bang nucleosynthesis. *Phys.Rev.Lett.* 82 4176-4179, 1999.
- [94] T. Kajino M. Orito M. Yahiro G. J. Mathews, K. Ichiki. Big-bang nucleosynthesis: a probe of the early universe. nuclear instruments and methods in physics research section a: Accelerators, spectrometers, detectors and associated equipment. *611(2-3): 224-230*, 2009.
- [95] A. Johansson J. Brorsson, J. Jacobsson. Big bang nucleosynthesis. 2010.
- [96] <http://healpix.jpl.nasa.gov/healpixsoftwarecapabilities.shtml>.