



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Carta $t$ con límites de control estimados

**Jhon Edinson Hinestroza Ramírez**

Universidad Nacional de Colombia- Sede Medellín  
Facultad de Ciencias-Escuela de Estadística  
Medellín, Colombia  
2018



# Carta $t$ con límites de control estimados

**Jhon Edinson Hinestroza Ramírez**

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Ciencias- Estadística**

Director(a):  
Ph.D. Nelfi G. González Alvarez

Línea de Investigación:  
Estadística industrial

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Estadística  
Medellín, Colombia  
2018



## Dedicatoria

A mis hijas Maria Paula y Jhosseline, a mi esposa Paula Andrea y a mis padres. Ustedes me mueven.



# Agradecimientos

Agradezco de forma muy especial a la Profesora Nelfi G. González, me tuvo la paciencia necesaria y me brindo su apoyo, guía y los “regaños” necesarios para culminar este trabajo. Agradezco también a la Universidad Nacional- Sede Medellín, Escuela de Estadística, por abrirme las puertas, en especial al profesor Juan Carlos Salazar, mi primer contacto. Finalmente, a mi hermano Jhonmer por sus voces de aliento y cada persona que me ha animado a seguir adelante.





## Resumen

Usualmente las cartas de control se construyen con estimaciones de los parámetros asociados a la distribución de la variable o estadístico que se monitorea; sin embargo, se asume que estos son conocidos y en consecuencia, se desconsideran los efectos que las estimaciones tienen sobre el desempeño de la carta. En este trabajo se estudian los efectos de la estimación del parámetro de la carta  $t$ , la cual es usada para monitorear el tiempo entre eventos, asumiendo que esta variable sigue una distribución  $\exp(\lambda_0)$ . Para ello, se hizo un análisis inicial de la longitud promedio de corrida o  $ARL$  para la carta cuando  $\lambda_0$  es conocido y posteriormente cuando se usa un valor estimado para este parámetro. El análisis preliminar permitió ver que la carta en cualquiera de los dos casos no es de  $ARL$  insesgado; es decir, su  $ARL$  no es máxima cuando el proceso está en control. Además, se pudo mostrar que cuando  $\lambda_0$  es estimado, esta estimación afecta significativamente la tasa de falsa alarma, la  $ARL$  y la  $SDRL$  (desviación estándar de la longitud de corrida), cuando el tamaño de la muestra usada para esta estimación es pequeña. En consecuencia, se estudian y proponen correcciones de los límites de control, con el fin de obtener una carta de  $ARL$  insesgado. Se consideró la construcción de límites con probabilidades de colas con valores nominales iguales y diferentes y se trabajó con dos criterios de optimización en cada caso, en el primero se hallaron correcciones tales que la carta sea de  $ARL$  insesgado y además la  $ARL$  en control satisfaciendo un valor deseado; en el segundo criterio, además de buscar correcciones para lograr una carta de  $ARL$  insesgado, se procuró además, alcanzar una tasa de falsa alarma deseada. Los resultados sugieren que cuando se estima el parámetro y se corrigen los límites, es mejor fijar la  $ARL$  en lugar de la tasa de falsa alarma, sin embargo, es indiferente definir los límites con colas nominales de igual o distinta probabilidad, de la misma forma, resulta indiferente la elección de uno u otro estimador entre los dos que fueron considerados en esta tesis.

**Palabras clave:** Carta de control  $t$ ,  $SPC$  (Control estadístico de procesos),  $ARL$  (longitud promedio de corrida),  $ARL$  insesgado, tiempo entre eventos, distribución exponencial.

## Abstract

The control charts are usually constructed with estimates of the parameters associated with the distribution of the variable or statistic being monitored; however, it is assumed that these are known, and therefore the effects that estimates have on the performance of the chart are disregarded. This paper studies the effects of the estimation of the parameter of the chart  $t$ , which is used to monitor the time between events, assuming that this variable follows a distribution  $\exp(\lambda_0)$ . For this, an initial analysis of the average run length or  $ARL$  for the chart was made when  $\lambda_0$  is known and later when an estimated value is used for

this parameter. The preliminary analysis showed that the chart in either case is not of *ARL* unbiased; it means that, its *ARL* is not maximized when the process is in control. In addition, it was shown that when  $\lambda_0$  is estimated, this estimation affects significantly the false alarm rate, *ARL* and *SDRL* (standard deviation of run length), when the sample size used for this estimation is small. Consequently, corrections to the limits of control are studied and proposed, in order to obtain a chart of *ARL* unbiased. The construction of limits were considered with probabilities of tails with equal and different nominal values, two optimization criteria were taken into consideration in each case, in the first criterion, corrections were found such that the chart be of *ARL* unbiased and also the *ARL* in control satisfying a desired value; in the second criterion, not only looked for corrections to achieve an unbiased *ARL* but also sought to achieve a desired false alarm rate. The results suggest that when estimating the parameter and correcting the limits, it is better to set the *ARL* instead of the false alarm rate, however, it is irrelevant to define the limits with probabilities of tails with equal nominal values or different, in the same way, the choice of one or another estimator among the two that were considered in this thesis is indifferent.

**Key words:** Control *t* chart, *SPC* (statistical process control), *ARL* (average run length), *ARL* unbiased, time between events, exponential distribution.

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Resumen</b>	<b>IX</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>XI</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>XV</b>
<b>Abreviaturas y Notación</b>	<b>XVIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>5</b>
2.1. Control estadístico y control estadístico de procesos ( <i>SPC</i> ) . . . . .	5
2.2. Fases de monitoreo mediante cartas de control . . . . .	6
2.3. Cartas de control . . . . .	7
2.4. Medidas de desempeño de una carta de control . . . . .	7
2.4.1. <i>ARL</i> . . . . .	8
2.4.2. <i>SDRL</i> . . . . .	9
<b>3. Monitoreo del tiempo entre eventos</b>	<b>11</b>
3.1. Estado del arte en el monitoreo del tiempo entre eventos . . . . .	11
3.2. Efectos de la Estimación de Parámetros en las cartas de control . . . . .	18
<b>4. Corrección de límites de control</b>	<b>21</b>
<b>5. Diseño de la carta <i>t</i></b>	<b>29</b>
5.1. Resultados preliminares y estimadores . . . . .	29
5.2. Carta <i>t</i> con parámetro conocido. . . . .	31
5.2.1. Carta <i>t</i> de <i>ARL</i> insesgado con $\lambda_0$ conocido. . . . .	33
5.3. Carta <i>t</i> con parámetro estimado. . . . .	35
5.3.1. Carta <i>t</i> de <i>ARL</i> insesgado con $\lambda_0$ estimado. . . . .	41
<b>6. Resultados</b>	<b>49</b>
6.1. Carta <i>t</i> de <i>ARL</i> insesgado con $\lambda_0$ conocido . . . . .	49

6.2. Carta $t$ de $ARL$ insesgado con $\lambda_0$ estimado . . . . .	54
6.2.1. Ajuste de límites con probabilidades nominales de colas iguales . . . . .	55
6.2.2. Ajuste de límites con probabilidades nominales de colas distintas . . . . .	66
<b>7. Aplicaciones: Desempeño de la carta <math>t</math> con <math>\lambda_0</math> estimado</b>	<b>79</b>
7.1. Aplicación a datos reales . . . . .	79
7.2. Aplicación a datos simulados . . . . .	82
<b>8. Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>89</b>
8.1. Conclusiones . . . . .	89
8.2. Recomendaciones . . . . .	90
<b>A. Anexo: Tablas Zhang et al. (2006)</b>	<b>91</b>
<b>B. Anexo: Tiempo entre explosiones en minas de carbón</b>	<b>92</b>
<b>C. Anexo: Datos simulados</b>	<b>93</b>
<b>D. Anexo: Código R usado</b>	<b>94</b>
D.1. Cálculo de la $ARL$ y $SDRL$ para $\lambda_0$ conocido . . . . .	94
D.1.1. Comentarios al código anterior . . . . .	94
D.2. Obtención de los valores óptimos de $A$ y $B$ . . . . .	95
D.2.1. Comentarios al código anterior . . . . .	95
D.3. Cálculo de la $ARL$ para $\lambda_0$ estimado . . . . .	95
D.3.1. Comentarios al código anterior . . . . .	95
D.4. Cálculo de la tasa de falsa alarma . . . . .	96
D.4.1. Comentarios al código anterior . . . . .	96
D.5. Cálculo de valores óptimos para los factores de ajuste de los límites estimados	97
D.5.1. Comentarios al código anterior . . . . .	97
<b>Bibliografía</b>	<b>99</b>

# Lista de Figuras

2-1.	Carta de control $\bar{X}$ . Datos de Ryan (2011) página 151. . . . .	7
5-1.	Curvas de $ARL(\delta)$ de la carta $t$ con parámetro conocido, $\lambda_0 = 0.01$ y $\alpha = 0.0027$ , $0.005$ y $0.01$ . . . . .	33
5-2.	Curvas $ARL$ de la carta $t$ con $\lambda_0 = 0.01$ y $\alpha = 0.0027$ según (5-10), (5-29) y (5-30). (a) $n = 5$ (b) $n = 100$ . . . . .	38
5-3.	Curva de $ARL$ de la carta $t$ con $\lambda_0 = 0.01$ , $\alpha = 0.0027$ y tamaños de muestra $n = 5, 15, 30$ , y $50$ . (a) Curvas $ARL(\delta)$ según (5-10) y de $ARL(\delta)_{unb}$ según (5-29). (b) Curvas $ARL(\delta)$ según (5-10) y de $ARL(\delta)_{bias}$ según (5-30). . . . .	41
5-4.	Propuestas para hacer la carta $t$ de $ARL$ insesgado. . . . .	46
6-1.	Curvas de $ARL$ de la carta $t$ usando $\lambda_0 = 0.01$ . Curvas de $ARL(\delta)$ según (5-10) y de $ARL(\delta)_{\alpha}$ según (5-16). . . . .	52
6-2.	Curvas de $ARL$ de la carta $t$ usando $\lambda_0 = 0.01$ . Curvas de $ARL(\delta)$ según (5-10) y de $ARL(\delta)_{\alpha,\beta}$ según (5-17). . . . .	53
6-3.	Curvas de $ARL$ de la carta $t$ con límites corregidos, $\lambda_0 = 0.01$ y tamaños de muestra $n = 5, 15, 30$ y $50$ . (a) Curvas de $ARL(\delta)_{\alpha,unb}$ según soluciones de (6-15). (b) Curvas de $ARL(\delta)_{\alpha,bias}$ según soluciones de (6-16). (c) Curvas de $ARL_{\alpha,Zhang}$ según Zhang et al. (2006). . . . .	58
6-4.	Tasa de falsa alarma $\alpha_{unb}$ , $\alpha_{bias}$ , $\alpha_{\alpha,unb}$ y $\alpha_{\alpha,bias}$ para la carta $t$ con $\alpha = 0.0027$ y $\lambda_0 = 0.01$ y los límites definidos en (5-25), (5-26), (5-34) y (5-35). . . . .	61
6-5.	Curvas de $ARL$ de la carta $t$ con límites corregidos, $\lambda_0 = 0.01$ , $\alpha = 0.0027$ y tamaños de muestra $n = 5, 15, 30$ y $50$ . (a) Curvas de $ARL(\delta)_{\alpha,unb}^*$ según soluciones de (6-22). (b) Curvas de $ARL(\delta)_{\alpha,bias}^*$ según soluciones de (6-23). . . . .	65
6-6.	Curvas de $ARL$ de la carta $t$ con límites de probabilidades nominales de colas distintas usando $\lambda_0 = 0.01$ , $\alpha = 0.0027$ , $\beta = 0.0023952$ y tamaños de muestra $n = 5, 15, 30$ y $50$ . (a) Curvas de $ARL(\delta)_{\beta,unb}$ según (5-47). (b) Curvas de $ARL(\delta)_{\beta,bias}$ según (5-48). . . . .	67
6-7.	Curvas de $ARL$ de la carta $t$ con límites de probabilidades nominales de colas distintas con estimadores $\hat{\lambda}_{unb}$ y $\hat{\lambda}_{bias}$ , $\lambda_0 = 0.01$ , $\alpha = 0.0027$ , $\beta = 0.0023952$ y tamaños de muestra $n = 5, 15, 30$ y $50$ . (a) Curvas de $ARL(\delta)_{\alpha,\beta,unb}$ según soluciones de (6-30). (b) Curvas de $ARL(\delta)_{\alpha,\beta,bias}$ según soluciones de (6-31). . . . .	70
6-8.	Tasas de falsas alarmas $\alpha_{\beta,unb}$ , $\alpha_{\beta,bias}$ , $\alpha_{\alpha,\beta,unb}$ y $\alpha_{\alpha,\beta,bias}$ de la carta $t$ con $\lambda_0 = 0.01$ , $\alpha = 0.0027$ con límites definidos en (5-45), (5-46), (5-49) y (5-50). . . . .	73

6-9. Curvas de *ARL* de la carta *t* fijando la tasa de falsa alarma nominal con estimadores  $\hat{\lambda}_{unb}$  y  $\hat{\lambda}_{bias}$ ,  $\lambda_0 = 0.01$ ,  $\alpha = 0.0027$ ,  $\beta = 0.0023952$  y tamaños de muestra  $n = 5, 15, 30$  y  $50$ . (a) Curvas de  $ARL(\delta)_{\alpha, \beta, unb}^*$  según soluciones de (6-40). (b) Curvas de  $ARL(\delta)_{\alpha, \beta, bias}^*$  según soluciones de (6-41). . . . . 77

7-1. Carta de control *t* para los datos de fase I de la Tabla B-1, con límites (5-25) y (5-26), usando  $\alpha = 0.0027$ . . . . . 80

7-2. (a) Carta de control *t* para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{unb}, \widehat{UCL}_{unb})$  y  $(\widehat{LCL}_{bias}, \widehat{UCL}_{bias})$ . (b) Carta de control *t* para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{\beta, unb}, \widehat{UCL}_{\beta, unb})$  y  $(\widehat{LCL}_{\beta, bias}, \widehat{UCL}_{\beta, bias})$ . Usando  $\alpha = 0.0027$ . . . . . 80

7-3. (a) Carta de control *t* para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{\alpha, unb}, \widehat{UCL}_{\alpha, unb})$ . (b) Carta de control *t* para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{\alpha, unb}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, unb}^*)$ . (c) Carta de control *t* para los datos de fase I con límites  $(\widehat{UCL}_{Zhang}, \widehat{UCL}_{Zhang})$ . Usando  $\alpha = 0.0027$ . . . . . 82

7-4. (a) Carta de control *t* para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{unb}, \widehat{UCL}_{unb})$  y  $(\widehat{LCL}_{bias}, \widehat{UCL}_{bias})$ . (b) Carta de control *t* para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{\beta, unb}, \widehat{UCL}_{\beta, unb})$  y  $(\widehat{LCL}_{\beta, bias}, \widehat{UCL}_{\beta, bias})$ . (c) Carta de control *t* para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{\alpha, unb}, \widehat{UCL}_{\alpha, unb})$  y  $(\widehat{LCL}_{\alpha, unb}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, unb}^*)$ . (d) Carta de control *t* para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{Zhang}, \widehat{UCL}_{Zhang})$ . Usando  $\alpha = 0.0027$ ,  $n = 30$ . . . . . 84

7-5. (a) Carta de control *t* para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{unb}, \widehat{UCL}_{unb})$  y  $(\widehat{LCL}_{bias}, \widehat{UCL}_{bias})$ . (b) Carta de control *t* para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{\beta, unb}, \widehat{UCL}_{\beta, unb})$  y  $(\widehat{LCL}_{\beta, bias}, \widehat{UCL}_{\beta, bias})$ . (c) Carta de control *t* para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{\alpha, unb}, \widehat{UCL}_{\alpha, unb})$  y  $(\widehat{LCL}_{\alpha, unb}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, unb}^*)$ . (d) Carta de control *t* para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{Zhang}, \widehat{UCL}_{Zhang})$ . Usando  $\alpha = 0.0027$ ,  $n = 30$ . . . . . 85

7-6. (a) Es la carta de control para los límites  $(\widehat{LCL}_{unb}, \widehat{UCL}_{unb})$  y  $(\widehat{LCL}_{bias}, \widehat{UCL}_{bias})$ . (b) Es la carta de control para los límites  $(\widehat{LCL}_{\beta, unb}, \widehat{UCL}_{\beta, unb})$  y  $(\widehat{LCL}_{\beta, bias}, \widehat{UCL}_{\beta, bias})$ . (c) Representa la carta de control para los límites  $(\widehat{LCL}_{\alpha, unb}, \widehat{UCL}_{\alpha, unb})$  y  $(\widehat{LCL}_{\alpha, unb}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, unb}^*)$  y (d) la carta para los límites  $(\widehat{LCL}_{Zhang}, \widehat{UCL}_{Zhang})$ .  $\alpha = 0.0027$ ,  $n = 5$ . . . . . 87

7-7. (a) Es la carta de control para los límites  $(\widehat{LCL}_{unb}, \widehat{UCL}_{unb})$  y  $(\widehat{LCL}_{bias}, \widehat{UCL}_{bias})$ . (b) Es la carta de control para los límites  $(\widehat{LCL}_{\beta, unb}, \widehat{UCL}_{\beta, unb})$  y  $(\widehat{LCL}_{\beta, bias}, \widehat{UCL}_{\beta, bias})$ . (c) Representa la carta de control para los límites  $(\widehat{LCL}_{\alpha, unb}, \widehat{UCL}_{\alpha, unb})$  y  $(\widehat{LCL}_{\alpha, unb}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, unb}^*)$  y (d) la carta para los límites  $(\widehat{LCL}_{Zhang}, \widehat{UCL}_{Zhang})$ .  $\alpha = 0.0027$ ,  $n=5$ . . . . . 88

# Lista de Tablas

4-1.	Algunos valores de $\alpha^*$ y $\gamma_{\alpha^*}$ dados en Zhang et al. (2006). . . . .	23
5-1.	Valores de la $ARL(1)$ y $SDRL(1)$ para distintos $\alpha$ y $\lambda_0$ . . . . .	32
5-2.	Valores de $ARL(1)_{\text{unb}}$ y $SDRL(1)_{\text{unb}}$ , para $\alpha = 0.0027$ y distintos $\lambda_0$ y $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ . . . . .	40
5-3.	Valores de $ARL(1)_{\text{bias}}$ y $SDRL(1)_{\text{bias}}$ , para $\alpha = 0.0027$ y distintos $\lambda_0$ y usando $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ . . . . .	40
6-1.	Valores de $A_\alpha$ , $B_\alpha$ y $\beta$ según la solución de (6-7) y (6-9), límites de la carta $t$ según (5-6) ( $LCL$ , $UCL$ ), (5-12) ( $LCL_{\text{Zhang}}$ , $UCL_{\text{Zhang}}$ ), (5-14) ( $LCL_\alpha$ , $UCL_\alpha$ ) y (5-15) ( $LCL_{\alpha,\beta}$ , $UCL_{\alpha,\beta}$ ). $\lambda_0 = 0.01$ , $ARL_0 = 370$ . . . . .	51
6-2.	Factores de ajuste de los límites (5-6), (5-14), (5-12) y (5-15) para algunos valores de $\alpha$ . . . . .	51
6-3.	Valores de $ARL(\delta)$ y $SDRL(\delta)$ de la carta $t$ con $\lambda_0$ conocido, $\alpha = 0.0027$ , $\lambda_0 = 0.01$ y $\lambda_0 = 0.05$ , según los límites (5-6), (5-12), (5-16) y (5-17). . . . .	54
6-4.	Tasa de falsa alarma para algunos valores de $\lambda_0$ debida a las correcciones de en los límites de control de la carta $t$ dados por (5-12), (5-14) y (5-15), considerando un $\alpha = 0.0027$ . . . . .	54
6-5.	Solución ( $C_\alpha$ , $D_\alpha$ ) y ( $C_\alpha^*$ , $D_\alpha^*$ ) de (6-15) y (6-16), y los correspondientes $ARL(1)_{\alpha, \text{unb}}$ , $SDRL(1)_{\alpha, \text{unb}}$ , $ARL(1)_{\alpha, \text{bias}}$ y $SDRL(1)_{\alpha, \text{bias}}$ , considerando $\alpha = 0.0027$ , $\lambda_0 = 0.01$ , $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ . . . . .	57
6-6.	Valores de coeficientes de la variable aleatoria $Y$ en límites corregidos según ecuaciones (5-34) y (5-35), usando $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ y las soluciones óptimas para ( $C_\alpha$ , $D_\alpha$ ) y ( $C_\alpha^*$ , $D_\alpha^*$ ). $\alpha = 0.0027$ , $\lambda_0 = 0.01$ . . . . .	59
6-7.	Valores de $ARL$ de la carta $t$ para algunos tamaños de muestra $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ , $\delta$ , con $\lambda_0 = 0.01$ y $ARL_0 = 370$ usando los límites dados en (5-33), (5-25) y (5-26) y los límites corregidos según (5-34) y (5-35). . . . .	60
6-8.	Tasa de falsa alarma de las cartas con los límites (5-25) y (5-26) y los límites corregidos dados en (5-34) y (5-35), con una tasa de falsa alarma nominal $\alpha = 0.0027$ , $\lambda_0 = 0.01$ , $n = 5, 15, 30, 50, 100$ y $200$ . . . . .	61
6-9.	Solución ( $E_\alpha$ , $F_\alpha$ ) y ( $E_\alpha^*$ , $F_\alpha^*$ ) de (6-22) y (6-23), y los correspondientes $ARL^*(1)_{\alpha, \text{unb}}$ , $SDRL^*(1)_{\alpha, \text{unb}}$ , $ARL^*(1)_{\alpha, \text{bias}}$ y $SDRL^*(1)_{\alpha, \text{bias}}$ , considerando $\alpha = 0.0027$ , $\lambda_0 = 0.01$ , $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ . . . . .	64

6-10. Valores de coeficientes de la variable aleatoria $Y$ en límites corregidos según ecuaciones (5-42) y (5-43), usando $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ y las soluciones óptimas para $(E_\alpha, F_\alpha)$ y $(E_\alpha^*, F_\alpha^*)$ . $\alpha = 0.0027, \lambda_0 = 0.01$ . . . . .	65
6-11. Valores de $ARL$ de la carta $t$ para algunos tamaños de muestra $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200, \delta, \lambda_0 = 0.01$ y $ARL_0 = 370$ usando los límites dados en (5-25) y (5-26); los límites corregidos según (5-42) y (5-43). . . . .	66
6-12. Valores $ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$ y $ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$ con $\alpha = 0.0027, \lambda_0 = 0.01, \beta = 0.0023952, n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ en control (columnas 2 y 4) y fuera de control (columnas 3 y 5). . . . .	67
6-13. Solución $(C_\beta, D_\beta)$ y $(C_\beta^*, D_\beta^*)$ de (6-30) y (6-31) y los correspondientes $ARL(1)_{\alpha, \beta, \text{unb}}, SDRL(1)_{\alpha, \beta, \text{unb}}, ARL(1)_{\alpha, \beta, \text{bias}}$ y $SDRL(1)_{\alpha, \beta, \text{bias}}$ , considerando $\alpha = 0.0027, \lambda_0 = 0.01, \beta = 0.0023952$ y $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ . . . . .	70
6-14. Valores de coeficientes de la variable aleatoria $Y$ en límites corregidos según ecuaciones (5-49) y (5-50), usando $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ , soluciones óptimas para $(C_\beta, D_\beta)$ y $(C_\beta^*, D_\beta^*)$ , $\alpha = 0.0027, \lambda_0 = 0.01, \beta = 0.0023952$ . . . . .	71
6-15. Valores de $ARL$ de la carta $t$ para los tamaños de muestra $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200, \delta, \lambda_0 = 0.01$ y $ARL_0 = 370$ usando los límites dados en (5-45) y (5-46), y los límites corregidos (5-49) y (5-50). . . . .	72
6-16. Tasa de falsa alarma para los tamaños de muestra $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ de la carta $t$ con los límites (5-45) y (5-46) y los límites hallados como solución de (6-30) y (6-31), con una tasa de falsa alarma nominal $\alpha = 0.0027, \lambda_0 = 0.01, \beta = 0.0023952$ . . . . .	73
6-17. Solución $(E_\beta, F_\beta)$ y $(E_\beta^*, F_\beta^*)$ de (6-40) y (6-41) y los correspondientes $ARL(1)_{\alpha, \beta, \text{unb}}, SDRL(1)_{\alpha, \beta, \text{unb}}, ARL(1)_{\alpha, \beta, \text{bias}}$ y $SDRL(1)_{\alpha, \beta, \text{bias}}$ , considerando $\alpha = 0.0027, \lambda_0 = 0.01, \beta = 0.0023952$ y $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ . . . . .	76
6-18. Valores de coeficientes de la variable aleatoria $Y$ en límites corregidos según ecuaciones (5-51) y (5-52), usando $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ y las soluciones óptimas para $(E_\beta, F_\beta)$ y $(E_\beta^*, F_\beta^*)$ , $\alpha = 0.0027, \lambda_0 = 0.01, \beta = 0.0023952$ . . . . .	78
6-19. Valores de $ARL$ de la carta $t$ para los tamaños de muestra $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200, \delta, \lambda_0 = 0.01$ y $ARL_0 = 370$ usando los límites dados en (5-45) y (5-46), y los límites corregidos (5-49) y (5-50). . . . .	78
7-1. Límites de control de la carta $t$ de acuerdo a (5-34), (5-35), (5-42), (5-43), (5-49), (5-50), (5-51) y (5-52) usando los datos de la fase I. $\alpha = 0.0027$ . . . . .	81
7-2. Límites de control de la carta $t$ según (5-34), (5-35), (5-42), (5-43), (5-49), (5-50), (5-51) y (5-52) usando los datos de la Tabla C-1. $\alpha = 0.0027$ . . . . .	83
7-3. Límites de control de la carta $t$ según (5-34), (5-35), (5-42), (5-43), (5-49), (5-50), (5-51) y (5-52) usando los 5 primeros datos de la Tabla C-1. $\alpha = 0.0027$ . . . . .	86
A-1. Tabla 3 de Zhang et.al (2006). Valores de la tasa de falsa alarma variando $n$ y $\lambda_0$ ( $ARL_0 = 370$ ) . . . . .	91



---

B-1.	Tiempo (en días) entre explosiones en minas de carbón. Tomados de Jarrett (1979).	92
C-1.	Datos provenientes de una distribución $\exp(t; \lambda_0 = 0.01)$ .	93
C-2.	Datos provenientes de una distribución $\exp(t; \lambda = \delta\lambda_0)$ con $\lambda_0 = 0.01$ con $\delta=2, 3, 4, 5, 6$ .	93
C-3.	Datos provenientes de una distribución $\exp(t; \lambda = \delta\lambda_0)$ con $\lambda_0 = 0.01$ y $\delta = 0.6, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2$ .	93

# Abreviaturas y Notación

## Abreviaturas

Abreviatura	Término
<i>ARL</i>	Longitud promedio de corrida
<i>ATS</i>	Tiempo promedio para señalar
<i>CL</i>	Límite central
<i>FAP</i>	Probabilidad de falsa alarma
<i>LCL</i>	Límite inferior de control
<i>MRL</i>	Longitud mediana de corrida
<i>RL</i>	Longitud de corrida
<i>SDRL</i>	Desviación estándar de la longitud mediana de corrida
<i>SPC</i>	Control estadístico de procesos
<i>UCL</i>	Límite superior de control

## Notación

Símbolo	Término
$ARL(\delta)$	<i>ARL</i> de la carta <i>t</i> según los límites (3-7) y (3-8).
$ARL(\delta)_\alpha$	<i>ARL</i> de la carta <i>t</i> según los límites (5-14).
$ARL(\delta)_{\alpha, \beta}$	<i>ARL</i> de la carta <i>t</i> según los límites (5-15).
$\widehat{ARL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}$	<i>ARL</i> de la carta <i>t</i> según los límites (5-50).
$\widehat{ARL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}$	<i>ARL</i> de la carta <i>t</i> según los límites (5-49).
$ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$	<i>ARL</i> de la carta <i>t</i> según los límites (5-46).
$ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$	<i>ARL</i> de la carta <i>t</i> según los límites (5-45).
$ARL(\delta)_{\text{Est}}$	<i>ARL</i> de la carta <i>t</i> según los límites (5-20).
$ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}$	<i>ARL</i> de la carta <i>t</i> según los límites (5-35).
$ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}^*$	<i>ARL</i> de la carta <i>t</i> según los límites (5-43).
$ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}$	<i>ARL</i> de la carta <i>t</i> según los límites (5-34).
$ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}^*$	<i>ARL</i> de la carta <i>t</i> según los límites (5-42).
$ARL(\delta)_{\text{bias}}$	<i>ARL</i> de la carta <i>t</i> según los límites (5-26).
$ARL(\delta)_{\text{unb}}$	<i>ARL</i> de la carta <i>t</i> según los límites (5-25).

<b>Símbolo</b>	<b>Término</b>
$SDRL_{\alpha}$	$SDRL$ de la carta $t$ según los límites (5-14).
$SDRL_{\alpha, \beta}$	$SDRL$ de la carta $t$ según los límites (5-15).
$SDRL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}^*$	$SDRL$ de la carta $t$ según los límites (5-42)
$SDRL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}^*$	$SDRL$ de la carta $t$ según los límites (5-43)
$SDRL(\delta)_{\text{bias}}$	$SDRL$ de la carta $t$ según los límites (5-26).
$SRL(\delta)_{\text{Est}}$	$SDRL$ de la carta $t$ según los límites (5-20).
$SDRL(\delta)_{\text{unb}}$	$SDRL$ de la carta $t$ según los límites (5-25).
$\widehat{LCL}$	$LCL$ con estimador de $\lambda_0$ .
$LCL_{\alpha}$	$LCL$ corregido de la carta $t$ con probabilidades nominales de colas iguales.
$LCL_{\alpha, \beta}$	$LCL$ corregido de carta $t$ con colas de probabilidad nominal distinta.
$\widehat{LCL}_{\text{bias}}$	$LCL$ según estimador $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$ .
$\widehat{LCL}_{\text{unb}}$	$LCL$ según estimador $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$ .
$\widehat{LCL}_{\alpha, \text{bias}}$	$LCL$ para $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$ con probabilidades nominales de colas iguales. $ARL_0$ fijo.
$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}$	$LCL$ para $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$ con probabilidades nominales de colas distintas. $ARL_0$ fijo.
$\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}$	$LCL$ para $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$ con probabilidades nominales de colas iguales. $ARL_0$ fijo.
$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}$	$LCL$ para $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$ con probabilidades nominales de colas distintas. $ARL_0$ fijo.
$\widehat{LCL}_{\alpha, \text{bias}}^*$	$LCL$ para $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$ con probabilidades nominales de colas iguales. $\alpha$ fijo.
$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$	$LCL$ para $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$ con probabilidades nominales de colas distintas. $\alpha$ fijo.
$\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}^*$	$LCL$ para $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$ con probabilidades nominales de colas iguales. $\alpha$ fijo.
$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$	$LCL$ para $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$ con probabilidades nominales de colas distintas. $\alpha$ fijo.
$\widehat{LCL}_{\beta}$	$LCL$ para $\lambda_0$ . Colas de probabilidad distinta.
$\widehat{LCL}_{\beta, \text{bias}}$	$LCL$ para $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$ con probabilidades nominales de colas distintas.
$\widehat{LCL}_{\beta, \text{unb}}$	$LCL$ para $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$ con probabilidades nominales de colas distintas.
$LCL_{\alpha, \beta}$	$LCL$ corregido de carta $t$ .
$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}$	$LCL$ para $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$ con probabilidades nominales de colas distintas. $ARL_0$ fijo.
$\widehat{LCL}_{\text{Zhang}}$	$LCL$ corregido de Zhang, Xie y Goh (2006), parámetro estimado.
$\widehat{UCL}_{\alpha, \text{bias}}$	$UCL$ para $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$ con probabilidades nominales de colas iguales. $ARL_0$ fijo.
$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}$	$UCL$ para $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$ con probabilidades nominales de colas distintas. $ARL_0$ fijo.
$\widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}}$	$UCL$ para $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$ con probabilidades nominales de colas iguales. $ARL_0$ fijo.
$\widehat{UCL}$	$UCL$ con estimador de $\lambda_0$ .
$UCL_{\alpha}$	$UCL$ corregido de la carta $t$ con probabilidades nominales de colas iguales.
$UCL_{\alpha, \beta}$	$UCL$ corregido de carta $t$ con colas de probabilidad nominal distinta.
$\widehat{UCL}_{\text{bias}}$	$UCL$ según estimador $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$ .
$\widehat{UCL}_{\text{unb}}$	$UCL$ según estimador $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$ .
$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}$	$UCL$ para $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$ con probabilidades nominales de colas distintas. $ARL_0$ fijo.
$\widehat{UCL}_{\alpha, \text{bias}}^*$	$UCL$ para $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$ con probabilidades nominales de colas iguales. $\alpha$ fijo.

<b>Símbolo</b>	<b>Término</b>
$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$	<i>UCL</i> para $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$ con probabilidades nominales de colas distintas. $\alpha$ fijo.
$\widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}}^*$	<i>UCL</i> para $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$ con probabilidades nominales de colas iguales. $\alpha$ fijo.
$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$	<i>UCL</i> para $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$ con probabilidades nominales de colas distintas. $\alpha$ fijo.
$\widehat{UCL}_{\beta}$	<i>UCL</i> para $\lambda_0$ . Colas de probabilidad distinta.
$\widehat{UCL}_{\beta, \text{bias}}$	<i>UCL</i> para $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$ con probabilidades nominales de colas distintas. $ARL_0$ fijo.
$\widehat{UCL}_{\beta, \text{unb}}$	<i>UCL</i> para $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$ con probabilidades nominales de colas distintas. $ARL_0$ fijo.
$\widehat{UCL}_{\text{Zhang}}$	<i>UCL</i> corregido de Zhang et al. (2006), parámetro estimado.
$SDRL(\delta)$	<i>SDRL</i> de la carta $t$ de acuerdo a los límites (3-7) y (3-8).
$\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$	Estimador sesgado de $\lambda_0$ .
$\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$	Estimador insesgado de $\lambda_0$ .
$\widehat{\lambda}_0$	Estimador de $\lambda_0$ .

# 1. Introducción

Usualmente cuando se implementa una carta de control para monitorear un proceso, se parte del supuesto de que las variables, o bien el estadístico que se monitorea, se distribuyen de forma normal (o aproximadamente normal). Bajo este supuesto, los límites de control se construyen como límites  $3\sigma$ ; esto es, a  $\pm 3$  desviaciones estándar de la media del estadístico o variable monitoreada. Sin embargo, cuando la distribución subyacente se aleja considerablemente de la normalidad, es más recomendable usar límites probabilísticos. En cualquier caso, es necesario considerar que la distribución de probabilidad depende de uno o más parámetros según su tipo, los cuáles suelen asumirse conocidos cuando se opera en la denominada Fase II de control (fase de monitoreo). Este último supuesto en la práctica no es cierto, puesto que resulta necesaria la estimación de los parámetros en la Fase I de control, en la cual se recolecta una muestra (o un conjunto de datos históricos) del proceso cuando éste último se encuentra operando en estado estable; es decir, con una variabilidad debida a causas completamente aleatorias.

Cuando los límites de control son determinados usando estimaciones de los parámetros de la distribución a considerar, estos se denominan límites estimados. Ahora bien, las cartas de control con estos límites no exhiben el mismo desempeño de las cartas construidas con los parámetros conocidos, en especial si las estimaciones fueron hechas con base en muestras pequeñas, y suele desconocerse en la práctica que esto puede tener efectos desfavorables en el desempeño de la carta de control en la Fase II de control. Por ejemplo, trabajar con parámetros estimados puede afectar negativamente la tasa de falsas alarmas, así como conducir a una lenta generación de señales válidas sobre desviaciones del estado estable en un proceso, lo cual a su vez no permitiría la corrección y prevención temprana de situaciones críticas debidas a causas asignables (Jensen, Jones-Farmer, Charles y Woodall, 2006; Psarakis, Vynioua y Philippe, 2014). También resultan afectadas medidas de desempeño de la carta como la *ARL* (Longitud promedio de corrida), la *SDRL* (desviación estándar de la longitud de corrida), el *ATS* (Tiempo promedio para una señal) y la *MRL* (Longitud mediana de corrida). Respecto a estas medidas, autores como Chakraborti (2007) y Chin y Khoo (2012), destacan la popularidad de la *ARL* como medida de desempeño de una carta de control, aunque también resaltan el uso creciente de medidas como la *MRL*.

El efecto negativo de la estimación de los parámetros sobre el desempeño de las cartas de control ha sido una preocupación para muchos investigadores en el área del control estadístico

de procesos (SPC), tal como se evidencia en Ryan (2011), Jensen et al. (2006), Montgomery (2013), Woodall y Montgomery (2014), Psarakis et al. (2014), Woodall y Driscoll (2015), entre otros. De hecho, se han desarrollado trabajos abordando los efectos de la estimación de parámetros sobre el desempeño de las cartas  $\bar{X}$ ,  $S$ , EWMA y CUSUM Chakraborti (2007), Ozsan, Caner y H.Wei (2010), Zhang, Peng, Schuh, Megahed y Woodall (2013), Yang, Xie, Kuralmani y Tsui (2002), Khoo, Lee, Teoh, Liew y Teh (2013), Saghir, Lin y Chen (2015).

Otro aspecto importante a considerar sobre el desempeño de una carta de control es lo que se denomina el insesgamiento en la  $ARL$ . Una carta de control se denomina de  $ARL$  insesgado si esta medida toma su máximo valor cuando el proceso está en control; de lo contrario, la carta es de  $ARL$  sesgado. Como se señaló previamente, la  $ARL$  no es más que la media de la longitud de corrida o  $RL$ , variable que corresponde al número de puntos graficados sobre la carta hasta la primera señal; es decir, hasta el primer valor fuera de límites. Por tanto, la  $RL$  es una variable aleatoria geométrica, con parámetro  $p$  igual a la probabilidad de una observación del estadístico monitoreado de caer por fuera de los límites de control. La carta  $t$  sobre la cual trata esta tesis, en su forma usual de construcción es de  $ARL$  sesgado cuando el parámetro de la distribución de la variable de interés (tiempo entre eventos) es desconocido. Esta característica que se considera desfavorable, se acentúa más cuando se trabaja con límites estimados con base en muestras pequeñas.

Se denomina carta  $t$  a aquella carta de control usada para monitorear el tiempo entre eventos raros o de baja tasa de ocurrencia como por ejemplo los sismos y las infecciones o la producción de unidades defectuosas en procesos de alta confiabilidad, asumiendo que esta variable sigue una distribución  $\exp(\lambda_0)$ , con  $\lambda_0$  el parámetro que representa la tasa de falla del proceso en control estadístico. Este trabajo de tesis tiene como propósito estudiar los efectos de la estimación de  $\lambda_0$  sobre el desempeño de esta carta en la Fase II de control. Para este fin, se estudió la  $ARL$  por ser la medida más comúnmente usada. El estudio desarrollado parte de la formulación de límites de control para la carta  $t$ , considerando inicialmente que el parámetro  $\lambda_0$  es conocido y posteriormente se evalúa cuando el parámetro es estimado. En el último caso, se consideran dos estimadores y se analizan y comparan sus efectos en el desempeño de la carta. Esta es una contribución importante, debido a que la mayoría de estudios se limitan al uso de uno de los dos estimadores, mas no a la comparación de los efectos de uno u otro sobre el funcionamiento de la carta de control. Adicionalmente, en la construcción de la carta se considera tanto el caso en el cual se formulan límites con valores nominales de probabilidades de colas iguales, como también el caso cuando estas probabilidades son diferentes. En cuanto al procedimiento para corrección del sesgo en la  $ARL$ , se estudian correcciones a los límites siguiendo dos criterios de optimización. En el primero, se encuentran factores de corrección tales que la carta  $t$  sea de  $ARL$  insesgado y con una  $ARL$  del proceso en control fijo o igual a un valor deseado  $ARL_0$ . En el segundo grupo de criterios de optimización se hallan factores de corrección tales que, además de satisfacer el

insegamiento en la *ARL*, la carta cumpla con un valor deseado para la tasa de falsa alarma  $\alpha$ . Si bien los dos criterios de optimización aplicados son equivalentes cuando el parámetro  $\lambda_0$  es conocido, no lo son cuando éste es estimado y en este caso, los resultados sólo son similares cuando el tamaño de muestra usada para la estimación es grande.

El desarrollo de este trabajo de tesis comienza en el Capítulo 2, en donde se presentan algunos conceptos teóricos claves que permiten entender la temática abordada. En el Capítulo 3 se presenta una revisión bibliográfica sobre los estudios en control estadístico de procesos para el monitoreo del tiempo entre eventos; en el Capítulo 4 se presentan resultados acerca de la corrección de límites para una carta de control de *ARL* sesgado. El Capítulo 5 corresponde al diseño de la carta  $t$ , en él se tratan aspectos relacionados con la distribución de los datos a estudiar y sus estimadores. En este capítulo también se exponen los límites de control propuestos por Xie, Goh y Ranjan (2002) y Zhang et al. (2006), así como el estudio de la *ARL* de la carta cuando el parámetro  $\lambda_0$  es conocido o estimado al igual que los límites propuestos para obtener una carta  $t$  de *ARL* insesgado. En el Capítulo 6 se presentan los resultados obtenidos de acuerdo a las propuestas dadas en el capítulo 5 para construir una carta  $t$  de *ARL* insesgado con parámetro conocido y estimado; en este capítulo también se estudian los efectos que tiene el estimador sesgado o insesgado sobre la *ARL* de la carta y sobre su tasa de falsa alarma, según el tamaño de muestra usado. En el Capítulo 7 se muestran dos ejemplos, en el primero se usan datos reales y en el segundo datos simulados bajo dos escenarios: deterioro y mejora del proceso. Finalmente, en el Capítulo 8, se presentan conclusiones y recomendaciones.





## 2. Marco Teórico

### 2.1. Control estadístico y control estadístico de procesos (SPC)

Se puede decir que una de las mayores preocupaciones al adquirir un producto es la calidad del mismo, esto implica que el producto o servicio han de satisfacer las necesidades para las cuales fue adquirido: el producto debe durar el tiempo necesario y debe ser tal que no haya necesidad de recurrir al proveedor por defectos o fallas y/o por mal funcionamiento en las características del producto. Lo anterior significa que el producto debe hacer lo que se espera que haga y debe hacerlo bien en el momento que se requiera. De la misma manera, quien provee servicio, espera generar satisfacción en el cliente, el proveedor espera que sus productos tengan la menor variabilidad en sus características, de forma que haya el menor número de inconformidades posibles, generando así confianza en quien lo adquiere (Montgomery, 2013).

De acuerdo a Montgomery (2013) la calidad es inversamente proporcional a la variabilidad. En este sentido, añade que el mejoramiento de la calidad significa la reducción de la variabilidad en procesos y productos. Lo anterior puede verse como un problema a estudiar para la estadística y es precisamente allí donde el control estadístico de procesos tiene lugar como instrumento de monitoreo de las características críticas de un producto. El control estadístico de procesos (*SPC*) consiste en el uso de métodos estadísticos para entender, monitorear y mejorar el rendimiento de procesos en el tiempo (Woodall, 2000). Por lo tanto, el *SPC* puede pensarse como el uso de métodos estadísticos en procesos industriales, prestación de bienes y/o servicios, con la intención de que lo ofrecido cumpla con las condiciones para las cuales fue diseñado. El uso del *SPC* se puede extender a cualquier campo en el que se requiera garantizar un estándar de un producto o servicio, por lo que sus herramientas no sólo son vitales cuando se habla de producción sino también en la gestión de riesgo (prevención de emergencias y desastres), el monitoreo de la ocurrencia de una enfermedad, etc; es decir, el *SPC* es importante tanto en el área de manufactura como para monitorear la ocurrencia de un evento que se puede considerar crítico.

Woodall (2000) señala que la variabilidad en un proceso puede deberse a causas comunes o asignables, siendo las primeras propias del proceso (aleatorias) y en general difíciles de

detectar y controlar; las otras obedecen a situaciones inusuales, como por ejemplo, errores en mediciones, y que deberían ser controladas y/o eliminadas. Remover una causa común usualmente significa cambiar los procesos, mientras que remover una causa asignable implica eliminar ese problema específico. Lo ideal en un proceso es que las variaciones del mismo sean debido a razones aleatorias relacionadas con la naturaleza del proceso.

A través del *SPC*, se vigila que el comportamiento de una variable de interés se encuentre dentro de unos estándares de calidad exigidos por el proveedor o por organismos de control, así pues, el *SPC* puede ser utilizado como la primera acción a realizar para lograr una meta de calidad.

## 2.2. Fases de monitoreo mediante cartas de control

El proceso de monitoreo involucra dos etapas denominadas usualmente: fase I y fase II. En la **fase I**, se recolecta o analiza una muestra de datos (usualmente históricos); estos datos deben servir para entender el proceso, establecer si hay causas asignables o algún comportamiento inusual en el mismo. De esta manera, en la fase I se debe evaluar si el proceso está en estado estable y en caso de que el proceso no esté en control se deben tomar las medidas para que lo esté, para esto se debe analizar el proceso de forma que se decida si lo mejor es eliminar datos que se han tomado durante un momento atípico, o intervenir el proceso para eliminar aquello que genera las fallas, visto de otra manera, se debe depurar la base de datos históricos o intervenir la causa asignable al comportamiento indeseable, siempre que ésta no sea aleatoria o propia de la naturaleza del proceso. Después de lo anterior, se debe estimar los parámetros del proceso y diseñar el esquema de monitorio a aplicar en **fase II** (Jensen et al., 2006; Human, Chakraborti y Smit, 2010).

En la **fase II**, se realiza un monitoreo en tiempo real (online), observando que el proceso se mantenga en control, de manera que si aparecen causas asignables éstas se puedan remover adecuadamente (Montgomery, 2013; Woodall y Montgomery, 2014). En ésta fase, se espera que el proceso funcione bajo las condiciones ideales y se procura que las mismas no cambien. Para la implementación de ésta fase, se parte de estimaciones obtenidas en la fase I por lo que se espera sean lo más cercanas al valor real del parámetro que se estimó, de tal forma que el monitoreo implementado sea el mejor posible, por lo tanto se hace muy importante que la primera fase se haya realizado de forma eficiente, dado que el comportamiento de la etapa que sigue depende de lo hecho allí. De lo anterior surgen algunas preguntas tales como: ¿En cuánto es plausible equivocarse en las estimaciones realizadas en fase I? ¿De qué forma afectan las estimaciones de fase I el monitoreo? ¿Cómo hacer que la afectación de las estimaciones sea mínima durante el monitoreo?, respuestas adecuadas a estos interrogantes permitiría llevar a cabo un mejor monitoreo, dado que esto implicaría conocer muy bien el esquema que se emplea.

## 2.3. Cartas de control

Una carta de control también conocida como gráfico de control se concibe como una herramienta ilustrada (gráfica) para representar una característica de calidad que se mide u observa. A través de ella se busca monitorear que un valor observado está dentro de los llamados límites de control (Montgomery, 2013; Woodall, 2000).

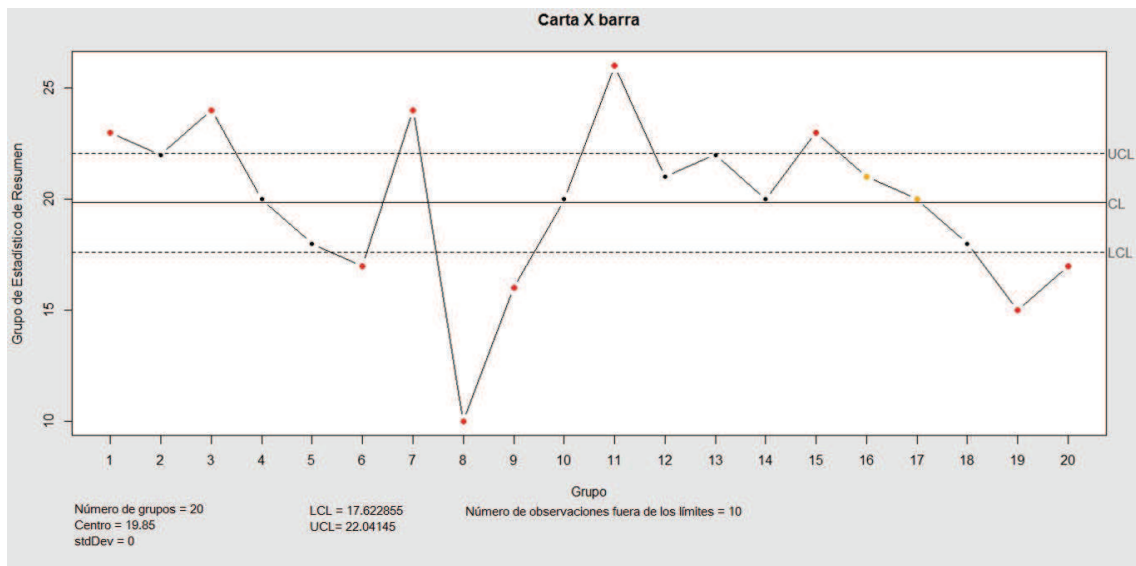


Figura 2-1.: Carta de control  $\bar{X}$ . Datos de Ryan (2011) página 151.

En una carta de control tal y como se representa en la Figura 2-1, se muestra una línea central ( $CL$ - Center Line) que representa la media de la característica a estudiar y los límites de control superior ( $UCL$ - Upper Control Line) e inferior ( $LCL$ - Lower Control Line) que limitan la región en la cual se espera caigan todas las observaciones del estadístico que se monitorea para decir que el proceso está en control. Es importante destacar que en principio, un proceso en control significa, que la información graficada permanece dentro de los límites establecidos por el  $UCL$  y  $LCL$ ; sin embargo, posteriormente se pueden analizar tendencias de los datos; por ejemplo, a un lado de la línea central para determinar que el proceso está fuera de control o pronto lo va a estar.

## 2.4. Medidas de desempeño de una carta de control

Una de las medidas más utilizadas en la literatura para medir el desempeño de una carta de control es la longitud promedio de corrida o  $ARL$ ; sin embargo, también se pueden encontrar medidas como la desviación estándar de la longitud de corrida ( $SDRL$ ), el tiempo promedio de ocurrencia de una señal ( $ATS$ ) y la longitud mediana de corrida ( $MRL$ ), las cuales ampliaremos a continuación.

### 2.4.1. ARL

Cuando el proceso está siendo monitoreado en línea, el número de puntos graficados en la carta hasta que aparezca una señal de fuera de control se le conoce por *longitud de corrida* ( $RL$ ) (Vargas, 2006).

Si la  $RL$  es considerado como una variable aleatoria, definida como el número de puntos graficados hasta tener una señal de fuera de control, el promedio de ésta (su valor esperado) se define como la  $ARL$  o longitud promedio de corrida.

Para Montgomery (2013), la  $ARL$  es el número esperado de muestras tomadas antes de que un cambio sea detectado. Ryan (2011) da una forma de obtener la  $ARL$ , enunciando que si los parámetros son conocidos, el número esperado de puntos graficados antes de que uno de ellos caiga fuera de los límites de control, puede ser obtenido como el recíproco de la probabilidad de que un único punto caiga fuera de los límites, cuando cada punto es graficado de forma individual; la razón de ésto, es que la  $RL$  es una variable aleatoria geométrica. Lo más conveniente cuando un proceso esté en control es que la  $ARL$  sea grande, de forma que la tasa de falsas alarmas sea baja, al contrario, si el proceso está fuera de control se desea una  $ARL$  pequeño, de forma que se informe lo más pronto posible que un cambio ha ocurrido, y así corregir lo más rápido las causas que han generado dicha situación. La  $ARL$  cobra importancia debido a que puede ser usado como una medida para comparar el rendimiento de dos cartas de control.

Si las observaciones graficadas en la carta de control son independientes, la longitud de corrida es una variable aleatoria geométrica. Suponga que  $X$  denota la característica de calidad monitoreada con función de densidad de probabilidad  $F_X(x; \theta)$ , debido a que los eventos  $X > UCL$  (la variable aleatoria toma un valor mayor que el límite superior de control) y  $X < LCL$  (la variable aleatoria toma un valor menor que el límite inferior de control) son excluyentes, entonces

$$P(X > UCL \text{ ó } X < LCL) = P(X > UCL) + P(X < LCL)$$

y por ende la longitud promedio de corrida es,

$$\begin{aligned} ARL = E(RL) &= \frac{1}{P(\text{un punto caiga fuera de los límites de control})} \\ &= \frac{1}{P(X > UCL) + P(X < LCL)}. \end{aligned} \tag{2-1}$$

Si  $\theta_0$  representa los parámetros del proceso en control, en general se habla de una  $ARL$  en control y se denota como  $ARL_0$  y corresponde a  $P[X > UCL \text{ ó } X < LCL | X \sim F(x; \theta_0)]$ , de igual manera, se habla de una  $ARL_1$  el cual es  $P[X > UCL \text{ ó } X < LCL | X \sim F(x; \theta_1)]$  cuando el proceso se ha salido de control (los parámetros de la distribución del proceso se

han modificado de  $\theta_0$  a  $\theta_1$ ).

Lo ideal en una carta de control es que el valor de la *ARL* sea máximo cuando el proceso no se ha desviado, es decir está en control, a este tipo de cartas se les conoce como cartas de *ARL*-insesgado. En caso de que esto no suceda, dichas cartas de control se suelen llamar de *ARL*-sesgado (Santiago y Smith, 2013).

Para el monitoreo de un proceso, se parte en muchas ocasiones de que la variable o las variables a monitorear se distribuyen normal; sin embargo, en diversas situaciones este supuesto no se cumple. Monitorear un proceso suponiendo normalidad de forma inadecuada puede afectar la eficacia del monitoreo a la hora de detectar variaciones del mismo, puede hacer que se consideren límites de control más angostos o extensos de lo que se debería, así como cambios importantes en su *ARL*, u obligar a aumentar la muestra para obtener los resultados deseados, cosa que en muchas ocasiones es imposible o a veces poco práctico. Como se dijo antes, asumir normalidad de forma equivocada en *SPC* puede afectar el proceso de monitoreo, entre otras cosas porque se espera que la tasa de falsas alarmas aumente, lo cual obligaría a detener el proceso de forma constante o peor que eso, no detenerlo cuando en realidad está fallando (Santiago y Smith, 2013; Zhang et al., 2013).

### 2.4.2. SDRL

Cuando se desea tener un conocimiento más completa de la distribución de la *RL* se suele acompañar los resultados de la *ARL* con los de la desviación estándar de la longitud de corrida o *SDRL*, esta medida suele ser muy informativa cuando se estiman parámetros y especialmente, cuando las distribuciones marginales y condicionales de la *RL* son sesgadas a derecha (Jensen et al., 2006).

De acuerdo a lo observado por Jensen et al. (2006), hay mayor impacto en la *SDRL* que en la *ARL* cuando se estiman parámetros; debido a lo anterior, se requiere un mayor tamaño de muestra para que la *SDRL* cuando se estiman parámetros tome un valor cercano al que alcanza cuando estos son conocidos. De acuerdo a Quesenberry (1993), Zhang et al. (2006) y Guo, Wang y Xie (2014) la *SDRL* puede escribirse:

$$SDRL = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{ARL(ARL - 1)} \quad (2-2)$$

Según Quesenberry (1993), mediante la *ARL* y *SDRL*, se puede estudiar el efecto del tamaño de la muestra en el desempeño de la carta, destacando que la *SDRL* es la más afectada entre estas por los cambios en la distribución.

Para Psarakis et al. (2014), la *ARL* y *SDRL* son las medidas más usadas para estudiar el desempeño de una carta control; sin embargo, destacan otras medidas; por ejemplo, se puede

medir el tiempo que transcurre hasta que se produce una señal de fuera de control, dicho tiempo se conoce como **ATS** y hace referencia al tiempo promedio que ha pasado mientras se toman observaciones consecutivas del estadístico hasta el primero de los puntos señalando una condición de fuera de control (Ryan, 2011; Montgomery, 2013; Zhonghua, Changliang, Zhen y Zhaojun, 2014). De forma alternativa, se puede estar interesado en la mediana de la longitud de corrida o la longitud mediana de corrida **MRL**. Ésta medida corresponde a la mediana de puntos graficados en la carta de control hasta que se detecta una señal de fuera de control (Chakraborti, 2007; Chin y Khoo, 2012).

Es de destacar que para el estudio del desempeño de la carta estudiada en esta tesis se usará la *ARL* y *SDRL*.

## 3. Monitoreo del tiempo entre eventos

### 3.1. Estado del arte en el monitoreo del tiempo entre eventos

Uno de los problemas que enfrenta el control estadístico de procesos es el monitoreo de la proporción de no conformes o de defectuosos, o la suma de artículos conformes hasta obtener el primero defectuoso, para lo cual se suele usar la carta  $c$  o  $p$ ; sin embargo, estas cartas no funcionan de forma adecuada cuando la tasa de ocurrencia de estos eventos es muy baja, por lo que se hace necesario abordar el problema de otra manera. Una solución es no monitorear las unidades de no conformes si no el tiempo que transcurre entre dos unidades de este tipo (Xie et al., 2002; Montgomery, 2013).

Ahora bien, es común el uso de las distribuciones: geométrica, binomial negativa, exponencial, Weibull o gamma para modelar aspectos relacionados con eventos "raros" o poco frecuentes, entendiéndose por estos, a los eventos cuya tasa de ocurrencia es baja pero que resultan ser críticos. Este tipo de eventos se puede asociar con los denominados procesos de alta calidad, los cuales corresponden a procesos en los que la probabilidad de ocurrencia del evento de interés es baja (Jensen et al., 2006), tales como los procesos de manufactura (Xie y Goh, 1992; Chan, Xie y Goh, 2000), enfermedades o eventos adversos (Santiago y Smith, 2013). En la literatura se encuentran cartas de control basadas en estos modelos de distribución, tal como el propuesto por Xie, Goh y Kuralmani (2000), quienes expresan entre otras cosas que las cartas sujetas a distribuciones como la geométrica, se pueden usar en procesos de producción en los que la aparición de inconformidades es baja. Los autores plantean, coincidiendo con el resto de la literatura, que cuando las distribuciones que modelan los procesos son sesgadas y por tanto la presunción de normalidad no es válida, se deben usar límites probabilísticos en lugar de los tradicionales límites  $3\sigma$ . En cartas como aquellas que siguen una distribución geométrica, Xie et al. (2000) logran mostrar que tienen una característica muy poca atractiva: cuando el proceso se deteriora, el tiempo asociado a la  $ARL$  aumenta cuando la desviación del parámetro es pequeña. La anterior característica es indeseable, dado que se requiere que el proceso de monitoreo informe lo más rápido posible que el proceso no está funcionando adecuadamente para tomar medidas correctivas, lo cual no ocurre con ésta carta. Como medida para mejorar esta situación, Xie et al. (2000) plantean ajustes sobre los límites de control, tal y como se mostrará posteriormente.

Yang et al. (2002) y Tang y Cheong (2004) se enfocan en la formulación de cartas de control para procesos que siguen una distribución geométrica, extendiendo lo hecho por Xie et al. (2000), al estudiar el efecto de la estimación del parámetro de la distribución sobre el desempeño de la carta. Éstos trabajos se diferencian en los estimadores usados y la manera como estiman. Mientras que Yang et al. (2002) considera una muestra histórica de tamaño  $n$  (grande o pequeña) y estima el parámetro  $p_0$  de la distribución como

$$\widehat{p}_0 = \frac{N}{n}, \quad (3-1)$$

donde  $N$  es el número de elementos no conformes hallados en la muestra inspeccionada de tamaño  $n$ , a partir del cual se calculan los límites de control. Tang y Cheong (2004) usan el esquema de muestreo secuencial, el cual consiste en acumular secuencialmente la información disponible para monitorear el proceso a medida que nuevas observaciones son obtenidas, con lo que se tiene una estimación inicial del parámetro mediante la expresión

$$\widehat{p}_0^* = \frac{N - 1}{G_N - 1}, \quad (3-2)$$

donde  $N$  es el número de no conformes de la muestra inspeccionada y  $G_N$  es definida como

$$G_N = \sum_{i=1}^N X_i. \quad (3-3)$$

Las  $X_i$  son variables aleatorias geométricas idénticamente distribuidas con parámetro  $p_0$ .

Nótese que los estimadores  $\widehat{p}_0$  y  $\widehat{p}_0^*$  de Yang et al. (2002) y Tang y Cheong (2004) respectivamente, son independientes del parámetro  $p_0$  de la distribución. Aún cuando con ambas propuestas se estima el parámetro de la distribución a partir de una muestra inicial, el estimador dado en (3-2) se actualiza a medida que aparece un nuevo dato, por lo que se tienen nuevos límites de control a medida que la muestra aumenta. Lo anterior permite dar tiempo si es necesario a que aparezca nueva información para mejorar la estimación del parámetro pero sin dejar de efectuar el monitoreo.

Tang y Cheong (2004) encuentran que cuando la proporción de unidades no conformes en una muestra de tamaño  $n$  es pequeño, el estimador dado en (3-1) sobreestima a  $p_0$ , lo cual hace más difícil detectar deterioros del proceso que se está monitoreando.

De otra parte, es sabido que si la ocurrencia de defectos en un proceso se puede modelar como un proceso Poisson, el tiempo entre dichos eventos se puede modelar como una distribución exponencial (Zhang, Xie y Goh, 2005), por lo cual se puede recurrir a este modelo estadístico para monitorear el tiempo entre eventos poco frecuentes o raros.



Para el monitoreo de la aparición de unidades defectuosas en un proceso, Nelson (1994) propone que a partir de la aparición de una unidad no conforme se cuente el número de unidades producidas hasta que aparezca un nuevo ítem defectuoso y pese a que en realidad los datos no se comportan de forma exponencial dada la naturaleza discreta de los mismos, plantea transformarlos presumiendo que se distribuyen de dicha manera, a partir del uso de una transformación de potencia  $X_i^{1/\beta}$  en la cual los datos transformados siguen una distribución Weibull con parámetro de forma  $\beta = 3.6$ . Es decir, si  $X_i$  representa el número de unidades producidas entre dos unidades no conformes, este número se transforma en

$$Y_i = X_i^{1/3.6}. \quad (3-4)$$

La intención detrás de la propuesta anterior es que la distribución de los datos transformados tenga la apariencia de una distribución normal, disminuyendo el sesgo de la distribución original, de manera que sea aproximadamente válido el uso de límites  $3\sigma$  en la construcción de una carta control. Sin embargo, una crítica a este procedimiento es que lo que se concluye en los datos transformados no necesariamente da un indicio claro de lo que está ocurriendo en los datos sin transformar y por lo tanto, la interpretación de la información obtenida se hace un poco compleja (Santiago y Smith, 2013).

Xie et al. (2002) discuten sobre las cartas que pueden ser usadas para monitorear el número de defectuosos en un proceso, destacando dentro de éstas a las cartas  $c$  y  $u$ . Los autores expresan que estas cartas tienen un buen desempeño cuando la tasa de defectuosos no es muy baja, pero que en caso contrario resulta mejor monitorear el tiempo entre eventos (fallas). Debido a lo anterior hacen un recorrido sobre distintas propuestas de distribuciones que se pueden emplear para modelar el tiempo entre eventos; dentro de éstas, presentan a la distribución Weibull como la más flexible, dado que se puede emplear para detectar incrementos o reducciones de la tasa de fallas; la distribución Erlang es presentada por los autores como la distribución para construir la carta de control para monitorear el tiempo entre un número determinado de fallas del proceso. Finalmente, resaltan las ventajas de la carta  $t$  respecto a una carta  $c$  o  $u$  para detectar mejoras o deterioros del proceso y la obtención de un límite inferior no nulo, situación que generalmente no ocurre con estas dos cartas. De acuerdo a Santiago y Smith (2013), Xie et al. (2002) fueron los primeros en usar el término carta  $t$  en el monitoreo de la confiabilidad. Para plantear la carta  $t$ , Xie et al. (2002) parten de la función de distribución acumulada parametrizada de la siguiente forma:

$$F(t; \lambda_0) = 1 - e^{-\lambda_0 t}, \quad t \geq 0, \quad \lambda_0 > 0. \quad (3-5)$$

Se observa de la ecuación (3-5) que la densidad de la distribución exponencial, bajo esta parametrización es

$$f(t, \lambda_0) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t}, \quad \lambda_0 > 0, \quad (3-6)$$

donde  $\lambda_0$  es la tasa de falla.

Tal y como se evidenció para distribuciones geométricas, dado el sesgo de la distribución exponencial, no se suele usar límites  $3\sigma$ , sino más bien usar límites probabilísticos. Ahora bien, si se asume que el parámetro  $\lambda_0$  de la distribución es conocido o estimado de forma apropiada y se define una tasa de falsa alarma aceptable  $\alpha$  (la probabilidad establecida para el evento: caer fuera de los límites de control cuando el proceso está en control); entonces, los límites de control inferior ( $LCL$ ) y superior ( $UCL$ ) y la línea central ( $CL$ ) se definen como los cuantiles de la distribución exponencial con probabilidades  $\frac{\alpha}{2}$ ,  $1 - \frac{\alpha}{2}$  y 0.5 respectivamente. Al hacer que la función de distribución acumulada dada en (3-5) sea igual a estos valores, se hallan los límites de control y la línea central. Procediendo entonces, el límite inferior de control o  $LCL$  se obtiene

$$\begin{aligned} F(LCL; \lambda_0) &= \frac{\alpha}{2} \\ 1 - e^{-\lambda_0 LCL} &= \frac{\alpha}{2} \\ e^{-\lambda_0 LCL} &= 1 - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Usando logaritmo natural y despejando  $LCL$

$$LCL = -\frac{1}{\lambda_0} \log\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad (3-7)$$

De forma semejante a lo anterior, se puede obtener el límite superior de control o  $UCL$ :

$$\begin{aligned} F(UCL; \lambda_0) &= 1 - \frac{\alpha}{2} \\ 1 - e^{-\lambda_0 UCL} &= 1 - \frac{\alpha}{2} \\ e^{-\lambda_0 UCL} &= \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Luego

$$UCL = -\frac{1}{\lambda_0} \log\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (3-8)$$

Finalmente, la línea central  $CL$  se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} F(CL; \lambda_0) &= \frac{1}{2} \\ 1 - e^{-\lambda_0 CL} &= \frac{1}{2} \\ e^{-\lambda_0 CL} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

De donde

$$CL = \frac{\log 2}{\lambda_0}. \quad (3-9)$$

Si la tasa de falsa alarma es  $\alpha = 0.0027$ , las ecuaciones (3-7), (3-8) y (3-9) se reducen a

$$LCL = -\frac{\log(0.99865)}{\lambda_0} \quad (3-10)$$

$$UCL = -\frac{\log(0.00135)}{\lambda_0} \quad (3-11)$$

$$CL = \frac{\log 2}{\lambda_0}. \quad (3-12)$$

Como se evidencia en los límites de control inferior y superior obtenidos, estos dependen del parámetro  $\lambda_0$  de la distribución. De acuerdo a Xie et al. (2002) dicho parámetro puede ser estimado (pero omiten discutir los efectos de tal estimación). Los autores realizaron un estudio de simulación, considerando desviaciones del proceso que ha de ser monitoreado, para comparar la carta  $t$  con la carta  $c$ , dejando en evidencia mediante los resultados obtenidos, que la carta  $t$  es capaz de detectar el cambio que se presenta en el proceso, al contrario de la carta  $c$ .

Xie et al. (2002) también extienden el procedimiento anterior a una distribución Weibull y Earlang, con funciones de distribución acumulada, respectivamente,

$$F(t; \beta, \theta) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t}{\theta} \right)^\beta \right], t > 0, \beta > 0, \theta > 0,$$

y

$$F(t_r; r, \lambda_0) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda_0 t_r)^k}{k!} \exp(-\lambda_0 t_r), r_0 > 0, \lambda_0 > 0, \quad (3-13)$$

donde  $\beta$  y  $\theta$  respectivamente son los parámetros de forma y escala de la distribución Weibull,  $r$  es el número de fallas (o defectos) observadas,  $t_r$  es el tiempo transcurrido hasta observar  $r$  fallas y  $\lambda$  es la tasa de ocurrencia de unidades defectuosas en el proceso. Construidas las tres cartas, definen la  $ARL$  como medida para evaluar su desempeño, y a partir de situaciones simuladas, concluyen que, la carta proveniente de la distribución Earlang cuenta con lo que llaman una  $ARL$  insesgado al ser este grande cuando el proceso está en control y más pequeño cuando no lo está.

Borrór, Keats y Montgomery (2003) proponen una carta de control para sumas acumuladas (CUSUM), con el objetivo de detectar el incremento en la tasa de unidades defectuosas generadas en un proceso de producción. Los mismos autores plantean que cuando se monitorea el

número de defectuosos en un proceso, se puede partir del conteo de defectuosos, el conteo de artículos buenos entre dos defectuosos o el tiempo que transcurre hasta observar un artículo defectuoso. Debido a que la aparición de unidades defectuosas no siempre cumple con una distribución Poisson, el tiempo entre defectuosos o el número de unidades buenas entre dos defectuosas no se distribuye exponencial, si no que lo puede hacer conforme a una distribución Weibull o Lognormal (Borrór et al., 2003). De acuerdo a lo anterior, Borrór et al. (2003) formulan cartas de control CUSUM asumiendo que el número de unidades buenas que se producen entre dos unidades defectuosas consecutivas se distribuyen Weibull o Lognormal. El desempeño de las cartas formuladas es evaluado a través de su *ARL*; del análisis de éste evidencian que cuando la carta formulada obedece una distribución lognormal, ésta detecta de forma eficiente que se han presentado cambios grandes o pequeños en el proceso, mientras que cuando se formula bajo la distribución Weibull, la misma muestra menos eficiencia para informar que un cambio pequeño ha ocurrido.

Siguiendo el recorrido por las cartas de control para tiempo entre eventos, Zhang et al. (2005), hacen un estudio de la carta exponencial para la fase II del proceso de control, con la premisa de que el sistema se encuentra en estado estable. El estudio muestra la formulación de tres cartas de control para monitorear el tiempo entre eventos: una carta de control desde el punto de vista estadístico usando límites probabilísticos, otra desde el punto de vista económico que busca disminuir los costos asociados a un monitoreo inadecuado que lleva a detener en repetidas ocasiones el proceso de producción de una compañía o permite que se produzcan muchas unidades defectuosas sin informar de manera oportuna y una tercera teniendo en cuenta las dos visiones anteriores. La propuesta formulada es hecha buscando incluir en el monitoreo de un proceso, a los efectos económicos que puede tener sobre la producción, la tasa de falsa alarma o detener el proceso cuando ha ocurrido una falsa alarma. El desempeño de las tres cartas es comparado a partir de la *ATS* de las mismas. El estudio concluye que el costo de operación debido a falsas alarmas es más pequeño en el diseño estadístico que en el económico, pero que si el proceso está fuera de control, el enfoque estadístico resulta ser más costoso que la propuesta realizado con un enfoque económico.

Zhang et al. (2006) presentan un estudio de la carta  $t$  en la fase I y II, es decir, considerando que el parámetro de la distribución se desconoce o no. Los resultados presentados muestran una mejora de la carta exponencial convencional, a través del uso de unos factores en los límites de control, los cuales se discutirán más adelante. La carta presentada por los autores tiene la ventaja que es de *ARL*-insesgado, es decir, la *ARL* de la carta es máximo cuando el proceso está en control, a diferencia de lo que sucede con la carta exponencial tradicional. Además, hacen uso de muestreo secuencial tal y como lo hicieron Tang y Cheong (2004); el mismo, consiste en estimar los límites de control en fase I, a partir de la muestra con que se cuenta en ese instante y actualizarlos a medida que aparece nueva información, esto permite que se de inicio al monitoreo sin tener que dar espera hasta obtener el tamaño de muestra

a partir del cual los resultados de los límites de control sean confiables. Zhang et al. (2006), destacan también que la carta  $t$  se puede emplear para el monitoreo de la tasa de accidentes de trabajo en un sistema de transporte o la tasa de ocurrencia de malformaciones congénitas.

Cheng y Chen (2010) proponen una carta de control para la cantidad de tiempo acumulada entre eventos, a este tipo de cartas se le conoce como CQC (Cumulative Quantity Control). La carta es diseñada incorporando dos reglas de corrida, consistentes en informar cuando puntos sucesivos se encuentran por arriba o por debajo de la línea central de la carta. El desempeño de la carta elaborada es evaluado a través de su  $ARL$  y comparado con el de una carta CQC tradicional. Como resultados encuentran que dicha carta disminuye el sesgo de la  $ARL$  de la carta  $t$  según datos que provienen de una distribución exponencial, que la carta detecta de forma adecuada cambios en el proceso, especialmente cuando hay un aumento en la media, pero que tiene dificultades para informar cuándo el proceso se deteriora, es decir se reduce su media, pues a menor tiempo entre eventos, más frecuentes son los eventos adversos.

Siguiendo la idea de límites probabilísticos de Xie et al. (2002), Santiago y Smith (2013) propusieron el uso de la carta  $t$  para monitorear el tiempo entre eventos que ocurren regularmente, para lo cual la distribución exponencial es una distribución común en la modelación de datos altamente sesgados, como por ejemplo, en el monitoreo de accidentes de trabajo y el tiempo de ocurrencia de eventos adversos como los sismos. Santiago y Smith (2013) definen los límites de la carta  $t$  a partir de la parametrización de la distribución exponencial con función de densidad de probabilidad

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0, \quad (3-14)$$

donde  $x$ , es el tiempo entre eventos. En la expresión anterior,  $\theta > 0$  es un parámetro de escala, el cual corresponde a la media y a la desviación estándar de la distribución. En este caso, es conveniente utilizar límites probabilísticos en lugar de los límites convencionales  $3\sigma$ , dado el sesgo de la distribución exponencial (Santiago y Smith, 2013). Los límites de control y la línea central para una tasa de falsas alarmas  $\alpha = 0.0027$ , se pueden escribir como (las cuales son variantes de (3-7), (3-8) y (3-9) donde se parametriza con la tasa de fallas y no con la media):

$$\begin{aligned} LCL &= 0.001351 \cdot \theta_0 \\ LC &= \log 2 \cdot \theta_0 \\ UCL &= 6.60773 \cdot \theta_0. \end{aligned} \quad (3-15)$$

En donde se ha asumido que  $\theta_0$  es una cantidad conocida correspondiente al parámetro de la distribución en control.

Santiago y Smith (2013) muestran que al ser la carta  $t$  de  $ARL$ -sesgado, la disminución de la media del proceso en pequeñas proporciones genera una  $ARL$  mayor que el esperado y que

un leve aumento hace que éste se disminuya. Teniendo presente esto, formulan una carta de control fijando límites de advertencia a partir de reglas de corrida, esto hace más sensible su carta a pequeñas desviaciones del parámetro original y permite anticipar posibles tendencias en el proceso. Con esta propuesta logran mejorar la curva  $ARL$  de la carta de control ya que se vuelve más simétrica, pero, disminuyen la  $ARL$  en control, lo que aumenta la tasa de falsa alarma. Vale destacar que la curva de  $ARL$  lograda obtiene su máximo cuando el parámetro monitoreado está en control a diferencia de la curva original. La carta construida es comparada con la propuesta en Nelson (1994) y por Zhang et al. (2006), usando como medida de desempeño la  $ARL$ . Como resultado de la comparación, concluyen que el rendimiento de éstas cartas es menos eficiente a la hora de detectar pequeños cambios en el parámetro del proceso, especialmente cuando éste se está deteriorando (la media disminuye). Además, dejan en evidencia que la curva de  $ARL$  de su propuesta es menos sesgada que aquellas con las que comparan.

Aslam, Azam y Jun (2015) proponen una carta EWMA para monitorear un proceso que siga una distribución exponencial y confrontan sus resultados con los obtenidos por Santiago y Smith (2013). Para construir la carta asumen que la variable aleatoria  $T$  sigue una distribución exponencial y transforman cada dato o subgrupo recolectado de acuerdo a Nelson (1994) y la transformación propuesta en (3-4). A partir de ésta transformación encuentran el estadístico  $M_i$  de su carta EWMA, el cual se puede escribir como

$$M_i = \xi T_i^* + (1 - \xi)M_{i-1}, \quad (3-16)$$

donde  $\xi \in (0, 1)$  es la constante de suavizamiento,  $T_i^*$  la transformación del tiempo entre eventos  $i$ . Aslam et al. (2015) definen que el proceso está en control, si los  $LCL \leq M_i \leq UCL$ , en donde dichos límites de control son construidos de forma similar a como lo hace Santiago y Smith (2013). Aslam et al. (2015) logran mostrar que la  $ARL$  fuera de control de la carta EWMA propuesta, es más pequeño que el obtenido en la carta de Santiago y Smith (2013), mostrando que en general su carta de control puede detectar de forma más rápida pequeños cambios del parámetro del proceso, sin importar la dirección de éste. Además, muestran que la  $ARL$  fuera de control se puede reducir conforme se disminuya el parámetro de suavizamiento  $\xi$  dado en (3-16).

## 3.2. Efectos de la Estimación de Parámetros en las cartas de control

Al implementar una carta de control para un proceso se suele suponer que los parámetros de éste son conocidos (Cheng y Chen, 2010; Zhang et al., 2005, 2006; Santiago y Smith, 2013) y en caso contrario estos son estimados; sin embargo, no se aborda en muchas ocasiones el problema del efecto adverso de la estimación, el cual puede ser significativo (Jensen et al.,

2006; Psarakis et al., 2014).

En relación a los efectos de la estimación de los parámetros sobre el desempeño de una carta de control, Jensen et al. (2006) muestran que cuando los parámetros usados son los estimados en lugar de los reales, el comportamiento de la carta puede diferir de aquella que se diseña con los parámetros conocidos.

Ahora bien, estimar los parámetros como mencionan los autores, no sólo puede condicionar la efectividad de la carta para informar cuándo el proceso se sale de control o detectar cuándo ha habido un cambio en el mismo, esto también puede afectar su *ARL* en control, aumentando la tasa de falsa alarma. Se ha logrado demostrar que la *ARL* fuera de control mejora si los parámetros son conocidos para cartas como la  $\bar{X}$  (Jensen et al., 2006).

Al tratar el problema de la estimación de parámetros y sus efectos sobre el desempeño de una carta de control, Zhang et al. (2005) proponen el diseño de una carta exponencial, partiendo de que el parámetro de la distribución puede ser estimado basándose en el método de máxima verosimilitud. Sin embargo y pese a que no hacen un análisis exhaustivo del efecto de la estimación de los parámetros, sí lo consideran importante a la hora de implementar la carta propuesta. Bajo esta consideración y como se mencionó en la sección anterior, Zhang et al. (2006) proponen una carta exponencial en la cual se realiza muestreo secuencial, dando la posibilidad de que cuando el parámetro a estudiar es desconocido se pueda estimar a partir de la aparición de nuevos datos, evitando de esta manera la espera hasta la conformación de una muestra representativa o el estudio de datos históricos.

Por su parte Human et al. (2010), hacen un estudio en Fase I de las cartas tipo Shewhart  $S^2$ ,  $S$  y  $R$ ; es decir, en dichas cartas se desconoce la media y la varianza del proceso. Se destaca que la construcción de éstas cartas presentan un problema en su origen, puesto que no se considera la dependencia entre la ocurrencia de una señal y las  $m$  muestras de tamaño  $n$  consideradas, por lo que proponen la construcción de los límites de control usando la probabilidad de falsa alarma (*FAP*, por sus siglas en inglés), definida como la probabilidad de que una falsa alarma sea cuando más igual a un valor nominal, siendo ésta la medida de evaluación usada por ellos para estudiar el comportamiento del funcionamiento de la carta.

En relación con los efectos de la estimación de parámetro(s), vale decir que en la literatura se pueden encontrar una gran variedad de trabajos en los cuales se aborda este problema para cartas de control particulares tal y como lo desarrollan Chakraborti (2007), Ozsan et al. (2010), Zhang et al. (2013), Yang et al. (2002), Khoo et al. (2013), Psarakis et al. (2014) y Saghir et al. (2015) entre otros. En este sentido, Ozsan et al. (2010), investigaron la carta de control EWMA cuando es usada para controlar el tiempo entre eventos, cuando la tasa de defectos es baja y los parámetros son estimados. La conclusión principal de este estudio es

que la estimación de parámetros afecta la  $ARL$ , observando que para pequeños tamaños de muestra, el rendimiento de la carta en el caso de los parámetros estimados es peor que la del caso parámetros conocidos, cuando se busca detectar un cambio pequeño en el proceso. Encuentran que si se sobreestima el parámetro, la  $ARL$  fuera de control parece ser ligeramente mejor que el obtenido cuando los parámetros son conocidos, mientras que la  $ARL$  en control es peor. Es decir que se pueden detectar más rápido los cambios en el proceso, pero pueden aparecer más señales de falsas alarmas. Encuentran también, que cuando hay subestimación de los parámetros del proceso, se observa una mejor  $ARL$  en control, en deterioro de la  $ARL$  en estado de fuera de control.

Psarakis et al. (2014) en un trabajo similar al realizado por Jensen et al. (2006), señalan que cuando los parámetros son estimados también pueden surgir inconvenientes al actualizar los límites de control, ya que esto puede generar una variabilidad adicional. Psarakis et al. (2014) destacan que la estimación de parámetros influencia de forma importante la  $ARL$  de una carta de control tipo Shewhart, siendo también el incremento en los datos usados en la fase I la solución para éste problema. Estos autores discuten los efectos de la estimación de la varianza de un proceso en las propiedades de una carta de control  $S^2$  investigada por Castagliola, Celano y Chen (2009). De ésta destacan que se logró mostrar que la estimación de parámetros influye de forma considerable en el comportamiento de la  $ARL$  de la carta, pero que dicho efecto puede ser eliminado si se usan más de 200 muestras en fase I para la estimación de los límites de control, sin embargo, no siempre se pueden obtener muestras de tales tamaños.

En algunos casos, cuando se construyen cartas de control tipo Shewhart, se asume que el estadístico monitoreado tiene aproximadamente una distribución normal y los parámetros de la distribución de la característica de calidad se estiman a partir de una muestra de fase I, para luego establecer los límites de las cartas. Hasta aquí hay dos problemas, presumir una aproximación normal y estimar parámetros, ambas situaciones afectan el desempeño de la carta de control en la fase II, como ya se ha discutido antes. Una forma con la que se intenta mejorar el impacto de la estimación de parámetros en estas cartas es el uso de correcciones, por ejemplo, en la carta  $\bar{X}$  se hace uso del factor de corrección  $1/c_4$ , el cual busca que la estimación de los límites no sea sesgada, de forma que se conserve la probabilidad de informar cuando un punto esté fuera de control, tal y como lo discuten Albers y Kallenberg (2004), para quienes esto no resulta ser suficiente, dado que el comportamiento de estas cartas en ocasiones es diferente al que se espera, por lo que proponen hallar factores de corrección tal que sea alcanzada una tasa de falsa alarma nominal. Lo anterior busca además, resolver el problema que se genera al construir cartas tipo Shewhart usando límites  $3\sigma$  en lugar de límites probabilísticos.



## 4. Corrección de límites de control

La corrección de los límites de control se presenta como una estrategia para eliminar el sesgo que se produce en la estimación de los parámetros o para producir un efecto deseado sobre el desempeño de una carta de control. El uso de los límites  $3\sigma$  depende del propósito que se tenga en el monitoreo; estos son una buena opción cuando se desea obtener información respecto al producto que se monitorea, obtener productos lo más estables posibles o buscar las causas de inestabilidad, mientras que los límites modificados o ajustados pueden ser configurados de acuerdo a la necesidad, por ejemplo, para producir límites más amplios o estrechos según las expectativas de quien los construye (Hill, 1956). Partiendo de lo anterior, Hill (1956), presenta distintos factores de corrección de acuerdo al tamaño de la muestra, así como formas de obtener los límites corregidos para una carta de control  $\bar{X}$ .

Otro antecedente con relación a la modificación de la construcción de los límites de control o la incorporación de factores de corrección o de ajuste para las cartas de control se puede encontrar en Xie et al. (2000). En éste artículo los autores dicen que cuando la variable o estadístico monitoreado tiene una distribución geométrica, la *ARL* o número promedio de observaciones que ocurren antes de que la carta de control informe que una observación del estadístico monitoreado cae fuera de los límites de control, puede aumentar de manera inconveniente, es decir se puede tener una *ARL* más grande cuando el proceso se ha salido de control, que cuando el proceso está en control, lo cual no permitiría intervenir de forma oportuna como se desea, ya sea para corregir la anomalía que se presenta o establecer que simplemente es una falsa alarma. Lo anterior se da debido a que la *ARL* de estas cartas no es máxima cuando el proceso se encuentra en control, es decir, son cartas de *ARL* sesgado, por lo cual se plantea un procedimiento para construir los límites de control de forma que esta circunstancia sea removida como característica de la *ARL* de la carta. Según los autores, el procedimiento consiste en introducir factores de ajustes o de corrección para los límites de control. En este sentido, Xie et al. (2000) partiendo de la función de distribución  $F_G(x; p) = 1 - (1 - p)^x$ , donde  $G \sim \text{geom}(p)$ ,  $x$  es el número de unidades inspeccionadas hasta la primera defectuosa, con  $x = 1, 2, \dots$  y  $p$  corresponde a la proporción de no conformes o el parámetro de la distribución, formulan los límites de control inferior y superior de la carta

como límites probabilísticos con probabilidad de falsa alarma igual a  $\alpha^1$ .

$$LCL = \frac{\log(1 - \alpha/2)}{\log(1 - p_0)} + 1 \quad (4-1)$$

$$UCL = \frac{\log(\alpha/2)}{\log(1 - p_0)}. \quad (4-2)$$

La probabilidad del estadístico de caer dentro de los límites de control corresponde a

$$\begin{aligned} \beta(p) &= P(LCL \leq X \leq UCL | X \sim \text{geom}(p)) \\ &= F(UCL; p) - F(LCL - 1; p) \\ &= (1 - p)^{LCL-1} - (1 - p)^{UCL}. \end{aligned}$$

Puesto que la longitud de corrida o  $RL$  corresponde al número de observaciones graficadas en la carta de control hasta obtener la primera fuera de límites, entonces  $RL \sim \text{geom}(1 - \beta(p))$  y por tanto su media, la  $ARL$ , corresponde a:

$$ARL(p) = \frac{1}{1 - \beta(p)} = \frac{1}{1 - [(1 - p)^{LCL-1} - (1 - p)^{UCL}]},$$

es decir,

$$ARL(p) = \frac{1}{1 - (1 - p)^{LCL-1} + (1 - p)^{UCL}}, \quad (4-3)$$

la cual por cierto presenta en Xie et al. (2000) un error al tener un signo menos en lugar de un signo más en el tercer término del denominador (ecuación (4) del artículo referido). Para llegar a las correcciones propuestas sobre los límites, se deriva la  $ARL$  con respecto a  $p$  y ésta derivada evaluada en  $p = p_0$ , se iguala a cero, es decir como si  $p_0$  fuese un punto crítico de la  $ARL$  buscando el máximo de esta expresión. El factor de ajuste obtenido por Xie et al. (2000) es una función que no depende del tamaño de la muestra -aspecto muy deseable- y varía únicamente con la tasa de falsa alarma.

Zhang et al. (2006) proponen un ajuste a los límites de control de la carta  $t$  tradicional, con la idea de mejorar la propiedad indeseable que esta comparte con la carta geométrica, consistente en que la carta  $t$  tradicional con límites probabilísticos tarda más en señalar que el proceso se ha salido de control, que en dar señales de falsa alarma cuando el proceso opera con el parámetro adecuado, dicha propuesta se fundamenta en lo hecho por Xie et al. (2000).

---

<sup>1</sup>El límite  $LCL$  formulado en el Xie et al. (2000) aparece como  $LCL = \frac{\log(1-\alpha/2)}{\log(1-p_0)}$ , es decir, no tiene el segundo término de la derecha, lo cual es un error dada la distribución y la definición de  $LCL$  que es tal que  $P(X < LCL) = P(X \leq LCL - 1) = \alpha/2$ .

Zhang et al. (2006) propone ajustar los límites de control (3-7) y (3-8) para la carta  $t$  cuando el parámetro  $\lambda_0$  es conocido de forma que la carta sea de  $ARL$  insesgado, para esto definen los límites de control como

$$\begin{aligned} LCL_{\text{Zhang}} &= \frac{-\log(1 - \alpha^*/2)}{\lambda_0} \gamma_{\alpha^*} \\ UCL_{\text{Zhang}} &= \frac{-\log(\alpha^*/2)}{\lambda_0} \gamma_{\alpha^*}, \end{aligned} \quad (4-4)$$

donde,

$$\gamma_{\alpha^*} = \frac{\log \left[ \frac{\log(1 - \alpha^*/2)}{\log(\alpha^*/2)} \right]}{\log \left[ \frac{(\alpha^*/2)}{1 - \alpha^*/2} \right]} \quad (4-5)$$

corresponde a un factor de corrección usado por Tang y Cheong (2004) para ajustar los límites de una carta geométrica. En (4-5)  $\alpha^*$  corresponde a la solución de la ecuación  $\alpha = P(X < LCL_{\text{Zhang}}) + P(X > UCL_{\text{Zhang}})$ , por tanto  $\alpha^*$  es la solución de

$$\alpha = 1 - (1 - \alpha^*/2)^{\gamma_{\alpha^*}} + (\alpha^*/2)^{\gamma_{\alpha^*}}. \quad (4-6)$$

Zhang et al. (2006) presentan valores de  $\alpha^*$  y  $\gamma_{\alpha^*}$ , exhibidos en la Tabla 4-1, a partir de la cual se pueden construir los límites de control de acuerdo a las ecuaciones (4-4). Según los autores, dichos límites producen que la curva  $ARL$  sea máxima cuando  $\lambda = \lambda_0$ , es decir, la carta con límites corregidos es de  $ARL$  insesgado.

Tabla 4-1.: Algunos valores de  $\alpha^*$  y  $\gamma_{\alpha^*}$  dados en Zhang et al. (2006).

$\alpha$	$\alpha^*$	$\gamma_{\alpha^*}$	$\alpha$	$\alpha^*$	$\gamma_{\alpha^*}$
0.0005	0.00072	1.2612	0.006	0.00805	1.3102
0.0001	0.00142	1.2733	0.007	0.00934	1.3138
0.0027	0.00372	1.2927	0.009	0.01190	1.3198

Un aporte adicional dado por Zhang et al. (2006) es el estudio del desempeño de la carta  $t$  y su construcción de modo que resulte de  $ARL$  insesgado cuando su parámetro  $\lambda_0$  es desconocido, proponiendo un esquema de muestreo secuencial en lugar del uso de muestras grandes. El esquema consiste en estimar el parámetro del proceso a partir de una muestra inicial disponible para hacer el monitoreo y luego, a medida que aparece nueva información, recalculan la estimación del parámetro y los límites correspondientes. Para el desarrollo de la idea anterior, Zhang et al. (2006) escriben los límites control como

$$\begin{aligned} \widehat{LCL}_{\text{Zhang}} &= -\frac{\log(1 - \alpha^*/2) \gamma_{\alpha^*}}{(m - 1)/T_m} \\ \widehat{UCL}_{\text{Zhang}} &= -\frac{\log(\alpha^*/2) \gamma_{\alpha^*}}{(m - 1)/T_m}, \end{aligned} \quad (4-7)$$

en donde  $\gamma_{\alpha^*}$  se define como en (4-5),  $T_m$  es la suma de los  $m$  tiempos que se supone provienen de una distribución exponencial con parámetro  $\lambda_0$  y  $\alpha^*$  se determina a partir de (4-6) definiendo una tasa de falsa alarma nominal  $\alpha$ . Además de lograr que la carta  $t$  sea de *ARL* insesgado cuando se estima a  $\lambda_0$ , Zhang et al. (2006) obtienen una carta  $t$  en la que la *ARL* en control ( $ARL_0$ ) se fija en un valor deseado por el usuario sin importar el tamaño de la muestra empleado para la estimación de  $\lambda_0$ ; para esto, definen la *ARL* incondicional de la carta de acuerdo a la distribución del estimador del parámetro e igualan esto a la  $ARL_0$  deseada.

Guo et al. (2014) proponen una carta para el monitoreo de tiempos de eventos de falla que siguen una distribución exponencial, usando como densidad  $f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} \exp(-x/\theta)$ ,  $x \geq 0$ ,  $\theta > 0$ . Suponiendo que  $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_r$  es una muestra aleatoria de tamaño  $n$  de ésta distribución con censura tipo II, donde la censura ocurre cuando la prueba es terminada en el tiempo de la  $r$ -ésima unidad que falla. Para el monitoreo proponen como estadístico a,

$$T(\theta) = \frac{2[\sum_{i=1}^r X_i + (n-r)X_r]}{\theta},$$

donde  $n$  es el tamaño de la muestra,  $r$  es la  $r$ -ésima unidad que falla y  $T(\theta) \sim \chi_{2r}^2$ . Para evaluar el desempeño de esta carta, Guo et al. (2014), evalúan la *ARL* y la *SDRL*. Para ello suponen que el parámetro cambia de un valor  $\theta_0$  a  $\theta = \delta\theta_0$  y definan la probabilidad de que una observación caiga dentro de los límites como

$$\beta(\delta) = P\{LCL \leq T(\theta_0) \leq UCL | \theta = \delta\theta_0\} \quad (4-8)$$

Guo et al. (2014) muestran que  $T(\theta_0) = \delta T(\theta)$  por lo que  $T(\theta) = \frac{T(\theta_0)}{\delta}$ , de modo que se puede definir a  $\beta(\delta)$  dado en (4-8) en términos de  $T(\theta)$  como

$$\beta(\delta) = P\left\{\frac{LCL}{\delta} \leq T(\theta) \leq \frac{UCL}{\delta} \middle| \theta = \delta\theta_0\right\}. \quad (4-9)$$

Y en consecuencia, la *ARL* es

$$ARL(\delta) = \frac{1}{1 - \beta(\delta)}. \quad (4-10)$$

La gráfica de la *ARL* evidencia, de acuerdo a Guo et al. (2014), que la curva  $ARL(\delta)$  vs.  $\delta$  de este tipo de cartas de control tienen el problema que comúnmente se observa en las cartas tradicionales que monitorean el tiempo entre eventos, el valor máximo de la *ARL* no se obtiene cuando el parámetro está en control ( $\delta = 1$ ), por lo que se hace necesario plantear un carta de *ARL*-insesgado. Guo et al. (2014) señalan que dicho problema se presenta debido a que en la construcción de los límites de la carta de control se consideran colas de igual probabilidad, siendo la solución permitir límites probabilísticos de colas diferentes, pero tal que la suma de éstas probabilidades sea igual a  $\alpha$ . Los límites de control que proponen para

monitorear a  $T(\theta)$  son:

$$\begin{aligned} UCL &= \chi_{1-\alpha+\beta}^2(2r) \\ LCL &= \chi_{\beta}^2(2r), \end{aligned} \quad (4-11)$$

en donde  $\chi_r^2(2r)$  denota el cuantil  $r(100)\%$  de la distribución  $\chi_{2r}^2$ ,  $\alpha$  es la tasa de falsa alarma deseada y  $\beta \in (0, \alpha)$  se obtiene de la relación

$$f_{\chi_{2r+2}^2}[\chi_{\beta}^2(2r)] = f_{\chi_{2r+2}^2}[\chi_{1-\alpha+\beta}^2(2r)], \quad (4-12)$$

donde  $f_{\chi_k^2}$  es la función de densidad de probabilidad de la distribución  $\chi_k^2$ .

Guo et al. (2014) encuentran que cuando el parámetro de la distribución es conocido, las expresiones (4-11) y (4-12) no dependen del tamaño de la muestra, si no más bien del número de fallas  $r$  y de la tasa de falsa alarma  $\alpha$ .

Ahora bien, si el parámetro  $\theta_0$  es desconocido, los autores hacen referencia a que el comportamiento de la carta puede variar debido a la variabilidad del estimador del parámetro. Si se asumen  $m$  muestras independientes de tamaño  $n$  con censura tipo II, un estimador del parámetro para la  $i$ -ésima muestra se puede escribir como

$$\widehat{\theta}_{0,i} = \frac{\sum_{j=1}^r X_{i,j} + (n-r) X_{i,r}}{r}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

donde  $n$  es el tamaño de la muestra,  $m$  es el número de muestras de tamaño  $n$ , cada  $X_{i,j}$  denota la  $j$ -ésima unidad observada en la  $i$ -ésima muestra de tamaño  $n$  y  $r$  es la  $r$ -ésima unidad que falla. Combinando las  $m$  muestras, el estimador de  $\theta_0$  es definido como el promedio de  $\widehat{\theta}_{0,i}$

$$\bar{\theta}_{0,m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \widehat{\theta}_{0,i}. \quad (4-13)$$

Guo et al. (2014) encuentran como resultados del estudio de la *ARL* y *SDRL*, entre otros, que para las cartas bilaterales cuando el parámetro es estimado, la tasa de falsas alarmas puede aumentar con respecto a lo que se observa cuando el parámetro es conocido, contrario a lo que ocurre cuando la carta de control es unilateral. Además, concluyen que cuando  $m \geq 500$  el rendimiento de una carta bilateral con parámetro estimado es similar al de una carta construida con parámetro conocido. Otra conclusión importante es que cuando  $m$  no es grande, la *SDRL* es mayor que la *ARL*, distinto a lo que ocurre cuando el parámetro es conocido. Ahora bien, en vista de lo poco práctico que puede resultar esperar tener una muestra grande en fase I para que los resultados de la carta construida cuando el parámetro es desconocido sea semejante a cuando el parámetro se conoce, los autores proponen ajustar

los límites de control para obtener los resultados deseados (una carta de  $ARL$  insesgado y cuyo valor de  $ARL$  en control pueda ser fijado en un  $ARL_0$  deseado) cuando el tamaño de muestra es moderado y los parámetros son estimados. Para ello, si

$$ARL_{1,r,m}(\delta) = \int_0^{\infty} \frac{1}{q_{1,r,m}(\delta, z)} f_{\chi_{2mr}^2}(z) dz,$$

con

$$q_{1,r,m} = 1 - P\left(LCL \leq T\left(\widehat{\theta}_{0,m}\right) \leq UCL \mid Z_m = z, \theta = \delta\theta_0\right),$$

representando la probabilidad condicional de que una observación se salga de los límites y  $Z_m = 2mr\widehat{\theta}_{0,m}/\theta_0$ .

Según Guo et al. (2014), para construir la carta de  $ARL$  insesgado se debe resolver el sistema

$$\begin{aligned} ARL_{1,r,m}(1) &= ARL_0 \\ \frac{d}{d\delta} ARL_{1,r,m}(\delta) \Big|_{\delta=1} &= 0. \end{aligned} \tag{4-14}$$

El sistema dado en (4-14) es de dos ecuaciones con dos incógnitas ( $LCL_{r,m}$  y  $UCL_{r,m}$ ) y la solución reportada es obtenida para  $m=10, 15, \dots, 150$  y  $r=3, 4, 5, 6$  para el caso de un  $ARL_0 = 370.37$ .

Como resultado de la propuesta discutida arriba, Guo et al. (2014) encuentran que a medida que  $m$  aumenta, los valores del  $UCL_{r,m}$  se reducen y convergen a los valores correspondientes al caso del parámetro conocido, mientras que, en el caso del  $LCL_{r,m}$  estos se incrementan y terminan convergiendo a los valores que se obtienen cuando el parámetro es conocido. Además, muestran que la propuesta formulada permite que la  $ARL$  en control alcance el valor deseado y que además corresponde al máximo  $ARL$ , es decir, la carta es de  $ARL$  insesgado. Guo et al. (2014) también concluyen que cuando  $r \geq 3$  y  $m \geq 80$  el desempeño de la carta bilateral es cercano al que se obtiene cuando el parámetro es conocido.

Finalmente para ilustrar el comportamiento de la carta propuesta, Guo et al. (2014) presentan un ejemplo con datos simulados. Para ésto suponen que el valor en control del parámetro del proceso es  $\theta_0 = 1$ , generaron 30 muestras de tamaño  $n = 10$  con censura tipo II y  $r = 3$  provenientes de una distribución exponencial, en donde las primeras 10 muestras representan la información de fase I y se obtienen de una exponencial con  $\theta_0 = 1$ , el siguiente grupo de 10 también se obtiene de una exponencial  $\theta_0 = 1$  y representan el estado en control y los últimos 10, provienen de una exponencial con  $\theta_1 = 2$  y representan el estado de fuera de control del proceso. Partiendo de la información de fase I, formulan límites de control estimados y límites de control ajustados, al construir las cartas correspondientes a los límites hallados, observan que uno de los datos provenientes de la distribución en control genera una señal

con los límites estimados sin corrección, cosa que no sucede con los límites ajustados; ésta situación se da debido a que los límites estimados son más estrechos que los ajustados. Guo et al. (2014) encuentran además, que ambas cartas detectan que ha ocurrido un cambio en el proceso.

Huang y Yang (2015) presentan una carta Gamma de *ARL* insesgado cuando sus parámetros son conocidos, dicha carta de control puede ser utilizada para monitorear procesos de manufactura industriales. La finalidad de ésta carta es monitorear el tiempo hasta el  $r$ -ésimo evento y supone que el número de eventos en un intervalo de tiempo dado sigue un proceso Poisson homogéneo y por tanto el tiempo entre eventos es exponencial, denotando por  $X$  dicho tiempo, con pdf parametrizada con la media  $\theta$ . Entonces el tiempo hasta el  $r$ -ésimo evento corresponde a  $Y = \sum_{i=1}^r X_i$  y cuya distribución es  $\text{Gamma}(r, \theta)$ . Huang y Yang (2015) definen el estadístico de monitoreo como

$$T(\theta) = \frac{2Y}{\theta}, \quad (4-15)$$

donde,  $T \sim \chi_{2r}^2$ . Ahora bien, dado un valor de falsa alarma  $\alpha$ , los límites de control para  $T(\theta)$  deben seguir la ecuación

$$P\{LCL \leq T(\theta_0) \leq UCL | \theta = \theta_0\} = 1 - \alpha. \quad (4-16)$$

Huang y Yang (2015) estudian el comportamiento de la *ARL* de ésta carta vs la razón de cambio en el parámetro,  $\delta = \frac{\theta}{\theta_0}$ , y muestran que cuando la carta es formulada con límites probabilísticos con colas de igual probabilidad, la carta es de *ARL* sesgado; es decir, su valor máximo no se obtiene cuando  $\delta = 1$ , de modo que se toma más tiempo del que debería para señalar que han ocurrido cambios en el proceso y además son más frecuentes las falsas alarmas. Por ésta razón, proponen una carta de *ARL* insesgado con parámetro conocido y definiendo límites con probabilidades de cola diferentes. La idea considerada por los autores consiste en hallar los límites de manera que sean solución para las siguientes dos condiciones: que la tasa de falsas alarmas corresponda a un nivel deseado  $\alpha$  y que la *ARL* sea máxima en  $\delta = 1$ . Las soluciones son obtenidas para  $\alpha = 0.001, 0.002, 0.0027, 0.005$ , y  $r = 1, 2, 3, 4$ . Dichos resultados muestran que la carta propuesta es más sensible a detectar un deterioro sistemático del proceso comparado con la carta tradicional, pero tienen un comportamiento similar cuando hay mejora en el proceso que se monitorea. Como es destacado por los autores, el valor de la *ARL* logra ser controlado de acuerdo a la tasa de falsa alarma fijada, mostrando un comportamiento de la *ARL* acorde a lo esperado, distinto a lo que sucede con la carta sin límites corregidos.





## 5. Diseño de la carta $t$

En este Capítulo se presentan dos estimadores para el parámetro  $\lambda_0$  de la distribución de los datos, el estimador de máxima verosimilitud y el estimador insesgado. Se presentan también, los límites de la carta  $t$  cuando se usan probabilidades de colas nominales iguales. Igualmente, se presentan los límites propuestos para la carta  $t$  por Xie et al. (2002) y Zhang et al. (2006) y las  $ARL$ s respectivas. Además de lo anterior, se estudia la  $ARL$  para la carta  $t$  cuando  $\lambda_0$  es conocido y estimado, lo cual permite ver que la carta es de  $ARL$  sesgado en ambos casos. Debido a lo anterior, se estudian y proponen correcciones de los límites de control con el fin de obtener una carta de  $ARL$  insesgado. Esto se realiza considerando la construcción de límites con probabilidades de colas con valores nominales iguales y diferentes y a partir de dos criterios de optimización en cada caso, en el primero se hallan correcciones tales que la carta sea de  $ARL$  insesgado y que la  $ARL$  en control satisfaga un valor deseado y en el segundo criterio, se buscan correcciones para lograr una carta de  $ARL$  insesgado, tal que se alcance una tasa de falsa alarma deseada.

### 5.1. Resultados preliminares y estimadores

Sea  $T \sim \exp(t; \lambda_0)$  una variable aleatoria que representa el tiempo entre eventos, con función de densidad de probabilidad  $f_T(t; \lambda_0) = \lambda_0 \exp(-\lambda_0 t)$ , entonces su función generadora de momentos está dada por

$$\kappa_T(t; \lambda_0) = (1 - \lambda_0^{-1}t)^{-1}; t \in \mathbb{R}^+. \quad (5-1)$$

Ahora bien, suponga que  $T_1, T_2, \dots, T_n$  representan una muestra aleatoria del tiempo entre eventos y que provienen de una distribución exponencial con tasa de falla  $\lambda_0$ , tal que para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , cada  $T_i$  es independiente e idénticamente distribuida. Considere  $Y$  la suma de éstos  $n$  tiempos,

$$Y = \sum_{i=1}^n T_i. \quad (5-2)$$

Entonces se cumple que la función generadora de momentos de  $Y$  es

$$\kappa_Y(t; \lambda_0) = \prod_{i=1}^n \kappa_{T_i}(t; \lambda_0) = (1 - \lambda_0^{-1}t)^{-n}, \text{ para } t < \lambda_0,$$

donde  $(1 - \lambda_0^{-1}t)^{-n}$  corresponde a la función generadora de momentos de una distribución Gamma( $\alpha = n, \beta = 1/\lambda_0$ ) es decir que  $Y \sim \text{Gamma}(t; n, 1/\lambda_0)$ , por lo que su densidad es

$$f_Y(t; n, 1/\lambda_0) = \frac{\lambda_0^n t^{n-1} \exp(-\lambda_0 t)}{\Gamma(n)}. \quad (5-3)$$

Un estimador insesgado para el parámetro  $\lambda_0$  de la distribución dada en (5-3) es dado por

$$\hat{\lambda}_{\text{unb}} = \frac{n-1}{Y}, \text{ con } Y > 0. \quad (5-4)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} E(\hat{\lambda}_{\text{unb}}) &= (n-1) E\left(\frac{1}{Y}\right) \\ &= (n-1) \int_0^\infty \frac{1}{y} \frac{\lambda_0^n y^{n-1} \exp(-\lambda_0 y)}{\Gamma(n)} dy \\ &= \lambda_0 \int_0^\infty \frac{\lambda_0^{n-1} y^{(n-1)-1} \exp(-\lambda_0 y)}{\Gamma(n-1)} dy \end{aligned}$$

$$E(\hat{\lambda}_{\text{unb}}) = \lambda_0;$$

observe que el integrando en  $\int_0^\infty \frac{\lambda_0^{n-1} t^{(n-1)-1} \exp(-\lambda_0 t)}{\Gamma(n-1)}$  es la densidad de una variable aleatoria Gamma( $n-1, 1/\lambda_0$ ), de allí que la integral sea igual a 1.

Un estimador alternativo sesgado para el parámetro  $\lambda_0$  es el estimador de máxima verosimilitud,

$$\hat{\lambda}_{\text{bias}} = \frac{n}{Y}; \quad (5-5)$$

sin embargo, no es un estimador insesgado dado que

$$\begin{aligned} E(\hat{\lambda}_{\text{bias}}) &= E\left(\frac{n}{Y}\right) \\ &= \frac{n}{n-1} E\left(\frac{n-1}{Y}\right) \\ E(\hat{\lambda}_{\text{bias}}) &= \frac{n}{n-1} \lambda_0, \end{aligned}$$

donde  $\left(\frac{n}{n-1}\right) > 1$ , es decir,  $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$  sobreestima a  $\lambda_0$ ; sin embargo, si  $n \rightarrow \infty$  entonces  $E(\hat{\lambda}_{\text{bias}}) \rightarrow \lambda_0$ , es decir,  $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$  es asintóticamente insesgado.

## 5.2. Carta $t$ con parámetro conocido.

Siguiendo a Xie et al. (2002) y a Zhang et al. (2006), suponga que la variable aleatoria de estudio  $T \sim \exp(t; \lambda)$ , representa el tiempo entre eventos, siendo  $\lambda = \delta\lambda_0$  con  $\lambda_0$  el valor del parámetro cuando el proceso está en control,  $\delta > 0$  la desviación del parámetro; entonces, los límites de control de la carta  $t$  con probabilidades de colas iguales se pueden escribir como en (3-7) y (3-8); es decir,

$$\begin{aligned} LCL &= -\frac{\log\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\lambda_0} \\ UCL &= -\frac{\log\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\lambda_0}. \end{aligned} \quad (5-6)$$

De otra parte, la probabilidad de que una observación caiga fuera de los límites de control de la carta  $t$  es

$$\beta(\delta) = P\{T > UCL \text{ ó } T < LCL \mid \lambda = \delta\lambda_0\}, \quad (5-7)$$

de donde de acuerdo a la ecuación (2-1) y usando (5-7) se tiene que

$$ARL(\delta) = \frac{1}{\beta(\delta)} = \frac{1}{P\{T > UCL \text{ ó } T < LCL \mid \lambda = \delta\lambda_0\}}. \quad (5-8)$$

De acuerdo a (5-8), la  $ARL(\delta)$  es el inverso de la probabilidad de que un punto caiga por fuera de los límites de control, cuando la distribución de la cual proviene la observación es  $\exp(\lambda)$  con  $\lambda = \delta\lambda_0$ . Ahora bien, conforme a la función de distribución acumulada de  $T$  dada en (3-5), la  $ARL(\delta)$  para una carta  $t$  cuando el parámetro en control  $\lambda_0$  se conoce es

$$ARL(\delta) = \frac{1}{1 - \exp(-\delta\lambda_0 LCL) + \exp(-\delta\lambda_0 UCL)}, \quad (5-9)$$

donde  $LCL$  y  $UCL$  son los límites superior e inferior de la carta. Desde luego la ecuación (5-9) puede escribirse usando los límites de control inferior y superior dados en (5-6), quedando (5-9) de la siguiente manera,

$$ARL(\delta) = \frac{1}{1 + \exp(\delta \log(\alpha/2)) - \exp(\delta \log(1 - \alpha/2))}. \quad (5-10)$$

Dado que la longitud de corrida  $RL$  es una variable geométrica, la desviación estándar de la longitud de corrida o  $SDRL$ , se puede definir como  $SDRL(\delta) = \frac{\sqrt{1-\beta(\delta)}}{\beta(\delta)}$ , donde  $\beta(\delta)$  se define como en (5-7), es decir que

$$SDRL(\delta) = \frac{\sqrt{\exp(-\delta\lambda_0 LCL) - \exp(-\delta\lambda_0 UCL)}}{1 - \exp(-\delta\lambda_0 LCL) + \exp(-\delta\lambda_0 UCL)}, \quad (5-11)$$

con  $LCL$  y  $UCL$  definidos como en (5-6).

Para efectos del estudio que se presenta aquí, se considera que un cambio en el proceso se dio y que éste se refleja en el parámetro de la distribución si se puede escribir en la forma  $\lambda = \delta\lambda_0$ . Si  $0 < \delta < 1$  entonces ha habido una **mejora** en el proceso, puesto que en éste caso se considera que la aparición del evento de falla es menos frecuente. Por el contrario, si  $\delta > 1$  se considera que ha habido un **deterioro** del proceso, debido a que hay una mayor recurrencia o una aparición más frecuente de la falla que se monitorea. Ahora bien, si  $\delta = 1$ , entonces  $\lambda = \lambda_0$  y por lo tanto se dirá que el proceso está en control.

La Tabla 5-1 muestra valores de la  $ARL$  y  $SDRL$  cuando  $\delta = 1$ ; es decir, en control ( $ARL(1)$  y  $SDRL(1)$  respectivamente) de la carta  $t$  cuando el parámetro de ésta se conoce y usando los límites en (5-6), variando valores para  $\lambda_0$  y  $\alpha$ . La información contenida en la Tabla 5-1 muestra que la  $ARL$  y  $SDRL$  en control cuando el parámetro es conocido, no depende del parámetro  $\lambda_0$  de la carta, sino de la tasa de falsa alarma  $\alpha$ . Esta tabla, muestra además que el valor de la  $ARL$  en control es consecuente con la tasa de falsa alarma seleccionada, siendo  $ARL_0 = 1/\alpha$ .

Tabla 5-1.: Valores de la  $ARL(1)$  y  $SDRL(1)$  para distintos  $\alpha$  y  $\lambda_0$ .

$\lambda_0$	Medida	$\alpha$					
		<b>0.0005</b>	<b>0.00100</b>	<b>0.00200</b>	<b>0.0027</b>	<b>0.00400</b>	<b>0.005</b>
<b>0.005</b>	$ARL(1)$	2000.0	1000.000	500.000	370.3704	250.000	200.00
	$SDRL(1)$	1999.5	999.4999	499.499	369.8700	249.499	199.49
<b>0.01</b>	$ARL(1)$	2000.0	1000.000	500.000	370.3704	250.000	200.00
	$SDRL(1)$	1999.5	999.4999	499.499	369.8700	249.499	199.49
<b>0.05</b>	$ARL(1)$	2000.0	1000.000	500.000	370.3704	250.000	200.00
	$SDRL(1)$	1999.5	999.4999	499.499	369.8700	249.499	199.49
<b>0.1</b>	$ARL(1)$	2000.0	10000.00	500.000	370.3704	250.000	200.00
	$SDRL(1)$	1999.5	999.4999	499.499	369.8700	249.499	199.49
<b>0.5</b>	$ARL(1)$	2000.0	1000.000	500.000	370.3704	250.000	200.00
	$SDRL(1)$	1999.5	999.4999	499.499	369.8700	249.499	199.49
<b>1</b>	$ARL(1)$	2000.0	1000.000	500.000	370.3704	250.000	200.00
	$SDRL(1)$	1999.5	999.4999	499.499	369.8700	249.499	199.49
<b>10</b>	$ARL(1)$	2000.0	1000.000	500.000	370.3704	250.000	200.00
	$SDRL(1)$	1999.5	999.4999	499.499	369.8700	249.499	199.49

### 5.2.1. Carta $t$ de ARL insesgado con $\lambda_0$ conocido.

En la Figura 5-1 se presenta la curva  $ARL(\delta)$  vs  $\delta$  de la carta  $t$  de acuerdo a la ecuación (5-10) usando distintos valores para la tasa de falsa alarma. Dicha gráfica muestra que indistintamente del valor de  $\alpha$ , la  $ARL$  de la carta  $t$  no alcanza su valor máximo cuando el parámetro se encuentra en control ( $\delta = 1$ ), por lo que no es de  $ARL$  insesgado. Este comportamiento es indeseable debido a que cuando el proceso se deteriora; es decir  $\delta > 1$  el valor de la  $ARL$  en vez de disminuir podría aumentar (Zhang et al., 2006). Debido a lo anterior, es necesario construir una carta de control en la que esto no suceda; es decir, conviene construir una carta en la cual el valor máximo de la  $ARL(\delta)$  se presente en  $\delta = 1$ .

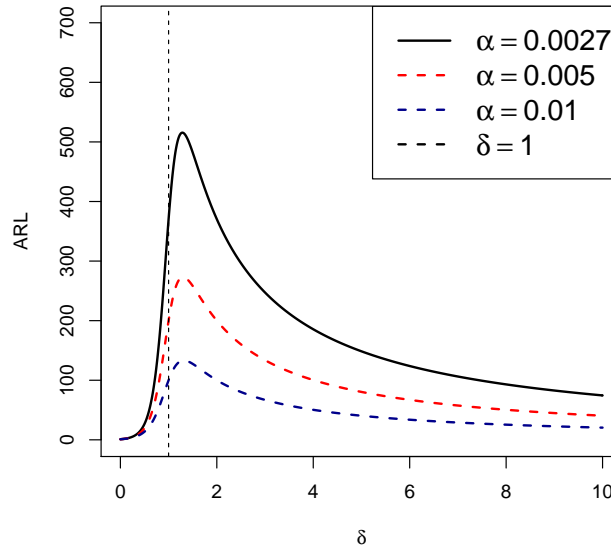


Figura 5-1.: Curvas de  $ARL(\delta)$  de la carta  $t$  con parámetro conocido,  $\lambda_0 = 0.01$  y  $\alpha = 0.0027, 0.005$  y  $0.01$ .

Como solución a lo anterior, (Zhang et al., 2006) propone que cuando  $\lambda_0$  se conoce, los límites de control dados en (5-6) se escriban de la forma

$$\begin{aligned}
 LCL_{\text{Zhang}} &= \frac{-\log(1 - \alpha^*/2)}{\lambda_0} \gamma_{\alpha^*} \\
 UCL_{\text{Zhang}} &= \frac{-\log(\alpha^*/2)}{\lambda_0} \gamma_{\alpha^*},
 \end{aligned} \tag{5-12}$$

donde,  $\gamma_{\alpha^*}$  corresponde a (4-5) y  $\alpha^*$  solución a (4-6). De acuerdo a (5-9), (5-11) y a los límites de control de (5-12), la  $ARL$  y  $SDRL$  denotadas  $ARL_{\text{Zhang}}$  y  $SDRL_{\text{Zhang}}$  según Zhang et al.

(2006) y son:

$$\begin{aligned} ARL(\delta)_{Zhang} &= \frac{1}{1 - \exp(-\delta\lambda_0 LCL_{Zhang}) + \exp(-\delta\lambda_0 UCL_{Zhang})}, \\ SDR L(\delta)_{Zhang} &= \frac{\sqrt{\exp(-\delta\lambda_0 LCL_{Zhang}) - \exp(-\delta\lambda_0 UCL_{Zhang})}}{1 - \exp(-\delta\lambda_0 LCL_{Zhang}) + \exp(-\delta\lambda_0 UCL_{Zhang})}. \end{aligned} \quad (5-13)$$

Ahora suponga que los datos monitoreados se distribuyen  $\exp(t; \lambda_0)$ , siguiendo a Huang y Yang (2015) y Yang, Yu, Cheng y Xie (2016) se proponen dos posibles formas de corregir los límites de las ecuaciones (5-6) como sigue

$$\begin{aligned} LCL_\alpha &= -A_\alpha \frac{\log(1 - \alpha/2)}{\lambda_0}, \\ UCL_\alpha &= -B_\alpha \frac{\log(\alpha/2)}{\lambda_0} \end{aligned} \quad (5-14)$$

y

$$\begin{aligned} LCL_{\alpha,\beta} &= -\frac{\log(1 - \beta)}{\lambda_0}, \\ UCL_{\alpha,\beta} &= -\frac{\log(\alpha - \beta)}{\lambda_0}, \text{ con } \beta \in (0, \alpha), \end{aligned} \quad (5-15)$$

en donde  $A_\alpha$  y  $B_\alpha$  son coeficientes positivos que se espera varíen de acuerdo a la tasa de falsas alarmas y que harán las veces de factores de ajustes para construir los nuevos límites de control  $LCL_\alpha$  y  $UCL_\alpha$  para la carta  $t$  de  $ARL$  insesgado. Para la ecuación (5-15) se debe hallar  $\beta \in (0, \alpha)$  tal que la  $ARL$  de la carta sea máximo cuando  $\delta = 1$ , además se debe cumplir que  $P(LCL_{\alpha,\beta} \leq T \leq UCL_{\alpha,\beta} | \lambda = \lambda_0) = 1 - \alpha$ . Los límites de control propuestos en (5-15) son construidos de forma que las colas de probabilidad nominal no sean necesariamente iguales, sino asignando  $\beta$  como la probabilidad de que una observación del proceso en control tome un valor menor que el límite de control inferior, es decir, que  $P(T < LCL_{\alpha,\beta} | \lambda = \lambda_0) = \beta$ , y  $\alpha - \beta$  la probabilidad de que una observación del proceso en control sea mayor al límite de control superior, esto es,  $P(T > UCL_{\alpha,\beta} | \lambda = \lambda_0) = \alpha - \beta$ .

Se espera que los nuevos pares de límites de control ( $LCL_\alpha, UCL_\alpha$ ) y ( $LCL_{\alpha,\beta}, UCL_{\alpha,\beta}$ ) permitan hacer la carta  $t$  de  $ARL$  insesgado y que la  $ARL$  en control se pueda fijar de acuerdo a una tasa nominal de falsa alarma deseada.

Sea  $ARL(\delta)_\alpha$  la  $ARL$  de la carta  $t$  según la carta con los límites definidos en (5-14) y  $ARL(\delta)_{\alpha,\beta}$  la  $ARL$  de la carta  $t$  según la carta  $t$  con los límites definidos en (5-15). Las ecuaciones de estas dos funciones son similares a la dada en (5-9), pero usando los respectivos límites de control corregidos para dichas cartas, es decir, haciendo  $LCL = LCL_\alpha$  y  $UCL =$

$UCL_\alpha$  para  $ARL(\delta)_\alpha$  y  $LCL = LCL_{\alpha,\beta}$  y  $UCL = UCL_{\alpha,\beta}$  para  $ARL(\delta)_{\alpha,\beta}$ . De acuerdo a esto, las ecuaciones se pueden reducir a

$$ARL(\delta)_\alpha = \frac{1}{1 - \exp(\delta A_\alpha \log(1 - \alpha/2)) + \exp(\delta B_\alpha \log(\alpha/2))}, \quad (5-16)$$

y

$$ARL(\delta)_{\alpha,\beta} = \frac{1}{1 - \exp(\delta \log(1 - \beta)) + \exp(\delta \log(\alpha - \beta))}, \quad (5-17)$$

La  $SDRL$  para las cartas de control con los pares de límites ( $LCL_\alpha, UCL_\alpha$ ) y ( $LCL_{\alpha,\beta}, UCL_{\alpha,\beta}$ ) se pueden escribir  $SDRL_\alpha$  y  $SDRL_{\alpha,\beta}$  respectivamente y se obtienen sustituyendo en (5-11) el límite inferior  $LCL$  y superior  $UCL$  por su símil en dichos pares, es decir, se llega a

$$SDRL(\delta)_\alpha = \frac{\sqrt{\exp(-\delta\lambda_0 LCL_\alpha) - \exp(-\delta\lambda_0 UCL_\alpha)}}{1 - \exp(-\delta\lambda_0 LCL_\alpha) + \exp(-\delta\lambda_0 UCL_\alpha)}, \quad (5-18)$$

y

$$SDRL(\delta)_{\alpha,\beta} = \frac{\sqrt{\exp(-\delta\lambda_0 LCL_{\alpha,\beta}) - \exp(-\delta\lambda_0 UCL_{\alpha,\beta})}}{1 - \exp(-\delta\lambda_0 LCL_{\alpha,\beta}) + \exp(-\delta\lambda_0 UCL_{\alpha,\beta})}. \quad (5-19)$$

### 5.3. Carta $t$ con parámetro estimado.

Considere la construcción de la carta  $t$  cuando  $\lambda_0$  es desconocido, pero estimado a partir de una muestra aleatoria  $T_1, T_2, \dots, T_n$  tomada cuando el proceso está en control, con  $T_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \exp(t; \lambda_0)$  con  $i = 1, 2, \dots, n$ . Sea  $Y = \sum_{i=1}^n T_i$ . Los límites de control para la carta  $t$  son definidos inicialmente de acuerdo con las ecuaciones (5-6), usando un estimador para  $\lambda_0$ , así

$$\begin{aligned} \widehat{LCL} &= \frac{-\log(1 - \alpha/2)}{\widehat{\lambda}_0}, \\ \widehat{UCL} &= \frac{-\log(\alpha/2)}{\widehat{\lambda}_0}, \end{aligned} \quad (5-20)$$

donde  $\widehat{\lambda}_0 = C_n Y$  es un estimador de  $\lambda_0$ , con  $C_n$  un factor función de  $n$  según el estimador definido en (5-4) y (5-5). Ahora bien, suponga que durante el monitoreo, la tasa de falla cambia de  $\lambda_0$  a  $\lambda = \delta\lambda_0$ , en donde  $\delta > 0$  y considere a la probabilidad condicional de  $\delta$  dado  $Y$  como,  $\Psi(\delta | Y = y)$ , la cual representa la probabilidad condicional de que una observación bajo la distribución  $\exp(t; \lambda)$  caiga dentro de los límites de control estimados con la muestra de tamaño  $n$  previamente descrita; es decir,

$$\begin{aligned} \Psi(\delta | Y = y) &= P\left\{T < \widehat{LCL} \text{ ó } T > \widehat{UCL} \mid T \sim \exp(\lambda), Y = y\right\} \\ &= 1 - \exp(-\delta\lambda_0 \widehat{LCL}) + \exp(-\delta\lambda_0 \widehat{UCL}), \end{aligned}$$

usando (5-20) entonces

$$\Psi(\delta|Y=y) = 1 - \exp\left[\delta\lambda_0 \frac{\log(1-\alpha/2)}{\hat{\lambda}_0}\right] + \exp\left[\delta\lambda_0 \frac{\log(\alpha/2)}{\hat{\lambda}_0}\right]. \quad (5-21)$$

Ahora bien, la  $ARL$  condicional a  $Y = y$  para los límites dados en (5-20), se puede definir como  $ARL(\delta|Y=y)_{\text{Est}} = [\Psi(\delta|Y=y)]^{-1}$ ; es decir que,

$$ARL(\delta|Y=y)_{\text{Est}} = \frac{1}{1 - \exp\left[\delta\lambda_0 \frac{\log(1-\alpha/2)}{\hat{\lambda}_0}\right] + \exp\left[\delta\lambda_0 \frac{\log(\alpha/2)}{\hat{\lambda}_0}\right]}, \quad (5-22)$$

entonces la  $ARL$  incondicional,  $ARL(\delta)_{\text{Est}} = E\left[ARL(\delta|Y=y)_{\text{Est}}\right]$ , corresponde a

$$ARL(\delta)_{\text{Est}} = \int_0^{\infty} \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0)}{1 - \exp\left[\delta\lambda_0 \frac{\log(1-\alpha/2)}{\hat{\lambda}_0}\right] + \exp\left[\delta\lambda_0 \frac{\log(\alpha/2)}{\hat{\lambda}_0}\right]} dy, \quad (5-23)$$

donde  $Y \sim \text{Gamma}(y; n, 1/\lambda_0)$  y su función de densidad se escribe como en (5-3).

Por otra parte, como la  $RL$  es una variable aleatoria exponencial, entonces  $RL|Y = y$  también lo es y su desviación estándar que denotaremos por  $SDRL(\delta|Y = y)_{\text{Est}}$ . A partir de la definición de la  $SDRL$  dada por Zhang et al. (2006) y Guo et al. (2014), ésta puede escribirse como

$$SDRL(\delta|Y = y)_{\text{Est}} = \frac{\sqrt{1 - \Psi(\delta|Y = y)}}{\Psi(\delta|Y = y)}, \quad (5-24)$$

con  $\Psi(\delta|Y = y)$  como se definió en (5-21).

Si reemplaza a  $\hat{\lambda}_0$  en (5-20) por los estimadores definidos en (5-4) y (5-5), los límites de control quedan respectivamente como

$$\widehat{LCL}_{\text{unb}} = -\log(1-\alpha/2) \frac{Y}{n-1}, \quad (5-25)$$

$$\widehat{UCL}_{\text{unb}} = -\log(\alpha/2) \frac{Y}{n-1}$$

y

$$\widehat{LCL}_{\text{bias}} = -\log(1-\alpha/2) \frac{Y}{n}, \quad (5-26)$$

$$\widehat{UCL}_{\text{bias}} = -\log(\alpha/2) \frac{Y}{n}$$



donde  $(\widehat{LCL}_{\text{unb}}, \widehat{UCL}_{\text{unb}})$  y  $(\widehat{LCL}_{\text{bias}}, \widehat{UCL}_{\text{bias}})$  respectivamente, son los límites estimados de la carta  $t$  usando el estimador  $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$  y  $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$  de  $\lambda_0$ . De acuerdo a la ecuación (5-22), la  $ARL$  condicional según el estimador usado es

$$ARL(\delta|Y = y)_{\text{unb}} = \frac{1}{1 + \exp\left[\delta\lambda_0 \log(\alpha/2) \frac{y}{n-1}\right] - \exp\left[\delta\lambda_0 \log(1 - \alpha/2) \frac{y}{n-1}\right]}, \quad (5-27)$$

$$ARL(\delta|Y = y)_{\text{bias}} = \frac{1}{1 + \exp\left[\delta\lambda_0 \log(\alpha/2) \frac{y}{n}\right] - \exp\left[\delta\lambda_0 \log(1 - \alpha/2) \frac{y}{n}\right]}, \quad (5-28)$$

donde se tiene que  $ARL(\delta|Y = y)_{\text{unb}}$  y  $ARL(\delta|Y = y)_{\text{bias}}$  son la  $ARL$  condicional usando el estimador  $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$  y  $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$  de  $\lambda_0$ , definidos de acuerdo a (5-4) y (5-5). Luego, por (5-23), la  $ARL$  incondicional para cada estimador es respectivamente,

$$ARL(\delta)_{\text{unb}} = \int_0^{\infty} \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0)}{1 + \exp\left[\delta\lambda_0 \log(\alpha/2) \frac{y}{n-1}\right] - \exp\left[\delta\lambda_0 \log(1 - \alpha/2) \frac{y}{n-1}\right]} dy, \quad (5-29)$$

$$ARL(\delta)_{\text{bias}} = \int_0^{\infty} \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0)}{1 + \exp\left[\delta\lambda_0 \log(\alpha/2) \frac{y}{n}\right] - \exp\left[\delta\lambda_0 \log(1 - \alpha/2) \frac{y}{n}\right]} dy, \quad (5-30)$$

siendo  $ARL(\delta)_{\text{unb}}$  y  $ARL(\delta)_{\text{bias}}$  la  $ARL$  incondicional para los estimadores  $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$  y  $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$ , respectivamente.

Las  $SDRLs$  para las cartas  $t$  con los límites en (5-25) y (5-26), denotadas por  $SDRL(\delta)_{\text{unb}}$  y  $SDRL(\delta)_{\text{bias}}$  respectivamente, se pueden definir siguiendo la ecuación dada en (5-24), con lo que

$$SDRL(\delta)_{\text{unb}} = \frac{\sqrt{\exp\left(-\delta\lambda_0 \widehat{LCL}_{\text{unb}}\right) - \exp\left(-\delta\lambda_0 \widehat{UCL}_{\text{unb}}\right)}}{1 - \exp\left(-\delta\lambda_0 \widehat{LCL}_{\text{unb}}\right) + \exp\left(-\delta\lambda_0 \widehat{UCL}_{\text{unb}}\right)}, \quad (5-31)$$

y

$$SDRL(\delta)_{\text{bias}} = \frac{\sqrt{\exp\left(-\delta\lambda_0 \widehat{LCL}_{\text{bias}}\right) - \exp\left(-\delta\lambda_0 \widehat{UCL}_{\text{bias}}\right)}}{1 - \exp\left(-\delta\lambda_0 \widehat{LCL}_{\text{bias}}\right) + \exp\left(-\delta\lambda_0 \widehat{UCL}_{\text{bias}}\right)}, \quad (5-32)$$

La Figura 5-2 muestra las curvas  $ARL$  incondicionales vs.  $\delta$ , en donde,  $ARL(\delta)$  corresponde a la ecuación (5-10),  $ARL(\delta)_{\text{unb}}$  representa a (5-29) y  $ARL(\delta)_{\text{bias}}$  se refiere a (5-30),

$\alpha = 0.0027$  y  $\lambda_0 = 0.01$ . La Figura 5.2(a) corresponde a un tamaño de muestra  $n = 5$  y la 5.2(b) a  $n = 100$ , estos tamaños de muestra son considerados con la finalidad de mostrar el comportamiento de la curva  $ARL$  cuando se usa una muestra “grande” o “pequeña”. Los resultados muestran que para  $n = 5$  y desviaciones por encima de  $\delta = 1$ , la carta  $t$  construida con el estimador  $\hat{\lambda}_{\text{unb}}$  (curva  $ARL(\delta)_{\text{unb}}$ ) tiene mejor desempeño que la carta que se construye con el estimador  $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$  (curva  $ARL(\delta)_{\text{bias}}$ ); por el contrario, para desviaciones por debajo de  $\delta = 1$  resulta un poco mejor la carta con el estimador  $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$ . Si se compara la curva  $ARL(\delta)$  con  $ARL(\delta)_{\text{unb}}$ , se observa que para grandes desviaciones con  $\delta \geq 4$ , el comportamiento es aproximadamente el mismo, mientras que la  $ARL(\delta)_{\text{bias}}$  de la carta con el estimador sesgado es similar a la  $ARL(\delta)$  en casos donde hay desviaciones por debajo de  $\delta = 1$ . Obsérvese además que cuando  $n = 100$ , la  $ARL$  de las cartas de control con parámetro estimado se aproximan a la curva  $ARL(\delta)$ , es decir, cuando  $\lambda_0$  es conocido. Sin embargo, en la práctica rara vez se dispone de muestras grandes para estimar el parámetro del proceso en control y por tanto obtener una carta con propiedades  $ARL$  similares a la de la carta con  $\lambda_0$  conocido.

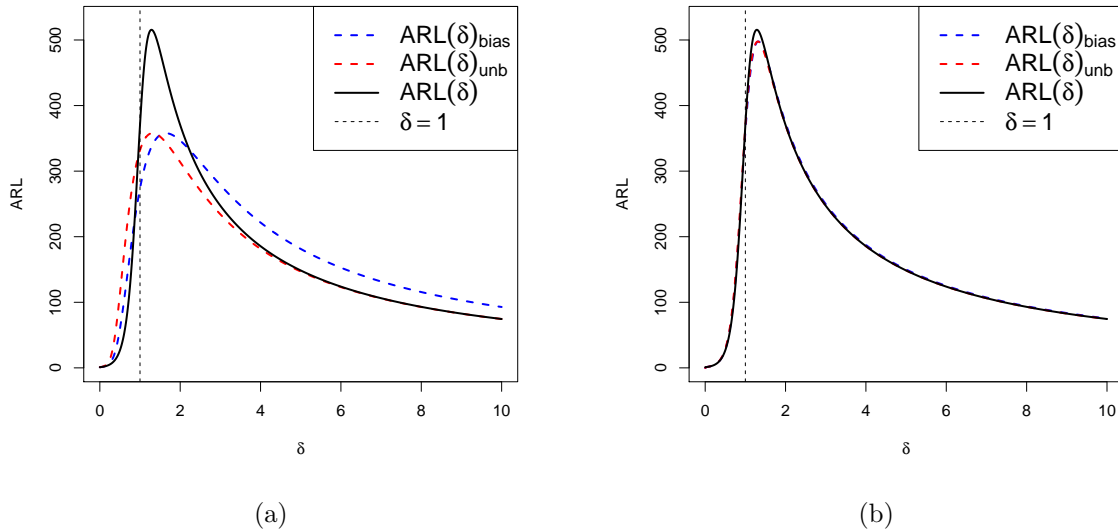


Figura 5-2.: Curvas  $ARL$  de la carta  $t$  con  $\lambda_0 = 0.01$  y  $\alpha = 0.0027$  según (5-10), (5-29) y (5-30). (a)  $n = 5$  (b)  $n = 100$ .

La Figura 5-2 deja claro también que sin importar el tamaño de la muestra, las cartas construidas con los estimadores  $\hat{\lambda}_{\text{unb}}$  y  $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$  también son de  $ARL$  sesgado, por lo cual es necesario aplicar una corrección a sus respectivos límites, de modo que estas cartas sean de  $ARL$  insesgado.

Finalmente note de la Figura 5-2, que si se evalúan las curvas  $ARL$  en  $\delta = 1 - \Delta$  y  $\delta = 1 + \Delta$ , con  $0 \leq \Delta < 1$ , no se obtiene el mismo valor de  $ARL$ , es decir, no hay un comportamiento simétrico de las curvas alrededor de  $\delta = 1$ . En particular, para  $\delta = 1 - \Delta$  las  $ARL$ s son menores que para  $\delta = 1 + \Delta$ , lo cual implica que en general, las cartas son más lentas para

detectar deterioros del proceso que mejoras.

A partir de las ecuaciones (5-29) y (5-31) se obtienen los resultados presentados en la Tabla 5-2, y mediante (5-30) y (5-32) se obtuvieron los resultados de la Tabla 5-3, en ambos casos usando  $\delta = 1$ ; es decir, estas tablas muestran la  $ARL$  y  $SDRL$  en control de la carta  $t$  empleando los estimadores  $\hat{\lambda}_{\text{unb}}$  y  $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$  definidos previamente en (5-4) y (5-5), respectivamente; la tasa nominal de falsa alarma usada fue  $\alpha = 0.0027$ . Los resultados en éstas Tablas muestran que tanto la  $ARL$  como la  $SDRL$ , son sensibles al tamaño de muestra  $n$  pero no al valor de  $\lambda_0$ , por lo que con relación a éste parámetro, se puede usar cualquier valor para analizar las medidas de desempeño. También puede observarse que a mayor tamaño de la muestra, la  $ARL$  en control con ambos estimadores se aproxima más al valor nominal  $ARL_0$  ( $ARL_0 = 1/\alpha \approx 370$ ) y por tanto, se acercan al valor de la  $ARL(1)$  cuando  $\lambda_0$  es conocido. Nótese además que cuando se usa  $\hat{\lambda}_{\text{unb}}$  los valores de  $ARL(1)$  tienden a acercarse más rápido al valor nominal  $ARL_0$  que cuando se emplea el estimador  $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$ , lo cual indicaría un comportamiento más favorable con el primer estimador, en especial si se tienen muestras pequeñas y bajo el proceso en control.

Dado el valor de  $\alpha = 0.0027$ , se espera que la  $ARL$  en control esté cerca de 370, pero de acuerdo con los valores en las Tablas 5-2 y 5-3, dicha meta ni siquiera es alcanzada para un tamaño de muestra  $n = 200$ , lo cual indica una fuerte influencia del tamaño de la muestra en el desempeño de la carta cuando  $\lambda_0$  es estimado. Ahora bien, el valor alcanzado por la  $ARL(1)$  cuando  $\lambda_0$  es estimado también es afectado por el tipo de estimador que se usa, puesto que si se comparan los valores de la  $ARL(1)$  para todos los tamaños de muestra usados en las Tablas 5-2 y 5-3, su valor es menor cuando el estimador es  $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$ , siendo por ejemplo, para un tamaño de muestra de 200,  $ARL(1)_{\text{bias}} = 365$  aproximadamente, mientras que para  $\hat{\lambda}_{\text{unb}}$ ,  $ARL(1)_{\text{unb}} = 369$  aproximadamente.

En las Figuras 5.3(a) y 5.3(b), se comparan nuevamente las curvas  $ARL(\delta)_{\text{unb}}$  y  $ARL(\delta)_{\text{bias}}$  respectivamente, con la curva  $ARL(\delta)$  correspondiente al caso  $\lambda_0$  conocido (ecuación (5-10)), usando  $\alpha = 0.0027$  y  $\lambda_0 = 0.01$ , pero ésta vez considerando  $n = 5, 15, 30$  y  $50$ . Puede observarse en 5.3(a) que para  $n = 5$  y  $1 < \delta \leq 4$  aproximadamente la  $ARL$  es menor que la alcanzada con cualquier otro tamaño de muestra, incluso es menor que la  $ARL(\delta)$ , mientras que para  $\delta > 4$  prácticamente coinciden las curvas, en tanto que en 5.3(b), se observa que con  $n = 5$  la curva  $ARL$  se ubica por debajo del resto cuando  $1 < \delta \leq 2.2$ . Sin embargo con  $\delta$  mayores es peor el desempeño a menor tamaño de muestra (las curvas  $ARL$  con  $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$  quedan por encima de la curva  $ARL(\delta)$  y se alejan más de ésta a menor  $n$ ). Lo anterior parece indicar que mientras no se corrijan los límites, resulta mejor en la detección de deterioros del proceso de la carta  $t$  construida con los límites definidos en (5-25) con una muestra pequeña. Sin embargo, lo deseable es que el incremento del tamaño de muestra favoreciera el desempeño de la carta y no todo lo contrario. La razón de éste aparente comportamiento adverso es

Tabla 5-2.: Valores de  $ARL(1)_{\text{unb}}$  y  $SDRL(1)_{\text{unb}}$ , para  $\alpha = 0.0027$  y distintos  $\lambda_0$  y  $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ .

n	Medida	$\lambda_0$						
		0.005	0.01	0.05	0.1	0.5	1	10
5	$ARL(1)_{\text{unb}}$	331.9892	331.9892	331.9892	331.9892	331.9892	331.9892	331.9892
	$SDRL(1)_{\text{unb}}$	331.4880	331.4880	331.4880	331.4880	331.4880	331.4880	331.4880
15	$ARL(1)_{\text{unb}}$	356.6674	356.6674	356.6674	356.6674	356.6674	356.6674	356.6674
	$SDRL(1)_{\text{unb}}$	356.1668	356.1668	356.1668	356.1668	356.1668	356.1668	356.1668
30	$ARL(1)_{\text{unb}}$	363.8652	363.8652	363.8652	363.8652	363.8652	363.8652	363.8652
	$SDRL(1)_{\text{unb}}$	363.3647	363.3647	363.3647	363.3647	363.3647	363.3647	363.3647
50	$ARL(1)_{\text{unb}}$	366.7942	366.7942	366.7942	366.7942	366.7942	366.7942	366.7942
	$SDRL(1)_{\text{unb}}$	366.2938	366.2938	366.2938	366.2938	366.2938	366.2938	366.2938
100	$ARL(1)_{\text{unb}}$	368.8470	368.8470	368.8470	368.8470	368.8470	368.8470	368.8470
	$SDRL(1)_{\text{unb}}$	368.3467	368.3467	368.3467	368.3467	368.3467	368.3467	368.3467
200	$ARL(1)_{\text{unb}}$	369.7253	369.7253	369.7253	369.7253	369.7253	369.7253	369.7253
	$SDRL(1)_{\text{unb}}$	369.2249	369.2249	369.2249	369.2249	369.2249	369.2249	369.2249

Tabla 5-3.: Valores de  $ARL(1)_{\text{bias}}$  y  $SDRL(1)_{\text{bias}}$ , para  $\alpha = 0.0027$  y distintos  $\lambda_0$  y usando  $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ .

n	Medida	$\lambda_0$						
		0.005	0.01	0.05	0.1	0.5	1	10
5	$ARL(1)_{\text{bias}}$	273.6995	273.6995	273.6995	273.6995	273.6995	273.6995	273.6995
	$SDRL(1)_{\text{bias}}$	273.1974	273.1974	273.1974	273.1974	273.1974	273.1974	273.1974
15	$ARL(1)_{\text{bias}}$	320.9607	320.9607	320.9607	320.9607	320.9607	320.9607	320.9607
	$SDRL(1)_{\text{bias}}$	320.46	320.4600	320.4600	320.4600	320.4600	320.4600	320.4600
30	$ARL(1)_{\text{bias}}$	340.9218	340.9218	340.9218	340.9218	340.9218	340.9218	340.9218
	$SDRL(1)_{\text{bias}}$	340.4213	340.4213	340.4213	340.4213	340.4213	340.4213	340.4213
50	$ARL(1)_{\text{bias}}$	351.0782	351.0782	351.0782	351.0782	351.0782	351.0782	351.0782
	$SDRL(1)_{\text{bias}}$	350.5777	350.5777	350.5777	350.5777	350.5777	350.5777	350.5777
100	$ARL(1)_{\text{bias}}$	359.9694	359.9694	359.9694	359.9694	359.9694	359.9694	359.9694
	$SDRL(1)_{\text{bias}}$	359.4691	359.4691	359.4691	359.4691	359.4691	359.4691	359.4691
200	$ARL(1)_{\text{bias}}$	364.9527	364.9527	364.9527	364.9527	364.9527	364.9527	364.9527
	$SDRL(1)_{\text{bias}}$	364.4523	364.4523	364.4523	364.4523	364.4523	364.4523	364.4523

debido a que la carta con  $\lambda_0$  conocido no es de  $ARL$  insesgado y lo único que se logra con el incremento del tamaño de la muestra es aproximar los límites de la carta en (5-25) y por tanto su desempeño, a los de la carta con  $\lambda_0$  conocido.

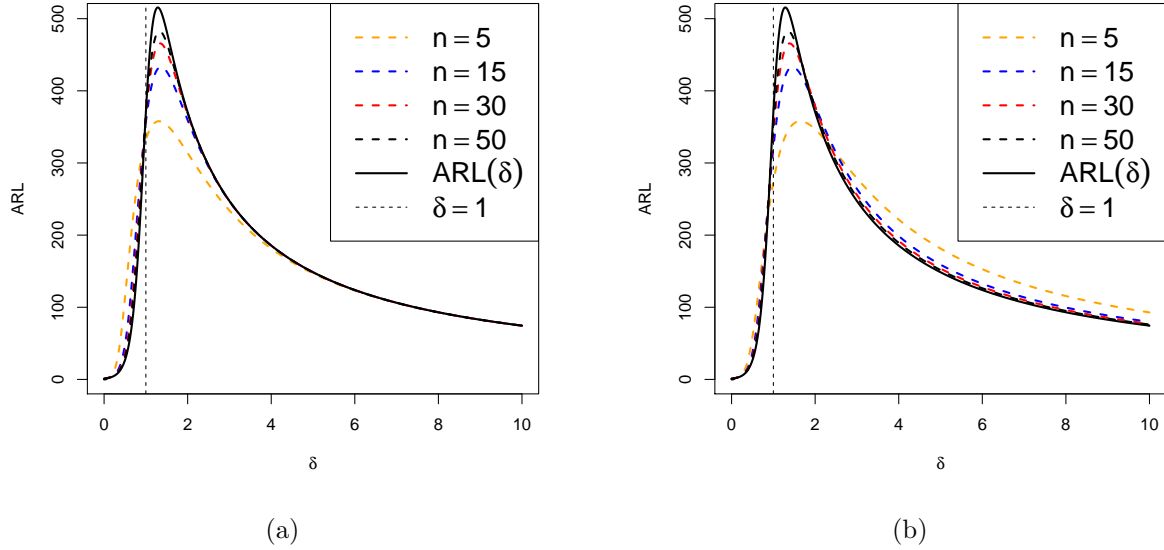


Figura 5-3.: Curva de  $ARL$  de la carta  $t$  con  $\lambda_0 = 0.01$ ,  $\alpha = 0.0027$  y tamaños de muestra  $n = 5$ , 15, 30, y 50. (a) Curvas  $ARL(\delta)$  según (5-10) y de  $ARL(\delta)_{\text{unb}}$  según (5-29). (b) Curvas  $ARL(\delta)$  según (5-10) y de  $ARL(\delta)_{\text{bias}}$  según (5-30).

### 5.3.1. Carta $t$ de $ARL$ insesgado con $\lambda_0$ estimado.

Como se mostró, la carta  $t$  con  $\lambda_0$  estimado, es de  $ARL$  sesgado; debido a esto, Zhang et al. (2006) propuso corregir los límites de la carta  $t$  como sigue,

$$\begin{aligned} \widehat{LCL}_{\text{Zhang}} &= -\frac{\log(1 - \alpha^*/2)\gamma_{\alpha^*}}{(m-1)/T_m} \\ \widehat{UCL}_{\text{Zhang}} &= -\frac{\log(\alpha^*/2)\gamma_{\alpha^*}}{(m-1)/T_m}, \end{aligned} \quad (5-33)$$

en donde  $\gamma_{\alpha^*}$  se define como en (4-5),  $T_m$  es la suma de los  $m$  tiempos que se supone provienen de una distribución exponencial con parámetro  $\lambda_0$  y  $\alpha^*$  se determina a partir de (4-6). A partir de la idea anterior, se buscan construir límites de control para los que la carta  $t$  sea de  $ARL$  insesgado cuando  $\lambda_0$  sea estimado. Lo anterior se hará de varias formas, usando límites de control con colas nominales de igual o distinta probabilidad nominal, y fijando la  $ARL$  en un valor o la tasa nominal de falsa alarma.

#### Ajuste de límites con probabilidades nominales de colas iguales.

Siguiendo las ideas Zhang et al. (2006), Xie et al. (2000), Guo et al. (2014) y Huang y Yang (2015) los límites de control dados en (5-25) y (5-26) se escriben de forma conveniente como

$$\begin{aligned} \widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}} &= C_\alpha \frac{Y}{n-1}, \\ \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}} &= D_\alpha \frac{Y}{n-1} \end{aligned} \quad (5-34)$$

y

$$\begin{aligned}\widehat{LCL}_{\alpha, \text{bias}} &= C_{\alpha}^* \frac{Y}{n}, \\ \widehat{UCL}_{\alpha, \text{bias}} &= D_{\alpha}^* \frac{Y}{n},\end{aligned}\tag{5-35}$$

tal que  $D_{\alpha} > C_{\alpha} > 0$  y  $D_{\alpha}^* > C_{\alpha}^* > 0$ . Ahora bien, se busca determinar cuáles son los valores que deben tomar estas constantes de forma tal que la carta  $t$  sea de  $ARL$  insesgado, la  $ARL$  en control tome un valor fijo sin importar el tamaño de la muestra y  $\lambda_0$  sea estimado de acuerdo a (5-4) y (5-5).

Nótese que con los límites corregidos la  $ARL$  y  $SDRL$  para cada estimador, según las ecuaciones (5-27), (5-28), (5-18) y (5-19) se puede escribir respectivamente como

$$ARL\left(\delta \mid Y = y\right)_{\alpha, \text{unb}} = \frac{1}{1 - \exp\left(-\delta\lambda_0 C_{\alpha} \frac{y}{n-1}\right) + \exp\left(-\delta\lambda_0 D_{\alpha} \frac{y}{n-1}\right)},\tag{5-36}$$

$$ARL\left(\delta \mid Y = y\right)_{\alpha, \text{bias}} = \frac{1}{1 - \exp\left(-\delta\lambda_0 C_{\alpha}^* \frac{y}{n}\right) + \exp\left(-\delta\lambda_0 D_{\alpha}^* \frac{y}{n}\right)},\tag{5-37}$$

con lo que

$$ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}} = \int_0^{\infty} \frac{f_Y(y; n, \lambda_0^{-1})}{1 - \exp\left(-\delta\lambda_0 C_{\alpha} \frac{y}{n-1}\right) + \exp\left(-\delta\lambda_0 D_{\alpha} \frac{y}{n-1}\right)} dy\tag{5-38}$$

$$ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}} = \int_0^{\infty} \frac{f_Y(y; n, \lambda_0^{-1})}{1 - \exp\left(-\delta\lambda_0 C_{\alpha}^* \frac{y}{n}\right) + \exp\left(-\delta\lambda_0 D_{\alpha}^* \frac{y}{n}\right)} dy.\tag{5-39}$$

De acuerdo a (5-18) y (5-19), la  $SDRL$  para (5-34) y (5-35) se pueden escribir respectivamente como

$$SDRL(\delta)_{\alpha, \text{unb}} = \frac{\sqrt{\exp\left(-\delta\lambda_0 \widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}\right) - \exp\left(-\delta\lambda_0 \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}}\right)}}{1 - \exp\left(-\delta\lambda_0 \widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}\right) + \exp\left(-\delta\lambda_0 \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}}\right)},\tag{5-40}$$

y

$$SDRL(\delta)_{\alpha, \text{bias}} = \frac{\sqrt{\exp\left(-\delta\lambda_0 \widehat{LCL}_{\alpha, \text{bias}}\right) - \exp\left(-\delta\lambda_0 \widehat{UCL}_{\alpha, \text{bias}}\right)}}{1 - \exp\left(-\delta\lambda_0 \widehat{LCL}_{\alpha, \text{bias}}\right) + \exp\left(-\delta\lambda_0 \widehat{UCL}_{\alpha, \text{bias}}\right)}.\tag{5-41}$$

Una forma alternativa de construir una carta  $t$  de  $ARL$  insesgado cuando  $\lambda_0$  es estimado, consiste en corregir los límites de forma tal que la  $ARL$  obtenga su máximo en  $\delta = 1$  y tal que la tasa de falsa alarma sea  $\alpha$ . Para ello, sea  $T \sim \exp(t; \lambda)$ , con  $\lambda = \delta\lambda_0$  e independiente de  $Y \sim \text{Gamma}(y; n, 1/\lambda_0)$ . Se buscarán los pares de constantes  $(E_\alpha, F_\alpha)$  y  $(E_\alpha^*, F_\alpha^*)$ , tal que los límites de la carta control con  $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$  y  $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$  sean, respectivamente,

$$\begin{aligned}\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}^* &= E_\alpha \frac{Y}{n-1}, \\ \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}}^* &= F_\alpha \frac{Y}{n-1}\end{aligned}\tag{5-42}$$

y

$$\begin{aligned}\widehat{LCL}_{\alpha, \text{bias}}^* &= E_\alpha^* \frac{Y}{n}, \\ \widehat{UCL}_{\alpha, \text{bias}}^* &= F_\alpha^* \frac{Y}{n}.\end{aligned}\tag{5-43}$$

Para estos límites ((5-42) y (5-43))  $ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}^*$ ,  $ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}^*$ ,  $SDRL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}^*$  y  $SDRL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}^*$  son las funciones de  $ARL$ s incondicionales y  $SDRL$ s, respectivamente. Las expresiones matemáticas de estas funciones son similares a las dadas en (5-38), (5-39), (5-40) y (5-41) respectivamente, pero con  $(E_\alpha, F_\alpha)$  en lugar de  $(C_\alpha, D_\alpha)$  y  $(E_\alpha^*, F_\alpha^*)$  en lugar de  $(C_\alpha^*, D_\alpha^*)$ .

### Ajuste de límites con probabilidades nominales de colas distintas.

Otra manera de hacer que la carta  $t$  sea de  $ARL$  insesgado, cuando  $\lambda_0$  es estimado, consiste en usar los resultados que se obtengan de hacer que la carta sea de  $ARL$  insesgado a partir de los límites definidos en (5-15) cuando el parámetro es conocido. Para ello, si se toma la solución de  $\beta$  obtenida para un determinado  $\alpha$ , se pueden buscar factores que hagan que la carta sea de  $ARL$  insesgado cuando  $\lambda_0$  es desconocido y estimado bien sea con  $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$  o  $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$ . Para esto, los límites de la carta  $t$  dados en (5-15) usando un estimador  $\widehat{\lambda}_0$  se pueden escribir

$$\begin{aligned}\widehat{LCL}_\beta &= -\frac{\log(1-\beta)}{\widehat{\lambda}_0} \\ \widehat{UCL}_\beta &= -\frac{\log(\alpha-\beta)}{\widehat{\lambda}_0}.\end{aligned}\tag{5-44}$$

donde  $\widehat{\lambda}_0$  corresponde a la estimación obtenida mediante (5-4) y/o (5-5), según a los cuales los límites de control se escriben

$$\begin{aligned}\widehat{LCL}_{\beta, \text{unb}} &= -\log(1-\beta) \frac{Y}{n-1} \\ \widehat{UCL}_{\beta, \text{unb}} &= -\log(\alpha-\beta) \frac{Y}{n-1}\end{aligned}\tag{5-45}$$

y

$$\begin{aligned}\widehat{LCL}_{\beta, \text{bias}} &= -\log(1 - \beta) \frac{Y}{n} \\ \widehat{UCL}_{\beta, \text{bias}} &= -\log(\alpha - \beta) \frac{Y}{n},\end{aligned}\quad (5-46)$$

para los cuales la  $ARL$  incondicional se escribe respectivamente,

$$ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}} = \int_0^{\infty} \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0) dy}{1 + \exp\left(\delta\lambda_0 \log(\alpha - \beta) \frac{Y}{n-1}\right) - \exp\left(\delta\lambda_0 \log(1 - \beta) \frac{Y}{n-1}\right)} \quad (5-47)$$

y

$$ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}} = \int_0^{\infty} \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0)}{1 + \exp\left(\delta\lambda_0 \log(\alpha - \beta) \frac{Y}{n}\right) - \exp\left(\delta\lambda_0 \log(1 - \beta) \frac{Y}{n}\right)} dy, \quad (5-48)$$

en donde  $f_Y(y; n, 1/\lambda_0)$  es la f.d.p de  $Y \sim \text{Gamma}(y; n, 1/\lambda_0)$  definida en (5-3).

Si en (5-40) se sustituye  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}})$  por  $(\widehat{LCL}_{\beta, \text{unb}}, \widehat{UCL}_{\beta, \text{unb}})$  y  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{bias}}, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{bias}})$  por  $(\widehat{LCL}_{\beta, \text{bias}}, \widehat{UCL}_{\beta, \text{bias}})$  se puede obtener  $SDRL_{\beta, \text{unb}}$  y  $SDRL_{\beta, \text{bias}}$  para los límites (5-45) y (5-46) respectivamente.

Ahora se desea buscar un ajuste de los límites (5-45) y (5-46) de forma que la carta de control sea de  $ARL$  insesgado y que el valor de la  $ARL$  en control pueda ser fijado en una cantidad sin importar el tamaño de la muestra usado para estimar a  $\lambda_0$ ; para lograr ésto, se escriben las ecuaciones (5-45) y (5-46) de la forma

$$\begin{aligned}\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}} &= -C_{\beta} \log(1 - \beta) \frac{Y}{n-1} \\ \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}} &= -D_{\beta} \log(\alpha - \beta) \frac{Y}{n-1}\end{aligned}\quad (5-49)$$

y

$$\begin{aligned}\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}} &= -C_{\beta}^* \log(1 - \beta) \frac{Y}{n} \\ \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}} &= -D_{\beta}^* \log(\alpha - \beta) \frac{Y}{n},\end{aligned}\quad (5-50)$$

en donde se supone que  $Y \sim \text{Gamma}(y; n, 1/\lambda_0)$  y se escoge el valor de  $\beta$  de acuerdo al  $\alpha$  seleccionado según solución presentada en la sección 5.2.1; por ejemplo para  $\alpha = 0.0027$  se tendrá un  $\beta$  y los pares  $(C_{\beta}, D_{\beta})$  y  $(C_{\beta}^*, D_{\beta}^*)$  serán coeficientes por determinar que se espera



hagan que la carta de control cumpla con lo dicho previamente. De otra parte, si se desea una carta  $t$  de  $ARL$  insesgado en la que se fije la tasa de falsa alarma en un valor, los límites de control se escriben,

$$\begin{aligned}\widehat{LCL}_{\alpha,\beta,\text{unb}}^* &= -E_\beta \log(1-\beta) \frac{Y}{n-1} \\ \widehat{UCL}_{\alpha,\beta,\text{unb}}^* &= -F_\beta \log(\alpha-\beta) \frac{Y}{n-1}\end{aligned}\tag{5-51}$$

y

$$\begin{aligned}\widehat{LCL}_{\alpha,\beta,\text{bias}}^* &= -E_\beta^* \log(1-\beta) \frac{Y}{n} \\ \widehat{UCL}_{\alpha,\beta,\text{bias}}^* &= -F_\beta^* \log(\alpha-\beta) \frac{Y}{n},\end{aligned}\tag{5-52}$$

en donde el valor de  $\beta$  corresponde al hallado en la Sección 5.2.1 de acuerdo a  $\alpha$ , y los  $(E_\beta, F_\beta)$  y  $(E_\beta^*, F_\beta^*)$  son coeficientes por determinar.

Los casos propuestos para hacer que la carta  $t$  de control sea de  $ARL$  insesgado se muestran en la Figura 5-4 y se pueden resumir como sigue:

1. **Fijando la  $ARL$  en control.** En esta situación se trabaja con:

- Probabilidades nominales de colas iguales. En este caso, si  $\lambda_0$  es conocido se proponen como límites corregidos

$$\begin{aligned}LCL_\alpha &= -A_\alpha \frac{\log(1-\alpha/2)}{\lambda_0}, \\ UCL_\alpha &= -B_\alpha \frac{\log(\alpha/2)}{\lambda_0}\end{aligned}$$

Pero si  $\lambda_0$  es estimado, de acuerdo a cada estimador se proponen límites corregidos. Así, con el estimador insesgado los límites son

$$\begin{aligned}\widehat{LCL}_{\alpha,\text{unb}} &= C_\alpha \frac{Y}{n-1}, \\ \widehat{UCL}_{\alpha,\text{unb}} &= D_\alpha \frac{Y}{n-1}.\end{aligned}$$

Si el estimador es sesgado se proponen los límites

$$\begin{aligned}\widehat{LCL}_{\alpha,\text{bias}} &= C_\alpha^* \frac{Y}{n}, \\ \widehat{UCL}_{\alpha,\text{bias}} &= D_\alpha^* \frac{Y}{n},\end{aligned}$$

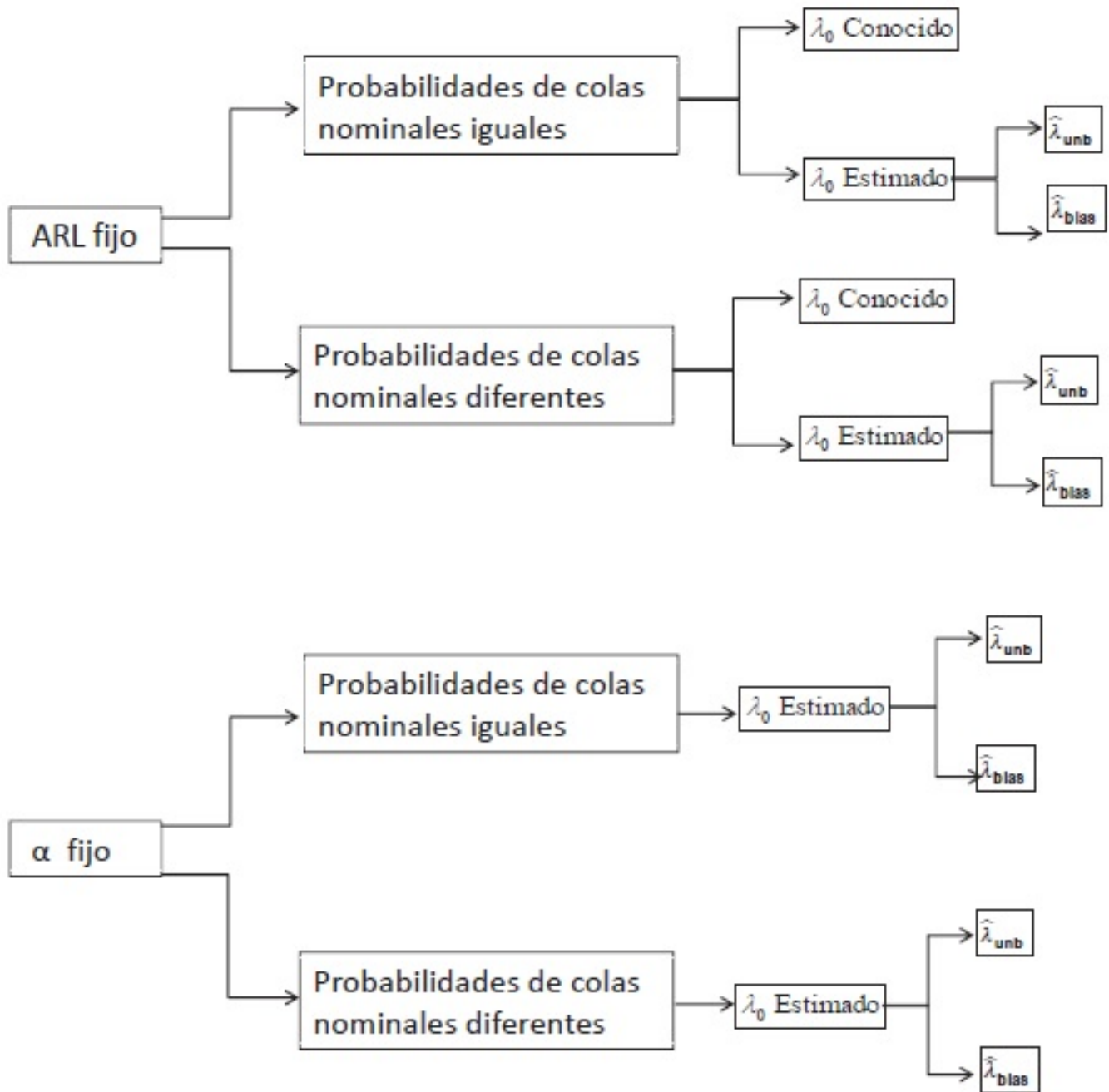


Figura 5-4.: Propuestas para hacer la carta  $t$  de ARL insesgado.

- Con probabilidades nominales de colas distintas. En este caso, si  $\lambda_0$  es conocido se proponen los límites

$$LCL_{\alpha,\beta} = -\frac{\log(1-\beta)}{\lambda_0},$$

$$UCL_{\alpha,\beta} = -\frac{\log(\alpha-\beta)}{\lambda_0}, \text{ con } \beta \in (0, \alpha);$$

sin embargo, si  $\lambda_0$  es estimado, los límites propuestos para el estimador insesgado son

$$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}} = -C_\beta \log(1 - \beta) \frac{Y}{n - 1}$$

$$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}} = -D_\beta \log(\alpha - \beta) \frac{Y}{n - 1}$$

y para el estimador sesgado son

$$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}} = -C_\beta^* \log(1 - \beta) \frac{Y}{n}$$

$$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}} = -D_\beta^* \log(\alpha - \beta) \frac{Y}{n},$$

2. **Fijando la tasa de falsa alarma.** En este caso, se estudia el caso  $\lambda_0$  estimado para los dos estimadores del parámetro y dependiendo de las colas de probabilidades nominales.

- Con probabilidades nominales de colas iguales. Si el estimador es insesgado, los límites corregidos propuestos son

$$\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}^* = E_\alpha \frac{Y}{n - 1},$$

$$\widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}}^* = F_\alpha \frac{Y}{n - 1}$$

y si el estimador es sesgado los límites se escriben

$$\widehat{LCL}_{\alpha, \text{bias}}^* = E_\alpha^* \frac{Y}{n},$$

$$\widehat{UCL}_{\alpha, \text{bias}}^* = F_\alpha^* \frac{Y}{n}.$$

- Con probabilidades nominales de colas distintas. Si el estimador es insesgado, los límites corregidos propuestos son

$$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^* = -E_\beta \log(1 - \beta) \frac{Y}{n - 1}$$

$$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^* = -F_\beta \log(\alpha - \beta) \frac{Y}{n - 1}$$

y con estimador sesgado

$$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^* = -E_\beta^* \log(1 - \beta) \frac{Y}{n}$$

$$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^* = -F_\beta^* \log(\alpha - \beta) \frac{Y}{n},$$



## 6. Resultados

A continuación se presentan los resultados obtenidos para los límites de control propuestos en el capítulo anterior, con los cuales se busca tener una carta  $t$  de  $ARL$  insesgado. Los resultados mostrados corresponden al caso en el que se conoce a  $\lambda_0$  o estima según (5-4) o (5-5), así como la situación en las que se fija la  $ARL$  en control o la tasa de falsa alarma.

### 6.1. Carta $t$ de $ARL$ insesgado con $\lambda_0$ conocido

Para determinar los coeficientes  $A_\alpha$  y  $B_\alpha$  de los límites de control dados en (5-14), se diferencia la ecuación (5-16) correspondiente a su  $ARL$  con respecto a  $\delta$  y se condiciona a que la  $ARL$  obtenga su máximo cuando  $\delta = 1$ ; es decir, se obtiene

$$\left. \frac{d}{d\delta} ARL(\delta)_\alpha \right|_{\delta=1} = 0. \quad (6-1)$$

Además de cumplirse la ecuación (6-1) se debe cumplir también que la  $ARL$  en control sea igual a un valor definido previamente y de acuerdo al interés del usuario; por lo que en este caso se busca que,

$$ARL(1)_\alpha = ARL_0. \quad (6-2)$$

Con lo que  $A_\alpha$  y  $B_\alpha$  deben ser cantidades que satisfagan al sistema de ecuaciones definidos por (6-1) y (6-2), el cual se puede escribir como

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\delta} ARL(\delta)_\alpha \right|_{\delta=1} &= 0, \\ ARL(1)_\alpha &= ARL_0. \end{aligned} \quad (6-3)$$

Para hallar  $\beta$  en los límites de control dados en (5-15), tal que la carta sea de  $ARL$  insesgado, se debe cumplir que

$$\left. \frac{d}{d\delta} ARL(\delta)_{\alpha,\beta} \right|_{\delta=1} = 0. \quad (6-4)$$

Nótese que en general la derivada de (5-9) evaluada en  $\delta = 1$  es de la forma

$$\left. \frac{d}{d\delta} ARL(\delta) \right|_{\delta=1} = \lambda_0 \frac{UCL \exp(-\lambda_0 UCL) - LCL \exp(-\lambda_0 LCL)}{[1 - \exp(-\lambda_0 LCL) + \exp(-\lambda_0 UCL)]^2}. \quad (6-5)$$

Utilizando la ecuación anterior para calcular  $\frac{d}{d\delta}ARL(\delta)_\alpha \big|_{\delta=1}$ , reemplazando el par  $(LCL, UCL)$  por  $(LCL_\alpha, UCL_\alpha)$ , y evaluando (5-16) en  $\delta = 1$ , en (6-3) se obtiene que el sistema de ecuaciones corresponde a

$$\begin{aligned} UCL_\alpha \exp(-\lambda_0 UCL_\alpha) - LCL_\alpha \exp(-\lambda_0 LCL_\alpha) &= 0 \\ \frac{1}{1 - \exp(-\lambda_0 LCL_\alpha) + \exp(-\lambda_0 UCL_\alpha)} &= ARL_0. \end{aligned} \quad (6-6)$$

Luego por (5-14) y (6-6) el sistema de ecuaciones para hallar  $A_\alpha$  y  $B_\alpha$  queda de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} A_\alpha \log(1 - \alpha/2) \exp[A_\alpha \log(1 - \alpha/2)] - B_\alpha \log(\alpha/2) \exp[B_\alpha \log(\alpha/2)] &= 0 \\ \frac{1}{1 - \exp[A_\alpha \log(1 - \alpha/2)] + \exp(B_\alpha \log[\alpha/2])} &= ARL_0. \end{aligned} \quad (6-7)$$

Para obtener  $\beta \in (0, \alpha)$  como solución de la ecuación (6-4), se evalúa (6-5) en  $LCL = LCL_{\alpha, \beta}$  y  $UCL = UCL_{\alpha, \beta}$ , luego se iguala a cero y se llega a

$$\log(1 - \beta) \exp[\log(1 - \beta)] - \log(\alpha - \beta) \exp[\log(\alpha - \beta)] = 0, \quad (6-8)$$

con  $\beta \in (0, \alpha)$ . A partir de las propiedades de logaritmos, (6-8) queda igual a

$$(1 - \beta) \log(1 - \beta) - (\alpha - \beta) \log(\alpha - \beta) = 0. \quad (6-9)$$

Las ecuaciones (6-7) y (6-9) se pueden resolver de forma numérica usando la función **R** `multiroot` del paquete `rootSolve` de Soetaert (2016). La Tabla 6-1 muestra algunos valores de  $A_\alpha$ ,  $B_\alpha$  y  $\beta$  según solución de (6-7) y (6-9), con  $\lambda_0 = 0.01$  y las tasas nominales de falsa alarma  $\alpha = 0.0005, 0.001, 0.002, 0.0027, 0.004$  y  $0.005$ . Además de otros valores, dichas tasas de falsa alarma han sido usadas por autores como Xie et al. (2000), Zhang et al. (2006), Guo et al. (2014) o Yang, Yu, Cheng y Xie (2014). La Tabla 6-1 también presenta los límites  $LCL$  y  $UCL$  de acuerdo a (5-6), conforme a las tasas de falsa alarma nominales seleccionadas y usando  $\lambda_0 = 0.01$ ; así mismo, la Tabla 6-1 contiene los valores respectivos de los nuevos límites de control  $(LCL_\alpha, UCL_\alpha)$  según (5-14) obtenidos usando las soluciones respectivas de  $A_\alpha$  y  $B_\alpha$  respectivamente, al igual que los límites de control  $(LCL_{\alpha, \beta}, UCL_{\alpha, \beta})$  según (5-15), que se calculan a partir de las soluciones de  $\beta$ , y los límites  $(LCL_{Zhang}, UCL_{Zhang})$  de acuerdo a la solución de Zhang et al. (2006).

Se puede observar en la Tabla 6-1, que la amplitud de los límites de control  $LCL$  y  $UCL$  definidos en (5-6) es menor que aquellos que se construyen a partir de (5-12), (5-14) y (5-15). Nótese además que los límites definidos en (5-14) son más amplios que los obtenidos para (5-15). De la Tabla 6-1 también puede notarse que los límites  $(LCL_{Zhang}, UCL_{Zhang})$  son muy parecidos al par  $(LCL_\alpha, UCL_\alpha)$ ; por lo tanto, es de esperarse que las curvas  $ARL$

Tabla 6-1.: Valores de  $A_\alpha$ ,  $B_\alpha$  y  $\beta$  según la solución de (6-7) y (6-9), límites de la carta  $t$  según (5-6) ( $LCL$ ,  $UCL$ ), (5-12) ( $LCL_{Zhang}$ ,  $UCL_{Zhang}$ ), (5-14) ( $LCL_\alpha$ ,  $UCL_\alpha$ ) y (5-15) ( $LCL_{\alpha,\beta}$ ,  $UCL_{\alpha,\beta}$ ).  $\lambda_0 = 0.01$ ,  $ARL_0 = 370$ .

Medidas	$\alpha$					
	<b>0.0005000</b>	<b>0.0010000</b>	<b>0.0020000</b>	<b>0.002700</b>	<b>0.0040000</b>	<b>0.00500</b>
$A_\alpha$	1.818387000	1.805013000	1.78952100	1.78380000	1.77143500	1.764967000
$B_\alpha$	1.205552000	1.214838000	1.22511200	1.22973600	1.23653500	1.240488000
$\beta$	0.000438965	0.000873597	0.00178406	0.00239520	0.00352446	0.004386993
$LCL$	0.025003130	0.050012500	0.10005003	0.13509121	0.20020027	0.250313020
$UCL$	829.4050000	760.0902000	690.775500	660.765100	621.460800	599.1465000
$LCL_{Zhang}$	0.045411370	0.09043641	0.17894790	0.24066609	0.35438138	0.44152049
$UCL_{Zhang}$	1000.056800	923.173800	846.317800	812.743600	768.575800	743.291600
$LCL_\alpha$	0.045465360	0.090273220	0.17904164	0.24097570	0.35464176	0.441794220
$UCL_\alpha$	999.8908000	923.386500	846.277400	812.566600	768.458000	743.2340000
$LCL_{\alpha,\beta}$	0.043906120	0.087397890	0.17856523	0.23980891	0.35306805	0.439664410
$UCL_{\alpha,\beta}$	970.4060000	897.603600	844.050500	809.590700	765.104900	739.7134000

resultantes en estos dos casos sean similares. La relación entre estos pares de límites puede observarse mejor en la Tabla 6-2, la cual muestra los factores que diferencia la definición de los límites  $LCL$ ,  $LCL_\alpha$ ,  $LCL_{\alpha,\beta}$ ,  $LCL_{Zhang}$  y  $UCL$ ,  $UCL_\alpha$ ,  $UCL_{\alpha,\beta}$ ,  $UCL_{Zhang}$ ; en dicha Tabla puede notarse la semejanza entre los factores para los pares de límites ( $LCL_\alpha$ ,  $UCL_\alpha$ ) y ( $LCL_{Zhang}$ ,  $UCL_{Zhang}$ ), haciendo evidente la razón por la que dichos límites de control son tan parecidos y consecuentemente, la curva  $ARL$  que generan. La Tabla (6-2) muestra que los factores de los límites  $LCL_{\alpha,\beta}$  y  $UCL_{\alpha,\beta}$  son ligeramente más pequeños respecto a los demás límites corregidos.

Tabla 6-2.: Factores de ajuste de los límites (5-6), (5-14), (5-12) y (5-15) para algunos valores de  $\alpha$ .

Factores	$\alpha$					
	<b>0.0005</b>	<b>0.0010</b>	<b>0.0020</b>	<b>0.0027</b>	<b>0.0040</b>	<b>0.0050</b>
$-\log(1 - \alpha/2)$	0.000250031	0.000500125	0.001000500	0.001350912	0.002002003	0.002503130
$-\log(\alpha/2)$	8.294049640	7.600902460	6.907755279	6.607650687	6.214608098	5.991464547
$-\log(1 - \alpha^*/2)\gamma_\alpha^*$	0.000454114	0.000904364	0.001789479	0.002406661	0.003543814	0.004415205
$-\log(\alpha^*/2)\gamma_\alpha^*$	10.00056751	9.231737707	8.463177896	8.127436023	7.685758254	7.432916101
$-A_\alpha \log(1 - \alpha/2)$	0.000454654	0.000902732	0.001790416	0.002409757	0.003546418	0.004417942
$-B_\alpha \log(\alpha/2)$	9.998908132	9.233865142	8.462773885	8.125665925	7.684580425	7.432339873
$-\log(1 - \beta)$	0.000439061	0.000873979	0.001785652	0.002398089	0.003530681	0.004396644
$-\log(\alpha - \beta)$	9.704059811	8.976036133	8.440505336	8.095907229	7.651049043	7.397134203

La Figura 6-1 muestra la  $ARL(\delta)$  vs.  $\delta$  según la ecuación (5-10) y la  $ARL(\delta)_\alpha$  vs.  $\delta$  calculada con los límites hallados en la solución de (6-7). La Figura 6-2 muestra nuevamente la  $ARL(\delta)$  vs.  $\delta$  según ecuación (5-10) y la  $ARL(\delta)_{\alpha,\beta}$  vs.  $\delta$  calculada con los límites hallados en la solución de (6-9). Dichas figuras permiten ver que la  $ARL(\delta)_\alpha$  y la  $ARL(\delta)_{\alpha,\beta}$  de la carta de control son máximas cuando  $\delta = 1$ , es decir, las cartas resultantes son de  $ARL$ -insesgado, además, se cumple que la  $ARL$  máxima está fijada en un valor nominal deseado.

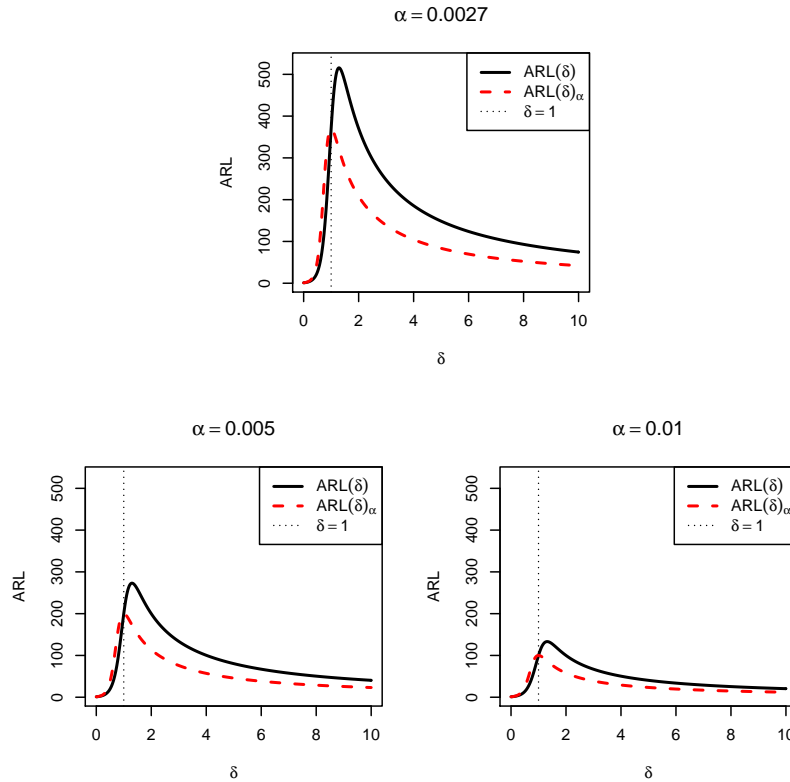


Figura 6-1.: Curvas de  $ARL$  de la carta  $t$  usando  $\lambda_0 = 0.01$ . Curvas de  $ARL(\delta)$  según (5-10) y de  $ARL(\delta)_\alpha$  según (5-16).

Nótese en las Figuras 6-1 y 6-2, que para  $\delta > 1$  las curvas  $ARL$  para las cartas con límites corregidos se encuentran por debajo de la curva que se obtiene cuando se usan los límites probabilísticos definidos de acuerdo a (5-6), esto hace pensar que en promedio, usar los límites corregidos propuestos, permiten detectar de forma más rápida una situación de deterioro en el proceso monitoreado. Nótese además, que para  $0 < \delta < 1$  hay un leve corrimiento a izquierda de la curva  $ARL$  de las cartas con límites corregidos respecto a la que se construye con los límites probabilísticos clásicos dados en (5-6), respectivamente. Esto indica que en promedio, los límites de control definidos en (5-6) detectan un poco más rápido la mejora en el proceso que los límites corregidos dados en (5-14) y (5-15).

Para ver más en detalle uno de los casos representados en las Figuras 6-1 y 6-2, la Tabla 6-3 muestra el valor de la  $ARL$  vs.  $\delta$ , con  $\alpha = 0.0027$ ,  $\lambda_0 = 0.01$  y  $\lambda_0 = 0.05$ , donde  $ARL(\delta)$  representa la  $ARL$  de la carta  $t$  con los límites de control definidos en (5-6),  $ARL(\delta)_\alpha$  corresponde a la  $ARL$  obtenida cuando se usan los límites de control dados en (5-14),  $ARL(\delta)_{\alpha,\beta}$  es el valor de la  $ARL$  cuando los límites de control se construyen usando (5-15) y finalmente  $ARL(\delta)_{\text{Zhang}}$  es la  $ARL$  debida a los resultados de Zhang et al. (2006). Nótese en los resultados que los valores de  $ARL(\delta)$  cuando  $\delta < 1$  son menores a los alcanzados por  $ARL(\delta)_\alpha$ ,  $ARL(\delta)_{\alpha,\beta}$  y  $ARL(\delta)_{\text{Zhang}}$ ; sin embargo, ésto cambia cuando  $\delta > 1$ . Se nota además que cuando  $\delta < 1$ ,  $ARL(\delta)_\alpha$  y  $ARL(\delta)_{\text{Zhang}}$  son un poco mayores que  $ARL(\delta)_{\alpha,\beta}$ , siendo los



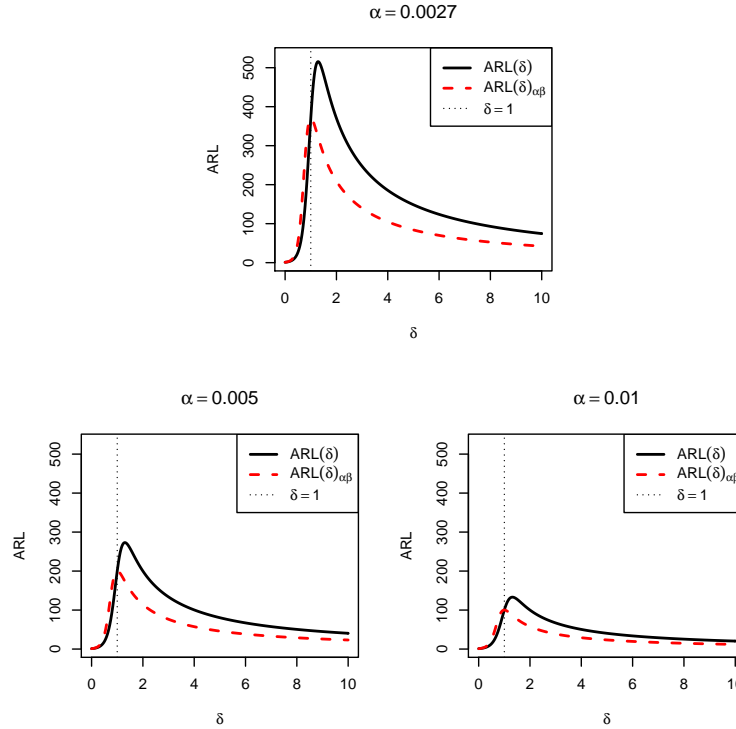


Figura 6-2.: Curvas de  $ARL$  de la carta  $t$  usando  $\lambda_0 = 0.01$ . Curvas de  $ARL(\delta)$  según (5-10) y de  $ARL(\delta)_{\alpha,\beta}$  según (5-17).

valores de  $ARL(\delta)_{\text{Zhang}}$  ligeramente mayores a los de  $ARL(\delta)_{\alpha}$ ; sin embargo, cuando  $\delta > 1$   $ARL(\delta)_{\alpha,\beta}$  es mayor que  $ARL(\delta)_{\alpha}$  y  $ARL(\delta)_{\text{Zhang}}$ , siendo  $ARL(\delta)_{\alpha}$  la menor de estas tres. De lo anterior se concluye que la corrección usando los límites ( $LCL_{\alpha,\beta}$ ,  $UCL_{\alpha,\beta}$ ) es un poco menos eficiente para detectar deterioros del proceso ( $\delta > 1$ ) comparado con los otros dos pares de límites corregidos, en cambio resulta ser un poco mejor en la detección de mejoras del proceso ( $\delta < 1$ ). Los resultados de la Tabla 6-3, confirman que la curva  $ARL(\delta)_{\alpha}$  es muy semejante a la  $ARL_{\text{Zhang}}$ , como previamente se dedujo al comparar los límites y factores de corrección; sin embargo, es un poco mejor la corrección con los límites ( $LCL_{\alpha}$ ,  $UCL_{\alpha}$ ).

Los resultados de la Tabla 6-3 con  $\lambda_0 = 0.01$  y  $\lambda_0 = 0.05$ , muestran que aún cuando las curvas  $ARL(\delta)_{\alpha}$  y  $ARL(\delta)_{\alpha,\beta}$  mostradas en las Figuras 6-1 y 6-2 parecen idénticas, hay ligeras diferencias entre los respectivos valores de  $ARL$  en cada uno de los  $\delta$ . Obsérvese que mirando en conjunto las Figuras 6-1, 6-2 y la Tabla 6-3, los valores de la  $ARL$  en general no dependen de  $\lambda_0$ , sólo dependen de  $\alpha$  y  $\delta$ . Finalmente, nótese, que las  $SDRLs$  son menores que los  $ARLs$ , siendo ligeramente menor la diferencia entre estas dos a medida que aumenta  $\delta$ .

A continuación se analiza la tasa de falsa alarma de las cartas estudiadas hasta este punto.

En la Tabla 6-4,  $\alpha_{\alpha}$ ,  $\alpha_{\alpha,\beta}$  y  $\alpha_{\text{Zhang}}$  representan la tasa de falsa alarma respectivamente para las cartas con límites definidos en (5-14), (5-15) y (5-12), usando un  $\alpha$  nominal de 0.0027.

Tabla 6-3.: Valores de  $ARL(\delta)$  y  $SDRL(\delta)$  de la carta  $t$  con  $\lambda_0$  conocido,  $\alpha = 0.0027$ ,  $\lambda_0 = 0.01$  y  $\lambda_0 = 0.05$ , según los límites (5-6), (5-12), (5-16) y (5-17).

$\lambda_0 = 0.01$										
Medida	$\delta$									
	0.2500	0.500	0.7500	1.000	1.2500	1.500	1.7500	2.000	2.250	2.500
$ARL(\delta)_{Zhang}$	7.5934	54.3844	246.5375	370.4950	328.6749	277.1190	237.8990	208.2533	185.1727	166.7058
$SDRL(\delta)_{Zhang}$	7.0758	53.8821	246.0370	369.9947	328.1745	276.6185	237.3984	207.7527	184.6720	166.2051
$ARL(\delta)$	5.2078	26.7254	124.1380	370.3704	513.8780	482.1790	421.7965	370.3704	329.4582	296.5906
$SDRL(\delta)$	4.6811	26.2206	123.6370	369.8700	513.3778	481.6787	421.2962	369.8700	328.9578	296.0902
$ARL(\delta)_\alpha$	7.5900	54.3349	246.2152	369.9999	328.2494	276.7630	237.5939	207.9864	184.9354	166.4923
$SDRL(\delta)_\alpha$	7.0724	53.8326	245.7147	369.4996	327.7490	276.2626	237.0934	207.4858	184.4348	165.9916
$ARL(\delta)_{\alpha,\beta}$	7.5342	53.6009	243.6845	370.3704	329.6638	278.0873	238.7452	208.9957	185.8328	167.2999
$SDRL(\delta)_{\alpha,\beta}$	7.0164	53.0986	243.1840	369.8700	329.1634	277.5869	238.2447	208.4951	185.3321	166.7992

$\lambda_0 = 0.05$										
Medida	$\delta$									
	0.2500	0.500	0.7500	1.000	1.2500	1.500	1.7500	2.000	2.250	2.500
$ARL(\delta)_{Zhang}$	7.5934	54.3844	246.5375	370.4950	328.6749	277.1190	237.8990	208.2533	185.1727	166.7058
$SDRL(\delta)_{Zhang}$	7.0758	53.8821	246.0370	369.9947	328.1745	276.6185	237.3984	207.7527	184.6720	166.2051
$ARL(\delta)$	5.2078	26.7254	124.1380	370.3704	513.8780	482.1790	421.7965	370.3704	329.4582	296.5906
$SDRL(\delta)$	4.6811	26.2206	123.6370	369.8700	513.3778	481.6787	421.2962	369.8700	328.9578	296.0902
$ARL(\delta)_\alpha$	7.5900	54.3349	246.2152	369.9999	328.2494	276.7630	237.5939	207.9864	184.9354	166.4923
$SDRL(\delta)_\alpha$	7.0724	53.8326	245.7147	369.4996	327.7490	276.2626	237.0934	207.4858	184.4348	165.9916
$ARL(\delta)_{\alpha,\beta}$	7.5342	53.6009	243.6845	370.3704	329.6638	278.0873	238.7452	208.9957	185.8328	167.2999
$SDRL(\delta)_{\alpha,\beta}$	7.0164	53.0986	243.1840	369.8700	329.1634	277.5869	238.2447	208.4951	185.3321	166.7992

Puede observarse que la tasa de falsa alarma alcanzada en cada caso es muy próxima a 0.0027, siendo exacta para  $\alpha_{\alpha,\beta}$ , dado que la solución óptima formulada en (6-9) para ésta carta se resuelve con  $\alpha$  fijo en dicho valor, mientras que la desviación de la tasa de falsa alarma  $\alpha_{Zhang}$  respecto al valor nominal es un poco menor que la observada en  $\alpha_\alpha$ . En general, la tasa de falsa alarma no depende de  $\lambda_0$ , de la misma forma que se concluyó con las  $ARLs$ .

Tabla 6-4.: Tasa de falsa alarma para algunos valores de  $\lambda_0$  debida a las correcciones de en los límites de control de la carta  $t$  dados por (5-12), (5-14) y (5-15), considerando un  $\alpha = 0.0027$ .

$\lambda_0$	$\alpha_\alpha$	$\alpha_{\alpha,\beta}$	$\alpha_{Zhang}$
0.005	0.002702703	0.002700000	0.002699092
0.01	0.002702703	0.002700000	0.002699092
0.05	0.002702703	0.002700000	0.002699092
0.1	0.002702703	0.002700000	0.002699092
0.5	0.002702703	0.002700000	0.002699092
1.0	0.002702703	0.002700000	0.002699092
10	0.002702703	0.002700000	0.002699092

## 6.2. Carta $t$ de $ARL$ insesgado con $\lambda_0$ estimado

A continuación se obtienen los resultados relacionados con la carta  $t$  cuando el parámetro  $\lambda_0$  es estimado de acuerdo a (5-4) y (5-5). Para ello y como se dijo en la Sección 5.3.1 esto se hará usando dos criterios, partiendo de probabilidades nominales colas iguales o distintas y en ambos casos estableciendo la  $ARL$  en control en un valor o la tasa de falsa alarma.

### 6.2.1. Ajuste de límites con probabilidades nominales de colas iguales

En este caso se estudian los límites dados en (5-34), (5-35), (5-42) y (5-43) y se presentan las estrategias para determinar sus respectivos factores de ajuste.

#### Carta $t$ de $ARL$ incesgado fijando la $ARL$ en control

Para resolver el problema de  $ARL$  sesgado de la carta  $t$  usando los límites (5-34), (5-35), se procede de la siguiente manera: debido a que se busca obtener un valor fijo de la  $ARL$  en control y tal que éste sea el máximo valor alcanzado; es decir, se requiere que  $ARL(1) = ARL_0$  y que adicionalmente,  $\frac{d}{d\delta}ARL(\delta) = 0$ , cuando  $\delta = 1$ . De acuerdo a esto, según el estimador a usar  $\hat{\lambda}_{unb}$  o  $\tilde{\lambda}_{unb}$ , se debe trabajar respectivamente con los sistemas de ecuaciones

$$\left. \frac{d}{d\delta}ARL(\delta)_{\alpha,unb} \right|_{\delta=1} = 0 \quad (6-10)$$

$$ARL(1)_{\alpha,unb} = ARL_0$$

y

$$\left. \frac{d}{d\delta}ARL(\delta)_{\alpha,bias} \right|_{\delta=1} = 0 \quad (6-11)$$

$$ARL(1)_{\alpha,bias} = ARL_0.$$

En los sistemas de ecuaciones (6-10) y (6-11) se desea hallar respectivamente, los pares de valores  $(C_\alpha, D_\alpha)$  y  $(C_\alpha^*, D_\alpha^*)$  satisfaciendo las condiciones expresadas por estas ecuaciones.

Debido a que es necesario encontrar la forma final que tendrán los sistemas dados en (6-10) y (6-11). En el primer caso nótese que la derivada con respecto a  $\delta$  del integrando en (5-38) es integrable en  $(0, \infty)$ ; entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta}ARL(\delta)_{\alpha,unb} &= \int_0^\infty f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \\ &\times \frac{d}{d\delta} \left[ \frac{1}{1 - \exp\left(-\delta\lambda_0 C_\alpha \frac{y}{n-1}\right) + \exp\left(-\delta\lambda_0 D_\alpha \frac{y}{n-1}\right)} \right] dy; \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta} ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}} &= \frac{\lambda_0}{n-1} \int_0^{\infty} f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \\ &\quad \times \frac{D_\alpha \exp\left(-\delta \lambda_0 D_\alpha \frac{y}{n-1}\right) - C_\alpha \exp\left(-\delta \lambda_0 C_\alpha \frac{y}{n-1}\right)}{\left[1 - \exp\left(-\delta \lambda_0 C_\alpha \frac{y}{n-1}\right) + \exp\left(-\delta \lambda_0 D_\alpha \frac{y}{n-1}\right)\right]^2} y dy. \end{aligned} \quad (6-12)$$

Por lo que evaluando la ecuación (6-12) en  $\delta = 1$ , ésta queda

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\delta} ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}} \right|_{\delta=1} &= \frac{\lambda_0}{n-1} \int_0^{\infty} f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \\ &\quad \times \frac{D_\alpha \exp\left(-\lambda_0 D_\alpha \frac{y}{n-1}\right) - C_\alpha \exp\left(-\lambda_0 C_\alpha \frac{y}{n-1}\right)}{\left[1 - \exp\left(-\lambda_0 C_\alpha \frac{y}{n-1}\right) + \exp\left(-\lambda_0 D_\alpha \frac{y}{n-1}\right)\right]^2} y dy. \end{aligned} \quad (6-13)$$

De forma semejante se halla la derivada de la ecuación (5-39), la cual evaluada en  $\delta = 1$  es:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\delta} ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}} \right|_{\delta=1} &= \frac{\lambda_0}{n} \int_0^{\infty} f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \\ &\quad \times \frac{D_\alpha^* \exp\left(-\lambda_0 D_\alpha^* \frac{y}{n}\right) - C_\alpha \exp\left(-\lambda_0 C_\alpha^* \frac{y}{n}\right)}{\left[1 - \exp\left(-\lambda_0 C_\alpha^* \frac{y}{n}\right) + \exp\left(-\lambda_0 D_\alpha^* \frac{y}{n}\right)\right]^2} y dy. \end{aligned} \quad (6-14)$$

Reemplazando las ecuaciones (5-38) (evaluada en  $\delta = 1$ ) y (6-13) en (6-10) y las ecuaciones (5-39) (evaluada en  $\delta = 1$ ) y (6-14) en (6-11), los respectivos sistemas de ecuaciones a resolver quedan finalmente escritos de la forma,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \frac{D_\alpha \exp\left(-\lambda_0 D_\alpha \frac{y}{n-1}\right) - C_\alpha \exp\left(-\lambda_0 C_\alpha \frac{y}{n-1}\right)}{\left[1 - \exp\left(-\lambda_0 C_\alpha \frac{y}{n-1}\right) + \exp\left(-\lambda_0 D_\alpha \frac{y}{n-1}\right)\right]^2} y dy &= 0 \\ \int_0^{\infty} f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \frac{1}{1 - \exp\left(-\lambda_0 C_\alpha \frac{y}{n-1}\right) + \exp\left(-\lambda_0 D_\alpha \frac{y}{n-1}\right)} dy &= ARL_0 \end{aligned} \quad (6-15)$$

y

$$\int_0^{\infty} f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \frac{D_{\alpha}^* \exp\left(-\lambda_0 D_{\alpha}^* \frac{y}{n}\right) - C_{\alpha}^* \exp\left(-\lambda_0 C_{\alpha}^* \frac{y}{n}\right)}{\left[1 - \exp\left(-\lambda_0 C_{\alpha}^* \frac{y}{n}\right) + \exp\left(-\lambda_0 D_{\alpha}^* \frac{y}{n}\right)\right]^2} y dy = 0 \quad (6-16)$$

$$\int_0^{\infty} f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \frac{1}{1 - \exp\left(-\lambda_0 C_{\alpha}^* \frac{y}{n}\right) + \exp\left(-\lambda_0 D_{\alpha}^* \frac{y}{n}\right)} dy = ARL_0.$$

La Tabla 6-5 es obtenida haciendo uso de la función **R** `multiroot` del paquete `rootSolve` de Soetaert (2016) y resume los coeficientes obtenidos para los tamaños de muestra 5, 15, 30, 50, 100 y 200 en la solución de los sistemas (6-15) y (6-16), usando un  $ARL_0 = 370$  y un  $\lambda_0 = 0.01$ , junto con la  $ARL$  y  $SDRL$  en control que produce cada una de las soluciones respectivas. La Tabla muestra que las  $ARL$ s en control toman valores muy próximos a 370, con todos los tamaños de muestra.

Tabla 6-5.: Solución  $(C_{\alpha}, D_{\alpha})$  y  $(C_{\alpha}^*, D_{\alpha}^*)$  de (6-15) y (6-16), y los correspondientes  $ARL(1)_{\alpha, \text{unb}}$ ,  $SDRL(1)_{\alpha, \text{unb}}$ ,  $ARL(1)_{\alpha, \text{bias}}$  y  $SDRL(1)_{\alpha, \text{bias}}$ , considerando  $\alpha = 0.0027$ ,  $\lambda_0 = 0.01$ ,  $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ .

<b>n</b>	$C_{\alpha}$	$D_{\alpha}$	$ARL(1)_{\alpha, \text{unb}}$	$SDRL(1)_{\alpha, \text{unb}}$
<b>5</b>	0.001718379	8.733026080	370.0000	369.4993
<b>15</b>	0.002148018	8.781759222	370.0001	396.4997
<b>30</b>	0.002275757	8.574570872	369.9999	369.4996
<b>50</b>	0.002329849	8.438466077	369.9999	369.4997
<b>100</b>	0.002370807	8.303863396	370.0000	369.4996
<b>200</b>	0.002390818	8.221622592	370.0000	369.4996
<b>n</b>	$C_{\alpha}^*$	$D_{\alpha}^*$	$ARL(1)_{\alpha, \text{bias}}$	$SDRL(1)_{\alpha, \text{bias}}$
<b>5</b>	0.002147974	10.916628226	370.0000	369.4993
<b>15</b>	0.002301448	9.4090277370	370.0000	396.4997
<b>30</b>	0.002354231	8.8702457300	370.0000	369.4997
<b>50</b>	0.002377397	8.6106796710	369.9999	369.4996
<b>100</b>	0.002394754	8.3877408040	369.8848	369.3845
<b>200</b>	0.002402832	8.262937279	370.0000	369.4997

La Tabla 6-5 muestra además que a medida que  $n$  va aumentando, ( $n \rightarrow \infty$ ), los valores tomados por los pares  $(C_{\alpha}, D_{\alpha})$  y  $(C_{\alpha}^*, D_{\alpha}^*)$  tienden a ser muy parecidos. Se puede verificar que si  $n = 35000$  por ejemplo, se obtienen los valores de  $C_{\alpha} = 0.002409653$ ,  $D_{\alpha} = 8.126261849$ ,  $C_{\alpha}^* = 0.002409722$  y  $D_{\alpha}^* = 8.126494035$ .

Las Figuras 6.3(a) y 6.3(b) representan la  $ARL$  de la carta  $t$  con límites corregidos de acuerdo a (5-34) y (5-35), usando las constantes halladas respectivamente en la solución de (6-15) y

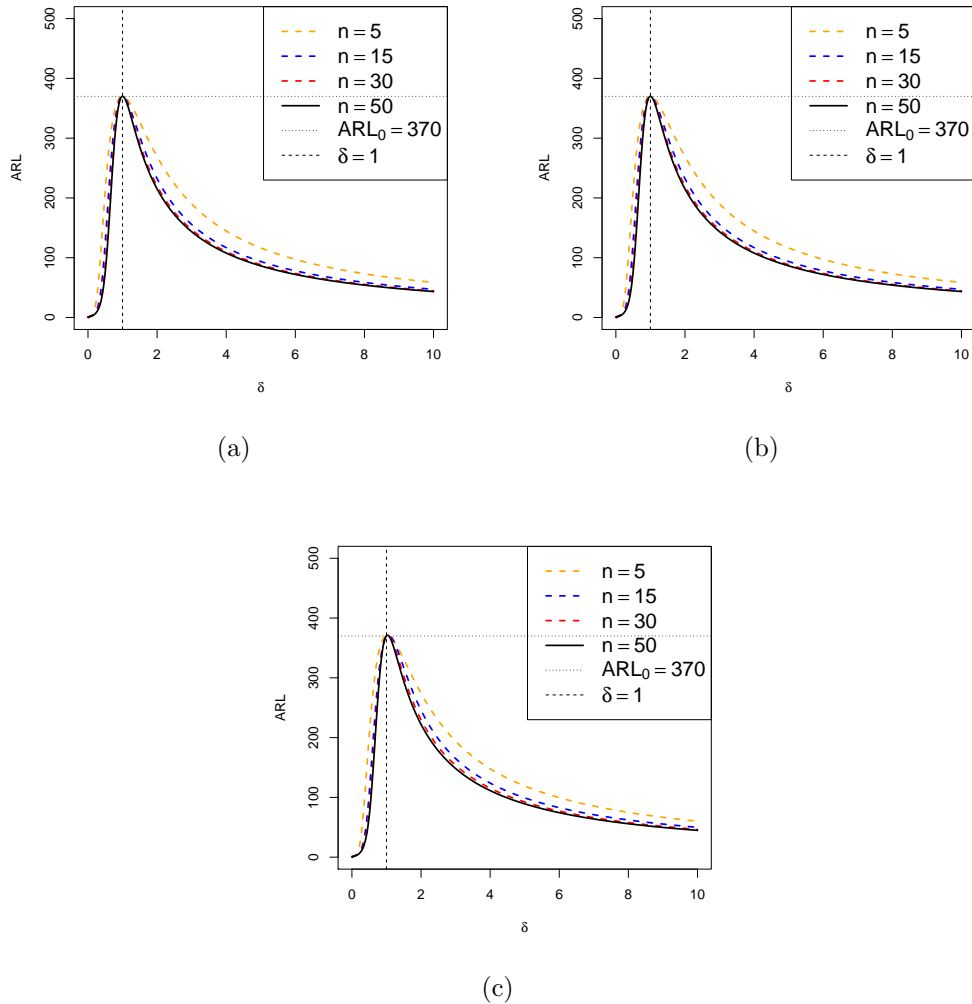


Figura 6-3.: Curvas de  $ARL$  de la carta  $t$  con límites corregidos,  $\lambda_0 = 0.01$  y tamaños de muestra  $n = 5, 15, 30$  y  $50$ . (a) Curvas de  $ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}$  según soluciones de (6-15). (b) Curvas de  $ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}$  según soluciones de (6-16). (c) Curvas de  $ARL_{\alpha, \text{Zhang}}$  según Zhang et al. (2006).

(6-16), para  $n = 5, 15, 30$  y  $50$ . Las figuras mencionadas muestran que con ambas propuestas se obtienen cartas de  $ARL$  insesgado, permitiendo además controlar el valor de la  $ARL_0$  de acuerdo a la necesidad del usuario; es decir, se puede tener una  $ARL_0$  fijo sin importar el tamaño de la muestra con la que se cuenta. Una propiedad que resulta conveniente frente a las limitaciones prácticas que se pueden tener en algunos campos de aplicación donde los datos disponibles pueden ser escasos. También, las Figuras 6.3(a) y 6.3(b) muestran que para  $\delta < 1$  ó  $\delta > 1$ , a mayor  $n$  son menores los valores de la  $ARL$ , lo que indica que en promedio a mayor  $n$ , las cartas informan más rápido que el proceso ha sufrido cambio. Lo anterior es una característica deseable y muestra que al corregir los límites de control se elimina el patrón desfavorable que fue observado en las Figuras 6-1 y 6-2, puesto que ahora se observa que el incremento de la muestra mejora el desempeño de la carta para informar situaciones de cambio del proceso, en particular cuando hay deterioro (incremento de  $\lambda$ ).

Note además que al comparar las Figuras 6.3(a) y 6.3(b) en cada  $n$ , las curvas  $ARL$  son similares, y esto ocurre debido a que para cada  $n$  los pares de límites corregidos  $(\widehat{LCL}_{\alpha,unb}, \widehat{UCL}_{\alpha,unb})$  y  $(\widehat{LCL}_{\alpha,bias}, \widehat{UCL}_{\alpha,bias})$  son prácticamente iguales. Para verificar esto, basta comparar los pares de coeficientes  $\frac{C_\alpha}{n-1}$ ,  $\frac{C_\alpha^*}{n}$ ,  $\frac{D_\alpha}{n-1}$  y  $\frac{D_\alpha^*}{n}$  que multiplican a  $Y$  en las ecuaciones (5-34) y (5-35) y usando los valores óptimos de  $(C_\alpha, D_\alpha)$  y  $(C_\alpha^*, D_\alpha^*)$  encontrados como soluciones de (6-15) y (6-16). En la Tabla 6-6 pueden observarse estos valores para  $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ , y puede concluirse que con cualquiera de los estimadores  $\widehat{\lambda}_{unb}$  o  $\widehat{\lambda}_{bias}$  los límites corregidos en cada tamaño de muestra toman los mismos valores aproximadamente.

Tabla 6-6.: Valores de coeficientes de la variable aleatoria  $Y$  en límites corregidos según ecuaciones (5-34) y (5-35), usando  $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$  y las soluciones óptimas para  $(C_\alpha, D_\alpha)$  y  $(C_\alpha^*, D_\alpha^*)$ .  $\alpha = 0.0027$ ,  $\lambda_0 = 0.01$ .

$n$	$\frac{C_\alpha}{n-1}$	$\frac{C_\alpha^*}{n}$	$\frac{D_\alpha}{n-1}$	$\frac{D_\alpha^*}{n}$
<b>5</b>	0.00042959475000	0.00042959480000	2.18332565200000	2.18332565200000
<b>15</b>	0.00015342985714	0.00015342986667	0.62726851585714	0.62726851580000
<b>30</b>	0.00007847437931	0.00007847436667	0.29567485765517	0.29567485766667
<b>50</b>	0.00004754793878	0.00004754794000	0.17221359340816	0.17221359342000
<b>100</b>	0.00002394754545	0.00002394754000	0.08387740804040	0.08387740805000
<b>200</b>	0.00001201416080	0.00001201416000	0.04131468639196	0.04131468640000

En la Figura 6.3(c) se muestran las curvas  $ARL$  de la carta  $t$  según la carta  $t$  con  $\lambda_0$  estimado y límites corregidos de acuerdo a la ecuación (5-33). A primera vista parece que las curvas  $ARL$  de la carta  $t$  según esta carta no se diferencian de las obtenidas con las correcciones propuestas en esta tesis. Sin embargo, la Tabla 6-7 revela que sí hay diferencias importantes. En esta Tabla se presentan los valores de las  $ARL$ s de las cartas  $t$  con parámetro  $\lambda_0$  estimado sin correcciones de límites:  $ARL(\delta)_{unb}$ ,  $ARL(\delta)_{bias}$  y los límites corregidos  $ARL(\delta)_{\alpha,unb}$ ,  $ARL(\delta)_{\alpha,bias}$  y  $ARL(\delta)_{\alpha,Zhang}$ , donde los sufijos unb y bias hacen referencia a las cartas con  $\lambda_0$  estimado por  $\widehat{\lambda}_{unb}$  o  $\widehat{\lambda}_{bias}$  respectivamente, mientras que el sufijo Zhang denota la carta con límites corregidos dados en (5-33) y propuestos por Zhang et al. (2006). En esta Tabla de nuevo se observa la proximidad entre las  $ARL$ s de las cartas con límites corregidos según las propuestas formuladas en esta tesis. Ahora bien, comparando con la propuesta de Zhang et al. (2006), se observa que esta última es más efectiva para valores de  $\delta < 1$ , es decir, para detectar mejoras, pero es menos efectiva cuando  $\delta > 1$ , o sea, cuando hay deterioro del proceso. Si ahora se comparan las  $ARL$ s de las cartas con límites corregidos vs. sin corregir, la Tabla 6-7 muestra que las correcciones perjudican el desempeño en la detección de mejoras del proceso ( $\delta < 1$ ), en especial con  $n$  pequeño, pues la  $ARL$  con límites corregidos son mayores que las  $ARL$  con límites sin corregir, sin embargo, cuando hay deterioro en el proceso ( $\delta > 1$ ), es mejor usar límites corregidos, y esta ventaja es mayor a medida que  $n$  aumenta. Considerando que resulta más grave la menor efectividad en la detección de deterioro que la mejora del proceso, se puede concluir que la corrección de los límites es necesaria y recomendable.

Tabla 6-7.: Valores de  $ARL$  de la carta  $t$  para algunos tamaños de muestra  $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ ,  $\delta$ , con  $\lambda_0 = 0.01$  y  $ARL_0 = 370$  usando los límites dados en (5-33), (5-25) y (5-26) y los límites corregidos según (5-34) y (5-35).

n	Medida	$\delta$									
		0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
5	$ARL(\delta)_{\text{unb}}$	13.2	112.97	252.26	331.99	357.04	352.63	335.36	313.70	291.55	270.58
	$ARL(\delta)_{\text{bias}}$	7.29	59.36	172.64	273.70	331.99	355.10	356.64	346.65	331.21	313.70
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}$	32.2	212.14	340.34	370.00	355.24	326.86	296.85	269.18	244.84	223.78
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}$	32.2	212.14	340.34	370.00	355.24	326.86	296.85	269.18	244.84	223.78
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{Zhang}}$	29.8	203.67	335.58	370.06	358.18	331.19	301.70	274.13	249.69	228.43
15	$ARL(\delta)_{\text{unb}}$	6.55	48.30	195.04	356.67	427.41	426.55	396.20	359.40	324.75	294.53
	$ARL(\delta)_{\text{bias}}$	5.74	37.56	158.87	320.96	414.12	432.43	412.12	379.08	345.07	314.16
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}$	12.7	126.71	313.66	370.00	344.63	302.35	263.83	232.36	207.08	186.59
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}$	12.7	126.71	313.66	370.00	344.63	302.35	263.83	232.36	207.08	186.59
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{Zhang}}$	11.0	106.67	292.56	369.75	356.22	317.19	278.51	245.93	219.41	197.79
30	$ARL(\delta)_{\text{unb}}$	5.79	35.79	165.51	363.87	460.02	454.01	412.14	367.41	328.57	296.32
	$ARL(\delta)_{\text{bias}}$	5.46	31.75	146.56	340.92	453.01	459.82	422.82	378.89	339.50	306.39
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}$	9.93	91.79	294.31	370.00	338.39	290.87	251.09	220.10	195.77	176.26
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}$	9.93	91.79	294.31	370.00	338.39	290.87	251.09	220.10	195.77	176.26
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{Zhang}}$	9.06	79.35	274.47	370.23	349.06	302.99	262.26	230.06	204.67	184.28
50	$ARL(\delta)_{\text{unb}}$	5.54	31.74	150.43	366.79	477.78	465.94	417.20	369.21	329.17	296.52
	$ARL(\delta)_{\text{bias}}$	5.35	29.62	139.12	351.08	473.74	470.62	424.36	376.39	335.79	302.54
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}$	8.97	76.64	281.21	370.00	334.85	285.35	245.57	215.07	191.26	172.18
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}$	8.97	76.64	281.21	370.00	334.85	285.35	245.57	215.07	191.26	172.18
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{Zhang}}$	8.43	68.79	265.08	370.45	343.29	294.30	253.59	222.16	197.56	177.86
100	$ARL(\delta)_{\text{unb}}$	5.37	29.08	137.75	368.85	494.06	474.63	420.00	369.98	329.37	296.57
	$ARL(\delta)_{\text{bias}}$	5.28	28.12	132.23	359.97	492.27	477.55	423.83	373.63	332.68	299.56
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}$	8.28	65.31	267.13	370.00	331.69	280.98	241.44	211.39	187.96	169.22
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}$	8.11	62.86	260.65	369.88	334.38	283.72	243.86	213.52	189.86	170.92
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{Zhang}}$	7.99	61.26	256.43	370.17	336.69	286.03	245.89	215.30	191.44	172.35
200	$ARL(\delta)_{\text{unb}}$	5.29	27.87	131.02	369.73	503.47	478.62	421.02	370.21	329.43	296.58
	$ARL(\delta)_{\text{bias}}$	5.24	27.41	128.33	364.95	502.69	480.24	422.98	372.04	331.07	298.07
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}$	7.94	59.77	257.83	370.00	329.98	278.82	239.45	209.63	186.40	167.81
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}$	7.94	59.77	257.83	370.00	329.98	278.82	239.45	209.63	186.40	167.81
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{Zhang}}$	7.79	57.72	251.60	370.13	332.75	281.54	241.84	211.72	188.26	169.48

La Tabla 6-8 muestra para diferentes tamaños de muestra, las tasas de falsa alarma,  $\alpha_{\text{unb}}$ ,  $\alpha_{\text{bias}}$ ,  $\alpha_{\alpha, \text{unb}}$  y  $\alpha_{\alpha, \text{bias}}$  para las cartas construidas con los límites según (5-25), (5-26), (5-34) y (5-35), respectivamente, en los dos últimos casos con las soluciones óptimas encontradas para los sistemas de ecuaciones en (6-15) y (6-16). Puede observarse que en todos los casos, las tasas de falsa alarma son mayores al valor nominal y que antes de corregir los límites, existen diferencias notorias entre las tasas de falsa alarma de las cartas usando los estimadores  $\hat{\lambda}_{\text{unb}}$  y  $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$ , especialmente para  $n$  pequeño, siendo  $\alpha_{\text{unb}} < \alpha_{\text{bias}}$ . Una vez se aplican las correcciones a los límites de control, las diferencias entre las tasas de falsa alarma disminuyen significativamente ( $\alpha_{\alpha, \text{unb}}$  y  $\alpha_{\alpha, \text{bias}}$ ). Otro aspecto importante a resaltar, es que a mayor  $n$ , las tasas de falsa alarma se aproximan a la tasa de falsa alarma nominal de  $\alpha = 0.0027$ , sin embargo, la aproximación es más rápida con los límites corregidos, pero en general, se necesita un tamaño de muestra grande para alcanzar este valor.

Ahora bien, si se comparan las tasas de falsa alarma  $\alpha_{\alpha, \text{unb}}$  y  $\alpha_{\alpha, \text{bias}}$  con los de la Tabla A-1



Tabla 6-8.: Tasa de falsa alarma de las cartas con los límites (5-25) y (5-26) y los límites corregidos dados en (5-34) y (5-35), con una tasa de falsa alarma nominal  $\alpha = 0.0027$ ,  $\lambda_0 = 0.01$ ,  $n = 5, 15, 30, 50, 100$  y  $200$ .

n	$\alpha_{\text{unb}}$	$\alpha_{\text{bias}}$	$\alpha_{\alpha, \text{unb}}$	$\alpha_{\alpha, \text{bias}}$
5	0.0093112995431	0.0161793813682	0.0052043151606	0.0052043154099
10	0.0055646736953	0.0076148642848	0.0033031434176	0.0033031439718
15	0.0044766424337	0.0055403406966	0.0029717751494	0.0029717752923
30	0.0035130941084	0.0038996273319	0.0027731823214	0.0027731819429
50	0.0031684349018	0.0033671571248	0.0027290544109	0.0027290544718
100	0.0029266982087	0.0030140269476	0.0027095361903	0.0027095356462
200	0.0028114334735	0.0028521660145	0.0027044434237	0.0027044434237
300	0.0027738599146	0.0028003715269	0.0027034806675	0.0027034799569
500	0.0027441092824	0.0027597092216	0.0027029840011	0.0027029836292
1000	0.0027219769287	0.0027296623001	0.0027027735375	0.0027027730273
1500	0.0027146339967	0.0027197321803	0.0026995235218	0.0027027343949

(ver apéndice A), tomada de Zhang et al. (2006), columna para  $\lambda_0 = 0.01$  para los tamaños de muestra  $n = 5, 10, 15, 30, 50, 100, 200$  y  $300$ , éstos últimos son ligeramente mayores, esto quiere decir que las correcciones propuestas en esta tesis logran una leve mejora en ésta característica, comparada con Zhang et al. (2006), puesto que la aproximación con esta última al valor nominal es más lenta.

La Figura 6-4 corrobora lo dicho antes en relación a la Tabla (6-8), donde es visible que las tasas de falsa alarma de las cartas sin corregir límites, son mucho mayores que cuando se corrigen los límites de control, en especial es mayor la tasa de falsa alarma de la carta sin límites corregidos usando el estimador  $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$  y tamaños de muestra pequeños.

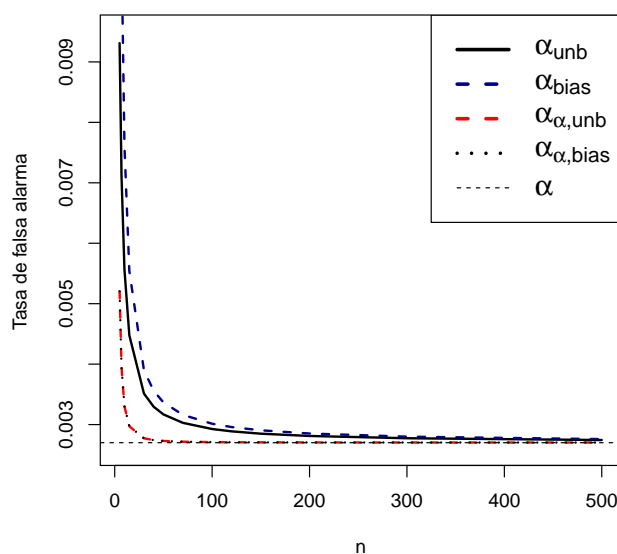


Figura 6-4.: Tasa de falsa alarma  $\alpha_{\text{unb}}$ ,  $\alpha_{\text{bias}}$ ,  $\alpha_{\alpha, \text{unb}}$  y  $\alpha_{\alpha, \text{bias}}$  para la carta  $t$  con  $\alpha = 0.0027$  y  $\lambda_0 = 0.01$  y los límites definidos en (5-25), (5-26), (5-34) y (5-35).

### Carta de ARL insesgado fijando la tasa de falsa alarma en un valor nominal $\alpha$

Como se ha dicho antes, se puede construir una carta  $t$  de ARL insesgado cuando  $\lambda_0$  es estimado, corrigiendo los límites de forma tal que la ARL obtenga su máximo en  $\delta = 1$  y que la tasa de falsa alarma sea  $\alpha$ . Para ello, se buscarán los pares de constantes  $(E_\alpha, F_\alpha)$  y  $(E_\alpha^*, F_\alpha^*)$ , de los límites de control dados en (5-42) y (5-43). Para lograr lo anterior, sean  $ARL(\delta)_{\alpha, \text{umb}}^*$  y  $ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}^*$  las funciones de ARL incondicionales, usando los límites de control definidos en (5-42) y (5-43), respectivamente. Las expresiones matemáticas de estas funciones son similares a las dadas en (5-38) y (5-39), pero con  $(E_\alpha, F_\alpha)$  en lugar de  $(C_\alpha, D_\alpha)$  y  $(E_\alpha^*, F_\alpha^*)$  en lugar de  $(C_\alpha^*, D_\alpha^*)$ . Entonces se hallan  $(E_\alpha, F_\alpha)$  tal que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\delta} ARL^*(\delta)_{\alpha, \text{umb}} \right|_{\delta=1} &= 0, \\ P\left(T < E_\alpha \frac{Y}{n-1} \middle| \lambda = \lambda_0\right) + P\left(T > F_\alpha \frac{Y}{n-1} \middle| \lambda = \lambda_0\right) &= \alpha \end{aligned} \quad (6-17)$$

y  $(E_\alpha^*, F_\alpha^*)$  tal que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\delta} ARL^*(\delta)_{\alpha, \text{bias}} \right|_{\delta=1} &= 0, \\ P\left(T < E_\alpha^* \frac{Y}{n} \middle| \lambda = \lambda_0\right) + P\left(T > F_\alpha^* \frac{Y}{n} \middle| \lambda = \lambda_0\right) &= \alpha. \end{aligned} \quad (6-18)$$

Las propuestas dadas en (6-17) y (6-18) como en el caso anterior, se deben resolver para los factores de corrección de los límites. En estos sistemas se pretende hallar los valores de los coeficientes  $(E_\alpha, F_\alpha)$  y  $(E_\alpha^*, F_\alpha^*)$ , respectivamente, que permitan que la ARL sea máximo cuando el parámetro está en control y que además, se cumpla la tasa de falsa alarma nominal esperada  $\alpha$ , donde las expresiones probabilísticas dadas correspondan a las tasas de falsa alarma en cada carta.

Derivando con respecto a  $\delta$  a  $ARL(\delta)_{\alpha, \text{umb}}^*$  y evaluando en  $\delta = 1$  se obtiene

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\delta} ARL(\delta)_{\alpha, \text{umb}}^* \right|_{\delta=1} &= \lambda_0 \int_0^\infty \frac{y}{n-1} f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \\ &\quad \times \frac{F_\alpha \exp\left(-\lambda_0 F_\alpha \frac{y}{n-1}\right) - E_\alpha \exp\left(-\lambda_0 E_\alpha \frac{y}{n-1}\right)}{\left[1 - \exp\left(-\lambda_0 E_\alpha \frac{y}{n-1}\right) + \exp\left(-\lambda_0 F_\alpha \frac{y}{n-1}\right)\right]^2} dy. \end{aligned} \quad (6-19)$$

Ahora bien, la cantidad

$$P\left(T < E_\alpha \frac{Y}{n} \middle| \lambda = \lambda_0\right) + P\left(T > F_\alpha \frac{Y}{n} \middle| \lambda = \lambda_0\right), \quad (6-20)$$

corresponde a la probabilidad de caer fuera de los límites de control cuando el proceso está en control. Nótese que,

$$\begin{aligned} P\left(T < E_\alpha \frac{Y}{n-1} \middle| \lambda = \lambda_0\right) &= \int_0^\infty \int_0^{E_\alpha \frac{y}{n-1}} \lambda_0 \exp(-\lambda_0 t) \times f_Y(y; n, \lambda_0^{-1}) dt dy \\ &= \int_0^\infty \left[1 - \exp\left(-\lambda_0 E_\alpha \frac{y}{n-1}\right)\right] \times f_Y(y; n, \lambda_0^{-1}) dy \\ P\left(T < E_\alpha \frac{Y}{n-1} \middle| \lambda = \lambda_0\right) &= 1 - \int_0^\infty \exp\left(-\lambda_0 E_\alpha \frac{y}{n-1}\right) \times f_Y(y; n, \lambda_0^{-1}) dy, \end{aligned}$$

en donde se ha considerado que la densidad de  $Y$  coincide con la ecuación (5-3). Por otro lado, el valor tomado por el término  $P(T > F_\alpha \frac{Y}{n-1} | \lambda = \lambda_0)$  es obtenido como sigue:

$$\begin{aligned} P\left(T > F_\alpha \frac{Y}{n-1} \middle| \lambda = \lambda_0\right) &= \int_0^\infty \int_{F_\alpha \frac{y}{n-1}}^\infty \lambda_0 \exp(-\lambda_0 t) \times f_Y(y; n, 1/\lambda_0) dt dy \\ &= \int_0^\infty \exp\left(-\lambda_0 F_\alpha \frac{y}{n-1}\right) \times f_Y(y; n, 1/\lambda_0) dy. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en (6-20) se obtiene

$$1 + \int_0^\infty f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \times \left[ \exp\left(-\lambda_0 F_\alpha \frac{y}{n-1}\right) - \exp\left(-\lambda_0 E_\alpha \frac{y}{n-1}\right) \right] dy. \quad (6-21)$$

Entonces reemplazando (6-19) y (6-21) en (6-17) se obtiene,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \frac{F_\alpha \exp\left(-\lambda_0 F_\alpha \frac{y}{n-1}\right) - E_\alpha \exp\left(-\lambda_0 E_\alpha \frac{y}{n-1}\right)}{\left[1 - \exp\left(-\lambda_0 E_\alpha \frac{y}{n-1}\right) + \exp\left(-\lambda_0 F_\alpha \frac{y}{n-1}\right)\right]^2} y dy &= 0 \\ 1 + \int_0^\infty f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \left[ \exp\left(-\lambda_0 F_\alpha \frac{y}{n-1}\right) - \exp\left(-\lambda_0 E_\alpha \frac{y}{n-1}\right) \right] dy &= \alpha. \end{aligned} \quad (6-22)$$

Siguiendo un procedimiento como el anterior, el sistema dado en (6-18) queda igual a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \frac{F_\alpha^* \exp\left(-\lambda_0 F_\alpha^* \frac{y}{n}\right) - E_\alpha^* \exp\left(-\lambda_0 E_\alpha^* \frac{y}{n}\right)}{\left[1 - \exp\left(-\lambda_0 E_\alpha^* \frac{y}{n}\right) + \exp\left(-\lambda_0 F_\alpha^* \frac{y}{n}\right)\right]^2} y dy &= 0 \\ 1 + \int_0^\infty f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \left[ \exp\left(-\lambda_0 F_\alpha^* \frac{y}{n}\right) - \exp\left(-\lambda_0 E_\alpha^* \frac{y}{n}\right) \right] dy &= \alpha. \end{aligned} \quad (6-23)$$

En la Tabla 6-9 se muestran los resultados obtenidos para los pares  $(E_\alpha, F_\alpha)$  y  $(E_\alpha^*, F_\alpha^*)$ , mediante la función `multiroot` del paquete **R** `rootSolve` de Soetaert (2016), y que corresponden a las soluciones de las ecuaciones (6-22) y (6-23), para tamaños de muestra  $n = 5$ ,

15, 30, 50, 100 y 200 y una tasa de falsa alarma nominal de  $\alpha = 0.0027$ . En la misma Tabla, se resumen la  $ARL^*(1)_{\alpha, \text{unb}}$ ,  $SDRL(1)_{\alpha, \text{unb}}^*$ ,  $ARL(1)_{\alpha, \text{bias}}^*$ ,  $SDRL(1)_{\alpha, \text{bias}}^*$ <sup>1</sup> que se obtienen en cada caso. La Tabla 6-9 evidencia, que  $ARL(1)_{\alpha, \text{unb}}^*$  es muy similar  $ARL(1)_{\alpha, \text{bias}}^*$ , lo que se concluye que con ambos procedimientos se logra el mismo resultado para un tamaño de muestra seleccionado.

Tabla 6-9.: Solución  $(E_\alpha, F_\alpha)$  y  $(E_\alpha^*, F_\alpha^*)$  de (6-22) y (6-23), y los correspondientes  $ARL^*(1)_{\alpha, \text{unb}}$ ,  $SDRL^*(1)_{\alpha, \text{unb}}$ ,  $ARL^*(1)_{\alpha, \text{bias}}$  y  $SDRL^*(1)_{\alpha, \text{bias}}$ , considerando  $\alpha = 0.0027$ ,  $\lambda_0 = 0.01$ ,  $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ .

<b>n</b>	$E_\alpha$	$F_\alpha$	$ARL^*(1)_{\alpha, \text{unb}}$	$SDRL^*(1)_{\alpha, \text{unb}}$
<b>5</b>	0.000664400	10.0506300	963.4434	962.9431
<b>15</b>	0.001946460	8.914854990	408.7337	408.2333
<b>30</b>	0.002215870	8.608843730	380.1208	379.6204
<b>50</b>	0.002305278	8.451640554	373.9945	373.4942
<b>100</b>	0.002362570	8.308038010	371.3079	370.8076
<b>200</b>	0.008694300	8.223522866	370.6090	370.1086

<b>n</b>	$E_\alpha^*$	$F_\alpha^*$	$ARL^*(1)_{\alpha, \text{bias}}$	$SDRL^*(1)_{\alpha, \text{bias}}$
<b>5</b>	0.000830501	12.5632800	963.4430	962.9426
<b>15</b>	0.002085490	9.551630350	408.7336	408.2333
<b>30</b>	0.002292281	8.905700406	380.1208	379.6205
<b>50</b>	0.002352324	8.624123015	373.9946	373.4943
<b>100</b>	0.002386432	8.391957596	371.3078	370.8075
<b>200</b>	0.002398938	8.264846953	370.6089	370.1086

La Tabla 6-10 compara los coeficientes  $\frac{E_\alpha}{n-1}$  con  $\frac{E_\alpha^*}{n}$ ,  $\frac{F_\alpha}{n-1}$  con  $\frac{F_\alpha^*}{n}$ , usados como factores multiplicando a la variable aleatoria  $Y$  en los correspondientes límites de control superior e inferior dados en (5-42) y (5-43). Puede verse en cada tamaño de muestra que estos coeficientes son equivalentes, por lo que los límites de control en (5-42) y (5-43) resultan similares al igual que sus respectivas curvas ARL, exhibidas en las Figuras 6.5(a) y 6.5(b). Estas figuras muestran que usando los límites corregidos según (5-42) y (5-43), la carta es de  $ARL$  insesgado, para cada tamaño de muestra, además, se observa el comportamiento deseado en la  $ARL$  conforme aumenta el tamaño de muestra, esto es, que a mayor  $n$  menor es la  $ARL$  cuando el parámetro del proceso cambia, permitiendo detectar en promedio más rápido esta situación. Nótese además, la similitud entre las  $ARL$  de las Figuras (5-42) y (5-43), en cada tamaño de muestra  $n$ .

<sup>1</sup>Las definiciones de  $SDRL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}^*$  y  $SDRL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}^*$  son semejantes a (5-40) y (5-41) respectivamente, reemplazando  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}})$  por  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}}^*)$  y  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{bias}}, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{bias}})$  por  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{bias}}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{bias}}^*)$

Tabla 6-10.: Valores de coeficientes de la variable aleatoria  $Y$  en límites corregidos según ecuaciones (5-42) y (5-43), usando  $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$  y las soluciones óptimas para  $(E_\alpha, F_\alpha)$  y  $(E_\alpha^*, F_\alpha^*)$ .  $\alpha = 0.0027$ ,  $\lambda_0 = 0.01$ .

$n$	$\frac{E_\alpha}{n-1}$	$\frac{E_\alpha^*}{n}$	$\frac{F_\alpha}{n-1}$	$\frac{F_\alpha^*}{n}$
5	0.00016610015000	0.00016610014000	2.51265600000000	2.51265600000000
15	0.00013903264286	0.00013903266667	0.63677535666667	0.63677535666667
30	0.00007640937931	0.00007640936667	0.29685668020000	0.29685668020000
50	0.00004704648980	0.00004704648000	0.17248246030000	0.17248246030000
100	0.00002386431313	0.00002352324000	0.08391957596000	0.08391957596000
200	0.00001199468844	0.00001199469000	0.04132423476500	0.04132423476500

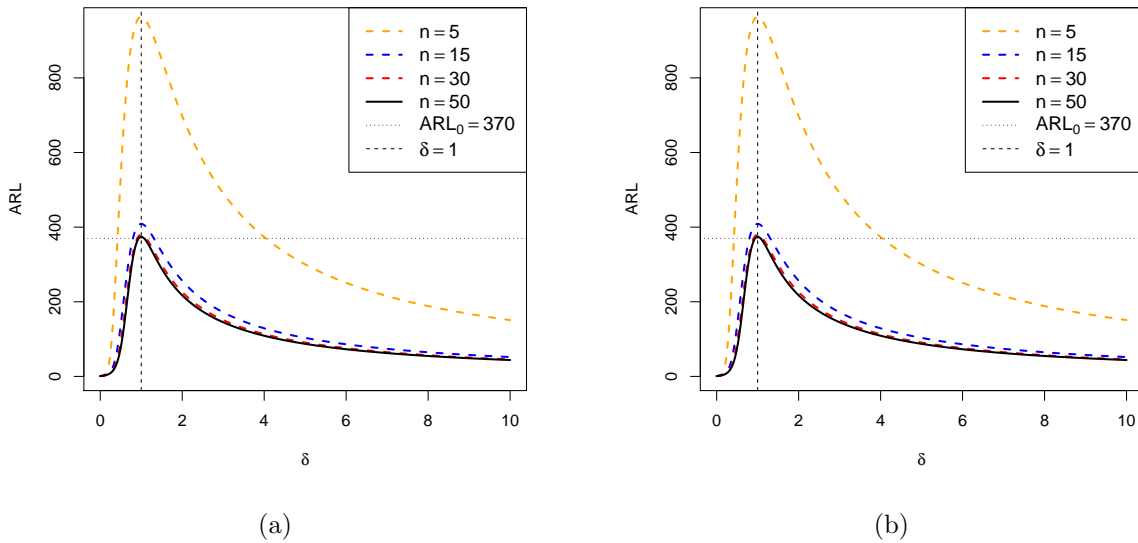


Figura 6-5.: Curvas de  $ARL$  de la carta  $t$  con límites corregidos,  $\lambda_0 = 0.01$ ,  $\alpha = 0.0027$  y tamaños de muestra  $n = 5, 15, 30$  y  $50$ . (a) Curvas de  $ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}^*$  según soluciones de (6-22). (b) Curvas de  $ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}^*$  según soluciones de (6-23).

Si bien las correcciones a los límites propuestos en (5-34), (5-35) (5-42) y (5-43) producen cartas de  $ARL$  insesgado, las dos primeras, permiten controlar el valor de la  $ARL_0$  de acuerdo a la necesidad del usuario; es decir, se puede tener un valor de  $ARL_0$  fijo sin importar el tamaño de la muestra con la que se cuente, además de lo anterior, los resultados son consistentes sin importar si el estimador de  $\lambda_0$  es insesgado como el dado en (5-4) o sesgado como (5-5). Con las dos últimas propuestas son necesarios tamaños de muestra  $n \geq 30$  para tener una  $ARL_0$  del nivel deseado, tal cual se muestra en las Figuras 6.5(a) y 6.5(b).

Vale aclarar que usando las expresiones probabilísticas de la tasa de falsa alarma presentadas en las ecuaciones (6-17) y (6-18), se puede verificar que con cualquier tamaño de muestra  $n$ , los límites corregidos de acuerdo a (5-42) y (5-43), proporcionan una tasa incondicional de falsa alarma igual al valor  $\alpha$  fijado, aunque como ya se notó previamente en las Figuras 6.5(a) y 6.5(b), no se tiene una  $ARL(1)$  fijo independiente de  $n$ , y su valor es bastante alejado

de  $ARL_0 = 1/\alpha$  cuando  $n$  es pequeño.

En la Tabla 6-11 se presentan los valores de las  $ARL$ s de las cartas  $t$  con parámetro  $\lambda_0$  estimado sin correcciones de límites:  $ARL(\delta)_{\text{unb}}$ ,  $ARL(\delta)_{\text{bias}}$  y los límites corregidos  $ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}^*$ ,  $ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}^*$ . En esta Tabla se observa que si bien las cartas con límites (5-42) y (5-43) son de  $ARL$  insesgado, la detección de cambios del proceso es más lenta que cuando los límites de la carta son (5-25) o (5-26). Nótese además, que  $ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}^* = ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}^*$ .

Tabla 6-11.: Valores de  $ARL$  de la carta  $t$  para algunos tamaños de muestra  $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ ,  $\delta$ ,  $\lambda_0 = 0.01$  y  $ARL_0 = 370$  usando los límites dados en (5-25) y (5-26); los límites corregidos según (5-42) y (5-43).

n	Medida	$\delta$									
		0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
5	$ARL(\delta)_{\text{unb}}$	13.2	112.97	252.26	331.99	357.04	352.63	335.36	313.70	291.55	270.58
	$ARL(\delta)_{\text{bias}}$	7.29	59.36	172.64	273.70	331.99	355.10	356.64	346.65	331.21	313.70
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}^*$	65.1	536.91	883.63	963.44	924.17	849.13	770.15	697.62	634.02	579.10
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}^*$	65.1	536.91	883.63	963.44	924.17	849.13	770.15	697.62	634.02	579.10
15	$ARL(\delta)_{\text{unb}}$	6.55	48.30	195.04	356.67	427.41	426.55	396.20	359.40	324.75	294.53
	$ARL(\delta)_{\text{bias}}$	5.74	37.56	158.87	320.96	414.12	432.43	412.12	379.08	345.07	314.16
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}^*$	13.3	138.11	346.00	408.73	380.58	333.75	291.16	256.40	228.49	205.87
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}^*$	13.3	138.11	346.00	408.73	380.58	333.75	291.16	256.40	228.49	205.87
30	$ARL(\delta)_{\text{unb}}$	5.79	35.79	165.51	363.87	460.02	454.01	412.14	367.41	328.57	296.32
	$ARL(\delta)_{\text{bias}}$	5.46	31.75	146.56	340.92	453.01	459.82	422.82	378.90	339.50	306.40
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}^*$	10.0	93.72	302.12	380.12	347.59	298.74	257.87	226.04	201.05	181.01
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}^*$	10.0	93.72	302.12	380.12	347.59	298.74	257.87	226.04	201.05	181.01
50	$ARL(\delta)_{\text{unb}}$	5.54	31.74	150.43	366.79	477.78	465.94	417.20	369.21	329.17	296.52
	$ARL(\delta)_{\text{bias}}$	5.35	29.62	139.12	351.08	473.74	470.62	424.36	376.39	335.79	302.54
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}^*$	9.00	77.22	284.12	373.99	338.44	288.39	248.18	217.36	193.29	174.01
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}^*$	9.00	77.22	284.12	373.99	338.44	288.39	248.18	217.36	193.29	174.01
100	$ARL(\delta)_{\text{unb}}$	5.37	29.08	137.75	368.85	494.06	474.63	420.00	369.98	329.37	296.57
	$ARL(\delta)_{\text{bias}}$	5.28	28.12	132.23	359.97	492.27	477.55	423.83	373.63	332.68	299.56
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}^*$	8.29	65.46	268.02	371.31	332.86	281.96	242.28	212.12	188.62	169.81
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}^*$	8.29	65.46	268.02	371.31	332.86	281.96	242.28	212.12	188.62	169.81
200	$ARL(\delta)_{\text{unb}}$	5.29	27.87	131.02	369.73	503.47	478.62	421.02	370.21	329.43	296.58
	$ARL(\delta)_{\text{bias}}$	5.24	27.41	128.33	364.95	502.69	480.24	422.98	372.04	331.07	298.07
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}^*$	7.94	59.83	258.22	370.61	330.51	279.27	239.84	209.97	186.70	168.08
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}^*$	7.94	59.83	258.22	370.61	330.51	279.27	239.84	209.97	186.70	168.08

## 6.2.2. Ajuste de límites con probabilidades nominales de colas distintas

Las Figuras 6.6(a) y 6.6(b), comparan  $ARL(\delta)_{\alpha, \beta}$  con  $ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$  y  $ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$  respectivamente, obtenidas a partir de (5-47) y (5-48) usando tamaños de muestra de  $n = 5, 15, 30$  y  $50$ ,  $\lambda_0 = 0.01$ ,  $\alpha = 0.0027$  y su correspondiente  $\beta = 0.0023952$  hallado en la Sección 6.1. Las Figuras permiten ver que cuando el tamaño de la muestra aumenta, las curvas  $ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$  y  $ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$  correspondientes tienden a la curva  $ARL(\delta)_{\alpha, \beta}$ . Además de lo anterior, se puede observar que persiste el problema de que para tamaños de muestra  $n < 30$  aproximadamente se detecta más rápido que el proceso se ha salido de control, que para

muestras de mayor tamaño, asunto que como se discutió antes, no es lo deseado. Adicionalmente, la Tabla 6-12 contiene las  $ARL$ s en control ( $ARL(1)_{\beta, \text{unb}}$  y  $ARL(1)_{\beta, \text{bias}}$  y fuera de control ( $ARL(1.02)_{\beta, \text{unb}}$  y  $ARL(1.02)_{\beta, \text{bias}}$  para las cartas de construidas con los límites (5-45) y (5-46) y mostradas en las Figuras 6.6(a) y 6.6(b) respectivamente. En esta Tabla se puede ver que  $ARL(1.02)_{\beta, \text{unb}} > ARL(1)_{\beta, \text{unb}}$  y  $ARL(1.02)_{\beta, \text{bias}} > ARL(1)_{\beta, \text{bias}}$ ; es decir, las cartas son de  $ARL$  sesgado, aspecto que es más notorio en tamaños de muestra pequeños y cuando el estimador es  $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$ . Debido al sesgamiento de la  $ARL$  de las cartas con límites como los definidos en (5-45) y (5-46), se hace necesario aplicar correcciones sobre ellos, tal que las cartas de control sean de  $ARL$  insesgado.

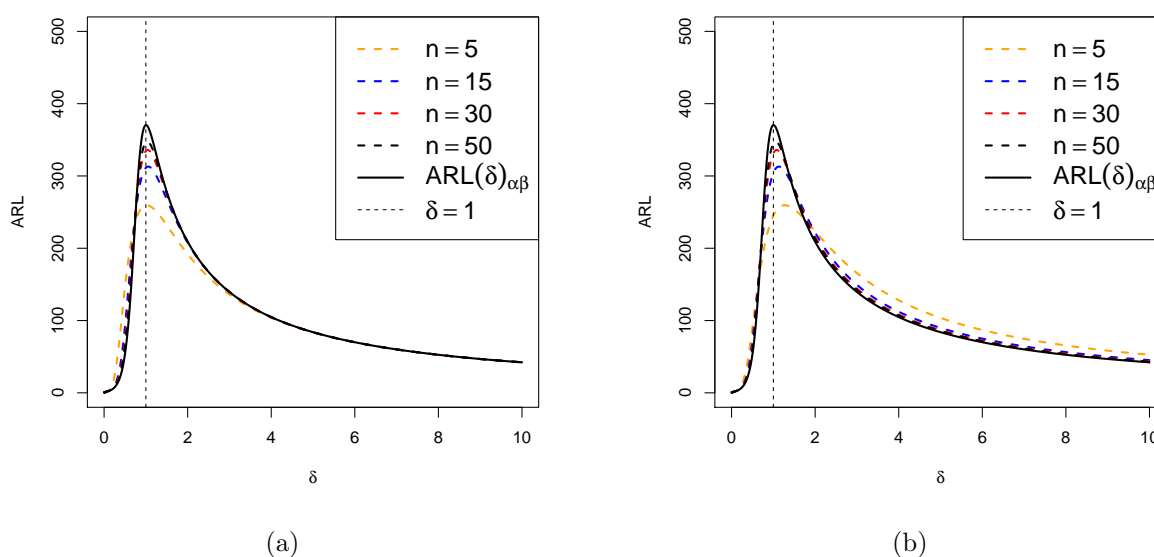


Figura 6-6.: Curvas de  $ARL$  de la carta  $t$  con límites de probabilidades nominales de colas distintas usando  $\lambda_0 = 0.01$ ,  $\alpha = 0.0027$ ,  $\beta = 0.0023952$  y tamaños de muestra  $n = 5, 15, 30$  y  $50$ . (a) Curvas de  $ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$  según (5-47). (b) Curvas de  $ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$  según (5-48).

Tabla 6-12.: Valores  $ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$  y  $ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$  con  $\alpha = 0.0027$ ,  $\lambda_0 = 0.01$ ,  $\beta = 0.0023952$ ,  $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$  en control (columnas 2 y 4) y fuera de control (columnas 3 y 5).

$n$	$ARL(1)_{\beta, \text{unb}}$	$ARL(1.02)_{\beta, \text{unb}}$	$ARL(1)_{\beta, \text{bias}}$	$ARL(1.02)_{\beta, \text{bias}}$
5	259.4811	259.5581	245.1988	247.4919
15	311.3006	312.2832	304.3328	306.9064
30	334.5052	335.5316	331.2363	333.3816
50	346.7565	347.5964	345.0957	346.7317
100	357.6600	358.1363	357.0721	358.0052
200	363.7838	363.9404	357.0721	363.9903

### Carta $t$ de $ARL$ insesgado fijando la $ARL$ en control

De acuerdo al problema presentado con anterioridad, es admisible buscar los factores de ajuste de los límites (5-49) y (5-50) de forma que la carta de control sea de  $ARL$  insesgado

y que el valor de la  $ARL$  en control pueda ser fijado en una cantidad sin importar el tamaño de la muestra usado para estimar a  $\lambda_0$ . Lo anterior se puede obtener como se hizo en la sección 5.3.1; es decir, se busca que  $ARL_{\alpha,\beta,\text{unb}}(1) = ARL_0$ ,  $ARL_{\alpha,\beta,\text{bias}}(1) = ARL_0$  y que adicionalmente,  $\frac{d}{d\delta}ARL_{\alpha,\beta,\text{unb}}(\delta)|_{\delta=1} = 0$ ,  $\frac{d}{d\delta}ARL_{\alpha,\beta,\text{bias}}(\delta)|_{\delta=1} = 0$ , por lo que se debe resolver en cada caso, el sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta}ARL_{\alpha,\beta,\text{unb}}(\delta)\Big|_{\delta=1} &= 0 \\ ARL_{\alpha,\beta,\text{unb}}(1) &= ARL_0 \end{aligned} \quad (6-24)$$

ó

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta}ARL_{\alpha,\beta,\text{bias}}(\delta)\Big|_{\delta=1} &= 0 \\ ARL_{\alpha,\beta,\text{bias}}(1) &= ARL_0, \end{aligned} \quad (6-25)$$

en donde

$$ARL_{\alpha,\beta,\text{unb}}(\delta) = \int_0^{\infty} \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0)}{1 - \exp(-\delta\lambda_0\widehat{LCL}_{\alpha,\beta,\text{unb}}) + \exp(-\delta\lambda_0\widehat{UCL}_{\alpha,\beta,\text{unb}})} dy \quad (6-26)$$

$$ARL_{\alpha,\beta,\text{bias}}(\delta) = \int_0^{\infty} \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0)}{1 - \exp(-\delta\lambda_0\widehat{LCL}_{\alpha,\beta,\text{bias}}) + \exp(-\delta\lambda_0\widehat{UCL}_{\alpha,\beta,\text{bias}})} dy, \quad (6-27)$$

con  $f_Y(y; n, 1/\lambda_0)$  la f.d.p de  $Y$  definida en (5-3). La derivada de (6-26) y (6-27) en términos de  $\delta$  es, respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta}ARL_{\alpha,\beta,\text{unb}}(\delta) &= \int_0^{\infty} f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \\ &\times \frac{\lambda_0\widehat{UCL}_{\alpha,\beta,\text{unb}} \exp(-\delta\lambda_0\widehat{UCL}_{\alpha,\beta,\text{unb}}) - \lambda_0\widehat{LCL}_{\alpha,\beta,\text{unb}} \exp(-\delta\lambda_0\widehat{LCL}_{\alpha,\beta,\text{unb}})}{\left[1 - \exp(-\delta\lambda_0\widehat{LCL}_{\alpha,\beta,\text{unb}}) + \exp(-\delta\lambda_0\widehat{UCL}_{\alpha,\beta,\text{unb}})\right]^2} dy \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta}ARL_{\alpha,\beta,\text{bias}}(\delta) &= \int_0^{\infty} f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \\ &\times \frac{\lambda_0\widehat{UCL}_{\alpha,\beta,\text{bias}} \exp(-\delta\lambda_0\widehat{UCL}_{\alpha,\beta,\text{bias}}) - \lambda_0\widehat{LCL}_{\alpha,\beta,\text{bias}} \exp(-\delta\lambda_0\widehat{LCL}_{\alpha,\beta,\text{bias}})}{\left[1 - \exp(-\delta\lambda_0\widehat{LCL}_{\alpha,\beta,\text{bias}}) + \exp(-\delta\lambda_0\widehat{UCL}_{\alpha,\beta,\text{bias}})\right]^2} dy \end{aligned}$$

Por lo que  $\frac{d}{d\delta}ARL_{\alpha,\beta,\text{unb}}(\delta)|_{\delta=1}$  y  $\frac{d}{d\delta}ARL_{\alpha,\beta,\text{bias}}(\delta)|_{\delta=1}$  son, respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta}ARL_{\alpha,\beta,\text{unb}}(\delta)\Big|_{\delta=1} &= \int_0^{\infty} f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \\ &\times \frac{\lambda_0\widehat{UCL}_{\alpha,\beta,\text{unb}} \exp(-\lambda_0\widehat{UCL}_{\alpha,\beta,\text{unb}}) - \lambda_0\widehat{LCL}_{\alpha,\beta,\text{unb}} \exp(-\lambda_0\widehat{LCL}_{\alpha,\beta,\text{unb}})}{\left[1 - \exp(-\lambda_0\widehat{LCL}_{\alpha,\beta,\text{unb}}) + \exp(-\lambda_0\widehat{UCL}_{\alpha,\beta,\text{unb}})\right]^2} dy \end{aligned} \quad (6-28)$$



y

$$\frac{d}{d\delta} ARL_{\alpha,\beta,bias}(\delta) \Big|_{\delta=1} = \int_0^{\infty} f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \times \frac{\lambda_0 \widehat{UCL}_{\alpha,\beta,bias} \exp(-\lambda_0 \widehat{UCL}_{\alpha,\beta,bias}) - \lambda_0 \widehat{LCL}_{\alpha,\beta,bias} \exp(-\lambda_0 \widehat{LCL}_{\alpha,\beta,bias})}{\left[1 - \exp(-\lambda_0 \widehat{LCL}_{\alpha,\beta,bias}) + \exp(-\lambda_0 \widehat{UCL}_{\alpha,\beta,bias})\right]^2} dy, \quad (6-29)$$

de modo que usando (6-26) y (6-28) en (6-24), y (6-27) y (6-29) en (6-25) con (6-26) y (6-27) evaluadas en  $\delta = 1$ , se obtiene

$$\int_0^{\infty} f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \times \frac{\widehat{UCL}_{\alpha,\beta,unb} \exp(-\lambda_0 \widehat{UCL}_{\alpha,\beta,unb}) \widehat{LCL}_{\alpha,\beta,unb} \exp(-\lambda_0 \widehat{LCL}_{\alpha,\beta,unb})}{\left[1 - \exp(-\lambda_0 \widehat{LCL}_{\alpha,\beta,unb}) + \exp(-\lambda_0 \widehat{UCL}_{\alpha,\beta,unb})\right]^2} dy = 0 \quad (6-30)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0)}{1 - \exp(-\lambda_0 \widehat{LCL}_{\alpha,\beta,unb}) + \exp(-\lambda_0 \widehat{UCL}_{\alpha,\beta,unb})} dy = ARL_0$$

y

$$\int_0^{\infty} f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \times \frac{\widehat{UCL}_{\alpha,\beta,bias} \exp(-\lambda_0 \widehat{UCL}_{\alpha,\beta,bias}) - \widehat{LCL}_{\alpha,\beta,bias} \exp(-\lambda_0 \widehat{LCL}_{\alpha,\beta,bias})}{\left[1 - \exp(-\lambda_0 \widehat{LCL}_{\alpha,\beta,bias}) + \exp(-\lambda_0 \widehat{UCL}_{\alpha,\beta,bias})\right]^2} dy = 0 \quad (6-31)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0)}{1 - \exp(-\lambda_0 \widehat{LCL}_{\alpha,\beta,bias}) + \exp(-\lambda_0 \widehat{UCL}_{\alpha,\beta,bias})} dy = ARL_0,$$

con las cantidades  $\widehat{UCL}_{\alpha,\beta,unb}$ ,  $\widehat{LCL}_{\alpha,\beta,unb}$ ,  $\widehat{UCL}_{\alpha,\beta,bias}$ ,  $\widehat{LCL}_{\alpha,\beta,bias}$  de acuerdo a (5-49) y (5-50) respectivamente. La Tabla 6-13 muestra algunas soluciones obtenidas mediante la función `multiroot` del paquete **R** `rootSolve` de Soetaert (2016) para los sistemas (6-30) y (6-31). En ella se muestra que la  $ARL$  en control alcanzada por la carta es de 370, sin importar el tamaño de la muestra.

La información mostrada en la Tabla 6-13 evidencia que a medida que  $n \rightarrow \infty$ , los valores de  $(C_\beta, D_\beta)$  y  $(C_\beta^*, D_\beta^*)$  se aproximan a 1, lo que hace pensar que para un tamaño de muestra grande, los límites de control construidos para el estimador  $\widehat{\lambda}_{unb}$  o  $\widehat{\lambda}_{bias}$  satisfaciendo (6-30) y (6-31) respectivamente, se acercan a los valores del caso conocido, cuando se corrigen los límites de acuerdo a la solución de (6-9).

Las Figuras 6-7 son la representación de las curvas  $ARL$  de la carta  $t$  cuando los límites están determinados por las soluciones contenidas en la Tabla 6-13. En ellas se muestra que

Tabla 6-13.: Solución  $(C_\beta, D_\beta)$  y  $(C_\beta^*, D_\beta^*)$  de (6-30) y (6-31) y los correspondientes  $ARL(1)_{\alpha,\beta,\text{unb}}$ ,  $SDRL(1)_{\alpha,\beta,\text{unb}}$ ,  $ARL(1)_{\alpha,\beta,\text{bias}}$  y  $SDRL(1)_{\alpha,\beta,\text{bias}}$ , considerando  $\alpha = 0.0027$ ,  $\lambda_0 = 0.01$ ,  $\beta = 0.0023952$  y  $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ .

$n$	$C_\beta$	$D_\beta$	$ARL(1)_{\alpha,\beta,\text{unb}}$	$SDRL(1)_{\alpha,\beta,\text{unb}}$
5	0.7165618	1.0787306	370	369.4993
15	0.9597009	1.0847159	370	369.4996
30	0.9489875	1.059124	370	369.4996
50	0.9715438	1.0423126	370	369.4997
100	0.9886233	1.0256866	370	369.4997
200	0.9969679	1.0155238	370	369.4997
$n$	$C_\beta^*$	$D_\beta^*$	$ARL(1)_{\alpha,\beta,\text{bias}}$	$SDRL(1)_{\alpha,\beta,\text{bias}}$
5	0.8957023	1.3484132	370	369.4993
15	0.8957208	1.1621956	370	369.4996
30	0.9817112	1.0956457	370	369.4997
50	0.9913712	1.0635843	370	369.4997
100	0.9986093	1.0019780	370	369.4997
200	1.0019780	1.0206310	370	369.4995

las cartas que se representan son de  $ARL$  insesgado sin importar el tamaño de muestra, y que el valor tomado en  $\delta = 1$  (en control), es de 370, valor que es asignado de acuerdo al interés del usuario.

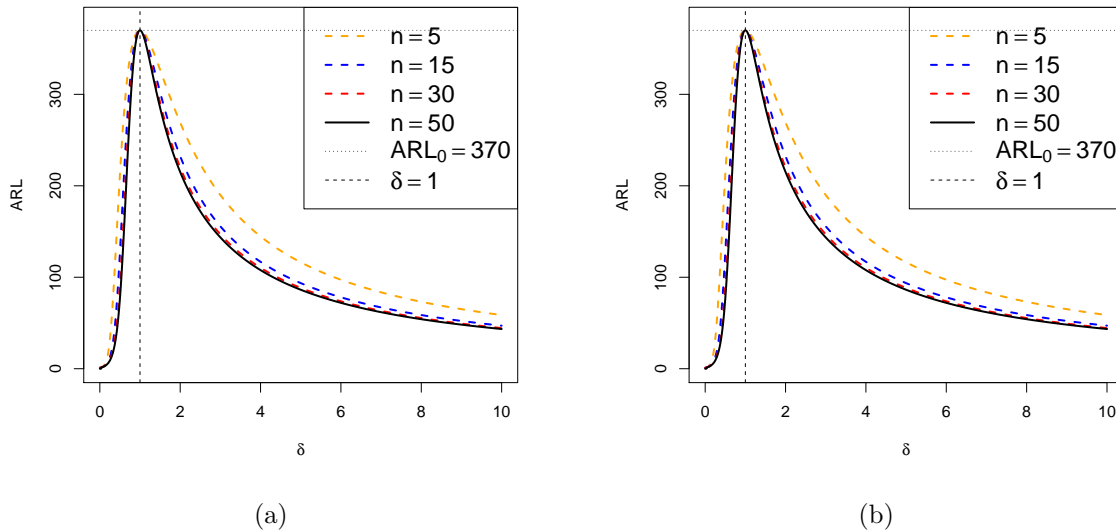


Figura 6-7.: Curvas de  $ARL$  de la carta  $t$  con límites de probabilidades nominales de colas distintas con estimadores  $\hat{\lambda}_{\text{unb}}$  y  $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$ ,  $\lambda_0 = 0.01$ ,  $\alpha = 0.0027$ ,  $\beta = 0.0023952$  y tamaños de muestra  $n = 5, 15, 30$  y  $50$ . (a) Curvas de  $ARL(\delta)_{\alpha,\beta,\text{unb}}$  según soluciones de (6-30). (b) Curvas de  $ARL(\delta)_{\alpha,\beta,\text{bias}}$  según soluciones de (6-31).

En la Tabla 6-14 se comparan los factores  $-\log(1-\beta) \frac{C_\beta}{n-1}$  con  $-\log(1-\beta) \frac{C_\beta^*}{n}$  y  $-\log(\alpha)$

$-\beta) \frac{D_\beta}{n-1}$  con  $-\log(\alpha - \beta) \frac{D_\beta^*}{n}$  usados sobre la variable aleatoria  $Y$  en los límites de control (5-49) y (5-50). Puede observarse que en cada tamaño de muestra los factores correspondientes al estimador  $\hat{\lambda}_{\text{unb}}$  y  $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$  son similares en sus valores, por lo que es de esperar que también sean similares los valores de los límites de control al igual que características como la  $ARL$  y la  $SDRL$ .

Tabla 6-14.: Valores de coeficientes de la variable aleatoria  $Y$  en límites corregidos según ecuaciones (5-49) y (5-50), usando  $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ , soluciones óptimas para  $(C_\beta, D_\beta)$  y  $(C_\beta^*, D_\beta^*)$ ,  $\alpha = 0.0027$ ,  $\lambda_0 = 0.01$ ,  $\beta = 0.0023952$ .

$n$	$-\log(1 - \beta) \frac{C_\beta}{n-1}$	$-\log(1 - \beta) \frac{C_\beta^*}{n}$	$-\log(\alpha - \beta) \frac{D_\beta}{n-1}$	$-\log(\alpha - \beta) \frac{D_\beta^*}{n}$
5	0.00042959476384	0.00042959478782	2.18332563470316	2.18332563470316
15	0.00015342987884	0.00015342988569	0.62726851730098	0.62726851730098
30	0.00007847436543	0.00007847436488	0.29567486476725	0.29567486476725
50	0.00004754793092	0.00004754792974	0.17221359645974	0.17221359645974
100	0.00002394754321	0.00002394754096	0.08387741206441	0.08387741206441
200	0.00001201416016	0.00001201416269	0.04131466945504	0.04131466945504

En la Tabla 6-15 se presenta la  $ARL$  de la carta  $t$  con los pares de límites (5-45) y (5-46), (5-49) y (5-50), variando  $\delta$  y  $n$ . En ella se observa que cuando  $\delta \leq 1$ ,  $ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$  es menor  $ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$ ; sin embargo, sucede lo contrario cuando  $\delta > 1$ . También se observa en cada tamaño de muestra que los valores de  $ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}$  son iguales a los de  $ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}$ ; es decir, las correcciones propuestas sobre los límites de control definidos con los respectivos estimadores  $\hat{\lambda}_{\text{unb}}$  y  $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$ , según soluciones a los sistemas de ecuaciones (6-30) y (6-31), conducen no sólo a una carta de  $ARL$  insesgado, sino también a cartas de igual desempeño en promedio. Note además que los valores tabulados de  $ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}$  y  $ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}$  en cada tamaño de muestra no sólo son iguales entre sí, sino también iguales a los reportados en la Tabla 6-7 para  $ARL(\delta)_{\alpha, \text{unb}}$  y  $ARL(\delta)_{\alpha, \text{bias}}$  y que corresponden a la carta  $t$  con límites corregidos según las ecuaciones (5-34) y (5-35), respectivamente.

Finalmente de la Tabla 6-15, al comparar los resultados de las  $ARLs$ , cartas  $t$  corregidas vs. no corregidas, se paga un precio al controlar el valor de la  $ARL$ , pues se perjudica la detección cuando  $\delta \neq 1$ , puesto que para los límites corregidos según (5-49) y (5-50) sus  $ARLs$  son mayores que los de los límites sin corregir, según (5-45) y (5-46). Sin embargo, este efecto adverso se reduce al incrementar el tamaño de muestra, vea por ejemplo los resultados para  $n = 200$ , aunque en general las  $ARLs$  de las cartas sin corregir (ecuaciones (5-45) y (5-46)) son menores que las cartas con límites corregidos ((5-49) y (5-50)).

La Tabla 6-16 exhibe la tasa de falsa alarma de las cartas construidas según los límites de control (5-45), (5-46), (5-49) y (5-50), los dos últimos obedeciendo a las soluciones óptimas de (6-30) y (6-31) respectivamente para distintos tamaños de muestra  $n$  y denotadas en su orden por  $\alpha_{\beta, \text{unb}}$ ,  $\alpha_{\beta, \text{bias}}$ ,  $\alpha_{\alpha, \beta, \text{unb}}$  y  $\alpha_{\alpha, \beta, \text{bias}}$ . Puede observarse que previa corrección de los límites de control, existen diferencias entre las tasas de falsa alarma, particularmente para  $n$

Tabla 6-15.: Valores de  $ARL$  de la carta  $t$  para los tamaños de muestra  $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ ,  $\delta, \lambda_0 = 0.01$  y  $ARL_0 = 370$  usando los límites dados en (5-45) y (5-46), y los límites corregidos (5-49) y (5-50).

n	Medida	$\delta$									
		0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
5	$ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$	23.7	146.00	236.36	259.48	250.82	231.84	211.20	191.92	174.83	159.96
	$ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$	12.2	91.46	191.91	245.20	259.48	253.83	239.93	223.54	207.18	191.92
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}$	32.2	212.14	340.34	370.00	355.24	326.86	296.85	269.18	244.84	223.78
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}$	32.2	212.14	340.34	370.00	355.24	326.86	296.85	269.18	244.84	223.78
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{Zhang}}$	29.8	203.67	335.58	370.06	358.18	331.19	301.70	274.13	249.69	228.43
15	$ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$	10.3	92.07	246.89	311.30	300.24	267.64	235.16	207.73	185.36	167.11
	$ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$	8.71	73.27	220.31	304.33	308.26	281.31	249.80	221.68	198.22	178.87
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}$	12.7	126.71	313.66	370.00	344.63	302.35	263.83	232.36	207.08	186.59
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}$	12.7	126.71	313.66	370.00	344.63	302.35	263.83	232.36	207.08	186.59
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{Zhang}}$	11.0	106.67	292.56	369.75	356.22	317.19	278.51	245.93	219.41	197.79
30	$ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$	8.70	72.90	247.77	334.51	316.20	274.84	238.02	208.83	185.79	167.29
	$ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$	8.08	64.40	230.96	331.24	322.33	283.06	245.90	215.94	192.16	173.04
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}$	9.93	91.79	294.31	370.00	338.39	290.87	251.09	220.10	195.77	176.26
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}$	9.93	91.79	294.31	370.00	338.39	290.87	251.09	220.10	195.77	176.26
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{Zhang}}$	9.06	79.35	274.47	370.23	349.06	302.99	262.26	230.06	204.67	184.28
50	$ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$	8.19	64.95	247.27	346.76	322.38	276.69	238.50	208.95	185.82	167.30
	$ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$	7.85	60.23	235.88	345.10	326.80	281.91	243.28	213.19	189.60	170.70
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}$	8.97	76.64	281.21	370.00	334.85	285.35	245.57	215.07	191.26	172.18
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}$	8.97	76.64	281.21	370.00	334.85	285.35	245.57	215.07	191.26	172.18
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{Zhang}}$	8.43	68.79	265.08	370.45	343.29	294.30	253.59	222.16	197.56	177.86
100	$ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$	7.85	59.13	246.14	357.66	326.46	277.58	238.67	208.98	185.83	167.30
	$ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$	7.69	56.94	239.79	357.07	328.98	280.26	241.06	211.09	187.70	168.98
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}$	8.28	65.31	267.13	370.00	331.69	280.98	241.44	211.39	187.96	169.22
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}$	8.28	65.31	267.13	370.00	331.69	280.98	241.44	211.39	187.96	169.22
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{Zhang}}$	7.99	61.26	256.43	370.17	336.69	286.03	245.89	215.30	191.44	172.35
200	$ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$	7.69	56.32	245.15	363.78	328.20	277.87	238.72	208.99	185.83	167.30
	$ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$	7.61	55.27	241.77	363.59	329.53	279.23	239.91	210.04	186.76	168.14
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}$	7.94	59.77	257.83	370.00	329.98	278.82	239.45	209.63	186.40	167.81
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}$	7.94	59.77	257.83	370.00	329.98	278.82	239.45	209.63	186.40	167.81
	$ARL(\delta)_{\alpha, \text{Zhang}}$	7.79	57.72	251.60	370.13	332.75	281.54	241.84	211.72	188.26	169.48

pequeño, siendo  $\alpha_{\beta, \text{unb}} < \alpha_{\beta, \text{bias}}$ ; sin embargo, luego de aplicar las correcciones a los límites de control, las diferencias entre las tasas de falsa alarma disminuyen notablemente (ver  $\alpha_{\alpha, \beta, \text{unb}}$  y  $\alpha_{\alpha, \beta, \text{bias}}$ ). Se puede observar además, que a mayor  $n$ , las tasas de falsa alarma están más próximas a la tasa de falsa alarma nominal de  $\alpha = 0.0027$ ; aunque dicha aproximación es más rápida con los límites corregidos, en general se requiere un tamaño de muestra grande para alcanzar este valor.

Al comparar los resultados de la Tabla 6-8 con los de la Tabla 6-16, se notará que las diferencias entre las tasas de falsa alarma para los límites corregidos, en cada tamaño de muestra considerado, son mínimas, pero al comparar los valores obtenidos con límites de control sin corregir, vemos que la Tabla 6-8 (columnas  $\alpha_{\text{unb}}$  y  $\alpha_{\text{bias}}$ ) son mayores a los de la Tabla 6-16 (columnas  $\alpha_{\beta, \text{unb}}$  y  $\alpha_{\beta, \text{bias}}$ ).

La Figura 6-8 reafirma lo dicho con relación a la Tabla 6-16, donde es evidente que las tasas de falsa alarma de las cartas sin corregir límites, son mayores que cuando se corrigen los límites de control. Además, si se compara la Figura 6-4 con la 6-8, se verá que las diferencias

Tabla 6-16.: Tasa de falsa alarma para los tamaños de muestra  $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$  de la carta  $t$  con los límites (5-45) y (5-46) y los límites hallados como solución de (6-30) y (6-31), con una tasa de falsa alarma nominal  $\alpha = 0.0027, \lambda_0 = 0.01, \beta = 0.0023952$ .

n	$\alpha_{\beta, \text{unb}}$	$\alpha_{\beta, \text{bias}}$	$\alpha_{\alpha, \beta, \text{unb}}$	$\alpha_{\alpha, \beta, \text{bias}}$
5	0.0069468744960	0.0105074668097	0.0052043149237	0.0052043154323
10	0.0042955893270	0.0050507354435	0.0033031437175	0.0033031438923
15	0.0036306022201	0.0039379450730	0.0029717754412	0.0029717755677
30	0.0030972743137	0.0031665352948	0.0027731817729	0.0027731818200
50	0.0029221184691	0.0029462496278	0.0027290540078	0.0027290539143
100	0.0028050360076	0.0028111697690	0.0027095359183	0.0027095356241
200	0.0027510281671	0.0027527142881	0.0027044432041	0.0027044432041
300	0.0027336896028	0.0027345172283	0.0027034802428	0.0027034803326
500	0.0027200561983	0.0027204127452	0.0027029851213	0.0027029821528
1000	0.0027099691394	0.0027100955682	0.0026932643906	0.0027027736195
1500	0.0027066330143	0.0027067058640	0.0027027343554	0.0027027343867

entre las tasas de falsa alarma con los límites corregidos y sin corregir, son más notables en el primer caso. Además, se puede ver que entre los valores de las tasas de falsa alarma  $\alpha_{\beta, \text{unb}}, \alpha_{\beta, \text{bias}}$  las diferencias son menores que las observadas entre  $\alpha_{\text{unb}}$  y  $\alpha_{\text{bias}}$  para tamaños de muestra pequeños.

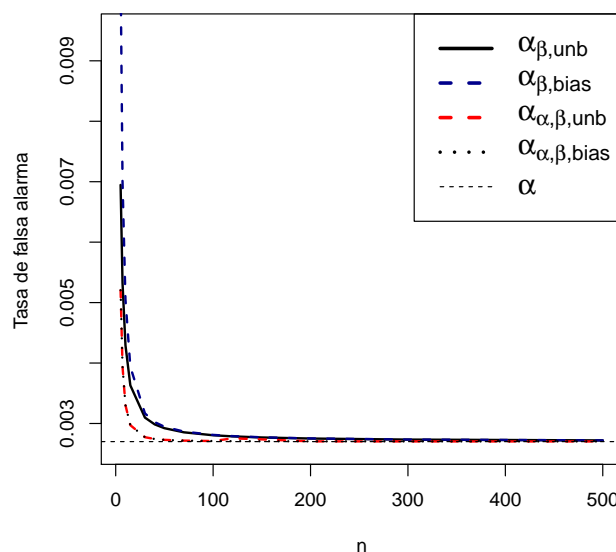


Figura 6-8.: Tasas de falsas alarmas  $\alpha_{\beta, \text{unb}}, \alpha_{\beta, \text{bias}}, \alpha_{\alpha, \beta, \text{unb}}$  y  $\alpha_{\alpha, \beta, \text{bias}}$  de la carta  $t$  con  $\lambda_0 = 0.01, \alpha = 0.0027$  con límites definidos en (5-45), (5-46), (5-49) y (5-50).

### Carta $t$ $ARL$ insesgado fijando la tasa de falsa alarma $\alpha$

En esta sección se busca que la carta  $t$  bajo los límites (5-51) y (5-52) sea de  $ARL$  insesgado cuando el parámetro  $\lambda_0$  es estimado, pero fijando la tasa de falsa alarma nominal  $\alpha$  alrededor de un valor deseado, por ejemplo  $\alpha = 0.0027$ . Para lograr lo anterior se supone que  $Y \sim \text{Gamma}(y; n, 1/\lambda_0)$  y  $\beta$  es seleccionado de acuerdo al  $\alpha$  deseado; así, si  $\alpha = 0.0027$ , de acuerdo a la Sección 6.1,  $\beta = 0.0023952$  y con  $(E_{\beta}, F_{\beta})$  coeficientes por determinar y tales

que permitan satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta} ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^* \Big|_{\delta=1} &= 0 \\ P\left(T < \widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^* \Big| \lambda = \lambda_0\right) + P\left(T > \widehat{UCCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^* \Big| \lambda = \lambda_0\right) &= \alpha, \end{aligned} \quad (6-32)$$

en tanto que  $(E_\beta^*, F_\beta^*)$  son tales que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta} ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^* \Big|_{\delta=1} &= 0, \\ P\left(T < \widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^* \Big| \lambda = \lambda_0\right) + P\left(T > \widehat{UCCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^* \Big| \lambda = \lambda_0\right) &= \alpha. \end{aligned} \quad (6-33)$$

Definimos las *ARLs* incondicionales correspondientes a los límites (5-51) y (5-52), por

$$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^* = \int_0^\infty \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0) dy}{1 - \exp\left(\delta \lambda_0 E_\beta \log(1 - \beta) \frac{Y}{n-1}\right) + \exp\left(\delta \lambda_0 F_\beta \log(\alpha - \beta) \frac{Y}{n-1}\right)} \quad (6-34)$$

$$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^* = \int_0^\infty \frac{f_Y(y; n, 1/\lambda_0) dy}{1 - \exp\left(\delta \lambda_0 E_\beta^* \log(1 - \beta) \frac{Y}{n}\right) + \exp\left(\delta \lambda_0 F_\beta^* \log(\alpha - \beta) \frac{Y}{n}\right)}, \quad (6-35)$$

con  $f_Y(y; n, 1/\lambda_0)$  la f.d.p de  $Y \sim \text{Gamma}(y; n, 1/\lambda_0)$  definida en (5-3). La derivada de (6-34) y (6-35) respecto a  $\delta$  es

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta} ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^* &= \frac{\lambda_0}{n-1} \int_0^\infty f_y(y; n, 1/\lambda_0) \\ &\times \frac{E_\beta \log(1 - \beta) \exp\left(\delta \lambda_0 E_\beta \log(1 - \beta) \frac{y}{n-1}\right) - F_\beta \log(\alpha - \beta) \exp\left(\delta \lambda_0 F_\beta \log(\alpha - \beta) \frac{y}{n-1}\right)}{\left[1 - \exp\left(\delta \lambda_0 E_\beta \log(1 - \beta) \frac{y}{n-1}\right) + \exp\left(\delta \lambda_0 F_\beta \log(\alpha - \beta) \frac{y}{n-1}\right)\right]^2} y dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta} ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^* &= \frac{\lambda_0}{n} \int_0^\infty f_y(y; n, 1/\lambda_0) \\ &\times \frac{E_\beta^* \log(1 - \beta) \exp\left(\delta \lambda_0 E_\beta^* \log(1 - \beta) \frac{y}{n}\right) - F_\beta^* \log(\alpha - \beta) \exp\left(\delta \lambda_0 F_\beta^* \log(\alpha - \beta) \frac{y}{n}\right)}{\left[1 - \exp\left(\delta \lambda_0 E_\beta^* \log(1 - \beta) \frac{y}{n}\right) + \exp\left(\delta \lambda_0 F_\beta^* \log(\alpha - \beta) \frac{y}{n}\right)\right]^2} y dy. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\frac{d}{d\delta}ARL(\delta)_{\alpha,\beta,\text{unb}}^*|_{\delta=1}$  y  $\frac{d}{d\delta}ARL(\delta)_{\alpha,\beta,\text{bias}}^*(\delta)|_{\delta=1}$  son en su orden,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta}ARL(\delta)_{\alpha,\beta,\text{unb}}^* \Big|_{\delta=1} &= \frac{\lambda_0}{n-1} \int_0^\infty f_y(y; n, 1/\lambda_0) \\ &\times \frac{E_\beta \log(1-\beta) \exp\left(\lambda_0 E_\beta \log(1-\beta) \frac{y}{n-1}\right) - F_\beta \log(\alpha-\beta) \exp\left(\lambda_0 F_\beta \log(\alpha-\beta) \frac{y}{n-1}\right)}{\left[1 - \exp\left(\lambda_0 E_\beta \log(1-\beta) \frac{y}{n-1}\right) + \exp\left(\lambda_0 F_\beta \log(\alpha-\beta) \frac{y}{n-1}\right)\right]^2} y dy \end{aligned} \quad (6-36)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta}ARL(\delta)_{\alpha,\beta,\text{bias}}^* \Big|_{\delta=1} &= \frac{\lambda_0}{n} \int_0^\infty f_y(y; n, 1/\lambda_0) \\ &\times \frac{E_\beta^* \log(1-\beta) \exp\left(\lambda_0 E_\beta^* \log(1-\beta) \frac{y}{n}\right) - F_\beta^* \log(\alpha-\beta) \exp\left(\lambda_0 F_\beta^* \log(\alpha-\beta) \frac{y}{n}\right)}{\left[1 - \exp\left(\lambda_0 E_\beta^* \log(1-\beta) \frac{y}{n}\right) + \exp\left(\lambda_0 F_\beta^* \log(\alpha-\beta) \frac{y}{n}\right)\right]^2} y dy. \end{aligned} \quad (6-37)$$

De otra parte, las expresiones probabilísticas que definen la tasa de falsa alarma incondicional en cada carta

$$P\left(T < \widehat{LCL}_{\alpha,\beta,\text{unb}}^* \Big| \lambda = \lambda_0\right) + P\left(T > \widehat{UCL}_{\alpha,\beta,\text{unb}}^* \Big| \lambda = \lambda_0\right) \text{ y}$$

$$P\left(T < \widehat{LCL}_{\alpha,\beta,\text{bias}}^* \Big| \lambda = \lambda_0\right) + P\left(T > \widehat{UCL}_{\alpha,\beta,\text{bias}}^* \Big| \lambda = \lambda_0\right),$$

se pueden obtener de forma similar como se hizo para llegar a (6-21), por lo que se obtiene que estas probabilidades son respectivamente,

$$1 + \int_0^\infty f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \left[ \exp\left(\lambda_0 E_\beta \log(1-\beta) \frac{y}{n-1}\right) - \exp\left(\lambda_0 F_\beta \log(\alpha-\beta) \frac{y}{n-1}\right) \right] dy, \quad (6-38)$$

$$1 + \int_0^\infty f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \times \left[ \exp\left(\lambda_0 E_\beta^* \log(1-\beta) \frac{y}{n}\right) - \exp\left(\lambda_0 F_\beta^* \log(\alpha-\beta) \frac{y}{n}\right) \right] dy. \quad (6-39)$$

Entonces reemplazando (6-36) y (6-38) en (6-32), obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty f_y(y; n, 1/\lambda_0) \\ &\times \frac{E_\beta \log(1-\beta) \exp\left(\lambda_0 E_\beta \log(1-\beta) \frac{y}{n-1}\right) - F_\beta \log(\alpha-\beta) \exp\left(\lambda_0 F_\beta \log(\alpha-\beta) \frac{y}{n-1}\right)}{\left[1 - \exp\left(\lambda_0 E_\beta \log(1-\beta) \frac{y}{n-1}\right) + \exp\left(\lambda_0 F_\beta \log(\alpha-\beta) \frac{y}{n-1}\right)\right]^2} y dy = 0 \\ &1 + \int_0^\infty f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \times \left[ \exp\left(\lambda_0 E_\beta \log(1-\beta) \frac{y}{n-1}\right) - \exp\left(\lambda_0 F_\beta \log(\alpha-\beta) \frac{y}{n-1}\right) \right] dy = \alpha. \end{aligned} \quad (6-40)$$

Sustituyendo (6-37) y (6-39) en (6-33) se llega a que

$$\int_0^{\infty} f_y(y; n, 1/\lambda_0) \times \frac{E_{\beta}^* \log(1 - \beta) \exp\left(\lambda_0 E_{\beta}^* \log(1 - \beta) \frac{y}{n}\right) - F_{\beta}^* \log(\alpha - \beta) \exp\left(\lambda_0 F_{\beta}^* \log(\alpha - \beta) \frac{y}{n}\right)}{\left[1 - \exp\left(\lambda_0 E_{\beta}^* \log(1 - \beta) \frac{y}{n}\right) + \exp\left(\lambda_0 F_{\beta}^* \log(\alpha - \beta) \frac{y}{n}\right)\right]^2} dy = 0$$

$$1 + \int_0^{\infty} f_Y(y; n, 1/\lambda_0) \times \left[\exp\left(\lambda_0 E_{\beta}^* \log(1 - \beta) \frac{y}{n}\right) - \exp\left(\lambda_0 F_{\beta}^* \log(\alpha - \beta) \frac{y}{n}\right)\right] dy = \alpha. \quad (6-41)$$

La Tabla 6-17 presenta las soluciones o valores óptimos para los pares  $(E_{\beta}, F_{\beta})$  y  $(E_{\beta}^*, F_{\beta}^*)$  de acuerdo a (6-40) y (6-41), respectivamente, así como las  $ARL$  y  $SDRL$  en control, con  $\alpha = 0.0027$ ,  $\lambda_0 = 0.01$  y tamaños de muestra  $n = 5, 15, 30, 50, 100$  y  $200$ . Los resultados muestran que  $ARL(1)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$  y  $ARL(1)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$  son similares, aunque este último es un poco menor que el primero, además, ambas medidas tienden al valor de 370 conforme aumenta  $n$ , siendo que con  $n$  pequeño difieren bastante de este valor de 370. Por tanto, para aproximar el desempeño de las cartas con los límites corregidos según (5-51) y (5-52), al que se obtiene cuando  $\lambda_0$  es conocido (es decir, según límites (5-15)), es necesario estimar  $\lambda_0$  a partir de muestras de  $n \geq 50$  aproximadamente; sin embargo, muestras con tales tamaños, son relativamente grandes y difíciles de obtener, en especial cuando los eventos de interés son de rara ocurrencia.

Tabla 6-17.: Solución  $(E_{\beta}, F_{\beta})$  y  $(E_{\beta}^*, F_{\beta}^*)$  de (6-40) y (6-41) y los correspondientes  $ARL(1)_{\alpha, \beta, \text{unb}}$ ,  $SDRL(1)_{\alpha, \beta, \text{unb}}$ ,  $ARL(1)_{\alpha, \beta, \text{bias}}$  y  $SDRL(1)_{\alpha, \beta, \text{bias}}$ , considerando  $\alpha = 0.0027$ ,  $\lambda_0 = 0.01$ ,  $\beta = 0.0023952$  y  $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ .

<b>n</b>	$E_{\beta}$	$F_{\beta}$	$ARL(1)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$	$SDRL(1)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$
<b>5</b>	0.2770541	1.2414455	963.4435	962.9431
<b>15</b>	0.8116702	1.1011558	408.7336	408.2333
<b>30</b>	0.9489875	1.0591242	380.1208	379.6204
<b>50</b>	0.9612978	1.0439399	373.9946	373.4942
<b>100</b>	0.9851875	1.0262022	371.3078	370.8075
<b>200</b>	0.9953521	1.0157630	370.6090	370.1086
<b>n</b>	$E_{\beta}^*$	$F_{\beta}^*$	$ARL(1)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$	$SDRL(1)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$
<b>5</b>	0.3463177	1.5518068	963.4432	962.9429
<b>15</b>	0.8696466	1.1798098	408.7336	408.2333
<b>30</b>	0.9558783	1.1000250	380.1208	379.6204
<b>50</b>	0.9809162	1.0652448	373.9945	373.4942
<b>100</b>	0.99511389	1.0365679	371.3078	370.8075
<b>200</b>	1.000354	1.0208670	370.6088	370.1085

Observe además en la Tabla 6-17 que tal como ocurrió con los factores de corrección hallados



en las soluciones a los sistemas de ecuaciones (6-30) y (6-31), (ver Tabla 6-13), aquí también se observa que los pares  $(E_\beta, F_\beta)$  y  $(E_\beta^*, F_\beta^*)$  se aproximan a 1 cuando  $n \rightarrow \infty$ , de modo que los límites de control respectivos se aproximan a los límites en (5-15) (desde que también  $\frac{y}{n-1}$  y  $\frac{y}{n} \rightarrow \lambda_0$ , con  $n \rightarrow \infty$ , P-c.s).

Las figuras 6.9(a) y 6.9(b) muestran que las cartas construidas usando los límites (5-51) y (5-52) con los factores de corrección según las soluciones óptimas de (6-40) y (6-41), respectivamente, son de  $ARL$  insesgado, pero el valor en control varía con  $n$ , siendo que para  $n$  pequeños es mayor y con  $n \rightarrow \infty$  se aproximan a 370.

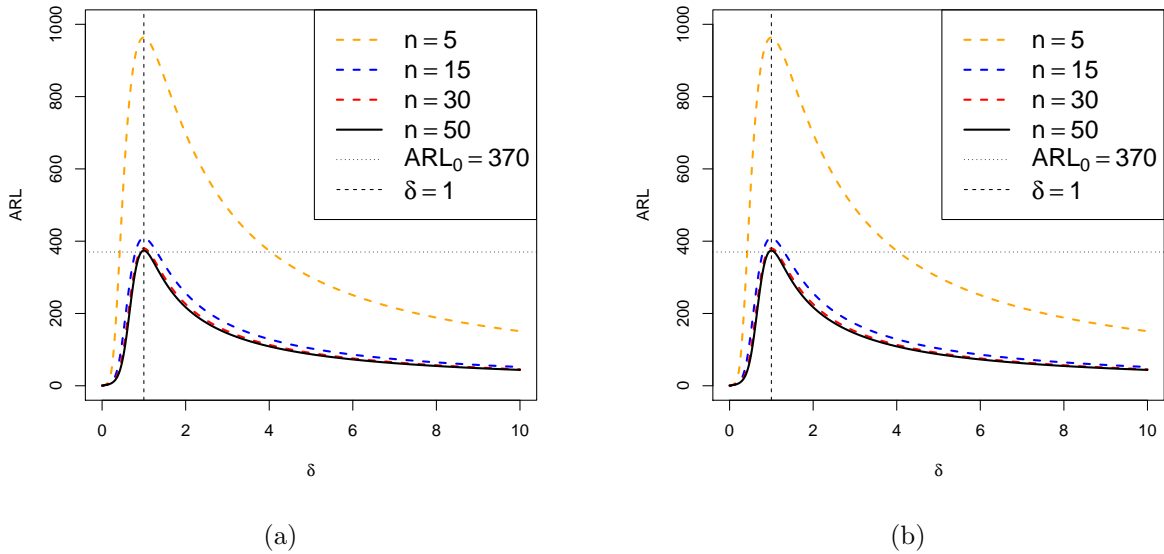


Figura 6-9.: Curvas de  $ARL$  de la carta  $t$  fijando la tasa de falsa alarma nominal con estimadores  $\hat{\lambda}_{\text{unb}}$  y  $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$ ,  $\lambda_0 = 0.01$ ,  $\alpha = 0.0027$ ,  $\beta = 0.0023952$  y tamaños de muestra  $n = 5, 15, 30$  y  $50$ . (a) Curvas de  $ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$  según soluciones de (6-40). (b) Curvas de  $ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$  según soluciones de (6-41).

La información contenida en la Tabla 6-18 corresponde a los factores que multiplican a la variable aleatoria  $Y$  en los límites de control dados en (5-51) y (5-52) con los factores de corrección obtenidos de acuerdo a la solución óptima de (6-40) y (6-41), respectivamente. Dada la similitud entre los valores de  $-\log(1-\beta)\frac{E_\beta}{n-1}$ ,  $-\log(1-\beta)\frac{E_\beta^*}{n}$  y entre  $-\log(\alpha-\beta)\frac{F_\beta}{n-1}$ ,  $-\log(\alpha-\beta)\frac{F_\beta^*}{n}$ , se espera que el valor tomado por el par de límites  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*)$  sea similar al de  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*)$ , de la misma manera que su  $ARL$  y  $SDRL$ , tal como se ocurrió con las correcciones previamente estudiadas.

De otra parte, se puede verificar que la tasa de falsa alarma nominal  $\alpha = 0.0027$  es la tasa de falsa alarma real alcanzada por la carta de control cuyos pares de límites son  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*)$  y  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*)$ , las cuales se obtienen usando los factores de corrección dados en la

Tabla 6-18.: Valores de coeficientes de la variable aleatoria  $Y$  en límites corregidos según ecuaciones (5-51) y (5-52), usando  $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$  y las soluciones óptimas para  $(E_\beta, F_\beta)$  y  $(E_\beta^*, F_\beta^*)$ ,  $\alpha = 0.0027$ ,  $\lambda_0 = 0.01$ ,  $\beta = 0.0023952$ .

$n$	$-\log(1-\beta)\frac{E_\beta}{n-1}$	$-\log(1-\beta)\frac{E_\beta^*}{n}$	$-\log(\alpha-\beta)\frac{F_\beta}{n-1}$	$-\log(\alpha-\beta)\frac{F_\beta^*}{n}$
5	0.00016610016557	0.00016610014159	2.51265677801632	2.51265677801632
15	0.00013903267675	0.00013903266990	0.63677537924181	0.63677537924181
30	0.00007640937916	0.00007640937833	0.29685667831818	0.29685667831818
50	0.00004704648559	0.00004704648931	0.17248246153881	0.17248246153881
100	0.00002386431741	0.00002386431768	0.08391957554926	0.08391957554926
200	0.00001199468864	0.00001199469021	0.04132422262557	0.04132422262557

Tabla 6-17, en los límites de control y estos en el cálculo de las expresiones probabilísticas de las tasas de falsa alarma que se dieron en las ecuaciones (6-38) y (6-39), respectivamente.

La Tabla (6-19) contiene los valores para  $ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$ ,  $ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$  correspondientes a los límites (5-45) y (5-46) respectivamente y  $ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$ ,  $ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$  correspondientes a los límites (5-51), (5-52); en todos los casos  $\alpha = 0.0027$  y  $\beta = 0.0023952$  (hallado en la Sección 5.2.1). Los resultados dejan ver que las cartas de control con los límites definidos según (5-51), (5-52) son de  $ARL$  insesgado, pero como se mostró para los límites (5-42) y (5-43) en la Tabla (6-11), la detección de cambios del proceso es más lenta que cuando los límites de la carta son dados por (5-45) o (5-46). Además, se puede ver que  $ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^* = ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$ ; la  $ARL$  de la carta  $t$  según los límites corregidos (5-51) y (5-52) es la misma, pese a que los estimadores de  $\lambda_0$  son  $\hat{\lambda}_{\text{unb}}$  y  $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$ .

Tabla 6-19.: Valores de  $ARL$  de la carta  $t$  para los tamaños de muestra  $n = 5, 15, 30, 50, 100, 200$ ,  $\delta$ ,  $\lambda_0 = 0.01$  y  $ARL_0 = 370$  usando los límites dados en (5-45) y (5-46), y los límites corregidos (5-49) y (5-50).

$n$	Medida	$\delta$									
		0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
5	$ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$	23.65	146.00	236.36	259.48	250.82	231.84	211.20	191.92	174.83	159.96
	$ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$	12.17	91.460	191.91	245.20	259.48	253.83	239.93	223.54	207.18	191.92
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$	65.08	536.91	883.63	963.44	924.17	849.13	770.15	697.62	634.02	579.10
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$	65.08	536.91	883.63	963.44	924.18	849.13	770.15	697.62	634.02	579.10
15	$ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$	10.26	92.07	246.89	311.30	300.24	267.64	235.16	207.73	185.36	167.11
	$ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$	8.710	73.27	220.31	304.33	308.26	281.31	249.80	221.68	198.22	178.87
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$	13.25	138.11	346.00	408.73	380.58	333.75	291.16	256.40	228.49	205.87
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$	13.25	138.11	346.00	408.73	380.58	333.75	291.16	256.40	228.49	205.87
30	$ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$	8.700	72.90	247.77	334.51	316.20	274.84	238.02	208.83	185.79	167.29
	$ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$	8.080	64.40	230.96	331.24	322.33	283.06	245.90	215.94	192.16	173.04
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$	10.03	93.72	302.12	380.12	347.59	298.74	257.87	226.04	201.05	181.01
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$	10.03	93.72	302.12	380.12	347.59	298.74	257.87	226.04	201.05	181.01
50	$ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$	8.190	64.95	247.27	346.76	322.38	276.69	238.50	208.95	185.82	167.30
	$ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$	7.850	60.23	235.88	345.10	326.80	281.91	243.28	213.19	189.60	170.70
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$	9.000	77.22	284.12	373.99	338.44	288.39	248.18	217.36	193.29	174.01
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$	9.000	77.22	284.12	373.99	338.44	288.39	248.18	217.36	193.29	174.01
100	$ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$	7.850	59.13	246.14	357.66	326.46	277.58	238.67	208.98	185.83	167.30
	$ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$	7.690	56.94	239.79	357.07	328.98	280.26	241.06	211.09	187.70	168.98
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$	8.290	65.46	268.02	371.31	332.86	281.96	242.28	212.12	188.62	169.81
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$	8.290	65.46	268.02	371.31	332.86	281.96	242.28	212.12	188.62	169.81
200	$ARL(\delta)_{\beta, \text{unb}}$	7.690	56.32	245.15	363.78	328.20	277.87	238.72	208.99	185.83	167.30
	$ARL(\delta)_{\beta, \text{bias}}$	7.610	55.27	241.77	363.59	329.53	279.23	239.91	210.04	186.76	168.14
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$	7.940	59.83	258.22	370.61	330.52	279.27	239.84	209.97	186.70	168.08
	$ARL(\delta)_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$	7.940	59.83	258.22	370.61	330.52	279.27	239.84	209.97	186.70	168.08

# 7. Aplicaciones: Desempeño de la carta t con $\lambda_0$ estimado

A continuación se pretende mostrar la manera como funcionan las cartas de control propuestas, a partir del uso de datos reales y simulados. Para ello, se obtendrán los límites de las cartas construidas considerando que  $\lambda_0$  es estimado y bajo cada una de las correcciones propuestas.

## 7.1. Aplicación a datos reales

La Tabla B-1 dada en el Apéndice B, es tomada de Jarrett (1979) y representa el tiempo en días entre explosiones originadas en minas de carbón, desde el 15 de marzo de 1851 hasta el 22 de marzo de 1962. Con éstos datos se determinan los valores de los límites de control inferior y superior propuestos en las Secciones 5.3.1 y 6.2.2. Lo primero que se hace es suponer que los primeros 30 datos corresponden a la información con la que se cuenta en la fase I de monitoreo, durante los cuales el proceso se encuentra en control estadístico. Con esta información, se obtienen los estimadores insesgado y sesgado,  $\hat{\lambda}_{\text{unb}} = 0.008127803$  y  $\hat{\lambda}_{\text{bias}} = 0.008408072$ , de acuerdo a (5-4) y (5-5) respectivamente. Con dichas estimaciones y considerando una tasa nominal de falsa alarma de  $\alpha = 0.0027$ , se calculan los límites de control no corregidos definidos en (5-25), (5-26), (5-45) y (5-46) obteniendo  $(\widehat{LCL}_{\text{unb}}, \widehat{UCL}_{\text{unb}}) = (0.1662088, 812.9689)$ ,  $(\widehat{LCL}_{\text{bias}}, \widehat{UCL}_{\text{bias}}) = (0.1606685, 785.8699)$ ,  $(\widehat{LCL}_{\beta, \text{unb}}, \widehat{UCL}_{\beta, \text{unb}}) = (0.2950477, 996.0758)$  y  $(\widehat{LCL}_{\beta, \text{bias}}, \widehat{UCL}_{\beta, \text{bias}}) = (0.2852127, 962.8732)$  respectivamente. Nótese que la región en control de los límites correspondientes al estimador  $\hat{\lambda}_{\text{bias}}$  es más angosta que la de  $\hat{\lambda}_{\text{unb}}$ , lo cual justifica el aumento de la tasa de falsa alarma evidenciado en la Tabla 6-8 y 6-16. Aunque vale anotar que son más angostas las regiones determinadas por los primeros dos pares de límites referidos; es decir, aquellos en los que se establecen límites de control con probabilidades nominales de colas iguales.

En la Figura 7-1 se representan las observaciones 1 a 30 de la Tabla B-1, comparados con los límites según (5-25) y (5-26). Obsérvese que el dato 14(826), está fuera de los límites de control superior  $\widehat{UCL}_{\text{unb}}$  y  $\widehat{UCL}_{\text{bias}}$ ; sin embargo, de acuerdo a lo visto en Jarrett (1979), no se encontró evidencia para decir que dicha observación sea provocada por una causa asignable, por ello, se asume que representa un dato inherente al proceso monitoreado, razón por la que no se excluye cuando se calculan los pares de límites  $(\widehat{LCL}_{\text{unb}}, \widehat{UCL}_{\text{unb}})$  y  $(\widehat{LCL}_{\text{bias}}, \widehat{UCL}_{\text{bias}})$  o  $(\widehat{LCL}_{\beta, \text{unb}}, \widehat{UCL}_{\beta, \text{unb}})$  y  $(\widehat{LCL}_{\beta, \text{bias}}, \widehat{UCL}_{\beta, \text{bias}})$ . En la Figura no se alcanza a ver el límite  $\widehat{LCL}_{\text{bias}}$  debido a su semejanza con  $\widehat{LCL}_{\text{unb}}$ . Vale anotar que no se muestra la carta para los límites  $(\widehat{LCL}_{\beta, \text{unb}}, \widehat{UCL}_{\beta, \text{unb}})$  y  $(\widehat{LCL}_{\beta, \text{bias}}, \widehat{UCL}_{\beta, \text{bias}})$ , debido a que son más amplios que los límites  $(\widehat{LCL}_{\text{unb}}, \widehat{UCL}_{\text{unb}})$  y  $(\widehat{LCL}_{\text{bias}}, \widehat{UCL}_{\text{bias}})$ , lo que hace que las 30 observaciones caigan al interior de los mismos.

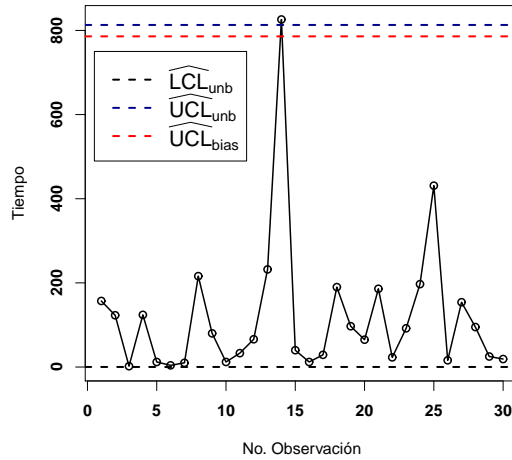


Figura 7-1.: Carta de control  $t$  para los datos de fase I de la Tabla B-1, con límites (5-25) y (5-26), usando  $\alpha = 0.0027$ .

Con los pares de límites calculados antes, se obtiene para las observaciones 31 a 190 la carta de control mostrada en la Figura 7.2(a); en donde la primera, segunda, tercera y demás observaciones graficadas son la 31, 32, 33 y así sucesivamente de la Tabla B-1; en dicha Figura las observaciones 134, 137, 153, 156, 182, 187, 188, 189 están por encima de los límites superiores construidos con  $\hat{\lambda}_{unb}$  y  $\hat{\lambda}_{bias}$ , adicionalmente la observación 151 rebasa el límite superior  $\hat{\lambda}_{bias}$ , es decir, el par de límites  $(\widehat{LCL}_{bias}, \widehat{UCL}_{bias})$  genera una alarma más que el par  $(\widehat{LCL}_{unb}, \widehat{UCL}_{unb})$ . Nótese que la observación 80 que corresponde a 0 está por debajo del límite inferior  $\widehat{LCL}_{bias}$ , dicha observación representa el hecho de que ocurrieron dos accidentes el mismo día (6 de diciembre de 1875) Jarrett (1979).

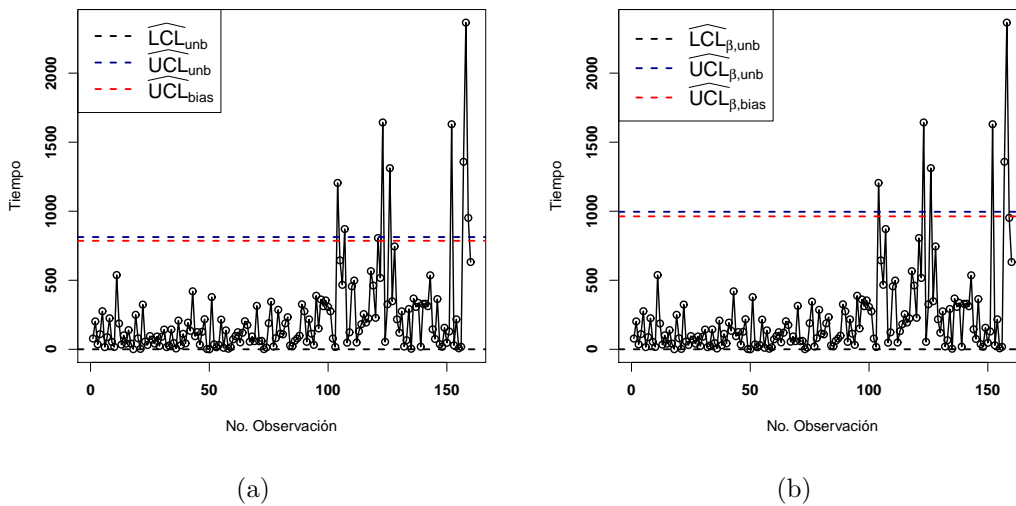


Figura 7-2.: (a) Carta de control  $t$  para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{unb}, \widehat{UCL}_{unb})$  y  $(\widehat{LCL}_{bias}, \widehat{UCL}_{bias})$ . (b) Carta de control  $t$  para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{\beta, unb}, \widehat{UCL}_{\beta, unb})$  y  $(\widehat{LCL}_{\beta, bias}, \widehat{UCL}_{\beta, bias})$ . Usando  $\alpha = 0.0027$ .

La Carta de control mostrada en la Figura 7.2(b) se obtiene de forma semejante a como se obtuvo a la Figura 7.2(a), usando los límites  $(\widehat{LCL}_{\beta, \text{unb}}, \widehat{UCL}_{\beta, \text{unb}})$  y  $(\widehat{LCL}_{\beta, \text{bias}}, \widehat{UCL}_{\beta, \text{bias}})$ . En este caso nótese que las observaciones 134, 156, 182, 187, 188 están por encima de los límites superiores, 4 alertas menos que cuando se usa el límite  $\widehat{UCL}_{\text{bias}}$ .

La Tabla 7-1 presenta los valores de los límites de control de las cartas  $t$  corregidas según ecuaciones (5-34), (5-35), (5-42), (5-43), (5-49), (5-50), (5-51) y (5-52), usando los primeros  $n = 30$  datos de la Tabla B-1 y una tasa nominal de falsa alarma de  $\alpha = 0.0027$ . Los resultados muestran la semejanza entre los pares de límites  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}})$ ,  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}, \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}})$ ,  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{bias}}, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{bias}})$  y  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}, \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}})$ . Estos 4 pares de límites difieren de los siguientes 4 pares de límites, los cuales también son similares entre sí:  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}}^*)$ ,  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*)$ ,  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{bias}}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{bias}}^*)$  y  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*)$ . Recuerde que lo que tienen en común el primer grupo de límites es que en la corrección de los límites se encontraron las constantes de corrección procurando un valor fijo de la  $ARL$  en control  $\forall n \geq 2$ , a la vez que éste correspondiera al máximo  $ARL$  cuando el proceso está en control, pero en lugar de fijar su valor en una cantidad, se procuró mantener la misma tasa de falsa alarma incondicional  $\forall n \geq 2$ . También se calcularon los límites de control corregidos según Zhang et al. (2006), obteniendo  $\widehat{LCL}_{\text{Zhang}} = 0.2677733$  y  $\widehat{UCL}_{\text{Zhang}} = 1013.98$ , los cuales son más angostos que los propuestos en éste trabajo. Si los primeros 30 datos de la Tabla B-1, se comparan con los límites corregidos y calculados con anterioridad, se verá que todos se encuentran entre los límites inferiores y superiores correspondientes; por lo que no se genera la alarma emitida con los límites  $(\widehat{LCL}_{\text{unb}}, \widehat{UCL}_{\text{unb}}) = (0.1662088, 812.9689)$  y  $(\widehat{LCL}_{\text{bias}}, \widehat{UCL}_{\text{bias}}) = (0.1606685, 785.8699)$ .

Tabla 7-1.: Límites de control de la carta  $t$  de acuerdo a (5-34), (5-35), (5-42), (5-43), (5-49), (5-50), (5-51) y (5-52) usando los datos de la fase I.  $\alpha = 0.0027$ .

Límites							
$\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}$ :	0.2799966	$\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}^*$ :	0.2726287	$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}$ :	0.2799965	$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$ :	0.2726287
$\widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}}$ :	1054.9680	$\widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}}^*$ :	1059.1850	$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}$ :	1054.9680	$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$ :	1059.1850
$\widehat{LCL}_{\alpha, \text{bias}}$ :	0.2799965	$\widehat{LCL}_{\alpha, \text{bias}}^*$ :	0.2726287	$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}$ :	0.2799965	$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$ :	0.2726287
$\widehat{UCL}_{\alpha, \text{bias}}$ :	1054.9680	$\widehat{UCL}_{\alpha, \text{bias}}^*$ :	1059.1850	$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}$ :	1054.9680	$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$ :	1059.1850

La Figura 7.3(a) exhibe la carta de control que utiliza los límites  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}})$  para realizar el monitoreo, 7.3(b) representa la carta de control usando los límites  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}}^*)$  y 7.3(c) representa a la carta con límites  $(\widehat{LCL}_{\text{Zhang}}, \widehat{UCL}_{\text{Zhang}})$ . Las tres cartas informan que las observaciones 134, 153, 156, 182, 187 y 188 sobrepasan los límites de control superior y que la observación 80 está por debajo de los límite inferiores considerados; es decir, para el ejemplo mostrado, las cartas propuestas en esta tesis generan las mismas alarmas que la propuesta por Zhang et al. (2006).

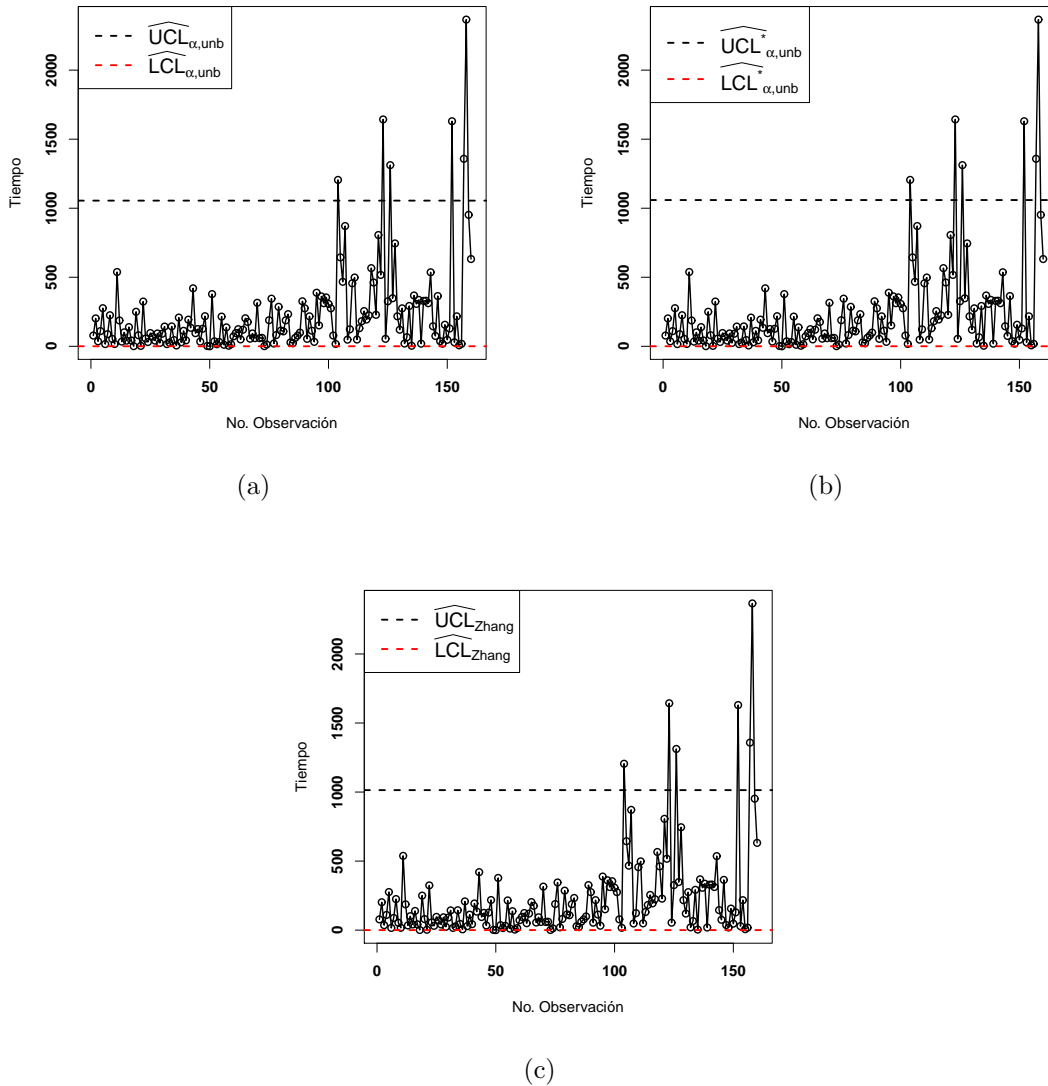


Figura 7-3.: (a) Carta de control  $t$  para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}})$ .  
 (b) Carta de control  $t$  para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}}^*)$ . (c)  
 Carta de control  $t$  para los datos de fase I con límites  $(\widehat{UCL}_{\text{Zhang}}, \widehat{LCL}_{\text{Zhang}})$ . Usando  
 $\alpha = 0.0027$ .

## 7.2. Aplicación a datos simulados

En ésta parte se pretende ver el desempeño de la carta con los límites de control propuestos cuando los datos monitoreados por las cartas de control respectivas son simulados; para ello, se simulan 30 datos de una distribución  $\exp(t; \lambda_0 = 0.01)$  (ver Tabla C-1); es decir, éstas observaciones corresponden a un proceso bajo control y se usan para estimar al parámetro  $\lambda_0$ , obteniendo  $\widehat{\lambda}_{\text{unb}} = 0.01145059$  y  $\widehat{\lambda}_{\text{bias}} = 0.01184544$ , a partir de los cuales se calculan los límites de control no corregidos  $(\widehat{LCL}_{\text{unb}}, \widehat{UCL}_{\text{unb}}) = (0.1179775, 577.05740)$ ,  $(\widehat{LCL}_{\text{bias}}, \widehat{UCL}_{\text{bias}}) = (0.1140449, 557.82220)$ , en

los cuales las probabilidades de colas nominales son iguales y  $(\widehat{LCL}_{\beta, \text{unb}}, \widehat{UCL}_{\beta, \text{unb}}) = (0.2094292, 707.0294)$ ,  $(\widehat{LCL}_{\beta, \text{bias}}, \widehat{UCL}_{\beta, \text{bias}}) = (0.2024483, 683.4618)$ , en los cuales las probabilidades de colas nominales son distintas. Al respecto de estos límites, se puede notar al comparar los límites que estos son más angostos cuando  $\lambda_0$  es estimado según  $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$ , independientemente de si las colas de probabilidad nominal son iguales o no. De otra parte, considerar probabilidades de colas nominales distintas permiten obtener límites más amplios si se compara teniendo en cuenta al estimador  $\widehat{\lambda}_{\text{unb}}$  o  $\widehat{\lambda}_{\text{bias}}$ . Además de los límites anteriores, se calculan los mostrados en la Tabla 7-2 para las cartas  $t$  con límites corregidos. Nótese que los límites de control se relacionan de la misma forma que los dados en la Tabla 7-1. Ahora se supondrán dos escenarios: cuando hay un deterioro y cuando hay una mejora en el proceso; en donde para el primer caso, cuando hay **deterioro**, se simulan 50 datos provenientes de una distribución  $\exp(t; \lambda_i)$ , juntando consecutivamente 5 grupos de 10 observaciones, tales que  $\lambda_i = \delta_i \lambda_0$ , con  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  tal que  $\lambda_0 = 0.01$  y  $\delta_i = 2, 3, 4, 5, 6$  (ver Tabla C-2) y en el segundo caso, cuando hay **mejora**; se simulan 50 datos de una distribución  $\exp(t, \lambda_j = \delta_j \lambda_0)$ , con  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ ,  $\lambda_0 = 0.01$  y  $\delta_j = 0.6, 0.5, 0.4, 0.3$ , y  $0.2$  (ver Tabla C-3), grupos de datos que se supone corresponden a la etapa de monitoreo.

Tabla 7-2.: Límites de control de la carta  $t$  según (5-34), (5-35), (5-42), (5-43), (5-49), (5-50), (5-51) y (5-52) usando los datos de la Tabla C-1.  $\alpha = 0.0027$ .

Límites									
$\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}$ :	0.1987457	$\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}^*$ :	0.1935159	$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}$ :	0.1987457	$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$ :	0.1935159	$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}$ :	0.1935159
$\widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}}$ :	748.83200	$\widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}}^*$ :	751.82510	$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}$ :	748.83200	$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$ :	751.82510	$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}$ :	751.82510
$\widehat{LCL}_{\alpha, \text{bias}}$ :	0.1987457	$\widehat{LCL}_{\alpha, \text{bias}}^*$ :	0.1935159	$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}$ :	0.1987457	$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$ :	0.1935159	$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}$ :	0.1935159
$\widehat{UCL}_{\alpha, \text{bias}}$ :	748.83200	$\widehat{UCL}_{\alpha, \text{bias}}^*$ :	751.82510	$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}$ :	748.83200	$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$ :	751.8251	$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}$ :	751.8251

Las Figuras 7.4(a), 7.4(b), 7.4(c) y 7.4(d) exhiben las cartas de control construidas para los datos de la Tabla C-2 usando los pares de límites  $(\widehat{LCL}_{\text{unb}}, \widehat{UCL}_{\text{unb}})$  y  $(\widehat{LCL}_{\text{bias}}, \widehat{UCL}_{\text{bias}})$ ,  $(\widehat{LCL}_{\beta, \text{unb}}, \widehat{UCL}_{\beta, \text{unb}})$  y  $(\widehat{LCL}_{\beta, \text{bias}}, \widehat{UCL}_{\beta, \text{bias}})$ ,  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}})$  y  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}}^*)$ , al igual que  $(\widehat{LCL}_{\text{Zhang}}, \widehat{UCL}_{\text{Zhang}}) = (0.1900695, 719.7382)$ , los cuales son obtenidos usando los datos de la Tabla C-1. Lo anterior también es aplicado para la Tabla C-3, dando como resultado las Figuras 7.5(a), 7.5(b), 7.5(c) y 7.5(d).

Nótese en las Figuras 7.4(a), 7.4(b), 7.4(c) y 7.4(d), que ninguna de las cartas logra detectar que ha ocurrido un cambio en el proceso; sin embargo, las carta con límites  $(\widehat{LCL}_{\text{unb}}, \widehat{UCL}_{\text{unb}})$  y  $(\widehat{LCL}_{\text{bias}}, \widehat{UCL}_{\text{bias}})$  y  $(\widehat{LCL}_{\beta, \text{unb}}, \widehat{UCL}_{\beta, \text{unb}})$  y  $(\widehat{LCL}_{\beta, \text{bias}}, \widehat{UCL}_{\beta, \text{bias}})$  mostradas en la Figura 7.5(a) y 7.4(b), emiten 8 y 5 alarmas para el proceso en las observaciones 4, 10, 28, 32, 35, 44, 47 y 49, en el primer caso y las observaciones 32, 35, 44, 47 y 49 en el segundo. Las cartas con límites  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}})$  y  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}}^*)$  y  $(\widehat{LCL}_{\text{Zhang}}, \widehat{UCL}_{\text{Zhang}})$ , informan, como se exhibe en las Figuras 7.5(c) y 7.5(d) que está ocurriendo algo en el proceso en las observaciones 35, 44, 47 y 49; es decir las correcciones propuestas en éste trabajo, se comportan similar a la propuesta de Zhang et al. (2006). Vale destacar que ninguno de los casos en estudio, reportan observaciones por debajo de los límites inferiores.

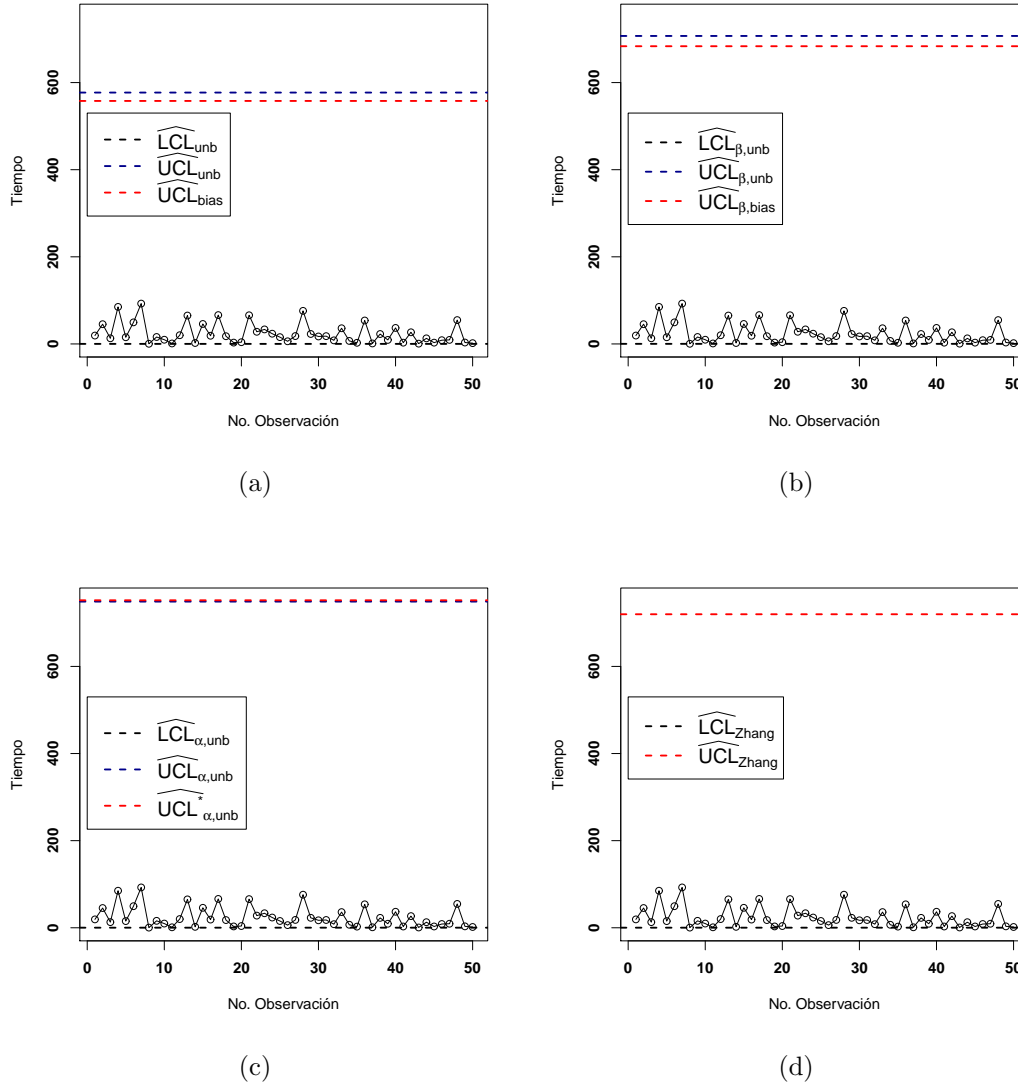


Figura 7-4.: (a) Carta de control  $t$  para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{\text{unb}}, \widehat{UCL}_{\text{unb}})$  y  $(\widehat{LCL}_{\text{bias}}, \widehat{UCL}_{\text{bias}})$ . (b) Carta de control  $t$  para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{\beta, \text{unb}}, \widehat{UCL}_{\beta, \text{unb}})$  y  $(\widehat{LCL}_{\beta, \text{bias}}, \widehat{UCL}_{\beta, \text{bias}})$ . (c) Carta de control  $t$  para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}})$  y  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}}^*)$ . (d) Carta de control  $t$  para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{\text{Zhang}}, \widehat{UCL}_{\text{Zhang}})$ . Usando  $\alpha = 0.0027$ ,  $n = 30$ .

Si se toman los primeros 5 datos de la Tabla C-1, se tendrá una muestra de tamaño  $n = 5$ , con la cual  $\widehat{\lambda}_{\text{unb}} = 0.006264674$  y  $\widehat{\lambda}_{\text{bias}} = 0.007830842$ , son los estimadores de  $\lambda_0$ . Con ellos se llega a los pares de límites no corregidos  $(\widehat{LCL}_{\text{unb}}, \widehat{UCL}_{\text{unb}}) = (0.2156397, 1054.748)$  y  $(\widehat{LCL}_{\text{bias}}, \widehat{UCL}_{\text{bias}}) =$



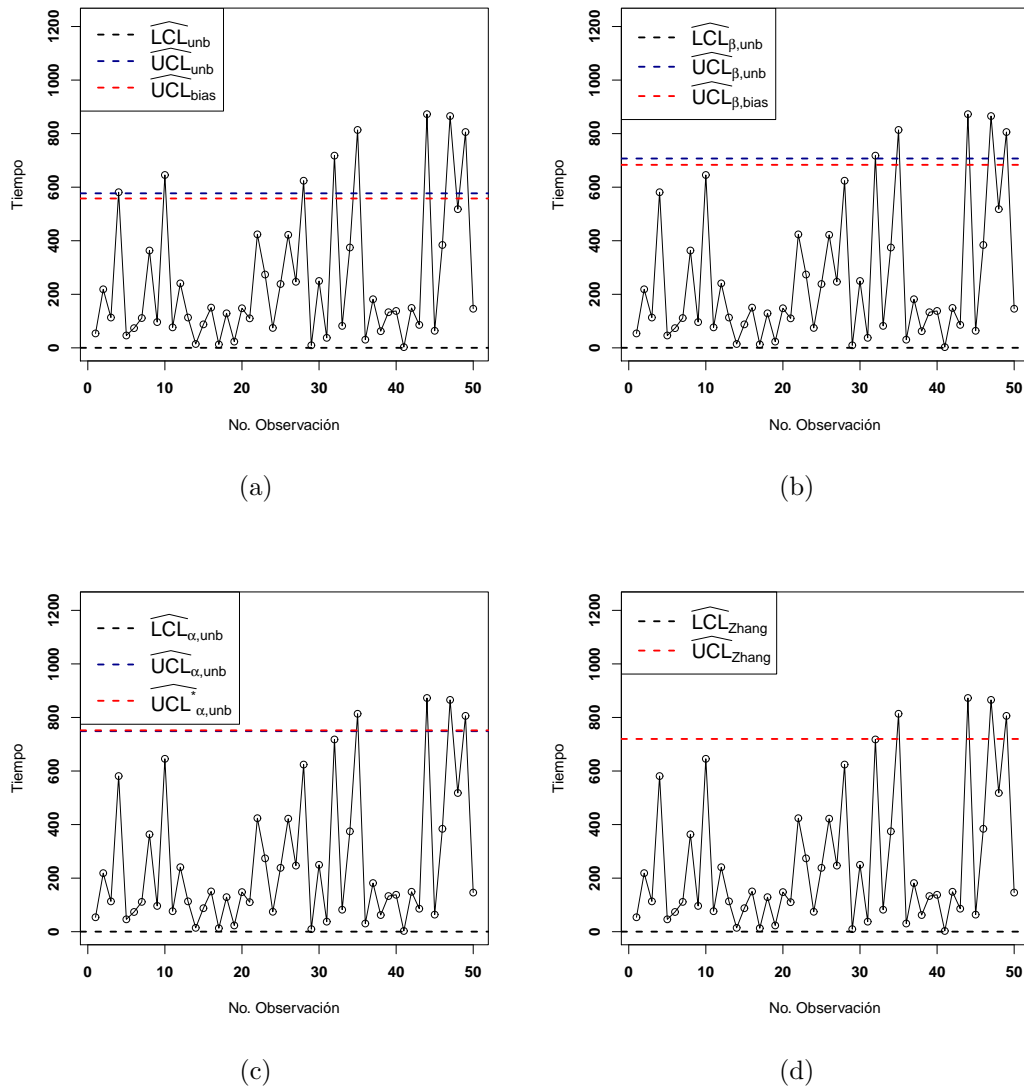


Figura 7-5.: (a) Carta de control  $t$  para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{umb}, \widehat{UCL}_{umb})$  y  $(\widehat{LCL}_{bias}, \widehat{UCL}_{bias})$ . (b) Carta de control  $t$  para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{\beta, umb}, \widehat{UCL}_{\beta, umb})$  y  $(\widehat{LCL}_{\beta, bias}, \widehat{UCL}_{\beta, bias})$ . (c) Carta de control  $t$  para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{\alpha, umb}, \widehat{UCL}_{\alpha, umb})$  y  $(\widehat{LCL}_{\alpha, umb}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, umb}^*)$ . (d) Carta de control  $t$  para los datos de fase I con límites  $(\widehat{LCL}_{Zhang}, \widehat{UCL}_{Zhang})$ . Usando  $\alpha = 0.0027$ .  $n = 30$

$(0.1725117, 843.7982)$  y  $(\widehat{LCL}_{\beta, umb}, \widehat{UCL}_{\beta, umb}) = (0.3827955, 1292.311)$  y  $(\widehat{LCL}_{\beta, bias}, \widehat{UCL}_{\beta, bias}) = (0.3062364, 1033.849)$ , en los cuales se usan probabilidades nominales de colas iguales y distintas respectivamente. Nótese que los pares de límites  $(\widehat{LCL}_{umb}, \widehat{UCL}_{umb})$ ,  $(\widehat{LCL}_{bias}, \widehat{UCL}_{bias})$  y  $(\widehat{LCL}_{\beta, umb}, \widehat{UCL}_{\beta, umb})$ ,  $(\widehat{LCL}_{\beta, bias}, \widehat{UCL}_{\beta, bias})$  son más amplios que los obtenidos con todos los

datos de la Tabla C-1 (tamaño de muestra  $n = 30$ ); aparte de esto, se puede ver un aumento en las diferencias de los límites de acuerdo al estimador.

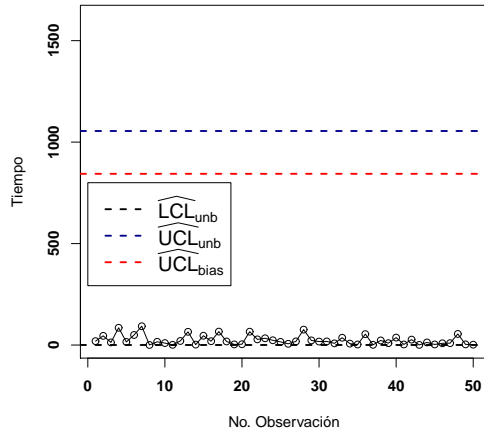
Al usar los primeros 5 datos de la Tabla C-1, los límites de Zhang et al. (2006) cuando  $\lambda_0$  es estimado son  $(\widehat{LCL}_{\text{Zhang}}, \widehat{UCL}_{\text{Zhang}}) = (0.3474097, 1315.54)$ . Usando esta información, el conjunto de límites para las correcciones propuestas en esta tesis para el caso  $\lambda_0$  estimado se encuentran en la tabla 7-3. Al igual que en la Tabla 7-2, se cumple la igualdad entre los límites  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}})$ ,  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{bias}}, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{bias}})$ ,  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}, \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}})$  y  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}, \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}})$ ; al igual que entre los límites  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}}^*)$ ,  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \text{bias}}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, \text{bias}}^*)$ ,  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*)$  y  $(\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*)$ ; resultado esperado de acuerdo a las Tablas 6-5 y 6-13; 6-9 y 6-17. Nótese en los resultados que hay mayor diferencia entre los límites que se calculan fijando la  $ARL$  (primer grupo de límites) y aquellos en los que se fija la tasa de falsa alarma (segundo grupo de límites).

Tabla 7-3.: Límites de control de la carta  $t$  según (5-34), (5-35), (5-42), (5-43), (5-49), (5-50), (5-51) y (5-52) usando los 5 primeros datos de la Tabla C-1.  $\alpha = 0.0027$ .

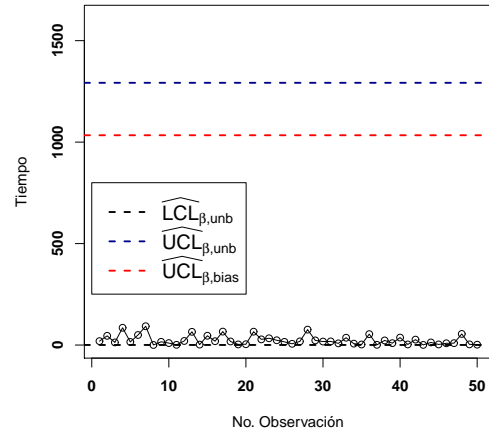
Límites							
$\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}$ :	0.2742967	$\widehat{LCL}_{\alpha, \text{unb}}^*$ :	0.1060551	$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}$ :	0.2742967	$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$ :	0.1060551
$\widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}}$ :	1394.0550	$\widehat{UCL}_{\alpha, \text{unb}}^*$ :	1604.3340	$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}$ :	1394.0550	$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{unb}}^*$ :	1604.334
$\widehat{LCL}_{\alpha, \text{bias}}$ :	0.2742967	$\widehat{LCL}_{\alpha, \text{bias}}^*$ :	0.1060551	$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}$ :	0.2742967	$\widehat{LCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$ :	0.1060551
$\widehat{UCL}_{\alpha, \text{bias}}$ :	1394.0550	$\widehat{UCL}_{\alpha, \text{bias}}^*$ :	1604.3340	$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}$ :	1394.0550	$\widehat{UCL}_{\alpha, \beta, \text{bias}}^*$ :	1604.334

Con la información de la Tabla 7-3, se elaboran las Figuras 7-6 y 7-7, que representan el monitoreo de la situación de deterioro y mejora del proceso respectivamente. Nótese que de las dos situaciones ejemplificadas, sólo en la situación de mejora los límites  $(\widehat{LCL}_{\text{bias}}, \widehat{UCL}_{\text{bias}})$ , emiten alarmas para las observaciones 44 y 47, indicando que ha ocurrido un cambio en el proceso, a diferencia de lo que ocurre cuando se usa una muestra de tamaño  $n = 30$  para estimar a  $\lambda_0$ .

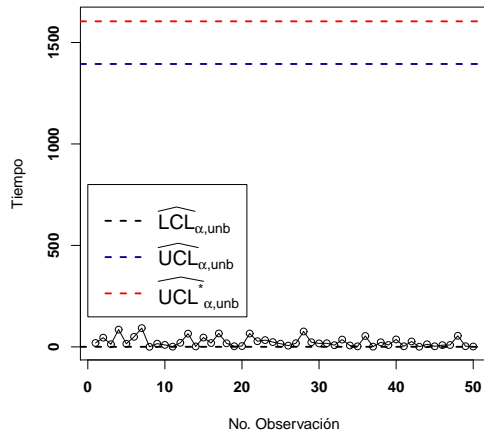
Los resultados anteriores permiten ver el efecto que puede tener el tamaño de la muestra en el desempeño de la carta  $t$ . En el caso estudiado se muestra que las correcciones propuestas aquí o por Zhang et al. (2006) no alcanzan a informar que ha ocurrido un cambio en el proceso, si el tamaño de muestra usado para estimar a  $\lambda_0$  es pequeño.



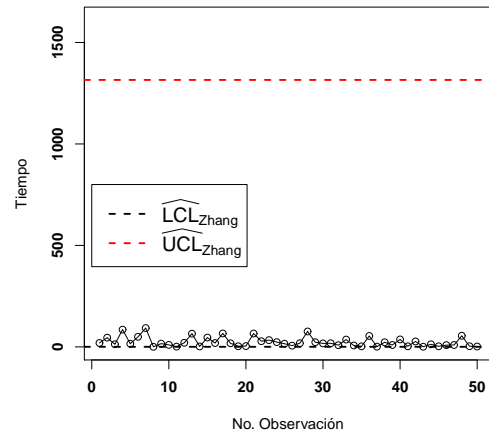
(a)



(b)

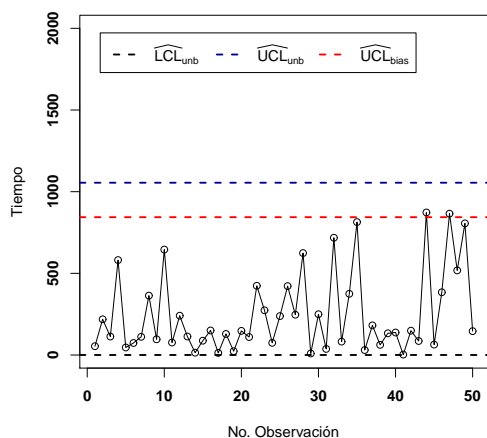


(c)

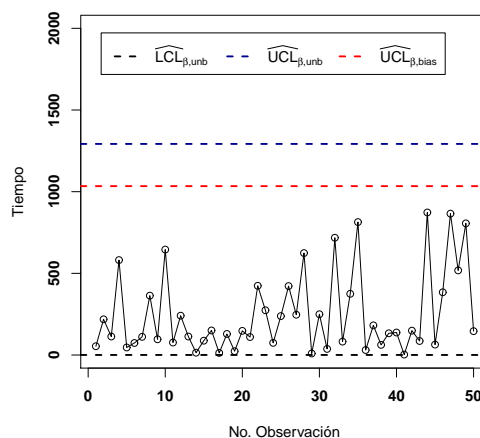


(d)

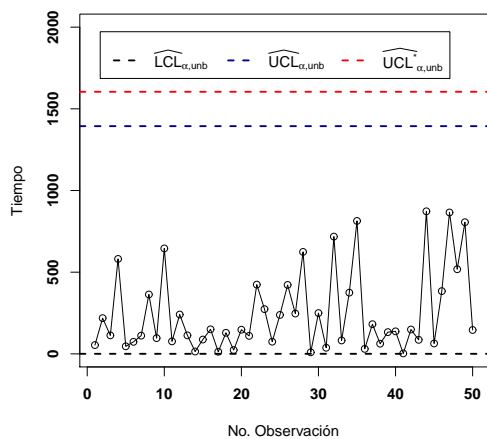
Figura 7-6.: (a) Es la carta de control para los límites  $(\widehat{LCL}_{unb}, \widehat{UCL}_{unb})$  y  $(\widehat{LCL}_{bias}, \widehat{UCL}_{bias})$ . (b) Es la carta de control para los límites  $(\widehat{LCL}_{\beta, unb}, \widehat{UCL}_{\beta, unb})$  y  $(\widehat{LCL}_{\beta, bias}, \widehat{UCL}_{\beta, bias})$ . (c) Representa la carta de control para los límites  $(\widehat{LCL}_{\alpha, unb}, \widehat{UCL}_{\alpha, unb})$  y  $(\widehat{LCL}_{\alpha, unb}^*, \widehat{UCL}_{\alpha, unb}^*)$  y (d) la carta para los límites  $(\widehat{LCL}_{Zhang}, \widehat{UCL}_{Zhang})$ .  $\alpha = 0.0027$ .  $n = 5$



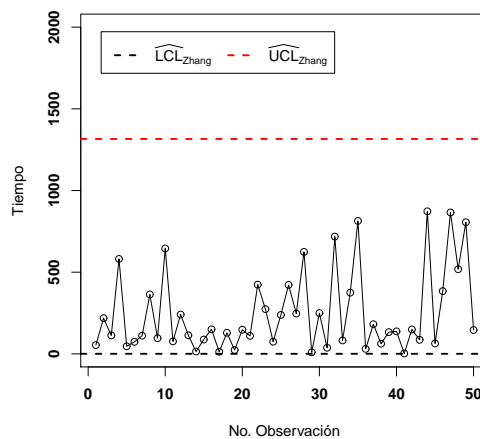
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 7-7.: (a) Es la carta de control para los límites  $(\widehat{LCL}_{umb}, \widehat{UCL}_{umb})$  y  $(\widehat{LCL}_{bias}, \widehat{UCL}_{bias})$ . (b) Es la carta de control para los límites  $(\widehat{LCL}_{\beta,umb}, \widehat{UCL}_{\beta,umb})$  y  $(\widehat{LCL}_{\beta,bias}, \widehat{UCL}_{\beta,bias})$ . (c) Representa la carta de control para los límites  $(\widehat{LCL}_{\alpha,umb}, \widehat{UCL}_{\alpha,umb})$  y  $(\widehat{LCL}_{\alpha,umb}^*, \widehat{UCL}_{\alpha,umb}^*)$  y (d) la carta para los límites  $(\widehat{LCL}_{Zhang}, \widehat{UCL}_{Zhang})$ .  $\alpha = 0.0027$ .  $n=5$

# 8. Conclusiones y recomendaciones

## 8.1. Conclusiones

De acuerdo a lo visto y discutido sobre la carta  $t$  con parámetro conocido y estimado, se pudo ver que en general la carta es de  $ARL$  sesgado en ambos casos y por tanto, se hacen necesarias correcciones sobre los límites de control.

Cuando  $\lambda_0$  es conocido es preferible trabajar con límites corregidos con probabilidades de colas nominales iguales que aquellos con probabilidades de colas diferentes, pues a pesar que con las primeras es un poco mayor la  $ARL$  cuando hay mejora del proceso; sin embargo, es un poco mejor en la detección de deterioros del proceso.

Al trabajar con límites estimados sin corregir se pudo observar que es mejor usar límites con probabilidades de colas nominales distintas, cuando se desean detectar deterioros del proceso, debido a que muestran una  $ARL$  menor para los casos en los que  $\delta > 1$ , siendo la **ARL** más pequeña cuando el estimador usado es el insesgado.

Las estimaciones del parámetro  $\lambda_0$  afectan desfavorablemente el comportamiento de la  $ARL$  de la carta  $t$  cuando no se han corregido los límites y se tienen muestras pequeñas. Las correcciones deben considerar los tamaños de muestra, por lo que se hace necesario la implementación de los procesos de optimización presentados con cada valor de  $n$  que se desea usar para la estimación.

Una vez corregidos los límites de control de la carta  $t$ , con cualquiera de los criterios de optimización utilizados y bien sea usando límites con probabilidades de colas iguales o diferentes, da lo mismo usar un estimador sesgado o insesgado para estimar al parámetro  $\lambda_0$ , puesto que en cada uno de los procedimientos de construcción de las cartas que se estudiaron, los valores de los límites obtenidos, así como las  $ARLs$ , con similares.

Las cartas obtenidas tienen un comportamiento muy similar en su  $ARL$  y SDRL en control (ver Tabla 6-5 y 6-13). Esto mismo sucede cuando se fija la tasa de falsa alarma (ver Tabla 6-9 y 6-17). Sin embargo, es mejor controlar la  $ARL$  que la tasa de falsa alarma; debido a que si el tamaño de muestra es pequeño, la  $ARL$  en control es muy grande. La única forma de obtener los mismos resultados fijando la  $ARL$  o la tasa de falsa alarma es que el tamaño de la muestra usada sea grande, de tal forma que se pueda obtener una  $ARL$  en control cercana a  $1/\alpha$ . Por lo anterior, parece que no es conveniente obtener una carta de  $ARL$  insesgado fijando la tasa de falsa alarma, sino más bien fijando la  $ARL$ .

Finalmente, comparando las correcciones propuestas en esta tesis vs, las presentadas por Zhang et al. (2006), tanto con  $\lambda_0$  conocido como estimado se lograron mejoras con las cartas corregidas partiendo de límites de probabilidades de cola con valores nominales iguales, especialmente en la detección del deterioro del proceso.

## 8.2. Recomendaciones

Dado que la carta  $t$  tiene una  $ARL$  que no es simétrica alrededor de  $\delta = 1$ , presenta el problema de que en promedio tarda más en detectar deterioros que mejoras. Al respecto autores como Santiago y Smith (2013), han propuesto introducir reglas de corrida para mejorar dicha situación, pero generan una reducción drástica de la  $ARL$  en control, por lo que este aspecto requiere aún más investigación, en aras de detectar lo más rápido posible que el proceso se está deteriorando, dado su importancia en muchas aplicaciones.

Sería importante realizar un estudio del comportamiento de la carta  $t$  cuando los datos son censurados. Observando el comportamiento de la misma cuando  $\lambda_0$  es conocido y es estimado.

Al igual que cualquier carta de control tipo Shewhart, la carta  $t$  es mala para detectar pequeñas desviaciones del parámetro, por lo que se debe pensar en otro tipo de cartas para el estudio de éste problema, tal como la CUSUM o la EWMA, y de igual forma, evaluar y corregir el posible sesgo de la  $ARL$ , tanto en el caso de  $\lambda_0$  conocido como estimado.

Adicionalmente a lo anterior, se puede estudiar el comportamiento de la carta  $t$  usando límites unilaterales, analizando la influencia de estos en la  $ARL$  cuando  $\lambda_0$  es conocido o estimado, viendo en este último cómo afecta el tamaño de la muestra o el estimador usado para construir los límites de control.

Además de lo anterior, se puede desarrollar un paquete en  $R$  en el que se implementen los resultados de los límites de control propuestos, esto puede permitir la extensión de los resultados al monitoreo de tiempos entre eventos que sigan una distribución distinta a la exponencial.

Por último una aproximación bayesiana pudiera considerarse como una estrategia para la evaluación de los efectos derivados de la incertidumbre en los parámetros de la distribución sobre el desempeño de la carta  $t$ .



## B. Anexo: Tiempo entre explosiones en minas de carbón

La Tabla B-1 es tomada de Jarrett (1979) y representa el tiempo en días entre explosiones originadas en minas de carbón, desde el 15 de marzo de 1851 hasta el 22 de marzo de 1962. La lectura ordenada de los datos se debe hacer por columna y de forma descendente.

Tabla B-1.: Tiempo (en días) entre explosiones en minas de carbón. Tomados de Jarrett (1979).

157.00	65.00	53.00	93.00	127.00	176.00	22.00	1205.00	1643.00	312.00
123.00	186.00	17.00	24.00	218.00	55.00	61.00	644.00	54.00	536.00
2.00	23.00	538.00	91.00	2.00	93.00	78.00	467.00	326.00	145.00
124.00	92.00	187.00	143.00	0.00	59.00	99.00	871.00	1312.00	75.00
12.00	197.00	34.00	16.00	378.00	315.00	326.00	48.00	348.00	364.00
4.00	431.00	101.00	27.00	36.00	59.00	275.00	123.00	745.00	37.00
10.00	16.00	41.00	144.00	15.00	61.00	54.00	456.00	217.00	19.00
216.00	154.00	139.00	45.00	31.00	1.00	217.00	498.00	120.00	156.00
80.00	95.00	42.00	6.00	215.00	13.00	113.00	49.00	275.00	47.00
12.00	25.00	1.00	208.00	11.00	189.00	32.00	131.00	20.00	129.00
33.00	19.00	250.00	29.00	137.00	345.00	388.00	182.00	66.00	1630.00
66.00	78.00	80.00	112.00	4.00	20.00	151.00	255.00	292.00	29.00
232.00	202.00	3.00	43.00	15.00	81.00	361.00	194.00	4.00	217.00
826.00	36.00	324.00	193.00	72.00	286.00	312.00	224.00	368.00	7.00
40.00	110.00	56.00	134.00	96.00	114.00	354.00	566.00	307.00	18.00
12.00	276.00	31.00	420.00	124.00	108.00	307.00	462.00	336.00	1358.00
29.00	16.00	96.00	95.00	50.00	188.00	275.00	228.00	19.00	2366.00
190.00	88.00	70.00	125.00	120.00	233.00	78.00	806.00	329.00	952.00
97.00	225.00	41.00	34.00	203.00	28.00	17.00	517.00	330.00	632.00



## C. Anexo: Datos simulados

La forma correcta de leer la información de las Tablas C-1, C-3 y C-2, es de forma descendente.

Tabla C-1.: Datos provenientes de una distribución  $\exp(t; \lambda_0 = 0.01)$ .

92.385200	39.844660	131.34218	87.1624900	18.47139
108.75654	1.997610	49.655170	40.951640	39.54219
24.27800	83.20567	183.77085	430.02630	33.33573
284.23594	8.079560	99.529670	162.33376	25.03050
128.84524	11.18891	91.652170	99.536890	81.89714
90.89754	25.54986	50.733970	3.0106200	5.372260

Tabla C-2.: Datos provenientes de una distribución  $\exp(t; \lambda = \delta\lambda_0)$  con  $\lambda_0 = 0.01$  con  $\delta=2, 3, 4, 5, 6$ .

19.24513	1.095210	65.78556	17.85076	2.910600
45.31119	19.99206	27.89376	8.236600	26.74773
12.94298	65.15728	33.34658	35.99127	0.670060
85.01549	2.140800	23.51633	6.923670	12.80023
15.32487	45.82275	15.59481	2.644840	2.950640
49.52244	18.80764	6.074390	53.80447	8.586870
92.62693	66.21177	18.04943	1.106490	9.281240
0.355760	17.68504	75.93766	22.74659	54.71532
15.92949	3.076450	22.86829	9.229410	3.239690
9.672780	3.972240	17.14324	36.72866	1.800930

Tabla C-3.: Datos provenientes de una distribución  $\exp(t; \lambda = \delta\lambda_0)$  con  $\lambda_0 = 0.01$  y  $\delta = 0.6, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2$

53.8648600	76.5058100	110.175700	37.4405500	2.7333150
218.646200	240.776200	423.811800	717.811300	149.036200
113.193000	113.246300	273.847900	82.0969900	85.8373200
581.154600	14.4135900	74.4720900	374.719700	872.666500
46.1469300	87.6801600	238.395900	813.756900	63.7368400
73.6343200	150.323800	422.014300	30.5580600	384.194800
111.335600	12.9131100	246.747800	181.555800	865.564200
363.514500	128.935400	624.122000	62.2404300	518.027200
96.2560700	23.3345900	9.53826300	133.033100	805.949100
645.533500	147.820300	249.677600	137.821600	146.087600

# D. Anexo: Código R usado

## D.1. Cálculo de la ARL y SDRL para $\lambda_0$ conocido

```
ARLlambda0conocido1=function(delta,A,B,lambda0,alpha){ #1
  LCL=-A*log(1-alpha/2)/lambda0 #2
  UCL=-B*log(alpha/2)/lambda0 #3
  psi=1-exp(-LCL*lambda0*delta)+exp(-UCL*lambda0*delta) #4
  ARL=(1/psi) #5
  ARL #6}
SDRLlambda0conocido1=function(delta,A,B,lambda0,alpha){#7
  LCL=-A*log(1-alpha/2)/lambda0 #8
  UCL=-B*log(alpha/2)/lambda0 #9
  psi=1-$\exp$(-LCL*lambda0*delta)+exp(-UCL*lambda0*delta) #10
  SDRL=(sqrt(1-psi)/psi) #11
  SDRL} #12
```

### D.1.1. Comentarios al código anterior

1. Definición de la función ARLlambda0conocido1 que recibe como entradas a delta que representa el tamaño de la desviación del parámetro, A y B, factores de corrección, lambda0 parámetro del proceso, alpha tasa nominal de falsa alarma.
2. Límite inferior de control
3. Límite superior de control
4. Probabilidad de que una observación caiga fuera de los límites UCL y LCL
5. Calcula la ARL
6. Devuelve el valor de la ARL
7. Definición de la función SDRLlambda0conocido1 que recibe las mismas entradas que ARLlambda0conocido1
8. Límite inferior de control
9. Límite superior de control
10. Probabilidad de que una observación caiga fuera de los límites UCL y LCL
11. Calcula la SDRL
12. Devuelve el valor de la SDRL

## D.2. Obtención de los valores óptimos de A y B

```
require(rootSolve) #1
modelo1conocido=function(x,delta=1,lambda0=0.001,alpha=0.005){ #2
  F1=ARLlambda0conocido1(delta=delta,A=x[1],B=x[2],lambda0=lambda0,alpha=alpha)-round(1/alpha) # 3
  F2=derivadaARLlambda0conocido1(delta=delta,A=x[1],B=x[2],lambda0=lambda0,alpha=alpha)#4
  c(F1 = F1,F2 = F2)} #5}
(ss =multiroot(f=modelo1conocido, start = c(1, 1)))\$root #6
```

### D.2.1. Comentarios al código anterior

1. Se llama a la librería rootSolve para usarla en el cálculo de los valores óptimos de A y B.
2. Se define la función modelo1conocido con los valores alrededor del cual sea desea obtener las soluciones óptimas, x es el vector de soluciones con A y B.
3. Primera ecuación del sistema a resolver y que corresponde a la derivada de la ARL evaluada en delta=1 e igualada a cero
4. Segunda ecuación del sistema a resolver y que corresponde a la ARL evaluada en delta=1 e igualada a cero.
5. Vector de ecuaciones del sistema a resolver
6. Solución del sistema formado por F1 y F2; es decir, arroja las soluciones A y B óptimas para ARLlambda0conocido1

## D.3. Cálculo de la ARL para $\lambda_0$ estimado

```
integrandoARLestimado=function(x,delta,C,D,lambda0,n){ #1
  LCL=C*x/(n-1) #2
  UCL=D*x/(n-1) #3
  psi=1-exp(-LCL*lambda0*delta)+exp(-UCL*lambda0*delta) #4
  integ=(1/psi)*dgamma(x,shape=n,rate=lambda0) #5
  integ} #6
ARLintegralestimado=function(delta,C,D,lambda0,n){#7
  if (C<D){#8
    arl=integrate(integrandoARLestimado,delta=delta,C=C,D=D,lambda0=lambda0,n=n,lower=0,
    upper=Inf)\$value #9
  arl}else{ #10
    arl=Inf } #11
  arl } #12
```

### D.3.1. Comentarios al código anterior

1. Definición de la función integrandoARLestimado que recibe como entradas a delta que representa el tamaño de la desviación del parámetro, C y D, factores de corrección, lambda0 parámetro del proceso, n, tamaño de la muestra.
2. Límite inferior de control
3. Límite superior de control

4. Probabilidad de que una observación caiga fuera de los límites UCL y LCL
5. Calcula la ARL condicional
6. Devuelve el valor de la ARL condicional
7. Definición de la función `ARLintegralestimado` para el cálculo de la ARL incondicional. Esta función recibe las mismas entradas que la función `integrandoARLestimado`.
8. Condicional para alertar que la función devuelve un valor in-apropiado. En este caso, verifica que la constante  $C$  sea mayor que  $d$ , con ello el límite inferior siempre será menor que el superior.
9. Integral del valor devuelto por la función `integrandoARLestimado`. El resultado corresponde a la ARL incondicional.
10. Devuelve el valor calculado en la línea anterior.

## D.4. Cálculo de la tasa de falsa alarma

```
integrandoBETAestimado=funcion(z,x1,delta,C,D,lambda0,n,alpha){ #1
  LCL=-C*log(1-x1)*z/(n-1) #2
  UCL=-D*log(alpha-x1)*z/(n-1) #3
  paso=(exp(-lambda0*delta*UCL)-exp(-lambda0*delta*LCL)) #4
  integ=paso*dgamma(z,shape=n,rate=lambda0) #5
  integ} #6
integralBETAestimado=funcion(x1,delta,C,D,lambda0,n,alpha){ #7
  betaint=integrate(integrandoBETAestimado,x1=x1,delta=delta,C=C,D=D,
  lambda0=lambda0,n=n,alpha=alpha,lower=0,upper=Inf)\$value #8
  betaint=betaint+1 #9
  betaint} #10
```

### D.4.1. Comentarios al código anterior

1. Definición de la función `integrandoBETAestimado`, correspondiente a la integral de la tasa de falsa alarma. Esta función recibe las mismas entradas que la función `integrandoARLestimado`.
2. Límite inferior de control
3. Límite superior de control
4. Probabilidad de que una observación caiga dentro de los límites UCL y LCL.
5. Integrando de la tasa de falsa alarma.
6. Valor devuelto por la función `integrandoBETAestimado`.
7. Definición de la función `integrandoBETAestimado`, correspondiente a la integral de la tasa de falsa alarma. Esta función recibe las mismas entradas que la función `integrandoARLestimado`.
8. Calculo de la integral del valor devuelto por `integrandoBETAestimado`.

9. Tasa de falsa alarma
10. Valor devuelto por `integralBETAestimado`. Corresponde a la tasa de falsa alarma.

## D.5. Cálculo de valores óptimos para los factores de ajuste de los límites estimados

```

modelo1estimado=function(x, lambda0=.0.01, n=n){ #1
  F1=ARLintegralestimado(delta=1,C=x[1],D=x[2], lambda0=lambda0,n=n)-370 #2
  F2=ARLderivadaestimado(delta=1,C=x[1],D=x[2], lambda0=lambda0,n=n) #3
  c(F1 = F1, F2 = F2)} #4
  (ss <- multiroot(f = modelo1estimado, start = c(-log(1-0.0027/2),
    -log(0.0027/2)))) $root #5
modelo2estimado=function(x,n=n, lambda0=0.01){#6
  F2=ARLderivadaestimado(delta=1,C=x[1],D=x[2], lambda0=lambda0,n=n) #7
  F3=integralBETAestimado(delta=1,C=x[1],D=x[2], lambda0=lambda0,n=n)-0.0027#8
  c(F2 = F2,F3 = F3)} #9
  (ss <- multiroot(f=modelo2estimado, start = c(-log(1-0.0027/2),log(0.0027/2)))) $root #10


```

### D.5.1. Comentarios al código anterior

1. Definición de la función `modelo1estimado`, mediante la cual se definen las ecuaciones a resolver para optimizar las constantes de corrección de los límites. Recibe como entradas al vector de ecuaciones `x`, valor del parámetro `lambda0`, tamaño de muestra `n`. En esta función se trabaja fijando la ARL en control en un valor
2. Primera ecuación del sistema, en ella se hace  $ARL=ARL_0$ .
3. Segunda ecuación del sistema, derivada de la ARL igualada a cero.
4. Vector de ecuaciones a resolver.
5. Obtención de los valores óptimos de los factores de corrección.
6. Definición de la función `modelo2estimado`, mediante la cual se definen las ecuaciones a resolver para optimizar las constantes de corrección de los límites. Recibe como entradas al vector de ecuaciones `x`, valor del parámetro `lambda0`, tamaño de muestra `n`. En esta función se trabaja fijando la tasa nominal de falsa alarma.
7. Primera ecuación del sistema, corresponde a la derivada de la ARL igualada a cero.
8. Segunda ecuación del sistema, tasa de falsa alarma real igualada al a nominal.
9. Vector de ecuaciones a resolver.
10. Obtención de los valores óptimos de los factores de corrección.



# Bibliografía

- Albers, W. y Kallenberg, W. (2004). Estimation in shewhart control charts: effects and corrections. *Metrika*, 59(3), 207–234.
- Aslam, M., Azam, M., y Jun, C.-H. (2015). A new control chart for exponential distributed life using ewma. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 37(2), 205–210.
- Borrór, C. M., Keats, J. B., y Montgomery, D. C. (2003). Robustness of the time between events cusum. *International Journal of Production Research*, 41(15), 3435–3444.
- Castagliola, P., Celano, G., y Chen, G. (2009). The exact run length distribution and design of the  $s^2$  chart when the in-control variance is estimated. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 16(1), 23 – 38.
- Chakraborti, S. (2007). Run length distribution and percentiles: The shewhart chart with unknown parameters. *Quality Engineering*, 19(2), 119 – 127.
- Chan, L. Y., Xie, M., y Goh, T. (2000). Cumulative quantity control charts for monitoring production processes. *International Journal of Production Research*, 38(2), 397–408.
- Cheng, C.-S. y Chen, P.-W. (2010). An arl-unbiased design of time-between-events control charts with runs rules. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81(7), 857–871.
- Chin, W. y Khoo, M. (2012). A study of the median run length (MRL) performance of the EWMA t chart for the mean. *South African Journal of Industrial Engineering*, 23, 42–55.
- Guo, B., Wang, B. X., y Xie, M. (2014). Arl-unbiased control charts for the monitoring of exponentially distributed characteristics based on type-ii censored samples. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84(12), 2734–2747.
- Hill, D. (1956). Modified control limits. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 5(1), 12–19.
- Huang, S. y Yang, J. (2015). An arl-unbiased design of gamma control chart. In *2015 First International Conference on Reliability Systems Engineering (ICRSE)*, (pp. 1–6).
- Human, S., Chakraborti, S., y Smit, C. (2010). Shewhart-type control charts for variation in phase i data analysis. *Computational Statistics and Data Analysis*, 54(4), 863 – 874.
- Jarrett, R. G. (1979). A note on the intervals between coal-mining disasters. *Biometrika*, 66(1), 191–193.

- Jensen, W. A., Jones-Farmer, A., Charles, C., y Woodall, W. (2006). Effects of parameter estimation on control chart properties: A literature review. *Journal of Quality Technology*, 38(4), 349–364.
- Khoo, M. B., Lee, M., Teoh, W., Liew, J., y Teh, S. (2013). The effects of parameter estimation on minimising the in-control average sample size for the double sampling x chart. *South African Journal of Industrial Engineering*, 24, 58–67.
- Montgomery, C. D. (2013). *Introduction to statistical quality control* (7 ed.). New York: John Wiley and Sons.
- Nelson, L. S. (1994). A control charts for parts-per-million nonconforming items. *Journal of Quality Technology*, 26, 239–240.
- Ozsan, G., Caner, T. M., y H.Wei, C. (2010). Properties of the exponential ewma chart with parameter estimation. *Quality and Reliability Engineering International*, 26(6), 555–569.
- Psarakis, S., Vynioua, A. K., y Philippe, C. (2014). Some recent developments on the effects of parameter estimation on control charts. *Quality and Reliability Engineering International*, 30, 1113–1129.
- Quesenberry, C. P. (1993). The effect of sample size on estimated limits for  $\bar{X}$  and x control charts. *Journal of Quality Technology*, 25, 237 – 247.
- Ryan, T. (2011). *Statistical Methods for Quality Improvement*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley.
- Saghir, A., Lin, Z., y Chen, C.-W. (2015). The properties of the geometric-poisson exponentially weighted moving control chart with estimated parameters. *Cogent Mathematics*, 2(1), 992–381.
- Santiago, E. y Smith, J. (2013). Control charts based on the exponential distribution: Adapting runs rules for the t chart. *Quality Engineering*, 25(2), 85–96.
- Soetaert, K. (2016). *rootSolve: Nonlinear root finding, equilibrium and steady-state analysis of ordinary differential equations*. R-package version 1.7.
- Tang, L. C. y Cheong, W. T. (2004). Cumulative conformance count chart with sequentially updated parameters. *IIE Transactions*, 36(9), 841–853.
- Vargas, J. (2006). *Control estadístico de calidad* (2 ed.). Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Woodall, W. (2000). Controversies and contradictions in statistical process control. *Journal of Quality Technology*, 32(4), 341–350.
- Woodall, W. H. y Driscoll, A. R. (2015). *Frontiers in Statistical Quality Control 11*, chapter Some Recent Results on Monitoring the Rate of a Rare Event, (pp. 15–27). Springer International Publishing.



- Woodall, W. H. y Montgomery, D. C. (2014). Some current directions in the theory and application of statistical process monitoring. *Journal of Quality Technology*, 46(1), 78–94.
- Xie, M., Goh, T., y Ranjan, P. (2002). Some effective control chart procedures for reliability monitoring. *Reliability Engineering and System Safety*, 77, 143–150.
- Xie, M. y Goh, T. N. (1992). Some procedures for decision making in controlling high yield processes. *Quality and Reliability Engineering International*, 8(4), 355–360.
- Xie, M., Goh, T. N., y Kuralmani, V. (2000). On optimal setting of control limits for geometric chart. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 07(01), 17–25.
- Yang, J., Yu, H., Cheng, Y., y Xie, M. (2014). Design of exponential control charts based on average time to signal using a sequential sampling scheme. *International Journal of Production Research*, 53(7), 2131–2145.
- Yang, J., Yu, H., Cheng, Y., y Xie, M. (2016). Design of gamma charts based on average time to signal. *Quality and Reliability Engineering International*, 32(3), 1041–1058.
- Yang, Z., Xie, M., Kuralmani, V., y Tsui, K.-L. (2002). On the performance of geometric charts with estimated control limits. *Journal of Quality Technology*, 34(4), 448–458.
- Zhang, C. W., Xie, M., y Goh, T. N. (2005). Economic design of exponential charts for time between events monitoring. *International Journal of Production Research*, 43(23), 5019–5032.
- Zhang, C. W., Xie, M., y Goh, T. N. (2006). Design of exponential control charts using a sequential sampling scheme. *IIE Transactions*, 38, 1105–1116.
- Zhang, M., Peng, Y., Schuh, A., Megahed, F. M., y Woodall, W. H. (2013). Geometric charts with estimated control limits. *Quality and Reliability Engineering International*, 29(2), 209–223.
- Zhonghua, L., Changliang, Z., Zhen, G., y Zhaojun, W. (2014). The computation of average run length and average time to signal:an overview. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84(8), 1779–1802.