# Haces de variable compleja: emergencia, geometría y lógica

**Nicolás Ramírez Díaz**

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2017

# Haces de variable compleja: emergencia, geometría y lógica

**Nicolás Ramírez Díaz**

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
**Magister en Ciencias Matemáticas**

Director:
Fernando Zalamea

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2017

Basta pensar em sentir
Para sentir em pensar.
Meu coração faz sorrir
Meu coração a chorar.
Depois de ficar e ir
Hei-de ser quem vai chegar
Para ser quem quer partir.

Viver é não conseguir.

Fernando Pessoa (1932).

## Agradecimientos

A Fernando por su generosidad y apoyo. A Luz, Jorge, Sebastián y Silvia por su apoyo y amor.

## Resumen

Este trabajo es tanto un estudio como una revisión de la teoría de haces en el momento de su emergencia: alrededor de los años 50s. El estudio-revisión propuesto no es un recuento cronológico de hechos y personajes, sino una recreación actualizada de los objetos e ideas matemáticas en juego.



**Palabras clave:** variable compleja, haces coherentes, teoría de haces, categorías abelianas.



## Abstract

This work is both a study and a review of Sheaf theory at the time of its emergency: around the 50s. The proposed study-review is not a chronological account of facts and characters, but an updated account of the mathematical objects and ideas at stake.



**Keywords:** complex variable, coherent sheaves, sheaf theory, abelian categories.

# Índice general

# INTRODUCCIÓN

> ¿Acaso no nos roza, a nosotros también, una ráfaga del aire que envolvía a los de antes? ¿Acaso en las voces a las que prestamos oído no resuena el eco de otras voces que dejaron de sonar? ¿Acaso las mujeres a las que hoy cortejamos no tienen hermanas que ellas ya no llegaron a conocer? Si es así, un secreto compromiso de encuentro está entonces vigente entre las generaciones del pasado y la nuestra.
> Walter Benjamin, *Sobre el concepto de historia* (1940).

Este trabajo es tanto un estudio como una revisión de la Teoría de Haces en el momento de su emergencia, alrededor de los años 50s en la Escuela Parisina. La revisión propuesta no es un recuento cronológico de hechos y personajes, sino una recreación actualizada de los objetos e ideas matemáticas en juego. Si bien Jean Leray fue el primero en introducir una noción de haz, la emergencia y lugar preponderante de la teoría en las matemáticas corresponde a un entramado de momentos previos y simultáneos. Nuestro estudio quiere ser, entonces, una suerte de guía actual, en el sentido en que partimos de formulaciones que el tiempo ha ido decantando, para el *encuentro vigente* con el pasado. Somos, sin embargo, conscientes de lo esquemática que puede parecer esta guía, y solo nos queda por proceder con empatía hacia las matemáticas y personajes de las que este trabajo quisiera dar cuenta.

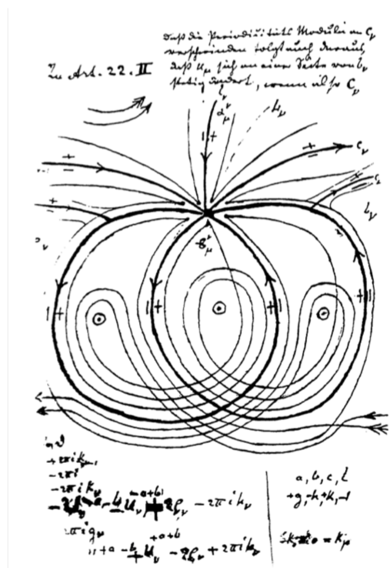
Dicho lo anterior, es necesario señalar que un título más adecuado con el contenido final del escrito debería ser: *La emergencia de los haces en variable compleja*. El título que lleva el trabajo es, entonces, el vestigio de la intención (proyecto) inicial que formulamos con el profesor Fernando Zalamea, y que mi constante trasegar no permitió concretar del todo, quedando por fuera (principalmente) el aspecto lógico.

El concepto de haz sintetiza técnicamente el tránsito entre lo local y lo global en matemáticas. Tensión vigente en la visión profunda de Riemann de las funciones en variable compleja, que adquiere una problemática concreta alrededor de la continuación analítica, el entendimiento de lo meromorfo y el paso de una a varias variables. Dos problemas (de Cousin) se convierten en los principales objetivos a comienzos del siglo XX; su entendimiento y resolución, con Cartan y Oka, es el ambiente fluctuante donde emerge la teoría de haces. La Teoría inmediatamente tiene un fuerte desarrollo, elevándose como el ámbito natural para un nuevo entendimiento de Riemann (geometría analítica y geometría algebraica). El *primer capítulo* busca, entonces, hacer una presentación de esta situación.

Es con la honda visión y uso categórico por parte de Grothendieck que los haces, a través de esquemas y topos, se instalan en el corazón mismo del desarrollo de las matemáticas contemporáneas. El *segundo capítulo* es, entonces, una visita a una de las primeras concreciones de la genialidad de Grothendieck alrededor de los haces, su artículo *Tohôku*. La invención, en este artículo, de las categorías abelianas maravilla, primero, por su capacidad de englobar estructuras análogas (módulos y haces), segundo, por su fina concreción técnica alrededor de la existencia de inyectivos. Es acá donde esta Tesis cree hacer un pequeño aporte, al exponer la existencia de proyectivos e inyectivos en Prehaces (teorema II.4.1), siguiendo las simetrías importantes que gobiernan la invención de Grothendieck. Son simetrías que corresponden a adjunciones, concepto que Grothendieck no ha acabado de inventar, pero que se encuentra claramente presente en el artículo. La concreción de este resultado corresponde, entonces, a nuestro deseo general de buscar una exposición *natural* de la emergencia de los objetos en juego.

## CAPÍTULO I

# VARIAS VARIABLES COMPLEJAS



## 1. Funciones holomorfas

De forma natural, una función de valores complejos en $n$ variables complejas es continua (diferenciable real) si como función de $2n$ variables reales es continua (diferenciable real). Una primera *obstrucción* surge al preguntarse cómo caracterizar la holomorfía. En análisis complejo, el caso de una variable, tenemos una concepción global de Riemann (ecuaciones de Cauchy-Riemann, propiedades estructurales de la base), frente a una concepción local de Weierstrass (serie de potencias, continuación analítica) [Lautman 1937, p.142-144]. Adoptamos esta última como punto de partida.

**Definición 1.1.** Una función $f(z)$ de valores complejos definida sobre una vecindad abierta conexa (dominio) $D \subseteq \mathbb{C}^n$ se dice **holomorfa**, si para todo $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$, $f(z)$ tiene un desarrollo en serie de potencias

$$\sum_{k_1,\ldots,k_n \geq 0} c_{k_1\cdots k_n}(z_1 - a_1)^{k_1} \cdots (z_n - a_n)^{k_n}$$

convergente en una vecindad de $a$.

Si $p(z) = \sum c_{k_1\cdots k_n}(z_1-a_1)^{k_1} \cdots (z_n-a_n)^{k_n}$ converge para algún $z = b$, un sencillo argumento con la serie geométrica muestra que $p(z)$ converge para todo $z$ con $|z_j - a_j| \leq |b_j - a_j|$ para $j = 1, \ldots, n$.

Así, el **polidisco**

$$P(a,r) = \{z : |z_j - a_j| < r_j \quad j = 1, \ldots, n\}$$

se presenta de manera natural y conveniente para las regiones de convergencia.[1]

Tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 1.1** (Osgood)**.** Sea $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n)$ *continua* en $D$. Si $f$ es holomorfa con respecto a cada $z_j$ cuando dejamos fijas las otras variables, entonces $f$ es holomorfa en $D$.[2]

*Demostración.* Sea $a \in D$ y elija $r$ tal que $\overline{P(a,r)} \subset D$. Iterando la fórmula integral de Cauchy para $z \in P(a,r)$

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w_1 - a_1| = r_1} \frac{f(w_1, z_2, \ldots, z_n)}{w_1 - z_1} dw_1,$$

$$f(w_1, z_2 \ldots, z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w_2 - a_2| = r_2} \frac{f(w_1, w_2, z_3, \ldots, z_n)}{w_2 - z_2} dw_2,$$

obtenemos

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{|w_1 - a_1| = r_1} \cdots \int\limits_{|w_n - a_n| = r_n} \frac{f(w_1, \ldots, w_n)}{(w_1 - z_1)\cdots(w_n - z_n)} dw_n \cdots dw_1. \tag{1}$$

Además

$$\frac{1}{w_j - z_j} = \frac{1}{w_j - a_j}\left[\frac{1}{1 - (z_j - a_j/w_j - a_j)}\right] = \frac{1}{w_j - a_j}\sum_{k \geq 0}(z_j - a_j/w_j - a_j)^k$$

converge (absolutamente) en $P(a,r)$. *Integrando* término por término conseguimos

$$f(z) = \sum c_{k_1\cdots k_n}(z_1 - a_1)^{k_1} \cdots (z_n - a_n)^{k_n},$$

donde

$$c_{k_1\cdots k_n} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{|w_1 - a_1| = r_1} \cdots \int\limits_{|w_n - a_n| = r_n} \frac{f(w_1, \ldots, w_n)}{(w_1 - a_1)^{k_1+1}\cdots(w_n - a_n)^{k_n+1}} dw_n \cdots dw_1 \tag{2}$$

con $|c_{k_1\cdots k_n}| \leq m\frac{1}{r_1^{k_1}\cdots r_n^{k_n}}$, donde $m = \sup\{|f(w)| : w \in \overline{P(a,r)}\}$. □

[1] Poincaré mostró que los polidiscos *no* son biholomórficamente equivalentes con las bolas abiertas.

[2] Es posible quitar la condición de continuidad (Teorema de Hartogs). Sin embargo, es más difícil de probar.

Este resultado articula lo inicialmente conocido en análisis complejo. Quisiéramos, entonces, presentar las ecuaciones de Cauchy-Riemann para una función de valores complejos, diferenciable real, en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}^n$.

Miremos su desarrollo clásico en una variable. Si $z = x + iy$, la regla de la cadena del cálculo nos dice que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy;$$

escribiendo $dx = \frac{1}{2}(dz + d\overline{z})$, $dy = \frac{1}{2i}(dz - d\overline{z})$, tenemos

$$df = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\overline{z},$$

lo que nos permite introducir los siguientes operadores en varias variables:

**Definición 1.2.** Para $j = 1, \dots, n$, $\partial/\partial z_j$ y $\partial/\partial \overline{z}_j$ están dados por

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right).$$

Continuando, si tomamos $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, entonces

$$df = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dz + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]d\overline{z}.$$

Esta es la primera ecuación en la tesis doctoral de Riemann; de la cual se obtienen, vía conformidad, las ecuaciones de Cauchy-Riemann para funciones holomorfas [Riemann 1851, p.1-4; Ahlfors 1953, p.73-74]. Así, $\partial f/\partial \overline{z} = 0$ si y solo si $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ y $\partial v/\partial x = -\partial u/\partial y$. Así, $\partial f/\partial z$ coincide con la derivada usual del análisis complejo. Por lo tanto, del teorema de Osgood, se sigue facilmente:

**Teorema 1.2.** Sea $f(z)$ una función de clase $C^1$ en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}^n$.

$f(z)$ es holomorfa *si y solo si* $\partial f/\partial \overline{z}_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$.

De la ecuación (2) obtenemos:[3]

$$c_{k_1 \cdots k_n} = \frac{1}{k_1! \cdots k_n!}\frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n}}{\partial z_1^{k_1} \cdots \partial z_n^{k_n}} f(a).$$

Observe que si $f(a)$ y todas sus derivadas parciales se anulan, lo mismo ocurre en un polidisco alrededor de $a$.

**Teorema 1.3.** Si dos funciones $f(z)$ y $g(z)$ holomorfas en un dominio $D$ coinciden en alguna vecindad de un punto de $D$, entonces $f(z)$ y $g(z)$ coinciden en todo $D$.

*Demostración.* Sea $D_0$ el conjunto de puntos $a \in D$ con $[f - g](a)$ y todas sus derivadas parciales nulas, y $D_1 = D - D_0$, ambos son conjuntos abiertos. Por la conexidad de $D$, siempre $D = D_0$ ó $D = D_1$. □

Como en el caso de una variable compleja, este teorema implica **la unicidad de la continuación analítica**. También tenemos el **principio del máximo**:

**Teorema 1.4.** Si existe $z \in D$ con $|f(z)| \geq |f(w)|$ para todo $w$ en alguna vecindad (polidisco) de $z$, entonces $f(z) \equiv f(w)$ para todo $w \in D$.

*Demostración.* Sea $P(z, r)$ con modulo máximo en $z$ y sea $\partial P(z, \rho) = \{w : |w_j - z_j| = \rho_j\}$ con $\rho_j < r_j$, la frontera de un polidisco interior, que parametrizamos con las coordenas polares $t : [0, 2\pi]^n \to \partial P(z, \rho)$ dadas por $t(\theta) = z + \rho \cdot e^{i\theta}$. Remplazando en la fórmula integral Cauchy (1) obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} f(z + \rho \cdot e^{i\theta}) d\theta.$$

[3] Esta vez con la formula integral de Cauchy iterada para las derivadas.

Observe que $|f(z)|(2\pi)^n = \int |f(z)|d\theta$, y por lo tanto

$$\int_{[0,2\pi]^n} |f(z)|d\theta \leq \int_{[0,2\pi]^n} |f(z+\rho \cdot e^{i\theta})|d\theta.$$

Por otro lado, es claro que para cada $w \in P(z,r)$ existe $\rho$ y $\theta$ con $w = z+\rho \cdot e^{i\theta}$; como $|f(z)| \geq |f(z+\rho \cdot e^{i\theta})|$, tenemos que

$$\int_{[0,2\pi]^n} |f(z)|d\theta \geq \int_{[0,2\pi]^n} |f(z+\rho \cdot e^{i\theta})|d\theta,$$

luego, $|f(z)| \equiv |f(w)|$ para todo $w \in P(z,r)$. Una función holomorfa con módulo constante es constante,[4] con el teorema anterior concluimos el resultado para todo $D$. □

Faltaría por precisar unas últimas nociones que nos permiten tener un *buen cálculo holomorfo en varias variables complejas*.

**Teorema 1.5.** Si $f(w)$ es holomorfa en $w$ y $w = g(z) = (g_1(z), \dots, g_m(z))$ con cada $g_l$ holomorfa en $z$, entonces $f(g(z))$ es holomorfa en $z$.

*Demostración.* Las siguientes formulas extienden la regla de la cadena al caso complejo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z_j} &= \sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial w_l}\frac{\partial w_l}{\partial z_j} + \frac{\partial f}{\partial \overline{w}_l}\frac{\partial \overline{w}_l}{\partial z_j}\right), \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} &= \sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial w_l}\frac{\partial w_l}{\partial \overline{z}_j} + \frac{\partial f}{\partial \overline{w}_l}\frac{\partial \overline{w}_l}{\partial \overline{z}_j}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

□

**Definición 1.3.** Sea $f : D \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $f(z) = (f_1(z), \dots, f_m(z))$

1. $f$ es **holomorfa** si cada $f_l$ es holomorfa.
2. $\left(\frac{\partial f_l}{\partial z_j}\right)_{\substack{l=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ es la **matriz jacobiana**. Si $m = n$, el determinante $\det(\partial f_l/\partial z_j)$ se llama **jacobiano**. Si consideramos las partes real e imaginaria, denotamos $\partial(u,v)/\partial(x,y)$ el determinante asociado.

**Proposición 1.1.** $\partial(u,v)/\partial(x,y) = |\det(\partial f_l/\partial z_j)|^2 \geq 0$.

*Demostración.* Gracias a las ecuaciones de Cauchy-Riemann es posible triangularizar en $\partial(u,v)/\partial(x,y)$ con las entradas complejas [caso $n = 2$ en Morrow y Kodaira 1971, p.6]. □

**Teorema 1.6** (Función Inversa). Sea $f : D \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ holomorfa. Si $\det(\partial f_l/\partial z_j)_{z=a} \neq 0$, entonces existe una vecindad $U$ de $a$ con $f : U \to f(U)$ **biholomorfa** (biyectiva con inversa holomorfa).

*Demostración.* Veamos que $f^{-1} : f(U) \to U$ es holomorfa (lo otro se obtiene del teorema para funciones diferenciables reales, $\partial(u,v)/\partial(x,y) \neq 0$). Como $z_k = f_k^{-1}(f(z)) = f_k^{-1}(w)$, por las formulas (3) tenemos que

$$0 = \frac{\partial z_k}{\partial \overline{z}_j} = \frac{\partial f_k^{-1}}{\partial \overline{z}_j} = \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial f_k^{-1}}{\partial w_l}\frac{\partial f_l}{\partial \overline{z}_j} + \frac{\partial f_k^{-1}}{\partial \overline{w}_l}\frac{\partial \overline{f}_l}{\partial \overline{z}_j}\right) = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_k^{-1}}{\partial \overline{w}_l}\frac{\partial \overline{f}_l}{\partial \overline{z}_j}.$$

Pero $\det(\partial \overline{f}_l/\partial \overline{z}_j) = \overline{\det(\partial f_l/\partial z_j)} \neq 0$, luego $\partial f_k^{-1}/\partial \overline{w}_l = 0$ para todo $k, l = 1, \dots, n$. □

**Corolario 1.1** (Función Implícita). Sea $f : D \subseteq \mathbb{C}^{n-r} \times \mathbb{C}^r = \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^r$ holomorfa, $f(a,b) = 0$ para algún $(a,b) \in D$. Si $\det(\partial f_l/\partial z_j)_{j>n-r} \neq 0$ (en $b$), entonces existe una vecindad $U$ de $a$ y una única $g : U \subseteq \mathbb{C}^{n-r} \to \mathbb{C}^r$ holomorfa tal que $f(z, g(z)) = 0$.

[4]Si $f$ tiene módulo constante, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = ce^{i\theta(z)}$. Como $0 = \partial f/\partial \overline{z}_j = if \cdot \partial\theta/\partial \overline{z}_j$, tenemos que $\theta$ es holomorfa (real). Luego $\partial\theta/\partial x_j = -i\partial\theta/\partial y_j$ y por lo tanto ambas (reales) son nulas, i.e. toda función holomorfa real-valuada es constante.

## 2. Teoría local de Weierstrass

Sea $D \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio y $\mathcal{O}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \text{ holomorfa}\}$ la $\mathbb{C}$-álgebra de funciones holomorfas sobre $U \subseteq D$. Decimos que dos funciones holomorfas $f$ y $g$ son equivalentes en un punto $z \in D$, $f \equiv_z g$, si existe un abierto $V \ni z$ tal que $f = g$ en $\mathcal{O}(V)$. $(f)_z$ denota la clase de equivalencia. El **germen de funciones holomorfas** en el punto $z$ es la $\mathbb{C}$-álgebra

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_z &= \{(f)_z : f \text{ holomorfa está en algún } \mathcal{O}(U)\}\\ &= \varinjlim_{U \ni z} \mathcal{O}(U) \quad \text{(límite directo).}\end{aligned}$$

Es claro por definición que

**Proposición 2.1.** $\mathcal{O}_0 = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ es la $\mathbb{C}$-álgebra local de series de potencias convergentes alrededor de 0.

Tomando $\mathcal{O}'_0 = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$, decimos que $g = \sum g_k w^k \in \mathcal{O}'_0\{w\} = \mathcal{O}_0$ tiene **orden** $m$ en $w$ si $g_0(0) = \cdots = g_{m-1}(0) = 0$ y $g_m(0) \neq 0$.

**Teorema 2.1 (División de Weierstrass).** Sea $g \in \mathcal{O}_0$ con orden $m$ en $w$. Para todo $f \in \mathcal{O}_0$, existe un único $q \in \mathcal{O}_0$ y un único polinomio $r \in \mathcal{O}'_0[w]$ tal que

$$f = qg + r \text{ con } \operatorname{grad}(r) < m.$$

Nos apoyamos en los siguientes resultados:

**Lema 2.1** (Grauert y Fritzsche 1976, p.69). Para todo $\rho \in \mathbb{R}^n_+$, $B_\rho = \{g \in \mathcal{O}_0 : \|g\|_\rho = \sum |c_{k_1 \cdots k_n}| \rho_1^{k_1} \cdots \rho_n^{k_n} < \infty\}$ es una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach.

Escribiendo $g = \sum_{k=0}^{m-1} g_k w^k + w^m \sum_{k=0}^{\infty} g_{m+k} w^k = \dot{g} + w^m \ddot{g}$, tenemos que $\ddot{g} \in \mathcal{O}_0^*$ (unidad) si $g_m(0) \neq 0$.

**Lema 2.2** (Grauert y Fritzsche 1976, p.75). Sea $g \in \mathcal{O}_0$ con orden $m$ en $w$ y $\tilde{\rho} \in \mathbb{R}^n_+$ con $g \in B_{\tilde{\rho}}$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\rho \leq \tilde{\rho}$ tal que $\|w^m - g\ddot{g}^{-1}\|_\rho \leq \varepsilon \rho_n^m$.

*Demostración del teorema.* Para $0 < \varepsilon < 1$, sea $\rho \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $f, g \in B_\rho$ y $\|w^m - g\ddot{g}^{-1}\|_\rho \leq \varepsilon \rho_n^m$.

- [Existencia] Tomando $h_0 = f$, definimos recursivamente la sucesión $h_{j+1} = (w^m - g\ddot{g}^{-1})\ddot{h}_j$. Como $\|\ddot{h}_j\|_\rho \leq \rho_n^{-m} \|h_j\|_\rho$ tenemos que $\|h_{j+1}\|_\rho \leq \varepsilon^{j+1} \|f\|_\rho$, y por lo tanto, $\sum_{j=0}^{\infty} h_j \in B_\rho$. Luego
$$f = \sum_{j=0}^{\infty} (h_j - h_{j+1}) = \left( \ddot{g}^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \ddot{h}_j \right) g + \left( \sum_{j=0}^{\infty} \dot{h}_j \right).$$

- [Unicidad] Veamos que si $0 = qg + r$, entonces $q = 0$. Sea $l = w^m - g\ddot{g}^{-1}$, tenemos que $g = \ddot{g}(w^m - l)$ y $0 = q\ddot{g}w^m - q\ddot{g}l + r$. Luego
$$\|q\ddot{g}\|_\rho \rho_n^m = \|q\ddot{g}w^m\|_\rho \leq \|q\ddot{g}w^m + r\|_\rho = \|q\ddot{g}l\|_\rho \leq \|q\ddot{g}\|_\rho \varepsilon \rho_n^m.$$
Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, deducimos que $q = 0$.

□

**Corolario 2.1.** $\mathcal{O}_0 / g\mathcal{O}_0 \simeq (\mathcal{O}'_0)^m$.

*Demostración.* Inducido por el morfismo que envía $f$ a $(r_0, \dots, r_{m-1})$. □

**Teorema 2.2 (Preparación de Weierstrass).** Sea $g \in \mathcal{O}_0$ con orden $m \geq 1$ en $w$. Existe un único **polinomio de Weierstrass** $\omega \in \mathcal{O}'_0[w]$ con $\operatorname{grad}(\omega) = m$ [5] y una unidad $e \in \mathcal{O}_0^*$ tal que

$$g = e\omega.$$

*Demostración.* Tomamos $w^m = qg + r$. Como $g(0, w) = w^m \ddot{g}(0, w)$, tenemos que $q(0, w) = 1/\ddot{g}(0, w)$ y $r(0, w) = 0$, por lo tanto $q \in \mathcal{O}'_0$. Así $g = e\omega$ con $e = 1/q$ y $\omega = w^m - r$. □

**Corolario 2.2.** $\mathcal{O}_0 / g\mathcal{O}_0 \simeq \mathcal{O}'_0[w] / \omega\mathcal{O}'_0[w]$.

[5] $\omega = a_0 + \cdots a_{m-1} w^{m-1} + w^m$ con $a_0(0) = \cdots = a_{m-1}(0) = 0$.

**Proposición 2.2.** $\mathcal{O}_0$ es un álgebra noetheriana y factorial.

*Demostración.* Inducción: $\mathcal{O}'_0$ es noetheriana y factorial.

- [Noetheriana] $\mathcal{O}_0/g\mathcal{O}_0 \simeq (\mathcal{O}'_0)^m$ es noetheriana para todo $g \neq 0$ (corolario 2.1).
- [Factorial] Sea $g = e\omega$ una no unidad. Como $\mathcal{O}'_0[w]$ es factorial (lema de Gauss), $\omega$ es producto de polinomios monicos primos $\omega_1 \cdots \omega_s \in \mathcal{O}'_0[w]$. Cada $\omega_j$ es primo en $\mathcal{O}_0$ (corolario 2.2), luego $g = e\omega_1 \cdots \omega_s$ es la factorización en factores primos.

□

Estos resultados expresan el caracter algebraico y finito de las funciones holomorfas localmente, y, por lo tanto, se presentan como "gérmenes" para el estudio de los conjuntos de ceros (geometría analítica).

**Definición 2.1.**
1. Una $\mathbb{C}$-álgebra local $A$ es una **álgebra analítica** si $A \simeq \mathcal{O}_0/\mathfrak{a}$ con $a$ ideal propio de $\mathcal{O}_0$.
2. $f : A \to B$ es un **morfismo analítico** si es un $\mathbb{C}$-morfismo local i.e. $f(\mathfrak{m}_A) \subseteq \mathfrak{m}_B$ [6].

**Lema 2.3** (Hensel). Sea $p(z,w)$ polinomio mónico en $\mathcal{O}_0[w]$. Tomando $p(0,w) = \prod_{j=1}^t (w-c_j)^{m_j}$ con $c_j \in \mathbb{C}$ raíces distintas, tenemos que existen unos únicos polinomios mónicos $p_j \in \mathcal{O}_0[w]$ con grados $m_j$ tales que $p = \prod_{j=1}^t p_j$ y $p_j(0,w) = (w-c_j)^{m_j}$.

*Demostración.* Inducción sobre $t$. Tomando $p \in \mathcal{O}_0[w—c_1]$, por Preparación de Weierstrass $p = p_1 e$ con $p_1, e \in \mathcal{O}_0[w—c_1]$ y $p_1$ es polinomio de Weierstrass sobre $w-c_1$ i.e. $p_1(0,w) = (w-c_1)^{m_1}$. Como $e(0,w) = \prod_{j=2}^t (w-c_j)^{m_j}$, por inducción tenemos el resultado. □

**Corolario 2.3.** Toda álgebra analítica $A$ es noetheriana y henseliana[7].

## 3. Lo local y lo global

El **haz de gérmenes de funciones holomorfas** $(D, \overline{\mathcal{O}})$ es el fibrado:

$$\begin{array}{c} \overline{\mathcal{O}} := \coprod_z \mathcal{O}_z \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow \\ D \end{array}$$

dotando $\overline{\mathcal{O}}$ con la topología de abiertos básicos $\mathcal{U}_{[f\in\mathcal{O}(U)]} := \{(f)_z : z \in U\}$, que hace $p$ un homeomorfismo local[8]. Esta es la construcción fundamental que permite a Cartan conectar con los trabajos de Leray.

### 3.1. Haces topológicos

**Definición 3.1** (Espace Étalé).

- Un **haz topológico de estructuras algebraicas** $(X, E)$ es una aplicación continua

$$\begin{array}{c} E \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow \\ X \end{array}$$

localmente homeomorfa, donde:
• Las fibras $E_x = p^{-1}(x)$ tienen *una misma* estructura algebraica.
• La estructura algebraica *cambia continuamente* al transitar por las fibras.

[6] Donde $\mathfrak{m}$ son los únicos ideales maximales de las álgebras locales.
[7] Satisface el lema anterior.
[8] $\mathcal{U}_{[f\in\mathcal{O}(U)]} \xrightarrow{p} U$ es claramente 1-1, continua y abierta.

- Una **sección** es una función continua $s : U \subseteq X \to E$ tal que $p \circ s = 1_U$. $\Gamma(U,E)$ es el conjunto de secciones de $E$ sobre $U$ que hereda la estructura algebraica.[9] Para cada inclusión $U \supseteq V$ de abiertos, $\rho_{UV} : \Gamma(U,E) \to \Gamma(V,E)$ es la restricción.

Observamos que las imágenes de las secciones $\mathrm{im}(s)$ son *base para la topología* de $E$. Tenemos que:

**Proposición 3.1.** Si dos secciones coinciden en un punto $x \in X$, entonces coinciden en una vecindad de $x$.

*Demostración.* Sea $s(x) = t(x)$, como $\mathcal{V} = \mathrm{im}(s) \cap \mathrm{im}(t)$ es abierto en $E$ y p es abierta, tenemos que $p(\mathcal{V})$ es una vecinad abierta de $x$ donde coinciden las secciones. □

**EJEMPLOS.** Haces de gérmenes de funciones. Las estructuras se preservan al germinar.
*En contexto algebraico. $Y$ espacio topológico con estructura algebraica compatible.*
0. $(X, \overline{Y})$ el haz (de estructuras algebraicas) de gérmenes de funciones continuas $Y$-valuadas sobre $X$.
En particular. $\mathbb{k}$ cuerpo topológico y $G$ grupo topológico.
1. $(X, \overline{O})$ el haz (de $\mathbb{k}$-álgebras) de gérmenes de funciones continuas $\mathbb{k}$-valuadas sobre X.
2. $(X, \overline{G})$ el haz (de grupos) de gérmenes de mapas continuos $G$-valuados sobre $X$.
*En contexo diferencial. $M$ variedad diferencial y $N$ grupo de Lie.*
3. $(M, \overline{D})$ el haz (de $\mathbb{R}|\mathbb{C}$-álgebras) de gérmenes de funciones diferenciales $\mathbb{R}|\mathbb{C}$-valuadas sobre M.
4. $(M, \overline{N})$ el haz (de grupos) de gérmenes de mapas diferenciales $N$-valuados sobre $M$.

La continuación analítica (pegamiento local) para estos haces de gérmenes nos muestra que las secciones son las mismas funciones:

**Teorema 3.1.** En $(X, \overline{Y})$ el haz (de estructuras algebraicas) de gérmenes de funciones continuas $Y$-valuadas sobre $X$, tenemos un *isomorfismo algebraico* entre funciones y secciones

$$Y(U) \simeq \Gamma(U, \overline{Y}).$$

*Demostración.* Sea $s \in \Gamma(U, \overline{Y})$. Para todo $x \in U$, existe una vecindad $U_x$ y $f_x \in Y(U_x)$ con $(f_x)_y = s(y)$ para todo $y \in U_x$ (abiertos básicos). Luego $f_{x_0} = f_{x_1}$ en $U_{x_0} \cap U_{x_1}$ para cualesquiera $x_0, x_1 \in U$. Existe, por la continuación análitica, una única $f \in Y(U)$ tal que $(f)_x = s(x)$ para todo $x \in U$, y por lo tanto, un isomorfismo algebraico dado por la germinación. □

En general, podemos expresar la **continuación analítica** expresada para los haces $(X,E)$ de la siguiente manera:

> Dado $U = \cup_i U_i$, sean $s_i \in \Gamma(U_i, E)$ con $\rho_{U_{i_0} U_{i_0} \cap U_{i_1}}(s_{i_0}) = \rho_{U_{i_1} U_{i_0} \cap U_{i_1}}(s_{i_1})$. Entonces *existe una única $s \in \Gamma(U,E)$ tal que $\rho_{UU_i}(s) = s_i$.*

Esta es un propiedad que sintetiza el tránsito entre lo local y lo global, marcando "un corte conceptual profundo" para el desarrollo las matemáticas [Zalamea 2009].

**Corolario 3.1.** En $(D, \overline{\mathcal{O}})$ el haz de gérmenes de funciones holomorfas, $\overline{\mathcal{O}}$ es Hausdorff.

*Demostración.* Por la unicidad de la continuación analítica para funciones holomorfas sobre un dominio (teorema 1.3). □

Sea $(X, \overline{O})$ como en el ejemplo 1. Germinando $K(U)$ el anillo total de fracciones de $O(U)$, obtenemos un haz asociado $(X, \overline{K})$. Observamos que $K_x$ es el anillo total de fracciones de $O_x$. Análogamente, obtenemos $(X, \overline{O^*})$ y $(X, \overline{K^*})$ (elementos invertibles).

Sea $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de $X$, con lo anterior formulamos:

> **Primer problema de Cousin:** Sean $m_i \in \Gamma(U_i, \overline{K})$ con $m_{i_1} - m_{i_0} \in \Gamma(U_{i_0} \cap U_{i_1}, \overline{O})$. ¿Existe $m \in \Gamma(X, \overline{K})$ con $m - m_i \in \Gamma(U_i, \overline{O})$?
> **Segundo problema de Cousin:** Sean $m_i \in \Gamma(U_i, \overline{K^*})$ con $m_{i_1} \div m_{i_0} \in \Gamma(U_{i_0} \cap U_{i_1}, \overline{O^*})$. ¿Existe $m \in \Gamma(X, \overline{K^*})$ con $m \div m_i \in \Gamma(U_i, \overline{O^*})$?

Observemos en lo que sigue diversas reformulaciones de estos probleas de Cousin.

[9] Esto es exactamente lo que busca capturar la segunda condición en la definición de haz.

**Definición 3.2.** Un **morfismo entre haces topológicos del mismo tipo de estructuras algebraicas** sobre $X$, es una aplicación

$$E \xrightarrow{\varphi} F$$

continua, donde:

- Se preservan las fibras: $\varphi(E_x) \subseteq F_x$.
- $\varphi_x : E_x \to F_x$ es un morfismo de estructuras algebraicas.

Observamos que todo morfismo es abierto, y por lo tanto, tenemos el siguiente comportamiento entre secciones.

**Proposición 3.2.** $\Gamma_\varphi = \varphi \circ \_ : \Gamma(U,E) \to \Gamma(U,F)$ es un morfismo (de estructuras algebraicas) entre secciones sobre $U$, que junto con la restricción de secciones forman el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \Gamma(U,E) \arrow[r, "\Gamma_\varphi"] \arrow[d, "\rho_{UV}"] & \Gamma(U,F) \arrow[d, "\rho_{UV}"] \\ \Gamma(V,E) \arrow[r, "\Gamma_\varphi"] & \Gamma(V,F) \end{tikzcd}$$

**Teorema 3.2.** Todo haz topológico $(X,E)$ es *isomorfo* al haz de gérmenes de sus secciones $(X,\overline{\Gamma(E)})$.

*Demostración.* El isomorfismo es la biyección que envía $y \in E_x$ a $(s)_x \in \Gamma(E)_x$ para alguna sección $s(x) = y$, bien definida por la proposición 3.1. $\square$

Tenemos las siguientes sucesiones exactas de haces topológicos abelianos[10] sobre $X$ (respecto a la suma y el producto):

$$0 \longrightarrow \overline{O} \longrightarrow \overline{K} \longrightarrow \overline{K}/\overline{O} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \overline{O^*} \longrightarrow \overline{K^*} \longrightarrow \overline{K^*}/\overline{O^*} \longrightarrow 0$$

Así, en virtud de la proposición 3.1, podemos reformular:

> **Primer problema de Cousin.** ¿Cuándo $\Gamma(X,\overline{K}) \to \Gamma(X,\overline{K}/\overline{O})$ es sobre?
> **Segundo problema de Cousin.** ¿Cuándo $\Gamma(X,\overline{K^*}) \to \Gamma(X,\overline{K^*}/\overline{O^*})$ es sobre?

## 3.2. Cohomología de Čech

La teoría de Čech emerge del interés por estudiar el entramado combinatorio de pegar localmente.

Sea $E$ un **haz topológico abeliano** sobre $X$. Tome $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de $X$. Si $\sigma = (i_0, \dots, i_n)$ es un $n$-símplice[11], $U_\sigma$ denotará la intersección $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}$. Una $n$-cocadena alternada del cubrimiento $\mathfrak{U}$ con coeficientes en el haz $E$ es una sección $s_\sigma \in \Gamma(U_\sigma, E)$ que alterna con los índices $i_0, \dots, i_n$[12] y $s_\sigma = 0$ cuando dos índices son iguales. $C^n(\mathfrak{U}, E)$ denota el conjunto de las $n$-cocadenas alternadas.

Si ordenamos el conjunto $I$, observamos que $C^n(\mathfrak{U},E) = \prod_{i_0<\dots<i_n} \Gamma(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}, E)$ y por lo tanto es un grupo abeliano. Tomando $\sigma = i_0 < \dots < i_n$ y $\sigma_k = i_0 < \dots < i_{k-1} < i_{k+1} < \dots < i_n$ (sin el índice $i_k$), definimos un morfismo $\delta(s)_\sigma = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \rho_{U_{\sigma_k} U_\sigma}(s_{\sigma_k})$ para $s \in C^{n-1}(\mathfrak{U}, E)$. Tenemos que

$$\cdots \xrightarrow{\delta} C^{n-1}(\mathfrak{U},E) \xrightarrow{\delta} C^n(\mathfrak{U},E) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

es un complejo de cocadenas ($\delta^2 = 0$) y $H^n(\mathfrak{U},E)$ denota el $n$-ésimo grupo de cohomología asociado.[13]

[10] Fibras con estructura de grupo abeliano.
[11] Sucesión de $n+1$ elementos del conjunto $I$.
[12] Cocadenas relacionadas por el signo de la permutación, i.e. $s_\sigma = \mathrm{sgn}(\tau)\, s_{\tau(\sigma)}$.
[13] Ver [Weibel 1994] para las construcciones cohomológicas.

Sea $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ un refinamiento de $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$, $\mathfrak{U} < \mathfrak{V}$. Elegimos una función $f : J \to I$ con $V_j \subset U_{f(j)}$, que induce un morfismo

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\delta} & C^{n-1}(\mathfrak{U},E) & \xrightarrow{\delta} & C^{n}(\mathfrak{U},E) & \xrightarrow{\delta} & \cdots \\ & & \downarrow f & & \downarrow f & & \\ \cdots & \xrightarrow{\delta} & C^{n-1}(\mathfrak{V},E) & \xrightarrow{\delta} & C^{n}(\mathfrak{V},E) & \xrightarrow{\delta} & \cdots \end{array}$$

de complejos de cadenas ($\delta \circ f = f \circ \delta$), dado por $f(s)_\lambda = \rho_{U_{f\lambda} V_\lambda}(s_{f\lambda})$, y un morfismo[14]

$$H^*_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}} : H^*(\mathfrak{U},E) \to H^*(\mathfrak{V},E)$$

entre los grupos de cohomología.

**Definición 3.3.** La **Cohomología de Čech** con valores en $E$ sobre $X$, es el *límite directo* (grupo abeliano)

$$\check{H}^*(X,E) := \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^*(\mathfrak{U},E)$$

sobre todos los cubrimientos abiertos.

Calcular este límite podría ser un trabajo bastante dispendioso. A continuación, estudiamos los primeros grupos:

**Proposición 3.3.** $\check{H}^0(X,E) = \Gamma(X,E)$.

*Demostración.* Definimos $C^{-1}(\mathfrak{U},E) = 0$, luego $H^0(\mathfrak{U},E) = \{s : s_i \in \Gamma(U_i,E) \text{ y } \delta(s) = 0\}$. $\delta(s) = 0$ significa que $\rho_{U_{i_1} U_{i_0}\cap U_{i_1}}(s_{i_1}) - \rho_{U_{i_0} U_{i_0}\cap U_{i_1}}(s_{i_0}) = 0$ y por el teorema 3.1 tenemos que $H^0(\mathfrak{U},E) = \Gamma(X,E)$ para todo $\mathfrak{U}$. □

**Proposición 3.4.** $\check{H}^1(X,E) = \cup_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U},E)$.

*Demostración.* Veamos que para todo $\mathfrak{V} > \mathfrak{U}$, $H^1_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}} : H^1(\mathfrak{U},E) \to H^1(\mathfrak{V},E)$ es 1-1. Sea $h = [s] \in \ker H^1_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}$, tomamos $\mathfrak{W} = \{U_i \cap V_j\}$ refinamiento de $\mathfrak{V}$ y $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{W} > \mathfrak{V} > \mathfrak{U}$. Tememos que $0 = H^1_{\mathfrak{V}\mathfrak{W}} \circ H^1_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}(h) = H^1_{\mathfrak{U}\mathfrak{W}}(h) = [f(s)]$[15] en $H^1(\mathfrak{W},E)$ y por lo tanto existen $r_{ij} \in \Gamma(U_i \cap V_j, E)$ con $\delta(r) = f(s)$. Observamos que $t_i = \cup_j r_{ij} \in \Gamma(U_i,E)$[16] y $\delta(t) = s$[17], i.e. $[s] = h = 0$. □

**Proposición 3.5.** Si $\check{H}^1(U_i,E) = 0$ para todo $U_i \in \mathfrak{U}$, entonces $\check{H}^1(X,E) = H^1(\mathfrak{U},E)$.

*Demostración.* Veamos que para todo $\mathfrak{V} > \mathfrak{U}$, $H^1_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}} : H^1(\mathfrak{U},E) \to H^1(\mathfrak{V},E)$ es sobre. Nuevamente lo mostramos para el refinamiento $\mathfrak{W}$. Sea $h = [s] \in H^1(\mathfrak{W},E)$, $\mathfrak{W}_i = \{U_i \cap V_j\}_{j\in J}$ es un cubrimiento de $U_i$, como $0 = \check{H}^1(U_i,E) \supseteq H^1(\mathfrak{W}_i,E)$ (proposición anterior), existen $r_{ij} \in \Gamma(U_i \cap V_j, E)$ con $\delta(r)_{iij_0j_1} = s_{iij_0j_1}$. Tomamos $s' = s - \delta(r)$, $[s'] = [s] = h$, tenemos que $t_{i_0i_1} = \cup_j s'_{i_0i_1jj} \in \Gamma(U_{i_0} \cap U_{i_1}, E)$[18] y $f(t) = s'$. □

---

[14] Independiente de la función $f$ [Morrow y Kodaira 1971, p.31].

[15] $\mathfrak{W}$ tiene el orden lexicográfico y $f : IJ \to I$ es la proyección.

[16] Utilizamos la proposición 3.1:

$$\rho_{U_i\cap V_{j_1}\, U_i\cap V_{j_0}\cap V_{j_1}}(r_{ij_1}) - \rho_{U_i\cap V_{j_0}\, U_i\cap V_{j_0}\cap V_{j_1}}(r_{ij_0}) = \delta(r)_{iij_0j_1} = f(s)_{iij_0j_1} = 0 \text{ (índice } i \text{ repetido).}$$

[17] Tenemos que:

$$\begin{aligned} \delta(t)_{i_0i_1} &= \rho_{U_{i_1}\, U_{i_0}\cap U_{i_1}}(t_{i_1}) - \rho_{U_{i_0}\, U_{i_0}\cap U_{i_1}}(t_{i_0}) = \cup_j \left[\rho_{U_{i_1}\cap V_j U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap V_j}(r_{i_1j}) - \rho_{U_{i_0}\cap V_j U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap V_j}(r_{i_0j})\right] \\ &= \cup_j \delta(r)_{i_0i_1jj} = \cup_j f(s)_{i_0i_1jj} = s_{i_0i_1}. \end{aligned}$$

Para ver la última igualdad tome $\sigma = i_0i_0i_1$, $\lambda = j_0j_1j_1$, $\bar{\sigma} = i_0i_1i_1$, $\bar{\lambda} = j_0j_0j_1$; tenemos que

$$0 = \delta(f(s))_{\sigma\lambda} = \sum_{K=0}^{2} (-1)^k \rho_{U_{\sigma_k}\cap V_{\lambda_k}\, U_\sigma \cap V_\lambda}(f(s)_{\sigma_k\lambda_k})$$
$$0 = \delta(f(s))_{\bar{\sigma}\bar{\lambda}} = \sum_{K=0}^{2} (-1)^k \rho_{U_{\bar{\sigma}_k}\cap V_{\bar{\lambda}_k}\, U_{\bar{\sigma}} \cap V_{\bar{\lambda}}}(f(s)_{\bar{\sigma}_k\bar{\lambda}_k})$$

como $f(s)_{\sigma_0\lambda_0} = f(s)_{\bar{\sigma}_2\bar{\lambda}_2} = 0$ y $\sigma_1\lambda_1 = \bar{\sigma}_1\bar{\lambda}_1$, restando lo anterior obtenemos nuevamente la ecuación de la proposición 3.1:

$$\rho_{U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap V_{j_1}\, U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap V_{j_0}\cap V_{j_1}}(f(s)_{i_0i_1j_1j_1}) - \rho_{U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap V_{j_0}\, U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap V_{j_0}\cap V_{j_1}}(f(s)_{i_0i_1j_0j_0}) = 0.$$

[18] El mismo argumento de la nota anterior, observando que $s'_{iij_0j_1} = 0$.

Tome $0 \to E \xrightarrow{\phi} F \xrightarrow{\varphi} G \to 0$ una **sucesión exacta de haces abelianos** sobre $X$ (definición 3.2), la sucesión de complejos de cocadenas $0 \to C^*(\mathfrak{U}, E) \to C^*(\mathfrak{U}, F) \to C^*(\mathfrak{U}, G)$ es exacta a izquierda [19]. Como la última flecha no necesariamente es sobre, denotamos por $C_0^*(\mathfrak{U}, G)$ su imagen. De la sucesión exacta de complejos de cocadenas $0 \to C^*(\mathfrak{U}, E) \to C^*(\mathfrak{U}, F) \to C_0^*(\mathfrak{U}, G) \to 0$ obtenemos una sucesión exacta larga de cohomología

$$\cdots \longrightarrow H^n(\mathfrak{U}, F) \longrightarrow H_0^n(\mathfrak{U}, G) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(\mathfrak{U}, E) \longrightarrow H^{n+1}(\mathfrak{U}, F) \longrightarrow \cdots$$

donde el operado $\delta^n$ está definido como siempre [Weibel 1994, p. 10-15]. Y, como el límite directo es exacto [Weibel 1994, p. 56-57], tenemos la sucesión exacta larga en la cohomología de Čech

$$\cdots \longrightarrow \check{H}^n(X, F) \longrightarrow \check{H}_0^n(X, G) \xrightarrow{\delta^n} \check{H}^{n+1}(X, E) \longrightarrow \check{H}^{n+1}(X, F) \longrightarrow \cdots$$

**Proposición 3.6.** $\check{H}_0^0(X, G) = \check{H}^0(X, G) = \Gamma(X, G)$.

*Demostración.* Sea $h \in \Gamma(X, G)$, por continuidad para todo $x \in X$, existe un abierto $U_x$ y $r_x \in \Gamma(U_x, F)$, tal que $\varphi(r_x) \subset h$. Tomando $\mathfrak{U} = \{U_x\}$, vemos que $h \in \cup_x \varphi(r_x) \in H_0^0(\mathfrak{U}, G)$. □

Nuevamente, podemos reformular:

**Primer problema de Cousin.** ¿Cuándo $\check{H}^1(\overline{O}) = 0$?
**Segundo problema de Cousin.** ¿Cuándo $\check{H}^1(\overline{O^*}) = 0$?

**Teorema 3.3.** Si $X$ es paracompacto, entonces $\check{H}^*(X, G) = \check{H}_0^*(X, G)$.

*Demostración.* Se muestra que para todo $\mathfrak{U}$ y $s \in C^*(\mathfrak{U}, G)$, existe $\mathfrak{V} > \mathfrak{U}$ tal que $f(s) \in C_0^*(\mathfrak{V}, G)$ [Serre 1955, FAC, p.217]. □

## 3.3. Cambio de base

**Definición 3.4.** Sea $f : X \to Y$ una función continua.

1. Sea $(X, E)$ un haz sobre $X$, su **imagen directa** sobre $Y$ es el haz $(Y, f_*[E])$ definido por la germinación
$$f_*[E]_y := \varinjlim_{V \ni y} \Gamma(f^{-1}(V), E).$$
2. Sea $(Y, E)$ un haz sobre $Y$, su **imagen inversa** sobre $X$ es el haz $(X, f^*[E])$ definido por el producto fibrado
$$f^*[E] := X \times_Y E.$$

La imagen directa juega un papel importante para lo que sigue de este capítulo. En primera instancia, observamos que tenemos un mapa natural de gérmenes (independiente de los representantes) para todo $x \in X$:

$$\tilde{f}_x : f_*[E]_{f(x)} \to E_x. \tag{4}$$

**EJEMPLO.** Sean $(D_1, \overline{\mathcal{O}}_{D_1})$ y $(D_2, \overline{\mathcal{O}}_{D_2})$ haces de gérmenes de funciones holomorfas sobre los dominios $D_1 \subseteq \mathbb{C}^n$ y $D_2 \subseteq \mathbb{C}^m$. Sea $f : D_1 \to D_2$ una función holomorfa (definición 1.3). Para cada abierto $V \in D_2$, tenemos un morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\_ \circ f : \mathcal{O}_{D_2}(V) \to \mathcal{O}_{D_1}(f^{-1}(V)).$$

Como $\mathcal{O}_{D_1}(f^{-1}(V)) \simeq \Gamma(f^{-1}(V), \overline{\mathcal{O}}_{D_1})$ (teorema 3.1), germinando obtenemos un morfismo entre haces (de $\mathbb{C}$-álgebras) sobre $D_2$:

$$\overline{f} : \overline{\mathcal{O}}_{D_2} \to f_*[\overline{\mathcal{O}}_{D_1}]. \tag{5}$$

Un segundo resultado de la imagen directa es el siguiente:

**Proposición 3.7.** Sea $f : X \to Y$ una función continua finita[20] entre espacios de Hausdorff. Si $0 \to E \to F \to G \to 0$ es una sucesión exacta de haces abelianos sobre $X$, $0 \to f_*[E] \to f_*[F] \to f_*[G] \to 0$ es una sucesión exacta de haces abelianos sobre $Y$ (imagen directa es exacta).

*Demostración.* Sea $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Para todo $V \ni y$, existen $U_i \ni x_i$ con $U_i \cap U_j = \emptyset$ para $i \neq j$, luego $f_*[E]_y = \coprod E_{x_i}$ y el resultado se sigue fácilmente. □

[19] $0 \to \Gamma(U, E) \to \Gamma(U, F) \to \Gamma(U, G)$ es exacta a izquierda para cualquier $U \in \mathfrak{U}$ (proposición 3.1), además conmutan con $\delta$ (proposición 3.2). El que no sean exactas a derecha es, de hecho, la obstrucción estructural que permite la emergencia de la cohomología de los haces (en un ámbito más general), como veremos en el siguiente capítulo.

[20] Es decir, cerrada y para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ finito.

## 4. Espacios complejos

Motivados por (5) introducimos las siguientes estructuras:

**Definición 4.1.**

1. $(X, O_X)$ es un **espacio $\mathbb{C}$-anillado** si es un haz de estructuras de $\mathbb{C}$-álgebras locales.
2. $(f, \overline{f}) : (X, O_X) \to (Y, O_Y)$ es un **morfismo $\mathbb{C}$-anillado** si
   - $\underline{f} : X \to Y$ es una función continua.
   - $\overline{f} : O_Y \to f_*[O_X]$ es un morfismo entre haces de $\mathbb{C}$-álgebras sobre $Y$.[21]

**EJEMPLOS.**

1. $(X, \overline{\mathcal{C}})$ el haz de gérmenes de funciones continuas $\mathbb{C}$-valuadas sobre $X$.
2. $(D, \overline{\mathcal{O}})$ el haz de gérmenes de funciones holomorfas sobre un dominio $D$.

Observamos que $(D, \overline{\mathcal{O}})$ es un subespacio $\mathbb{C}$-anillado de $(D, \overline{\mathcal{C}})$.

Sean $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}(D)$. Para todo $z \in D$, $\mathcal{I}_z$ es el ideal ($\overline{\mathcal{O}}_z$-módulo) generado por los gérmenes $(f_1)_z, \ldots, (f_r)_z$. Luego $0 \to \overline{\mathcal{I}} \to \overline{\mathcal{O}} \to \overline{\mathcal{O}}/\overline{\mathcal{I}} \to 0$ es una sucesión exacta de espacios $\mathbb{C}$-anillados sobre $D$. Tomamos $X := \mathrm{Supp}(\overline{\mathcal{O}}/\overline{\mathcal{I}}) = \mathrm{N}(f_1, \ldots, f_r)$[22] y $\mathcal{O}_X := (\overline{\mathcal{O}}/\overline{\mathcal{I}})|_X$, llamamos $\mathrm{V}(f_1, \ldots, f_r) := (X, \mathcal{O}_X)$ el **espacio modelo complejo** definido en $D$ por $\overline{\mathcal{I}}$.

Empezamos a ver como la teoría local de Weiestrass adquiere sentido geométrico:

**Proposición 4.1.** Para toda álgebra analítica $A$, existe un espacio modelo complejo $(X, \mathcal{O}_X)$ y un punto $x \in X$ tal que $A \simeq \mathcal{O}_{X,x}$.

*Demostración.* Sea $A = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x}/\mathfrak{a}$ (definición 2.1), como $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x}$ es noetheriana (proposición 3.2) existe un dominio $D \ni x$ y funciones $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}(D)$, cuyos gérmenes $(f_1)_x, \ldots, (f_r)_x$ generan $\mathfrak{a}$, y por lo tanto, $(X, \mathcal{O}_X) = \mathrm{V}(f_1, \ldots, f_r)$. □

**Definición 4.2.**

1. Un espacio $\mathbb{C}$-anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es un **espacio complejo** si
   - $X$ es Hausdorff.
   - Para todo $x \in X$, existe una vecindad abierta $U \ni x$ tal que el subespacio abierto $\mathbb{C}$-anillado $(U, \mathcal{O}_U)$ es *isomorfo* a un espacio modelo complejo.
2. $(f, \overline{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ es un **mapa holomorfo** si es un morfismo $\mathbb{C}$-anillado.

Para toda sección $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, tomando $s(x) = c_x + t_x \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{m}(\mathcal{O}_x)$, definimos la función $[s] : U \to \mathbb{C}$ dada por $[s](x) = c_x$. Observando localmente los espacios modelos, vemos que $[s]$ es continua. Obtenemos un morfismo entre haces (de $\mathbb{C}$-álgebras) sobre $X$:

$$\mathcal{O}_X \to \overline{\mathcal{C}}_X. \tag{6}$$

Este morfismo "de evaluación", a diferencia del ejemplo (dominios), no necesariamente es una inclusión, i.e. puede tener kernel $\neq 0$, y por lo tanto, posibles secciones $\neq 0$ *invisibles para el ojo geométrico*. Es claro, que el nilradical $\mathcal{N}_X$ de $\mathcal{O}_X$ está contenido en el kernel; más adelante, mostraremos que es exactamente el kernel. Sin pérdida de generalidad, llamamos a las secciones $\mathcal{O}_X(U) := \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ **funciones holomorfas**.

Las propiedades algebraicas de las álgebras analíticas $\mathcal{O}_{X,x}$ implican nociones geométricas:

**Definición 4.3.**

a. $x$ es *reducido* si $\mathcal{O}_{X,x}$ es reducido (sin elementos nilpotentes).
b. $x$ es *irreducible* si $\mathcal{O}_{X,x}$ es dominio integral (sin divisores de cero).
c. $x$ es *normal* si $\mathcal{O}_{X,x}$ es normal (integralmente cerrado en su anillo de fracciones).
d. $x$ es *factorial* si $\mathcal{O}_{X,x}$ es factorial (factorización única en irreducibles).
e. $x$ es *suave* si $\mathcal{O}_{X,x}$ es isomorfo a $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$.

Señalamos que (e) $\Longrightarrow$ (d) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (a), y por lo tanto, en un **espacio reducido** (nilradical nulo) las funciones holomorfas son continuas.

---

[21] Para todo $x \in X$, la composición con la función natural de gérmenes (4) $\tilde{\bar{f}}_x : O_{Y,f(x)} \xrightarrow{\bar{f}_x} f_*[O_X]_{f(x)} \xrightarrow{\tilde{f}_x} O_{X,x}$ es un morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras locales.

[22] $\{x \in D : \mathcal{I}_x \subsetneq \mathcal{O}_x\} = \{x \in D : f_1(x) = \cdots = f_r(x) = 0\} = \mathrm{N}(f_1, \ldots, f_r)$.

Para todo ideal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_X$, tenemos un espacio $\mathbb{C}$-anillado $\mathrm{V}(\mathcal{I}) = (Z, \mathcal{O}_Z) := (\mathrm{N}(\mathcal{I}), (\mathcal{O}_X/\mathcal{I})|_{\mathrm{N}(\mathcal{I})})$[23] donde $Z$ es *cerrado* en $X$. Tomando $i : Z \to X$ la *inclusión* y $\bar{i} : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{I} = i_*[\mathcal{O}_Z]$ la *proyección*, tenemos un morfismo $\mathbb{C}$-anillado $(i, \bar{i}) : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$. En general $\mathrm{V}(\mathcal{I})$ no es un espacio complejo y $(i, \bar{i})$ no es un mapa holomorfo; para esto, debemos continuar replicando el espacio modelo:

**Definición 4.4.** Un ideal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_X$ es **finito** si, para todo $x \in X$, existe una vecindad abierta $U \ni x$ y una sucesión exacta de haces

$$\mathcal{O}_X^p|_U \to \mathcal{I}|_U \to 0$$

con $p \in \mathbb{N}$ (i.e. $\mathcal{I}|_U$ está generado por un número finito ($p$) de funciones holomorfas de $\mathcal{O}_X(U)$).

**Proposición 4.2.** Si $\mathcal{I}$ es *finito*, entonces $\mathrm{V}(\mathcal{I})$ es un *subespacio complejo cerrado* y $(i, \bar{i})$ es un *mapa holomorfo*.

*Demostración.* Se verifica localmente para los espacios modelo $(X, \mathcal{O}_X) := \mathrm{V}(f_1, \dots, f_r)$. Sea $z \in Z$, como $\mathcal{I}$ es finito, podemos escoger un dominio $D \ni z$ lo suficientemente pequeño donde existen $g_1, \dots, g_s \in \mathcal{O}(D)$ cuyos gérmenes generan $\mathcal{I}|_D$. Luego $(Z, \mathcal{O}_Z) := \mathrm{V}(f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s)$ es un espacio modelo, y por lo tanto, $(i, \bar{i})$ holomorfo. □

Si $\mathcal{I}_1$ y $\mathcal{I}_2$ son ideales finitos de $\mathcal{O}_X$, entonces $\mathrm{V}(\mathcal{I}_1) \cap \mathrm{V}(\mathcal{I}_2) := \mathrm{V}(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2)$ y $\mathrm{V}(\mathcal{I}_1) \cup \mathrm{V}(\mathcal{I}_2) := \mathrm{V}(\mathcal{I}_1 * \mathcal{I}_2)$ son subespacios complejos cerrados de $X$ ($\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$ y $\mathcal{I}_1 * \mathcal{I}_2$ son finitos). Es natural, entonces, preguntarse por intersecciones-sumas infinitas (topología de Zariski) para desplegar la **geometría analítica de los haces**. En la geometría algebraica afín se consigue gracias a la propiedad de noetherianidad. Puntualmente ya lo hemos mostrado en la proposición 2.2, sin embargo el pasaje hacia lo local-global (haces) no es trivial. Para esto debemos desplegar la noción de haz coherente, presente desde el principio en la génesis de los haces como respuesta a los problemas en varias variables complejas por parte de Cartan y Oka.

## 5. Haces coherentes

Sea $(X, O)$ un espacio anillado (haz de estructuras de anillos). Pasamos de estudiar ideales a módulos, que corresponden a un ámbito más general.

**Definición 5.1.**
1. Un haz $E$ es un ***O*-módulo** si tiene estructura de módulo sobre $(X, O)$ (definición 3.1)
2. $\varphi : E \to F$ es un ***O*-morfismo** si es un morfismo de haces que preserva la estructura (definición 3.2).

**Definición 5.2.**

- Un $O$-módulo $E$ es un **haz coherente** si:

    1. [Finito] Para todo $x \in X$, existe una vecindad abierta $U \ni x$ y una sucesión exacta de $O$-módulos

    $$O^p|_U \to E|_U \to 0$$

    con $p \in \mathbb{N}$.

    2. [Relacional finito] Para todo abierto $U$ y secciones $s_1, \dots, s_n \in E(U) := \Gamma(U, E)$, su *haz de relaciones*

    $$R_U^E(s_1, \dots, s_n) = ker(\varphi : O^n|_U \to O|_U),$$

    con $\varphi(a_{1x}, \dots, a_{nx}) = \sum_{i=1}^n a_{ix}(s_i)_x$ es $O$-módulo finito.

- Un $O$-módulo $E$ es un **haz casi-coherente** si para todo $x \in X$ se tiene una vecindad $U$ y una sucesión exacta (a derecha) de $O$-módulos

$$O^j|_U \to O^i|_U \to E|_U \to 0$$

donde $i$ y $j$ son conjuntos indexados que dependen de $U$.

Es claro que todo haz coherente es un haz casi-coherente ($i$ y $j$ finitos). Los haces coherentes preservan algunas operaciones de los $O$-módulos:

[23] $\mathrm{N}(\mathcal{I}) = \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) := \{x \in X : \mathcal{I}_x \subsetneq \mathcal{O}_{X,x}\}$.

**Teorema 5.1.** Sean $E$ y $F$ haces coherentes.

0. La suma de Whitney $E \oplus F$ es un haz coherente.
1-1'. El cokernel y kernel de un $O$-morfismo $\varphi : E \to F$ es un haz coherente.
2-2'. La coimagen e imagen de un $O$-morfismo $\varphi : E \to F$ es un haz coherente.[24]

Nos apoyamos en los siguientes dos resulatos. El primero es claro. El segundo es más delicado pero no difícil, y es el que finalmente permite el movimiento.

**Lema 5.1.** Todo $O$-*sub*módulo *finito* de un haz coherente es un haz coherente

**Lema 5.2** (Dos de Tres - Serre 1957, FAC, p.208)**.** Sea $0 \to E \to G \to F \to 0$ una sucesión exacta de $O$-módulos. $E$, $F$, $G$ los tres haces coherentes si cualesquiera dos son haces coherentes.

*Demostración del teorema.*

0. $0 \to E \to E \oplus F \to F \to 0$ es exacta.
2-2'. $rang(\varphi) = coim(\varphi) = im(\varphi)$ es un $O$-submódulo finito de $F$.
1-1'. $0 \to ker(\varphi) \to E \to coim(\varphi) \to 0$ y $0 \to im(\varphi) \to F \to coker(\varphi) \to 0$ son exactas. □

En relación con lo anterior (subespacios complejos), tenemos:

**Corolario 5.1.** Sea $E$ un haz coherente. Si $I_1$ y $I_2$ son *sub*módulos coherentes de $E$, entonces $I_1 + I_2$ y $I_1 * I_2$ son *sub*módulos coherentes de $E$.

*Demostración.* $I_1 + I_2$ es un $O$-submódulo finito de $I_1 \oplus I_2$ y $I_1 * I_2$ es el kernel del $O$-morfismo $I_2 \to (I_1 \oplus I_2)/I_1$. □

Nuestra meta es mostrar que, en el contexto de la variable compleja, lo anterior también es cierto para sumas infinitas. Otra consecuencia importante, que nos encamina en este sentido, es la siguiente caracterización:

**Corolario 5.2.** Si $(X, O)$ es un **espacio anillado coherente**, entonces

$$E \text{ es un haz coherente} \iff E \text{ es un haz casi-coherente con } i \text{ y } j \text{ finitos.}$$

*Demostración.* ($\Longleftarrow$): $O^i$, $O^j$ son haces coherentes y $E|_U$ es cokernel de $O^j|_U \to O^i|_U$. □

Todo espacio complejo satisface esta condición (Oka) como veremos en la sección siguiente. Por último, si $(X, O)$ es un espacio anillado **conmutativo**, germinando los morfismos entre secciones $Hom_{O(V)}(E(V), F(V))$ obtenemos un nuevo $O$-módulo que denotamos por $H_O(E, F)$. Para cada $x \in X$, tenemos un $O_x$-morfimso $\rho_x : H_O(E, F)_x \to hom_{O_x}(E_x, F_x)$. En general, $\rho_x$ no es un isomorfismo, sin embargo:

**Proposición 5.1.**

1. Si $E$ es un haz casi-coherente, entonces $\rho_x : H_O(E, F)_x \to hom_{O_x}(E_x, F_x)$ es un isomorfismo.
2. Si $E$ y $F$ son haces coherentes, entonces $H_O(E, F)$ es haz coherente.

*Demostración.*

1. Si $E$ es casi-coherente, tenemos una suseción exacta (a derecha) de $O$-módulos $O^j|_U \to O^i|_U \to E|_U \to 0$. Para cada $V \subseteq U$, $Hom_{O(V)}(\_(V), F(V))$ *invierte* exactitud a *derecha* de $O$-módulos por exactitud *izquierda* de $O(V)$-módulos, i.e $0 \to Hom_{O(V)}(E(V), F(V)) \to Hom_{O(V)}(O^i(V), F(V)) \to Hom_{O(V)}(O^j(V), F(V))$ es una sucesión exacta (a izquierda) de $O(V)$-módulos. Como la germinación preserva exactitud [Weibel 1994, p. 56-57], tenemos el siguiente diagrama entre sucesiones exactas (a izquierda) de $O_x$-módulos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_O(E,F)_x \arrow[r] \arrow[d, "\rho_x"] & H_O(O^i,F)_x \arrow[r] \arrow[d] & H_O(O^j,F)_x \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & hom_{O_x}(E_x,F_x) \arrow[r] & hom_{O_x}(O^i_x,F_x) \arrow[r] & hom_{O_x}(O^j_x,F_x) \end{tikzcd}$$

Finalmente, como $H_O(O^i, F)_x \simeq F^i_x \simeq hom_{O_x}(O^i_x, F_x)$ para todo $i$, necesariamente $\rho_x$ es un isomorfismo.

2. De lo anterior se concluye $0 \to H_O(E, F) \to F^i \to F^j$ es una sucesión exacta de $O$-módulos. Como $F^i$ y $F^j$ son haces coherentes ($i$ y $j$ finitos), por el teorema 5.1 $H_O(E, F) = ker(F^i \to F^j)$ es un haz coherente.

[24] Estamos pensando en las nociones categóricas de coimagen e imagen que en este caso coinciden simplemente con el rango. La razón para presentar el teorema de este modo adquiere su sentido en el siguiente capítulo (categorías abelianas).

□

Como consecuencia, germinando la multiplicación canónica de secciones $O(U) \to Hom_{O(V)}(E(V), E(V))$, obtenemos un $O$-morfismo: $O \to H_O(E, E)$. Denotamos por $An(E) := ker(O \to H_O(E, E))$, el **aniquilador** de $E$. Tenemos que:

**Corolario 5.3.** Si $(X, O)$ es un espacio anillo coherente y $E$ es un haz coherente, entonces
1. $An(E)_x \simeq An(E_x)$
2. $An(E)$ es un ideal coherente de $O$.

### 5.1. Teorema de Oka

**Teorema 5.2 (Oka).** Todo espacio complejo $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio anillado coherente.

La pregunta por la coherencia es local, el siguiente principio nos permite reducirla a dominios en $\mathbb{C}^n$.

**Lema 5.3** (Principio de extensión). Sea $(X, O_X)$ un espacio anillado coherente, $I$ un ideal finito de $O_X$. Tomando $(Z, O_Z) := (\mathrm{N}(I), (O_X/I)|_{\mathrm{N}(I)})$ subespacio cerrado anillado coherente (lema 5.1), tenemos que

$$E \text{ es un haz } O_Z\text{-coherente} \iff i_*[E] \text{ es un haz } i_*[O_Z]\text{-coherente} \iff i_*[E] \text{ es un haz } O_X\text{-coherente.}$$

La unicidad de la continuación analítica en el dominio, caracterizada estructuralmente por la propiedad Hausdorff de su haz de gérmenes (corolario 3.1), está en el fondo de la coherencia en variable compleja:

**Lema 5.4** (Criterio formal de coherencia). Sea $(X, O)$ un dominio integral Hausdorff.

$(X, O)$ es un espacio anillado coherente $\iff$ Para todo abierto $U$ y sección $s \in \Gamma(U, O)$, el espacio anillado $(U, (O|_U / sO|_U))$ es un haz $O$-coherente en $x \in U$ cuando $(s)_x \neq 0$.

*Demostración.* ($\Longleftarrow$): Veamos que $O$ es relacional finito. Sea $R_U^O(s_1, \ldots, s_n) = ker(\varphi : O^n|_U \to O|_U)$ con $\varphi(a_{1x}, \ldots, a_{nx}) = \sum_{i=1}^n a_{ix}(s_i)_x$ (definición 5.2). Si $(s_1)_x = \cdots = (s_n)_x = 0$, en alguna vecindad $V \subseteq U$ de $x$, entonces $ker(\varphi)|_V = O^n|_V$ y por lo tanto finito en $x$. Por el contrario, asumiendo que $(s_1)_x \neq 0$ y definiendo $O_1 = O|_U / s_1 O|_U$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & s_1 O^n|_U \arrow[d] & s_1 O|_U \arrow[d] \\
ker(\varphi) \arrow[r] & O^n|_U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi^n"] & O|_U \arrow[d, "\pi"] \\
ker(\varphi_1) \arrow[r] & O_1^n \arrow[r, "\varphi_1"] & O_1
\end{tikzcd}$$

De las siguientes observaciones se sigue la finitud de $ker(\varphi) = R_O(s_1, \ldots, s_n)$ en $x$:
1. $ker(\pi \circ \varphi)$ es *finito* en $x$.
2. Existe un $O|_V$-morfismo $ker(\pi \circ \varphi)|_V \to ker(\varphi)|_V$ *sobreyectivo* en alguna vecindad $V \subseteq U$ de $x$.

Pruebas:

1. Como $ker(\varphi_1)$ es finito en $x$ ($O_1$ es $O$-coherente en $x$ por hipótesis), existe un $O|_V$-submódulo $I$ de $O^n|_V$ *finito* en $x$ tal que $\pi^n(I) = ker(\varphi_1)|_V$ para alguna vecindad $V \subseteq U$ de $x$. Así, $ker(\pi \circ \varphi)|_V = ker(\varphi_1 \circ \pi^n)|_V = (\pi^n)^{-1}(ker(\varphi)|_V) = I + ker(\pi^n)|_V = I + s_1 O^n|_V$, y por lo tanto, $ker(\pi \circ \varphi)$ es finito en $x$.

2. Como $O$ es Hausdorff existe una vecindad $V \subseteq U$ de $x$, con $(s_1)_y \neq 0$ para todo $y \in V$. Cada $O_y$ es un dominio integral, por lo tanto para cada $a \in ker(\pi \circ \varphi)_y$ existe un único $b \in O_y$ con $\varphi(a) = (s_1)_y b$. Tomamos el $O|_V$-morfismo $\phi : ker(\pi \circ \varphi)|_V \to O^n|_V$ dado por $\phi(a) = a - (b, 0 \ldots, 0)$. Como $\varphi|_V \circ \phi = 0$, $ker(\varphi)|_V \subseteq ker(\pi \circ \varphi)|_V$ y $\phi|_{ker(\varphi)|_V} = id$, obtenemos que $\phi$ es sobreyectivo en $ker(\varphi)|_V$.

□

*Demostración por inducción del teorema para* $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$. Para todo abierto $U \subseteq \mathbb{C}^n$ y sección $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$, tomamos $x \in U$ con $(s)_x \neq 0$ y $s(x) = 0$[25]. Primero, escogemos coordenadas $(z, w)$ en $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ de tal modo que $x = 0$ y $(s)_x(0, w) \neq 0$. Por el teorema de preparación (2.2), existe un polinomio de Weierstrass $\omega_x$ en $w$ tal que $(s)_x \mathcal{O}_x = \omega_x \mathcal{O}_x$.

[25] Si $s(x) \neq 0$, entonces $(s)_x \mathcal{O}_x = \mathcal{O}_x$ y no hay nada que probar.

Segundo, escogemos un dominio $B \subseteq \mathbb{C}^{n-1}$ de 0 donde $\omega_x$ se represente por $\omega \in \mathcal{O}(B)[w]$. Tomamos $(\mathcal{W}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}})$ el **espacio modelo de Weierstrass** en $B \times \mathbb{C}$ generado por $\omega$ y $(\pi, \overline{\pi}) : (\mathcal{W}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}}) \to (B, \mathcal{O}_B)$ la **proyección holomorfa de Weierstrass**. La proyección de Weierstrass tiene la propiedad de ser un mapa finito y abierto, además, si $m$ =grad$(w)$ tenemos un isomorfismo entre $\pi_*(\mathcal{O}_{\mathcal{W}})$ y $\mathcal{O}_B^m$ - el **isomorfismo de Weierstrass** [ver Grauert y Remmert 1984, p.51-54]. Por hipótesis de inducción $(B, \mathcal{O}_B)$ es un espacio anillado coherente, el siguiente resultado nos permite subir la dimensión.

**Lema 5.5.** (Lema de coherencia) Sea $(\pi, \overline{\pi}) : (\mathcal{W}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}}) \to (B, \mathcal{O}_B)$ la proyección finita de Weierstrass. Si $(B, \mathcal{O}_B)$ es un espacio anillado coherente, entonces $(W, \mathcal{O}_W)$ es un espacio anillado coherente.

*Demostración.* Como en el criterio formal (lema 5.4) tenemos que mostrar que $\mathcal{O}_{\mathcal{W}}$ es relacional finito.

- Para $U = \mathcal{W}$, sea $R_{\mathcal{W}}^{\mathcal{O}_{\mathcal{W}}}(s_1, \ldots, s_n) = ker(\varphi : \mathcal{O}_{\mathcal{W}}^n \to \mathcal{O}_{\mathcal{W}})$. Por la exactitud de la imagen directa (proposición 3.7) y el isomorfismo de Weierstrass tenemos que $\pi_*[ker(\varphi)] = ker(\pi_*[\varphi] : \mathcal{O}_B^{mn} \to \mathcal{O}_B^m)$. Como $\mathcal{O}_B$ es coherente, por el teorema 5.1 tenemos en particular que $\pi_*[ker(\varphi)]$ es finito, así para todo $x \in ker(\varphi)$ existe $V \ni \pi(x)$ y una suceción exacta $\mathcal{O}_B^p|_V \xrightarrow{\chi} \pi_*[ker(\varphi)]|_V \to 0$. Con el siguiente diagrama (ver nota al pie 21)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_B^p|_V \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\tilde{\tilde{\pi}}"] & \pi_*[ker(\varphi)]|_V \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\ \mathcal{O}_{\mathcal{W}}^p|_{\pi^{-1}(V)} \arrow[r, dashed, "\psi"] & ker(\varphi)|_{\pi^{-1}(V)} \end{tikzcd}$$

  definimos $\psi := \tilde{\tilde{\pi}}^{-1} \circ \chi \circ \tilde{\pi}$ que verifica lo buscado.

- Para $U \subset \mathcal{W}$, se necesita elegir adecuados abiertos para trasladar, gracias a la finitud, la construcción anterior [ver Grauert y Remmert 1984, p.51-55].

□

Finalmente, para teminar la demostración del teorema, por el principio de extensión $i^*[\mathcal{O}_{\mathcal{W}}]$ es un haz $\mathcal{O}_{B\times\mathbb{C}}$-coherente. Observando que $i^*[\mathcal{O}_{\mathcal{W}}] = \mathcal{O}_{B\times\mathbb{C}}/\omega\mathcal{O}_{B\times\mathbb{C}}$ y que este coincide con $(U, (O|_U/sO|_U))$ alrededor de $x$, concluimos (criterio formal) la coherencia de $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$. □

Como primera consecuencia, tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 5.4.** Sea $(f, \overline{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un mapa holomorfo. Si $f_*[\mathcal{O}_X]$ es un haz $\mathcal{O}_Y$-coherente, entonces $(f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ es un subespacio complejo cerrado de $(Y, \mathcal{O}_Y)$.

*Demostración.* $f(X) = \mathrm{N}(An(f_*[\mathcal{O}_X])$ (corolario 5.3). □

## 5.2. Teorema del mapa finito

Lo anterior muestra que la proyección de Weierstrass es la piedra angular que permite trasladar coherencia. Es natural, por lo tanto, esperar tener una forma general de lo anterior que se proyecte sobre toda la variable compleja:

**Teorema 5.3 (Mapa finito).** Sea $(f, \overline{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un mapa *holomorfo finito*. Si $E$ es un haz $\mathcal{O}_X$-coherente, entonces la *imagen directa* $f_*[E]$ es un haz $\mathcal{O}_Y$-coherente.

Un primer paso es extender el lema de coherencia.

**Lema 5.6** (Lema de proyección). Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un subespacio cerrado complejo en un dominio $(D, \mathcal{O}_D)$. Si $X$ intersecta el $k$-plano $\{0\} \times \mathbb{C}^k$ solo en el origen $0 \in \mathbb{C}^n$, entonces existe una vecindad poducto abierta conexa $B \times A \subseteq \mathbb{C}^{n-k} \times \mathbb{C}^k$ del origen $0 \in \mathbb{C}^n$, donde $X' := X \cap (B \times A)$ cumple que:

1. La proyección $(\tau, \overline{\tau}) : (X', \mathcal{O}_{X'}) \to (B, \mathcal{O}_B)$ es un mapa holomorfo finito.
2. Si $E$ es un haz $\mathcal{O}_{X'}$-coherente, entonces la imagen directa $\tau_*[E]$ es un haz $\mathcal{O}_B$-coherente.

*Demostración.*

k=1: 1. Sea $V(\mathcal{I}) = (X, \mathcal{O}_X)$, $\mathcal{I}$ ideal finito en $\mathcal{O}_D$. Como $X$ solo intersecta $\{0\} \times \mathbb{C}$ en el origen $0 \in \mathbb{C}^n$, existe $(s)_0 \in \mathcal{I}_0$ con $(s)_0(0, w) \neq 0$, y por lo tanto una proyección holomorfa de Weierstrass $(\pi, \overline{\pi}) : (\mathcal{W}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}}) \to (B, \mathcal{O}_B)$. Nos restrigimos a una vecindad producto $B_1 \times A_1 \subseteq D$ de tal modo que $\omega$, el representante del polinomio de Weierstrass, pertenezca al ideal $\mathcal{I}$ en esta vecindad. Finalmente, como $X' = X \cap (B_1 \times A_1)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W} \cap (B_1 \times A_1)$ y la proyeccion holomorfa de Weierstrass es finita, la restricción $(\tau_1, \overline{\tau}_1) : (X', \mathcal{O}_{X'}) \to (B_1, \mathcal{O}_{B_1})$ también es un mapa holomorfo finito.

2. Sea $E$ es un haz $\mathcal{O}_{X'}$-coherente. Tomando la composición $\tau_1 : X' \xrightarrow{i} \mathcal{W}_1 \xrightarrow{\pi} B_1$, por principio de extensión $i_*[E]$ es un haz $\mathcal{O}_{\mathcal{W}_1}$-coherente. Sea $\pi^{-1}(y) = \{x_1, \ldots . x_t\}$, para todo $x_i \in \mathcal{W}_1$, existe una vecindad $U_i$ y una sucesión exacta $\mathcal{O}^p_{\mathcal{W}_1}|_{U_i} \to \mathcal{O}^q_{\mathcal{W}_1}|_{U_i} \to i_*[E]|_{U_i} \to 0$ (corolario 5.2). Retringimos las vecindades de tal modo que sean disyuntas, tomando $U := \cup_i U_i$ tenemos que $\mathcal{O}^p_{\mathcal{W}_1}|_U \to \mathcal{O}^q_{\mathcal{W}_1}|_U \to i_*[E]|_U \to 0$ es una sucesión exacta. $V := \pi(U)$ es una vecindad de $y$ ($\pi$ abierta), por la exactitud de la imagen direccta (proposición 3.7) $\pi_*[\mathcal{O}^p_{W_1}]|_V \to \pi_*[\mathcal{O}^q_{W_1}]|_V \to \tau_*[E]|_V \to 0$ es una sucesión exacta. Finalmente, por el isomorfismo de Weiestrass (lema de coherencia) $\pi_*[\mathcal{O}^l_{\mathcal{W}_1}] \simeq \mathcal{O}^{ml}_{B_1}$, tenemos que $\mathcal{O}^{mp}_{B_1}|_V \to \mathcal{O}^{mq}_{B_1}|_V \to (\tau_1)_*[E]|_V \to 0$ es una sucesión exacta, i.e. $(\tau_1)_*[E]$ es un haz $\mathcal{O}_{B_1}$-coherente.

k>1: $X_2 := \tau_1(X')$ es un subespacio complejo cerrado en el dominio $(B_1, \mathcal{O}_{B_1})$ (corolario 5.4). Observamos que $X_2$ solo intersecta $\{0\} \times \mathbb{C}$ en el origen $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$, lo que permite aplicar lo anterior nuevamente. De esta forma, obtenemos una sucesión de mapas holomorfos finitos, que al restringirlos a una adecuada vecindad poducto abierta conexa $B \times A \subseteq \mathbb{C}^{n-k} \times \mathbb{C}^k$ del origen y componerlos, nos permite concluir el resultado.

□

**Lema 5.7.** Sea $(f, \overline{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un mapa holomorfo. Si $x \in X$ es un punto aislado en $f^{-1}(f(x))$, entonces existen vecindades $U \ni x$ y $V \ni f(x)$ con $f(U) \subseteq V$, tal que:

1. $(f, \overline{f})|_{U,V} : (U, \mathcal{O}_U) \to (V, \mathcal{O}_V)$ es un mapa holomorfo finito.
2. Si $E$ es un haz $\mathcal{O}_U$-coherente, entonces la imagen directa $(f_{U,V})_*[E]$ es un haz $\mathcal{O}_V$-coherente.

*Demostración.* Escogemos vecindades $U \ni x$ y $V \ni f(x)$ con $f(U) \subseteq V$ y $\{x\} = U \cap f^{-1}(f(x))$. Además, asumimos que $U$ y $V$ son espacios modelo en dominios $A \subseteq \mathbb{C}^k$ y $B \subseteq \mathbb{C}^m$ con $x = 0 \in \mathbb{C}^k$ y $f(y) = 0 \in \mathbb{C}^m$. Consideramos el espacio $U_f \subset U \times V$, gráfico de la función, *biholomorfo* a $U$ [Grauert y Remmert 1984, p.29]. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} U_f & \xrightarrow{i} & U \times V & \xrightarrow{i} & A \times B \\ {\scriptstyle g_f}\uparrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ U & \xrightarrow{f_{U,V}} & V & \xrightarrow{i} & B \end{array}$$

Como $0 = f^{-1}_{U,V}(0)$, $U_f$ intersecta el $k$-plano $\mathbb{C}^k \times \{0\}$ solo en el origen $0 \in \mathbb{C}^{k+m}$. Por el lema anterior, redefiniendo $A$ y $B$, tenemos que $(\tau, \overline{\tau}) : (U_f, \mathcal{O}_{U_f}) \to (B, \mathcal{O}_B)$, visto como composición en el diagrama, es un mapa holomorfo finito. Como $g_f$ es un biholomorfismo y $\tau(U_f) \subseteq V$, tenemos que:

1. $(f, \overline{f})|_{U,V} : (U, \mathcal{O}_U) \to (V, \mathcal{O}_V)$ es un mapa holomorfo finito.
2. Si $E$ es un haz $\mathcal{O}_U$-coherente, $\tau_* \circ (g_f)_*[E] = i_* \circ (f_{U,V})_*[E]$ es un haz $\mathcal{O}_B$-coherente. Finalmente, por el principio de extensión $(f_{U,V})_*[E]$ es un haz $\mathcal{O}_V$-coherente. □

*Demostración del teorema.* Sea $E$ un haz $\mathcal{O}_X$-coherente, tome $y \in Y$ con $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_t\}$. Por lo lema anterior existen vecindades $W_i \ni x_i$ y $V_i \ni y$ donde $(f, \overline{f})|_{U,V} : (U, \mathcal{O}_U) \to (V, \mathcal{O}_V)$ es un mapa holomorfo finito. Tomando $V \subseteq \cap_i V_i$ y $U_j = f^{-1}(V) \cap W_i$ (vecindades disyuntas), tenemos que

$$f_*[E]|_V \simeq \prod_i (f_{U_i,V})_*[E|_{U_i}] \simeq \prod_i (f_{W_i,V_i})_*[E|_{W_i}]$$

en consecuencia $f_*[E]$ es un haz $\mathcal{O}_Y$-coherente. □

## 5.3. Ruckert Nullstellensatz

**Teorema 5.4** (**Nullstellensatz**). Sea $E$ un haz $\mathcal{O}_X$-coherente y $f \in \mathcal{O}_X(X)$ una función holomorfa que se anula en $\mathrm{Supp}(E)$. Para todo $x \in \mathrm{Supp}(E)$, existe una vecindad $V \ni x$ y $t \in \mathbb{N}$, tal que $(f^t E)|_V = 0$.

Como en los teoremas anteriores, la prueba consiste en reducir el problema a un resultado preliminar:

**Lema 5.8.** Sea $E$ un haz $\mathcal{O}_D$-coherente en un dominio $D$ del origen $0 \in \mathbb{C}^n$. Si $\mathrm{Supp}(E) \subseteq \{(z,w) \in D : w = 0\}$, entonces existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $w^t E_0 = 0$.

*Demostración.* Por inducción. Por el corolario 5.3 y la proposición 4.4, tenemos que $\mathrm{V}(An(E))$ es un subespacio complejo cerrado de $(D, \mathcal{O}_D)$. Por hipótesis, también $\mathrm{N}(An(E)) \subseteq \{(z,w) \in D : w = 0\}$. Sea $g = \sum_{k \geq m} a_k w^k \in An(E)_0$ con $a_k \in \mathcal{O}'_0$ y $a_m \neq 0$ (recordar la notación de la sección 2), tomamos $h_0 = g w^{-m} \in An(w^m E)_0$. Si $h_0$ es unidad, de $h_0 w^m E_0 = 0$ concluimos que $w^m E_0 = 0$. Si $h_0$ no es unidad, entonces $a_m(0) = 0$, escogiendo adecuadas coordenadas asumimos que $a_m$ no es nula en $z_1$. Por coherencia, existe una vecindad $V \ni 0$ y un representante $h \in \mathcal{O}_D(V)$ de $h_0$ con $(h w^m E)|_V = 0$, donde $X := V \cap \mathrm{N}(An(w^m E)$ intersecta la abscisa $z_1$ solo en el origen $0 \in \mathbb{C}^n$. Por el lema de proyección, existen vecindades $A \subseteq \mathbb{C}$ y $B \subseteq \mathbb{C}^{n-1}$ con el mapa holomorfo finito $(\tau, \overline{\tau}) : (X \cap (A \times B), \mathcal{O}_{X \cap (A \times B)}) \to (B, \mathcal{O}_B)$ y $F := \tau_*[(w^m E)|_{X \cap (A \times B)}]$ un haz $O_B$-coherente. Observamos que $\mathrm{Supp}(F) \subseteq \{(z_2, \ldots, w) \in B : w = 0\}$, por hipótesis de inducción existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $w^r F_0 = 0$, y por lo tanto que $w^t E_0 = 0$ con t=r+m. ☐

*Demostración del teorema.* Escogemos $U \ni x$ espacio modelo en un dominio $B \subseteq \mathbb{C}^n$. El gráfico de la función $U_f$ es un subespacio cerrado de $B \times \mathbb{C}$

$$\begin{array}{ccc} U_f & \xrightarrow{i} & B \times \mathbb{C} \\ {\scriptstyle g_f}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ U & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \end{array}$$

Por principio de extensión $F := (i \circ g_f)_*[E|_U]$ es un haz $\mathcal{O}_{B \times \mathbb{C}}$-coherente. Observamos que $\mathrm{Supp}(F) \subseteq \{(z,w) \in B \times \mathbb{C} : w = 0\}$. Por el lema anterior existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $w^t F_0 = 0$, esto implica que $f^t E_x = 0$. Por coherencia, existe un vecindad $V \ni x$ tal que $(f^t E)|_V = 0$. ☐

Sea $A$ subconjunto de $X$, para cualquier abierto $U$ de X, tomamos $\mathcal{I}_A(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) : A \cap U \subseteq \mathrm{N}(f)\}$ ideal de la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathcal{O}_X(U)$. Germinando, obtenemos un haz ideal $\mathcal{I}_A$ de $\mathcal{O}_X$ que nos permite formular una **versión geométrica** más clásica del Nullstellensatz:

**Corolario 5.5.** Si $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ es un ideal coherente, entonces $\mathcal{I}_{\mathrm{N}(\mathcal{I})} = Rad(\mathcal{I})$.

*Demostración.* ($\subseteq$): Sea $f \in \mathcal{I}_{\mathrm{N}(\mathcal{I})}(U)$. Tenemos que $f$ se anula en $\mathrm{Supp}(E)$, donde $E := \mathcal{O}_U/\mathcal{I}$ es un haz $\mathcal{O}_U$-coherente. Por lo tanto, existe una vecindad $V \ni x$ y $t \in \mathbb{N}$, tal que $(f^t E)|_V = 0$. Luego $f^t \in \mathcal{I}(V)$, i.e $f \in Rad(\mathcal{I})(V)$. ☐

Esta presentación permite, igualmente, poner en relieve el estudio analítico en la teoría general de funciones, mencionado en la sección anterior:

**Corolario 5.6.**
1. El nilradical $\mathcal{N}_X$ es el kernel del morfismo "de evaluación" (6) $\mathcal{O}_X \to \overline{\mathcal{C}}_X$.
2. $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio complejo reducido *si y solo si* $\mathcal{O}_X \to \overline{\mathcal{C}}_X$ es inyectivo.

*Demostración.* Por definición $ker(\mathcal{O}_X \to \overline{\mathcal{C}}_X) = \mathcal{I}_X$ y por Nullstellensatz $\mathcal{I}_X = \mathcal{N}_X$. ☐

## 5.4. Propiedad de Noether

Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio complejo. Para todo $x \in X$, existe una vecindad $U \ni x$ y $f_1, \ldots, f_d \in \mathcal{O}_X(U)$ tal que $\mathrm{N}(f_1, \ldots, f_d) = \{x\}$ [26]. El mínimo entero que cumpla lo anterior es llamado la **dimensión analítica** de $X$ en $x$, que denotamos por $\dim_x X$.[27] La siguiente proposición es importante para lo que viene:

**Proposición 5.2.**

1. Si $(f, \overline{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ es un mapa holomorfo finito, entonces $\dim_x X \leq \dim_{f(x)} Y$.

[26] Por ejemplo, los cocientes de las funciones $z_i - x_i$ en un dominio $D$.
[27] Esta definición coincide con la dimensión algebraica de $\mathcal{O}_{X,x}$ [Grauert y Remmert 1984, cap.5].

2. Son equivalentes:

   a. $\dim_x X \le d$.

   b. Existe una vecindad $U \ni x$ y un mapa holomorfo finito $(f, \overline{f}) : (U, \mathcal{O}_U) \to (\mathbb{C}^d, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^d})$.

*Demostración.*

1. Si $\dim_{f(x)} Y = d$, existe $V \ni f(x)$ y $g_1, \dots, g_d \in \mathcal{O}_Y(V)$ con $\mathrm{N}(g_1, \dots, g_d) = \{f(x)\}$. Por la definición 4.1, tenemos un morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras locales $\tilde{\tilde{f}}_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$. Como $f$ es finita, existe una vecindad $U \subseteq f^{-1}(V)$ de $x$ que lo separa de las otras preimágenes. Tomando $f_1, \dots, f_d \in \mathcal{O}_X(U)$ representantes de $\tilde{\tilde{f}}_x[(g_1)_x], \dots, \tilde{\tilde{f}}_x[(g_d)_x] \in \mathcal{O}_{X,x}$, observamos que $\mathrm{N}(f_1, \dots, f_d) = \{x\}$, i.e. $\dim_x X \le \dim_{f(x)} Y$.

2. (b) $\Longrightarrow$ (a): Es claro por lo anterior.

   (a) $\Longrightarrow$ (b): Sea $U \ni x$ y $f_1, \dots, f_d \in \mathcal{O}_X(U)$ con $\mathrm{N}(f_1, \dots, f_d) = \{x\}$. Tomando $f := (f_1, \dots, f_d) : U \to \mathbb{C}^d$, tenemos que $x = f^{-1}(f(x))$. El resultado se sigue del lema 5.7.

□

**Teorema 5.5** (**Propiedad de Noether**). Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio complejo y $E$ un haz $\mathcal{O}_X$-coherente.

Toda *cadena ascendente* $\{E_i\}$ de submódulos $\mathcal{O}_X$-coherentes de $E$ es *localmente estacionaria*[28].

*Demostración.* Por inducción sobre $\dim X := \sup_{x \in X} \dim_x X = d$.

- Reducción a $\mathbb{C}^d$. Por la proposición anterior existe una vecindad $U \ni x$ y un mapa holomorfo finito $(f, \overline{f}) : (U, \mathcal{O}_U) \to (\mathbb{C}^d, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^d})$. Por el teorema del mapa finito $f_*[E|_U]$ es un haz $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^d}$-coherente y $\{f_*[E_i|_U]\}$ es una cadena ascendente de submódulos $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^d}$-coherentes. Por la exactitud de la imagen directa (proposición 3.7), si $f_*[E_i|_U] = f_*[E_j|_U]$ entonces $E_i|_U = E_j|_U$. Así, si $\{f_*[E_i|_U]\}$ es estacionaria sobre un compacto $K$ de $\mathbb{C}^d$, entonces $\{E_i|_U\}$ es estacionaria sobre el compacto $f^{-1}(K)$ ($f$ finita) de $X$.

- Reducción a $\mathcal{O}^p_{\mathbb{C}^d}$. Como $f_*[E|_U]$ es finito en y, existe una vecindad $V \ni y$ y un epimorfismo $\varphi : \mathcal{O}^p_{\mathbb{C}^d}|_V \to f_*[E|_U]|_V$. Es claro que si $\{\varphi^{-1}(f_*[E|_U]|_V)\}$ es localmente estacionaria, entonces $\{f_*[E|_U]|_V\}$ es localmente estacionaria.

- Prueba de $\mathcal{O}^p_{\mathbb{C}^d}$ por inducción sobre $p$.

p=1. Sea $\{\mathcal{I}_i\}$ cadena ascendente de ideales finitos de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^d}$. Si $\mathcal{I}_i \neq 0$ para algún $i$, $V(\mathcal{I}_i)$ es un subespacio cerrado con $\dim V(\mathcal{I}_i) < d$. Como todos los ideales $\mathcal{I}_j \supseteq \mathcal{I}_i$ son de manera natural coherentes en $V(\mathcal{I}_i)$, por hipótesis de inducción tenemos que $\{\mathcal{I}_i\}$ es localmente estacionaria.

p>1. Sea $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^d} \xrightarrow{i} \mathcal{O}^p_{\mathbb{C}^d} \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}^{p-1}_{\mathbb{C}^d} \to 0$ la sucesión exacta canónica[29]. $\{i^{-1}(E_i)\}$ y $\{\pi(E_i)\}$ son cadenas ascendentes y la conclusión se sigue.

□

Finalmente, podemos completar la construcción de la topología de Zariski para la geometría analítica de haces en varias variables complejas:

**Corolario 5.7.** Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio complejo. Si $\{\mathcal{I}_i\}$ es una familia de ideales finitos de $\mathcal{O}_X$, entonces

$$\cap_i \mathrm{V}(\mathcal{I}_i) := \mathrm{V}(\oplus_i \mathcal{I}_i)$$

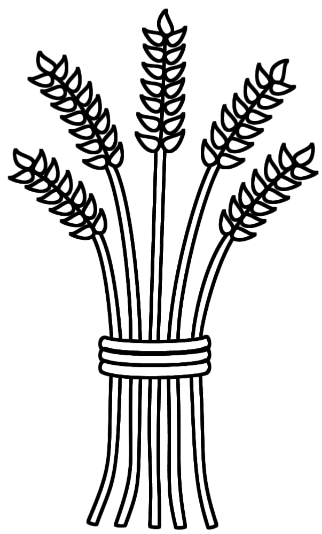
es un subespacio complejo cerrado de $(X, \mathcal{O}_X)$.

[28]Estacionaria en un compacto.

[29]Inclusión en la primera componente, proyección sobre las otras

CAPÍTULO II

# TEORÍA DE HACES



# 1. La aparición de los haces

El concepto de haz juega un papel importante en las matemáticas avanzadas. Primero, porque cosecha aspectos esenciales de las matemáticas modernas (1830-1950); segundo, porque germina como la herramienta esencial para el desarrollo de las matemáticas contemporáneas (1950-hoy). Someramente, podemos decir, que el concepto de haz toma las nociones de cubrimiento y pegamiento, y sintetiza técnicamente *el tránsito entre lo local y lo global en matemáticas*: "Un haz es un tipo de objeto matemático que permite pegar globalmente aquello que resulta ser coherentemente traslapable dentro de lo local" [Zalamea 2009, p.92].

## 1.1. Emergencia

Leray (1906-1998), matemático francés, fue el primero en introducir una definición (formal) de haz en 1943 (siendo prisionero en Oflag), para estudiar propiedades homológicas de funciones continuas, puntos fijos y soluciones de ecuaciones diferenciales. No obstante, la emergencia de los haces se debe entender a través de varios momentos en el desarrollo de las matemáticas modernas, principalmente alrededor de la variable compleja. Quisiéramos, entonces, señalar algunos momentos claves que permiten ver la riqueza transversal de este concepto.

Un primer momento puede remontarse a los trabajos de Riemann y Weierstrass en variable compleja (1850-1870), perspectivas complementarias donde aparece la continuación analítica y su incidencia en el problema local-global. En su Tesis Doctoral, Riemann (1826-1866) introdujo objetos estructurales (superficies de Riemann) con cualidades globales (geométricas y topológicas), donde previamente solo había aspectos cuantitativos locales (ecuaciones diferenciales), *desplegando* una maravilla de armonías ocultas. Sin embargo, la recepción de esta tesis fue discreta, y solo tras unas décadas valorada (transformando las matemáticas y la forma en la que entendemos el mundo). En contraste, las conferencias de Weierstrass (1815-1897) sobre el formalismo analítico de funciones tuvieron una gran influencia desde el comienzo. Weierstrass, dudando de los vuelos intuitivos e imaginativos, se dedicó a desarrollar nociones claras de los elementos funcionales. Así, en el contexto de los números complejos, se comienza con la representación local de funciones por medio de series de potencia (capítulo I), y pronto aparece la noción de continuación analítica relacionada con el buen pegamiento local de estas representaciones locales.

Los problemas alrededor de la continuación analítica, así como las preguntas relacionadas con el paso de una a varias variables, tuvieron gran impacto en la investigación matemática, convirtiéndose en programas importantes de algunos de los mayores matemáticos del siglo XIX, principalmente en el entendimiento de lo meroformo por parte de Mittag-Leffler (1846-1927) y Poincaré (1854-1912), y posteriormente en la caracterización de dominios de holomorfía por parte de Hartogs (1874-1943) y Levi (1983-1917). Del trabajo de Cousin, alumno de Poincaré, se desprenden los dos problemas importantes (capítulo I) que se convierten luego en las principales metas de la comunidad matemática relacionada con la variable compleja.

Este momento es interrumpido por la Primera Guerra Mundial. Terminada ésta, dos centros se convierten en los principales focos de desarrollo: uno en París, alrededor de Henri Cartan (1904-2008), el otro en Münster, alrededor de Behnke (1898-1979). Es en el Seminario de Julia (1930s) que Cartan se alza como la figura tutelar y guía en las investigaciones alrededor de las variables complejas, estableciendo que "the question remained of knowing when a function of $n$ complex variables, meromorphic in a domain $D$, can be put into the form of a quotient of two holomorphic functions in $D$" [Fasanelli 1981, p.41], y describiendo adecuadamente el "Premier problème de Cousin" y el "Deuxième problème de Cousin".

El momento detonador, entonces, para la emergencia de los haces son los esfuerzos, por parte de Cartan y Oka, para resolver los problemas de Cousin. Estos desarrollos posteriormente se decantarán en el Seminario de Cartan (1940s), donde la teoría finalmente florece. Oka (1901-1978), matemático japonés que estudió en París, obtuvo las primeras soluciones a los problemas trabajando por su cuenta y sin comunicación durante la irrupción de la Segunda Guerra Mundial. En el momento que Cartan conoce el trabajo de Oka, hace la conexión entre la noción de haz de Leray y la noción de gérmenes de funciones de Weierstrass, ésta última implícita en el trabajo de Oka, conexión que permite unificar y simplificar las diferentes cuestiones en juego. Por esta razón, Cartan dedicará su seminario en los años posteriores a desarrollar la Teoría de Haces, donde continúan resonando las visiones de Riemann.

Lo mencionado nos permite, entonces, tener una idea de la complejidad que envuelve la emergencia de este concepto; complejidad, sin embargo, que conforma su misma riqueza inherente como campo vivo de pensamiento.

### 1.2. Abstracción

Con lo anterior, es posible, entonces, entender en qué sentido la teoría de haces cosecha aspectos esenciales de las matemáticas modernas; empezando con la visión honda de Riemann, y alcanzando un despliegue técnico alto en la síntesis de Cartan. Lo que entendió muy bien Cartan, precisamente porque lo dice de forma textual, es la profundidad conceptual de los haces para entender el tránsito entre lo local y lo global. Por esta razón, Cartan ve la necesidad de desarrollar y desbordar la teoría de haces a toda la matemática. La abstracción de los haces tendrá tres momentos importantes en la Escuela Francesa: primero, en el Seminario de Cartan, segundo, en los trabajos de Serre y, por último, en el programa de Grothendieck.

Primero, Cartan (1904-2008) mantuvo el seminario desde finales de los 40s hasta comienzos de los años 60s. El seminario principalmente ahonda temas de topología algebraica y varias variables complejas. Topología algebraica es el campo donde Leray introduce por primera vez la definición de haz, y por lo tanto, Cartan y sus estudiantes se dedicarán a desarrollar la definición de Leray alcanzando la terminología conocida hoy en día. Luego, el seminario estudiará sistemáticamente la noción de coherencia, propiedad de finitud en haces (capítulo I), que aparece en los trabajos de Oka.

Segundo, Serre (n.1926), el estudiante estrella del seminario y luego uno de los matemáticos más importantes del siglo XX, sentó la descripción apropiada de los haces coherentes en sus trabajos *Faisceaux Algébriques Cohérents* (FAC) y Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique (GAGA) alrededor de 1955. En estos trabajos Serre hace de los haces la noción central para el estudio de la geometría algebraica (ceros de polinomios), utilizando la topología de Zariski y especificando el tránsito entre las formas algebraicas y analíticas a un nivel cohomológico. Luego, Serre se interesa por producir una "buena" cohomología necesaria para atacar las conjeturas de Weil, problemas significativos del momento.

Por último, Grothendieck (1928-2014), seguramente el matemático más importante del siglo XX, luego de convertirse en el primer especialista mundial en análisis funcional, se moverá a la geometría algebraica que aprende directamente de Serre. Grothendieck desarrolla un espléndido programa en este campo, debido a su uso profundo de la teoría de categorías, donde sus nociones de esquema (número) y de topos (espacio) juegan un papel preponderante y renovador, impactando profundamente las matemáticas contemporáneas.

A continuación, visitamos el primer gran aporte de Grothendieck en este sentido, su artículo *Sur quelques points d'algèbre homologique*, conocido como *Tohôku*.

## 2. Prehaces y haces

La construcción de los *gérmenes de funciones* alcanza mayor despliegue al introducir el marco categórico [MacLane 1971; MacLane y Moerdijk 1992]. Sea $X$ un espacio topológico. $\Omega(X)$ denota la categoría (retículo) de conjuntos abiertos y Set la categoría de conjuntos.

**Definición 2.1.** Un **prehaz**[1] $F$ es un *funtor contravariante*

$$\Omega(X) \xrightarrow{F} \mathrm{Set}$$

$$\begin{array}{ccc} U & & F(U) \\ {\scriptstyle\subseteq}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle F_{UV}} \\ V & & F(V) \end{array}$$

Entendemos los prehaces como *cubrimientos locales* del espacio con cierto tipo de información. A continuación observamos cómo estos objetos (pre)ceden a los haces topológicos introducidos en el capítulo anterior.

**EJEMPLOS.** Prehaces de funciones. En todos, la restricción de aplicaciones es el morfismo imagen ($F_{UV}$).

*Donde la información es simplemente un conjunto:*

1. El prehaz de funciones continuas $Y$-valuadas sobre abiertos de $X$ ($Y$ espacio topológico).

*Donde la información es de tipo algebraico:*

2. El prehaz de funciones continuas $\mathbb{k}$-valuadas sobre abiertos de $X$ ($\mathbb{k}$ cuerpo topológico).
3. El prehaz de mapas continuos $G$-valuados sobre abiertos de $X$ ($G$ grupo topológico).

*Donde la información es de tipo diferencial, X variedad diferencial:*

4. El prehaz de funciones diferenciales $\mathbb{R}|\mathbb{C}$-valuadas sobre abiertos de $X$.
5. El prehaz de mapas diferenciales $G$ valuados sobre abiertos de $X$ ($G$ grupo de Lie).

[1] Término debido a Grothendieck.

**Definición 2.2.** El *límite directo*

$$F_x := \varinjlim_{U \ni x} F(U)$$

es el **germen** del prehaz $F$ en el punto $x$.

Este límite se calcula por medio de una equivalencia puntal: si $f_1 \in F(U_1)$ y $f_2 \in F(U_2)$, entonces $f_1 \equiv_x f_2$ si existe $U \subseteq U_1 \cap U_2$ conteniendo a $x$, con $F_{U_1 U}(f_1) = F_{U_2 U}(f_2)$, $(f)_x$ denota la clase de equivalencia (exactamente lo mismo que en el haz de gérmenes de funciones holomorfas). Por lo tanto:

**Proposición 2.1.** Sea $F$ un **prehaz**,

1. $F_x = \{(f)_x : f \text{ está en algún } F(U)\}$.
2. El germinado
$$\begin{tikzcd} \overline{F} = \coprod_x F_x \arrow[d, "p"'] \\ X \end{tikzcd}$$
es un **haz topológico** (definición 3.1 del capítulo I) con $\mathcal{U}((f)_x; f, U) = \{(f)_y : y \in U\}$ abiertos básicos de $\overline{F}$.
3. Las secciones $\Gamma(\ ,\overline{F})$ forman de nuevo un prehaz (misma definición 3.1 del capítulo I) y la equivalencia puntual define una *tranformación natural*, i.e.
$$\begin{tikzcd} U & F(U) \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "F_{UV}"] & \Gamma(U,\overline{F}) \arrow[d, "\rho_{UV}"] \\ V \arrow[u, "\subseteq"] & F(V) \arrow[r, "\cdot"] & \Gamma(V,\overline{F}) \end{tikzcd}$$

**Definición 2.3.**
1. $\mathrm{PreSh}(X)$ es la **categoría de prehaces** sobre $X$.[2]
2. $\text{Étalé}(X)$ es la **categoría de haces topológicos** sobre $X$.[3]

**Teorema 2.1.** El prehaz de secciones y la germinación vistos como funtores son *adjuntos*: $\overline{(\ )} \dashv \Gamma$

$$\text{Étalé}(X) \underset{\overline{(\ )}}{\overset{\Gamma}{\rightleftarrows}} \mathrm{PreSh}(X).$$

*Demostración.* Observamos que al germinar (límite directo) un morfismo (transformación natural) entre prehaces obtenemos un morfismo entre haces topológicos, i.e. $\overline{(\ )}$ es funtor. La proposición 3.2 del capítulo I muestra que $\Gamma$ es funtor.

i. $\overline{\Gamma(E)} \simeq E$ (iso), un haz topológico es *isomorfo* al germinado de sus secciones (teorema 3.2 del capítulo I).

ii. Tome $F$ un prehaz y $E$ un haz topológico. Para toda $\varphi : F \overset{\cdot}{\longrightarrow} \Gamma(E)$, por lo anterior *existe una única* $\overline{\varphi} : \overline{F} \to E$, con el siguiente diagrama conmutativo (equivalencia puntual es unidad para la adjunción):
$$\begin{tikzcd} \overline{F} \arrow[d, dashed, "\overline{\varphi}"'] & F(U) \arrow[r, "\cdot"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \Gamma(U,\overline{F}) \arrow[d, dashed, "\Gamma_{\overline{\varphi}} = \overline{\varphi}\circ\_"] \\ E & & \Gamma(U,E) \end{tikzcd}$$

□

**Definición 2.4.** $F$ es un **haz** si

$$F \overset{\cdot}{\simeq} \Gamma(\overline{F}) \text{ (iso)}$$

i.e. donde la adjunción se restringe a una *equivalencia*, y por lo tanto, $\mathrm{Sh}(X) \equiv \text{Étalé}(X)$ define la **categoría de haces** sobre $X$ - subcategoría *reflexiva* de $\mathrm{PreSh}(X)$.

[2] Transformaciones naturales como morfismos.
[3] Definición 3.2 del capítulo I para morfismos entre haces topológicos.

Obtenemos así un enlace *pleno y fiel* entre los puntos de vista topológico y categórico. La noción de haz se configura en una propiedad de *buen pegamiento* para los prehaces (cubrimientos locales) que no es otra que la *continuación analítica*, propiedad que se expresa puntualmente, pero que tiene un equivalente categórico; invitándonos a pensar más allá de conjuntos. Y así, empezar a ver cómo "el concepto general de haz es capaz de integrar una red profunda de correlaciones donde se incorporan aspectos tanto analíticos como sintéticos, tanto locales como globales, tanto discretos como continuos" [Zalamea 2009, p.161].

**Teorema 2.2.** $F \dot{\simeq} \Gamma(\overline{F})$ si y solo si Dado $U = \cup_\alpha U_\alpha$,

(Puntos, conjuntísticamente) Sean $f_\alpha \in F(U_\alpha)$ con $F_{U_\alpha U_\alpha \cap U_\beta}(f_\alpha) = F_{U_\beta U_\alpha \cap U_\beta}(f_\beta)$, *existe una única* $f \in F(U)$ tal que $F_{UU_\alpha}(f) = f_\alpha$.

*equivalentemente*

(Morfismos, categóricamente) Existe el igualador

$$F(U) \overset{e}{\dashrightarrow} \prod_\alpha F(U_\alpha) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{\alpha,\beta} F(U_\alpha \cap U_\beta)$$

*Demostración.* Ser "iso" en prehaces es tener biyectividad conjuntista a nivel de abiertos.

($\Rightarrow$): Contexto general del teorema 3.1 del capítulo I.

($\Leftarrow$): Sea $\sigma \in \Gamma(U, \bar{F})$. Para todo $x \in U$, existe $U_x \subset U$ y $f_x \in F(U_x)$ con $(f_x)_y = \sigma_y$ en $U_x$, i.e. $F_{U_x U_x \cap U_y}(f_x) = F_{U_y U_x \cap U_y}(f_y)$, entonces existe una única $f \in F(U)$ tal que $(f)_x = \sigma_x$ para todo $x \in U$.

$\square$

La condición categórica sirve, entonces, como definición sintética (alejada de los puntos) para los haces. Esto, en manos de Grothendieck, permite *ampliar la concepción misma del espacio* [Zalamea 2009, p.81; MacLane y Moerdijk 1992, cap.III]. Sin embargo, como se observa en los ejemplos, no solo estamos interesados en el ámbito general de los haces (de conjuntos), sino en los diferentes ámbitos geométrico-algebraicos. En general se trabaja *ad hoc* con diferentes estructuras sobre haces, como hicimos en el capítulo anterior. No obstante, quisiéramos a continuación, hacer una pequeña y somera digresión sobre qué entender por estructuras en un contexto amplio de categorías.

## 3. Estructuras

En principio una extensión natural del álgebra universal, en teorías de primer order, parecería ser suficiente. Sin embargo, desde nuestro punto de vista encontramos dos objeciones. Primero, la presentación de estructuras por medio de ecuaciones-teorías está limitada y restrinjida al universo conjuntista, en contravía de un entendimiento más heurístico y natural de la teoría de categorías que busca liberar los objetos[4]. Segundo, y más importante porque ilustra lo anterior, no vemos cómo introducir naturalmente los módulos (casi-coherentes) sobre un espacio anillado, el ámbito importante de nuestro estudio del capítulo I, sin tener que hacer fuertes modificaciones al lenguaje (para definir módulos sobre un anillo-objeto, y no solo sobre un anillo-conjunto) y sus fundamentos (propiedad de finitud alrededor de la coherencia). Por lo tanto, en este punto para nosotros, el entendimiento de ciertas estructuras en categorías debe quedarse en un ámbito más diagramático que fundacional[5].

Quisiéramos, entonces, entender "diagrámatico" de manera amplia y esquemática. Es decir, adecuados diagramas (grafos) describen ciertas teorías (algebraicas), y las posibles estructuras asociadas en una categoría pasan por adecuados objetos y morfismos que encaran los diagramas [MacLane 1971, intr.]. Seguramente se puede, en este momento, recrear fácilmente los diagramas que describen las estructuras (clásicas) del álgebra: monoide, grupo, grupo abeliano, anillo, módulo, etc. Permítanos, entonces, observar que todos los diagramas de estas estructuras (clásicas) se levantan sobre una noción de producto. Cartesiano, en principio, para el ámbito de conjuntos. Como límite, en principio, para el ámbito categórico. Pero que se generaliza, en un sentido más libre, a un producto monoidal en categorías [MacLane 1971, cap.VII]. Por el momento pensamos el producto como límite categórico que nos permite presentar el siguiente resultado:

[4] Al igual que un entendimiento más profundo de "la igualdad", como muestra el fuerte desarrollo en categorías de orden superior de las últimas décadas.

[5] Señalando, sin embargo, el importante proyecto funcacional alrededor de la Teoría Homotópica de Tipos.

**Teorema 3.1.** La adjunción $\overline{(\ )} \dashv \Gamma$ se mantiene para los haces y prehaces con una misma estructura (clásica) algebraica:

$$\text{Étalé}_\tau(X) \underset{\overline{(\ )}}{\overset{\Gamma}{\rightleftarrows}} \text{PreSh}_\tau(X).$$

*Demostración.* En el ámbito general de teorema 2.1, $\Gamma$ preserva límites (finitos) porque tiene adjunto a izquierda [MacLane 1971, p.118] y $\overline{(\ )}$ preserva límite finitos porque el límite directo conmuta bien con estos [MacLane 1971, p.214].[6] De esto se sigue que los funtores preservan estructuras (clásicas) algebraicas y que la adjunción se mantiene. □

Este resultado nos está diciendo que las operaciones, definidas continuamente sobre las fibras y definidas a nivel de abiertos, coinciden para los haces.

**Observación.** Un espacio anillado $(X, O)$ es un anillo-objeto en (Pre)Sh($X$), con el cual podemos introducir las estructuras importantes de nuestro estudio:

**Definición 3.1.** Sea $(X, O)$ un anillo-objeto en Sh($X$).
1. PreSh$_O(X)$es la categoría de prehaces con estructura de $O$-módulo.
2. Sh$_O(X)$ es la (sub)categoría (reflexiva) de haces con estructura de $O$-módulo.

Con la correspondiente adjunción:

$$\text{Sh}_O(X) \underset{\overline{(\ )}}{\overset{\Gamma}{\rightleftarrows}} \text{PreSh}_O(X).$$

Un logro alcanzado por Grothendieck, en su famoso artículo *Sur quelques points d'algèbre homologique*, es permitir un tratamiento *natural y general* para las diferentes estructuras abelianas.

> ... une tentative d'exploiter l'analogie formelle entre la théorie de la cohomologie d'un espace à coéfficients dans un faisceau et la théorie des foncteurs dérivés de foncteurs de modules, pour trouver un cadre commun permettant d'englober ces théories et d'autres. [Grothendieck 1957, *Tohôku*, p.119]

Para esto, Grothendieck introduce las **categorías abelianas**, que engloban y potencian la categoría de módulos (conjuntos) sobre un anillo Mod$_R$[7], y la categoría de módulos (haces) sobre un espacio anillado Sh$_O(X)$[8]. Este provee un ámbito "suave" para todo el **flujo (co)homológico**.

## 4. Categorías abelianas

Detalles en [MacLane 1971, cap.VII; Weibel 1994]

**Definición 4.1.** $\mathcal{A}$ es una **categoría aditiva** si:
- hom( , ) es un grupo abeliano y la composición es bilineal (Ab-categoría).
- Posee objeto cero y biproductos.

**Definición 4.2.** Una categoría aditiva $\mathcal{A}$ es una **categoría abeliana** si:
AB1. Posee cokernels.
AB1'. Posee kernels.
AB2. Todo epi es cokernel.
AB2'. Todo mono es kernel.

**Proposición 4.1.** Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana, entonces
- Tiene todos los colímites finitos (AB1) y todos los límites finitios (AB1').
- Tiene factorización epi-mono (teorema de isomorfía), existen coimágenes (AB2) e imágenes (AB2').

**Definición 4.3.** Una composición nula de morfismos

$$\xrightarrow{f} b \xrightarrow{g}$$

es **exacta** si:
coker$(f) \equiv$ coim$(g)$ (equivalencia como cocientes de $b$), o, equivalentemente,
im$(f) \equiv$ ker$(g)$ (equivalencia como subobjetos de $b$).

[6] De hecho, esto quiere decir, en el ámbito de topos, que la adjunción es un morfismo geométrico.
[7] En particular, la categoría de grupos abelianos Ab.
[8] En particular, la categoría de haces abelianos Sh$_{\text{Ab}}(X)$.

**Definición 4.4.** Una sucesión nula de morfismos

$$0 \to a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \to 0$$

1. Es una **sucesión exacta corta a derecha** si es exacta en $b$ y $c$ i.e. $\mathrm{coker}(f) \equiv g$.
1'. Es una **sucesión exacta corta a izquierda** si es exacta en $a$ y $b$ i.e. $f \equiv \ker(g)$.

**Definición 4.5.** Un funtor aditivo entre categorías abelianas

$$F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$$

1. Es **exacto a derecha** si envía toda sucesión exacta corta en una sucesión exacta corta a derecha.[9]
1'. Es **exacto a izquierda** si envía toda sucesión exacta corta en una sucesión exacta corta a izquierda.[10]

**Proposición 4.2.** $\mathrm{Sh}_O(X)$ es una **subcategoría abeliana a exacta izquierda** de $\mathrm{PreSh}_O(X)$.

*Demostración.* Como el funtor (inclusión)

$$\mathrm{Sh}_O(X) \xrightarrow{\Gamma} \mathrm{PreSh}_O(X)$$

tiene adjunto a izquierda, preserva límites, y por lo tanto es exacto a izquierda. □

**Observación.** En $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(X)$, la siguiente sucesión es exacta (localmente es posible definir $\log z$ inversa de $e^z$):

$$0 \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{2\pi i(\ )} \overline{\mathbb{C}} \xrightarrow{e^{(\ )}} \overline{\mathbb{C}^*} \longrightarrow 0.$$

En $\mathrm{PreSh}_{\mathrm{Ab}}(X)$, no es exacta a derecha ($1/z \in \Gamma(\mathbb{C}^*, \overline{\mathbb{C}^*})$ no tiene pre-imagen en $\Gamma(\mathbb{C}^*, \overline{\mathbb{C}})$).

### 4.1. Proyectivos e Inyectivos

El *bifuntor*

$$\hom(\ ,\ ) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$$

es exacto a izquierda en cada variable (en general preserva límites infinitos). De esta relación se sigue naturalmente la definición de los siguientes objetos.

**Definición 4.6.**
1. Un objeto $p$ es **proyectivo** si $\hom(p,\ )$ es exacto.
2. Diremos que $\mathcal{A}$ tiene **suficientes proyectivos** si para todo $a$, existe un morfismo epi $p \to a$ con $p$ proyectivo.

1'. Un objeto $i$ es **inyectivo** si $\hom(\ ,i)$ es exacto.
2'. Diremos que $\mathcal{A}$ tiene **suficientes inyectivos** si para todo $a$, existe un morfismo mono $a \to i$ con $i$ inyectivo.

---

**Teorema 4.1.** $\mathrm{PreSh}_O(X)$ tiene suficientes proyectivos e inyectivos.

---

Primero tenemos que sentar los siguientes resultados:

**Lema 4.1.** $\mathrm{Mod}_R$ tiene suficientes proyectivos e inyectivos.

*Demostración.* Ver [Cartan y Eilenberg 1956, cap.I]. □

**Lema 4.2.** Dada una adjunción $F \dashv G$ entre categorías abelianas

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, shift left, "G"] & \mathcal{A} \arrow[l, shift left, "F"] \end{tikzcd}$$

tenemos que:
1. Si $p$ es proyectivo en $\mathcal{A}$ y $G$ es exacto, entonces $F(p)$ es proyectivo en $\mathcal{B}$.
1'. Si $i$ es inyectivo en $\mathcal{B}$ y $F$ es exacto, entonces $G(i)$ es inyectivo en $\mathcal{A}$.

[9] I.e. preserva cokernels, y por lo tanto, todos los colímites finitos.
[10] I.e. preserva kernels, y por lo tanto, todos los límites finitos.

*Demostración.* $\hom_{\mathcal{B}}(F(\ ),\ )$ es exacta si y solo si $\hom_{\mathcal{A}}(\ ,G(\ ))$ es exacta. □

**Lema 4.3.** $\mathrm{PreSh}_O(X)$, $\mathrm{Sh}_O(X)$ y Ab
AB3. Poseen coproductos infinitos de objetos.
AB3'. Poseen productos infinitos de objetos.

**Lema 4.4.** En una categoría abeliana $\mathcal{A}$
1. El coproducto infinito de proyectivos es proyectivo.
1'. El producto infinito de inyectivos es inyectivo.

*Demostración.* Ab satisface:
AB4'. El producto de sucesiones exactas es una sucesión exacta.
Luego:
1. $\hom(\coprod p,\ ) = \prod \hom(p,\ )$ es exacto.
1'. $\hom(\ ,\prod i) = \prod \hom(\ ,i)$ es exacto. □

*Demostración del teorema.* Para todo $U \in \Omega(X)$, tenemos las siguientes adjunciones $L_U \dashv (\ )_U$ y $(\ )_U \dashv R_U$:

$$\begin{tikzcd}
 & F(U) =: F_U & R_U M(V) := \left\{ \begin{array}{ll} [O_{VU}]^* M & \text{si } U \subseteq V \\ 0 & \text{si } U \not\subseteq V \end{array} \right. \\
\mathrm{PreSh}_O(X) \arrow[r, shift left, "(\ )_U"] & \mathrm{Mod}_{O(U)} \arrow[l, shift left, "L_U"] \arrow[r, shift left, "R_U"] & \mathrm{PreSh}_O(X) \arrow[l, shift left, "(\ )_U"] \\
\left. \begin{array}{ll} O(V) \underset{O(U)}{\otimes} M & \text{si } V \subseteq U \\ 0 & \text{si } V \not\subseteq U \end{array} \right\} =: L_U M(V) & F_U := F(U) &
\end{tikzcd}$$

1. Los $O(V)$-módulos $O(V) \otimes_{O(U)} M$ están dados por los morfismos (de anillos) $O_{UV} : O(U) \to O(V)$. Las counidades $\epsilon_V : L_U F_U(V) \to F(V)$ están dadas por los morfismos $F_{UV} : F(U) \to F(V)$.

1'. Los $O(V)$-módulos $[O_{VU}]^* M$ están dados por los morfismos (de anillos) $O_{VU} : O(V) \to O(U)$. Las unidades $\eta_V : F(V) \to R_U F_U(V)$ están dadas por los morfismos $F_{VU} : F(V) \to F(U)$.

Veamos finalmente que todo $F \in \mathrm{PreSh}_O(X)$ tiene asociado un proyectivo e inyectivo:

1. Para todo $F_U$, por el lema 4.1 existe $Q_U$ proyectivo y $Q_U \to F_U$ epi. Por el lema 4.2 $L_U Q_U$ es proyectivo y $L_U Q_U \to L_U F_U$ epi. Por los lemas 4.3 y 4.4 (AB3) $P = \coprod_U L_U Q_U$ es proyectivo y $P \to \coprod_U L_U F_U$ epi. Observamos que $\coprod_U L_U F_U \dashrightarrow \varinjlim_U L_U F_U = F$ es epi, y por lo tanto, existe $P \to F$ epi.

1'. Para todo $F_U$, por el lema 4.1 existe $J_U$ injectivo y $F_U \to J_U$ mono. Por el lema 4.2 $R_U Q_U$ es inyectivo y $R_U F_U \to R_U J_U$ mono. Por los lemas 4.3 y 4.4 (AB3') $I = \prod_U R_U J_U$ es inyectivo y $\prod_U R_U F_U \to I$ mono. Observamos que $\varprojlim_U R_U F_U = F \dashrightarrow \prod_U R_U F_U$ es mono, y por lo tanto, existe $F \to I$ mono.

□

**Corolario 4.1** (Godement). $\mathrm{Sh}_O(X)$ tiene suficientes inyectivos.

*Demostración.* En el paso a la fibra (límite directo), emerge naturalmente la adjunción $(\ )_x \dashv R_x$:

$$\begin{tikzcd}
F_x & R_x M(V) := \left\{ \begin{array}{ll} [O_{Vx}]^* M & \text{si } x \in V \\ 0 & \text{si } x \notin V \end{array} \right. \\
O_x\mathrm{Mod} \arrow[r, shift left, "R_x"] & \mathrm{Sh}_O(X) \arrow[l, shift left, "(\ )_x"]
\end{tikzcd}$$

El resultado se sigue como antes. Observamos, además, la obstrucción natural con el (co)diagrama de las otras adjunciones ($L$) para el paso a la fibra, y por lo tanto, la *no* generalidad de suficientes proyectivos. □

Sin embargo, la anterior prueba "puntual" no es suficiente para Grothendieck, motivo por lo cual se embarca en la empresa de sondear y desentrañar las razones importantes "alejadas de los puntos" de la teoría de categorías. Genialidad profunda y coherente desde el inicio con su programa, deleite y maravilla para nosotros 50 años después.

**Teorema 4.2** (Grothendieck)**.** $\mathrm{Sh}_O(X)$ tiene suficientes inyectivos.

Nuevamente, primero sentamos los resultados importante:[11]

**Lema 4.5.** $\hom(\overline{L_U O_U}, F) \approx F(U)$ | $\overline{L_U O_U}$ generan $\mathrm{Sh}_O(X)$.

*Demostración.* Por la adjunción $\overline{(\;)} \dashv \Gamma$, $\hom(\overline{L_U O_U}, F) \approx \hom(L_U O_U, \Gamma(F)) \approx F(U)$. □

Este punto es importante porque nos permite observar cómo se rompe la simetría anterior. Primero, como $\overline{R_U O_U} = 0$, estos no sirven como cogeneradores. Segundo, la adjunción no sirve para trasladar otros posibles cogeneradores de $\mathrm{PreSh}_O(X)$. También, es importante señalar cómo los generadores, que son objetos naturales, aparecen antes en relación con los proyectivos: precisamente, como los anillos base $O(U)$ para la construcción sintáctica (conjuntista) de módulos libres. Construcción no generalizable, de manera natural, a un ámbito amplio de categorías.

**Lema 4.6.** Sea $\{F_i\}$ una familia de subobjetos de $F \in \mathrm{Sh}_O(X)$.

AB(Gr): Si $F = \sup F_i$ en el *retículo de subobjetos*, entonces $F = \varinjlim F_i$ como *colímite categórico*.

Entendemos este resultado como una generalización natural de la extensión de funciones para adecuados dominios filtrados, i.e. continuación analítica, intimamente relacionado con los haces como hemos venido exponiendo.

**Lema 4.7.** *$I$ es inyectivo en $\mathrm{Sh}_O(X)$ si y solo si $I$ es inyectivo para los $\overline{L_U O_U}$* [12].

*Demostración.* ($\Leftarrow$): Sea $G$ subobjeto de $F$, tenemos que mostrar que todo morfismo $\psi : G \to I$ se extiende a un morfismo $\psi_F : F \to I$.

i. Existen $G \subset G_s \subset F$ (subobjetos) donde $\psi$ se extiende a $\psi_s : G_s \to I$:

   Como $G \neq F$, existe algún $s \in F(U) \backslash G(U)$ para algún $U$. Por el lema 4.5 obtenemos un morfismo asociado $\phi_s : \overline{L_U O_U} \to F$ con $s \in \mathrm{im}(\phi_s)(U)$. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \phi_s^{-1}(G) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_s"'] & \overline{L_U O_U} \arrow[d, "\phi_s"] \arrow[ddl, dashed] \\ G \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & F \\ I. & \end{tikzcd}$$

   Por hipótesis, el morfismo $\psi \circ \phi_s : \phi_s^{-1}(G) \to I$ se extiende a un morfismo $\psi_{U,s} : \overline{L_U O_U} \to I$. Como $\ker(\phi_s) \subset \psi_{U,s}$, obtenemos (teorema de isomorfía) un morfismo $\psi_s : G_s := G \oplus \mathrm{im}(\phi_s) \to I$ que extiende a $\psi$.

ii. Observamos que $F = \sup G_s$ en el retículo de subobjetos. El resultado se sigue de AB(Gr).

□

*Demostración del teorema.* Sea $F \in \mathrm{Sh}_O(X)$.

i. Definimos $J_0^F := F$, $J_{\alpha+1}^F := \overline{I_{\alpha+1}^F}$ con $I_{\alpha+1}^F$ el prehaz inyectivo asociado al prehaz $\Gamma(J_\alpha^F)$ (por el teorema 4.1), $J_\beta^F := \varinjlim_{\alpha<\beta} J_\alpha^F$ para un ordinal límite $\beta$.[13] Como $\Gamma$ preserva límites finitos, $J_{\beta_1}^F \to J_{\beta_2}^F$ es mono para $\beta_1 < \beta_2$.

ii. Sea $J_\beta^F$ con $\beta > \mathrm{card}\,\{S \mid S$ es subobjeto de algún $\overline{L_U O_U}\}$. Para todo morfismo $\psi : S \to J_\beta^F$, por cardinalidad debe existir algún $\alpha < \beta$ tal que $S \subset \psi^{-1}(J_\alpha^F)$ y $\psi$ se factoriza a través de un morfismo $\psi_\alpha : S \to J_\alpha^F$.

iii. Como $I_{\alpha+1}^F$ es inyectivo en $\mathrm{PreSh}_O(X)$, tenemos morfismos punteados que extienden los diagramas:

$$\begin{tikzcd} \Gamma(S) \arrow[r] \arrow[d, "\Gamma(\psi_\alpha)"] & \Gamma(\overline{L_u O_U}) \arrow[d, dashed] \\ \Gamma(J_\alpha^F) \arrow[r] & I_{\alpha+1}^F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, "\psi_\alpha"] & \overline{L_u O_U} \arrow[d, dashed] & \\ J_\alpha^F \arrow[r] & J_{\alpha+1}^F \arrow[r] & J_\beta^F. \end{tikzcd}$$

   Del lema 4.7 se concluye que $J_\beta^F$ es un haz inyectivo con $F \to J_\beta^F$ mono.

□

[11] Esta presentación de la prueba se basa en lo expuesto en el *Stack Project Web*.

[12] Es decir, sea $S$ subobjeto de $\overline{L_U O_U}$, todo morfismo $S \to I$ se extiende a un morfismo de $\overline{L_U O_U} \to I$.

[13] Obsérvese el uso implícito de recurencia transfinita en ordinales.

### 4.2. Homología y Cohomología

**Definición 4.7.** Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ categorías abelianas y $n \geq 0$.

1. ***δ*-funtores homológicos:** Son funtores aditivos $H_n : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ con operadores naturales $\delta_n$, los cuales permiten que, para todo morfismo entre sucesiones exactas cortas en $\mathcal{B}$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & a & \longrightarrow & b & \longrightarrow & c & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & a' & \longrightarrow & b' & \longrightarrow & c' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

tengamos un morfismo entre sucesiones exactas largas en $\mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(b) & \longrightarrow & H_n(c) & \xrightarrow{\delta_n} & H_{n-1}(a) & \longrightarrow & H_{n-1}(b) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(b') & \longrightarrow & H_n(c') & \xrightarrow{\delta_n} & H_{n-1}(a') & \longrightarrow & H_{n-1}(b') & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

En particular, observamos que $H_0$ es exacto a derecha.

2. Los $H_n$ son ***δ*-funtores homológicos universales** si para cualesquiera otros $\widetilde{H}_n$ $\delta$-funtores homológicos, una transformación natural $f_0 : \widetilde{H}_0 \to H_0$ se extiende a un único $\delta$-morfismo homológico $f_* : \widetilde{H}_* \to H_*$ ($f_*$ conmuta con $\delta_*$).

1'. ***δ*-funtores cohomológicos**. Son funtores aditivos $H^n : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ con operadores naturales $\delta^n$, los cuales permiten que, para todo morfismo entre sucesiones exactas cortas en $\mathcal{B}$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & a' & \longrightarrow & b' & \longrightarrow & c' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & a & \longrightarrow & b & \longrightarrow & c & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

tengamos un morfismo entre sucesiones exactas largas en $\mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^n(b') & \longrightarrow & H^n(c') & \xrightarrow{\delta^n} & H^{n+1}(a') & \longrightarrow & H^{n+1}(b') & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H^n(b) & \longrightarrow & H^n(c) & \xrightarrow{\delta^n} & H^{n+1}(a) & \longrightarrow & H^{n+1}(b) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

En particular, observamos que $H^0$ es exacto a izquierda.

2'. Los $H^n$ son ***δ*-funtores cohomológicos universales** si para cualesquiera otros $\widetilde{H}^n$ $\delta$-funtores cohomológicos, una transformación natural $f^0 : H^0 \to \widetilde{H}^0$ se extiende a un único $\delta$-morfismo cohomológico $f^* : H^* \to \widetilde{H}^*$ ($f^*$ conmuta con $\delta^*$).

**Proposición 4.3** (Motivación de la definición)**.** Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana.

1. Los grupos usuales de homología $H_n : \mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ son $\delta$-funtores homológicos.[14]

1'. Los grupos usuales de cohomología $H^n : \mathrm{Ch}^{\geq 0}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ son $\delta$-funtores cohomológicos.[15]

*Demostración.* Lema de la serpiente [MacLane 1971, p.198-202]. □

**Proposición 4.4.**

1. Sean $H_n : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ $\delta$-funtores homológicos. Si $\mathcal{B}$ tiene suficientes proyectivos y los $H_n$ **borran proyecivos**[16] para $n \geq 1$, entonces los $H_n$ son universales.

1'. Sean $H^n : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ $\delta$-funtores cohomológicos. Si $\mathcal{B}$ tiene suficientes inyectivos y los $H^n$ **borran inyectivos**[17] para $n \geq 1$, entonces los $H^n$ son universales.

[14] $Ch_{\geq 0}(\mathcal{A})$ es la categoría abeliana de complejos de cadenas en $\mathcal{A}$.
[15] $Ch^{\geq 0}(\mathcal{A})$ es la categoría abeliana de complejos de cocadenas en $\mathcal{A}$.
[16] $H_n(p) = 0$ para todo proyectivo $p$.
[17] $H^n(i) = 0$ para todo inyectivo $i$.

*Demostración.*

1. Para todo objeto $b$ en $\mathcal{B}$ tenemos una sucesión exacta
$$0 \to m \to p \to b \to 0 \tag{1}$$
con $p$ proyectivo.

Para $n = 1$: Como $H_1(p) = 0$ existe un único morfismo $f_1$ que conmuta en el diagrama
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \widetilde{H}_1(b) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, dashed, "f_1"] & \widetilde{H}_0(m) \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & \widetilde{H}_0(p) \arrow[d, "f_0"] \\ & H_1(b) \arrow[r, "\delta_1"] & H_0(m) \arrow[r] & H_0(p) \end{tikzcd}$$
que resulta independiente de la sucesión exacta y por lo tanto "natural".

Para $n \geq 2$: Como $H_n(p) = 0$ tenemos que $H_{n-1}(m) \simeq H_n(b)$.

1'. Para todo objeto $b$ en $\mathcal{B}$ tenemos una sucesión exacta
$$0 \to b \to i \to z \to 0 \tag{2}$$
con $i$ inyectivo.

Para $n = 1$: Como $H_1(i) = 0$ existe un único morfismo $f_1$ que conmuta en el diagrama
$$\begin{tikzcd} H_0(i) \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & H_0(z) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "f_0"] & H_1(b) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_1"] & 0 \\ \widetilde{H}_0(i) \arrow[r] & \widetilde{H}_0(z) \arrow[r, "\delta_1"] & \widetilde{H}_1(b) \end{tikzcd}$$
que resulta independiente de la sucesión exacta y por lo tanto "natural".

Para $n \geq 2$: Como $H_n(i) = 0$ tenemos que $H_{n-1}(z) \simeq H_n(b)$.

□

**Proposición 4.5.** Si $X$ es paracompacto, la **cohomología de Čech** (sección 5 del capítulo I) define $\delta$-funtores cohomológicos universales: $\check{H}^n(X, \ ) : \mathrm{Sh}_O(X) \to \mathrm{Ab}$.

*Demostración.* $\check{H}^n(X, \ )$ borra inyectivos [Milne 1980, p.98], y por lo tanto, es universal (proposición 4.4). □

**Proposición 4.6.** Sea $\mathcal{B}$ una categoría abeliana.

1. Si $\mathcal{B}$ tiene suficientes proyectivos, entonces todo objeto $b$ tiene una **resolución proyectiva** $p_* b$, i.e. un complejo de cadenas exacto
$$\cdots \longrightarrow p_1 \longrightarrow p_0 \longrightarrow b \longrightarrow 0$$
donde cada $p_n$ es proyetivo.

2. [Comparación] Sea $p_* b$ una resolución proyectiva de $b$ y $f : b \to b'$ un morfismo en $\mathcal{B}$. Para cualquier $q_* b'$ resolución de $b'$, $f$ se extiende a un morfismo de complejos de cadenas $f_* : p_* \to q_*$
$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & p_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_1"] & p_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_0"] & b \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & q_1 \arrow[r] & q_0 \arrow[r] & b' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
único bajo equivalencia homotópica.

1.’ Si $\mathcal{B}$ tiene suficientes inyectivos, entonces todo objeto $b$ tiene una **resolución inyectiva** $i^*b$, i.e. un complejo de cocadenas exacto

$$0 \longrightarrow b \longrightarrow i^0 \longrightarrow i^1 \longrightarrow \cdots$$

donde cada $i^n$ es inyectivo.

2’. [Comparación] Sea $i^*b$ una resolución inyectiva de $b$ y $f : b' \to b$ un morfismo en $\mathcal{B}$. Para cualquier $j^*b'$ resolución de $b'$, $f$ se extiende a un morfismo de complejos de cocadenas $f^* : j^* \to i^*$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & b' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & j^0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f^0"] & j^1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f^1"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & b \arrow[r] & i^0 \arrow[r] & i^1 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

único bajo equivalencia homotópica.

*Demostración.* [Weibel 1994, p.34-38]

1. Con la sucesión exacta (1) formamos inductivamente (diagonales) la red exacta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & 0 & & & & \\
& m_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
\cdots \arrow[ur] \arrow[rr] & & p_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & p_0 \arrow[r] & b \arrow[r] & 0 \\
& & & m_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

1’. Con la sucesión exacta (2) formamos inductivamente (diagonales) la red exacta

$$\begin{tikzcd}
& & & & 0 \arrow[dr] & & 0 \\
& & & & & z^1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
0 \arrow[r] & b \arrow[r] & i^0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & i^1 \arrow[rr] \arrow[ur] & & \cdots \\
& & & z^0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

2-2’. Lema de la herradura.

□

**Teorema 4.3.** Sea $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ un funtor aditivo.

1. Si $\mathcal{B}$ tiene suficientes proyectivos y F es exacto a derecha, entonces los **funtores derivados a izquierda**

$$L_nF(b) = H_n(F(p_*b))$$

son $\delta$-funtores homológicos universales. En particular, $L_0F(b) = F(b)$.

1’. Si $\mathcal{B}$ tiene suficientes inyectivos y F es exacto a izquierda, entonces los **funtores derivados a derecha**

$$R^nF(b) = H^n(F(i^*b))$$

son $\delta$-funtores cohomológicos universales. En particular, $R^0F(b) = F(b)$.

*Demostración.* [Weibel 1994, p.45-49] Se tiene, principalmente, por comparación (proposición anterior), eligiendo adecuados, pero naturales, levantamientos de las resoluciones para la conmutatividad de los diagramas. El operador $\delta$ se hereda de la proposición 4.3 y lo universal de la proposición 4.4. □

**Corolario 4.2.** Sea $\mathcal{K}$ una clase de objetos en $\mathcal{B}$ con suficientes proyectivos|inyectivos.

1. Si $\mathcal{K}$ es una **LF-clase**, i.e:

   - Para todo objeto $b$ en $\mathcal{B}$, existe un morfismo epi $k_0 \to b$ con $k_0 \in \mathcal{K}$.
   - La clase contiene todos los proyectivos.
   - Para toda sucesión exacta $0 \to m_0 \to k_0 \to k \to 0$, si $k$ y $k_0$ están en $\mathcal{K}$, $m_0$ está en $\mathcal{K}$ y la sucesión $0 \to F(m_0) \to F(k_0) \to F(k) \to 0$ es exacta (a izquierda).

   Entonces para todo $k$ en $\mathcal{K}$, $L_nF(k) = 0$ para $n > 0$.

1'. Si $\mathcal{K}$ es una **RF-clase**, i.e:

   - Para todo objeto $b$ en $\mathcal{B}$, existe un morfismo mono $b \to k^0$ con $k^0 \in \mathcal{K}$.
   - La clase contiene todos los inyectivos.
   - Para toda sucesión exacta $0 \to k \to k^0 \to z^0 \to 0$, si $k$ y $k^0$ están en $\mathcal{K}$, $z^0$ está en $\mathcal{K}$ y la sucesión $0 \to F(k) \to F(k^0) \to F(z^0) \to 0$ es exacta (a derecha).

   Entonces para todo $k$ en $\mathcal{K}$, $R^nF(k) = 0$ para $n > 0$.

*Demostración.* [Grothendieck 1957, *Tohôku*, p.158] Se sigue de la construcción inductiva de la resolución proyectiva|inyectiva (proposición 4.6). □

**Corolario 4.3.**
1. $L_nF(b) = H_n(F(k_*b))$ para cualquier resolución $k_*$ en $\mathcal{K}$ una $LF$-clase.
1'. $R^nF(b) = H^n(F(k^*b))$ para cualquier resolución $k^*$ en $\mathcal{K}$ una $RF$-clase.

*Demostración.* Como en la proposición 4.6, obtenemos resoluciones de objetos en $\mathcal{K}$ vía la red de sucesiones exactas cortas (diagonales), utilizamos el operador $\delta$ para estas sucesiones:
1. Por inducción: $L_iF(b) \simeq L_{i-n-1}F(m_n)$ para $i > n+1$ y $L_{n+1}F(b)$ es el kernel de $F(m_n) \to F(k_n)$.
1'.Por inducción: $R^iF(b) \simeq R^{i-n-1}F(z^n)$ para $i > n+1$ y $R^{n+1}F(b)$ es el cokernel de $F(k^n) \to F(z^n)$. □

Una **LF|RF-clase** es, entonces, una clase *intermedia* entre la clase de **proyectivos|inyectivos** y los **LF|RF-acíclicos**[18], con la cual podemos *calcular* los **funtores derivados a izquierda|derecha**. Encontrar, entonces, adecuadas clases en las categorías abelianas concretas, es una tarea que comprendió perfectamente Grothendieck, y cuyo germen, está claramente presente en sus trabajos iniciales en *análisis funcional* [Zalamea 2015].

Observemos cómo actúa esto en las categorías de haces y prehaces.

**Definición 4.8.** La **cohomología de Grothendieck** para $\mathrm{Sh}_O(X)$ son los funtores derivados a derecha del funtor inclusión $\Gamma$ (definición 3.1 y teorema 4.2)

$$H^n(\ ,E) = R^n\Gamma(\ ,E).$$

Esta cohomología engloba la de Čech:

**Corolario 4.4** (proposición ). Si $X$ es paracompacto, entonces $H^*(X,E) \simeq \check{H}^*(X,E)$.

**Corolario 4.5.** La clase de **haces fofos**[19] es una $R\Gamma$-clase.

*Demostración.*

- Sea $F$ un haz cualquiera, tome $K = \prod_x R_xF_x$ (corolario 3.1), como $\Gamma(U,K) = \prod_{x\in U} F_x$, $K$ es fofo y $F \to K$ es mono.
- Los inyectivos $I = \prod_x R_xI_x$ son fofos.
- $0 \to \Gamma(K) \to \Gamma(K_0) \to \Gamma(Z_0) \to 0$ es exacta por el lema de Zorn [Godement 1958, p.147-149], y por lo tanto, $Z_0$ es fofo.

□

[18] $L_nF(a) = 0 \mid R^nF(a) = 0$ para $n > 0$.
[19] La restricción $\rho_{XU} : \Gamma(X,K) \to \Gamma(U,K)$ es *sobre* para todo $U$.

**Definición 4.9.** Si $(X,O)$ es un anillo-objeto conmutativo en $(\mathrm{Pre})\mathrm{Sh}_O(X)$.

1. Para todo $F$ en $\mathrm{PreSh}_O(X)$, tenemos la adjunción $(F\otimes\ ) \dashv \hom(F,\ )$:

$$\mathrm{PreSh}_O(X) \underset{(F\otimes\ )}{\overset{\hom(F,\ )}{\rightleftarrows}} \mathrm{PreSh}_O(X),$$

   de la cual obtenemos (teorema 4.1) los funtores derivados:

$$\mathrm{Tor}_n(F,\ ) = L_n(F\otimes\ ),$$

$$\mathrm{Ext}^n(F,\ ) = R^n\hom(F,\ ).$$

2. Para todo $F$ en $\mathrm{Sh}_O(X)$, se preserva la adjunción $\overline{(F\otimes\ )} \dashv \overline{\hom(F,\ )}$:

$$\mathrm{Sh}_O(X) \underset{\overline{(F\otimes\ )}}{\overset{\overline{\hom(F,\ )}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Sh}_O(X),$$

   de la cual obtenemos (teorema 4.2) el funtor derivado:

$$\overline{\mathrm{Ext}}^n(F,\ ) = R^n\overline{\hom(F,\ )}.$$

Es posible, sin embargo, definir Tor para $\mathrm{Sh}_O(X)$, a través de resoluciones planas como en Mod, pero tendríamos que reconstruir varios puntos anteriores. Para un tratamiento de esto, así como un estudio adecuado de los funtores derivados para la composición de funtores, es necesario desplegar el concepto de Categorías Derivadas, que tendrá origen en la escuela de Grothendieck y desarrollo fuerte en las décadas posteriores, pero de la cual ya no podríamos dar cuenta en este trabajo.

## 5. Hacia una filosofía de los haces

Reemplazar nuestra percepción "externa" sensible por nuestras ideas "internas" intelectuales (dualismo cartesiano) permitió importantes avances científicos, delineados por la búsqueda de verdades absolutas y fundamentos estables. Sin embargo, el desarrollo de la ciencia misma rompe con cualquier deseo de absoluto (Relatividad de Einstein, Incompletitud de Gödel), mostrando de cierta forma los problemas y limitaciones de tal postura. El regreso a lo sensible, donde nuevos enlaces entre cuerpo y mente trascienden este dualismo, es una apertura de conciencia de la cual la reflexión científica se ha venido nutriendo. Por esta razón-sensible (co-razon-ada), pedir que el estudio formal del lenguaje científico sea la única meta de la filosofía de las matemáticas es un presupuesto difícil de aceptar para aquellos que consideren fundamental la tarea de entender el entramado de relaciones entre la "invención humana" y el "mundo real" [Zalamea 2009].

Siguiendo a Lautman y Zalamea, observemos un par de reflexiones del movimiento matemático descrito en este trabajo. Confundir la filosofía con el estudio de formalismos lógicos es una moda generalizada; sin embargo, los ensayos de Lautman evidencian la necesidad de alejarse de esta postura y mirar en el seno de las matemáticas modernas, y con este movimiento constatar otras realidades. En *Essai sur les notions de structure et déxistence en mathemátiques*, Lautman estudia las acciones dialécticas que permiten entrelazar la creatividad con el descubrimiento (génesis). Por ejemplo, en la concepción local (Weierstrass) y global (Riemann) de las funciones analíticas, donde el estudio de singularidades en diferentes dominios estructurales disuelve los marcos de salida, permitiendo la emergencia de nuevos objetos (cubrimiento universal), y unificación desde otros niveles de perspectiva (funciones modulares). Así, Lautman muestra que la filosofía matemática aprende constantemente en contacto con el movimiento matemático, "porque el sentido de algo percibido no está aislado de la constelación en la que aparece" [Merleau–Ponty 1969, p.11].

Siguiendo a Lautman, Zalamea se situa en el seno de las matemáticas contemporáneas. En *Filosofía Sintética de las Matemáticas Contemporáneas*, Zalamea señala que las preguntas usuales sobre las matemáticas han estado (especialmente en el mundo anglosajón) dirigidas al *qué* (ontológico) y al *cómo* (epistemológico), dejando por fuera el *cuándo* (histórico) y el *por qué* (metafísico), y enmarcando por lo general estas preguntas en presupuestos dualistas (tales como realismo-idealismo). Sin embargo, el desarrollo mismo de las matemáticas modernas (1830-1950) está lejos de cualquier presupuesto rígido. El florecimiento de estructuras (semántica) y aplicaciones (física) durante este periodo hace imposible querer reducir una matemática totalmente viva a presupuestos meramente lingüísticos (sintaxis), y si bien la multiplicidad de estructuras y hechos contrastados son necesarios para entender el fenómeno matemático, no lo agotan como lo muestra las matemáticas contemporáneas (1950-hoy). Por lo tanto, a pesar de que el lenguaje científico tiende a ser estático, cerrado y concreto, las matemáticas muestran ser esencialmente dinámicas, abiertas y caóticas. Esto indica la dificultad, pero también la urgencia, de analizar y sintetizar las "razones profundas" (emergencia y entendimiento) de los diferentes conceptos creadores de las matemáticas avanzadas (modernas y contemporáneas). La teoría de haces y la figura de Grothendieck están en el centro de la reflexión de Zalamea, puesto que son ellos los que marcan el profundo giro conceptual entre las matemáticas modernas y contemporáneas.

## REFERENCIAS


| | | |
|---|---|---|
| Ahlfors, L. | 1953 | *Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, third edition, New York: McGraw-Hill, 1978. |
| Cartan, H. y Eilenberg, S. | 1956 | *Homological algebra*, New Jersey: Princeton University Press, 1956. |
| Fasanelli, F. | 1981 | *The creation of sheaf theory*, Ph. D. Thesis, Washington: The American University, 1981. |
| Godement, R. | 1958 | *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Paris: Hermann, 1958. |
| Grauert, H. y Fritzsche, K. | 1976 | *Several complex variables*, translated from the German, New York: Springer, 1976. |
| Grauert, H. y Remmert, R. | 1984 | *Coherent analytic sheaves*, Berlin: Springer, 1984. |
| Grothendieck, A. | 1957 | "Sur quelques points d'algèbre homologique", *Tohôku Math. Journal* 9 (1957): 119-221. |
| Lautman, A. | 1937 | "Ensayo sobre las nociones de estructura y de existencia en matemáticas", en: A. Lautman, *Ensayos sobre dialéctica, estructura y unidad de las matemáticas modernas*, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2011, pp. 131-276. |
| MacLane, S. | 1971 | *Categories for the working mathematician*, New York: Springer, 1971. |
| MacLane, S. y Moerdijk, I | 1992 | *Sheaves in geometry and logic: a first introduction to topos theory*, New York: Springer, 1992. |
| Merleau-Ponty, M. | 1969 | *Filosofía y lenguaje*, traducción de *Résumés de Cours*, Buenos Aires: Proteo, 1969. |
| Milne, J. | 1980 | *Étale cohomology*, New Jersey: Princeton University Press, 1980. |
| Morrow, J. y Kodaira, K. | 1971 | *Complex manifolds*, Providence: AMS Chelsea, 2006. |
| Riemann B. | 1851 | "Foundations for a General Theory of Functions of a Complex Variable", en: B. Riemann, *Collected Papers*, Herber City: Kendrick Press, 2004. |
| Serre, J-P. | 1955 | "Faisceaux algébriques cohérents", *Annals of Mathematics* 61 (1955): 197-278. |
| Weibel, C. A. | 1994 | *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press, 1994. |
| Zalamea, F. | 2009 | *Filosofía sintetética de las matemáticas contemporáneas*, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2009. |