Secuencia didáctica para desarrollar los procesos de razonamiento y argumentación de los estudiantes del ciclo III en el componente numérico

Sandra Puerto Martínez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Bogotá, Colombia
2018

Secuencia didáctica para desarrollar los procesos de razonamiento y argumentación de los estudiantes del ciclo III en el componente numérico

Sandra Puerto Martínez

Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora:
Myriam Margarita Acevedo Caicedo
Magister en Matemáticas

Codirector:
Freddy Alberto Monroy Ramírez
Doctor en Física

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Bogotá, Colombia
2018

Resumen

La secuencia didáctica que se presenta en este documento fue diseñada con el propósito de desarrollar los procesos de razonamiento y argumentación de los estudiantes del ciclo tres (sexto y séptimo.), en el componente numérico a partir de la identificación de los niveles de desarrollo de estos procesos en un grupo del grado séptimo.

El diseño de la secuencia didáctica está basado en el análisis de los resultados de la aplicación de una prueba, cuyas especificaciones fueron determinadas a partir de la metodología del Modelo Basado en Evidencias, así como de una revisión de diferentes planteamientos teóricos relacionados con la competencia matemática y con la construcción de los sistemas numéricos, que, de acuerdo con los Estándares de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional, se deben abordar en el ciclo tres.

Palabras clave: Razonamiento y argumentación, componente numérico, Modelo Basado en Evidencias, competencia matemática.

Abstract

The educational secuence that this document shows was designed with the purpose of develop the thinking and argumentative processes of Ciclo Tres in the numerical component, from the identification of the development levels of these processes on a group of 7th Level.

The design of the educational secuence is based in the analysis of the results of the applied test, whose specifics were determined from the methodology of the “Evidence Based Model”, and also from a revision of different theorical models related with the mathematical competence and with the construction of the numerical systems, that according with the “ Mathematics Standards” of the National Education Ministry, must be covered in the Cicle Three.

Keywords: Reasoning and Argumentation, Numeric Component, Evidence based Model, Mathematic competence

Contenido

Pág.

1. Marco teórico......3
1.1 Aspectos disciplinares...... 3
1.1.1 Aspectos teóricos relacionados con el razonamiento y la argumentación......3
Generalidades de la actividad argumentativa......3
Tipos de razonamiento......5
La argumentación en la enseñanza de las matemáticas......5
1.1.2 Aspectos teóricos relacionados con el componente numérico......6
Números naturales......6
Números enteros......13
Números Racionales......18
1.1.3 Aspectos relacionados con la matemática escolar......21
El pensamiento numérico......22
Sistemas de representación del pensamiento numérico......23
Los contextos numéricos de los números naturales......25
Funciones cognitivas asociadas al pensamiento numérico......25
El pensamiento numérico en los Lineamientos de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional......26
1.2 Marco didáctico...... 28
1.2.1 El concepto de competencia......28
1.2.2 La competencia matemática......30
1.2.3 Competencia matemática en el currículo......32
1.2.4 La competencia matemática en las pruebas: Pisa y saber......34
1.3 La metodología del Modelo Basado en Evidencias...... 36
1.3.1 Etapas del Modelo Basado en Evidencias......36

2. Diseño de la prueba inicial y resultados......39
2.1 Diseño de la prueba inicial...... 39
2.2 Aplicación de la prueba inicial y resultados...... 42
2.2.1 Resultados nivel de competencia 1......43
2.2.2 Resultados nivel de competencia 2......44
2.2.3 Resultados nivel de competencia 3......47
2.2.4 Resultados nivel de competencia 4......49
2.2.5 Resultados preguntas abiertas......50

3. Secuencia didáctica......55
3.1 Taller número 1...... 56

3.2 Taller número 2 61
3.3 Taller número 3 68
3.4 Taller número 4 72
3.5 Taller número 5 76
3.6 Taller número 6 81
3.7 Taller número 7 87
3.8 Taller número 8 92

4. Análisis de resultados 99
4.1 Resultados de la aplicación de la actividad uno taller uno 99
4.2 Análisis de resultados de la prueba final 101
4.3 Resultados preguntas abiertas 104
Pregunta abierta 1 104
Resultados pregunta abierta 2 105

5. Conclusiones y recomendaciones 107

A. Anexo: Diseño prueba inicial 109

B. Anexo: Análisis de resultados de la secuencia didáctica 123

C. Anexo: Diseño prueba final 158

Bibliografía 169

Lista de tablas

Pág.

Tabla 1-1: Contextos numéricos de los números naturales……………………………….. 25
Tabla 1-2: Aspectos que ayudan a desarrollar le pensamiento numérico ……………… 27
Tabla 1-3: Competencias matemáticas según Niss ……………………………………..... 31
Tabla 1-4: Procesos generales en matemáticas M.E.N……………………………………34
Tabla 2-1: Referentes teóricos para la definición de la competencia…………………….. 39
Tabla 2-2: Diseño de las preguntas 1 a 4…………………………………………………… 40
Tabla 2-3: Diseño de las preguntas 5 y 6…………………………………………………… 41
Tabla 2-4: Diseño de las preguntas 7 a 10………………………………………………….. 41
Tabla 2-5: Niveles de razonamiento y argumentación……………………………………... 43

Introducción

Una revisión de diversos referentes teóricos, nacionales e internacionales, relacionados con el concepto de competencia matemática, permitió concluir que, en su mayoría, dichos referentes coinciden en considerar el razonamiento y la argumentación como uno de los procesos centrales a desarrollar en la práctica escolar. Sin embargo, resultados como los de las pruebas Pisa y Saber, que en sus lineamientos establecen el razonamiento como una capacidad matemática fundamental, muestran que los estudiantes no están alcanzando el nivel de desarrollo esperado en dicho proceso.

De igual forma, aunque documentos publicados por el Ministerio de Educación Nacional, como los Lineamientos Curriculares y los Estándares básicos de Competencias del área de matemáticas, ofrecen algunas estrategias relativas a la manera como estos procesos se pueden articular con los componentes del área, no son suficientemente claros respecto a las prácticas que los docentes deben favorecer para facilitar el desarrollo de dichos procesos en el aula.

Teniendo en cuenta lo anterior y mi experiencia como docente de matemáticas en los diferentes ciclos de la enseñanza básica y media se planteó como objetivo central del trabajo de grado, que se presenta en este documento, el diseño de una secuencia didáctica orientada a desarrollar, a través de diferentes actividades, los procesos de razonamiento y argumentación de los estudiantes del ciclo tres del colegio Virginia Gutiérrez de Pineda de la localidad de Suba. La secuencia está centrada en el componente numérico, que es uno de los dominios del área de matemáticas en este ciclo.

El trabajo desarrollado para alcanzar el objetivo propuesto está organizado en cuatro capítulos que se describen a continuación.

El marco teórico (capítulo 1) que fundamentó la secuencia didáctica incluye, en primer lugar, algunos elementos relativos a los procesos de razonamiento y argumentación matemática, analizados, entre otros por autores como R. Duval quien hace énfasis en la manera como estos procesos están relacionados. Aparte de lo anterior y teniendo en cuenta que el eje de la secuencia es el pensamiento numérico, se describen en este capítulo, aspectos relacionados con los sistemas numéricos: Construcción formal de los números, naturales, enteros y racionales. El capítulo concluye con una descripción de estos procesos, desde los referentes en los documentos curriculares y en los lineamientos de las pruebas externas, nacionales e internacionales del área, dado que, en ellos los procesos de razonamiento y argumentación se consideran fundamentales en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Es de anotar que el ICFES construye las especificaciones de las pruebas, punto de partida de este trabajo, teniendo en cuenta el Modelo Basado en Evidencias, razón por la que se incluye dicha referencia en el marco teórico.

Teniendo en cuenta el marco teórico antes mencionado, se construyó, aplicó y analizó una prueba inicial para evidenciar el nivel de desarrollo de los procesos de razonamiento y argumentación de los estudiantes del ciclo tres. Las características de la prueba aplicada, los niveles de desarrollo de la competencia esperados y las conclusiones obtenidas a partir del análisis se incluyen en el capítulo 2.

En el capítulo 3 se presenta la secuencia didáctica que fue diseñada teniendo en cuenta las dificultades evidenciadas en la prueba inicial respecto a temáticas del componente numérico y los cuatro niveles de razonamiento y argumentación esperados. La secuencia está conformada por ocho talleres que corresponden a los estándares seleccionados para el diseño de la prueba inicial y consta de una serie de actividades orientadas a desarrollar los niveles de razonamiento y argumentación.

En el capítulo cuatro se presenta a manera de ilustración el análisis del proceso de implementación del taller uno de la secuencia didáctica, los restantes análisis de los talleres se incluyen en el anexo B. Aparte de lo anterior, en este capítulo se describen y analizan los resultados de la prueba final (anexo C) y se presenta un contraste de tipo cualitativo entre los resultados de esta y la prueba inicial.

En la parte final de este trabajo aparecen las conclusiones, recomendaciones, los anexos y la bibliografía.

1. Marco teórico

El marco que fundamentó la secuencia didáctica incluye dos aspectos: El disciplinar y el didáctico, los cuales se describen sintéticamente a continuación.

1.1 Aspectos disciplinares

Teniendo en cuenta que el propósito fundamental del trabajo de grado era desarrollar en los estudiantes la competencia de razonamiento y argumentación matemática en el componente numérico, se consideró importante retomar algunos elementos teóricos relativos a estos procesos además de aspectos disciplinares formales relacionados con los sistemas numéricos: Construcción formal de los números, naturales, enteros y racionales, eje de la propuesta. Aparte de lo anterior y dado que la secuencia se orienta al ciclo tres, se analizaron los elementos teóricos mencionados desde la matemática escolar.

1.1.1 Aspectos teóricos relacionados con el razonamiento y la argumentación.

A continuación, se exponen algunas ideas generales sobre la argumentación y su relación con los conceptos de explicación, razonamiento y demostración. De igual forma se presentan algunos aspectos relacionados con la actividad argumentativa en matemáticas y la manera como se puede desarrollar dichos procesos en el aula de clase.

Generalidades de la actividad argumentativa

Argumentar es una actividad humana que se puede entender como una manera de dar cuenta o razón de algo ante alguien, lo que supone adoptar un papel como defensor o debelador de una posición, una opinión, una tesis o una decisión. (Vega, 2007). Esta perspectiva permite afirmar que la argumentación tiene principalmente la finalidad de persuadir y que, por ser una actividad humana, se relaciona con actos como opinar, explicar, juzgar.

La argumentación es objeto de estudio de la gramática, la lógica, la retórica y de la lógica informal, entre otras disciplinas. De acuerdo con Duval (1999), existe un creciente interés por el estudio de la argumentación, entendida como las formas de razonamiento que escapan a las normas y a los esquemas lógicos y que surgen de manera espontánea, que tiene su origen en el carácter irreemplazable del lenguaje natural, en relación con el lenguaje formal.

Duval (1999) afirma que la importancia del lenguaje natural permite separar dos operaciones en la actividad argumentativa, una de ellas tiene que ver con la producción de razones o argumentos y la otra con la aceptabilidad de los argumentos producidos, llegando a concluir que, cuando la actividad argumentativa se limita solo a la producción de razones, se trata de una explicación, mientras que, si se ocupa también de garantizar la aceptabilidad de los argumentos, se trata de un razonamiento.

Además de establecer una diferencia entre explicación y razonamiento, el autor afirma que una explicación hace referencia a una o más razones, con las cuales se puede lograr que, por ejemplo, un fenómeno, un resultado o un comportamiento sean comprensibles. Dichas explicaciones se presentan a modo de descripción.

De igual manera, con relación al razonamiento, el autor indica que los argumentos que lo componen deben cumplir con los criterios de relevancia, que hace referencia a la importancia que deben tener respecto al enunciado que pretenden justificar; y de fuerza, puesto que deben resistir objeciones, además de ser obvios, necesarios y auténticos.

Duval establece, en el documento citado, que un razonamiento puede corresponder a una demostración o a una argumentación. Para el caso de la demostración debe tener una relación de derivación y debe cumplir con la restricción de validez, mientras que para el caso de la argumentación, tiene una relación de justificación y debe cumplir con la restricción de relevancia.

Tipos de razonamiento

Las dos formas de razonamiento generalmente consideradas son el razonamiento inductivo y el razonamiento deductivo, sin embargo, Peirce citado por Fernández (2005) establece que, además de estos dos tipos de razonamiento, existe también el razonamiento abductivo.

Peirce define la abducción como el razonamiento que se presenta cuando, a partir de unos hechos que precisan una explicación, se adopta una teoría en forma de hipótesis, que en caso de ser verdadera implica la verdad de los hechos.

El razonamiento deductivo se puede definir como un proceso sistemático en el cual, por medio de las leyes de la lógica formal, se pasa de unas proposiciones a otras. Dicho proceso se centra en la forma como se razona, que es considerada independiente al contenido sobre el cual se razona. (Cortina, Espeleta y Fernández, 2010). Se podría afirmar que la deducción da una completa certeza de la conclusión ya que esta se deriva por consecuencia lógica de las premisas, en caso de que sean verdaderas.

Con relación al razonamiento inductivo Cañadas (2007) afirma que este corresponde a una forma de pensar por medio de la cual se producen conclusiones (afirmaciones) que están sustentadas por casos particulares y está relacionado con acciones como la identificación de patrones, la formulación de conjeturas y la generalización.

Desde una perspectiva más general, el razonamiento inductivo se puede concebir como un problema abierto de la filosofía que involucra las ciencias naturales, por su parte el razonamiento deductivo, cumple las leyes de la lógica a tal punto que, resulta imposible que las premisas sean verdaderas a menos que la conclusión también lo sea. (González, Soto y Padilla, 2010)

La argumentación en la enseñanza de las matemáticas

Debido a la influencia que históricamente han tenido las diversas escuelas de pensamiento sobre el proceso de enseñanza y particularmente sobre la clase de matemáticas, es usual que el docente se limite a intentar transmitir verdades matemáticas en un lenguaje axiomatizado, difícil de comprender por el estudiante y que se presenta como abstracto, lejano e incomprensible para él. (Jiménez, 2013)

Lo anterior trae como consecuencia el hecho de que el estudiante se convierta únicamente en un receptor de información, al que no se le da oportunidad de relacionar el contexto con el saber matemático y tampoco se le brindan las condiciones para desarrollar las habilidades argumentativas.

En éste sentido, Crespo (2014) afirma, con relación al pensamiento deductivo, es decir a la demostración matemática, que este se va desarrollando lentamente a lo largo de la escuela, aunque, en algunos casos, no se llega a desarrollar completamente. Lo anterior implica que un gran número de los estudiantes presenten dificultades a la hora de enfrentarse a una demostración.

Por lo tanto, surge la necesidad de generar espacios en el aula que le permitan al estudiante poner en evidencia sus razonamientos de formas diversas. En este sentido, Duval (1999) indica que la comunicación y las interacciones sociales, juegan un papel importante en la adquisición de conocimiento. Por lo que se puede concluir que el trabajo en grupo constituye un espacio para la argumentación puesto que permite el intercambio y la discusión de ideas, facilitando la construcción de significado de los conceptos matemáticos.

Perry, citado por Jiménez (2010) afirma que, los estudiantes, mediante el intercambio oral y escrito con sus compañeros y profesor, pueden dotar de significado las ideas matemáticas involucradas, junto con el vocabulario especializado y convertirlas en objeto de reflexión, perfeccionamiento, discusión y rectificación.

1.1.2 Aspectos teóricos relacionados con el componente numérico

A continuación, se presenta una síntesis de la construcción axiomática de los números naturales y enteros basada en Gordillo, Jiménez y Rubiano (2004), se incluye además la definición del conjunto de los números racionales, sus operaciones y propiedades.

Números naturales

La construcción axiomática de los números naturales a partir de los axiomas de Peano no se centra en la discusión sobre qué es un número natural sino en la manera como los números naturales se relacionan entre si y son las reglas del juego de sus interacciones las que determinan su naturaleza. (Luque, 2002). Esta construcción axiomática parte de conceptos primitivos que se asumen como válidos, a partir de los cuales se dan definiciones y, combinando axiomas y definiciones se llega a las proposiciones (lemas, corolarios, escolios, …) que, cuando resultan centrales en el desarrollo de alguna teoría, se llaman Teoremas (Labarca, 2010)

La síntesis presentada a continuación expone los axiomas de Peano, hace algunas aclaraciones y propone la definición de la adición y del producto de números naturales junto con los teoremas que sustentan las propiedades.

Se considera conceptos primitivos de los números naturales: “cero” (denotado por 0), “número natural” (denotado $\mathbb{N}$), y la relación binaria “es sucesor de” (denotada n^+) que verifican los axiomas siguientes:

Axiomas de Peano

Axioma 1 $0 \in \mathbb{N}$

Axioma 2 Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un único elemento $n^+ \in \mathbb{N}$ llamado el sucesor de n .

Axioma 3 Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n^+ \neq 0$.

Axioma 4 Si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n^+ = m^+$ entonces $n = m$.

Axioma 5 Si S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal qué $0 \in S$ y $n^+ \in S$ siempre que $n \in S$, entonces $S = \mathbb{N}$.

Con relación a los axiomas anteriores es conveniente hacer las siguientes aclaraciones:

1. El Axioma 3 establece la existencia de un primer número natural que es 0 .
2. El Axioma 4 indica que números naturales diferentes tienen sucesores diferentes, esto garantiza que el conjunto de los números naturales es infinito.
3. El Axioma 5 corresponde al Principio de Inducción Matemática PIM, que es el que permite demostrar las propiedades de los números naturales con respecto a las operaciones suma, y multiplicación y el orden.

Definición 1: La adición de números naturales se define mediante las siguientes proposiciones, para todo $n, m \in \mathbb{N}$

$$m + 0 = m$$

$$m + n^{+} = (m + n)^{+}$$

La adición es así una operación bien definida (unívocamente definida), es decir la adición de números naturales es siempre un número natural.

La adición de números naturales cumple la propiedad asociativa

Teorema 1**:**

Para todo $n, m, k \in \mathbb{N}$, se tiene que $(n + m) + k = n + (m + k)$

Demostración:

Sea $S = \left\{ k \in \mathbb{N} / (n + m) + k = n + (m + k)\, para\ todo\ n, m \in \mathbb{N} \right\}$

(i) $0 \in S$ porque $(n + m) + 0 = n + m = n + (m + 0)$ por la definición de suma.

(ii) Asumimos que $k \in S$ para demostrar que $k^{+} \in S$, es decir que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que $(n + m) + k = n + (m + k)$, entonces $(n + m) + k^{+} = \left[(n + m) + k \right]^{+}$ por la definición de suma, $\left[(n + m) + k \right]^{+} = \left[n + (m + k) \right]^{+}$ por la hipótesis de inducción, $\left[n + (m + k) \right]^{+} = n + (m + k)^{+}$ por la definición de suma y $n + (m + k)^{+} = n + (m + k^{+})$ por la definición de suma.

Como $0 \in S$ y si $k \in S$ entonces $k^{+} \in S$ para cualquier k , por el PIM se concluye que $S = \mathbb{N}$

A continuación, se enuncian dos lemas que permiten demostrar la propiedad conmutativa de la adición en naturales. La demostración de dichos lemas se puede consultar directamente en el texto citado.

Lema 1: Para todo $m \in \mathbb{N}, 0 + m = m$

Lema 2: Para todo $m, n \in \mathbb{N}, m^{+} + n = (m + n)^{+}$

La adición de números naturales cumple la propiedad conmutativa

Teorema 2

Para todo $m,n \in \mathbb{N}$, $m+n=n+m$

Demostración

Sea $S=\{n \in \mathbb{N} / m+n=n+m \ \ para \ todo \ m \in \mathbb{N}\}$

(i) $0 \in S$ porque $m+0=m=0+m$

(ii) Asumimos que $n \in S$ para demostrar que $n^{+} \in S$. Entonces para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene que si $m+n^{+}=(m+n)^{+}$ por la definición de adición, $(m+n)^{+}=(n+m)^{+}$ por la hipótesis de inducción y $(n+m)^{+}=n^{+}+m$ por el lema 2.

Como $0 \in S$ y si $n \in S$ entonces $n^{+} \in S$ para cualquier n, por el PIM se concluye que $S=\mathbb{N}$

La adición de números naturales cumple la propiedad modulativa, que está garantizada gracias a la definición de adición y al lema 1 anteriormente expuesto.

Teorema 3:

Para todo $m \in \mathbb{N}$ se verifica que $0+m=m+0=m$

La adición de números naturales cumple la propiedad cancelativa

Teorema 4:

Si $m,n,k \in \mathbb{N}$ tales que $m+k=n+k$ entonces $m=n$

Demostración

Sea $S=\{k \in \mathbb{N} / si \ \ m+k=n+k \ \ entonces \ \ m=n \ \ para \ todo \ m,n \in \mathbb{N}\}$

(i) $0 \in S$ porque si $n,m \in \mathbb{N}$ y $m+0=n+0$, se concluye por la definición de adición que $m=n$

(ii) Asumimos que $k \in S$ para demostrar que $k^+ \in S$, es decir que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que si $m + k^+ = n + k^+$ entonces, por la definición de suma $(m+k)^+ = (n+k)^+$, por el axioma 4 $m+k = n+k$ y por la hipótesis de inducción $m = n$

Como $0 \in S$ y si $k \in S$ entonces $k^+ \in S$ para cualquier k, por el PIM se concluye que $S = \mathbb{N}$

Definición 2:. La multiplicación de números naturales se define mediante las siguientes proposiciones para todo $n, m \in \mathbb{N}$

$$m0 = 0$$

$$mn^+ = mn + m$$

La multiplicación es así una operación bien definida (unívocamente definida), es decir el producto de números naturales es siempre un número natural

El producto de números naturales es distributivo con respecto a la adición

Teorema 5:

Para todo $m, n, k \in \mathbb{N}$ se verifica que $m(n+k) = mn + mk$

Demostración

Sea $S = \left\{ k \in \mathbb{N} \,/\, m(n+k) = mn + mk \;\; para \;\; todo \;\; m, n \in \mathbb{N} \right\}$

(i) $0 \in S$ porque, por la definición de adición $m(n+0) = mn$ y $mn = mn + 0$, por la definición de producto $mn + 0 = mn + m0$.

(ii) Asumimos que $k \in S$ para demostrar que $k^+ \in S$, entonces para todo $m, n \in \mathbb{N}$ $m(n+k^+) = m(n+k)^+$ por la definición de adición, $m(n+k)^+ = m(n+k) + m$ por la definición de producto, $m(n+k) + m = (mn + mk) + m$ por la hipótesis de inducción, $(mn + mk) + m = mn + (mk + m)$ por el teorema 1 y $mn + (mk + m) = mn + mk^+$ por la definición de producto.

Como $0 \in S$ y si $k \in S$ entonces $k^+ \in S$ para cualquier k, por el PIM se concluye que $S = \mathbb{N}$

A continuación, se enuncian y demuestran dos lemas, los cuales permiten probar la propiedad conmutativa del producto en naturales.

Lema 3: Para todo $m \in \mathbb{N}$, se verifica que $0m = 0$

Demostración

Sea $S = \{m \in \mathbb{N} / 0m = 0\}$

(i) $0 \in S$ porque $0 \cdot 0 = 0$ por la definición de producto.

(ii) Asumimos que $m \in S$ para demostrar que $m^+ \in S$. Entonces $0 \cdot m^+ = (0 \cdot m)^+$ por definición de producto y $(0 \cdot m)^+ = 0^+$ por la hipótesis inductiva.

Como $0 \in S$ y si $m \in S$ entonces $m^+ \in S$ para cualquier m, por el PIM se concluye que $S = \mathbb{N}$

Lema 4: Para todo $m, n \in \mathbb{N}$ se verifica que $m^+ n = mn + n$

Demostración

Sea $S = \{n \in \mathbb{N} / m^+ n = mn + n \ \ para\ todo\ m \in \mathbb{N}\}$

(i) $0 \in S$ porque $m^+ \cdot 0 = 0$ por la definición de producto y $0 = m \cdot 0 + 0$ por la definición de suma

(ii) Asumimos que $n \in S$ para demostrar que $n^+ \in S$. Entonces $m^+ n^+ = m^+ n + m^+$ por la definición de producto, $m^+ n + m^+ = mn + n + m^+$ por la hipótesis inductiva, $mn + n + m^+ = (mn + n + m)^+$ por la definición de adición, $(mn + n + m)^+ = (mn + m + n)^+$ aplicando la propiedad conmutativa de la adición (Teorema 2), $(mn + m + n)^+ = (mn^+ + n)^+$ por la definición de producto y $(mn^+ + n)^+ = mn^+ + n^+$, por la definición de adición.

Como $0 \in S$ y si $n \in S$ entonces $n^{+} \in S$ para cualquier n, por el PIM se concluye que $S = \mathbb{N}$

Teorema 6

Para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $mn = nm$

Sea $S = \left\{ n \in \mathbb{N} / mn = nm \;\; para \;\; todo \;\; m \in \mathbb{N} \right\}$

(i) $0 \in S$ porque $m \cdot 0 = 0 = 0 \cdot m$ por la definición de adición y por el lema 3.

(ii) Asumimos que $n \in S$ y demostramos que $n^{+} \in S$. Entonces $mn^{+} = mn + m$ por la definición de producto, $mn + m = nm + m$ aplicando la hipótesis inductiva y $nm + m = n^{+}m$ aplicando el lema 4.

Como $0 \in S$ y si $n \in S$ entonces $n^{+} \in S$ para cualquier n, por el PIM se concluye que $S = \mathbb{N}$

Orden en los números naturales

Definición 3: Dados m , n $\in \mathbb{N}$ se tiene que $m \leq n$ si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.

La relación anteriormente definida satisface las propiedades siguientes, por lo cual establece un orden sobre $\mathbb{N}$.

Teorema 7:

Para todo $n, m, k \in \mathbb{N}$, se tiene que

(a)	$m \leq m$ para todo $m \in \mathbb{N}$	Propiedad reflexiva
(b)	si $m \leq n$ y $n \leq m$ entonces $m = n$	Propiedad antisimétrica
(c)	Si $m \leq n$ y $n \leq k$ entonces $m \leq k$	Propiedad transitiva

Para ilustrar se incluye a continuación la demostración de la propiedad transitiva que cumple la relación de orden para los números naturales (propiedad c)

Demostración

Debemos demostrar que si $m \leq n$ y $n \leq k$ entonces $m \leq k$. Por hipótesis se tiene que $m \leq n$ y $n \leq k$, por definición de orden en los naturales $n = m + p_1$ y $k = n + p_2$, sustituyendo n en k se obtiene $k = m + p_1 + p_2$, aplicando la propiedad asociativa de la adición en naturales la anterior expresión se puede escribir como $(m + p_1) + p_2 = m + (p_1 + p_2)$, es decir que $k = m + p$ con $p \in \mathbb{N}$, luego $m \leq k$.

Números enteros

A cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \neq 0$, se asocia un símbolo $-n$, de tal forma que ningún $-n$ coincide con un número natural.

Definición 4: El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, es la unión del conjunto de los $-n$ con los números naturales.

$$\mathbb{Z} = \{-n \,/\, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\} \cup \mathbb{N}$$

La adición de números enteros está dada por las siguientes reglas:

(1) Si x, y pertenecen a los naturales, $x + y$ corresponde a la definición de suma en $\mathbb{N}$.

(2) Para todo $x \in \mathbb{Z}$ se define $x + 0 = 0 + x = x$

(3) Si $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \neq 0, n \neq 0$ y $m = n + k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, se define

(a). $m + (-n) = (-n) + m = k$

(b). $(-m) + n = n + (-m) = -k$, si $k \neq 0$ o $(-m) + n = n + (-m) = 0$, si $k = 0$

(c). $(-m) + (-n) = -(m + n)$

Se observa que dados x, y donde al menos uno de ellos no es un número natural, $x + y$ está definida por alguna de las alternativas (a), (b), (c).

La adición de enteros cumple las siguientes propiedades

Teorema 8

Dados $x, y, z \in \mathbb{Z}$ se verifica que

(1). $(x+y)+z = x+(y+z)$	Propiedad asociativa
(2). $x+y = y+x$	Propiedad conmutativa
(3). $x+0 = 0+x = x$	Propiedad modulativa
(4). Existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que $x+y=0$	Propiedad del opuesto aditivo

A continuación, a modo de ilustración, se presentan las demostraciones de la propiedad conmutativa y del opuesto aditivo.

CONMUTATIVA

Demostración

Debemos demostrar que dados $x, y \in \mathbb{Z}$, se verifica que $x+y = y+x$. Existen tres casos posibles, los cuales serán abordados de forma individual.

(i) Si $x, y \in \mathbb{N}$ entonces $x+y = y+x$ por el teorema 2, que corresponde a la propiedad conmutativa de la adición en naturales.

(ii) Si $x \in \mathbb{N}$, $y \notin \mathbb{N}$ se tiene entonces que $y = -n$ para algún $n \in \mathbb{N}$; se observa que $x+y = x+(-n)$, por la regla b de la adición en enteros se verifica que $x+(-n) = (-n)+x$ y sustituyendo $-n$ por y se obtiene $(-n)+x = y+x$.

(iii) Si $x, y \notin \mathbb{N}$ entonces $x = -m, y = -n$ para algunos $m, n \in \mathbb{N}$; se observa que $x+y = (-m)+(-n)$, por la definición c de la adición en enteros se verifica que $(-m)+(-n) = -(m+n)$, aplicando el teorema 2 que corresponde a la propiedad conmutativa de la suma en naturales se obtiene $-(m+n) = -(n+m)$, aplicando nuevamente la propiedad c $-(n+m) = (-n)+(-m)$ y teniendo en cuenta que $x = -m, y = -n$ se llega a $(-n)+(-m) = y+x$

OPUESTO ADITIVO

Demostración

Debemos probar que para todo $x \in \mathbb{Z}$ existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que $x + y = 0$, por la regla (3) de la adición en enteros $x + 0 = x$, es decir $x = x + 0$, para $x \in \mathbb{N}$ y por la regla b $x + (-x) = 0$, tomando $y = -x$ se tiene que $x + y = y + x = 0$ para $x = -n$

El producto de números naturales está definido por las siguientes reglas

(1) Dados x, y números enteros, si $x, y \in \mathbb{N}$ se usa la definición de la multiplicación en los naturales.

(2) Para todo $x \in \mathbb{Z}$, definimos $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

(3) Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $m, n \neq 0$ se define

(a) $(-m)n = n(-m) = -(mn)$

(b) $(-m)(-n) = mn$

Se observa que dados $x, y \neq 0$, donde al menos uno de ellos es natural, xy está definido por alguna de las alternativas (a), (b) o (c).

El producto de enteros definido anteriormente cumple las siguientes propiedades.

Teorema 9: Dados $x, y, z \in \mathbb{Z}$

(1)	$(xy)z = x(yz)$	Propiedad asociativa
(2)	$xy = yz$	Propiedad conmutativa
(3)	$x1 = x$	Propiedad modulativa
(4)	$x(y + z) = xy + xz$	Propiedad distributiva
(5)	Si $x \neq 0$, $y \neq 0$ entonces $xy \neq 0$	
(6)	Si $xz = yz$, para $z \neq 0$ entonces $x = y$	

A manera de ilustración se presenta la demostración de las propiedades conmutativa y modulativa.

CONMUTATIVA

Demostración

Se debe demostrar que dados $x, y \in \mathbb{Z}$, se verifica que $xy = yx$. Nuevamente se observa que existen tres casos posibles, los cuales serán abordados.

(i) Si $x, y \in \mathbb{N}$ se observa que $xy = yx$ aplicando el teorema 6

(ii) Si $x \in \mathbb{N}$, $y \notin \mathbb{N}$, $y = -n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $xy = x(-n)$ por la regla (3) opción (c) del producto en enteros se observa que $x \cdot (-n) = -(x \cdot n)$, aplicando el teorema 6 de la propiedad conmutativa del producto en naturales se obtiene $-(x \cdot n) = -(n \cdot x)$ y aplicando nuevamente la regla (3) opción (c) del producto en enteros se llega a $-(n \cdot x) = (-n)x$ y sustituyendo $y = -n$, $(-n)x = yx$.

(iii) Si $x, y \notin \mathbb{N}$ entonces $x = -m, y = -n$ para algunos $m, n \in \mathbb{N}$, se obtiene $xy = (-m)(-n)$, por la regla (3) opción (b) del producto en enteros esto es equivalente a $(-m)(-n) = mn$ con $m, n \in \mathbb{N}$, aplicando el teorema 6 de la conmutatividad el producto en naturales se puede afirmar que $mn = nm$, aplicando nuevamente la regla (3) opción (b) del producto en enteros $nm = (-n)(-m)$ y sustituyendo $x = -m, y = -n$ se llega a $(-n)(-m) = yx$

MODULATIVA

Demostración

Se debe demostrar que para todo $x \in \mathbb{Z}$ $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ para lo cual se deben analizar dos casos posibles.

(i) Si $x \in \mathbb{N}$ se tiene por propiedad modulativa de los naturales que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ aplicando la conmutatividad del producto en naturales.

(ii) Si $x \notin \mathbb{N}$, $x = -n$ para algún $n \in \mathbb{N}$,entonces $x \cdot 1 = (-n) \cdot 1$, por la regla (3) opción (b) del producto en naturales se tiene que $(-n) \cdot 1 = -(n \cdot 1)$, aplicando la propiedad modulativa del producto en naturales $-(n \cdot 1) = -(n)$ sustituyendo $x = -n$ se llega a $-(n \cdot 1) = -(n)$

Orden en los números enteros

Definición 6: Dado un conjunto ordenado $(A,\leq)$, la relación $\leq$ establece un orden total en A, si dados $m,n\in A$ se tiene que $m\leq n$ o $n\leq m$.

Definición 7: Sean $x,y\in\mathbb{Z}$, se tiene que $x-y=x+(-y)$.

Definición 8: Sean $x,y\in\mathbb{Z}$, se define la relación de orden $x\leq y$ si y solo si $y-x\in\mathbb{N}$.

El orden definido en $\mathbb{Z}$ es una relación de orden total, compatible con la suma y la multiplicación y verifica las siguientes propiedades:

Teorema 7: Para todo $x,y,w,z\in\mathbb{Z}$ se tiene que

(1) Si $x,y\in\mathbb{Z}^+$ entonces $x+y\in\mathbb{Z}^+$ y $xy\in\mathbb{Z}^+$.

(2) Se verifica una y solo una de las afirmaciones siguientes: $x<y$, $x=y$, $y<x$.

(3) Si $x\leq y$ entonces $x+z\leq y+z$

(4) Si $x\leq y$ y $z\leq w$ entonces $x+z\leq y+w$

(5) Si $x\leq y$ y $z>0$ entonces $xz\leq yz$

(6) Si $x\leq y$ y $z<0$ entonces $yz\leq xz$

A manera de ilustración se presenta la demostración de la propiedad (4) del orden en los números enteros.

Demostración

Si $x\leq y$ y $z\leq w$ entonces por la definición de orden en los enteros se verifica que $y-x\in\mathbb{N}$ y $w-z\in\mathbb{N}$, teniendo en cuenta que por la definición, la suma de naturales es natural, si sumamos las dos igualdades anteriores se tiene que $(y-x)+(w-z)\in\mathbb{N}$, aplicando la propiedad conmutativa de la adición en naturales (teorema 2) se obtiene $(y-x)+(w-z)=(y+w)+(-x-z)$ lo que se puede escribir como

$(y-x)+(w-z)=(y+w)-(x+z)$ y aplicando la definición de orden se concluye que $x+z \leq y+w$

De forma adicional a lo que presentado anteriormente sobre los números enteros, se puede consultar una definición constructiva de los enteros usando clases de equivalencia de parejas de números naturales en Dubisch y Weiss (2003).

Números Racionales

Definición 9: Los números racionales se definen a partir de los números enteros como se indica a continuación:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

Definición 10: Dados $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ $\in \mathbb{Q}$ entonces $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ con $b, d \neq 0$

La adición así definida satisface las siguientes propiedades

Teorema 8: Dados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ se tiene que

(1) $\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}$ Propiedad asociativa

(2) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$ Propiedad conmutativa

(3) $\frac{a}{b}+0=0+\frac{a}{b}$ Propiedad modulativa

(4) $\frac{a}{b}+\left(\frac{-a}{b}\right)=0$ Existencia del inverso aditivo

A manera de ilustración se presenta a continuación la demostración de la propiedad conmutativa de la adición en racionales (propiedad 2)

Demostración

Dados $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ con $b,d \neq 0$ se tiene que, por la definición de adición en $\mathbb{Q}$ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$, aplicando la propiedad conmutativa de la adición en enteros $\frac{ad+bc}{bd}=\frac{bc+ad}{bd}$, por la conmutatividad del producto en enteros $\frac{bc+ad}{bd}=\frac{cb+da}{db}$ y por la definición de adición en $\mathbb{Q}$ $\frac{cb+da}{db}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$, se concluye entonces que $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$.

Definición 11: Dados $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ $\in \mathbb{Q}$ entonces $\frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ con $b,d \neq 0$

El producto de números racionales así definido cumple las siguientes propiedades

Teorema 9: Dados $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ se tiene que

(1) $\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\frac{c}{d}\right)\frac{e}{f}$ Propiedad asociativa

(2) $\frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\frac{a}{b}$ Propiedad conmutativa

(3) $\frac{a}{b}\cdot 1=1\cdot\frac{a}{b}$ Propiedad modulativa

(4) $\frac{a}{b}\frac{b}{a}=1$ Existencia del inverso multiplicativo

A manera de ilustración se presenta a continuación la demostración de la propiedad asociativa del producto de racionales (propiedad 1)

Demostración

Dados $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ con $b,d \neq 0$ se tiene por la definición de producto en los racionales $\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\left(\frac{ce}{df}\right)$ y $\frac{a}{b}\left(\frac{ce}{df}\right)=\frac{a(ce)}{b(df)}$ aplicando la propiedad asociativa del producto en naturales $\frac{a(ce)}{b(df)}=\frac{(ac)e}{(bd)f}$, por la definición de producto en los racionales $\frac{(ac)e}{(bd)f}=\frac{(ac)}{(bd)}\frac{e}{f}$ y $\frac{(ac)}{(bd)}\frac{e}{f}=\left(\frac{a}{b}\frac{c}{d}\right)\frac{e}{f}$, se concluye entonces que $\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\frac{c}{d}\right)\frac{e}{f}$.

Orden en los números racionales

Dados $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ y teniendo en cuenta que $(\mathbb{Z},\leq)$ es un orden total, se verifica que los productos ad y cb cumplen la relación $\leq$ y en consecuencia $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ están relacionados por la relación de orden $\leq$ en $\mathbb{Q}$, como sigue:

Definición 12: Dados dos números racionales $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$,tales que $b>0$ y $d>0$ se tiene que $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$ sí y solo si $ad \leq bc$.

La relación de orden en los números racionales anteriormente definida es compatible con la adición y la multiplicación y cumple las siguientes propiedades:

Teorema 10: Dados $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}\in\mathbb{Q}$ se cumple que

(1)	$\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$ o $\frac{c}{d}\leq\frac{a}{b}$	Orden total
(2)	$\frac{a}{b}\leq\frac{a}{b}$	Propiedad reflexiva
(3)	Si $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$ y $\frac{c}{d}\leq\frac{a}{b}$ entonces $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$	Propiedad antisimétrica

(4) Si $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ y $\frac{c}{d} \leq \frac{e}{f}$ entonces $\frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$ Propiedad transitiva

(5) Si $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} \leq \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$

(6) Si $0 \leq \frac{a}{b}$ y $0 \leq \frac{c}{d}$ entonces $0 \leq \frac{a}{b}\frac{c}{d}$

Para ilustrar se presenta la demostración de la propiedad 5 del orden en los racionales

Demostración

Dados $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ con $b, d \neq 0$ se tiene que $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ lo cual implica por la definición del orden en los racionales que $ad \leq bc$, por la propiedad (5) del teorema 7 $adf^2 \leq bcf^2$, por la propiedad (3) del teorema 7 $adf^2 + bdef \leq bcf^2 + bdef$,lo cual es equivalente a $df(af + df) \leq bf(cf + de)$, por la definición de orden $\frac{af + be}{bf} \leq \frac{cf + de}{df}$, por la definición de suma en los racionales esto se puede escribir como $\frac{af}{bf} + \frac{be}{bf} \leq \frac{cf}{df} + \frac{de}{df}$ lo que equivale a $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} \leq \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$.

1.1.3 Aspectos relacionados con la matemática escolar

El propósito de este aparte es mostrar rasgos característicos del pensamiento numérico, que determinan la manera como los aspectos matemáticos teóricos, anteriormente referidos, son llevados al aula y sirven de orientación para establecer las formas de desarrollar la competencia matemática razonamiento y argumentación en dicho componente.

Para tal fin, a continuación, se presenta una síntesis de algunas descripciones de este pensamiento y sus sistemas de representación, los contextos numéricos que posee y las funciones cognitivas asociadas a él.

Finalmente, se mencionan algunos de los planteamientos del MEN (Lineamientos Curriculares de matemáticas) respecto a los dominios, procesos y contextos a privilegiar a través de este pensamiento.

El pensamiento numérico

El pensamiento numérico está relacionado con todos aquellos significados que el ser humano, a través de procesos cognitivos, asigna haciendo uso de las estructuras numéricas (Rico, 1996). Desde el punto de vista de los conceptos, pensamiento y número, que lo componen, se puede definir como un proceso de creación de la mente, relacionado con el número.

El proceso que está detrás del pensamiento numérico está presente, no solo en el ámbito escolar si no en el ámbito social, ya que son múltiples las actividades que realiza el ser humano, para las cuales requiere, por ejemplo, desarrollar cálculos mentales de manera apropiada, tomar decisiones usando como parámetro valores numéricos, comprender la magnitud de los números, entre otros.

Castro (2009) define pensamiento numérico como todo aquello que la mente puede hacer con los números y que está ligado al pensamiento relacional, al pensamiento cuantitativo flexible y al sentido numérico. El pensamiento relacional entendido como el proceso de conectar ideas matemáticas simples para concluir ideas matemáticas de mayor complejidad. El pensamiento cuantitativo flexible como la acción de seleccionar, de entre diferentes modos de actuación relacionados con situaciones cuantitativas, el más favorable y eficaz.

Castro define además, en el documento citado, el sentido numérico como una forma especial de pensar sobre los números, que genera una comprensión más profunda sobre ellos y sobre las operaciones, presente en todos los seres humanos pero con diferentes niveles de desarrollo y que se caracteriza por aspectos como componer y descomponer números según sea necesario, reconocer la utilidad de una representación y usarla, detectar errores aritméticos, hacer operaciones con números siguiendo métodos diferentes a la repetición mecánica, entre otros.

Desde una perspectiva más general, el pensamiento numérico se debería considerar como una forma de pensamiento superior, con características como: ser no algorítmico, con tendencia a ser complejo y ofrecer soluciones múltiples. Se relaciona además con la necesidad de juzgar e interpretar, el uso de múltiples criterios, la incertidumbre, la autorregulación de los procesos de pensamiento, la imposición del significado, y un considerable trabajo mental en el tipo de elaboración y juicios que se requieren. (Resnick citado por Obando y Vásquez, 2008)

Rico (2009) propone un marco conceptual para el pensamiento numérico enmarcado en los sistemas simbólicos estructurados que requiere, las funciones cognitivas que implica y el campo de actuación.

Sistemas de representación del pensamiento numérico

Las representaciones matemáticas son estructuras mediante las cuales, las personas conectan los objetos mentales con los objetos matemáticos, permiten expresar conceptos y leyes matemáticas mediante símbolos o gráficas, así como convertir expresiones de un modo de representación a otro. Pueden ser internas, como objetos del pensamiento ubicados en la mente del sujeto o externas, de carácter semiótico, como signos, símbolos o gráficos (Castro, Rico y Romero, 2000).

En cuanto al papel de las representaciones en matemáticas, Duval (2012) afirma que la producción de representaciones semióticas es el único acceso posible a los objetos matemáticos, ya que no se puede hacer uso de la percepción o de instrumentos con los que sí pueden contar otras ciencias. Las representaciones semióticas determinan el funcionamiento cognitivo que permite comprender las matemáticas.

Rico (1996) pone de manifiesto la riqueza de la noción de representación en el componente numérico a partir del sencillo ejercicio de contrastar las diferentes, imágenes, notaciones, dibujos, frases y símbolos que una persona puede plasmar en una hoja en blanco, asociadas a un mismo número. Dichas representaciones dependen de la formación matemática y el manejo profesional o cotidiano de los números, son múltiples, diversas y se pueden clasificar en representaciones digitales y representaciones analógicas.

Las representaciones digitales son discretas, de carácter alfanumérico y se sintetizan a partir de una serie de reglas de procedimiento, por lo cual se pueden simular mediante un programa. Las analógicas, por el contrario, son continuas y de tipo gráfico o figurativo y se sintetizan mediante reglas de composición y convenios de interpretación.

Con relación a la representación, para el conjunto de los números naturales, el mismo autor afirma que el sistema de numeración decimal es una herramienta que ha evolucionado a través de la historia permitiendo el desarrollo de las habilidades de contar, clasificar, medir y ordenar y que por ser un hecho cultural básico, existe la necesidad, para todos los sistemas educativos de favorecer el aprendizaje de esta forma de representación, en la que se identifica cada uno de los números con su notación decimal básica y a los naturales con la secuencia numérica.

De igual forma este autor hace referencia a otras formas de representación como el análisis aritmético del número, la representación gráfica en la recta numérica y los números figurados y concluye que el análisis aritmético de los números naturales pone de manifiesto las relaciones mutuas entre ellos, ya que permite considerar cada número como una suma o como producto de números más sencillos. Por ejemplo, el análisis aritmético del número 12 va más allá de considerarlo simplemente como dos unidades y una decena y permite representarlos como la suma de tres números consecutivos, 3+4+5, o el producto de dos números, 6x2.

De igual forma, es de tener en cuenta que la recta numérica es una representación gráfica estándar y un artefacto útil, cuyo empleo para el dominio de los números naturales ha sido estudiado en detalle. Sobre una recta numérica, se eligen dos puntos arbitrarios a los que se les asigna los valores 0 y 1, 1 situado a la derecha del punto que corresponde a cero (Resnick como se citó en Castro, Rico y Romero, 2000)

Con relación a las configuraciones puntuales, Castro, Rico y Romero (2000) afirman que son utilizadas para representar los números figurados y que tienen su origen en la escuela pitagórica. Para los pitagóricos la utilidad del número no consistía únicamente en servir de etiqueta para una colección, simbolizar una cantidad o ser una construcción intelectual, sino algo que poseía consistencia propia. Esta noción de número encontró un sistema de representación propio, las configuraciones puntuales, cuya idea fundamental es considerar cada número como un agregado de puntos o unidades que se distribuyen sobre una trama rectangular o isométrica.

Los contextos numéricos de los números naturales

Rico (1997) indica que un contexto numérico es un marco estructural en el que el número es un instrumento de conocimiento que cumple una determinada función. Son varios los contextos numéricos de los números naturales, entre los que podemos encontrar, el de contar, el de cardinal, los de medida, los ordinales, los operacionales y los simbólicos.
A continuación, se resume la caracterización que proporciona dicho autor sobre cada uno de los contextos mencionados y la función que tiene el número dentro de cada uno.

Tabla 1-1 Contextos numéricos de los números naturales

Contexto	Características	Función
Contar	Se asignan los términos de la secuencia numérica a los objetos de una colección	Marca el inicio del aprendizaje de los números en nuestra cultura.
Cardinal	Un número natural describe la cantidad de elementos de un conjunto bien definido de objetos discretos.	Responde a la pregunta ¿Cuántos hay?
Medida	Permite conocer la cantidad de unidades de alguna magnitud continua	Responde a la pregunta ¿Cuánto mide? (En el caso en que la unidad de medida cabe un número exacto de veces)
Ordinal	Corresponde a la posición relativa de un elemento en un conjunto discreto y ordenado	Responde a la pregunta ¿Qué lugar ocupa?
Operacional	Ofrecen un modelo para determinadas acciones como agregar, separar, reiterar, repartir y permiten establecer relaciones de comparación e igualación.	Responde a la pregunta ¿Cuál es el resultado?

Funciones cognitivas asociadas al pensamiento numérico.

El estudio sobre el origen de nuestra capacidad para pensar el mundo en términos de números se basa en comprender la forma que adopta su representación interna y las características de su procesamiento, que se reflejan en los tiempos de reacción frente a tareas vinculadas a estímulos numéricos, cuyo estudio ha permitido identificar los fenómenos que se presentan a continuación: el efecto distancia, el efecto tamaño y la ordenación espacial numérica o efecto SNARC (Spatial Numerical Association of Response Codes). (Alonso, 2001)

El efecto distancia se refiere al hecho de que, cuando se comparan dos números, el tiempo necesario para distinguir el mayor del menor, disminuye al incrementarse la distancia entre los números, por lo que se tarda menos en decidir sobre 2 y 24 que sobre 96 y 95. El efecto de tamaño, por su parte, consiste en que, ante igual distancia numérica, la comparación nos es más difícil cuando más aumentan los valores numéricos, por tanto, es más difícil la discriminación entre 39 y 37 que entre 6 y 7. (Moyer y Landauer como se citó en Fernández 2010)

El efecto SNARC se descubrió a través de experimentos en los que el participante debía juzgar la naturaleza par o impar de dígitos, midiendo el tiempo de reacción para ejecutar una respuesta a partir del movimiento de la mano. (Dehaene. Bossini y Girauz, como se citó en Villarroel, 2009)
A través de los anteriores experimentos, se deja en evidencia que la magnitud inherente a un dígito interfiere de manera significativa en la velocidad de juicio sobre la misma y sobre todo, que existe una relación entre orientación espacial y pensamiento numérico. (Villarroel, 2009)

Con relación al desarrollo de las estructuras cognitivas, Castro, Cañadas y Castro (2013) señalan, dentro de las capacidades matemáticas propias del pensamiento numérico, que se pueden desarrollar desde temprana edad, la comparación y equivalencia de cantidades, la subitización y el conteo temprano, el aprendizaje de las palabras de la secuencia numérica, el conteo de objetos, la aritmética temprana y la resolución de problemas.

El pensamiento numérico en los Lineamientos de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional

Este documento toma como base las ideas y posturas relacionadas con el pensamiento numérico según las cuales la utilidad de los números y de los métodos cuantitativos está en comunicar, procesar e interpretar información y su evolución se logra a partir del uso de los números en un contexto significativo.

De acuerdo con los lineamientos, esta evolución se manifiesta en la manera como los estudiantes escogen, desarrollan y usan métodos de cálculo, en la comprensión del significado de los números y sus diferentes interpretaciones y representaciones y en el reconocimiento del valor absoluto. Sostiene además que el contexto mediante el cual se produce el acercamiento a los números puede o no facilitar su comprensión y es determinante para el desarrollo del pensamiento numérico.

El siguiente cuadro resume los aspectos que, de acuerdo con los lineamientos de matemáticas, pueden ayudar a desarrollar el pensamiento numérico a través del sistema de los números naturales.

Tabla 1-2 Aspectos que ayudan a desarrollar el pensamiento numérico

Aspecto	Propósito	Cómo se desarrolla
Comprensión de los números y de la numeración	Dar inicio a la comprensión de los conceptos numéricos, construyendo el significado de los números a partir de sus experiencias en la vida cotidiana.	Dando significado a los números: • Como secuencia verbal • Para contar • Para expresar una cantidad de objetos o como cardinal • Para medir • Para marcar una posición o como ordinal • Como código o símbolo • Como una tecla para pulsar
Comprensión del concepto de cada una de las operaciones	Construir el significado de las operaciones fundamentales de adición, sustracción, multiplicación y división entre números naturales.	• El reconocimiento del significado de cada operación en situaciones concretas, de las cuales emergen. • El reconocimiento de los modelos más usuales y prácticos de las operaciones. • La comprensión de las propiedades matemáticas de las operaciones. • La comprensión del efecto de cada operación y las relaciones entre operaciones.
Cálculos con números	Desarrollar otras estrategias de cálculo además de los algoritmos escritos formales.	• El desarrollo de habilidades para el cálculo mental, la aproximación y la estimación. • La comprensión del algoritmo como algo útil en situaciones de la vida diría. • El desarrollo de patrones de pensamiento.
Aplicaciones de números y operaciones	Resolver problemas del mundo real que requieran razonar con números y tomar decisiones como qué tipo de respuesta es apropiada, qué herramienta de cálculo es eficiente.	• La interpretación de relaciones entre el contexto del problema y el cálculo necesario. • La toma de conciencia de que existen varias estrategias de solución. • La tendencia a usar una representación o método eficiente. • La inclinación a revisar métodos y resultados.

1.2 Marco didáctico

Con el propósito de caracterizar los procesos de razonamiento y argumentación, eje central del presente trabajo, se presenta inicialmente una breve reconstrucción teórica del concepto de competencia y algunas definiciones de competencia matemática. Posteriormente se abordan algunos referentes que orientan sobre la manera como estos procesos se pueden articular con los diferentes componentes o pensamientos.

De igual forma se retoman los lineamientos de las pruebas Saber y Pisa, en los cuales se establecen caracterizaciones muy puntuales sobre los procesos clave que, según cada referente se deben medir y los niveles de desarrollo esperados para la competencia matemática.

Por último, se expone de manera general una metodología para el desarrollo de especificaciones de prueba, utilizada por el ICFES llamada Modelo Basado en Evidencias.

1.2.1 El concepto de competencia

Teniendo en cuenta las diversas elaboraciones teóricas que se pueden encontrar respecto al origen, evolución y caracterización del concepto de competencia, existen diferentes perspectivas desde las cuales se puede abordar dicho concepto, una de ellas consiste en retomar los aportes hechos a éste desde diferentes disciplinas.

Al respecto Tobón (2005) afirma que en este concepto convergen múltiples aportes disciplinares y tendencias económicas y sociales, su origen, según Tobón, está en la lingüística y la psicología conductual. Desde la lingüística, Chomsky, define competencia como “capacidad y disposición para la actuación y la interpretación” (Gallego, 2008). Esta definición da a entender, debido a que relaciona la competencia con una disposición, que existe un componente innato en el ser humano, necesario para desarrollar la competencia lingüística.

Desde la psicología conductual se aborda la competencia como “aquellos desempeños especiales de los trabajadores que le da ventajas competitivas a una empresa” (Tobón, Rial, Carretero y García, 2006). Este enfoque persiste en la actualidad y se caracteriza por querer formar a los individuos para que sean funcionales dentro de un modelo de producción y los prepara para el mundo laboral.

Y desde la perspectiva económica y social, se encuentran planteamientos de diferentes organizaciones internacionales que, buscando orientar y acompañar a los países a partir de la construcción de estándares mundiales, favorecen el enfoque por competencias en educación. La UNESCO, entre ellas, retoma la definición de competencia propuesta por Cecilia Braslavsky, quien plantea que "la competencia consiste en la adquisición de conocimiento a través de la acción, resultado de una cultura de base sólida que puede ponerse en práctica y utilizarse para explicar qué es lo que está sucediendo". Y la OCDE, por su parte, define competencia como "la habilidad que permite superar las demandas sociales o individuales, desarrollar una actividad o una tarea…construida a través de una combinación de actividades prácticas y cognitivas".

Otra forma de abordar el concepto de competencia consiste en retomar algunos autores que han aportado, a lo largo del tiempo, a la construcción de dicho concepto. En orden cronológico, aparecen autores como Philippe Perrenoud, Eliseo Verón, Dell Hymes, Jurgen Habermas, Reuven Feurestein entre muchos otros.

Para Perrenoud la competencia consiste en "una capacidad de actuar de manera eficaz en un tipo definido de situación…que se apoya en conocimientos, pero no se reduce a ellos" (Perrenoud, 2011, p.7). Para Marco (2008) está definición se basa en la transferencia de los aprendizajes, es decir su aplicabilidad en diferentes contextos, la movilización de los conocimientos y las situaciones problema como las que se presentan en la vida diaria

Por su parte Eliseo Verón aporta una definición de competencia, no de modo general si no de modo particular dentro de su disciplina, presentando el concepto de competencia ideológica, la cual, de acuerdo con Pérez (2006), hace referencia a los niveles de organización de los mensajes, desde el punto de vista de sus propiedades semánticas. Para Verón, la competencia ideológica es "el conjunto de maneras específicas de realizar selecciones y organizaciones de un determinado discurso" (Tobón, 2005, p.28)
El aporte de Dell Hymes en cuanto al concepto de competencia tiene que ver con la definición de la competencia comunicativa, que complementa la definición de Chomsky de la competencia lingüística. Para Hymes la competencia comunicativa consiste en la habilidad para utilizar la lengua de manera apropiada según los determinados contextos sociales (López, 2005)

Jurgen Habermas propone la competencia interactiva. De acuerdo con Tobón (2005) con la formulación de esta competencia, Habermans afirma que las competencias tienen una serie de componentes universales que hacen posible que las personas puedan entenderse, además indica que actualmente, esos componentes corresponden al marco de los procesos cognitivos.

Finalmente, aunque no plantea una definición de competencia, Reuven Feurestein ofrece los fundamentos de la competencia cognitiva, de acuerdo con Saavedra (2001) Feurestein se preocupa en sus estudios específicamente por las habilidades de aprender y resolver problemas.

1.2.2 La competencia matemática

Al igual que el concepto de competencia, el de competencia matemática ha sido abordado por varios autores, quienes han contribuido a construir algunas definiciones y a identificar los aspectos que implica el ser matemáticamente competente.

Uno de los autores más citados a la hora de hacer referencia a este concepto es el profesor Mogens Niss, quien, en el año 2002, estuvo a cargo de la publicación de un documento titulado competencias y aprendizaje de las matemáticas cuya intensión fue ahondar en la comprensión y la delimitación de esta competencia; además de construir algunas propuestas para la renovación de la educación matemática en Dinamarca.

En este documento, el autor la define como la “habilidad para entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones en las que las matemáticas juegan o pueden jugar un papel” y propone ocho competencias con el propósito de establecer, de manera más puntual, los conocimientos y habilidades específicas que conllevan al desarrollo de la competencia matemática.
Estas ocho competencias, según propone Niss, se dividen en dos grupos, las que se relacionan con la capacidad de plantear y responder preguntas en y con la matemática y las que se relacionan con la capacidad de utilizar el lenguaje y las herramientas matemáticas.

De igual forma, indica el autor que estas competencias están estrechamente ligadas y que son mutuamente dependientes, además presenta una serie de aspectos que ayudan a comprender la esencia de cada una, los cuales se resumen en el siguiente cuadro:

Tabla 1-3 Competencias matemáticas (Niss, 2002)

Grupo	Competencia	Aspectos que la definen
Relacionadas con la capacidad de plantear y responder preguntas en y con la matemática	1.Pensar matemáticamente	• Plantear preguntas que son características de las matemáticas y conocer los tipos de respuesta que las matemáticas pueden ofrecer. • Comprender el alcance y las limitaciones de un concepto matemático dado. • Ampliar el alcance de un concepto al abstraer algunas de sus propiedades generalizando resultados a clases más grandes de objetos. • Distinguir entre diferentes tipos de declaraciones matemáticas (definiciones, teoremas, conjeturas…)
	2. Plantear y resolver problemas	• Identificar diferentes tipos de problemas matemáticos (puro o aplicado-abierto o cerrado). • Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos (puro o aplicado-abierto o cerrado).
	3. Modelar matemáticamente	• Analizar fundamentos y propiedades de modelos matemáticos existentes, evaluar su rango y validez. • Descifrar modelos matemáticos existentes, es decir, traducir e interpretar elementos del modelo en términos de la realidad modelada. • Realizar modelado activo en un contexto dado, lo cual implica estructurar el modelo, validarlo interna y externamente, analizarlo y criticarlo en sí mismo y frente a otras alternativas, comunicar sobre el modelo y sus resultados y monitorear y controlar todo el proceso de modelado.
	4. Razonamiento matemático	• Seguir y evaluar cadenas de argumentos presentados por otros. • Saber qué es y qué no es una prueba matemática • Descubrir las ideas básicas en una línea de argumentación dada. • Idear argumentos matemáticos formales e informales.
	5. Representar entidades matemáticas (objetos y situaciones)	• Comprensión y utilización de diferentes tipos de representaciones de objetos, fenómenos y situaciones matemáticas. • Comprender y utilizar las relaciones entre las diferentes representaciones de una misma entidad. • Elegir representaciones y pasar de una forma de representación a otra.

Relacionadas con la matemática y las que se relacionan con la capacidad de utilizar el lenguaje y las herramientas matemáticas	6.Manejo de símbolos y formalismos matemáticos	• Descifrar e interpretar el lenguaje matemático formal y simbólico y entender sus relaciones con el lenguaje natural. • Entender la naturaleza y las reglas de los sistemas matemáticos formales. • Traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico formal. • Manejar y manipular declaraciones y expresiones que contienen símbolos y fórmulas.
	7. Comunicarse en, con y sobre las matemáticas	• Entender los textos escritos, visuales u orales de los demás, en una variedad de registros lingüísticos sobre asuntos que tienen contenido matemático. • Expresarse en diferentes niveles de precisión teórica y técnica, en forma oral, visual o escrita, sobre asuntos con contenido matemático.
	8.Hacer uso de ayudas y herramientas	• Conocer la existencia y las propiedades de diversas herramientas y ayudas para la actividad matemática y sus limitaciones. • Poder usar reflexivamente tales herramientas.

Otro referente importante con relación a la definición de competencia matemática es el publicado por la Unión Europea, en el documento “Recomendaciones sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente” publicado en 2006, en el que establece la competencia matemática como una de las ocho competencias clave, necesarias para la plena realización personal, la ciudadanía activa, la cohesión social y la empleabilidad en la sociedad del conocimiento

Este documento, define la competencia matemática como “la habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver diversos problemas en situaciones cotidianas” y presenta una serie de conocimientos, capacidades y actitudes relacionados con ella, dentro de los que se encuentran, entre otros, buen conocimiento de los números, las medidas, las estructuras y las representaciones matemáticas básicas.

1.2.3 Competencia matemática en el currículo

Mas allá de las diferentes construcciones conceptuales que existen alrededor del concepto de competencia matemática, un aspecto importante tiene que ver con la manera como esta se puede articular al currículo. Sin embargo, no hay una estructura concreta que permita explicar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas basando en un enfoque por competencias. (Solar, 2014)

En este sentido y en el contexto cercano a nuestro país, se destaca el trabajo presentado por el Fondo de Investigación y Desarrollo en Educación FONIDE en el 2011 cuyo objetivo principal consistió en articular los contenidos con algunos procesos matemáticos cuidadosamente seleccionados, de acuerdo con las diversas definiciones de competencia matemática tenidas en cuenta como referente.
Para tal fin, se consolidó una forma de organización de la matemática escolar llamada matriz de competencia, en la cual se definen las competencias matemáticas que se deben abordar bajo el nombre de procesos nucleares, las tareas o contenidos que se deben desarrollar y los procesos específicos, que dan cuenta de la forma como se debe movilizar en el aula cada una de las competencias.

Dicha propuesta está organizada alrededor de cuatro competencias matemáticas: Resolución de problemas, representación, razonamiento y argumentación y cálculo y manipulación de expresiones, que se articulan de manera transversal a los contenidos, bajo la premisa de que la competencia es un objeto de logro a largo plazo, para lo cual establecen diferentes niveles de complejidad.

En el caso específico de Colombia, el Ministerio de Educación Nacional concretó una propuesta clara de articulación de las competencias matemáticas al currículo, en los estándares básicos de competencias matemáticas, publicados en 2003. Para su construcción, tomó como base, los parámetros establecidos en los Lineamientos curriculares de matemáticas, publicados en 2008.

Cada uno de los estándares, está formulado teniendo en cuenta los procesos generales y los cinco tipos de pensamiento definidos en los lineamientos para el área como esenciales para ser matemáticamente competente, así como los contextos que, según este documento, son contextos de aprendizaje de las matemáticas.
El siguiente cuadro resume, de manera muy concreta, los aspectos anteriormente mencionados:

Tabla 1-4 Procesos generales en matemáticas M.E.N.

Procesos generales	Tipos de pensamiento	Contextos de aprendizaje
• Formular y resolver problemas. • Modelar procesos y fenómenos de la realidad. • Comunicar • Razonar • Formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.	• Numérico • Espacial • Métrico o de medida • Aleatorio o probabilístico • Variacional	• contexto inmediato o contexto de aula. • Contexto escolar o contexto institucional. • Contexto extraescolar.

De acuerdo con lo expuesto en el documento que contiene los estándares, cada uno de ellos tiene énfasis en uno o dos de los procesos generales y, desde la perspectiva de que son una forma de desarrollo gradual de la competencia matemática, están distribuidos en cinco conjuntos de grados.

1.2.4 La competencia matemática en las pruebas: Pisa y saber

De acuerdo con el documento “Marcos y pruebas de evaluación de Pisa 2015”, este modelo de medición considera, de manera general, tres dimensiones de la competencia matemática: los procesos y las capacidades, los contenidos y los contextos.
Estos aspectos que determinan el fundamento de la prueba se definen de acuerdo con el constructo de competencia vigente en el marco de las pruebas, cuyo propósito es medir las destrezas funcionales que permiten a una persona participar de forma activa en la sociedad.

Cada una de las preguntas que componen una aplicación, se relacionan con tres procesos: formular, emplear e interpretar que, de acuerdo con el marco Pisa 2015, se definen como capacidad para: reconocer oportunidades para proporcionar una estructura matemática a un problema presentado en forma contextualizada; aplicar conceptos, datos procedimientos y razonamientos matemáticos en la resolución de problemas y reflexionar sobre soluciones, resultados y conclusiones matemáticas, dándoles sentido en el contexto de los problemas de la vida real.

De igual forma, para cada uno de los procesos mencionados anteriormente, se evalúan siete capacidades matemáticas fundamentales: Matematización, comunicación, representación, razonamiento y argumentación, diseño de estrategias para resolver problemas, utilización de herramientas matemáticas, utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico.

Los contenidos evaluados en la prueba se establecen teniendo en cuenta, entre otras cosas, el análisis de los estándares de los países participantes y se agrupan bajo las ideas de cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones e incertidumbre y datos. Los contextos corresponden a marcos, en el mundo de un estudiante, donde los problemas se pueden situar.

Además de lo anterior, el marco de la prueba presenta una descripción de la competencia matemática en seis niveles, establecidos de acuerdo con la forma, más o menos compleja, con que precisan de la activación de las capacidades matemáticas.

Por su parte la prueba Saber, que tiene como propósito contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación en Colombia a partir de la realización de evaluaciones periódicas de las competencias básicas, tomando como fundamento la organización presentada en los Lineamientos de matemáticas del Ministerio de Educación Nacional, agrupa, para el diseño de las pruebas, los conocimientos, procesos y contextos establecidos en el mismo documento.

Para el caso específico de la prueba Saber noveno, de acuerdo con los lineamientos para la aplicación muestral y censal del 2016, evalúa tres procesos generales: Razonamiento y argumentación, comunicación representación y modelación y planteamiento y resolución de problemas. De igual forma, reagrupando los cinco pensamientos presentados en los estándares, establece los componentes numérico variacional, geométrico métrico y aleatorio.

Los elementos anteriormente mencionados, se articulan con los Estándares básicos de competencia matemática para construir las especificaciones de cada prueba, para lo cual el ICFES, desde 2007, aplica una metodología denominada Modelo Basado en Evidencia M.B.E.

1.3 La metodología del Modelo Basado en Evidencias

El modelo basado en evidencias es una metodología para el desarrollo de especificaciones de prueba, está incluido en el diseño técnico de los instrumentos de evaluación producidos por el ICFES, con la asesoría del Educational Testing Service.

Las especificaciones de la prueba consisten en la descripción de las características que le permiten medir una competencia ya que detallan y precisan los aspectos, de contenidos o de procesos, que evalúa la prueba, así como los desempeños que se le exige al estudiante que responde cada pregunta. (ICFES, 2016)

La implementación de esta metodología pretende, entre otras cosas, producir instrumentos homogéneos y con alto grado de validez, generar evaluaciones cuyos resultados provean información explicita sobre lo que los estudiantes pueden o no hacer además de alinear los procesos y productos de las pruebas con los objetivos y propósitos de las mismas, garantizando comparaciones a través del tiempo. (Castelblanco, 2011)

1.3.1 Etapas del Modelo Basado en Evidencias

La metodología del modelo basado en evidencias consta de cuatro etapas: Análisis del dominio, definición de las afirmaciones, definición de las evidencias y definición de las tareas. El desarrollo de estas etapas debe seguir el orden establecido en el modelo, ya que, el producto de la aplicación de una de ellas es el insumo para la etapa siguiente.

El análisis del dominio corresponde a la definición de la competencia que se quiere medir y a la identificación del estándar a evaluar. El propósito de esta etapa es dar cuenta de los resultados del aprendizaje que se espera que los estudiantes alcancen y que se van a medir dentro de la prueba.

La definición de las afirmaciones es la etapa donde se establecen los procesos globales, entendidos como acciones complejas que involucran varios procesos de pensamiento, acerca de los conocimientos, capacidades y habilidades que se quieren medir en los estudiantes.

La definición de las evidencias es la etapa donde se especifican las acciones o ejecuciones observables que dan respuesta a la pregunta ¿qué tiene que hacer el evaluado que permita inferir lo que sabe o lo que sabe hacer?

Finalmente, en la etapa de definición de las tareas, se construyen los enunciados que representan una actividad de evaluación puntual, cada tarea establece las características de contenido y procedimiento que involucra, así como los contextos y situaciones en los que el estudiante debe resolver la tarea planteada

2. Diseño de la prueba inicial y resultados

Con el propósito de identificar y caracterizar los niveles de competencia matemática relacionados con el razonamiento y la argumentación, se diseñó y aplicó una prueba compuesta por diez preguntas cerradas y dos preguntas abiertas, para lo cual se utilizó la metodología del Modelo Basado en Evidencias, descrito en el capítulo uno.

A continuación, se presenta el diseño de la prueba inicial y el análisis de resultados de la aplicación de dicha prueba.

2.1 Diseño de la prueba inicial

Atendiendo a las etapas del Modelo Basado en Evidencias, específicamente al análisis del dominio, se estableció en primer lugar, la definición de la competencia que se quiere medir. Teniendo en cuenta el propósito del presente trabajo queda claro que dicha competencia corresponde a razonamiento y argumentación, entendida tal como se define en los referentes teóricos mostrados a continuación, los cuales no difieren entre sí y por el contrario se complementan de tal forma que brindan una descripción amplia de la competencia. (Tabla 1-2)

Tabla 2-1 Referentes teóricos para la definición de la competencia.

REFERENTE	DEFINICIÓN DE LA COMPETENCIA
LINEAMIENTOS MEN 1998	Razonar en matemáticas tiene que ver con: • Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones. • Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas. • Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos. • Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.

	• Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar.
LINEAMIENTOS PARA LAS APLICACIONES MUESTRAL Y CENSAL 2016 PRUEBA SABER 3, 5 Y 9	Esta competencia está relacionada con la capacidad para dar cuenta del cómo y del porqué de los caminos que se siguen para llegar a conclusiones, justificar estrategias y procedimientos puestos en acción en el tratamiento de situaciones problema, formular hipótesis, hacer conjeturas, explorar ejemplos y contraejemplos, probar y estructurar argumentos, generalizar propiedades y relaciones, identificar patrones y expresarlos matemáticamente y plantear preguntas; reconocer distintos tipos de razonamiento y distinguir y evaluar cadenas de argumentos.
DEFINICIÓN DE LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS FONIDE	La competencia matemática Razonamiento y argumentación tiene que ver con • Formular e investigar conjeturas matemáticas a partir de regularidades. • Sintetizar, sistematizar y generalizar conjeturas matemáticas. • Elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y demostración. • Desarrollar y evaluar argumentos.
LA COMPETENCIA MATEMÁTICA EN EL MARCO PISA 2015	La capacidad matemática fundamental de Razonamiento y Argumentación implica procesos de pensamiento arraigados en forma lógica que exploran y conectan los elementos del problema para realizar inferencias a partir de ellos, comprobar una justificación dada o proporcionar una justificación de los enunciados o soluciones de los problemas.

Debido a que el presente trabajo está orientado al pensamiento numérico y con base en la definición de la competencia razonamiento y argumentación se seleccionaron posteriormente, de los estándares que el Ministerio de Educación Nacional propone para los grados sexto a séptimo, aquellos que corresponden al componente numérico y están relacionados con los procesos de razonar y argumentar.

Finalmente, para cada estándar seleccionado, se crearon las afirmaciones, evidencias y tareas, llegando a consolidar el diseño de cada pregunta.

Tabla 2-2: Diseño de las preguntas 1 a 4.

ESTANDAR 1: Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones		
AFIRMACIÓN	**EVIDENCIA**	**TAREA (PREGUNTA)**
Usa las relaciones y las propiedades de las operaciones en los números enteros.	Analiza el significado y las relaciones entre las operaciones y las aplica para simplificar cálculos.	**PREGUNTA 1** Comprende la jerarquía de las operaciones con números enteros y la relación que existe entre las estructuras aditiva y multiplicativa.

	Interpreta relaciones entre las operaciones de números enteros, para hacer inferencias a partir de los elementos de un problema.	**PREGUNTA 2** Estima y compara cantidades enteras a partir de la diferencia entre ellas.
Interpreta procedimientos aritméticos a partir de las relaciones y propiedades de la adición y multiplicación de números enteros.	Evalúa la validez de un procedimiento a partir de la aplicación de propiedades y relaciones los números enteros.	**PREGUNTA 3** Aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición de números enteros.
	Explica procedimientos aritméticos a partir de las relaciones y propiedades de la adición y multiplicación de números enteros.	**PREGUNTA 4** Comprende la relación entre el producto y la adición de sumandos iguales y conecta la información y los elementos de un problema para explicar un procedimiento.

Tabla 2-3: Diseño de las preguntas 5 y 6.

ESTANDAR 2: Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.		
AFIRMACIÓN	**EVIDENCIA**	**TAREA**
Usa representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.	Utiliza el hecho de que una representación ilustre la relación entre dos magnitudes directamente proporcionales para determinar la validez de una inferencia.	**PREGUNTA 5** Expresa la fracción como razón y reconoce que la razón es constante cuando las magnitudes que se relacionan son directamente proporcionales.
Analiza representaciones y procedimientos y los asocia con situaciones de proporcionalidad directa o inversa.	Explica representaciones y procedimientos relacionados con magnitudes inversamente proporcionales.	**PREGUNTA 6** Encuentra el valor que toma una magnitud cuando varia inversamente con relación a otra.

Tabla 2-4: Diseño de las preguntas 7 a 10.

ESTANDAR 3: Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales y de las operaciones entre estos números en diferentes contextos.		
AFIRMACIÓN	**EVIDENCIA**	**TAREA**
Analiza relaciones entre números racionales.	Hace inferencias a partir de las relaciones de orden en los números racionales.	**PREGUNTA 7** Compara y ordena números racionales.
	Hace inferencias a partir del análisis de la relación de equivalencia definida entre números racionales.	**PREGUNTA 8** Identifica fracciones equivalentes a una fracción dada.

Usa propiedades de las operaciones en el conjunto de los números racionales.	Interpreta procedimientos aplicando propiedades de las operaciones entre números racionales.	**PREGUNTA 9** Justifica procedimientos utilizados para adicionar números racionales.
	Evalúa la pertinencia de un procedimiento a partir de la aplicación de propiedades de las operaciones entre números racionales.	**PREGUNTA 10** Aplica las propiedades de la adición de números racionales.

Una vez establecido el diseño de la prueba y las especificaciones de cada pregunta, se hizo la construcción de la prueba inicial. (Anexo A)

2.2 Aplicación de la prueba inicial y resultados

La presente investigación fue desarrollada con 37 estudiantes de ciclo III, específicamente del grado 702 de la IED Virginia Gutiérrez de Pineda. Esta institución educativa se encuentra ubicada en la localidad de Suba y atiende, en las jornadas mañana y tarde, a estudiantes de los estratos 1, 2 y 3 en los niveles de preescolar, básica primaria, básica secundaria, además de la educación media fortalecida con profundización en filosofía.

Desde mi experiencia en la institución, he observado que los resultados en pruebas externas, específicamente en lo que tiene que ver con la prueba Saber noveno en el área de matemáticas no son satisfactorios y, además, evidencian debilidades de los estudiantes con relación a la competencia razonamiento y argumentación.

Por lo anterior, para dar cumplimiento al propósito de la prueba inicial de identificar los niveles de desarrollo de la competencia razonamiento y argumentación, se establecieron éstos tomando como referencia los niveles de competencia que se describen en el marco de la prueba Pisa 2015, como se ilustra en la siguiente tabla.

Tabla 2-5: Niveles de razonamiento y argumentación

Nivel	Descripción
1	• Seguir instrucciones directas en situaciones explícitas. • Hacer uso del razonamiento directo y de interpretaciones literales de los resultados.
2	• Asociar información con el fin de razonar directamente sobre ella y realizar inferencias. • Comunicar los razonamientos implícitos en la solución de una situación.
3	• Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso compuesto de varios pasos. • Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso relacionando distintas variables.
4	• Sintetizar información creando cadenas de razonamientos para evaluar inferencias. • Hacer generalizaciones recurriendo a múltiples datos o combinando varios tipos de información.

El análisis de los resultados de la prueba aplicada se hizo teniendo en cuenta dos referentes: el diseño de la prueba, que da cuenta de las especificaciones de cada pregunta, y el proceso particular de razonamiento y argumentación, de acuerdo con el nivel de competencia en el que se ubica la pregunta.

2.2.1 Resultados nivel de competencia 1

Corresponde a este nivel de competencia únicamente la pregunta 8 de la prueba aplicada.

Cuatro hermanos compraron un lote con el fin de construir una cabaña. Cada uno propuso un diseño para la construcción. La siguiente tabla muestra la fracción de terreno que ocuparía cada diseño

Hermano	José	Felipe	Andrea	Camila
Fracción del lote que ocupa el diseño	6/24	4/12	2/8	8/16

Con relación a la superficie de terreno que requiere cada diseño, es correcto afirmar que ocupan la misma fracción de terreno las propuestas de

A. Felipe y Camila.

B. Andrea y José.

C. José y Camila.

Esta pregunta se ubica en este nivel puesto que requiere específicamente hacer uso del razonamiento directo y de la interpretación literal de un valor numérico proporcionado en el contexto. Se observa que la pregunta fue respondida de forma correcta por el 21,6% de los estudiantes por lo que se infiere que este grupo, además de haber alcanzado el nivel de competencia requerido en la pregunta, está en capacidad de identificar fracciones equivalentes a una fracción dada, según lo indica la tarea específica propuesta para dicha pregunta en el diseño de la prueba.

Con relación al porcentaje de estudiantes que marcó otras opciones se puede concluir que se distribuye de manera uniforme.

2.2.2 Resultados nivel de competencia 2

Corresponden a este nivel de competencia las preguntas 1, 3, 4 y 6.

Pregunta 1

En Colombia, el café se comercializa por cargas, una carga equivale a 125 kg y para la venta, se debe tener en cuenta el precio de la carga en el mercado.

Un cafetero debe llevar 24 cargas de café a la Federación, para facilitar su transporte lo ha empacado en sacos de 60 kg cada uno, con ayuda de sus 4 trabajadores. La siguiente tabla muestra el número de sacos que ha empacado cada uno de ellos.

Nombre del trabajador	**Carlos**	**Manuel**	**Mario**	**Felipe**
# sacos	13	12	11	12

Para completar las 24 cargas de café le faltan

A. 1 saco de café
B. 2 sacos de café
C. 4 sacos de café
D. 5 sacos de café

Pregunta 3

La siguiente tabla muestra información sobre el salario diario que recibe un trabajador que presta servicios de aseo en tres empresas diferentes de una ciudad.

EMPRESAS	salario que gana en un día
1	\$35.000
2	\$30.000
3	\$32.000

Para calcular el salario correspondiente al mes de febrero, el trabajador planteo la siguiente operación:

$$8 \times (35.000 + 30.000 + 32.000)$$

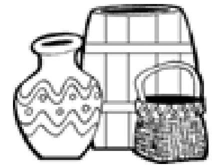
Es correcto afirmar que en el mes de febrero este trabajador

A. trabajó en total 8 días.
B. trabajó en total 24 días.
C. trabajó menos días en la empresa 1.
D. trabajó menos días en la empresa 3.

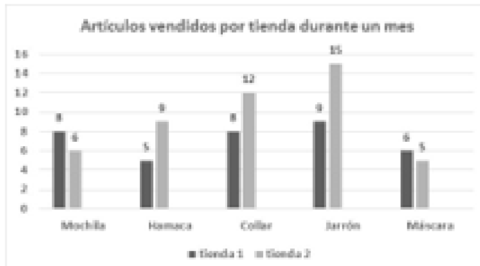
Pregunta 4

La siguiente tabla muestra el precio de algunos de los productos que ofrece una tienda de artesanías.

ARTÍCULO	PRECIO ($)
Mochila	155.000
Hamaca	125.000
Collar	60.000
Jarrón	90.000
Máscara	110.000



La siguiente gráfica muestra el número de artículos de estos tipc ucursales de la tienda en un mes.



Para determinar el dinero que recibió por la venta de esos artículos, el administrador de la tienda efectuó con la calculadora la siguiente operación:

$$155.000\left(8+6\right)+125.000(5+9)+60.000(8+12)+90.000(9+15)+110.000(6+5)$$

La operación planteada por el administrador equivale a

A. determinar el total de artículos de cada tipo y multiplicar cada resultado por el precio unitario correspondiente.
B. sumar los precios de todos los artículos y multiplicar por el total de artículos vendidos.
C. determinar el total de artículos vendidos y multiplicar el resultado por el precio de cualquiera de los artículos.
D. sumar los precios y multiplicar por el total de artículos vendidos en cualquiera de las dos tiendas.

Pregunta 6

Para un entrenamiento de un cierto equipo de futbol los auxiliares necesitan llevar 24 litros de agua (24.000 ml). En el mercado se pueden encontrar envases (en mililitros) de diferentes tamaños como se indica en la siguiente tabla:

Tipo de Envase	1	2	3	4
Capacidad (ml)	250	500	600	750

Los auxiliares consiguieron el agua necesaria para el entrenamiento comprando 32 botellas del mismo tamaño. Es correcto concluir que compraron envases tipo

A. 4.
B. 1.
C. 3.
D. 2.

Estas preguntas corresponden a este nivel ya que, todas ellas, requieren asociar información presente en el contexto, como texto, como tabla o como gráfica, para razonar directamente sobre ella y realizar una inferencia.

La pregunta 1 fue respondida correctamente por el 48,6% de los estudiantes. Este grupo, además de alcanzar el nivel de competencia requerido, de acuerdo con la tarea específica, comprende la jerarquía de las operaciones con números enteros y la relación que existe entre la estructura aditiva y multiplicativa. Cabe anotar que el 27% de los estudiantes seleccionó la opción A, lo cual se puede atribuir a dificultades en la interpretación del contexto de la pregunta.

Con relación a la pregunta 3 se pudo establecer que el 51,4% de los estudiantes respondió correctamente. Este porcentaje es más alto que el porcentaje de estudiantes que marcó cualquiera de las otras opciones. De acuerdo con la tarea específica correspondiente a esta pregunta, cabe afirmar que este grupo de estudiantes aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, además de alcanzar el nivel de razonamiento esperado. Respecto a las demás opciones de respuesta, el segundo porcentaje más alto corresponde a los estudiantes que marcaron la opción A, este porcentaje es del 32,4%, se podría afirmar que este grupo comprendió la expresión presentada como un producto, pero no comprendió lo que representa la adición en el otro factor.

La pregunta 4 fue respondida correctamente por el 10,8% de los estudiantes, este porcentaje corresponde al más bajo, comparando el porcentaje de estudiantes que marcó cada opción. Este grupo de estudiantes, además de alcanzar el nivel de competencia requerido, comprende la relación entre el producto y la adición de números enteros. Cabe señalar que el mayor porcentaje de estudiantes marcó la opción B, lo cual se puede atribuir a la incorrecta interpretación del procedimiento presentado y, o a no comprensión del enunciado y la tarea propuesta.

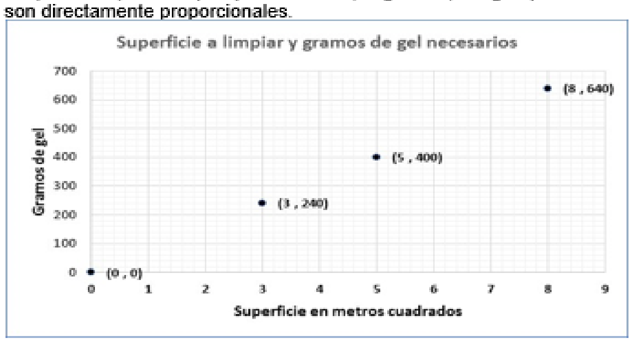
Para el caso de la pregunta 6, se observa que el mayor porcentaje de estudiantes, que corresponde al 54,1%, marcó la opción correcta. Respecto a este grupo, se puede afirmar que además de alcanzar el nivel de competencia requerido, está en capacidad de determinar el valor que toma una magnitud cuando varia inversamente en relación a otra, teniendo en cuenta la tarea específica. Frente a las demás opciones de respuesta, la opción B fue seleccionada por el 21,6% de los estudiantes y corresponde al segundo porcentaje más alto, se podría atribuir la selección de esta respuesta al hecho de no relacionar la información presentada en la tabla con la instrucción presente en el encabezado de la pregunta.

2.2.3 Resultados nivel de competencia 3

Corresponden a este nivel de competencia las preguntas 5, 9 y 10.

Pregunta 5

La siguiente gráfica muestra la relación entre dos magnitudes: la superficie (en metros cuadrados) de una piscina que se requiere limpiar y la cantidad (en gramos) del gel que se debe usar. Estas magnitudes son directamente proporcionales.



Teniendo en cuenta la información anterior es correcto afirmar que para limpiar una superficie de 4 metros cuadrados se requieren 4 tarros de gel de 80 gramos cada uno, porque la razón entre la superficie y la cantidad de gramos de gel es

A. 1/320
B. 4/80
C. 1/4
D. 1/80

Pregunta 9

Luisa y Felipe compraron, para compartir, una chocolatina como la que se muestra en la imagen:

Luisa ha comido 3/8 de la chocolatina y Felipe 1/4. Para calcular la fracción de chocolatina que han comido entre los dos, plantearon el siguiente procedimiento

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3+1}{8}=\frac{4}{8}$$

El procedimiento aplicado es incorrecto porque no tiene en cuenta el hecho de que se están sumando

A. partes de una misma chocolatina, pero de tamaño diferente.
B. partes de chocolatinas diferentes, pero del mismo tamaño.
C. igual número de partes, pero de chocolatinas diferentes.
D. diferente número de partes, pero de la misma chocolatina.

Pregunta 10

Durante 4 días de una semana se está aplicando una encuesta a una muestra de los habitantes de una ciudad.

En la siguiente tabla se presenta la fracción de la muestra que alcanzó a encuestarse los tres primeros días:

Día	1	2	3
Fracción de la muestra a encuestar	5/12	4/15	3/10

Para determinar la fracción de la muestra que se ha encuestado al terminar el tercer día ¿Cuál o cuáles de los siguientes procedimientos es (o son) correcto (s)?

I. $\frac{5}{12}+\frac{4}{15}+\frac{3}{10}=\frac{41}{60}+\frac{3}{10}$

II. $\frac{5}{12}+\frac{4}{15}+\frac{3}{10}=\frac{5}{12}+\frac{17}{30}$

III. $\frac{5}{12}+\frac{4}{15}+\frac{3}{10}=\frac{4}{15}+\frac{43}{60}$

A. I y III solamente.
B. II y III solamente.
C. I, II y III.
D. II solamente.

Las preguntas 5 y 9 corresponden a este nivel porque requieren, específicamente, analizar información para crear un argumento relacionando distintas variables mientras que la pregunta 10 requiere analizar información para apoyar un proceso compuesto de varios pasos.

Con relación a la pregunta 5, el 18,9% de los estudiantes marcó la opción correcta. Este grupo de estudiantes, además de alcanzar el nivel de competencia esperado en la tarea específica, expresa correctamente la razón entre magnitudes como una fracción. Se observa que un alto porcentaje de estudiantes, el 43,2%, seleccionó la opción B, esto podría estar relacionado con dificultades en la lectura e interpretación del enunciado o carencias en la comprensión de la razón entre magnitudes.

Para el caso de la pregunta 9, la respuesta correcta fue seleccionada por el 18,9% de los estudiantes. Además de alcanzar el nivel de competencia esperado y de acuerdo con la tarea, este grupo de estudiantes justifica procedimientos utilizados para adicionar números racionales. Cabe anotar, que la mayoría de los estudiantes, el 70,3%, seleccionó la opción D, esto se puede atribuir a la falta de comprensión sobre el significado de la fracción como parte-todo y el desconocimiento del algoritmo de la adición de fracciones con diferente denominador.

La pregunta 10 fue respondida correctamente por el 16,2% de los estudiantes. Además de alcanzar el nivel de competencia esperado y de acuerdo con las especificaciones de la prueba, este grupo de estudiantes aplica las propiedades de la adición de números racionales. El porcentaje de estudiantes restante se distribuye de manera proporcional entre las otras opciones de respuesta, lo cual se puede explicar porque no identifican, en un procedimiento, la aplicación de la propiedad asociativa de la adición de números racionales y/o porque desconocen el algoritmo de la adición de fracciones con diferente denominador.

2.2.4 Resultados nivel de competencia 4

Se encuentran dentro de este nivel de competencia las preguntas 2 y 7

Pregunta 2

En el año 2016, entre los meses de septiembre y octubre se jugó en nuestro país, por primera vez, la copa mundial de Futbol sala con la participación de 24 países clasificados previamente. Los equipos se distribuyeron en 6 grupos, cada uno de cuatro equipos.

La siguiente tabla muestra la cantidad de goles anotados (goles a favor) y la diferencia de goles de cada uno de los equipos de uno de los grupos, el D. La diferencia de goles se determina restando a la cantidad de goles a favor, la cantidad de goles en contra.

EQUIPO	GOLES A FAVOR	DIFERENCIA DE GOLES
Ucrania	8	2
Mozambique	7	-15
Brasil	29	24
Australia	5	-11

A partir de la información de la tabla es correcto concluir que:

I. El equipo que anotó menos goles fue Mozambique
II. El equipo de Australia recibió 6 goles en contra.
III. Ucrania recibió un gol en contra más que Brasil.

A. I es verdadera
B. Solamente II es verdadera.
C. Todas son falsas
D. Solamente III es verdadera

Pregunta 7

Para clasificar a las finales de una carrera de atletismo se estableció que el participante debe emplear un tiempo inferior a la mitad del tiempo empleado por el último competidor en llegar a la meta. En la siguiente tabla se presentan los tiempos de los 3 competidores

Nombre	Andrés	Carlos	Lucia
Fracción de tiempo empleado	2/5	3/4	4/8

¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones sobre estos competidores son correctas?

I. Lucía clasificó a la final
II. Carlos empleo más tiempo que Andrés.
III. Andrés clasifico a la final.

A. I solamente.
B. II solamente.
C. II y III solamente.
D. I y III solamente.

Estas preguntas requieren, en ambos casos, sintetizar información para evaluar inferencias.

Con relación a la pregunta 2 se evidencia que el 13,5% de los estudiantes la respondió correctamente. Este grupo, además de alcanzar el nivel de competencia necesario y de acuerdo con la tarea especificada en el diseño de la prueba, estima y compara cantidades enteras a partir de la diferencia entre ellas. Teniendo en cuenta la estructura de las opciones de respuesta, se puede inferir que quienes respondieron de manera incorrecta presentan dificultades referidas a la comprensión del enunciado de la situación-problema (especialmente el reconocimiento de la información presentada en la tabla, en particular de los números negativos), o tienen errores en la interpretación de la adición-sustracción de números enteros.

La pregunta 7 fue respondida correctamente por el 13,5% de los estudiantes. Este grupo, además de contar con el nivel de competencia requerido en la pregunta, compara y ordena correctamente los números racionales dados, teniendo en cuenta la tarea especificada. De igual forma, se pudo establecer que un alto porcentaje de los estudiantes, el 35,1%, seleccionó la opción C, esto se puede atribuir a la complejidad del enunciado de la situación y, o a la dificultad que puede suponer el hecho interpretar el significado de la mitad de una fracción.

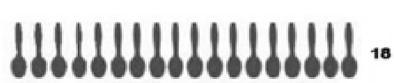
2.2.5 Resultados preguntas abiertas

Con relación a las preguntas abiertas, es importante aclarar que las dos preguntas corresponden al nivel de competencia 3 ya que, en los dos casos, requieren analizar información para proponer un procedimiento compuesto de varios pasos.

- **Pregunta abierta 1**

La siguiente imagen muestra las cucharadas de azúcar necesarias para preparar 600ml de té de sabores:

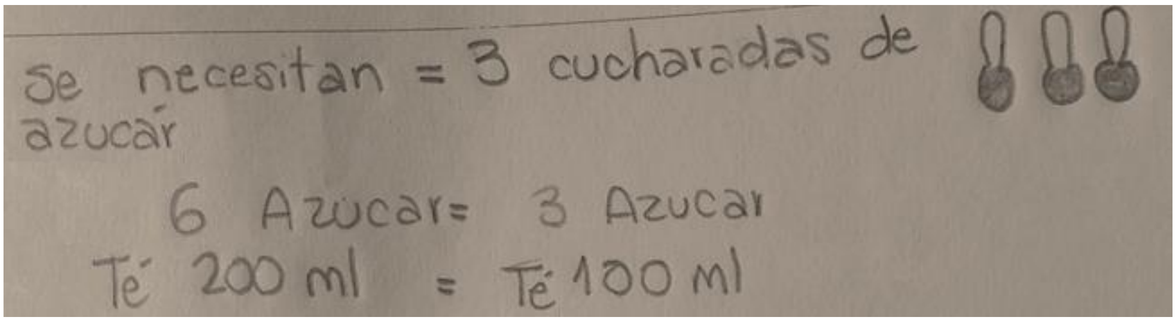
Té de sabores 600ml



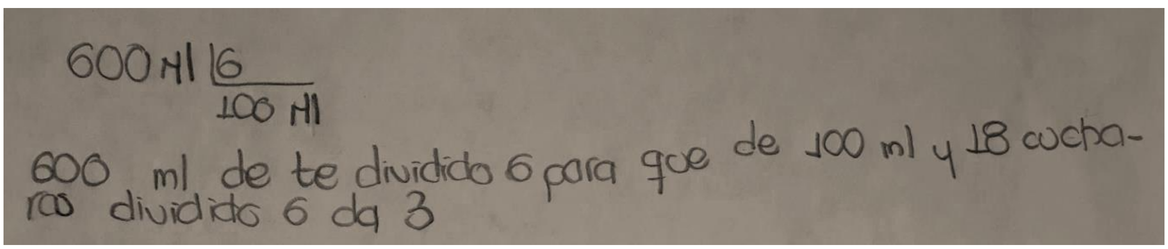
Para preparar 100 ml de té de sabores ¿cuántas cucharadas de azúcar se necesitan en total? Explique el procedimiento que utiliza para resolver la pregunta.

Se observa que el 87% de los estudiantes respondió la pregunta, 54% en forma correcta y 33% en forma incorrecta. Dentro del grupo que respondió correctamente se identifican los procedimientos que se describen a continuación:

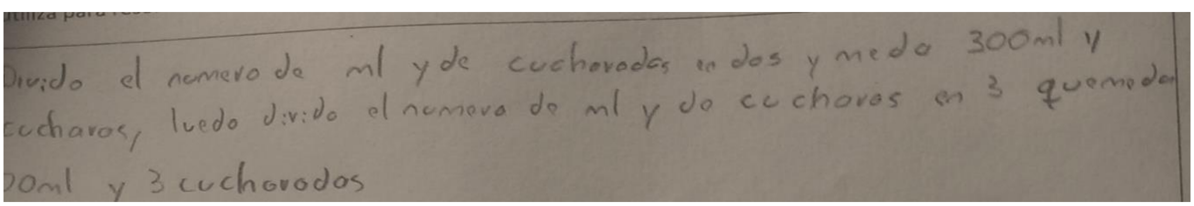
A. El estudiante divide inicialmente las dos magnitudes, mililitros de té y cucharadas de azúcar, entre tres encontrando que para preparar 200 ml de té se requieren 6 cucharadas de azúcar, luego divide las dos magnitudes entre dos.



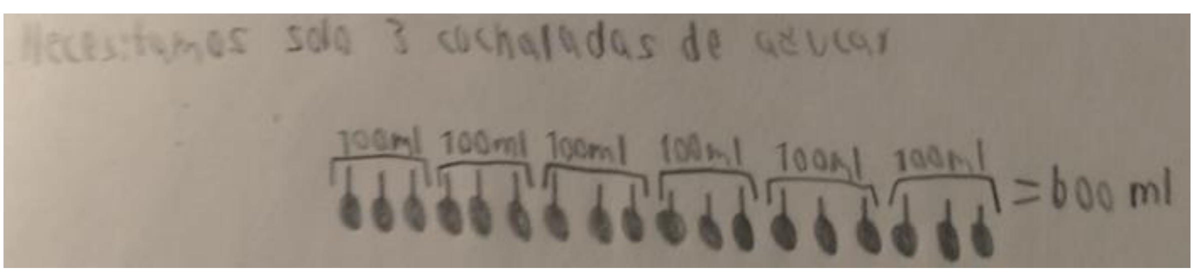
B. El estudiante indica que, para obtener 100 ml de té, los 600 ml de té se deben dividir entre 6 y por lo tanto divide las 18 cucharadas de azúcar entre 6.



C. El estudiante divide inicialmente los mililitros de té y las cucharadas de azúcar entre 2 obteniendo que, para preparar 300 ml de té, se requieren 9 cucharadas de azúcar y luego divide cada magnitud entre 3.



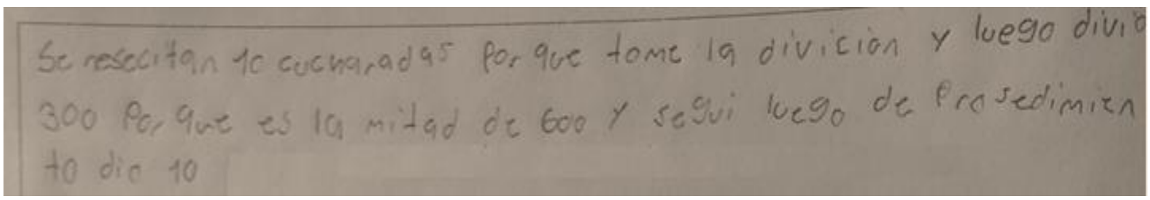
D. El estudiante hace un dibujo de las 18 cucharadas de azúcar y las divide en seis grupos indicando que a cada grupo corresponden 100 mililitros de té.



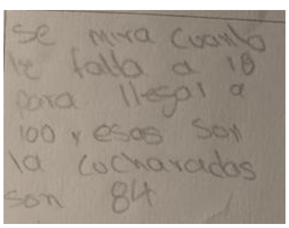
Se observa que los procedimientos anteriormente descritos muestran argumentos formados por razonamientos deductivos recurrentes, que parten de un hecho conocido para obtener una conclusión lógica verdadera. Tal como se evidencia en los ejemplos anteriores, tomados de las respuestas de los estudiantes, dentro del grupo de estudiantes que respondió correctamente la pregunta 1, se pueden encontrar argumentos en forma de texto, en forma de gráfico o dibujo y en forma de operación matemática.

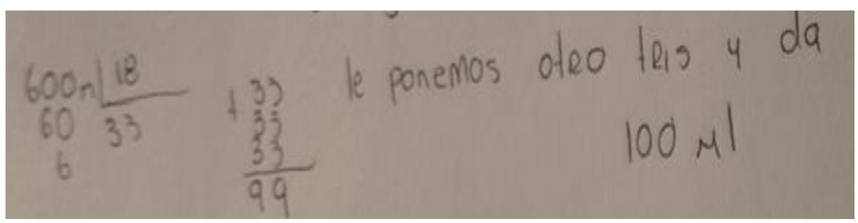
Con relación a los procedimientos mostrados por los estudiantes que no respondieron correctamente se pudieron identificar algunas situaciones que se ilustran a continuación:

A. El estudiante aplica un razonamiento deductivo, partiendo de un hecho verdadero, sin embargo, obtiene una conclusión equivocada.

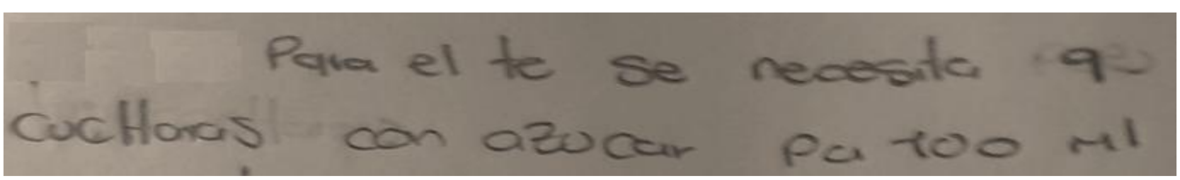


B. El estudiante hace otras operaciones que no se relacionan con la solución del problema



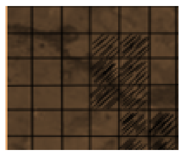


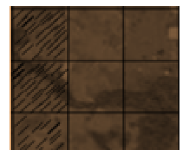
C. El estudiante obtiene una respuesta, pero no muestra ningún argumento



- **Pregunta abierta 2**

Las siguientes imágenes muestran la distribución de un terreno en dos cultivos de flores diferentes, la parte sombreada representa la fracción de área que ocupa cada cultivo:


Cultivo de claveles

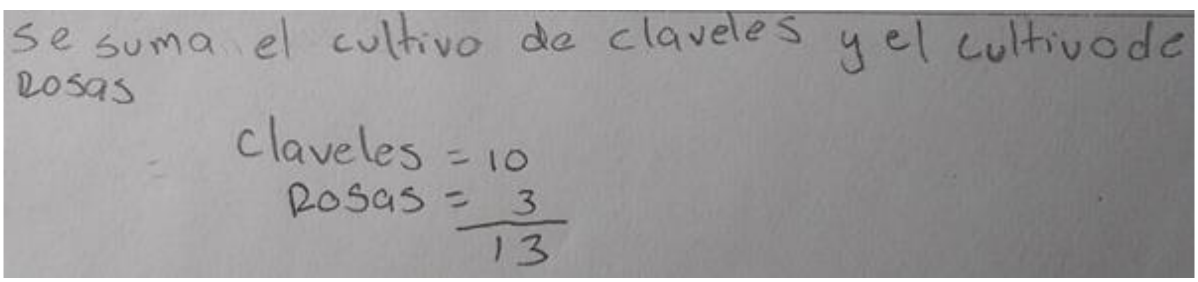

Cultivo de rosas

Explique el procedimiento que se debe aplicar para determinar la fracción total del área del terreno que ocupan los dos cultivos y halle la fracción correspondiente.

Se observa que el 19% de los estudiantes dio respuesta a la pregunta planteada, el 73% de los estudiantes dio respuesta a una pregunta diferente a la planteada, y el 8% de los estudiantes no respondió la pregunta.

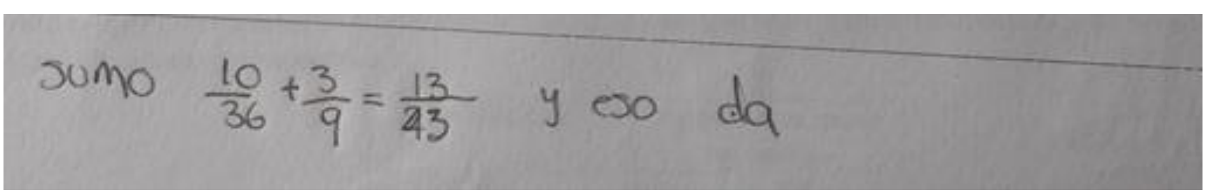
Con relación al grupo de estudiantes que respondió la pregunta planteada, se pudieron identificar los siguientes procedimientos:

A. El estudiante indica que se debe sumar el área cultivada de claveles y el área cultivada de rosas, sin embargo, toma las áreas como cantidades enteras, no como fracciones, ignora las fracciones solo cuenta partes del todo que aparecen señaladas en la unidad sin diferenciarlas.


Se suma el cultivo de claveles y el cultivo de Rosas

Claveles = 10
Rosas = 3
13

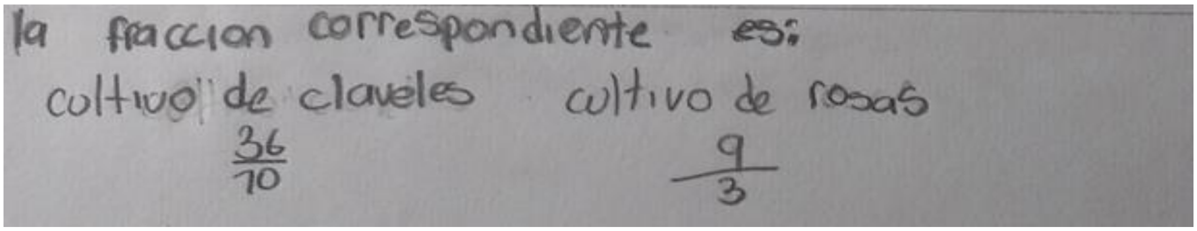
B. El estudiante determina correctamente el área de cada cultivo e indica que las debe sumar, sin embargo, no desarrolla correctamente la suma.


Sumo $\frac{10}{36} + \frac{3}{9} = \frac{13}{43}$ y eso da

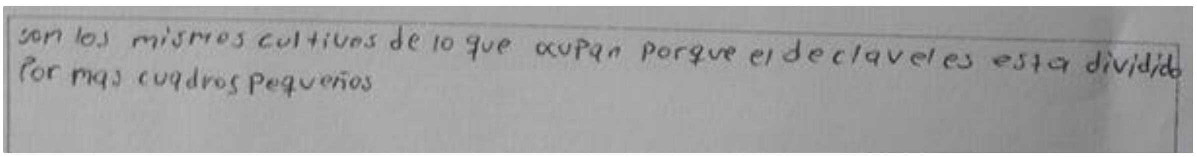
Se puede evidenciar que los procedimientos anteriores están construidos a partir del razonamiento deductivo pero que conducen a conclusiones incorrectas ya sea por el hecho de partir de premisas falsas, en el caso del estudiante que no determina correctamente las áreas o involucrar un argumento matemático falso.

Respecto al grupo de estudiantes que da respuesta a una pregunta diferente a la planteada se encontraron los siguientes procedimientos:

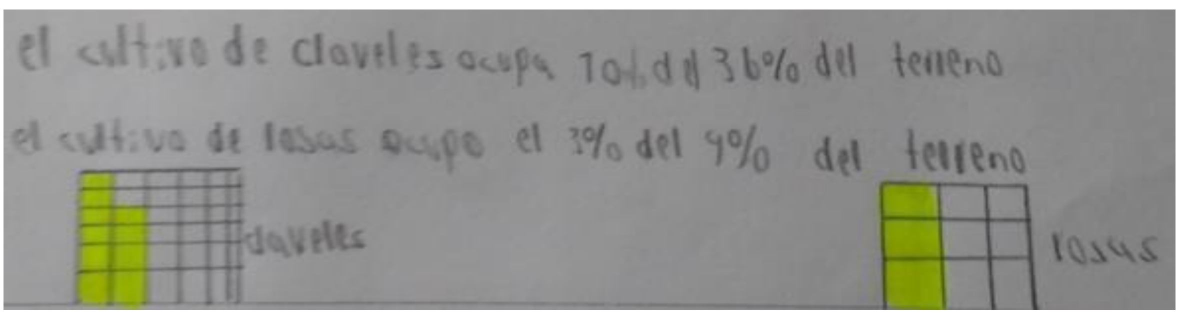
A. El estudiante indica incorrectamente la fracción de área que corresponde a cada cultivo.



B. El estudiante hace una comparación entre las áreas de los dos cultivos



C. El estudiante indica el porcentaje del total del terreno que ocupa cada cultivo



Con relación a este grupo se pudo observar, que, en su mayoría, no logran determinar correctamente una fracción o que las relacionan únicamente con una forma de representar un porcentaje.

3. Secuencia didáctica

Teniendo en cuenta los niveles de desarrollo de la competencia razonamiento y argumentación establecidos anteriormente y los resultados de la prueba aplicada, se evidencia que apenas un pequeño porcentaje de los estudiantes posee el nivel de competencia esperado. De igual forma, desde el punto de vista de las tareas que corresponden al diseño de la prueba, se pudo identificar que el grupo de estudiantes presenta dificultades con relación a la comprensión de las temáticas dentro de las que se enmarcan dichas tares. Por lo anterior, la estructura de la secuencia didáctica está orientada, en primer lugar, a mejorar la comprensión de las temáticas, puesto que al corresponder a estándares del componente numérico que se deben alcanzar entre los grados sexto y séptimo, la mayoría de ellas ya han sido abordadas y en segundo lugar a desarrollar la competencia razonamiento y argumentación en cada uno de los niveles establecidos.

La estructura de los talleres que conforman la secuencia didáctica está orientada por el estándar que pretende alcanzar y la tarea o tareas específicas que pretenden desarrollar los niveles de competencia requeridos para cada actividad.

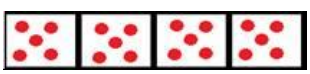
El desarrollo de cada uno de los talleres requiere el acompañamiento eficiente del docente y precisa una metodología específica.

3.1 Taller número 1

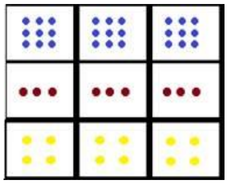
METODOLOGIA	Las actividades 1, 2 y 3 serán trabajadas de manera individual por los estudiantes y las 4 y 5 en pareja, buscando el intercambio de ideas y la construcción conjunta de argumentos. Finalizada cada actividad, se debe hacer puesta en común y retroalimentación.
ESTANDAR	**Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones**
TAREA(S)	Comprende la relación entre el producto y la adición de sumandos iguales y conecta la información y los elementos de un problema para explicar un procedimiento.
NIVELES DE RAZONAMIENTO	Actividad 1: Nivel 1 Actividad 2. Nivel 2 Actividad 3: Nivel 3 Actividades 4 y 5: Nivel4

A partir de la imagen o de la información mostrada en el cuadro 1, responda la secuencia de preguntas o resuelva los problemas propuestos en los cuadros siguientes.

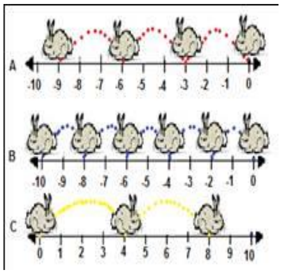
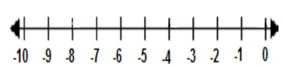
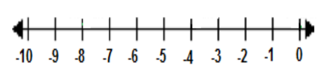
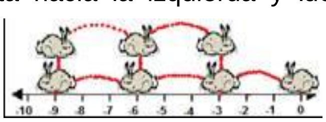
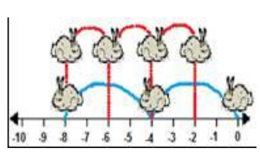
ACTIVIDAD 1: (nivel de razonamiento 1)

	Exprese el número total de círculos rojos que aparecen en el dibujo usando adiciones (sumas)	Exprese el número total de círculos rojos que aparecen en el dibujo usando un producto
¿Obtiene el mismo resultado en los dos casos anteriores? ¿Explique por qué	Use un dibujo similar al primero, para representar un conjunto que tiene 4x3 círculos rojos. Exprese el total de círculos que representó usando adiciones. ________________	Si se necesita hacer un dibujo similar al primero, para distribuir equitativamente 24 círculos rojos en tres cajones, ¿cuántos círculos debe dibujar en cada cajón? __________ ¿Cómo expresa el total de círculos usando un producto? ____________________ ¿Cómo usando adiciones? ____________________

Actividad 2 (Nivel de razonamiento 2)

	Exprese como un producto el total de círculos azules que aparecen en el cuadro (fila 1)	Exprese como un producto el total de círculos rojos que aparecen en el cuadro (fila 2)
Exprese como un producto el total de círculos amarillos que aparecen en el cuadro (fila 3)	¿Con cuál de las siguientes expresiones se puede calcular el total de círculos de diferentes colores que hay en el cuadro? Seleccione A. (9+3) X (3+3) X (4+3) B. (6+3+4) X 9 C. (9X3) + (3X3) + (4X3) D. (9+3+4) X (6+3+4)	Escriba y resuelva la expresión que seleccionó en paso anterior. ¿Qué concluye?

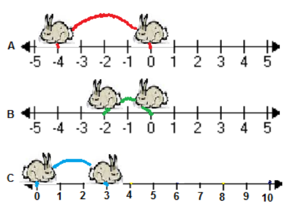
ACTIVIDAD 3: (nivel de razonamiento 3)

 En los gráficos A, B y C, el conejo se desplaza sobre una recta numérica dando saltos iguales, partiendo desde el cero.	**<u>Observe la gráfica A.</u>** ¿Cuál es la longitud de cada salto? ______________ ¿Cuál el punto de llegada? _______________. Exprese el número que corresponde al punto de llegada usando adiciones (complete) (-3) + _______________ Exprese el número que corresponde al punto de llegada como un producto (complete) ( ) x (-3)	**<u>Observe la gráfica B</u>**. ¿Cuál es la longitud de cada salto? ______________ ¿Cuál el punto de llegada? _______________. Exprese el número que corresponde al punto de llegada usando adiciones (complete) (-2) + _______________ Exprese el número que corresponde al punto de llegada como un producto (complete ( ) x (-2)
<u>Observe la gráfica C</u>. ¿Cuál es la longitud de cada salto? ______________ ¿Cuál el punto de llegada? _______________. Exprese el número que corresponde al punto de llegada usando adiciones: _______________ Exprese el número que corresponde al punto de llegada como un producto _______________	Represente en una recta numérica los saltos iguales de un conejo que parte del origen y cuya posición final corresponde al resultado de la multiplicación **(2)X(-4)**  	Represente en una recta numérica los desplazamientos seguidos de un conejo que parte del origen y cuya posición final corresponde al resultado de : (2)(-2) + (2)(-3) 
Observe la imagen. El conejo da saltos de igual longitud, comenzando desde cero, primero salta hacia la izquierda y luego  hacia la derecha. ¿Con cuál de las siguientes expresiones puede usted determinar el número que corresponde a la posición final del conejo? A. (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) B. (-3)(3) + (-3)(2) C. 3 + 3 + 3 + 3 + 3 D. (3)(-3) – (2)(-3)	8Observe la gráfica y escriba los números que deben ir en cada espacio, de tal forma que la expresión indique la posición final del conejo, después de realizar los desplazamientos señalados en la imagen. **(__)(__) - (__)(__)**  	Desarrolle la expresión que se muestra a continuación, si necesita apoyarse en una representación gráfica inclúyala. (-4)(2) – (-3)(5)

Actividad 4 (Nivel de razonamiento 4)

Para los entrenamientos diarios de atletismo, Juan y María disponen de cuatro pistas circulares de diferente longitud. Pista A: 600 m Pista B: 700 m Pista C: 800 m Pista D: 350 m Determine (en cada caso) si la afirmación (que aparece en el cuadro), respecto a la situación descrita, es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.	**Afirmación:** Si Juan le diera 3 vueltas a la pista A, 2 vueltas a la pista B y 1 vuelta a la pista C, recorrería en total más de 4000 m. ___________. Porque:	**Afirmación:** Para mejorar su rendimiento María se propone recorrer 5 kilómetros diarios. Una opción para cumplir esta meta sería dar 4 vueltas a la pista A y 3 vueltas a la pista C. ___________. Porque:
Afirmación: Si Juan le diera 3 vueltas a la pista A y dos vueltas a la pista D y María 3 vueltas a la pista B y una vuelta a la pista C, las distancias totales recorridas por ambos, serían iguales. ___________. Porque:	**Afirmación:** Si Juan le diera 7 vueltas a la pista A y María 5 vueltas a la pista C, la distancia total recorrida por María sería 200 metros mayor que la recorrida por Juan. ___________. Porque:	**Afirmación** Si María le da siete vueltas a la pista C, Juan debe darle una vuelta menos a la pista B para recorrer la misma distancia que María. Porque:

Actividad 5 (Nivel de razonamiento 4)

Observe que, en los gráficos A, B y C mostrados a continuación, los conejos se comienzan a desplazar desde del punto cero en una recta numérica. En A, con saltos iguales de 4 unidades hacia la izquierda del origen, en B con saltos iguales de 2 unidades hacia la izquierda del origen y en C con saltos iguales de 3 unidades hacia la derecha del origen.  Con respecto a la situación descrita determine (en cada caso) si la afirmación (que aparece en el cuadro) es verdadera o falsa y justifique su respuesta.	Si el conejo de la gráfica A da 12 saltos seguidos desde el punto cero, de la misma longitud y en la misma dirección que el mostrado en la imagen, su posición final corresponderá al número entero -24. ___________. Porque: Para que la posición final del conejo de la gráfica A sea -28, comenzando desde cero, debe dar 14 saltos seguidos de la misma longitud que el mostrado en la imagen. ___________. Porque:	Para que el conejo de la gráfica B esté ubicado en el punto que corresponde al número entero -16, comenzando desde cero, debe dar cinco saltos seguidos, de la misma longitud y en la misma dirección al mostrado en la imagen. ___________. Porque: Si el conejo B da 16 saltos seguidos, de la misma longitud y en la misma dirección al mostrado en la imagen, comenzando desde cero, su posición final corresponderá al entero-32. ___________. Porque:
Para que la posición final del conejo C corresponda al entero 15, comenzando desde cero, debe dar 8 saltos de la misma longitud y en la misma dirección al mostrado en la imagen. ___________. Porque:	Si los conejos A y B se comienzan a mover al mismo tiempo y desde el punto cero, dando saltos seguidos de la misma longitud y en la misma dirección a los mostrados en la imagen, cuando cada uno ha dado 3 saltos, el conejo B estará 6 unidades a la derecha del conejo A. ___________. Porque:	Si los conejos A y C se comienzan a mover al tiempo y desde el punto cero, dando saltos seguidos de la misma longitud y en la misma dirección a los mostrados en la imagen, cuando cada uno ha dado 5 saltos, el conejo A estará 30 unidades a la izquierda del conejo C. ___________. Porque:

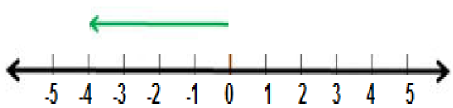
3.2 Taller número 2

METODOLOGIA	Las actividades 1, 2 y 3 serán desarrolladas de manera individual y las actividades 4, 5 y 6 serán desarrolladas en pareja para facilitar la discusión, el intercambio de ideas y la construcción de argumentos.
ESTANDAR	**Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones**
TAREA(S)	Estima y compara cantidades enteras a partir de la diferencia entre ellas.
NIVELES DE RAZONAMIENTO	Actividad 1: Nivel de razonamiento 1 Actividad 2: Nivel de razonamiento 2 Actividades 3 y 4: Nivel de razonamiento 3 Actividades 5 y 6: Nivel de razonamiento 4

ACTIVIDAD 1 (Nivel de razonamiento 1)

Desarrolle las tareas propuestas y responda, en cada caso, las preguntas planteadas teniendo en cuenta la información o la imagen presentada.

Observe la recta numérica presentada en la imagen y el desplazamiento (flecha verde) que se ha señalado en ella.



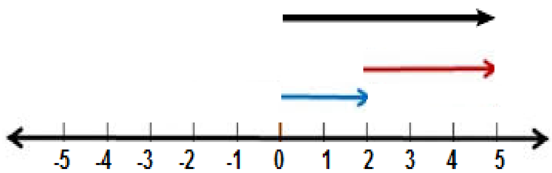
Escriba el punto inicial de este desplazamiento ______.
indique el punto final ______
Responda y argumente: ¿Este último punto está ubicado a la derecha o a la izquierda del origen?
____________________________________.
Escriba el número entero se puede representar con este desplazamiento ______.

Observe la recta numérica presentada en la imagen y el desplazamiento (flecha azul) que se ha señalado en ella

Escriba el punto inicial de este desplazamiento ______.
Escriba el punto final ______
Responda y argumente: ¿Este último punto está ubicado a la derecha o a la izquierda del origen? ____________________________________.
Escriba el número entero se puede representar con este desplazamiento ______.

Continuación actividad 1 taller 2

<table>
<tr>
<td>
Observa la gráfica y responda

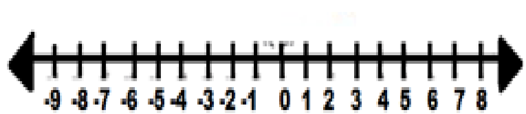


¿Qué número entero se puede representar con el desplazamiento pintado de azul? ______.

¿Qué número entero se puede representar con el desplazamiento pintado de rojo? ______.

¿Cuál de las siguientes operaciones se puede representar con el desplazamiento pintado de negro?
A. 2 – 3
B. -2 – 3
C. 2 + 3
¿Cuál es el resultado de la operación que seleccionó? ______.

Represente sobre la recta numérica la operación 3+4

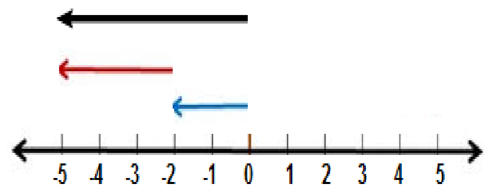


¿El resultado de las operaciones representadas gráficamente en este cuadro es un número positivo o negativo?

____

Explique su respuesta

____
</td>
<td>
Observa la gráfica y responda



¿Qué número entero se puede representar con el desplazamiento pintado de azul? ______.

¿Qué número entero se puede representar con el desplazamiento pintado de rojo? ______.

¿Cuál de las siguientes operaciones se puede representar con el desplazamiento pintado de negro?
A. 2 – 3
B. -2 – 3
C. 2 + 3
¿Cuál es el resultado de la operación que seleccionó? ______.

Represente sobre la recta numérica la operación -3-4

¿El resultado de las operaciones representadas gráficamente en este cuadro es un número positivo o negativo?

____

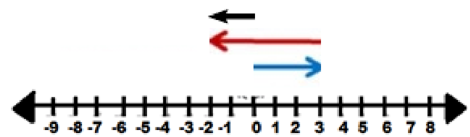
_Explique su respuesta

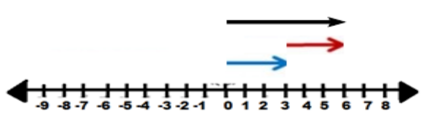
____
</td>
</tr>
</table>

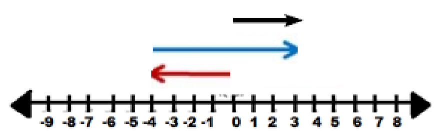
ACTIVIDAD 2 (Nivel de razonamiento 2)

Desarrolle las tareas propuestas y responda, en cada caso, las preguntas planteadas teniendo en cuenta la información o la imagen presentada.

<table>
<tr>
<td>
En la recta numérica que observa a continuación se ha representado gráficamente la adición:
(-4) + (-3) = -7


¿Qué número entero se puede representar con el desplazamiento pintado de azul? _____.
¿Qué número entero se puede representar con el desplazamiento pintado de rojo? _____.
¿Cuál de las siguientes operaciones tiene el mismo resultado de la adición representada en la gráfica anterior?
a. -4 +7
b. 4 -3
c. -4 -3
Explique su respuesta
</td>
<td>
En la recta numérica que observa a continuación se ha representado gráficamente la adición:
3 + (-5) = -2


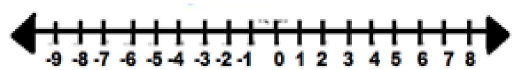
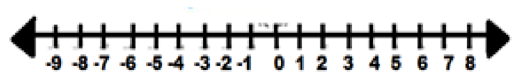
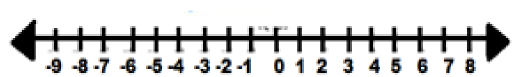
¿Qué número entero se puede representar con el desplazamiento pintado de azul? _____.
¿Qué número entero se puede representar con el desplazamiento pintado de rojo? _____.
¿Cuál de las siguientes operaciones tiene el mismo resultado de la adición representada en la gráfica anterior?
a. -3 – 5
b. 3 – 5
c. -3 + 5
Explique su respuesta
</td>
</tr>
<tr>
<td>
En la recta numérica que observa a continuación se ha representado gráficamente la operación
3 - (-3) = 6


¿Qué número entero se puede representar con el desplazamiento pintado de azul? ______.
¿Qué número entero se puede representar con el desplazamiento pintado de rojo? ______.
¿Cuál de las siguientes operaciones tiene el mismo resultado de la operación representada en la gráfica anterior?
a. 3 + 3
b. 3 – 3
c. -3 + 3
Efectúe las operaciones y explique su respuesta
</td>
<td>
En la recta numérica que observa a continuación se ha representado gráficamente la operación
-4 – (-7)= 3
¿Qué


número entero se puede representar con el desplazamiento pintado de azul? ______.
¿Qué número entero se puede representar con el desplazamiento pintado de rojo? ______.
¿Cuál de las siguientes operaciones tiene el mismo resultado de la operación representada en la gráfica anterior?
a.-4 + 7
b. -4 - 7
c. 4 + 7
Efectúe las operaciones y explique su respuesta
</td>
</tr>
</table>

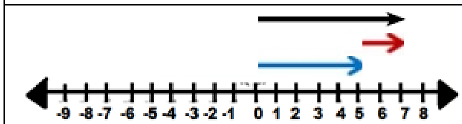
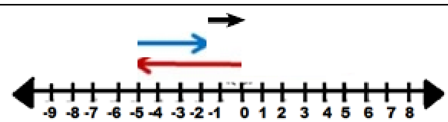
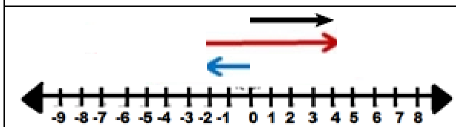
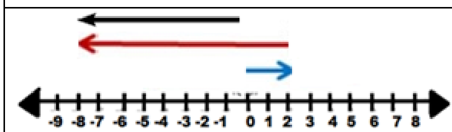
ACTIVIDAD 3 (Nivel de razonamiento 3)

Complete el cuadro escribiendo la operación que le permite resolver el problema planteado. Represente en una recta numérica esta operación

Situación	Operación	Grafica
Felipe tenía 8 canicas al iniciar un juego. Ganó 3 canicas por la mañana y perdió 9 canicas por la tarde. ¿Cuántas canicas tiene Felipe después del juego de la tarde?		
Las temperaturas máxima y mínima registradas durante el mes de noviembre de 2016 en la ciudad de Calgary, en Canadá, fueron respectivamente 3 °C y -8 °C. ¿Cuál es la diferencia entre las temperaturas, máxima y mínima de la ciudad de Calgary en ese mes?		
En la primera fase de un campeonato intercolegial uno de los equipos anotó 9 goles (goles a favor) y le anotaron 14 goles (goles en contra). ¿Cuál es la diferencia entre el número de goles a favor y el número de goles en contra?		
En las eliminatorias para el mundial de futbol de 2018, uno de los equipos europeos tiene una diferencia de goles de -4 y ha anotado 8 goles en total. ¿Cuántos goles le han anotado a ese equipo?		

ACTIVIDAD 4 (Nivel de razonamiento 3)

Relacione cada operación de la izquierda con su correspondiente representación en la recta numérica y resultado. (unir con una línea)

Operación	Gráfica	Resultado
a. -5 – (- 3)		-6
b. 2 + (-8)		-8
c. -3 + (-5)		7
d. 5 – (-2)		-2
e. -2 – (-6)		4

ACTIVIDAD 5 (Nivel de razonamiento 4)

La tabla de posiciones de los campeonatos de futbol proporciona, entre otros datos, el número de goles a favor y en contra de cada equipo, así como la diferencia de goles.

A continuación, se muestran algunos resultados de la eliminatoria de la Eurocopa 2015. De acuerdo con la información, indique si la afirmación es verdadera o falsa y justifique. Tenga en cuenta que la diferencia de goles se calcula restando, al número de goles a favor, el número de goles en contra.

<table>
<tr><th>Información</th><th>Afirmación</th><th>Razón</th></tr>
<tr><td><table><tr><th>Equipo</th><th>Goles a favor</th><th>Diferencia de goles</th></tr><tr><td>Andorra</td><td>4</td><td>-32</td></tr></table></td><td>Al equipo de Andorra le anotaron en total 28 goles.</td><td></td></tr>
<tr><td><table><tr><th>Equipo</th><th>Goles en contra</th><th>Diferencia de goles</th></tr><tr><td>Luxemburgo</td><td>27</td><td>-21</td></tr></table></td><td>En este campeonato el equipo de Luxemburgo anotó en total 6 goles.
____________________</td><td></td></tr>
<tr><td><table><tr><th>Equipo</th><th>Goles a favor</th><th>Goles en contra</th></tr><tr><td>Letonia</td><td>6</td><td>19</td></tr></table></td><td>La diferencia de goles del equipo de Letonia es -13.
____________________</td><td></td></tr>
<tr><td><table><tr><th>Equipo</th><th>Goles en contra</th><th>Diferencia de goles</th></tr><tr><td>Ucrania</td><td>4</td><td>10</td></tr></table></td><td>El equipo de Ucrania anotó en este campeonato 6 goles en total.
____________________</td><td></td></tr>
<tr><td><table><tr><th>Equipo</th><th>Goles a favor</th><th>Diferencia de goles</th></tr><tr><td>Macedonia</td><td>6</td><td>-21</td></tr></table></td><td>El equipo de Macedonia recibió un total de 27 goles en este campeonato.
____________________</td><td></td></tr>
</table>

ACTIVIDAD 6 (Nivel de razonamiento 4)

De acuerdo con la información presentada, responda las preguntas y justifique su respuesta.

Cuando ya se han juagado algunos partidos de la tercera fase de las eliminatorias de AFRICA, al mundial Rusia 2018, las estadísticas de Goles a favor (GF), goles en contra (GC) y goles de diferencia (GD), para cada grupo, son las que se muestran a continuación.

GRUPO A

Equipo	GF	GC
Túnez	5	1
RD Congo	7	3
Guinea	4	7
Libia	3	8

GRUPO B

Equipo	GF	GD
Nigeria	10	+7
Zambia	5	+1
Camerún	3	-4
Argelia	3	-4

GRUPO C

Equipo	GC	GD
Costa de Marfil	1	+5
Marruecos	0	+6
Gabón	3	-3
Malí	9	-8

GRUPO D

Equipo	GF	GD
Burkina Faso	3	+2
Senegal	3	+1
Sudáfrica	4	+0
Cabo Verde	2	-3

GRUPO E

Equipo	GC	GD
Uganda	0	+2
Egipto	2	+2
Ghana	3	-2
Congo	4	-2

PREGUNTA	RESPUESTA	JUSTIFICACION
¿Qué equipos del grupo A tienen la misma diferencia de goles?		
¿Qué equipos del grupo B tienen el mismo número de goles en contra?		
¿Qué equipo del grupo D tiene el mayor número de goles en contra?		
¿Qué equipo del grupo E tiene el menor número de goles a favor?		
¿Cuál de los equipos de las eliminatorias africanas tiene mayor número de goles a favor?		
¿Cuántos goles debe anotar el equipo de Ghana para tener el mismo número de goles a favor que el equipo de Sudáfrica?		
¿Cuántos goles en contra más tiene Argelia que Cabo verde?		

Actividad 1(Nivel de razonamiento 1)

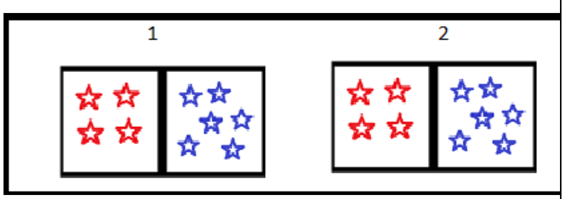
3.3 Taller número 3

METODOLOGIA	Las actividades 1 y 2 serán desarrolladas individualmente, las actividades 3, 4 y 5 se desarrollarán de forma grupal para facilitar el intercambio de ideas y argumentos.
ESTANDAR	**Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones**
TAREA(S)	Aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición de números enteros.
NIVELES DE RAZONAMIENTO	Actividad 1: Nivel de razonamiento 1 Actividad 2: Nivel de razonamiento 2 Actividades 3 y 4: Nivel de razonamiento 3 Actividades 5 Nivel de razonamiento 4

Actividad 1(Nivel de razonamiento 1)

Teniendo en cuanta la imagen presentada, desarrolle las tareas y responda las preguntas.

La siguiente imagen muestra los arreglos 1 y 2 de estrellas. En cada arreglo hay 4 estrellas rojas y 6 estrellas azules.



Exprese el número total de estrellas del arreglo 1 usando una adición

____

Exprese el número total de estrellas del arreglo 2 usando una adición

____

¿Cuál de las siguientes expresiones permite calcular el **total** de estrellas que hay en la imagen?

A. (2) x (10 + 10)
B. (2) x (6 + 4)
C. (4) x(6 + 4)

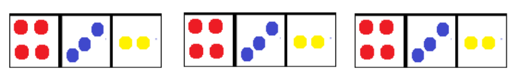
Escriba y determine el resultado de la expresión que seleccionó:

Observe las imágenes A, B y C que aparecen a continuación. Para calcular el total de puntos de **una de ellas** se puede utilizar la expresión:

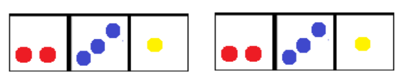
(3) x (4+3+2)

¿Cuál es la imagen?

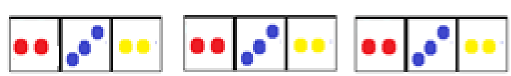
A.



B.

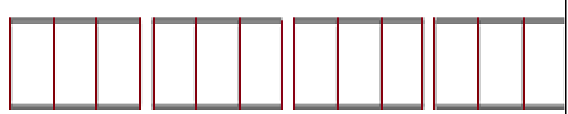


C.



Complete la imagen que se muestra a continuación para que corresponda a una representación de la expresión

(4)x(3 + 2 + 5)



Actividad 2(Nivel de razonamiento 2)

A continuación, se presentan dos procedimientos diferentes y correctos para desarrollar la misma expresión:

Procedimiento 1:

(3) x (5 – 2 + 7) =
(3)x(5) + (3)x(-2) + (3)x(7) =
15 – 6 + 21 =
30

Procedimiento 2:

(3) x (5 – 2 + 7) =
(3) x (12 – 2) =
(3) x (10) =
30

Explique, de acuerdo con lo observado, cómo se desarrolló el procedimiento 1.

____
____
____
____

¿Se aplicaron propiedades de la adición y el producto que usted ha trabajado antes?

____
____
____
____

Explique, de acuerdo con lo observado, cómo se desarrolló el procedimiento 2.

____
____
____
____

¿Por qué razón, con los dos procedimientos, se obtiene el mismo resultado?

____
____
____
____

Aplicando los procedimientos mostrados en 1 y 2, desarrolle la expresión:

Procedimiento 1
(-5) X (4 + 2 - 5) =

Procedimiento 2
(-5) X (4 + 2 - 5) =

Escriba una expresión, como las planteadas anteriormente, que permita resolver el problema propuesto a continuación. Desarrolle la expresión aplicando los procedimientos 1 y 2.

En un salón de clase hay 10 mesas donde el profesor ubicó los cuadernos que va a repartir entre sus alumnos. En cada mesa colocó 8 cuadernos rayados, 9 cuadernos cuadriculados y 5 de ferrocarril. ¿Cuántos cuadernos tiene el profesor para distribuir entre sus alumnos?

EXPRESIÓN: ________________

Procedimiento 1
(   ) x (   )

Procedimiento 2
(   ) x (   )

Actividad 3(Nivel de razonamiento 3)

Escriba el número entero que debe ir en cada espacio, para que la igualdad sea correcta. Desarrolle completamente la operación en los casos que lo requiera

1. $(\_\_)x(5+7+4+2)=$ $(\_\_)x(5)+(\_\_)(7)+(\_\_)(4)+(\_\_)(2)=$ $35+49+28+14=$ $\_\_\_\_\_$	2. $(\_\_)x(6+3+5)=$ $(\_\_)x(14)=$ 70
3. $(\_\_)x(-9+7-2)=$ $(\_\_)x(-4)=$ 24	4. $(\_\_)x(6-8+5)=$ $(\_\_)x(6)+(\_\_)x(-8)+(\_\_)x(5)=$ $-30+40-25=$ $\_\_\_\_$
5. $(\_\_)x(3-6-10)=$ $(\_\_)x(\_\_)=$ -26	6. $(-9)x(\_\_+\_\_+\_\_)=$ $(-9)x(\_\_)+(-9)x(\_\_)+(-9)x(\_\_)=$ $27-18-36=$ $\_\_\_\_$

Actividad 4(Nivel de razonamiento 3)

Complete el siguiente cuadro, indicando el producto a desarrollar, la descomposición y el resultado, como se muestra en el ejemplo

Producto	Descomposición	Resultado
(9)x(-12)	(9)x(- 3 - 4 - 5)	-108
	(-3)x(8 - 11)	
(-4)x(-15)		
	(7)x(5 + 2 – 8 + 4)	
(-5)x(18)		

Actividad 5(Nivel de razonamiento 4)

Teniendo en cuenta la situación planteada, responda las preguntas y justifique

Para el desarrollo de una sesión de clase, la profesora de preescolar ha distribuido a sus estudiantes en cuatro mesas de trabajo. Sobre cada mesa ha dispuesto los siguientes materiales:

9 lápices verdes, 7 lápices rojos, 8 lápices amarillos, 4 cartulinas azules, 9 cartulinas blancas, 7 cartulinas amarillas, 8 marcadores azules, 6 marcadores rojos, 4 marcadores verdes.

PREGUNTA	RESPUESTA	JUSTIFICACION
¿Cuántos lápices, de cada color, hay en total en este salón clase?		
Si del total de lápices que hay en este salón se pierden 5 ¿cuántos lápices quedan?		
¿Cuántas cartulinas, de cada color hay en total en este salón clase?		
Si del total de cartulinas que hay en el salón, se usan todas las cartulinas azules de una de las mesas ¿Cuántas cartulinas quedan en el salón, sin usar?		
¿Cuántos marcadores, de cada color, hay en este salón clase?		
Si un niño trajo de su casa 3 marcadores rojos adicionales ¿cuántos marcadores en total hay ahora en este salón?		

3.4 Taller número 4

METODOLOGIA	La actividad 1 será desarrollada individualmente, las actividades 2,3,4 y 5 serán desarrolladas en pareja para facilitar la construcción y evaluación de procedimientos.
ESTANDAR	**Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones**
TAREA(S)	Comprende la jerarquía de las operaciones con números enteros y la relación que existe entre las estructuras aditiva y multiplicativa.
NIVELES DE RAZONAMIENTO	Actividad 1: Nivel de razonamiento 1 Actividades 2 y 3: Nivel de razonamiento 2 Actividad 4: Nivel de razonamiento 3 Actividad 5 : Nivel de razonamiento 4 Actividad 6 : Nivel de razonamiento 4

ACTIVIDAD 1 (Nivel de razonamiento 1)

De acuerdo con la información presentada, desarrolle las actividades y responda las preguntas.

Seleccione entre las siguientes opciones el resultado de la operación: $\left[-\left(-3\right)x\left(-2\right)\right]$ A. -6 B. 6 C. 5 Explique el proceso que se debe aplicar para llegar al resultado seleccionado. Seleccione entre las siguientes opciones el resultado de la operación: $-(-7+2)$ A. -5 B. 9 C. 5 Explique el proceso que se debe aplicar para llegar al resultado seleccionado.	Seleccione entre las siguientes opciones el resultado de la operación: $-(-3)x(2)+(-1)x(4)$ A. 10 B. -10 C. 2 Explique el proceso que se debe aplicar para llegar al resultado seleccionado. Seleccione entre las siguientes opciones el resultado de la operación: $-(-11+2)+(-3-3)$ A. 3 B. -3 C. 15 Explique el proceso que se debe aplicar para llegar al resultado seleccionado.

ACTIVIDAD 2(Nivel de razonamiento 2)

De acuerdo con la información presentada, desarrolle las actividades y responda las preguntas.

Suprima los paréntesis y desarrolle completamente, en cada caso, las operaciones indicadas:

A. $-(-9)x(-2)+(-7)x(-2)=$

B. $(-7+12)-(-4-10)=$

Desarrolle paso a paso las operaciones encerradas en los paréntesis señalados y determine el resultado de la siguiente expresión.

$$\underbrace{[(-5)-(3)]}_{1}+\underbrace{[(-2)+(-5)]}_{2}=$$

a. Escriba y desarrolle la expresión 1

[______________] =

b. Escriba y desarrolle la expresión 2

[______________] =

c. Escriba los resultados obtenidos en a y b y efectúe la operación indicada.

[___]+[___] =

Desarrolle paso a paso las operaciones encerradas en los paréntesis señalados y determine el resultado de la siguiente expresión.

$$[\underbrace{(-3)x(5)}_{1}+\underbrace{(-4)x(2)}_{2}]-[\underbrace{(-2)x(8)}_{3}-\underbrace{(-1)x(3)}_{4}]$$

a. Escriba y desarrolle el producto 1

$(\_\_\_)x(\_\_\_)=$

b. Escriba y desarrolle el producto 2

$(\_\_\_)x(\_\_\_)=$

c. Escriba y desarrolle el producto 3

$(\_\_\_)x(\_\_\_)=$

d. Escriba y desarrolle el producto 4

$(\_\_\_)x(\_\_\_)=$

e. Escriba los resultados obtenidos en 1, 2, 3 y 4 y efectúe las operaciones indicadas.

Desarróllela completamente.

$$[(\underset{1}{\_\_\_})+(\underset{2}{\_\_\_})]-[(\underset{3}{\_\_\_})-(\underset{4}{\_\_\_})]$$

ACTIVIDAD 3 (Nivel de razonamiento 2)

Indique, en cada expresión, el paso que debe seguir al mostrado para determinar el resultado. Observe el ejemplo

EXPRESION	**PASO SIGUIENTE**
$\left[5-(-2)x(8)\right]+\left[3+(-2)x(-1)\right]=$	$\left[5-(-16)\right]+\left[3+(2)\right]=$
$\left[(-3-2)+3\right]+\left[4+(-1+8)\right]=$	
$-10+\left\{-6+3\right\}=$	
$-\left[-8+5\right]+\left[-2-1\right]=$	
$-\left[-6+(-3)x(-4)\right]+\left[(-8)x(-2)+4\right]=$	
$\left\{-[-5]+[-3]\right\}+2$	
$-\left[(-7)x(-2)+3\right]+\left[2+(-3)x(-2)\right]=$	

ACTIVIDAD 4 (Nivel de razonamiento 3)

A continuación, se muestra, en tres expresiones, el proceso que permite determinar correctamente, el resultado de las operaciones indicadas en ellas. Explique el procedimiento que se realizó en cada uno de los pasos.

EXPRESIÓN	**PROCESO**
$-7+\left\{\left[-(-3)+(-10)\right]-\left[(-2)-(-6)\right]\right\}=$ Paso 1 $\longrightarrow$ $-7+\left\{[3-10]-[-2+6]\right\}=$ Paso 2 $\longrightarrow$ $-7+\left\{[-7]-[4]\right\}=$ Paso 3 $\longrightarrow$ $-7+\left\{-7-4\right\}=$ Paso 4 $\longrightarrow$ $-7+\left\{-11\right\}=$ Paso 5 $\longrightarrow$ $-7-11=$ -18	

$-8+\{-[-(-5+3)+(-2-7)]-12\}=$ Paso 1 → $-8+\{-[-(-2)+(-9)]-12\}=$ Paso 2 → $-8+\{-[2-9]-12\}=$ Paso 3 → $-8+\{-[-7]-12\}=$ Paso 4 → $-8+\{7-12\}=$ Paso 5 → $-8+\{-5\}=$ Paso 6 → $-8-5=$ -13	
$\{[-7+(2-8)]+[(3-1)-6]\}-\{[2-(6-5)]+[(-4+9)-2]\}=$ Paso 1 → $\{[-7+(-6)]+[(2)-6]\}-\{[2-(1)]+[(5)-2]\}=$ Paso 2 → $\{[-7-6]+[2-6]\}-\{[2-1]+[5-2]\}=$ Paso 3 → $\{[-13]+[-4]\}-\{[1]+[3]\}=$ Paso 4 → $\{-13-4\}-\{1+3\}=$ Paso 5 → $\{-17\}-\{4\}=$ Paso 6 → $-17-4=$ -21	

ACTIVIDAD 5 (Nivel de razonamiento 4)

En la primera columna de la tabla se presenta una igualdad que resultó de transformar una expresión, evalúe si el procedimiento efectuado es o no correcto y argumente su respuesta en la tercera columna.

Igualdad	**Correcto/incorrecto**	**Argumento**
$-(-10)x(-1)+(-2)x(-7)=$ $-(10)+(-14)$		
$-(-4+6)-(2-8)=$ $-(2)-(-6)$		
$[-(3)x(-2)+(-5)x(4)]+5=$ $[-(-6)+(-20)]+5$		
$[(-5-7)+(-3+2)]-1=$ $[(-12)+(-1)]-1$		
$-5-[(-4)x(-2)+(-6)x(2)]=$ $-5-[(-8)+(12)]=$		

3.5 Taller número 5

METODOLOGIA	La actividad 1 será desarrollada individualmente, las actividades 2, 3, 4 y 5 serán desarrolladas en pareja para facilitar la construcción de argumentos y el intercambio de ideas y razonamientos.
ESTANDAR	**Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.**
TAREA(S)	Expresa la fracción como razón y reconoce que la razón es constante cuando las magnitudes que se relacionan son directamente proporcionales.
NIVELES DE RAZONAMIENTO	Actividad 1: Nivel de razonamiento 1 Actividad 2: Nivel de razonamiento 2. Actividad 3: Nivel de razonamiento 3 Actividades 4 y 5 : Nivel de razonamiento 4

ACTIVIDAD 1(Nivel de razonamiento 1)

De acuerdo con la información presentada, desarrolle las actividades y responda las preguntas.

En la siguiente imagen usted observa una tira formada por cuadrados iguales de colores azul y rojo. Cuente y determine el número de cuadrados azules, rojos y el total de cuadrados.  a. Escriba la razón entre el número de cuadrados rojos de la tira y el total de cuadrados ____ b. Escriba la razón entre el número de cuadrados azules de la tira y el total de cuadrados: ____ c. Escriba la razón entre el número de cuadrados rojos de la tira y el número de cuadrados azules: ____	En la siguiente imagen usted observa un grupo de personas. Cuente y determine el total de personas caracterizadas como hombre, caracterizadas como mujerer y el total de personas.  a. Escriba la razón entre el número total de mujeres y el número total de personas: ____ b. Escriba la razón entre el número total de hombres y el número total de personas: ____ c. Escriba la razón entre el número total de mujeres y el número total de hombres: ____

ACTIVIDAD 2 (Nivel de razonamiento 2)

Seleccione, entre las imágenes siguientes, aquella que cumple con la condición dada. Justifique su respuesta.

1. La razón entre el número de cuadros amarillos y el número de cuadros blancos es $\frac{1}{2}$

A. 

B. 

C. 

Esta opción cumple con la condición dada porque:

____

____

2.La razón entre el número de mujeres y el número de hombres es $\frac{6}{4}$

A. 

B. 

C. 

Esta opción cumple con la condición dada porque:

Seleccione en cada caso la opción que corresponde

1. La razón entre la cantidad de cuadros azules y la cantidad de cuadros rojos.

A. $\frac{4}{10}$ B. $\frac{6}{20}$ C. $\frac{1}{5}$

Esta opción corresponde a la razón representada porque:

____

____

2. La razón entre la cantidad de hombres y la cantidad de mujeres.

A. $\frac{4}{8}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$

Esta opción corresponde a la razón representada en la imagen porque:

ACTIVIDAD 3 (Nivel de razonamiento 3)

Teniendo en cuenta la información dada, en cada caso, complete la tabla.

A. La razón entre el número de carros con placa par y el número total de carros en una ciudad es $\frac{3}{5}$

Carros placa par	3					
Total de carros	5	10	20	40	50	100

B. La razón entre el número de hogares donde tienen una mascota y el número total de hogares en Bogotá es $\frac{6}{10}$

Hogares con mascota	6					
Total de hogares	10	20	40	50	80	100

C. La razón entre el número de estudiantes universitarios que finalizan su carrera y el total de universitarios inscritos es $\frac{3}{10}$

Universitarios que terminan la carrera	3					
Total de universitarios	10	30	50	60	90	100

La siguiente tabla muestra, en la columna de la izquierda algunos porcentajes y en la columna de la derecha las fracciones a las que corresponden. Complete la tabla

PORCENTAJE	RAZÓN
40%	$\frac{40}{100}$
25%	$\frac{25}{100}$
32%	
	$\frac{50}{100}$
20%	
	$\frac{70}{100}$

Teniendo en cuenta la razón dada, complete la siguiente tabla y responda la pregunta.

A. La razón entre el número de hogares que tienen servicio de televisión privada y el total de hogares que tienes servicio de televisión es $\frac{4}{5}$

Hogares televisión paga	4					
Total de hogares televisión	5	10	15	20	50	100

¿Qué porcentaje del total de hogares que tienen televisión, tiene televisión paga? ______

Explique el procedimiento utilizado para hallar el porcentaje, a partir de la razón:

ACTIVIDAD 4 (Nivel de razonamiento 4)

Teniendo en cuenta la información presentada en la primera columna, determine si la afirmación de la segunda columna es correcta o incorrecta. Justifique en la tercera columna.

Información	Afirmación	Justificación
A. La razón entre el número de personas que usan internet en el celular y el total de personas que usan internet es $\frac{7}{10}$	Por cada 20 personas que usan internet, 6 personas lo usan en un dispositivo diferente al celular. ________________	
B. Cuatro de cada cien personas tienen computador personal en Colombia.	La razón entre el número de personas que tienen computador personal y el total de personas en Colombia es $\frac{2}{25}$ ________________	
C. El 12% de los estudiantes que asisten a un Colegio en Bogotá, se desplaza al colegio en bicicleta.	La razón entre el número de estudiantes que se desplazan al colegio en bicicleta y el total de estudiantes es $\frac{3}{25}$ ________________	
D. La razón entre el número de personas que usan el sistema de transporte Transmilenio y el total de personas que viven en Bogotá es $\frac{3}{5}$	El 70% de las personas que viven en Bogotá, usan el sistema de transporte Transmilenio. ________________	

ACTIVIDAD 5 (Nivel de razonamiento 4)

Teniendo en cuenta la información presentada a continuación, responda las preguntas y justifique la respuesta, en cada caso.

Las siguientes son algunas cifras presentadas por el Ministerio de las Tecnologías de la Información y las comunicaciones Min Tic, acerca del uso del internet en Colombia.

- 3 de cada 4 hogares con internet, tienen wifi.
- El 12% de los usuarios de internet, ha descargado alguna vez una aplicación.
- 15% de los hogares que tienen internet, lo comparten con un vecino.
- La razón entre el número de usuarios que usa internet para vender artículos y el total de usuarios de internet es $\frac{1}{10}$.

PREGUNTA	RESPUESTA	JUSTIFICACIÓN
¿Qué porcentaje de los hogares con internet, tiene wifi?		
¿Cuál es la razón entre el número de usuarios de internet que ha descargado alguna vez una aplicación y el total de usuarios?		
Si se tienen 200 usuarios de internet, ¿cuántos de ellos comparten internet con un vecino?		
¿Qué porcentaje de los usuarios de internet, lo usa para vender artículos?		

3.6 Taller número 6

METODOLOGIA	La actividad 1 será desarrollada de manera individual, las actividades 2, 3, 4 y 5 serán desarrolladas en grupo para facilitar la argumentación.
ESTANDAR	**Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.**
TAREA(S)	Encuentra el valor que toma una magnitud cuando varia inversamente en relación con otra.
NIVELES DE RAZONAMIENTO	Actividad 1: Nivel de razonamiento 1 Actividad 2: Nivel de razonamiento 2 Actividad 3: Nivel de razonamiento 3 Actividad 4: Nivel de razonamiento 3 Actividad 5: Nivel de razonamiento 4

ACTIVIDAD 1 (Nivel de razonamiento 1) De acuerdo con la información presentada, responda las preguntas y desarrolle las actividades.

1. La siguiente tabla muestra los gramos de azúcar necesarios para preparar algunas cantidades de cierto tipo de galletas.

Cantidad de galletas	**Gramos de azúcar**
3	24
9	72
15	120
24	192

Escriba los gramos de azúcar se necesitan para preparar 9 galletas. ________.

Escriba el número de galletas que se pueden preparar con 120 gramos de azúcar ________.

Escriba los gramos de azúcar que se necesitan para preparar una galleta ________.

2. La siguiente tabla muestra el número de días para los que alcanza una caja de galletas, dependiendo del número de galletas, de esta caja, que se consuman diariamente.

Galletas diarias	**Días para los que alcanza la caja**
2	15
3	10
5	6
6	5

Escriba cuántos días dura la caja de galletas, si se consumen 3 galletas diarias ________.

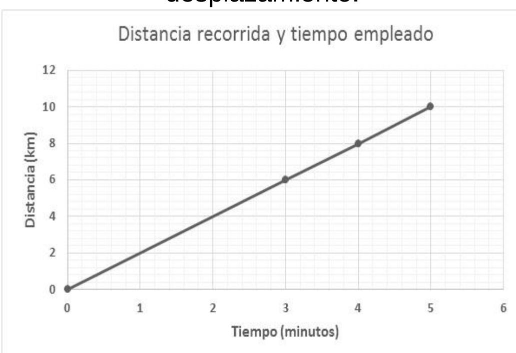
Complete: La caja de galletas dura 6 días si se consumen _____galletas diarias

Responda: Si se consumiera una galleta diariamente ¿Para cuántos días alcanzaría la caja de galletas? ________.

ACTIVIDAD 2 (Nivel de razonamiento 2) De acuerdo con la información presentada, responda las preguntas y desarrolle las actividades.

Un automóvil se mueve de tal forma que mantiene, aproximadamente, la misma rapidez durante todo el recorrido.

La siguiente gráfica muestra la relación entre la distancia, en kilómetros, recorrida por el automóvil y el tiempo empleado en el desplazamiento.



¿Qué distancia recorrió el automóvil en 4 minutos?

________.

¿Cuántos minutos empleó el automóvil para recorrer 10 km? ________.

¿Qué distancia recorrió el automóvil en un minuto?
________.

Explique la relación entre las dos magnitudes (tiempo y distancia) de acuerdo con el comportamiento mostrado en la gráfica.

Si el automóvil se sigue desplazando a la misma rapidez ¿qué distancia recorrerá en 20 minutos? Explique el procedimiento aplicado para determinar esta distancia.

Se necesita transportar cierta cantidad de leche usando envases de la misma capacidad.

La siguiente gráfica muestra la relación entre el número de envases (de la misma capacidad) necesarios para transportar la leche y la capacidad de los envases, en cada caso.

¿Cuántos envases se necesitan para transportar la leche, si se usan envases iguales, de 8 litros de capacidad? ________.

Cuando se usan 10 envases iguales para transportarla leche ¿qué capacidad debe tener cada uno? ________.

Si se usara un solo envase para transportar toda la leche, ¿qué capacidad debería tener este envase?

Si se usan envases iguales de mayor capacidad, el número de envases requeridos ¿aumenta o disminuye? ______________.

¿Cuántos envases iguales de medio litro se requerirían para transportar la leche? Explique el procedimiento aplicado para encontrar el número de envases.

ACTIVIDAD 3 (nivel de razonamiento 3) Teniendo en cuenta la información presentada desarrolle las actividades y responda las preguntas

A continuación, se describen en la primera columna algunas parejas de magnitudes. Indique en la segunda columna el tipo de relación (directa o inversa) que existe entre estas magnitudes y justifique su respuesta en la tercera columna.

Magnitudes	Relación	Justificación
A. Rapidez con la que camina una persona y tiempo que tarda en recorrer una cierta distancia.		
B. Horas que dura encendida una bombilla y gasto de energía eléctrica.		
C. Cantidad de agua que sale por una llave y tiempo que tarda en llenar un tanque vacío.		
D. Superficie de una pared y cantidad de pintura necesaria para pintarla.		
E. Cantidad de gas consumido en una residencia y valor a pagar en la factura.		

Actividad 4 (Nivel de razonamiento 3) Observe los ejemplos y complete la tabla presentada en cada caso. Indique el tipo de relación (directa o inversa) entre las magnitudes A y B y justifique.

<table>
<tr><th>Tabla</th><th>Relación</th><th>Justificación</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>Magnitud A</th><th>Magnitud B</th><th>Constante de proporcionalidad A X B</th></tr>
<tr><td>18</td><td>2</td><td>18 X 2 =</td></tr>
<tr><td>12</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>6</td><td></td></tr>
</table>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>Magnitud A</th><th>Magnitud B</th><th>Constante de proporcionalidad A ÷ B</th></tr>
<tr><td>30</td><td>15</td><td>30÷15=</td></tr>
<tr><td>60</td><td>30</td><td></td></tr>
<tr><td>90</td><td>45</td><td></td></tr>
<tr><td>120</td><td>60</td><td></td></tr>
</table>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>Magnitud A</th><th>Magnitud B</th><th>Constante de proporcionalidad A X B</th></tr>
<tr><td>10</td><td>2</td><td>10 ÷ 2=</td></tr>
<tr><td>20</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>30</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>40</td><td>8</td><td></td></tr>
</table>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>Magnitud A</th><th>Magnitud B</th><th>Constante de proporcionalidad A X B</th></tr>
<tr><td>2</td><td>24</td><td>2 X 24=</td></tr>
<tr><td>3</td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>12</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>8</td><td></td></tr>
</table>
</td><td></td><td></td></tr>
</table>

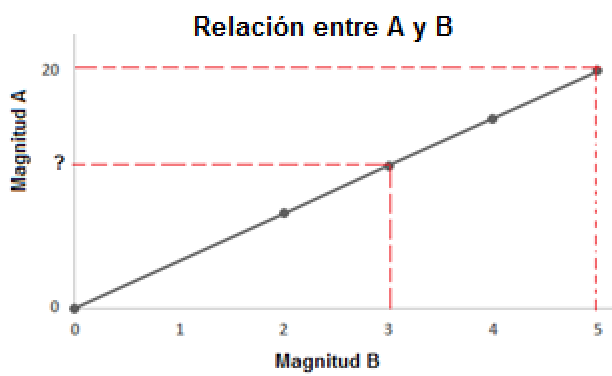
Actividad 5 (Nivel de razonamiento 4) Teniendo en cuenta la información presentada, indique si las afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique.

1. La siguiente tabla muestra los valores que toman dos magnitudes que están relacionadas.

Magnitud A	3		27
Magnitud B	18	6	2

AFIRMACIÓN	VERDADERO O FALSO	JUSTIFICACIÓN
1. Las magnitudes A y B se relacionan de manera directa.		
2. El valor que falta en la tabla es 9.		
3. La constante de proporcionalidad es 54.		

2. La siguiente gráfica representa la relación entre las magnitudes A y B



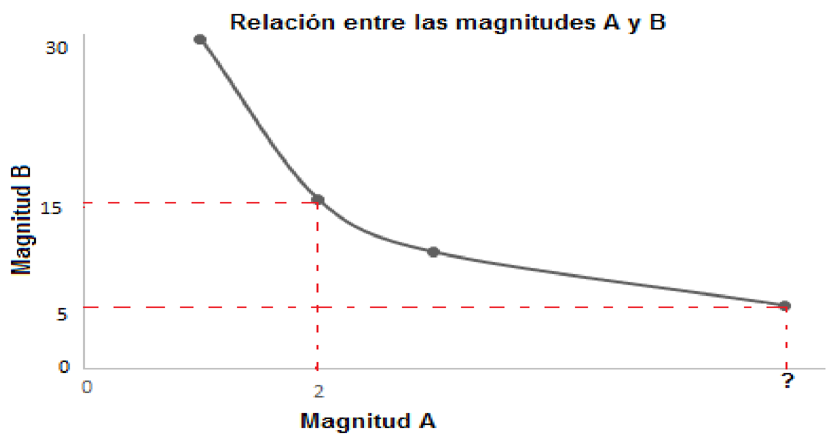
AFIRMACIÓN	VERDADERO O FALSO	JUSTIFICACIÓN
1. Las magnitudes A y B se relacionan de manera directa.		
2. La magnitud A vale 15 cuando B vale 3 .		
3. La constante de proporcionalidad entre las dos magnitudes es 10.		

3. La siguiente tabla muestra los valores que toman dos magnitudes A y B que están relacionadas

Magnitud A	3	5	15
Magnitud B	20		4

AFIRMACIÓN	VERDADERO O FALSO	JUSTIFICACIÓN
1. Las magnitudes se relacionan de manera inversa.		
2. B vale 12 cuando A vale 5.		
3. La constante de proporcionalidad entre las dos magnitudes es 5.		

4. La siguiente gráfica muestra la relación entre dos magnitudes A y B



AFIRMACIÓN	VERDADERO O FALSO	JUSTIFICACIÓN
1. Las magnitudes B y A se relacionan de manera inversa.		
2. A vale 20 cuando la magnitud B toma el valor 5 .		
3. La constante de proporcionalidad entre las dos magnitudes es 30.		

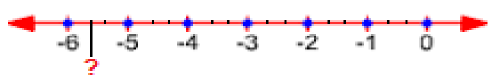
3.7 Taller número 7

METODOLOGIA	La actividad 1 será desarrollada de manera individual, las actividades 2, 3, 4 y 5 serán desarrolladas en parejas para facilitar la construcción de argumentos.
ESTANDAR	**Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales y de las operaciones entre estos números en diferentes contextos.**
TAREA(S)	Compara y ordena números racionales. Identifica fracciones equivalentes a una fracción dada.
NIVELES DE RAZONAMIENTO	Actividad 1: Nivel de razonamiento 1 Actividad 2: Nivel de razonamiento 2. Actividad 3: Nivel de razonamiento 3 Actividades 4 y 5 : Nivel de razonamiento 4

Actividad 1(Nivel de razonamiento 1) Teniendo en cuenta la información presentada, desarrollar las actividades y responder las preguntas.

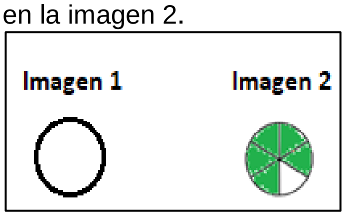
En cada caso seleccione el número racional representado por:

1. El punto señalado en la recta numérica mostrada.



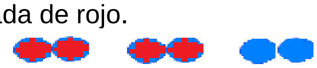
A. $\frac{-5}{3}$ B. $\frac{-17}{3}$ C. $\frac{-6}{3}$

2.) La parte de la circunferencia mostrada en la imagen 1, que se ha coloreado de verde en la imagen 2.



A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{1}{5}$

3. La parte del número total de círculos coloreada de rojo.

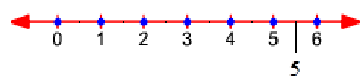


A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$

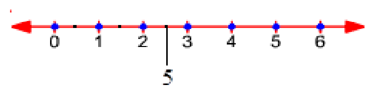
Seleccione la imagen que es una representación del número racional indicado.

1. $\frac{5}{2}$

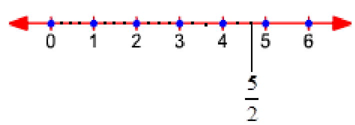
A.



B.

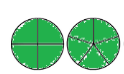


C.

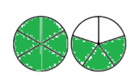


2. $\frac{9}{4}$

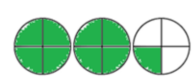
A.



B.



C.



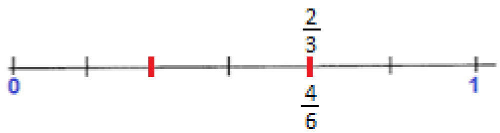
3. $\frac{2}{5}$

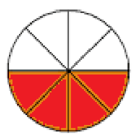
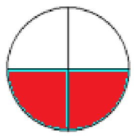
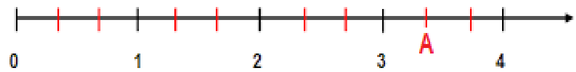
A.

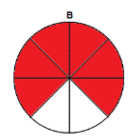
B.

C.

ACTIVIDAD 2 (nivel de razonamiento 2)

<table>
<tr>
<td>
Observe en cada caso las figuras, responda las preguntas y justifique


1. En la recta numérica que se muestra a continuación, se puede observar que dos fracciones, corresponden a un mismo punto, explique por qué
$\frac{4}{8}$ $\frac{2}{4}$
 
2. Las dos circunferencias que usted observa en la figura tienen el mismo radio. El área de la región coloreada en la primera circunferencia es igual al área de la región coloreada en la segunda (las regiones tienen igual tamaño). Explique por qué
</td>
<td>
Seleccione en cada caso la opción que cumple la condición dada y justifique.
1. El punto A en la recta numérica corresponde a la fracción


A. $\frac{4}{2}$ B. $\frac{20}{6}$ C. $\frac{40}{9}$
Esta es la fracción porque
2. El área coloreada en la circunferencia representa la fracción.

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{12}{10}$ C. $\frac{4}{16}$
Esta es la fracción porque
</td>
</tr>
</table>

ACTIVIDAD 3 (Nivel de razonamiento 3)

Escriba mayor (>) o menor (<) en el espacio, según corresponda.

A. $\frac{3}{5}$ ___ $\frac{9}{5}$ B. $\frac{10}{11}$ ___ $\frac{5}{11}$

2. A continuación se muestra un proceso que permite ordenar fracciones heterogéneas. Explique el procedimiento aplicado.

Fracciones a ordenar $\frac{3}{4}$ ___ $\frac{2}{3}$

Paso 1 $\frac{3\times 3}{4\times 3}$ ___ $\frac{2\times 4}{3\times 4}$

Paso 2 $\frac{9}{12} > \frac{6}{12}$

Fracciones ordenadas $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$

Escriba mayor (>) o menor (<) en el espacio, según corresponda.

A. $\frac{4}{10}$ ___ $\frac{1}{5}$

B. $\frac{7}{9}$ ___ $\frac{7}{12}$

A continuación, se muestran algunas afirmaciones que son verdaderas. Justifíquelas.

1. Las fracciones $\frac{10}{9}$ y $\frac{30}{27}$ son equivalentes.

2. La fracción $\frac{3}{8}$ es equivalente a la fracción $\frac{12}{32}$.

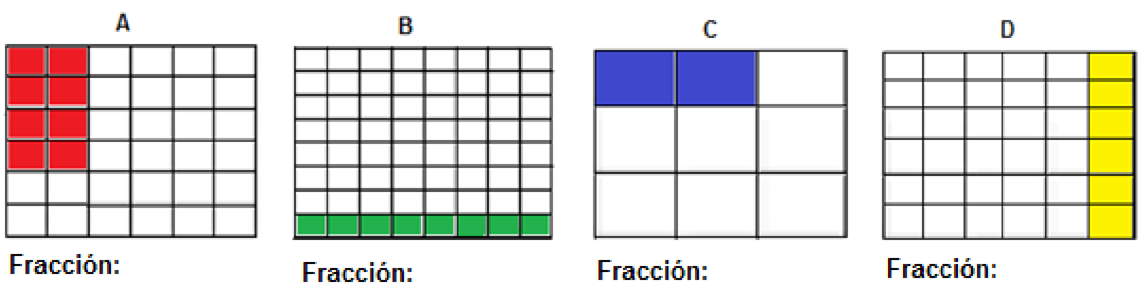
3. $\frac{1}{4}$ es mayor que $\frac{1}{9}$

5. $\frac{1}{8}$ es menor que $\frac{1}{2}$

Actividad 4 (Nivel de razonamiento 4)

A continuación, se muestra un rectángulo, cuya área representará una unidad.

En las figuras A, B, C y D el rectángulo se ha subdividido el rectángulo en partes congruentes (de la misma área) para representar con la región sombreada cuatro fracciones. Escriba la fracción que representa la parte sombreada en cada gráfico, responda las preguntas y justifique



PREGUNTA	RESPUESTA	JUSTIFICACION
¿En cuál de las gráficas, la parte sombreada corresponde a una fracción equivalente a la fracción $\frac{2}{12}$?		
¿En cuál de las gráficas, la parte sombreada corresponde a una fracción equivalente a la fracción $\frac{1}{8}$?		
¿Cuáles son los dos gráficos en los que las partes sombreadas tienen el mismo tamaño?		

Actividad 5 (Nivel de razonamiento 4)

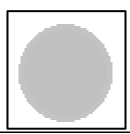
De acuerdo con la información mostrada a continuación, indique si las afirmaciones presentadas son verdaderas o falsas y justifique.

INFORMACIÓN	**AFIRMACIÓN**	**JUSTIFICACIÓN**
$\frac{1}{4}$ de la población mundial no tiene electricidad y $\frac{2}{5}$ de la población no tiene agua potable.	Hay más personas en el mundo sin agua potable que sin electricidad. ____________________	
$\frac{1}{5}$ de las personas en el mundo usa el internet para entrar a las redes sociales, $\frac{1}{4}$ de las personas lo usa para hacer compras en línea.	Más personas en el mundo usan el internet para las compras en línea que las que lo usan para entrar a las redes sociales. ____________________	
$\frac{18}{24}$ de la población mundial tiene teléfono celular.	La fracción de la población mundial con teléfono celular es $\frac{3}{4}$. ____________________	
$\frac{2}{6}$ de la población mundial tiene problemas de obesidad o sobrepeso.	La fracción de población mundial con problemas de obesidad o sobrepeso es $\frac{1}{2}$. ____________________	

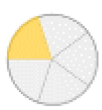
3.8 Taller número 8

METODOLOGIA	Las actividades 1 y 2 se desarrollarán de manera individual y las actividades 3, 4 y 5 se desarrollarán en parejas para facilitar la comprensión de procesos y la construcción de argumentos.
ESTANDAR	**Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales y de las operaciones entre estos números en diferentes contextos.**
TAREA(S)	Justifica procedimientos utilizados para adicionar números racionales. Aplica las propiedades de la adición de números racionales.
NIVELES DE RAZONAMIENTO	Actividad 1: Nivel de razonamiento 1 Actividad 2: Nivel de razonamiento 2. Actividad 3: Nivel de razonamiento 3 Actividades 4 y 5 : Nivel de razonamiento 4

ACTIVIDAD 1(Nivel de desempeño 1) Desarrolle las actividades y responda las preguntas, en cada caso. Tenga en cuenta que, para todas las fracciones representadas, se ha usado como unidad el área del círculo mostrado a continuación.

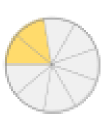


La fracción representada en

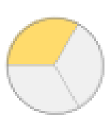


es homogénea con la fracción representada en

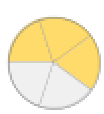
A.



B.



C.



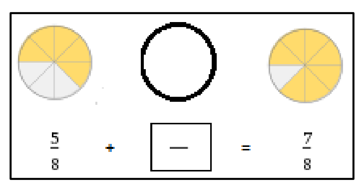
¿Por qué razón?

____

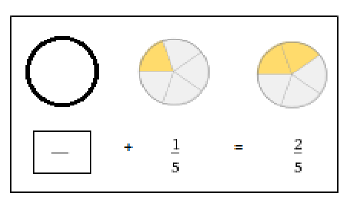
____

Complete las siguientes adiciones de fracciones homogéneas, de tal forma que se cumpla la igualdad. Complete el gráfico.

A.



B.



ACTIVIDAD 2(Nivel de desempeño 2)

Relacione cada una de las fracciones de la primera columna con una fracción homogénea a ella en la segunda columna y con la suma de las dos en la tercera columna. Una con una línea.

FRACCIÓN 1	FRACCIÓN 2	SUMA
$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{5}{9}$
$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{9}{12}$
$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{12}{13}$
$\frac{7}{20}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{8}{20}$
$\frac{8}{13}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{13}{15}$

Explique cómo se efectúa la adición de fracciones homogéneas:

ACTIVIDAD 3(Nivel de desempeño 3)

A continuación, se muestra un procedimiento aplicado para adicionar fracciones heterogéneas. Observe y complete todos los cuadros aplicando el mismo procedimiento.

<table>
<tr><th rowspan="2">Adición
$\frac{3}{8}+\frac{5}{6}$</th><th>Fracción 1
$\frac{3}{8}$</th><th>Múltiplos del denominador
8,16 ,24,32,40,48 …</th><th rowspan="2">M.C.M
24</th><th>Fracción equivalente
$\frac{3\times 3}{8\times 3}=\frac{9}{24}$</th><th rowspan="2">Desarrollo de la adición
$\frac{3}{8}+\frac{5}{6}=$
$\frac{9}{24}+\frac{20}{24}=\frac{29}{24}$</th></tr>
<tr><td>Fracción 2
$\frac{5}{6}$</td><td>Múltiplos del denominador
6,12,18,24,30,36,42 …</td><td>Fracción equivalente
$\frac{5\times 4}{6\times 4}=\frac{20}{24}$</td></tr>
</table>

Adición $\frac{3}{5}+\frac{1}{4}$	Fracción 1	Múltiplos del denominador	M.C.M	Fracción equivalente	Desarrollo de la adición
	Fracción 2	Múltiplos del denominador		Fracción equivalente	

Adición $\frac{2}{7}+\frac{1}{2}$	Fracción 1	Múltiplos del denominador	M.C.M	Fracción equivalente	Desarrollo de la adición
	Fracción 2	Múltiplos del denominador		Fracción equivalente	

Adición $\frac{1}{9}+\frac{2}{15}$	Fracción 1	Múltiplos del denominador	M.C.M	Fracción equivalente	Desarrollo de la adición
	Fracción 2	Múltiplos del denominador		Fracción equivalente	

Explique el procedimiento que se utilizó en los cuadros anteriores para adicionar fracciones heterogéneas

____

____

____

ACTIVIDAD 4(Nivel de desempeño 4)

De acuerdo con la información presentada, responda las preguntas relacionadas con la situación. Explique su procedimiento.

El instituto de lenguas de una universidad ofrece cursos de inglés, francés, alemán e italiano. La siguiente tabla muestra la fracción, del total de estudiantes inscritos, que se matriculó a cada curso.

Curso	Inglés	Frances	Alemán	Italiano
Fracción de estudiantes	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

Pregunta	**Respuesta**	**Procedimiento**
¿Qué fracción de los estudiantes están inscritos en inglés o italiano?		
La fracción de estudiantes inscritos en inglés es: ¿mayor o menor que la fracción de los estudiantes inscritos en alemán o italiano?		
El director del instituto afirma que la fracción de estudiantes inscritos en inglés o en francés corresponde a $\frac{15}{24}$ del total de inscritos. ¿Es verdadera o falsa la afirmación?		

ACTIVIDAD 5(Nivel de desempeño 4)

Observe y explique el procedimiento aplicado en cada uno de los ejercicios mostrados a continuación.

OPERACIÓN INICIAL	**PROCEDIMIENTO APLICADO**	**EXPLICACIÓN**
$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=$	$\frac{5}{12}+\frac{1}{3}=$	
$\frac{2}{9}+\frac{2}{5}+\frac{2}{15}=$	$\frac{2}{9}+\frac{8}{15}=$	
$3\times\left(\frac{3}{6}+\frac{1}{4}\right)$	$\frac{9}{6}+\frac{3}{4}=$	
$\frac{3}{11}+\frac{2}{11}+\frac{1}{11}+\frac{5}{11}=$	$\frac{5}{11}+\frac{6}{11}=$	

ACTIVIDAD 4(Nivel de desempeño 4)

De acuerdo con la información presentada, responda las preguntas relacionadas con la situación. Explique su procedimiento.

El instituto de lenguas de una universidad ofrece cursos de inglés, francés, alemán e italiano. La siguiente tabla muestra la fracción, del total de estudiantes inscritos, que se matriculó a cada curso.

Curso	Inglés	Frances	Alemán	Italiano
Fracción de estudiantes	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

Pregunta	**Respuesta**	**Procedimiento**
¿Qué fracción de los estudiantes están inscritos en inglés o italiano?		
La fracción de estudiantes inscritos en inglés es: ¿mayor o menor que la fracción de los estudiantes inscritos en alemán o italiano?		
El director del instituto afirma que la fracción de estudiantes inscritos en inglés o en francés corresponde a $\frac{15}{24}$ del total de inscritos. ¿Es verdadera o falsa la afirmación?		

ACTIVIDAD 5(Nivel de desempeño 4)

Observe y explique el procedimiento aplicado en cada uno de los ejercicios mostrados a continuación.

OPERACIÓN INICIAL	**PROCEDIMIENTO APLICADO**	**EXPLICACIÓN**
$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=$	$\frac{5}{12}+\frac{1}{3}=$	
$\frac{2}{9}+\frac{2}{5}+\frac{2}{15}=$	$\frac{2}{9}+\frac{8}{15}=$	
$3\times\left(\frac{3}{6}+\frac{1}{4}\right)$	$\frac{9}{6}+\frac{3}{4}=$	
$\frac{3}{11}+\frac{2}{11}+\frac{1}{11}+\frac{5}{11}=$	$\frac{5}{11}+\frac{6}{11}=$	

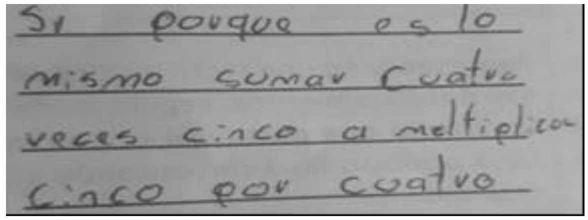
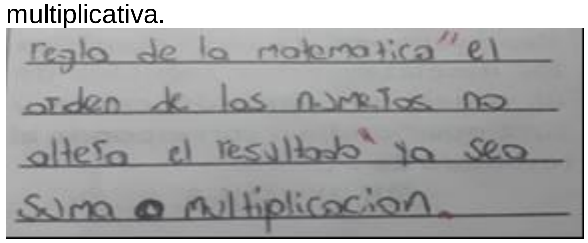
4. Análisis de resultados

En este capítulo se presenta, a manera de ilustración, el análisis de los resultados de la aplicación de una actividad de la secuencia, correspondiente al taller uno. El análisis de las otras actividades y talleres se incluye como anexo B. Aparte de los anterior, se describe y analiza la prueba final

4.1 Resultados de la aplicación de la actividad uno taller uno

El análisis de resultados de la implementación de la secuencia didáctica (Anexo B) se hizo de manera detallada para cada una de las actividades que conforman los talleres, bajo las mismas categorías aplicada a los resultados de la prueba inicial. En el siguiente cuadro se incluye el nivel de razonamiento, la descripción de la actividad y el análisis correspondiente.

<table>
<tr><th colspan="3">TALLER NÚMERO 1 - ACTIVIDAD 1</th></tr>
<tr><th>Nivel de razonamiento</th><th>DESCRIPCIÓN</th><th>ANÁLISIS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Seguir instrucciones directas en situaciones explícitas.
Hacer uso del razonamiento directo y de interpretaciones literales de los resultados.</td><td>Expresar el total de elementos de un conjunto, representado en una imagen, usando adiciones repetidas.</td><td>El 84% de los estudiantes desarrolló correctamente la actividad, el 16% solo determinó el total de elementos del conjunto, lo cual se puede atribuir a una interpretación parcial del enunciado.</td></tr>
<tr><td>Expresar el total de elementos de un conjunto usando la multiplicación</td><td>Todos los estudiantes desarrollaron correctamente la actividad.</td></tr>
<tr><td></td><td>El 65% de los estudiantes describió correctamente la relación entre adición y producto, con argumentos similares al mostrado en la imagen:</td></tr>
</table>

	Reconocer por qué el resultado del producto 5x4 es igual al de la adición reiterada 5+5+5+5.	 Si porque es lo mismo sumar cuatro veces cinco a multiplicar cinco por cuatro Con relación a los estudiantes que no desarrollaron correctamente la actividad se encuentran argumentos como el mostrado a continuación, que hace referencia a la propiedad conmutativa de la adición y de la multiplicación pero que no explica la relación que existe entre la estructura aditiva y la multiplicativa.  regla de la matematica" el orden de los numeros no altera el resultado" ya sea suma o multiplicacion. Otros estudiantes argumentaron que la razón por la cual se obtiene el mismo resultado es porque las dos preguntas hacen referencia a la misma imagen.
	Proponer una situación gráfica que modele la multiplicación 4x3	Todos los estudiantes desarrollaron correctamente la actividad, 60% construyó un arreglo de cuatro cajones con tres círculos cada uno, el restante 40% construyó un arreglo de tres cajones con cuatro círculos cada uno, lo que podría indicar el reconocimiento de la propiedad conmutativa.
	Repartir en tres partes iguales 24 unidades	El 86% de los estudiantes resolvió de forma correcta la actividad, indicando que en cada cajón deben ir 8 círculos. Los demás estudiantes respondieron que, en cada cajón, deben ir 6 círculos, es posible que hayan pensado en otra descomposición de 24 ignorando la imagen.

4.2 Análisis de resultados de la prueba final

Con el propósito de medir el nivel de avance en el desarrollo de la competencia razonamiento y argumentación, logrado a partir de la implementación de la secuencia didáctica, se diseñó y aplicó una prueba final (Anexo C), con las mismas especificaciones (competencia, estándar, evidencia, tarea) que la prueba inicial.

Teniendo en cuenta que las preguntas que corresponden a la prueba final tienen el mismo diseño de la prueba inicial, para hacer el análisis de resultados y poder contrastar con los resultados iniciales se han agrupado de la misma forma, es decir, de acuerdo con el nivel de competencia en el que se ubica cada pregunta.
A continuación, se presenta un análisis de los resultados en la prueba final y un contraste con los resultados de la prueba inicial para las preguntas ubicadas en cada nivel de competencia.

Nivel de competencia 1		
Pregunta	**Análisis de resultados en la prueba final**	**Comparación con los resultados de la prueba inicial**
Número 8	Esta pregunta fue respondida de forma correcta por el 36,7% de los estudiantes. De acuerdo con la tarea específica correspondiente, este grupo de estudiantes está en capacidad de identificar fracciones equivalentes. Con relación a las otras opciones se observa que 33,3% marcó la respuesta A, donde se presentaba dos fracciones en las que un numerador era múltiplo del otro, por lo que se puede suponer que los estudiantes, guiados por esto, las asumieron como equivalentes, sin verificar.	Con relación a los resultados de la prueba inicial, en la que el 21,6% marcó de forma correcta, se observa un aumento del 11,7% en el porcentaje de acierto.

Nivel de competencia 2		
Pregunta	**Análisis de resultados en la prueba final**	**Comparación con los resultados de la prueba inicial**
Número 1	El porcentaje de acierto para esta pregunta fue del 80%. De acuerdo con las especificaciones de la prueba, este grupo de estudiantes comprende la jerarquía de las operaciones con números enteros y la relación que existe entre la estructura aditiva	Respecto a los resultados de la prueba inicial, para la cual el 48,6% respondió correctamente, se observa un incremento del 31,4% en el porcentaje de acierto.

	y multiplicativa. Con relación a las otras opciones, se observa que el 16,7% de los estudiantes marcó la opción C, lo cual se puede atribuir a un error en el procedimiento aplicado o a la falta de comprensión de la información presentada en el contexto.	
Número 3	El 90% de los estudiantes respondió correctamente esta pregunta en la prueba final. Teniendo en cuenta las especificaciones, este grupo de estudiantes aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.	Con relación a los resultados de la prueba inicial, donde el porcentaje de acierto fue del 51,4% se observa un aumento del 38,6% en el porcentaje de estudiantes que respondió correctamente.
Número 4	70% de los estudiantes respondió de manera correcta esta pregunta, por lo que, de acuerdo con el diseño de la prueba, este grupo de estudiantes comprende la relación entre el producto y la adición de números enteros. El 20% de los estudiantes marcó la opción A, esta opción corresponde con el procedimiento mostrado y con las operaciones planteadas, pero no con lo que representan las cantidades que se encuentran en la operación, por lo que se puede inferir que quienes la seleccionaron, no hicieron una lectura completa del contexto de la situación o no lo comprendieron completamente.	Comparado con los resultados de la prueba inicial, donde el 10,8% de los estudiantes respondió correctamente, se observa un aumento del 59,2% en el porcentaje de acierto.
Número 6	El porcentaje de acierto para esta pregunta fue del 76,7%. De acuerdo con el diseño de la pregunta, este grupo de estudiantes está en capacidad de determinar el valor que toma una magnitud cuando varía inversamente con relación a otra.	Respecto a los resultados en la prueba inicial, donde el 54,1% de los estudiantes marcó la opción correcta, se observa un incremento del 22,6% en el porcentaje de acierto.

Nivel de competencia 3		
Pregunta	**Análisis de resultados en la prueba final**	**Comparación con los resultados de la prueba inicial**
Número 5	El 53,3% de los estudiantes marcó de forma correcta, de acuerdo con las especificaciones, este grupo de estudiantes expresa correctamente la razón entre magnitudes como una fracción. Se observa además que el 33,9% de los estudiantes marcó la opción B, por lo cual se puede inferir que no tuvieron en cuenta parte de la información que presente en el enunciado de la pregunta.	Con relación a la prueba inicial, donde el 18,9% de los estudiantes marcó la opción correcta, se observa un aumento en el porcentaje de acierto del 34,4%.
Número 9	El porcentaje de estudiantes que respondió de forma correcta esta pregunta fue del 56,7% por lo que este grupo de estudiantes, según las especificaciones de la pregunta, justifica procedimientos utilizados para adicionar números racionales. Se observa que el 30% de los estudiantes marcó la opción A, que hace referencia al mismo procedimiento que	Comparado con los resultados se la prueba inicial, donde el porcentaje de acierto fue del 18,9%, se observa un aumento del 37,8%.

	la respuesta correcta, pero de forma arbitraria.	
Numero 10	El 60% de los estudiantes respondió esta pregunta de forma correcta. Se puede afirmar que este grupo de estudiantes aplica las propiedades de la adición de números racionales. Con relación a las otras opciones, el 23,3% de los estudiantes marcó la opción A, lo cual se puede atribuir a errores en el procedimiento aplicado para desarrollar la adición de números racionales.	Respecto a la prueba inicial, donde 16,2% respondió de forma correcta, se observa un incremento del 43,8% en el porcentaje de acierto.

Nivel de competencia 4		
Pregunta	**Análisis de resultados en la prueba final**	**Comparación con los resultados de la prueba inicial**
Número 2	El porcentaje de acierto para esta pregunta en la prueba final fue del 70%. Se puede afirmar, de acuerdo con el diseño de la prueba, que este grupo de estudiantes estima y compara cantidades enteras a partir de la diferencia entre ellas.	Con relación a los resultados de la prueba inicial, donde el 13,5% de los estudiantes respondió de forma correcta, se observa un aumento del 56,5%
Número 7	El 33,3% de los estudiantes respondió de forma correcta esta pregunta, por lo que, de acuerdo con las especificaciones, se puede afirmar que este grupo de estudiantes compara y ordena correctamente los números racionales dados. Con relación a las otras opciones, la mayoría de estudiantes (50%) marcó la opción A, por lo que se puede concluir que presentan dificultades para establecer correctamente la relación de orden entre dos números racionales.	Comparado con los resultados de la prueba inicial, donde el porcentaje de acierto fue del 13,5%, se observa un aumento del 19,8%.

Además de lo anterior, contrastando los procedimientos aportados por los estudiantes, tanto en la prueba inicial como en la prueba final y los resultados de las dos pruebas, se observa un mejor desempeño en cada uno de los procesos específicos de la competencia razonamiento y argumentación.

Con relación a los estándares abordados, se evidencia avance significativo respecto al estándar 1 “Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones” y al estándar 2 “Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa” en todas las tareas propuestas.

Respecto al estándar 3 “Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales y de las operaciones entre estos números en diferentes contextos” se evidencian también progresos destacables frente a las tareas de aplicar propiedades de la adición de números racionales y justificar procedimientos utilizados para adicionar números racionales. Se observa además que el avance en las tareas de Identificar fracciones equivalentes a una fracción dada y comparar y ordenar números racionales, es mínimo.

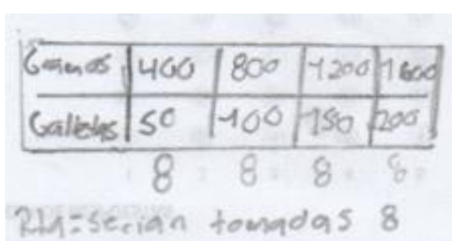
4.3 Resultados preguntas abiertas

Pregunta abierta 1

Todos los estudiantes respondieron la pregunta, 63% de forma correcta y 37% de forma incorrecta. Se pudo identificar que los procedimientos mostrados, para el caso de quienes respondieron correctamente, en su mayoría consisten en calcular la constante de proporcionalidad, dividiendo los gramos de harina entre el número de galletas, y multiplicar este resultado por el número de galletas que se quiere preparar.

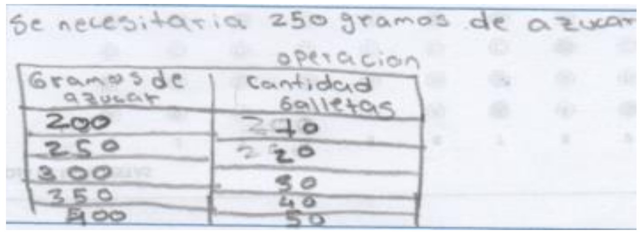
Dentro de quienes no respondieron de forma correcta, se pudo identificar las siguientes situaciones:

1. El estudiante calcula la constante de proporcionalidad, construye una tabla con diferentes valores que son proporcionales, y asume que el valor solicitado corresponde a la constante de proporcionalidad.



Esto puede indicar que el estudiante no comprende lo que representa la constante de proporcionalidad y la calcula de forma mecánica.

2. El estudiante construye, con la información presente en el enunciado, una tabla a la que le agrega nuevos valores que no son proporcionales y concluye un valor que no corresponde, para el valor solicitado.



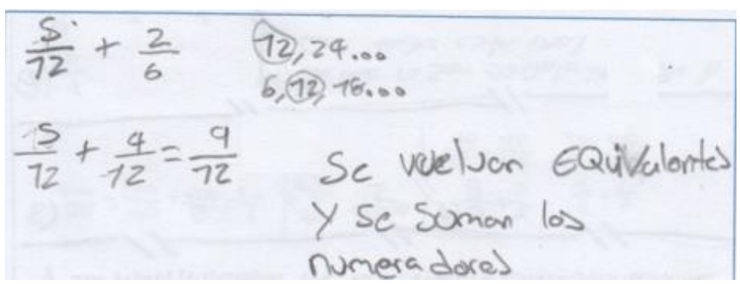
Este tipo de procedimiento puede indicar que el estudiante no comprende los que significa que dos magnitudes sean proporcionales.

Resultados pregunta abierta 2

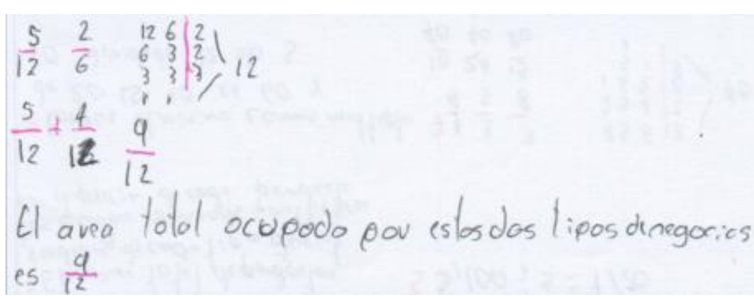
Todos los estudiantes respondieron la pregunta, El 96% identificó correctamente las fracciones representadas y 43% explicó el procedimiento que se debía aplicar para responder la pregunta y lo mostró.

Dentro de los procedimientos mostrados por quienes respondieron correctamente, se pudo identificar los siguiente:

1. El estudiante escribe los múltiplos de cada uno de los denominadores para encontrar el mínimo común múltiplo y construye las fracciones equivalentes homogéneas.



2. El estudiante hace la descomposición simultanea de los denominadores para encontrar el mínimo común múltiplo y luego construye las fracciones equivalente homogéneas.



De forma general, contrastando con los resultados de la prueba inicial, para cada una de las preguntas abiertas que, en las dos pruebas corresponden al nivel de competencia tres y tienen las mismas especificaciones, se pudo observar que:

- Con relación a la primera pregunta, donde el porcentaje de acierto en la prueba inicial fue del 54%, se evidencia un aumento del 9%.
- En la prueba inicial, para el caso de la primera pregunta, 13% de los estudiantes no respondió, en la segunda aplicación todos los estudiantes respondieron esta pregunta.
- Los procedimientos mostrados por los estudiantes en la prueba final, con relación a la pregunta 1, están mejor elaborados puesto que aplican debidamente el concepto de proporcionalidad.
- Con relación a la segunda pregunta, donde ningún estudiante respondió correctamente para el caso de la prueba inicial, se evidencio una mejora significativa, en la capacidad de construir un procedimiento para solucionar una situación.
- Respecto a los procedimientos mostrados por los estudiantes en la prueba final, para el caso de la pregunta 2, se evidencia que mejoró la compresión sobre los números racionales ya que mayor número de estudiantes pudo identificar correctamente la fracción representada en cada gráfico.

5. Conclusiones y recomendaciones

Del desarrollo y análisis de las diferentes fases del presente trabajo, se derivan las siguientes conclusiones:

- El diseño de la prueba inicial y final usando la metodología del Modelo Basado en evidencias permitió establecer las especificaciones de la prueba (estándar, competencia, evidencia, tarea) con lo cual el análisis de resultados se pudo hacer desde un punto de vista cualitativo y en términos de los que se pretendía medir, el nivel de desarrollo de la competencia razonamiento y argumentación.
- A partir de la construcción del marco disciplinar se logró profundizar en la comprensión de algunos aspectos formales del componente numérico, que puede incidir en la manera como se estructuran los contenidos para ser llevados al aula y en el análisis más profundo de las producciones de los estudiantes.
- Dentro de los aspectos relacionados con la matemática escolar, específicamente en lo que corresponde a los sistemas de representación para los números naturales, se observa que, aunque se privilegie el sistema decimal, no se deben desconocer otras formas de representación como el análisis aritmético del número o los números figurados.
- Con respecto a los diferentes marcos teóricos consultados acerca de la competencia matemática, se puede concluir que, aunque existan caracterizaciones diferentes de la competencia, los procesos que uno u otro referente consideran como claves son los mismos.
- En lo relativo a la estructuración y diseño de la secuencia didáctica, se pudo establecer que, el hecho de tener claridad en la intención de cada una de las actividades propuestas en cada taller, permitió que el análisis de resultados fuera muy completo y diera cuenta, tanto de lo que realmente lograron hacer los estudiantes como de las dificultades que se presentaron.

- Respecto a la implementación de la secuencia didáctica, se observa que a los estudiantes se les dificulta desarrollar aquellas actividades que implican relacionar información presente en el contexto para hacer inferencias, por lo cual, se recomienda privilegiar e intensificar aquellas situaciones que contengan información diversa, presentada de forma clara, de las que se puedan derivar múltiples conclusiones.
- La metodología de aplicación de la secuencia permitió concluir que, el hecho de que los estudiantes aborden algunas actividades por parejas o en grupo facilita la construcción de argumentos, por lo cual favorece el desarrollo de la competencia.
- Teniendo en cuenta el análisis de resultados de la prueba final, en los que tiene que ver con las preguntas abiertas, se pudo observar que los estudiantes presentaron procedimientos mejor estructurados por lo que se infiere que, la aplicación de la secuencia didáctica contribuyó a ello.
- A partir de los resultados de la prueba final se observa que persiste la dificultad para identificar fracciones equivalentes y para ordenar fracciones, por lo tanto se recomienda complementar la secuencia didáctica con actividades en las que los estudiantes deban identificar fracciones equivalentes, usando diferentes formas de representación.

A. Anexo: Diseño prueba inicial

Pregunta 1

Estándar	Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones
Competencia	Razonamiento y Argumentación
Componente	Numérico y sistemas numéricos
Afirmación	Usa relaciones y propiedades de las operaciones en los números Enteros.
Evidencia	Analiza el significado y las relaciones entre las operaciones y las aplica para simplificar cálculos.
Tarea	Comprende la jerarquía de las operaciones con números enteros y la relación que existe entre las estructuras aditiva y multiplicativa.
clave	B

En Colombia, el café se comercializa por cargas, una carga equivale a 125 kg y para la venta, se debe tener en cuenta el precio de la carga en el mercado.

Un cafetero debe llevar 24 cargas de café a la Federación, para facilitar su transporte lo ha empacado en sacos de 60 kg cada uno, con ayuda de sus 4 trabajadores. La siguiente tabla muestra el número de sacos que ha empacado cada uno de ellos.

Nombre del trabajador	**Carlos**	**Manuel**	**Mario**	**Felipe**
# sacos	13	12	11	12

Para completar las 24 cargas de café le faltan

A. 1 saco de café
B. 2 sacos de café
C. 4 sacos de café
D. 5 sacos de café.

El estudiante debe conocer el total de kilos que se han empacado y para ello debe efectuar la operación: $13\times 60+12\times 60+11\times 60+12\times 60=2880$, determinar los kilos que corresponden a 24 cargas: $24\times 125=3000$, encontrar la diferencia y concluir que la respuesta correcta es B pues faltan por empacar 120 kilos que corresponden a 2 sacos.

Pregunta 2

Estándar	Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones
Competencia	Razonamiento y Argumentación
Componente	Numérico y sistemas numéricos
Afirmación	Usa las relaciones y las propiedades de las operaciones en los números enteros.
Evidencia	Interpreta relaciones entre las operaciones de números enteros, para hacer inferencias a partir de los elementos de un problema.
Tarea	Estima y compara cantidades enteras a partir de la diferencia entre ellas.
Clave	D

En el año 2016, entre los meses de septiembre y octubre se jugó en nuestro país, por primera vez, la copa mundial de Futbol sala con la participación de 24 países clasificados previamente. Los equipos se distribuyeron en 6 grupos, cada uno de cuatro equipos.

La siguiente tabla muestra la cantidad de goles anotados (goles a favor) y la diferencia de goles de cada uno de los equipos de uno de los grupos, el D. La diferencia de goles se determina restando a la cantidad de goles a favor, la cantidad de goles en contra.

EQUIPO	GOLES A FAVOR	DIFERENCIA DE GOLES
Ucrania	8	2
Mozambique	7	-15
Brasil	29	24
Australia	5	-11

A partir de la información de la tabla es correcto concluir que:

I. El equipo que anotó menos goles fue Mozambique
II. El equipo de Australia recibió 6 goles en contra.
III. Ucrania recibió un gol en contra más que Brasil.

A. I es verdadera
B. Solamente II es verdadera.
C. Todas son falsas
D. Solamente III es verdadera

El estudiante debe evaluar una a una cada expresión de acuerdo a los datos así:
I. De acuerdo con la tabla, Mozambique anotó 7 goles y Australia anotó 5, por lo cual la afirmación es falsa.
II. Para que la diferencia entre los goles a favor y los goles en contra de Australia sea -11, como indica la tabla, los goles en contra deben ser 16, por lo que la afirmación en falsa.
III. De acuerdo con la tabla, la diferencia de goles para Ucrania fue 2 y los goles a favor 8, por lo tanto, Ucrania recibió 6 goles en contra. En el caso de Brasil la diferencia de goles fue 24 y los goles a favor 29, por lo tanto, Brasil recibió 5 goles en contra. Por lo anterior la afirmación es correcta.

Pregunta 3

Estándar	Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones
Competencia	Razonamiento y Argumentación
Componente	Numérico y sistemas numéricos
Afirmación	Interpreta procedimientos aritméticos a partir de las relaciones y propiedades de la adición y multiplicación de números enteros.
Evidencia	Evalúa la validez de un procedimiento a partir de la aplicación de propiedades y relaciones los números enteros.
Tarea	Aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición de números enteros.
Clave	B

La siguiente tabla muestra información sobre el salario diario que recibe un trabajador que presta servicios de aseo en tres empresas diferentes de una ciudad.

EMPRESAS	**salario que gana en un día**
1	\$35.000
2	\$30.000
3	\$32.000

Para calcular el salario correspondiente a un periodo de trabajo, el trabajador planteo la siguiente operación:

$$8 \times (35.000 + 30.000 + 32.000)$$

Es correcto afirmar que en este periodo, el trabajador

A. trabajó en total 8 días.
B. trabajó en total 24 días.
C. trabajó menos días en la empresa 1.
D. trabajó menos días en la empresa 3.

El estudiante debe aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, con lo cual se obtiene la expresión equivalente:

$$8 \times (35.000 + 30.000 + 32.000) = 8 \times 35.000 + 8 \times 30.000 + 8 \times 32.000$$

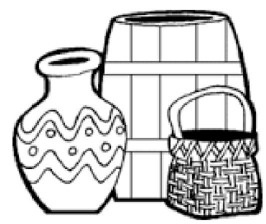
La cual implica que el salario del mes corresponde a la suma de lo que ganó en total en cada uno de los tres lugares. Esto se calcula multiplicando lo que gana en cada lugar por los días trabajados. Se observa que, para los tres lugares, los días trabajados son ocho, para un total de 24 días.

Pregunta 4

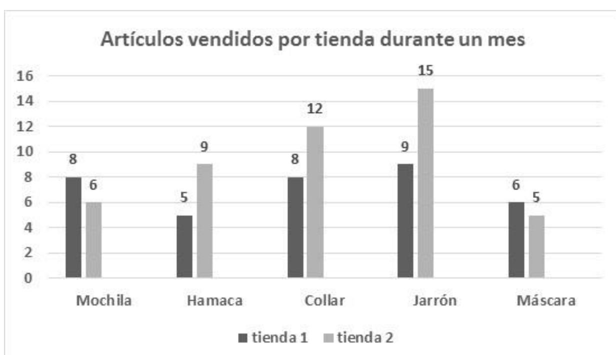
Estándar	Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones
Competencia	Razonamiento y Argumentación
Componente	Numérico y sistemas numéricos
Afirmación	Interpreta procedimientos aritméticos a partir de las relaciones y propiedades de las operaciones en los números Naturales y Enteros.
Evidencia	Explica procedimientos aritméticos a partir de las relaciones y propiedades de la adición y multiplicación de números enteros.
Tarea	Comprende la relación entre el producto y la adición de sumandos iguales y conecta la información y los elementos de un problema para explicar un procedimiento.
Clave	A

La siguiente tabla muestra el precio de algunos de los productos que ofrece una tienda de artesanías.

ARTÍCULO	PRECIO ($)
Mochila	155.000
Hamaca	125.000
Collar	60.000
Jarrón	90.000
Máscara	110.000



La siguiente gráfica muestra el número de artículos de estos tipc ucursales de la tienda en un mes.



Para determinar el dinero que recibió por la venta de esos artículos, el administrador de la tienda efectuó con la calculadora la siguiente operación:

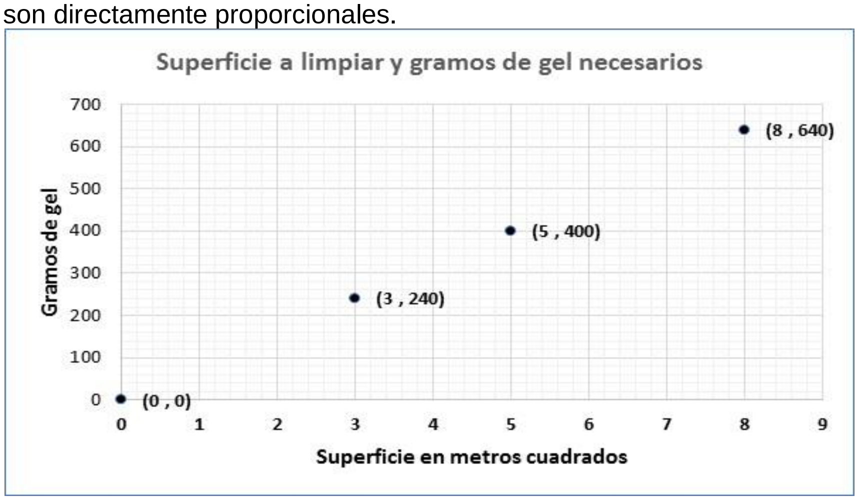
$$155.000\left(8+6\right)+125.000(5+9)+60.000(8+12)+90.000(9+15)+110.000(6+5)$$

La operación planteada por el administrador equivale a

A. determinar el total de artículos de cada tipo y multiplicar cada resultado por el precio unitario correspondiente.
B. sumar los precios de todos los artículos y multiplicar por el total de artículos vendidos.
C. determinar el total de artículos vendidos y multiplicar el resultado por el precio de cualquiera de los artículos.
D. sumar los precios y multiplicar por el total de artículos vendidos en cualquiera de las dos tiendas.

El estudiante debe relacionar la información de la tabla y la gráfica con el procedimiento planteado para inferir que: Sumar las cantidades 8,6 y multiplicar por 155.000 sirve para calcular el dinero recibido por la venta de las mochilas. Sumar las cantidades 5,9 y multiplicar por 125.000 sirve para calcular el dinero recibido por la venta de las hamacas. Sumar las cantidades 8,12 y multiplicar por 60.000 sirve para calcular el dinero recibido por la venta de los collares. Sumar las cantidades 9,15 y multiplicar por 90.000 sirve para calcular el dinero recibido por la venta de los jarrones. Sumar las cantidades 6,5 y multiplicar por 110.000 sirve para calcular el dinero recibido por la venta de las máscaras.

Pregunta 5

<table>
<tr><td>Estándar</td><td>Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.</td></tr>
<tr><td>Competencia</td><td>Razonamiento y Argumentación</td></tr>
<tr><td>Componente</td><td>Numérico y sistemas numéricos</td></tr>
<tr><td>Afirmación</td><td>Usa representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.</td></tr>
<tr><td>Evidencia</td><td>Utiliza el hecho de que una representación ilustre la relación entre dos magnitudes directamente proporcionales para determinar la validez de una inferencia.</td></tr>
<tr><td>Tarea</td><td>Expresa la fracción como razón y reconoce que la razón es constante cuando las magnitudes que se relacionan son directamente proporcionales.</td></tr>
<tr><td>Clave</td><td>D</td></tr>
<tr><td colspan="2">La siguiente gráfica muestra la relación entre dos magnitudes: la superficie (en metros cuadrados) de una piscina que se requiere limpiar y la cantidad (en gramos) del gel que se debe usar. Estas magnitudes son directamente proporcionales.


Teniendo en cuenta la información anterior es correcto afirmar que para limpiar una superficie de 4 metros cuadrados se requieren 4 tarros de gel de 80 gramos cada uno, porque la razón entre la superficie y la cantidad de gramos de gel es

A. 1/320
B. 4/80
C. 1/4
D. 1/80</td></tr>
<tr><td colspan="2">Para responder correctamente el estudiante debe comprender que, si son necesarios 4 tarros de 80 gramos para limpiar cuatro metros cuadrados, es porque por cada metro se requieren 80 gramos por lo que la razón entre superficie y gramos sería 1/80.</td></tr>
</table>

Pregunta 6

Estándar	Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.
Competencia	Razonamiento y Argumentación
Componente	Numérico y sistemas numéricos
Afirmación	Analiza representaciones y procedimientos y los asocia con situaciones de proporcionalidad directa o inversa.
Evidencia	Explica representaciones y procedimientos relacionados con magnitudes inversamente proporcionales.
Tarea	Encuentra el valor que toma una magnitud cuando varia inversamente en relación a otra.
Clave	A

Para un entrenamiento de un cierto equipo de futbol los auxiliares necesitan llevar 24 litros de agua (24.000 ml). En el mercado se pueden encontrar envases (en mililitros) de diferentes tamaños como se indica en la siguiente tabla:

Tipo de Envase	**1**	**2**	**3**	**4**
Capacidad (ml)	**250**	**500**	**600**	**750**

Los auxiliares consiguieron el agua necesaria para el entrenamiento comprando 32 botellas del mismo tamaño. Es correcto concluir que compraron envases tipo

A. 4.
B. 1.
C. 3.
D. 2.

El estudiante debe determinar el número de botellas de cada tipo de envase, necesarias para completar los 24 litros de agua, como se muestra a continuación

Tipo de Envase	**1**	**2**	**3**	**4**
Capacidad (ml)	**250**	**500**	**600**	**750**
Número de botellas	**96**	**48**	**40**	**32**

Con lo cual podrá observar que, si llevó 32 botellas, es porque cada una de ellas tiene 750 ml de capacidad y corresponden al envase tipo 4.

Pregunta 7

Estándar	Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales y de las operaciones entre estos números en diferentes contextos.
Competencia	Razonamiento y Argumentación
Componente	Numérico y sistemas numéricos
Afirmación	Analiza relaciones entre números racionales
Evidencia	Hace inferencias a partir de las relaciones de orden en los números racionales.
Tarea	Compara y ordena un grupo de fracciones.
Clave	B

Para clasificar a las finales de una carrera de atletismo se estableció que el participante debe emplear un tiempo inferior a la mitad del tiempo empleado por el último competidor en llegar a la meta. En la siguiente tabla se presentan los tiempos de los 3 competidores

Nombre	**Andrés**	**Carlos**	**Lucia**
Fracción de tiempo empleado	**2/5**	**3/4**	**4/8**

¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones sobre estos competidores son correctas?

I. Lucía clasificó a la final
II. Carlos empleo más tiempo que Andrés.
III. Andrés clasifico a la final.

A. I solamente.
B. II solamente.
C. II y III solamente.
D. I y III solamente.

Para responder correctamente el estudiante debe ordenar las fracciones, convirtiéndolas en fracciones equivalentes con el mismo denominador o usando su representación decimal

Estudiante	**Andrés**	**Carlos**	**Lucia**
Fracción del tiempo máximo empleada	**2/5**	**3/4**	**4/8**
Fracción equivalente	**16/40**	**30/40**	**20/40**
Decimal correspondiente	**0,4**	**0,75**	**0,5**

Posteriormente debe evaluar cada afirmación de la siguiente forma.

I. Lucia gastó 4/8, para clasificar debió gastar menos de la mitad de lo que gastó el último que fue Carlos. Carlos gastó 3/4 de tiempo, la mitad es 3/8 y 4/8 no es menor que 3/8. Por lo anterior la afirmación es falsa.

II. Carlos empleó 3/4 y Andrés empleó 2/5, 3/4 es mayor que 2/5 por lo cual la afirmación es verdadera.

III. Andrés gastó 2/5, para clasificar debió gastar menos de la mitad de lo que gastó el último que fue Carlos. Carlos gastó 3/4 de tiempo, la mitad es 3/8 y 2/5 no es menor que 3/8. Por lo anterior la afirmación es falsa.

Pregunta 8

Estándar	Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales y de las operaciones entre estos números en diferentes contextos.
Competencia	Razonamiento y Argumentación
Componente	Numérico y sistemas numéricos
Afirmación	Analiza relaciones entre números Racionales
Evidencia	Hace inferencias a partir del análisis de la relación de equivalencia definida entre números racionales.
Tarea	Identifica fracciones equivalentes a una fracción dada.
Clave	B

Cuatro hermanos compraron un lote con el fin de construir una cabaña. Cada uno propuso un diseño para la construcción. La siguiente tabla muestra la fracción de terreno que ocuparía cada diseño

Hermano	José	Felipe	Andrea	Camila
Fracción del lote que ocupa el diseño	6/24	4/12	2/8	8/16

Con relación a la superficie de terreno que requiere cada diseño, es correcto afirmar que ocupan la misma fracción de terreno las propuestas de

A. Felipe y Camila.

B. Andrea y José.

C. José y Camila.

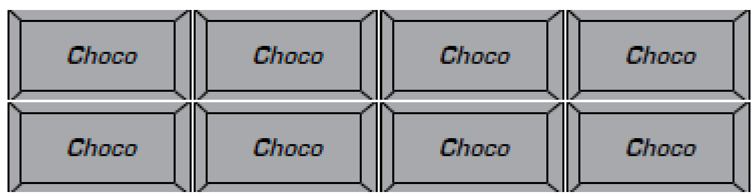
D. Camila y Andrea.

Para responder correctamente el estudiante debe notar que la fracción 2/8 corresponde a una simplificación de la fracción 6/24 y por lo tanto son equivalentes, por lo cual los diseños de José y Andrea ocupan la misma superficie.

PREGUNTA 9

Estándar	Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales y de las operaciones entre estos números en diferentes contextos.
Competencia	Razonamiento y Argumentación
Componente	Numérico y sistemas numéricos
Afirmación	Usa propiedades de las operaciones en el conjunto de los números Racionales.
Evidencia	Interpreta procedimientos aplicando propiedades de las operaciones entre números racionales.
Tarea	Justifica procedimientos utilizados para adicionar números racionales.
Clave	A

Luisa y Felipe compraron, para compartir, una chocolatina como la que se muestra en la imagen:



Luisa ha comido 3/8 de la chocolatina y Felipe 1/4. Para calcular la fracción de chocolatina que han comido entre los dos, plantearon el siguiente procedimiento

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3+1}{8}=\frac{4}{8}$$

El procedimiento aplicado es incorrecto porque no tiene en cuenta el hecho de que se están sumando

A. partes de una misma chocolatina, pero de tamaño diferente.
B. partes de chocolatinas diferentes, pero del mismo tamaño.
C. igual número de partes, pero de chocolatinas diferentes.
D. diferente número de partes, pero de la misma chocolatina.

Para responder correctamente la pregunta el estudiante debe tener en cuenta que, para sumar fracciones, estas deben ser homogéneas y por ello se debe transformar la fracción ¼ en su equivalente 2/8. Con lo anterior garantiza que los trozos que se van a sumar tengan el mismo tamaño.

PREGUNTA 10

Estándar	Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales y de las operaciones entre estos números en diferentes contextos.
Competencia	Razonamiento y Argumentación
Componente	Numérico y sistemas numéricos
Afirmación	Usa propiedades de las operaciones en el conjunto de los números racionales.
Evidencia	Evalúa la pertinencia de un procedimiento a partir de la aplicación de propiedades de las operaciones entre números racionales.
Tarea	Aplica las propiedades de la adición de números racionales.
Clave	C

Durante 4 días de una semana se está aplicando una encuesta a una muestra de los habitantes de una ciudad.

En la siguiente tabla se presenta la fracción de la muestra que alcanzó a encuestarse los tres primeros días:

Día	1	2	3
Fracción de la muestra a encuestar	5/12	4/15	3/10

Para determinar la fracción de la muestra que se ha encuestado al terminar el tercer día

¿Cuál o cuáles de los siguientes procedimientos es (o son) correcto (s)?

I. $\frac{5}{12}+\frac{4}{15}+\frac{3}{10}=\frac{41}{60}+\frac{3}{10}$

II. $\frac{5}{12}+\frac{4}{15}+\frac{3}{10}=\frac{5}{12}+\frac{17}{30}$

III. $\frac{5}{12}+\frac{4}{15}+\frac{3}{10}=\frac{4}{15}+\frac{43}{60}$

A. I y III solamente.

B. II y III solamente.

C. I, II y III.

D. II solamente.

Para responder correctamente el estudiante debe evaluar una a una las expresiones de la siguiente forma:

I. Es correcta porque para sumar se aplica la propiedad asociativa entre la primera y la segunda fracción y luego se plantea la suma entre este resultado y la tercera fracción.

II. Es correcta porque para sumar se aplica la propiedad asociativa entre la segunda y la tercera fracción y luego se plantea la suma entre este resultado y la primera fracción.

III. se aplica propiedad conmutativa, cambiando de lugar la primera y la segunda fracción para luego aplicar la propiedad asociativa.

PREGUNTA ABIERTA 1

La siguiente imagen muestra las cucharadas de azúcar necesarias para preparar 600ml de té de sabores:

Para preparar 100 ml de té de sabores ¿cuántas cucharadas de azúcar se necesitan en total? Explique el procedimiento que utiliza para resolver la pregunta.

PREGUNTA ABIERTA 2

Las siguientes imágenes muestran la distribución de un terreno en dos cultivos de flores diferentes, la parte sombreada representa la fracción de área que ocupa cada cultivo:


Cultivo de claveles

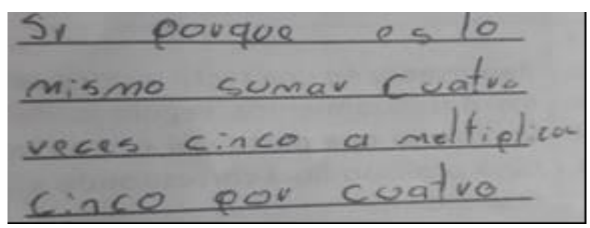

Cultivo de rosas

Explique el procedimiento que se debe aplicar para determinar la fracción total del área del terreno que ocupan los dos cultivos y halle la fracción correspondiente.

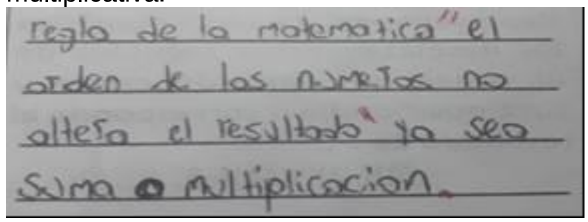
B. Anexo: Análisis de resultados de la secuencia didáctica

<table>
<tr><td colspan="3">TALLER NÚMERO 1 - ACTIVIDAD 1</td></tr>
<tr><th>Nivel de razonamiento</th><th>DESCRIPCIÓN</th><th>ANÁLISIS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">• Seguir instrucciones directas en situaciones explícitas.

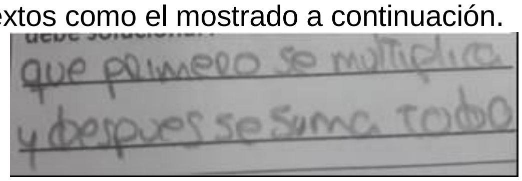
• Hacer uso del razonamiento directo y de interpretaciones literales de los resultados.</td><td>Expresar el total de elementos de un conjunto, representado en una imagen, usando adiciones repetidas.</td><td>El 84% de los estudiantes desarrolló correctamente la actividad, el 16% solo determinó el total de elementos del conjunto, lo cual se puede atribuir a una interpretación parcial del enunciado.</td></tr>
<tr><td>Expresar el total de elementos de un conjunto usando la multiplicación</td><td>Todos los estudiantes desarrollaron correctamente la actividad.</td></tr>
<tr><td>Reconocer por qué el resultado del producto 5x4 es igual al de la adición reiterada 5+5+5+5.</td><td>El 65% de los estudiantes describió correctamente la relación entre adición y producto, con argumentos similares al mostrado en la imagen:

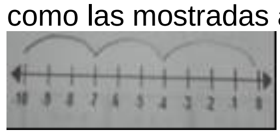


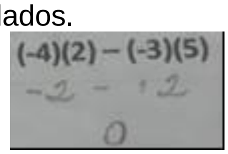
Con relación a los estudiantes que no desarrollaron correctamente la actividad se encuentran</td></tr>
</table>

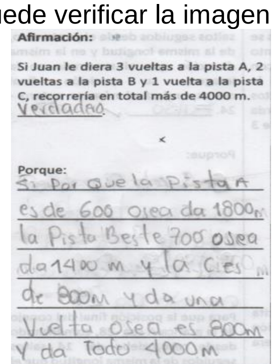
		argumentos como el mostrado a continuación, que hace referencia a la propiedad conmutativa de la adición y de la multiplicación pero que no explica la relación que existe entre la estructura aditiva y la multiplicativa.  Otros estudiantes argumentaron que la razón por la cual se obtiene el mismo resultado es porque las dos preguntas hacen referencia a la misma imagen.
	Proponer una situación gráfica que modele la multiplicación 4x3	Todos los estudiantes desarrollaron correctamente la actividad, 60% construyó un arreglo de cuatro cajones con tres círculos cada uno, el restante 40% construyó un arreglo de tres cajones con cuatro círculos cada uno, lo que podría indicar el reconocimiento de la propiedad conmutativa.
	Repartir en tres partes iguales 24 unidades	El 86% de los estudiantes resolvió de forma correcta la actividad, indicando que en cada cajón deben ir 8 círculos. Los demás estudiantes respondieron que, en cada cajón, deben ir 6 círculos, es posible que hayan pensado en otra descomposición de 24 ignorando la imagen.

<table>
<tr><th colspan="3">TALLER NÚMERO 1 – ACTIVIDAD 2</th></tr>
<tr><th>Nivel de razonamiento</th><th>DESCRIPCIÓN</th><th>ANÁLISIS</th></tr>
<tr><td rowspan="4">• Asociar información con el fin de razonar directamente sobre ella y realizar inferencias.

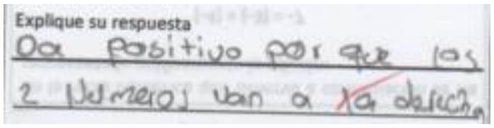
• Comunicar los razonamientos implícitos en la solución de una situación.</td><td>Expresar como un producto el total de elementos de un conjunto.</td><td>El 94% de los estudiantes desarrolló la actividad de forma correcta indicando el producto correspondiente. Los estudiantes que no lo hicieron correctamente, escribieron adiciones en lugar de productos, por lo que se deduce que el término “Producto” no es muy familiar para ellos.</td></tr>
<tr><td>Seleccionar entre expresiones aditivas o multiplicativas aquella que corresponda al total de elementos de un conjunto determinado.</td><td>El 84% de los estudiantes seleccionó la expresión correcta, el 10% de los estudiantes no respondió la pregunta y el restante 6% seleccionó la opción A, que contiene una expresión que no corresponde a la solicitada pero que contiene valores correspondientes a números asociados a algunos elementos que se presentan en la imagen, de lo que se puede inferir que tienen dificultad para modelar correctamente la operación.</td></tr>
<tr><td>Resolver expresión que combinan adiciones y multiplicaciones teniendo en cuenta jerarquía de las operaciones (uso de paréntesis).</td><td>El 80% de los estudiantes resolvió correctamente la expresión, efectuando primero los productos indicados. El 20% restante no desarrolló la actividad.</td></tr>
<tr><td>Explicar la estrategia correcta que permite desarrollar expresiones que combinan adiciones y multiplicaciones</td><td>El 76% explicó correctamente la estrategia expresando que, para simplificar la expresión, primero se debe multiplicar y luego sumar. Estos estudiantes usaron textos como el mostrado a continuación.

</td></tr>
</table>

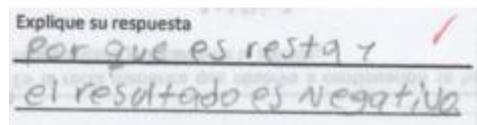
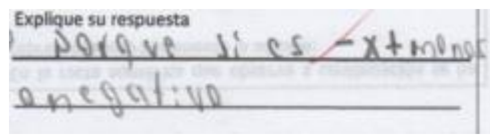
TALLER NÚMERO 1 – ACTIVIDAD 3		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso compuesto de varios pasos. • Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso relacionando distintas variables.	Reconocer la magnitud de un desplazamiento representado en una recta numérica.	El 92% de los estudiantes desarrolló la actividad correctamente, tanto en los desplazamientos de sentido negativo como en los desplazamientos de sentido positivo.
	Expresar la magnitud de un desplazamiento como adición de desplazamientos consecutivos de la misma magnitud, a partir de una gráfica.	El 72% de los estudiantes desarrolló de forma correcta la actividad, el porcentaje restante expresó el desplazamiento como adición, pero no de desplazamientos de la misma magnitud, por lo que se deduce que descomponen pero no comprenden la instrucción, tal como se muestra a continuación $(-3)+(-6) = -9$
	Expresar el punto final de un desplazamiento, formado por desplazamientos más pequeños, seguidos y de la misma magnitud, como el producto entre la magnitud y el número de desplazamientos.	El 38% de los estudiantes respondió de forma correcta, los demás estudiantes (62%), aunque presentaron un producto, modelaron incorrectamente el sentido presentado en la gráfica. Como lo muestran los signos que anteceden a las magnitudes en los siguientes ejemplo:. $(-3)\times(-3) = 9$ $(-5)\times(-2) = 10$
	Representar en la recta numérica un desplazamiento para el cual el punto final corresponde a la simplificación de una expresión que contiene adición y producto de enteros.	El 81% de los estudiantes hizo la representación de forma correcta, el porcentaje restante hizo representaciones como las mostradas a continuación 

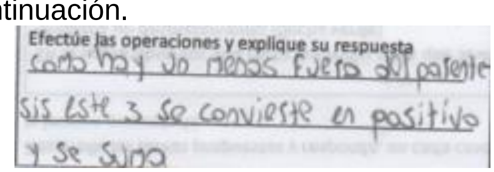
		 En estas representaciones los estudiantes no tienen en cuenta ni el número de desplazamientos ni la magnitud de cada desplazamiento, razón por la cual se puede deducir que no comprendieron lo que representa la expresión presentada.
	Seleccionar la expresión cuya simplificación corresponde al punto final de un desplazamiento compuesto por desplazamientos consecutivos, de la misma magnitud y en los dos sentidos.	El 62% de los estudiantes seleccionó la expresión correcta, el 16% marcó la opción A por lo cual se puede inferir que estos estudiantes tuvieron en cuenta la magnitud de cada desplazamiento y el número de desplazamientos, pero no la dirección de los mismos. Los demás estudiantes no respondieron la pregunta, probablemente por falta de comprensión del contexto.
	Escribir una expresión numérica que represente el punto final de un desplazamiento, formado por desplazamientos consecutivos, y con magnitudes y sentidos diferentes.	El 53% de los estudiantes planteó la expresión correcta, el 45% escribió una expresión en la cual el número de desplazamientos tiene signo negativo y el restante 2% de los estudiantes no respondió la pregunta, probablemente por tener dudas sobre el signo de las cantidades que debía conformar la expresión.
	Simplificar una expresión numérica formada por la diferencia entre productos de pares de números enteros.	El 27% de los estudiantes logró simplificar correctamente la expresión, el 18% no desarrolló la actividad y el 55% de los estudiantes la desarrolló de forma incorrecta. La mayoría de los estudiantes que respondieron de forma incorrecta, posiblemente lo hicieron porque no se incluían los signos de la multiplicación procedieron a efectuar sustracciones entre los enteros dados. 

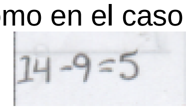
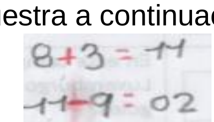
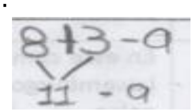
TALLER NÚMERO 1 – ACTIVIDAD 4		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Sintetizar información creando cadenas de razonamientos para evaluar inferencias. • Hacer generalizaciones recurriendo a múltiples datos o combinando varios tipos de información.	Evaluar la validez de una afirmación interpretando condiciones y combinando datos de una situación, presentes en un enunciado.	De acuerdo con los resultados, las parejas de estudiantes se distribuyeron así: Evaluaron de forma correcta todas las afirmaciones (40%). Evaluaron de forma incorrecta una afirmación (40%). Evaluaron de forma incorrecta dos afirmaciones (12%) Evaluaron de forma incorrecta tres afirmaciones (8%). Dentro de las justificaciones presentadas por las parejas de estudiantes, para el caso de las afirmaciones evaluadas correctamente, se pudieron identificar los siguientes tipos de argumentos: • Las adiciones y productos que, usando los datos del enunciado, permiten verificar la afirmación. • La diferencia entre el resultado que, según la afirmación, se debe obtener y el que se obtiene realmente con los datos del enunciado. • Datos del enunciado que permiten evaluar la afirmación, sin necesidad de desarrollar operaciones. Respecto a las afirmaciones evaluadas de forma incorrecta se pudieron identificar las siguientes situaciones: • Calculan correctamente el valor al que hace referencia la afirmación, pero interpretan de forma incorrecta el enunciado de la afirmación. Como se puede verificar la imagen.  **Afirmación:** **Si Juan le diera 3 vueltas a la pista A, 2 vueltas a la pista B y 1 vuelta a la pista C, recorrería en total más de 4000 m.** Verdadero **Porque:** Si Por Que la Pista A es de 600 osea da 1800m la Pista B es te 700 osea da 1400 m y la C es de 800m y da una Vuelta osea es 800m y da Todo 4000m • Calculan de forma correcta la diferencia a la que se hace referencia en la afirmación e interpretan de forma incorrecta.

TALLER NÚMERO 1 – ACTIVIDAD 5		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Sintetizar información creando cadenas de razonamientos para evaluar inferencias. • Hacer generalizaciones recurriendo a múltiples datos o combinando varios tipos de información	Evaluar la validez de una afirmación interpretando condiciones y combinando datos de una situación presentados en una imagen.	Las parejas de estudiantes se distribuyen como se muestra a continuación: El 47% de las parejas de estudiantes evalúo todas las afirmaciones de forma correcta, el 30% evalúo mal una de las afirmaciones y el 17% evalúo mal dos afirmaciones. Dentro de los argumentos presentados, en el caso de afirmaciones evaluadas de forma correcta, se pudieron identificar dos tipos de explicaciones: • El valor que hace correcta la afirmación • La operación que muestra que el resultado que se obtiene no es el que se encuentra en la afirmación. En el caso de afirmaciones evaluadas de forma incorrecta, se pudieron identificar las siguientes situaciones: • Los argumentos presentados no corresponden con los datos del enunciado de la afirmación, como, por ejemplo, sumar los desplazamientos de las tres gráficas cuando el enunciado se refiere exclusivamente a la gráfica A. • Argumentan efectuando correctamente un producto pero lo localizan incorrectamente en la recta numérica.

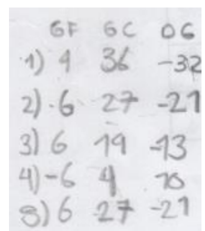
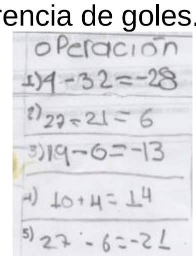
TALLER NÚMERO 2 - ACTIVIDAD 1		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Seguir instrucciones directas en situaciones explícitas. • Hacer uso del razonamiento directo y de interpretaciones literales de los resultados.	Determinar el número entero representado por un desplazamiento con punto inicial el origen en la recta numérica.	El total de estudiantes indicó correctamente el punto inicial, el punto final y el sentido del desplazamiento, sin embargo, solo el 68% identificó correctamente el entero correspondiente. El porcentaje restante asocio el desplazamiento al valor absoluto del entero representado.
	Determinar el número entero representado por un desplazamiento, con punto inicial diferente del cero en la recta numérica.	El 38% de los estudiantes no determinó correctamente el entero representado por el desplazamiento. Sin embargo, todo este grupo, identificó correctamente el punto inicial y final del mismo. Lo anterior se puede atribuir a que los estudiantes asumieron que el desplazamiento partía de cero.
	Identificar la operación representada con desplazamientos en la recta numérica y su resultado.	El 45% de los estudiantes no identificó correctamente el número entero correspondiente al segundo desplazamiento, asumiendo que, al igual que el primero, su punto inicial era cero, sin embargo, el 83% determinó la operación representada y su resultado. Se puede suponer que los estudiantes utilizaron la representación gráfica del resultado y la del primer desplazamiento, para deducirlo.
	Representar con desplazamientos en la recta numérica una adición de enteros positivos, determinar el signo del resultado y justificarlo.	El 80% de los estudiantes representó correctamente la operación indicada, el 20% restante, gráfico el segundo desplazamiento, no desde donde terminó el primero, si no desde cero. Todos los estudiantes determinaron correctamente el signo del resultado y el 87% de ellos argumentó su respuesta. Los argumentos presentados son similares al mostrado en la imagen:  Explique su respuesta Da positivo por que los 2 Numeros van a la derecha

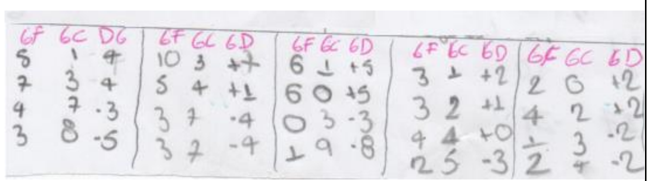
	Representar con desplazamientos en la recta numérica una adición de enteros negativos, determinar el signo del resultado y justificarlo.	El 69% de los estudiantes presentó una representación correcta de la operación. El 22% propuso una representación incorrecta, en la mayoría de los casos dibujando el segundo desplazamiento desde cero. El porcentaje restante no construyó una representación. El 94% asigno correctamente el signo de resultado, algunos de ellos sin apoyarse en una representación gráfica. El 85% argumentó correctamente, haciendo referencia a que los dos desplazamientos se dan en sentido negativo. Algunos de los argumentos presentados, no correctos, se muestran a continuación  

TALLER NÚMERO 2 – ACTIVIDAD 2		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Asociar información con el fin de razonar directamente sobre ella y realizar inferencias. • Comunicar los razonamientos implícitos en la solución de una situación.	Identificar la operación representada en la recta numérica y relacionarla con una expresión dada, que contiene signos de agrupación y donde se aplica la regla de signos (+) (-)	El 93% identificó correctamente el entero representado en el primer desplazamiento, el 70% identificó correctamente el representado en el segundo y el 87% identificó correctamente la operación. Con relación a los estudiantes que no identificaron correctamente el entero representado en el segundo desplazamiento, se observa que no tuvieron en cuenta que su punto de inicio era diferente de cero. El 80% de los estudiantes presentó una explicación respecto a la elección de la operación representada en la recta, la mayoría de ellos usó como argumento el procedimiento aplicado para quitar signos de agrupación en una operación con enteros, de forma verbal o presentando la operación. Además de lo anterior, se observó que algunas de las explicaciones presentadas no se relacionan con la operación seleccionada si no con el resultado de dicha operación.
	Identificar la operación representada en la recta numérica y relacionarla con una expresión dada, que contiene signos de agrupación y donde se aplica la regla de signos (-)(-)	Todos los estudiantes identificaron correctamente el entero representado con el primer desplazamiento, el 68% identificó correctamente el asociado al segundo desplazamiento y el 64% de los estudiantes relacionó adecuadamente la representación gráfica con una operación. El 83% presentó una explicación para esta relación. Al igual que en gráficas anteriores, los estudiantes que no identifican correctamente el segundo entero representado no tienen en cuenta que su punto inicial no es cero. Con relación a los argumentos utilizados para la explicación, se pudo observar que están relacionados, en su mayoría con la regla de signos y son similares a los presentados a continuación.  Efectúe las operaciones y explique su respuesta como hay un menos fuera del parentesis este 3 se conviecte en positivo y se suma

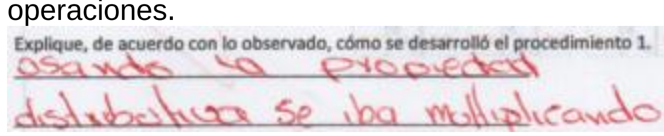
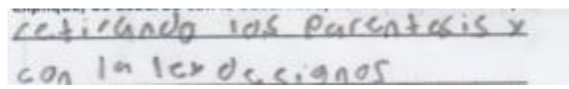
TALLER NÚMERO 2 – ACTIVIDAD 3		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso compuesto de varios pasos. • Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso relacionando distintas variables.	Presentar una expresión que permita solucionar una situación y representarla gráficamente.	Las parejas de estudiantes se distribuyeron de la siguiente forma: 20% respondió correctamente todas las preguntas. 32% respondió una pregunta de forma incorrecta. 43% respondió dos preguntas de forma incorrecta. 5% respondió tres preguntas de forma incorrecta. La pregunta en la que se presentó mayor dificultad fue la número 2, donde se debía plantear la diferencia entre dos cantidades enteras, una de ellas negativa. Algunos estudiantes asumieron el signo del entero negativo como signo de la diferencia, como se muestra a continuación:  De igual forma la pregunta 4 presentó dificultad puesto que los estudiantes invirtieron el orden de los términos de la diferencia, como en el caso de la imagen:  Con relación al tipo de operación presentada, se observa, en el caso donde se debía efectuar más de una operación (primera pregunta), parejas que las presentaron de forma separada y parejas que plantearon una sola expresión, como se muestra a continuación:   Respecto a la representación gráfica se pudo determinar que es correcta cuando la operación planteada es correcta, salvo algunos casos de parejas que graficaron todos los enteros de la operación que se quería representar desde cero.

TALLER NÚMERO 2 – ACTIVIDAD 4		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso compuesto de varios pasos. • Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso relacionando distintas variables.	Relacionar una operación entre enteros con una expresión que incluye signos de agrupación	Se observa que el 83% de los grupos identificó las gráficas pertinentes y el 93% identificó todos los resultados. En general el proceso aplicado para resolver la actividad fue, suprimir los signos de agrupación para obtener una expresión simplificada, buscar la gráfica correspondiente a la expresión simplificada y el resultado de dicha operación.

TALLER NÚMERO 2 – ACTIVIDAD 5		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Sintetizar información creando cadenas de razonamientos para evaluar inferencias. • Hacer generalizaciones recurriendo a múltiples datos o combinando varios tipos de información.	Indicar si una afirmación es verdadera o falsa, con relación a un contexto establecido y argumentar.	El 94% de los grupos evaluó correctamente todas las afirmaciones y el 67% presentó argumentos válidos. Con relación a los argumentos presentados se pudieron encontrar dos tipos de procedimientos, uno donde plantearon la operación con los datos proporcionados en la afirmación, para concluir si el resultado corresponde o no con los datos iniciales y otro donde, con los datos proporcionados inicialmente, encontraron el valor que hacía falta y lo compararon con el indicado en la afirmación. Algunos grupos anexaron la tabla con los resultados para todos los equipos como se muestra a continuación:  Con relación a los grupos que no evaluaron de manera correcta las afirmaciones, podemos encontrar errores en el planteamiento de la operación, teniendo en cuenta que, para todos los casos, la diferencia de goles se calcula restando a los goles anotados, los goles recibidos, en la imagen podemos observar, en la primera operación, por ejemplo, que los estudiantes plantearon la operación restando, a los goles a favor, la diferencia de goles.  También se identificaron algunos casos en donde, a pesar de completar correctamente la tabla evaluaron incorrectamente las afirmaciones. Lo anterior se puede atribuir a

		que no comprendieron completamente la afirmación.
TALLER NÚMERO 2 – ACTIVIDAD 6		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Sintetizar información creando cadenas de razonamientos para evaluar inferencias. • Hacer generalizaciones recurriendo a múltiples datos o combinando varios tipos de información.	Relacionando la información presentada en el contexto, responder algunas preguntas y justificar.	El 19% de los grupos respondió correctamente todas las preguntas, el 75% algunas y el 6% ninguna. Respecto a las preguntas que resultaron de nivel alto de complejidad se pudo observar que corresponden a aquellas que requerían involucrar todos los datos del contexto o a las que exigían determinar comparar y hallar diferencia entre dos cantidades. Con relación a las justificaciones presentadas, se evidenció que, la mayoría presentaron las tablas con los resultados, completando los valores faltantes e hicieron referencia a ellos para justificar sus respuestas. A continuación, se muestra una de las tablas presentadas.  Se encontraron además grupos que presentaron las tablas con los resultados obtenidos de forma correcta y, sin embargo, respondieron de forma incorrecta las preguntas. Lo anterior se puede atribuir a que no comprendieron completamente el enunciado o, no desarrollaron la operación que debían efectuar con los datos de la tabla.

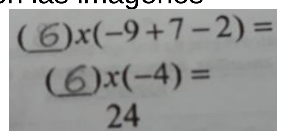
TALLER NÚMERO 3 - ACTIVIDAD 1		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Seguir instrucciones directas en situaciones explícitas. • Hacer uso del razonamiento directo y de interpretaciones literales de los resultados.	Seleccionar la expresión que permite calcular el número total de elementos presentes en una imagen, simplificarla.	73% de los estudiantes seleccionó correctamente la expresión indicada y 66% del total de estudiantes la simplificó correctamente. Con relación a los procedimientos mostrados se observa que más del 50%, de quienes la simplificaron correctamente, no utilizó la propiedad distributiva. Quienes no seleccionaron la opción correcta de operación, seleccionaron la opción C que corresponde a una imagen con el mismo número de elementos por cada arreglo, pero con un número de arreglos mayor (4).
	Seleccionar la imagen cuyo número de elementos corresponde a la simplificación de una expresión dada.	80% de los estudiantes seleccionó la imagen correcta, los demás seleccionaron la imagen D que corresponde al mismo número de arreglos (3), pero con número de elementos diferente por arreglo. Se puede concluir que quienes seleccionaron la imagen dan significado, en el contexto, a la multiplicación como adición reiterada
	Completar una imagen, de tal forma que corresponda con una expresión que relaciona adición y multiplicación.	El 93% de los estudiantes completó de forma correcta la imagen, quienes lo hicieron de forma incorrecta, representaron los números presentes en la imagen, sin tener en cuenta la relación representada en la expresión.

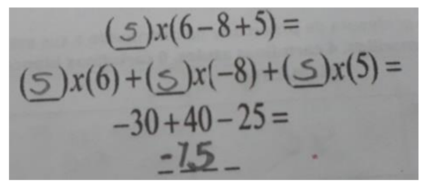
TALLER NÚMERO 3 – ACTIVIDAD 2		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Asociar información con el fin de razonar directamente sobre ella y realizar inferencias. • Comunicar los razonamientos implícitos en la solución de una situación.	Explicar el procedimiento aplicado para simplificar una expresión e identificar la propiedad aplicada.	Aunque todos los estudiantes explicaron de forma correcta los procedimientos aplicados, solo el 40% identificó la propiedad aplicada. Los textos utilizados como explicación son similares a los mostrados a continuación, donde se hace referencia a la aplicación de la regla de signos y al orden en el que se desarrollaron las operaciones.  Explique, de acuerdo con lo observado, cómo se desarrolló el procedimiento 1. osando la propiedad distibutiva se iba multiplicando  cetirando los parentesis y con la ley de cignos
	Justificar por qué, cuando se simplifica una expresión por dos procedimientos diferentes, se obtiene el mismo resultado.	El 93% de los estudiantes presentó alguna justificación. Uno de los argumentos más usados fue que, en los dos procedimientos se aplican las mismas operaciones, pero en orden diferente, otros simplemente argumentaron que el resultado era el mismo porque se trababa de la misma expresión.
	Plantear una expresión que modele una situación dada y simplificarla, aplicando la propiedad distributiva y sin aplicarla.	El 86% de los estudiantes propuso una expresión que modela correctamente la situación planteada y la simplificó de forma apropiada por los dos procedimientos, aplicando la propiedad distributiva y sin aplicarla. El 6% de los estudiantes presentó una expresión correcta pero no la simplificó correctamente. El 4% presentó una expresión que no corresponde con la situación. El 4% no desarrolló la actividad. Para el caso de los estudiantes que desarrollaron correctamente la actividad, se puede afirmar que identifican apropiadamente contextos que se relacionan simultáneamente con la multiplicación y la adición.

<table>
<tr><th colspan="3">TALLER NÚMERO 3 – ACTIVIDAD 3</th></tr>
<tr><th>Nivel de razonamiento</th><th>DESCRIPCIÓN</th><th>ANÁLISIS</th></tr>
<tr><td>

- Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso compuesto de varios pasos.
- Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso relacionando distintas variables.

</td><td>Completar una expresión con las cantidades que hacen válida una la igualdad.</td><td>El 80% de las parejas completó bien las expresiones en por lo menos cinco de las seis operaciones. Respecto al porcentaje restante se evidenció que no tuvieron en cuenta los signos de la cantidad resultante. Se ilustra en las imágenes





Esta dificultad se presentó tanto en los ejercicios donde se aplicó la propiedad distributiva como en los que no se aplicó.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">TALLER NÚMERO 3 – ACTIVIDAD 4</th></tr>
<tr><th>Nivel de razonamiento</th><th>DESCRIPCIÓN</th><th>ANÁLISIS</th></tr>
<tr><td>

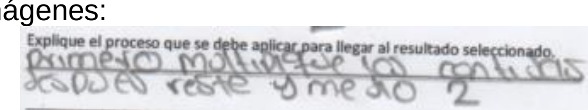
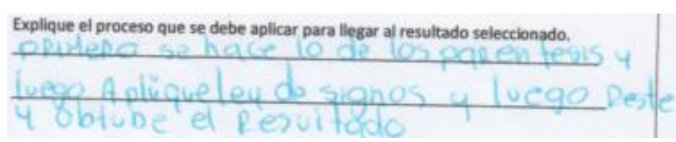
- Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso compuesto de varios pasos.
- Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso relacionando distintas variables.

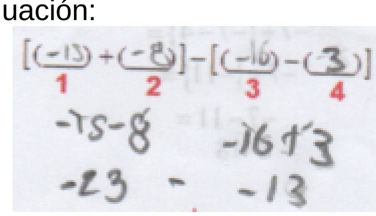
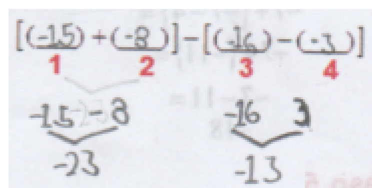
</td><td>Descomponer el segundo factor de un producto, usando enteros positivos y negativos y desarrollar el producto.</td><td>El 73% de las parejas de estudiantes desarrollo correctamente la actividad. Para el caso de quienes no desarrollaron completamente, se pudieron evidenciar las siguientes situaciones:

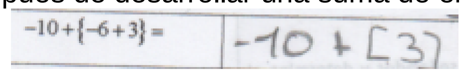
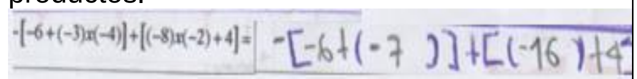
- No tienen en cuenta el signo del número que debían descomponer.
- Desarrollan el producto sin tener en cuenta los signos y la regla de signos.

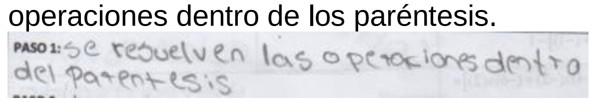
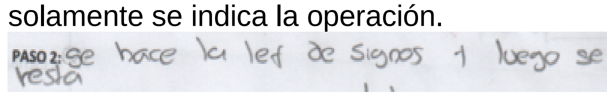
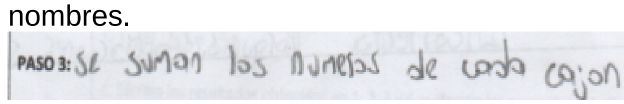
</td></tr>
</table>

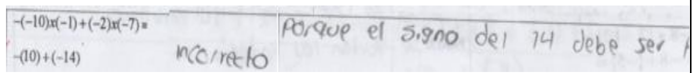
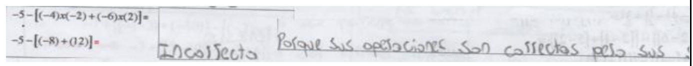
TALLER NÚMERO 3 – ACTIVIDAD 5		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Sintetizar información creando cadenas de razonamientos para evaluar inferencias. • Hacer generalizaciones recurriendo a múltiples datos o combinando varios tipos de información.	Responder algunas preguntas relacionando información particular presentada en una situación. Justificar cada una de las respuestas.	El 66% de las parejas de estudiantes respondió correctamente más de la mitad de las preguntas. Se evidenció que en aquellas preguntas donde se pedía hallar el número de objetos de una clase, los estudiantes respondieron con el cardinal del conjunto completo sin discriminar la clase. Se concluye de esto que no tuvieron en cuenta la instrucción, sin embargo modelaron apropiadamente situaciones, usando producto y adición de cantidades enteras. Respecto a las justificaciones, en algunos casos, argumentan con las operaciones y en otros narran el orden en el que se deben desarrollar y explican por qué razón se debe usar cada cantidad.

TALLER NÚMERO 4 - ACTIVIDAD 1		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Seguir instrucciones directas en situaciones explícitas. • Hacer uso del razonamiento directo y de interpretaciones literales de los resultados.	Simplificar una expresión con números enteros que contiene signos de agrupación. Explicar el proceso aplicado para desarrollar la simplificación.	El 64% de los estudiantes simplificó al menos tres de las cuatro expresiones de forma correcta. Se pudo observar que, a medida que las expresiones se hicieron más complejas, con más signos de agrupación y combinando adición y multiplicación, el número de aciertos disminuyó. Con relación a los estudiantes que desarrollaron correctamente la actividad, se puede afirmar que conocen la jerarquía de las operaciones y que efectúan correctamente multiplicación y adición de enteros. Se encontraron explicaciones, sobre el procedimiento, como las siguientes: • "se debe multiplicar primero y luego sumar…" • "se debe aplicar la regla de signos…" • "primero se deben resolver los paréntesis…" Lo anterior se puede verificar en las siguientes imágenes:   Respecto a quienes desarrollaron la actividad de forma incorrecta se pudo determinar que, aunque aplican la jerarquía de las operaciones, tienen dificultad para desarrollar producto de enteros o para determinar el signo en una adición o diferencia de enteros.

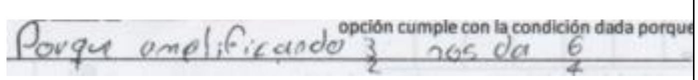
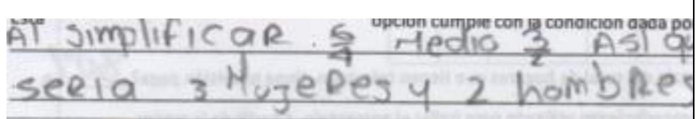
TALLER NÚMERO 4 – ACTIVIDAD 2		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Asociar información con el fin de razonar directamente sobre ella y realizar inferencias. • Comunicar los razonamientos implícitos en la solución de una situación.	Simplificar una expresión que contiene signos de agrupación, adición y producto de enteros combinados, desarrollando cada parte de forma separada.	Se observó que, aunque algunos estudiantes, evidenciaron aún problemas con los signos, la simplificación, de los componentes de las expresiones se efectúo en la mayoría de los casos (87%) correctamente. Hay dificultades a la hora de combinar todos los resultados para finalizar la simplificación, debido a que se debe aplicar la regla de signos de forma reiterada. Lo anterior se puede verificar en los procedimientos mostrados a continuación:  

TALLER NÚMERO 4 – ACTIVIDAD 3		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Asociar información con el fin de razonar directamente sobre ella y realizar inferencias. • Comunicar los razonamientos implícitos en la solución de una situación.	Completar el procedimiento a seguir en la simplificación de una expresión que contiene signos de agrupación.	El 73% de las parejas de estudiantes mostró un procedimiento correcto en al menos 3 de las 6 expresiones correctas. Las dificultades observadas se describen a continuación. • No asignar correctamente el signo al resultado, después de desarrollar una suma de enteros.  • No asignar correctamente el signo a los productos.  Con relación a la aplicación de la jerarquía de las operaciones, se observa que los estudiantes, en general, la aplican correctamente.

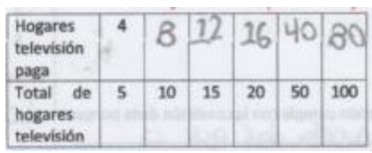
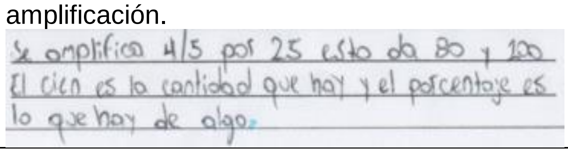
TALLER NÚMERO 4 – ACTIVIDAD 4		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso compuesto de varios pasos. • Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso relacionando distintas variables.	Explicar, paso a paso, el procedimiento aplicado, en la simplificación de una expresión que contiene signos de agrupación.	Todos los grupos de estudiantes presentaron una explicación de los procedimientos. En todas las explicaciones, los estudiantes identificaron que primero deben efectuar las operaciones dentro de los paréntesis.  Los procedimientos se explican de manera general, no se justifican los signos obtenidos, solamente se indica la operación.  Algunos grupos de estudiantes no manejan el nombre de los signos de agrupación (paréntesis, corchete, llaves) sin embargo, explican el procedimiento de forma correcta, usando otros nombres. 

TALLER NÚMERO 4 – ACTIVIDAD 5		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Sintetizar información creando cadenas de razonamientos para evaluar inferencias. • Hacer generalizaciones recurriendo a múltiples datos o combinando varios tipos de información.	Determinar el procedimiento aplicado en la simplificación de un polinomio aritmético. Indicar si es correcto o no y justificar	El 86% de los grupos evalúo de forma correcta los procedimientos aplicados. Dentro de las justificaciones presentadas indican cual es el error presente en el procedimiento, en los casos donde hay error.   En general se observa comprensión de los procedimientos aplicados y de la jerarquía de las operaciones.

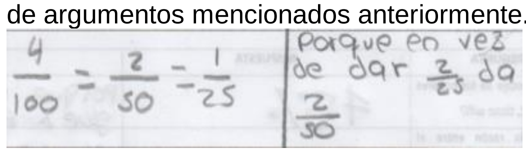
TALLER NÚMERO 5 - ACTIVIDAD 1		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Seguir instrucciones directas en situaciones explícitas. • Hacer uso del razonamiento directo y de interpretaciones literales de los resultados.	Encontrar la razón entre dos magnitudes y representarla como una fracción.	El 75% de los estudiantes desarrolló la actividad completa de forma correcta. Se pudo determinar que quienes presentaron respuestas incorrectas no comprendieron completamente el enunciado de la pregunta y, para calcular la razón, utilizaron valores del contexto que no corresponden con las magnitudes a relacionar. Además de lo anterior, pero en menor medida, se presentaron errores en la simplificación.

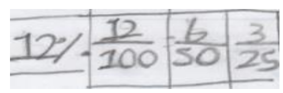
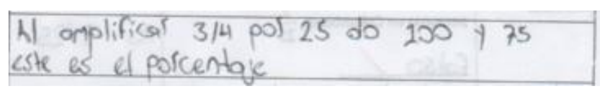
TALLER NÚMERO 5 – ACTIVIDAD 2		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Asociar información con el fin de razonar directamente sobre ella y realizar inferencias.	Identificar la imagen que corresponde a la razón dada y justificar.	El 80% de las parejas de estudiantes desarrolló la actividad de forma correcta. Las justificaciones más comunes recurrieron a las simplificaciones y amplificaciones, como se muestra en las imágenes;  opción cumple con la condición dada porque Porque amplificando 3/2 nos da 6/4  opción cumple con la condición dada po Al simplificar 5/4 medio 3/2 Asi q seria 3 Mujeres y 2 hombres
• Comunicar los razonamientos implícitos en la solución de una situación.	Seleccionar la razón entre dos magnitudes presentes en una imagen y justificar.	Todas las parejas de estudiantes desarrollaron de forma correcta la actividad. El procedimiento aplicado fue determinar el valor de cada magnitud, de acuerdo con la imagen, y simplificar para encontrar la razón.

<table>
<tr><th colspan="3">TALLER NÚMERO 5 – ACTIVIDAD 3</th></tr>
<tr><th>Nivel de razonamiento</th><th>DESCRIPCIÓN</th><th>ANÁLISIS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">• Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso compuesto de varios pasos.

• Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso relacionando distintas variables.</td><td>Completar una tabla que relaciona dos magnitudes, a partir de la razón entre ellas.</td><td>El 93% de las parejas de estudiantes desarrollo la actividad de forma correcta, para el caso de quienes presentaron valores que no corresponden, se pudo determinar que la causa fue un error de cálculo, en el proceso de amplificación.</td></tr>
<tr><td>Determinar el porcentaje, a partir de la razón entre dos magnitudes y explicar el procedimiento aplicado.</td><td>El 86% de las parejas de estudiantes desarrolló la actividad e forma correcta, a partir del proceso de amplificación, como se muestra en la siguiente imagen.

Hogares televisión paga | 4 | 8 | 12 | 16 | 40 | 80
Total de hogares televisión | 5 | 10 | 15 | 20 | 50 | 100
Con relación a la explicación sobre el procedimiento aplicado, la mayoría de los textos son similares al que se muestra en la imagen, donde se hace referencia a una amplificación.

Se amplifica 4/5 por 25 esto da 80 y 100
El cien es la cantidad que hay y el porcentaje es
lo que hay de algo.</td></tr>
</table>

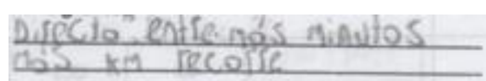
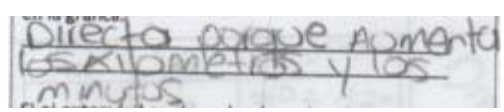
<table>
<tr><th colspan="3">TALLER NÚMERO 5 – ACTIVIDAD 4</th></tr>
<tr><th>Nivel de razonamiento</th><th>DESCRIPCIÓN</th><th>ANÁLISIS</th></tr>
<tr><td>• Sintetizar información creando cadenas de razonamientos para evaluar inferencias.

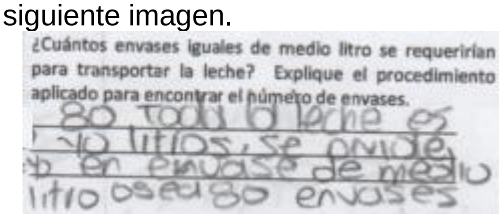
• Hacer generalizaciones recurriendo a múltiples datos o combinando varios tipos de información</td><td>Evaluar una afirmación relacionando la información presente en un enunciado y justificar.</td><td>El 60% de las parejas de estudiantes evaluó correctamente todas las afirmaciones. Con relación a los argumentos presentados, se pudieron identificar las siguientes situaciones:
• Presentan el procedimiento aplicado para verificar los valores de los que se habla en la afirmación.
• Narran el procedimiento que se debe aplicar para llegar al resultado que se está evaluando.
• Indican el valor que hace correcta la afirmación sin mostrar el procedimiento aplicado.
La siguiente imagen corresponde a uno de los tipos de argumentos mencionados anteriormente.

$\frac{4}{100} = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}$ Porque en vez de dar $\frac{2}{25}$ da $\frac{2}{50}$
Con relación a los procedimientos mostrados por las parejas de estudiantes que no evaluaron correctamente todas las afirmaciones, se pudo establecer que no tuvieron en cuenta todas las condiciones dadas en el enunciado o no las relacionaron correctamente.</td></tr>
</table>

TALLER NÚMERO 5 – ACTIVIDAD 5		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Sintetizar información creando cadenas de razonamientos para evaluar inferencias. • Hacer generalizaciones recurriendo a múltiples datos o combinando varios tipos de información	Teniendo en cuenta la información presente en un contexto, responder las preguntas y justificar.	El 66% de los estudiantes respondió de forma correcta al menos tres de las cuatro preguntas. Con relación a los argumentos presentados se identificaron los siguientes tipos de explicaciones: • Presenta la operación que permite calcular el valor solicitado. • Enuncia una frase en la que se resume el proceso de cálculo que se debe seguir. • Presenta una tabla donde se registran valores que toman las magnitudes. Lo anterior se ilustra en las siguientes imágenes:  

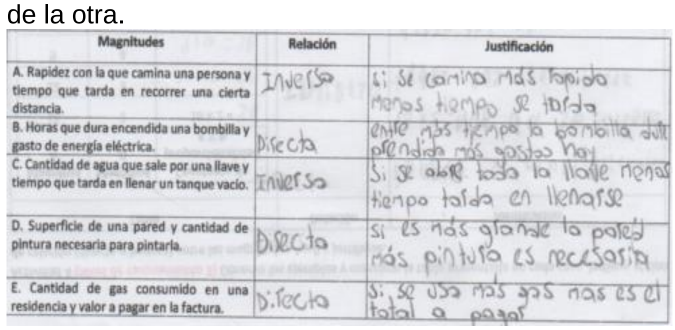
TALLER NÚMERO 6 - ACTIVIDAD 1		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Seguir instrucciones directas en situaciones explícitas. • Hacer uso del razonamiento directo y de interpretaciones literales de los resultados.	Extraer datos de una tabla que relaciona dos magnitudes y determinar el valor faltante, de acuerdo con el tipo de relación	El total de estudiantes logró responder correctamente las preguntas que requerían extraer datos de la tabla, para magnitudes directa e inversamente proporcionales. Respecto a la actividad de completar valores en una tabla, se pudo observar que el 71% lo hizo correctamente, en el caso de las magnitudes directas y el 87% en el caso de las magnitudes inversas. Con respecto a las magnitudes directas, una de las respuestas no acertadas, muy común entre varios estudiantes, se deriva del razonamiento mostrado a continuación, que fue anexado por alguno de ellos.

		$3 \rightarrow 24$ $2 \rightarrow 12$ $1 \rightarrow 6$ El primer dato, que relaciona tres con 24, se extrae de la tabla, el segundo dato lo dedujo el estudiante a partir de un razonamiento errado con el cual concluye que el valor que corresponde a 1 es 6. Lo anterior muestra que el estudiante no tiene en cuenta que la variación entre las magnitudes debe ser proporcional o no entiende que significa que dos magnitudes sean proporcionales.

TALLER NÚMERO 6 – ACTIVIDAD 2		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Asociar información con el fin de razonar directamente sobre ella y realizar inferencias. • Comunicar los razonamientos implícitos en la solución de una situación.	Extraer datos de una gráfica que muestra la relación entre dos magnitudes, identificar el tipo de relación y determinar el valor que toma una de las magnitudes cuando varia de forma directamente proporcional a la otra.	El 93% de los grupos de estudiantes extrajo datos de forma correcta de la gráfica. Respecto al tipo de relación, el 87% la identificó correctamente. Las explicaciones presentadas contienen argumentos como los mostrados a continuación, donde mencionan las magnitudes relacionadas y analizan el comportamiento de una de ellas a partir de la variación de la otra.   Con relación al valor que se debía determinar, el 62% desarrolló correctamente. Se pudieron identificar los siguientes procedimientos. • Tomar un valor de tiempo y distancia de la tabla y multiplicar

		por el mismo valor las dos magnitudes. • Determinar la distancia que recorre en un minuto y multiplicar esa distancia por 20. • Reconocer que la distancia es el doble del tiempo. Con relación a los estudiantes que no determinaron correctamente el valor solicitado se observó que, en algunos casos, usaron datos que no corresponden a los presentados en la gráfica, es posible que tengan dificultades para leer correctamente la gráfica.
	Extraer datos de una gráfica que muestra la relación entre dos magnitudes, determinar el comportamiento de una magnitud a partir de la variación de la otra y encontrar el valor que toma una de las magnitudes.	Todos los grupos de estudiantes lograron extraer correctamente de la gráfica los valores solicitados. Se puede inferir entonces, que por lo menos en el contexto propuesto, identifican magnitudes relacionadas y comprenden la relación representada. El 56% logró predecir el comportamiento de una de las magnitudes, dada la variación de la otra. El 43% encontró el valor solicitado usando como base del razonamiento, en la mayoría de los casos, el total de litros a repartir, lo cual se ilustra en la siguiente imagen.  Dentro de quienes no desarrollaron de forma correcta esta actividad, se pudieron identificar algunos estudiantes que, probablemente no comprendieron la instrucción y presentaron una explicación sobre el tipo de relación entre las magnitudes.

<table>
<tr><th colspan="3">TALLER NÚMERO 6 – ACTIVIDAD 3</th></tr>
<tr><th>Nivel de razonamiento</th><th>DESCRIPCIÓN</th><th>ANÁLISIS</th></tr>
<tr>
<td>• Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso compuesto de varios pasos.
• Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso relacionando distintas variables.</td>
<td>Determinar si la relación entre dos magnitudes dadas es directa o inversa y justificar.</td>
<td>El total de grupos de estudiantes identificó el tipo de relación correctamente en por lo menos cuatro de las cinco parejas de magnitudes presentadas.

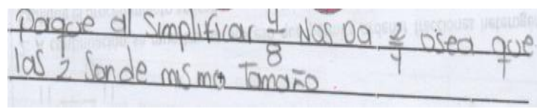
En general, las justificaciones presentadas son como las mostradas en la siguiente imagen, donde se explica la forma como una magnitud varia, a partir de la variación de la otra.

<table>
<tr><th>Magnitudes</th><th>Relación</th><th>Justificación</th></tr>
<tr><td>A. Rapidez con la que camina una persona y tiempo que tarda en recorrer una cierta distancia.</td><td>Inversa</td><td>Si se camina más rápido menos tiempo se tarda</td></tr>
<tr><td>B. Horas que dura encendida una bombilla y gasto de energía eléctrica.</td><td>Directa</td><td>entre más tiempo la bombilla dure prendida más gastos hay</td></tr>
<tr><td>C. Cantidad de agua que sale por una llave y tiempo que tarda en llenar un tanque vacío.</td><td>Inversa</td><td>Si se abre toda la llave menos tiempo tarda en llenarse</td></tr>
<tr><td>D. Superficie de una pared y cantidad de pintura necesaria para pintarla.</td><td>Directa</td><td>Si es más grande la pared más pintura es necesaria</td></tr>
<tr><td>E. Cantidad de gas consumido en una residencia y valor a pagar en la factura.</td><td>Directa</td><td>Si se usa más gas mas es el total a pagar</td></tr>
</table>
Además de lo anterior, se pudo evidenciar que la pareja de magnitudes donde se presentó menor acierto, a la hora de determinar el tipo de relación, fue “cantidad de agua que sale por una llave y tiempo que tarda en llenar un tanque vacío”. En las explicaciones presentadas por los estudiantes, se observa que, para hacer el análisis, tomaron el tiempo que tarda en llenar el tanque vacío como rapidez con la que llena el tanque.</td>
</tr>
</table>

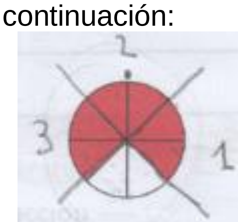
<table>
<tr><th colspan="3">TALLER NÚMERO 6 – ACTIVIDAD 4</th></tr>
<tr><th>Nivel de razonamiento</th><th>DESCRIPCIÓN</th><th>ANÁLISIS</th></tr>
<tr>
<td>• Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso compuesto de varios pasos.
• Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso relacionando distintas variables.</td>
<td>Determinar el tipo de relación y la constante de proporcionalidad, a partir de una tabla que relaciona dos magnitudes y justificar.</td>
<td>El 93% de los grupos de estudiantes identificó y calculó correctamente la constante de proporcionalidad. Se pudieron identificar los siguientes tipos de justificación:
• A partir de la tabla, se analiza la variación de cada magnitud (aumenta o disminuye) entre una pareja y la otra para concluir el tipo de relación.
• A partir de la forma como se calcula la constante de proporcionalidad (como producto o como cociente) se concluye el tipo de relación.</td>
</tr>
</table>

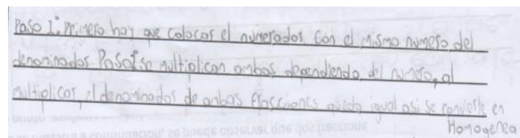
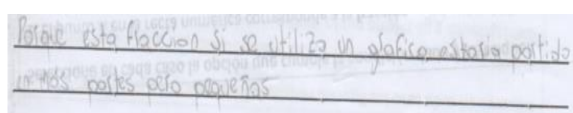
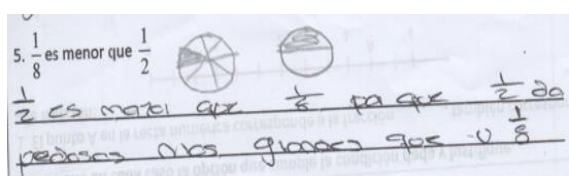
<table>
<tr><th colspan="3">TALLER NÚMERO 6 – ACTIVIDAD 5</th></tr>
<tr><th>Nivel de razonamiento</th><th>DESCRIPCIÓN</th><th>ANÁLISIS</th></tr>
<tr><td>Sintetizar información creando cadenas de razonamientos para evaluar inferencias.
Hacer generalizaciones recurriendo a múltiples datos o combinando varios tipos de información.</td><td>Evaluar afirmaciones relacionadas con tablas o graficas que representan la relación entre dos magnitudes.</td><td>Todos los grupos evaluaron, de forma correcta, más de la mitad de las afirmaciones.
Con relación a las justificaciones se encontraron las siguientes categorías:
Usar la constante de proporcionalidad para justificar que el valor que toma una de las magnitudes es o no correcto.
Explicar la forma como se comporta una magnitud, cuando la otra varia de forma específica para hablar del tipo de relación entre magnitudes.
Usar valores de una gráfica para indicar cómo se comportan las magnitudes.
Con respecto a las afirmaciones que resultaron de mayor complejidad, se observó que son aquellas que, para evaluarlas, requieren determinar un valor en una representación gráfica, tanto para las magnitudes que se relacionan de forma directa como aquellas que se relacionan de forma inversa.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">TALLER NÚMERO 7 - ACTIVIDAD 1</th></tr>
<tr><th>Nivel de razonamiento</th><th>DESCRIPCIÓN</th><th>ANÁLISIS</th></tr>
<tr><td>Seguir instrucciones directas en situaciones explícitas.
Hacer uso del razonamiento directo y de interpretaciones literales de los resultados.</td><td>Identificar diferentes formas de representación de un racional como fracción.</td><td>Tanto para el caso de identificar la fracción representada como para el de identificar la representación de una fracción, el menor porcentaje de respuestas acertadas se presentó con la recta numérica (45%). Se observó que los estudiantes tienen a relacionar el numerador de la fracción con el entero con respecto al cual se debe ubicar la fracción en la recta, así algunos estudiantes ubicaron la fracción 5/2 cerca al entero 5.

Respecto a las otras formas de representación, cerca del 80% identificó correctamente, tanto la fracción representada como la imagen con la representación correspondiente.
El mayor porcentaje de acierto (89%) se presentó en las representaciones donde se utilizaron áreas.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">TALLER NÚMERO 7 – ACTIVIDAD 2</th></tr>
<tr><th>Nivel de razonamiento</th><th>DESCRIPCIÓN</th><th>ANÁLISIS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Asociar información con el fin de razonar directamente sobre ella y realizar inferencias.
Comunicar los razonamientos implícitos en la solución de una situación.</td><td>Explicar por qué razón, dos fracciones que se representan por el mismo punto de una recta numérica o que corresponden a regiones planas de la misma área son equivalentes.</td><td>En general los grupos de estudiantes presentaron explicaciones en las que utilizaron amplificación o simplificación de una de las dos fracciones para obtener la otra, tanto en la recta numérica como en el caso de las áreas, como se muestra en la siguiente imagen:

</td></tr>
<tr><td>Identificar la fracción equivalente a una fracción representada en la recta numérica o por la región de área de una superficie.</td><td>87% de los grupos identificó correctamente la fracción correspondiente a una fracción representada en la recta numérica y presenta como justificación un proceso de amplificación.

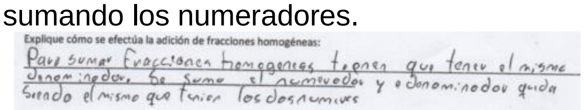
Todos los grupos de estudiantes identificaron correctamente la fracción equivalente a la representada por una región de área de una superficie, presentando como justificación una simplificación, uno de los grupos presentó además, la modificación del gráfico inicial mostrada a continuación:

</td></tr>
</table>

TALLER NÚMERO 7 – ACTIVIDAD 3		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso compuesto de varios pasos. • Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso relacionando distintas variables.	Ordenar fracciones homogéneas	Todos los grupos de estudiantes lograron identificar correctamente la relación de orden entre dos fracciones homogéneas.
	Explicar y aplicar un procedimiento para ordenar una pareja de fracciones heterogéneas	Todos los grupos de estudiantes explicaron correctamente el procedimiento presentado, además, el 25% agregó una justificación del procedimiento, indicando que se aplica para convertir las fracciones heterogéneas en homogéneas, como se muestra en la siguiente imagen  Con relación a la aplicación del procedimiento, el 62% de los grupos lo aplicó correctamente para ordenar dos parejas de fracciones heterogéneas.
	Justificar afirmaciones acerca de la equivalencia de fracciones y el orden de fracciones heterogéneas.	El 75% de los grupos de estudiantes dio una justificación correcta respecto a las afirmaciones sobre fracciones equivalentes, en las que se indica el proceso de amplificación o simplificación que permite construirlas o reconocerlas. Con relación a las afirmaciones relacionadas con el orden entre fracciones heterogéneas, el 75% de los estudiantes explicó de forma correcta la relación de orden presente. Algunos grupos de estudiantes hacen referencia a un proceso aplicado para convertirlas en homogéneas que justifica la relación de orden, otros hablan del tamaño de las partes que se obtienen al fraccionar de cada modo y otro grupo de estudiantes agrega además una representación gráfica. Lo anterior se ilustra en las siguientes imágenes:  

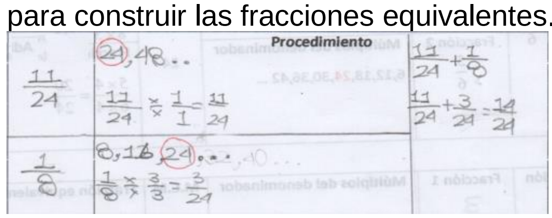
TALLER NÚMERO 7 – ACTIVIDAD 4		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Sintetizar información creando cadenas de razonamientos para evaluar inferencias. • Hacer generalizaciones recurriendo a múltiples datos o combinando varios tipos de información.	Responder preguntas relacionadas con fracciones que han sido representadas usando como unidad la superficie de un rectángulo.	Todos los grupos de estudiantes identificaron correctamente cada una de las fracciones representadas. Con relación a la pregunta que pedía identificar la fracción, entre las fracciones representadas gráficamente, equivalente a una fracción dada, se observó que el 87% de los grupos de estudiantes respondió correctamente, como justificación presentan el proceso de simplificación o amplificación necesario. Respecto a la pregunta que pedía identificar las dos fracciones equivalentes, dentro de las fracciones representadas inicialmente, solo el 25% de los grupos respondió de forma correcta. Teniendo en cuenta que la pregunta se refería a “partes sombreadas del mismo tamaño” los estudiantes lo asimilaron con fracciones homogéneas, buscando que el número de partes en el que estuviera dividida la unidad (rectángulo) fuera el mismo y no como fracciones equivalentes.

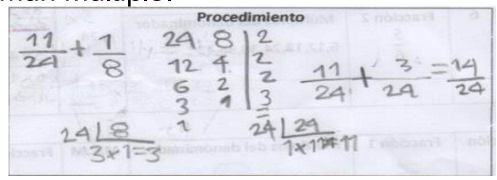
TALLER NÚMERO 7 – ACTIVIDAD 5		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Sintetizar información creando cadenas de razonamientos para evaluar inferencias. • Hacer generalizaciones recurriendo a múltiples datos o combinando varios tipos de información.	Evaluar afirmaciones relacionadas con datos estadísticos presentados en forma de fracción.	El 75% de los grupos evaluó de forma correcta al menos 6 de las 8 afirmaciones presentadas. Se observó menor acierto para la afirmación relacionada con dos datos presentados como fracciones heterogéneas con numeradores diferentes de uno. Las afirmaciones relacionadas con fracciones equivalentes a las presentadas en la información inicial fueron respondidas correctamente por todos los estudiantes. Respecto a las justificaciones presentadas, se observó que, para las afirmaciones relacionadas con ordenar parejas de fracciones, los estudiantes presentaron el procedimiento donde se convierten las fracciones a homogéneas y luego se ordenan, aunque algunos hicieron una representación gráfica para comparar. Para las afirmaciones relacionadas con fracciones equivalentes, el proceso de amplificación y simplificación fue la justificación más usada. Se puede concluir que los estudiantes encuentran correctamente fracciones equivalentes a una fracción dada y ordenan parejas de fracciones heterogéneas y homogéneas, mostrando mayor facilidad para el caso de fracciones heterogéneas con numerador 1.

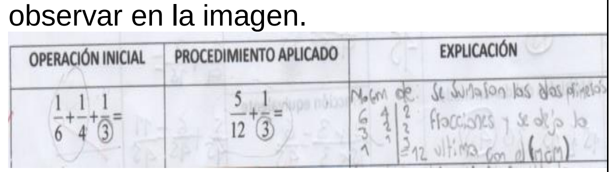
TALLER NÚMERO 8 - ACTIVIDAD 1		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Seguir instrucciones directas en situaciones explícitas. • Hacer uso del razonamiento directo y de interpretaciones literales de los resultados.	Identificar la fracción homogénea a una fracción representada gráficamente y adicionar fracciones homogéneas.	El 59% de los estudiantes identificó correctamente la fracción homogénea con la fracción representada. La mayoría argumenta que son homogéneas porque los denominadores son iguales, otros indican que porque el número total de partes que hay en los dos dibujos es el mismo. 20% de los estudiantes, aunque hayan identificado correctamente la fracción homogénea, no dan ninguna razón para su elección. 93% de los estudiantes completó correctamente la suma de fracciones homogéneas y la graficó correctamente.

TALLER NÚMERO 8 – ACTIVIDAD 2		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Asociar información con el fin de razonar directamente sobre ella y realizar inferencias. • Comunicar los razonamientos implícitos en la solución de una situación.	Relacionar una fracción dada con una fracción homogénea con ella y desarrollar la adición. Explicar el procedimiento aplicado.	Todos los estudiantes relacionaron correctamente las fracciones con sus homogéneas y desarrollaron de forma correcta las adiciones. Las explicaciones presentadas corresponden, en su mayoría, a la mostrada en la imagen, donde se indica que la adición de fracciones homogéneas se desarrolla sumando los numeradores.  Explique cómo se efectúa la adición de fracciones homogéneas: Para sumar fracciones homogeneas tienen que tener el mismo denominador, se suma el numerador y el denominador queda siendo el mismo que tenían los dos numeros

TALLER NÚMERO 8 – ACTIVIDAD 3		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso compuesto de varios pasos. • Analizar información para apoyar o crear un argumento o proceso relacionando distintas variables.	Comprender, aplicar y explicar un procedimiento para sumar fracciones heterogéneas.	85% de los grupos aplicaron de forma correcta el procedimiento mostrado. 70% de los grupos explicó el procedimiento aplicado de forma correcta, los demás grupos no presentaron ninguna explicación o explicaron apenas una parte del procedimiento. Dentro de las explicaciones presentadas, se encontraron algunas donde, además de contar paso a paso el procedimiento, los estudiantes mencionan las razones de aplicar algunos de los pasos, por ejemplo, indican que la razón por la cual se calcula el mínimo común múltiplo es para construir “fracciones equivalentes que sean homogéneas”

TALLER NÚMERO 8 – ACTIVIDAD 4		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Sintetizar información creando cadenas de razonamientos para evaluar inferencias. • Hacer generalizaciones recurriendo a múltiples datos o combinando varios tipos de información.	Responder preguntas o evaluar afirmaciones relacionadas con información presentada en el contexto y justificar.	El 57% de los grupos desarrolló toda la actividad de forma correcta. Se observaron algunas diferencias en los procesos aplicados para adicionar fracciones. Algunos estudiantes, como se observa en la imagen a continuación, hicieron la lista de los múltiplos de cada denominador, hasta encontrar el mínimo común múltiplo para construir las fracciones equivalentes.  Otros hicieron una

		descomposición simultanea de los denominadores para encontrar el mínimo común múltiplo.  Cabe anotar, de manera general, que se observó una dificultad en la comprensión de los enunciados, ocasionada por la presencia del conector lógico o.

TALLER NÚMERO 8 – ACTIVIDAD 5		
Nivel de razonamiento	**DESCRIPCIÓN**	**ANÁLISIS**
• Sintetizar información creando cadenas de razonamientos para evaluar inferencias. • Hacer generalizaciones recurriendo a múltiples datos o combinando varios tipos de información.	Deducir el procedimiento aplicado en el desarrollo de una adición de fracciones y explicarlo.	Todos los grupos de estudiantes desarrollaron la actividad, algunos de ellos, además de indicar el procedimiento aplicado, mostraron las operaciones, como se puede observar en la imagen.  Otros estudiantes, solamente indicaron la operación y las fracciones con las que se hizo la operación. En general se puede concluir que los estudiantes identifican el proceso aplicado a la hora de desarrollar una adición de tres fracciones o más, sin embargo, aunque explican correctamente el procedimiento, para el caso donde se aplica la propiedad distributiva, no la mencionan.

C. Anexo: Diseño prueba final

Pregunta 1

Estándar	Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones
Competencia	Razonamiento y Argumentación
Componente	Numérico y sistemas numéricos
Afirmación	Usa relaciones y propiedades de las operaciones en los números Enteros.
Evidencia	Analiza el significado y las relaciones entre las operaciones y las aplica para simplificar cálculos.
Tarea	Comprende la jerarquía de las operaciones con números enteros y la relación que existe entre las estructuras aditiva y multiplicativa.
clave	D

La arena que se extrae de una cantera tiene un peso de 1600 kg por cada metro cúbico y usualmente se empaca en sacos de 40 kilogramos cada uno.

Un constructor compró, para una obra, 3 metros cúbicos de arena de cantera. Para cargarla al camión el transportador contrató 4 personas. La siguiente tabla muestra el número de sacos de arena de 40 kg que ha cargado hasta ahora cada una de las personas:

Nombre del trabajador	**Luis**	**Andrés**	**Juan**	**Felipe**
# sacos	18	19	17	21

Para completar los 2 metros cúbicos de arena deben cargar
A. 6 sacos de arena más.
B. 4 sacos de arena más
C. 3 sacos de arena más
D. 5 sacos de arena más

Para seleccionar la opción correcta el estudiante debe usar la información de la tabla y hallar primero el total de kilos que se han cargado efectuando la operación: $18\times 40+19\times 40+17\times 40+21\times 40=3000$, determinar los kilos que corresponden a 2 metros cúbicos: $2\times 1600=3200$, encontrar la diferencia y concluir que la respuesta correcta es D pues faltan por cargar 200 kilos que corresponden a 5 sacos.

Pregunta 2

Estándar	Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones
Competencia	Razonamiento y Argumentación
Componente	Numérico y sistemas numéricos
Afirmación	Usa las relaciones y las propiedades de las operaciones en los números enteros.
Evidencia	Interpreta relaciones entre las operaciones de números enteros, para hacer inferencias a partir de los elementos de un problema.

Tarea	Estima y compara cantidades enteras a partir de la diferencia entre ellas.
Clave	A

Para las eliminatorias de Europa al mundial de Rusia 2018, los participantes se organizaron en 9 grupos, cada uno de seis equipos.

La siguiente tabla muestra la cantidad de goles anotados (goles a favor) y la diferencia de goles de cada uno de los equipos de uno de los grupos, el B. La diferencia de goles se determina restando a la cantidad de goles a favor, la cantidad de goles en contra (goles que le anotan a un equipo).

EQUIPO	**GOLES ANOTADOS (A FAVOR)**	**DIFERENCIA DE GOLES**
Hungría	14	0
Andorra	2	-21
Letonia	7	-11
Portugal	32	28
Islas Feroe	4	-12
Suiza	23	16

A partir de la información de la tabla es correcto concluir que:

IV. El equipo que anotó menos goles fue el de las Islas Feroe.
V. Al equipo de Andorra le anotaron 23 goles.
VI. Hungría recibió el doble de goles que Suiza.

A. II y III son verdaderas.
B. Todas son falsas.
C. Todas son verdaderas.
D. Solamente I y II son verdaderas.

El estudiante debe evaluar una a una cada expresión de acuerdo con los datos así:
I. Como se observa en la tabla, Islas Feroe anotó 4 goles, pero Andorra anotó 2, por lo tanto, la afirmación es falsa.
II. De acuerdo con los datos de la tabla, Andorra tiene 2 goles a favor y una diferencia de goles de -21, por lo tanto, recibió 23 goles en contra, por lo tanto, la afirmación es verdadera.
III. Hungría tiene 14 goles a favor y una diferencia de 0 goles, con lo cual se concluye que tiene 14 goles en contra y Suiza tiene 23 goles a favor y una diferencia de 16 goles, para un total de 7 goles en contra, con lo cual la afirmación es verdadera.

Pregunta 3

Estándar	Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones
Competencia	Razonamiento y Argumentación
Componente	Numérico y sistemas numéricos
Afirmación	Interpreta procedimientos aritméticos a partir de las relaciones y propiedades de la adición y multiplicación de números enteros.
Evidencia	Evalúa la validez de un procedimiento a partir de la aplicación de propiedades y relaciones los números enteros.
Tarea	Aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición de números enteros.
Clave	D

La siguiente tabla muestra información sobre el salario diario que recibe un profesor de inglés que presta sus servicios a tres institutos de idiomas de una ciudad.

INSTITUTO	**salario que gana en un día**
A	$90.000
B	$100.000
C	$100.000

Para calcular el salario correspondiente a un periodo trabajado, el profesor planteó la siguiente operación:

$$7 \times (90.000 + 100.000 + 100.000)$$

Es correcto afirmar que durante este periodo, el profesor de inglés

A. trabajó más días en el instituto C.
B. tuvo un salario inferior a un millón.
C. trabajó en total 7 días.
D. tuvo un salario superior a dos millones.

El estudiante debe aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, con lo cual se obtiene la expresión equivalente:

$$7 \times (90.000 + 100.000 + 100.000) = 7 \times 90.000 + 7 \times 100000 + 7 \times 100000 = 2.030.000$$

concluyendo que el salario del mes corresponde a la suma de lo que ganó en total en cada uno de los tres lugares y es superior a dos millones de pesos.

Pregunta 4

Estándar	Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones
Competencia	Razonamiento y Argumentación
Componente	Numérico y sistemas numéricos
Afirmación	Interpreta procedimientos aritméticos a partir de las relaciones y propiedades de las operaciones en los números Naturales y Enteros.
Evidencia	Explica procedimientos aritméticos a partir de las relaciones y propiedades de la adición y multiplicación de números enteros.
Tarea	Comprende la relación entre el producto y la adición de sumandos iguales y conecta la información y los elementos de un problema para explicar un procedimiento.
Clave	B

La tabla I muestra el precio de algunos productos que ofrece la cafetería escolar de un colegio.

ARTÍCULO	PRECIO ($)
Helados	$1.800
Arepas	$1.200
Empanadas	$1500

Y la tabla II presenta el número de unidades, de estos productos, que se vendieron en la cafetería durante 4 semanas.

RTÍCULO	Vendidos semana 1	Vendidos semana 2	Vendidos semana 3	Vendidos semana 4
Helados	50	62	70	56
Arepas	95	98	94	82
Empanadas	84	96	90	92

Para determinar el dinero que recibió por la venta de esos productos, durante las cuatro semanas, el administrador de la cafetería efectuó con la calculadora la siguiente operación:

$$1.800(50+62+70+56)+1.200(95+98+94+82)+1.500(84+96+90+92)$$

La operación planteada por el administrador equivale a determinar

A. el número total de productos vendidos durante una semana y multiplicar por el número de semanas.
B. el número total de productos vendidos de cada tipo durante las cuatro semanas y multiplicar por el precio de cada producto.
C. el dinero recibido por la venta de estos productos durante una semana y multiplicar esta cantidad por el número de semanas.
D. el dinero recibido por cada producto durante las cuatro semanas y multiplicar esta cantidad por el número total de productos.

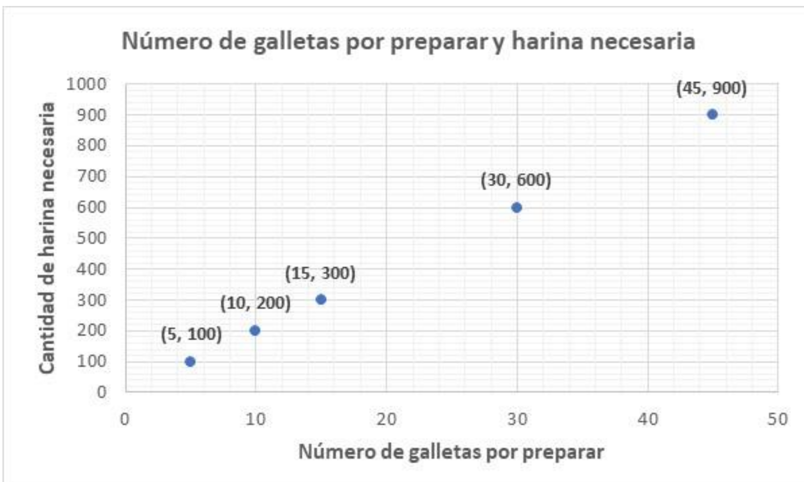
El estudiante debe relacionar la información de la tabla y la gráfica con el procedimiento planteado para inferir que:

Sumar las cantidades 50, 62, 70 y 56 y multiplicar por 1800 equivale a calcular el dinero recibido por la venta de helados durante las cuatro semanas.
Sumar las cantidades 95, 98, 94 y 82 y multiplicar por 1200 equivale a calcular el dinero recibido por la venta de arepas durante las cuatro semanas.
Sumar las cantidades 84, 96, 90 y 92 y multiplicar por 1500 equivale a calcular el dinero recibido por la venta de empanadas durante las cuatro semanas.

Pregunta 5

Estándar	Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.
Competencia	Razonamiento y Argumentación
Componente	Numérico y sistemas numéricos
Afirmación	Usa representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.
Evidencia	Utiliza el hecho de que una representación ilustre la relación entre dos magnitudes directamente proporcionales para determinar la validez de una inferencia.
Tarea	Expresa la fracción como razón y reconoce que la razón es constante cuando las magnitudes que se relacionan son directamente proporcionales.
Clave	C

La siguiente gráfica muestra la relación entre dos magnitudes: la cantidad de galletas que se quieren preparar y la cantidad de harina en gramos que se necesita para prepararlas



Teniendo en cuenta la información anterior es correcto afirmar que para preparar 20 galletas se necesitan dos bolsas de harina de 200 gramos cada una, porque la razón entre número de galletas y cantidad de harina es

A. 1/40
B. 1/50
C. 1/20
D. 1/60

Para responder correctamente el estudiante debe comprender que, si son necesarios 2 bolsas de harina de 200 gramos para preparar 20 galletas, es porque por cada galleta se requieren 20 gramos, con lo cual se concluye que la razón entre número de galletas y cantidad de gramos de harina es 1/20.

Pregunta 6

Estándar	Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.
Competencia	Razonamiento y Argumentación
Componente	Numérico y sistemas numéricos
Afirmación	Analiza representaciones y procedimientos y los asocia con situaciones de proporcionalidad directa o inversa.
Evidencia	Explica representaciones y procedimientos relacionados con magnitudes inversamente proporcionales.
Tarea	Encuentra el valor que toma una magnitud cuando varia inversamente con relación a otra.
Clave	D

En la celebración del día del niño el profesor de un curso quiere repartir dulces entre sus estudiantes y para ello compró algunas bolsas de dulces del mismo tipo. Quiere entregar la misma cantidad de dulces a cada uno.

En la siguiente tabla el profesor organizó información que muestra el número de estudiantes para los que le alcanzaría una bolsa de dulces dependiendo del número de dulces que entregara a cada uno.

Número de dulces	**3**	**4**	**6**
Estudiantes	**20**	**15**	**10**

Terminada la celebración, el profesor observó que una bolsa de dulces le alcanzó para 12 estudiantes. Es correcto concluir que a cada estudiante le dio

A. 8 dulces.
B. 2 dulces.
C. 7 dulces.
D. 5 dulces.

El estudiante debe determinar el número de dulces que trae cada bolsa (constante de proporcionalidad), que corresponde a 60 dulces y dividir 60 entre 12 para encontrar el número de dulces que le dio a cada uno

Número de dulces	**3**	**4**	**6**	**5**
Estudiantes	**20**	**15**	**10**	**12**
constante	**60**	**60**	**60**	**60**

Pregunta 7

Estándar	Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales y de las operaciones entre estos números en diferentes contextos.
Competencia	Razonamiento y Argumentación
Componente	Numérico y sistemas numéricos
Afirmación	Analiza relaciones entre números racionales
Evidencia	Hace inferencias a partir de las relaciones de orden en los números racionales.
Tarea	Compara y ordena un grupo de fracciones.
Clave	B

Para decidir los ciclistas que participaran en una competencia, un entrenador realizó una prueba con un tiempo límite y estableció que solo aquellos que lograran llegar a la meta en un tiempo inferior a la tercera parte del tiempo límite podrían participar en la competencia.

La siguiente tabla muestra la fracción del tiempo límite empleada por los tres ciclistas del equipo.

Nombre	**Camilo**	**Juan**	**Carlos**
Fracción de tiempo empleado	**1/4**	**3/5**	**3/8**

¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

A. Carlos empleo más tiempo que Juan en la prueba.
B. Juan empleó menos tiempo que Camilo en la prueba.
C. Solo Camilo podrá participar en la competencia.

A. I solamente.

B. III solamente.

C. II y III solamente.

D. II solamente.

Para responder correctamente el estudiante debe ordenar las fracciones, convirtiéndolas en fracciones equivalentes con el mismo denominador o usando su representación decimal

Estudiante	**Camilo**	**Juan**	**Carlos**
Fracción del tiempo máximo empleada	**¼**	**3/5**	**3/8**
Fracción equivalente	**10/40**	**24/40**	**15/40**
Decimal correspondiente	**0,25**	**0,6**	**0,375**

Posteriormente debe evaluar cada afirmación de la siguiente forma.
I. Carlos empleó 0,375 del tiempo límite y Juan empleó 0,6 del tiempo límite por lo que la afirmación es falsa.
II. Juan empleó 0,6 del tiempo límite y Camilo 0,25 del tiempo límite, por lo que la afirmación es falsa.
III. Camilo empleó 0.25 del tiempo límite, y es inferior a 1/3 por lo que la afirmación en verdadera.

Pregunta 8

Estándar	Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales y de las operaciones entre estos números en diferentes contextos.
Competencia	Razonamiento y Argumentación
Componente	Numérico y sistemas numéricos
Afirmación	Analiza relaciones entre números Racionales
Evidencia	Hace inferencias a partir del análisis de la relación de equivalencia definida entre números racionales.
Tarea	Identifica fracciones equivalentes a una fracción dada.
Clave	B

Finalizado el tercer periodo académico, los directores de curso del grado séptimo de un colegio, han construido una tabla para indicar la fracción de estudiantes de cada curso que tienen materias pendientes.

Curso	701	702	703	704
Fracción de estudiantes con materias pendientes	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{5}$

Con relación a lo observado en la tabla, es correcto afirmar que los cursos que tienen igual fracción de estudiantes con materias pendientes son

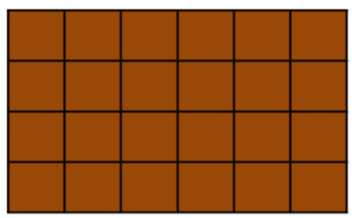
A. 701 y 703.
B. 702 y 704.
C. 701 y 702.
D. 703 y 704.

Para responder correctamente el estudiante debe notar que al simplificar la fracción 4/20 se obtiene la fracción 1/5 es decir son equivalentes.

PREGUNTA 9

Estándar	Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales y de las operaciones entre estos números en diferentes contextos.
Competencia	Razonamiento y Argumentación
Componente	Numérico y sistemas numéricos
Afirmación	Usa propiedades de las operaciones en el conjunto de los números Racionales.
Evidencia	Interpreta procedimientos aplicando propiedades de las operaciones entre números racionales.
Tarea	Justifica procedimientos utilizados para adicionar números racionales.
Clave	B

Natalia compró una chocolatina como la mostrada en la imagen, para compartirla con su hermano.



Natalia ha comido 1/3 de la chocolatina y su hermano 1/4. Para calcular la fracción de chocolatina que han comido entre los dos, plantearon el siguiente procedimiento

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1+1}{4}=\frac{2}{4}$$

El procedimiento mostrado **no es correcto** porque las fracciones corresponden a partes de la chocolatina, de diferente tamaño y, por lo tanto, antes de sumar se debe

A. cambiar el denominador de una de las fracciones para que sea igual al de la otra.
B. construir fracciones equivalentes a las dadas que tengan el mismo denominador.
C. cambiar el numerador de una de las fracciones para que sea igual al de la otra.
D. construir fracciones equivalentes a las dadas que tengan el mismo numerador

Para responder correctamente la pregunta el estudiante debe tener en cuenta que las fracciones 1/3 y 1/4 representan partes de diferente tamaño y, por lo tanto, para sumarlas se deben convertir en sus equivalentes homogéneas.

PREGUNTA 10

Estándar	Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales y de las operaciones entre estos números en diferentes contextos.
Competencia	Razonamiento y Argumentación
Componente	Numérico y sistemas numéricos
Afirmación	Usa propiedades de las operaciones en el conjunto de los números racionales.
Evidencia	Evalúa la pertinencia de un procedimiento a partir de la aplicación de propiedades de las operaciones entre números racionales.
Tarea	Aplica las propiedades de la adición de números racionales.
Clave	B

Con el propósito de reducir el riesgo biológico al que están expuestos los estudiantes de la Facultad de Medicina Veterinaria y Zootecnia de una universidad, el área de salud organizó una campaña de vacunación que se desarrolló durante tres días. La siguiente tabla muestra la fracción de estudiantes de la facultad de Medicina Veterinaria y Zootecnia que acudieron al puesto de vacunación durante estos tres días

Día	1	2	3
Fracción de los estudiantes	3/8	1/6	5/24

Para determinar la **fracción total de estudiantes** que acudieron al puesto de vacunación en esta campaña, ¿Cuál o cuáles de los siguientes procedimientos es (o son) correcto (s)?

I. $\frac{3}{8}+\frac{1}{6}+\frac{5}{24}=\frac{4}{14}+\frac{5}{24}$

II. $\frac{3}{8}+\frac{1}{6}+\frac{5}{24}=\frac{13}{24}+\frac{5}{24}$

III. $\frac{3}{8}+\frac{1}{6}+\frac{5}{24}=\frac{3}{8}+\frac{9}{24}$

A. I y III solamente.
B. II y III solamente.
C. I, II y III.
D. II solamente.

Para responder correctamente el estudiante debe evaluar una a una las expresiones de la siguiente forma:

I. Es correcta porque para la adición se desarrolla sumando uno a uno los números que conforman cada fracción.

II. Es correcta porque para sumar se aplica propiedad asociativa, sumando primero la primera y segunda fracción y su resultado con la tercera.

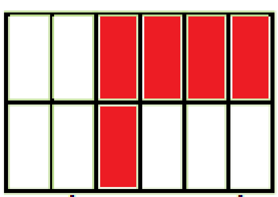
III. Es correcta porque para sumar se aplica la propiedad asociativa entre la segunda y la tercera fracción y luego se plantea la suma entre este resultado y la primera fracción.

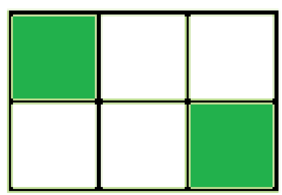
PREGUNTA ABIERTA 1

De acuerdo con las especificaciones de una receta, para preparar 50 galletas se requieren 400 gramos de azúcar. ¿Para preparar 20 de estas galletas, cuantos gramos de azúcar se necesitan en total? Explique

____
____
____
____

Las regiones coloreadas en las siguientes imágenes muestran la parte del área de un centro comercial que corresponde a los locales comerciales y la parte del área de este centro que corresponde a los restaurantes.


Locales comerciales


Restaurantes

Identifique la fracción del área que corresponde a cada uno y explique el procedimiento que se debe usar para calcular el área total ocupada por estos dos tipos de negocio.

____
____
____

Bibliografía

Alonso, D. (2001). Mecanismos cerebrales del pensamiento matemático. *Revista de neurología*, 568-576.

Bravo, J. A. (2010). Neurociencias y Enseñanza de la Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 2-12.

Castelblanco, Y. B. (2011). Contribución del modelo de evidencias al diseño de evaluaciones estandarizadas y de aula. *Magisterio*, 1-8.

Castro Encarnación, E. C. (2013). Pensamiento numérico en edades tempranas. *Educación Matemática en la Infancia*, 1-11.

Castro, E. (2009). Pensamiento numérico y educación matemática. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 23-28.

Crespo, C. C. (2014). La importancia de la argumentación matemática en el aula. *ResearchGate*, 23-29.

Duval, R. (1999). Algunas cuestiones relativas a la argumentación. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 1-7.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar : ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamerciana.

Duval, R. (2012). Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en. *Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales* (págs. 14-16). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Espeleta Maya Alvaro, L. C. (2010). El razonamiento lógico en estudiantes universitarios. *Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal*, 2-23.

Espinosa, A. J. (2013). Comunicación y argumentaci'pon en clase de matemáticas. *Educación y ciencia*, 101-116.

Fernández, A. N. (2005). Modelos de razonamiento abductivo. *Contrastes*, 156-160.

FONIDE, F. d. (2011). *Propuesta metodológica de trabajo docente para promover competencias matemáticas en el aula basadas en un modelo de competencia matemática.* Concepción: Ministerio de Educación de Chile.

Gallego, R. (2008). *Competencias cognoscitivas.* Bogotá: Magisterio.

Gilberto Obando, N. V. (2008). Pensamiento numérico del preescolar a la educación básica. *Curso dictado en 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (págs. 1-21). Valledupar: Repositorio digital de documentos en educación matemática.

Grajales, H. P. (2006). *Comprensión y producción de textos.* Bogotá: Magisterio.

Horacio Solar, B. G. (2014). Propuesta de un Modelo de Competencia Matemática como articulador entre el currículo, la formación de profesores y el aprendizaje de los estudiantes. *Educación Matemática*, 33-67.

ICFES. (2016). *Lineamientos para las aplicaciones muestral y censal 2016.* Bogotá.

Jiménez Luis, J. G. (2004). *Teoría de números para principiantes.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombis.

Jiménez, A. (2013). Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. *Educación y ciencia*, 101-116.

Labarca, R. (2010). Sobre la Construcción axiomática de los números naturales. *Congreso de matemáticas COMCA* (págs. 1-6). Arequipa: COMCA.

López, M. T. (2005). *La evlaución de la competencia léxica.* Granada: Centro de Investigación y Documentación Educativa.

Luque, C. J. (2002). El concepto de número natual según Giusseppe Peano. *Funes*, 45-85.

Marco, B. (2008). *Competencias Básicas: Hacia un nuevo paradigma educativo.* Madrid: Narcea S.A.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares del área de matemáticas.* Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias.* Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.

Niss, M. (2002). *Competencias y aprendizaje de las matemáticas.* Dinamarca: Serie temática Junta Educativa.

Perrenoud, P. (2011). *Construir competencias desde la escuela.* México: J. C. Sáenz.

Perú, M. d. (2015). *La competencia matemática en el marco de Pisa 2015.* Lima: Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú.

Reñón, L. V. (2007). *Si de argumentar se trata.* Barcelona: Montecinos.

Rico Luis, E. C. (2000). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Intervención piscopedagógica y currículum escolar* (págs. 153-182). Madrid: Pirámide.

Rico, L. (1996). *Pensamiento numérico.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rico, L. (1997). Los organizadores del curriculo de matemáticas. *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 39-59). Madrid: Horsori.

Saavedra, M. (2001). *Diccionario de Pedagogía.* México D.F.: Pax México.

Santiago, M. C. (2007). *Decripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas.* Granada: Universidad de granada.

Soto William Hernando, K. G. (2010). Las inferencias y el proceso de aprendizaje de las matemáticas. *Educacion y desarrollo social*, 1-9.

Tobón Sergio, A. R. (2006). *Competencias, calidad y educación superior.* Bogotá: Magisterio.

Tobón, S. (2005). *Formación basada en competencias.* Bogotá: Ecoe ediciones.

UNESCO. (2007). *Oficina internacional de educación* . Obtenido de http://www.ibe.unesco.org/es/temas/enfoque-por-competencias

Villarroel, J. D. (2009). Origen y desarrollo del pensamiento numérico. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 555-604.