UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Desarrollo de Pensamiento Variacional en Estudiantes de Secundaria, mediado por GeoGebra

Development of Variational Thought in Secondary Students, mediated by GeoGebra

Wuilkinson Carlos Dávila Orozco

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Manizales, Colombia

2018

Desarrollo de Pensamiento Variacional en Estudiantes de Secundaria, mediado por GeoGebra

Wuilkinson Carlos Dávila Orozco

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Asesor:

MSc. Jaider Albeiro Figueroa Flórez

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Manizales, Colombia

2018

Lo trascendente no es lo que sabes,
sino lo que transformas con lo que sabes.

Yo.

A mi madre:
Por su amor y sus enseñanzas.
A mi esposa:
Por creer en mí.
A mis hijos:
Por regalarme la oportunidad de ser padre.
A mis hermanos:
Por ser los mejores.

Agradecimientos

A Dios padre, creador del universo, por darme la posibilidad cada mañana de soñar con nuevas oportunidades y hacerlas realidad a través de la disciplina, el esfuerzo y la dedicación.

Al Fondo Nacional de Regalías de Colciencias y a la Gobernación del Departamento de Caldas, en especial a la doctora Claudia Bionet Gómez Alzate, por creer en nosotros los docentes y gestionar los recursos necesarios.

A la Universidad Nacional de Colombia – Sede Manizales, al profesor Jhon Jairo Salazar Buitrago, director de la maestría, y a los docentes de la misma, por compartir su legado epistemológico.

Al especialista Germán Arcila Marín, señor rector de la institución educativa Gerardo Arias Ramírez, de Villamaría (Caldas), a mis otros compañeros directivos y docentes, y a mis extraordinarios estudiantes, por apoyar y participar en este maravilloso proyecto que seguramente redundará en el mejoramiento y la calidad educativa de nuestra institución.

Al profesor, magister Jaider Albeiro Figueroa Flórez, asesor de este trabajo, por sus valiosos aportes, por su disposición y por su constante motivación para hacer posible este trabajo.

A usted señor lector, por consultar este trabajo, inquietarse y querer hacer parte de la transformación de las nuevas generaciones. Es nuestra responsabilidad como docentes-investigadores.

Resumen

Este trabajo corresponde a una propuesta investigativa en el área de matemáticas, cuyo propósito consiste en contribuir al desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de secundaria, a partir del fortalecimiento de procesos cognitivos generales tales como el razonamiento, la comunicación y la modelación, desde el planteamiento y solución de problemas en diferentes contextos, usando el software educativo GeoGebra. El trabajo se ha enmarcado dentro del paradigma de investigación cualitativo-descriptivo, con la aplicación de actividades prácticas de aula como instrumento metodológico para un diagnóstico, a través del cual se pretende identificar y explicar las dificultades o avances que muestran los estudiantes desde indicadores planteados por el Ministerio de Educación Nacional, en los lineamientos curriculares del área, para el desarrollo de procesos cognitivos implicados en el pensamiento variacional. Dichas actividades se llevan a cabo en tres momentos distintos: de familiarización, de orientación y de profundización, siguiendo lo que expone David Ausubel (1963) en cuanto a su teoría del aprendizaje significativo. Para este ejercicio, los estudiantes se apoyaron en GeoGebra, un software de matemáticas dinámicas que facilita el análisis de situaciones problémicas en un contexto variacional. Los resultados obtenidos permitieron concluir que se presentan avances importantes en el fortalecimiento de procesos generales del pensamiento variacional, a partir del uso, por parte de los estudiantes, de distintos tipos de representación semiótica puestos en práctica para la solución de los problemas planteados. Llamó la atención el marcado interés expuesto por los estudiantes durante el desarrollo de las actividades por el uso de herramientas TIC.

Palabras claves: Pensamiento Variacional, Procesos Generales de Pensamiento Matemático, GeoGebra.

Abstract

This work corresponds to a research proposal in the area of mathematics, whose purpose is to contribute to the development of variational thinking in high school students, from the strengthening of general cognitive processes such as reasoning, communication and modeling, from the approach and solving problems in different contexts, using GeoGebra educational software. The work has been framed within the paradigm of qualitative-descriptive research, with the application of practical classroom activities as a methodological instrument for a diagnosis, through which it is intended to identify and explain the difficulties or advances that students show from indicators proposed by The Ministry of National Education, in the curricular guidelines of the area, for the development of cognitive processes involved in variational thinking. These activities are carried out in three different moments: familiarization, orientation and deepening, following what David Ausubel (1963) states regarding his theory of meaningful learning. For this exercise, students relied on GeoGebra, dynamic mathematics software that facilitates the analysis of problem situations in a variational context. The results obtained allowed us to conclude that there are important advances in the strengthening of general processes of variational thinking, based on the use, by students, of different types of semiotic representation put into practice for the solution of the problems posed. The marking was noticed, the interest is exposed by the students during the development of the activities by the use of ICT tools.

Keywords: Variational Thought, General Mathematical Thought Processes, GeoGebra.

Contenido

Pág.

Lista de figuras

Pág.

"No puedo enseñar nada a nadie,
sólo les puedo hacer pensar."

Sócrates.

Introducción

A través del tiempo, la matemática como disciplina se puede catalogar como piedra angular en el patrimonio histórico acumulado que nos configura como especie, no sólo desde la ciencia para entender el universo y sus realidades, sino también a partir de su aplicación trascendente para coadyuvar al descubrimiento de nuevas formas que procuran por nuestra supervivencia.

Las sociedades contemporáneas, para su desarrollo, dependen de las capacidades que le son propias para producir, aplicar y transmitir el conocimiento científico y tecnológico. En ese sentido, dentro de la concepción del mundo para el siglo XXI, es necesario, indudablemente, impulsar el cambio de unas matemáticas estáticas por aquellas dinámicas y significativas, como las que emergen del pensamiento variacional producto de la modelación de realidades contextuales. Las matemáticas que se han enseñado por siempre flotan en una atmósfera pura e ideal, pero ¿de dónde irrumpen esas matemáticas?, efectivamente de los fenómenos y procesos de la realidad. Lo que Vasco (2006) llama "matematizar el contexto".

Lo anterior implica un cambio en cuanto a las estrategias y metodologías utilizadas por los docentes, teniendo en cuenta que los "nativos digitales" que hoy tenemos en nuestras aulas como discentes cuentan con acceso a una amplia gama de recursos digitales y programas educativos como GeoGebra. Las TIC son una herramienta que permite, en particular, recrear conceptos matemáticos que se creían estáticos, permitiendo como lo indican los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006), proponer "ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativos y comprensivos que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos" (p. 49). Por este motivo, esta propuesta investigativa sugiere el uso de diferentes estrategias en el aula que fortalezcan el desarrollo del pensamiento variacional, en particular las fundadas en TIC, las cuales no sólo facilitarán en el estudiante el pensamiento crítico y divergente, sino también potenciar los procesos generales que se plantean en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) para el aprendizaje efectivo de las matemáticas y su interacción con el medio circundante.

El sistema educativo colombiano tiene entre sus grandes desafíos modificar las estructuras curriculares, organizadas hoy en día a partir de contenidos temáticos que se centran en el trabajo de papel y lápiz, en búsqueda del desarrollo intelectual que incorpora tecnologías informáticas con miras al fortalecimiento de las actividades cognitivas. En este sentido el Ministerio de Educación Nacional ha venido aunando esfuerzos con la comunidad educativa para impulsar proyectos de formación docente que apuntan a la construcción de un nuevo currículo escolar. El proyecto *"Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia"* responde a estas expectativas al formular entre sus objetivos la consolidación de una comunidad educativa comprometida con la diseminación de la cultura informática en la escuela como una estrategia para el mejoramiento de la calidad de la educación matemática en el país.

La Institución Educativa "Gerardo Arias Ramírez" del municipio de Villamaría, Caldas, como la gran mayoría de establecimientos educativos de secundaria, no ha sido ajena a la problemática generalizada en dichas organizaciones en cuanto a las dificultades que presentan los jóvenes discentes para el aprendizaje del álgebra y del cálculo, y en especial, para la esquematización de fenómenos y problemas que implican variación en el contexto. Por ello, surge la pregunta que motiva el presente estudio, ¿es posible fortalecer el pensamiento variacional en estudiantes de secundaria del colegio Gerardo Arias Ramírez a través del enfoque problémico en un contexto de sucesiones, mediado por el uso de las TIC como herramienta didáctica útil?

Este trabajo titulado *"Desarrollo del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Secundaria, mediado por GeoGebra"* tiene por objetivo contribuir en el fortalecimiento de procesos asociados al pensamiento variacional y los sistemas algebraicos en estudiantes de secundaria, a partir del planteamiento y solución de problemas de variación, usando GeoGebra como instrumento de mediación cognitiva. Como alcances del proyecto, se espera que éste brinde posibilidades de optimizar habilidades en los procesos generales de razonamiento, comunicación y modelación en estudiantes de los grados octavos y novenos del colegio Gerardo Arias. Lamentablemente, por asuntos de horario y falta de recursos disponibles, sólo se trabaja con estudiantes de la jornada vespertina; la institución también cuenta con jornada matutina y nocturna.

En cuanto a la metodología utilizada, corresponde al paradigma cualitativo-descriptivo. Por tanto, sólo se narra el comportamiento observado del sujeto en contexto con cierto grado de intervención por parte del investigador durante el desarrollo de actividades prácticas de aula como instrumento de diagnóstico.

En el primer capítulo se exponen la descripción del problema, la justificación y los objetivos. En el capítulo dos, se presenta una recopilación de antecedentes internacionales, nacionales y locales sobre el desarrollo de pensamiento variacional; enseguida, se exponen las distintas teorías que soportan la hipótesis del trabajo y finalmente, el marco conceptual. En el tercer capítulo se explica la metodología de investigación, especificando el tipo de trabajo, los instrumentos metodológicos, la población y muestra, las fuentes de información y el análisis e interpretación de resultados. En el capítulo cuatro, se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes seleccionados como muestra durante los talleres de familiarización, orientación y profundización; además, se plantea una discusión analítica en torno a lo producido. Para finalizar, en el quinto capítulo se presentan las conclusiones a las que se llegó y se sugieren algunas recomendaciones al respecto.

En últimas, este proyecto espera contribuir al desarrollo del pensamiento variacional aportando elementos para la reflexión y la discusión sobre el mejoramiento de la práctica educativa en matemáticas y la incorporación de la tecnología informática al currículo. De igual manera, este documento servirá como insumo para investigaciones posteriores sobre modelos mentales de pensamiento matemático y la resolución de problemas matematizables originados en el contexto.

"A los niños hay que enseñarles a pensar, es decir en contexto."

Rodolfo Llinás.

Capítulo 1

Horizonte del trabajo

Este capítulo se centra en tres aspectos: planteamiento y descripción del problema; justificación del proyecto y definición de objetivos a alcanzar. En el primero de los aspectos, se refiere la problemática que presentan nuestros estudiantes de secundaria en la mayoría de los colegios para comprender y dar solución a situaciones problémicas de variación en un contexto matemático. En el segundo, se da razón de la importancia de realizar aportes significativos como el presente estudio, en armonía con las políticas del Ministerio de Educación en Colombia para consolidar una comunidad que se apropie de la cultura informática como estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En el último, se exponen los objetivos, general y específicos, que se han trazado como logro final de esta investigación, a partir de la pregunta problematizadora.

1.1 Planteamiento y descripción del problema

Cada vez es más frecuente hallar estudiantes con serias dificultades en el aprendizaje de las matemáticas por la falta de motivación; la ausencia de ambientes pedagógicos que le sean de mayor interés; la limitación en el desarrollo de habilidades en procesos de razonamiento, comunicación y modelación, entre tantas otras razones; causas que influyen notoriamente en su comprensión de la realidad, en la fallida toma de decisiones para continuar estudiando, y particularmente, en los resultados obtenidos tanto en pruebas internas como externas (SABER-ICFES, PISA, etc.)

En la práctica cotidiana como docente de aula se evidencia que la enseñanza actual se sigue apoyando en el enfoque pedagógico orientado esencialmente hacia la adquisición de conocimientos, por medio de la instrucción de unas áreas curriculares básicas como lo son: matemática, lenguaje, ciencias naturales, entre otras; asumiendo que sólo de esta manera se puede garantizar el desarrollo de habilidades y competencias, además de otra tipo de destrezas, en los estudiantes.

Aunque los conceptos son fundamentales para la adquisición de conocimiento en el estudiante, éstos por sí solos no posibilitan el desarrollo del pensamiento matemático y en tal sentido, la misión del docente no se ciñe exclusivamente en la transmisión estática, por demás, de un cúmulo de conocimientos específicos, sino que en contrario, es el estudiante quien con el acompañamiento del docente busca construir el conocimiento con base en lo vivenciado en contexto y desde sus presaberes, procurando alcanzar una autonomía intelectual que le permita repetir el proceso con otros.

Es necesario, por tanto, identificar estrategias didácticas que logren motivar el estudiante para razonar y modelar situaciones problémicas que se le planteen, encaminadas a potenciar su pensamiento lógico-matemático y a la reconfiguración de sus conocimientos, generando capacidad de asombro por lo desconocido desde lo científico e interés y compromiso por lo social.

Atendiendo los resultados obtenidos en pruebas SABER durante los últimos tres años, por los estudiantes de la básica secundaria de la Institución Educativa Gerardo Arias Ramírez del municipio de Villamaría-Caldas, se puede afirmar que presentan dificultades en la comprensión de situaciones problema y objetos matemáticos relacionados con el cambio y la variación (ver Anexos D, E y F). De acuerdo a ello, se hace necesario implementar nuevas estrategias metodológicas y didácticas de enseñanza que dinamicen la potenciación del pensamiento variacional en los estudiantes en mención, a través del fortalecimiento de los procesos asociados a este pensamiento y de las habilidades para resolver situaciones problémicas matematizables desde el contexto. Para abordar esta problemática, se plantea entonces el siguiente interrogante:

¿Es posible fortalecer el pensamiento variacional en estudiantes de secundaria del colegio Gerardo Arias Ramírez a través del enfoque problémico en un contexto de sucesiones, mediado por el uso de las TIC como herramienta didáctica útil?

Esta pregunta surge en el interés no sólo por mejorar el desempeño y los resultados de los estudiantes en las pruebas institucionales y externas, sino tras un propósito más ambicioso y trascendente, cual es identificar nuevas estrategias didácticas que conduzcan a estudiantes y docentes a explorar nuevos escenarios para el desarrollo de habilidades en el pensamiento matemático y contribuir así, de algún modo, a realimentar la capacidad de asombro que nos motive a seguir descubriendo nuevas maneras que coadyuven a superar los retos del nuevo mundo, desde el aporte siempre significativo de las matemáticas.

1.2 Justificación

Los lineamientos curriculares en matemáticas (MEN, 1998) proponen desarrollar en los estudiantes los cinco tipos de pensamiento matemático: numérico, geométrico, métrico, aleatorio y variacional. En ese sentido, el presente trabajo aporta a la construcción de un aprendizaje significativo buscando desarrollar el pensamiento variacional y analítico, a partir de la aplicación del enfoque problémico en situaciones de contexto y el manejo de una estrategia didáctica basada en el uso útil de las TIC.

La importancia de la presente investigación también radica en que:

- Abre la posibilidad de identificar e implementar otras estrategias innovadoras para el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de secundaria.

- Genera expectativas y motivaciones en el estudiante para desarrollar nuevos proyectos tecnológicos en otras disciplinas.

- Promueve la capacidad de competencia en los estudiantes con perspectiva de un futuro mejor, desde lo social y lo económico.

- Propende por la ampliación del pensamiento crítico en el estudiante, como actor activo del contexto en el que interactúa y modifica para ajustarse a los nuevos retos del milenio.

- Desarrolla capacidades en el discente para el discernimiento, la discusión y el trabajo en equipo en procura de reconfigurar sus modelos mentales de pensamiento.

- Impulsa el uso de nuevos escenarios y material didáctico para la práctica pedagógica y la formación docente.

- Invita a la conformación de nuevas comunidades de investigación en el quehacer pedagógico para la reestructuración del currículo de matemáticas.

El Ministerio de Educación Nacional promueve el fortalecimiento del pensamiento variacional a través del enfoque problémico en los lineamientos curriculares del área, sugiriendo que “El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica” (MEN, 1998, p. 51).

De igual forma, los estándares curriculares y los derechos básicos de aprendizaje que propone el MEN dan orientaciones a la comunidad educativa sobre las estructuras básicas de los saberes en matemáticas que el estudiante debe adquirir, complementados con los lineamientos de la OCDE en cuanto a las pruebas PISA. En conjunto ofrecen información detallada que permite adoptar decisiones y políticas públicas para mejorar los niveles educativos de las instituciones.

Consecuentemente, este proyecto se interesa en seguir las tendencias transnacionales vigentes en educación y aprovechar la utilidad de la información con visión prospectiva, que se adquirió en la consulta de fuentes. Es necesario anotar que el presente trabajo también se desprende como propósito del investigador para optar al título de magister en el programa de Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Nacional de Colombia, sede Manizales, que busca elevar la calidad de la educación por medio de la implementación de propuestas de formación para docentes de matemáticas.

Hay pertinencia en destacar la disposición y colaboración de la comunidad educativa del colegio Gerardo Arias Ramírez del municipio de Villamaría-Caldas, donde se llevó a cabo esta investigación y mencionar además que gracias a la gestión gubernamental y directiva, la institución cuenta con una excelente infraestructura y un buen número de herramientas tecnológicas que posibilitan un adecuado desarrollo de actividades pedagógicas, pensando a futuro. Precisamente y con miras a la continuidad de esta propuesta, también es oportuno referirse al buen porcentaje de docentes de matemáticas con estudios de posgrado que tiene el Gerardo Arias en su planta de personal. Todo ello invita a pensar que existe el escenario ideal para generar una transformación positiva en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, apuntándole a la excelencia y la calidad educativa en nuestra región.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Contribuir en el fortalecimiento de procesos asociados al pensamiento variacional y los sistemas algebraicos en estudiantes de secundaria, a partir del planteamiento y solución de problemas de variación, usando GeoGebra como instrumento de mediación cognitiva.

1.3.2 Objetivos específicos

- Proponer un trabajo de aula donde el estudiante mediante el abordaje y solución de problemas de variación, ponga de manifiesto el desarrollo de ciertos procesos asociados al pensamiento variacional, usando GeoGebra.
- Analizar los avances o progresos de los estudiantes en cuanto a los procesos de reconocimiento de la variable, uso de los sistemas de representación, modelación y generalización; a medida que avanzan en el trabajo de aula propuesto.

"Lo que vemos cambia lo que sabemos. Lo que conocemos cambia lo que vemos."

Jean Piaget.

Capítulo 2

Marco referencial

En el desarrollo del presente capítulo se esboza un recorrido histórico de los aportes y el impacto que se ha generado en el desarrollo del pensamiento variacional en las matemáticas, con una mirada al enfoque problémico en la resolución de problemas y al uso de la tecnología como herramienta mediadora en la potenciación de dicho pensamiento. A continuación, se exponen las teorías que soportan el presente trabajo investigativo con el propósito de argumentar la hipótesis planteada, tomando sólo aquellos aspectos que injieren en el desarrollo del pensamiento variacional. Finalmente, se define un conjunto de conceptos que dan luz a la comprensión de algunos términos que aquí se utilizan, sin dejar de lado el contexto de lo estudiado.

2.1 Marco de antecedentes

2.1.1 El cambio y la variación bajo una perspectiva histórica de las matemáticas

La humanidad ha avanzado a pasos agigantados durante los últimos años, debido al reto que ha representado para el hombre el mundo cambiante en que nos movemos. Su facultad de cognición le ha permitido comprender los distintos fenómenos y procesos que acontecen en la naturaleza y que emergen de él mismo como ser humano. Es así, como se torna significativo el entendimiento científico del cambio y la variación, en aras de generar a posteriori nuevas estructuras y modelos que viabilicen su propia supervivencia.

Moreno y Zubieta afirman que “la comprensión científica de la variación tomó auge en el periodo comprendido entre los siglos XIV y XVII en el que se centra el interés por el estudio de las cualidades en situaciones como el movimiento, la intensidad luminosa o la intensidad de calor, inspirados en los trabajos científicos de Aristóteles y de los filósofos escolásticos sobre tópicos como el infinito, el infinitesimal y la continuidad” (Citado en MEN, 2004, p. 1).

Sin embargo, se piensa que “el hombre se sensibilizó y observó fenómenos cambiantes, que impulsaron el desarrollo de tecnologías materiales y simbólicas elementales, como precedentes a sistemas simbólicos escritos más complejos” (MEN, 2004, p. 1), desde la misma época prehistórica. Más aún, el estudio de la variación en matemáticas “se inicia con las tablas babilónicas, con las gráficas de variación de Oresme en la Edad Media y con las fórmulas algebraicas de origen renacentista” (MEN, 1998, p. 49).

Desde esta perspectiva planteada es oportuno resaltar cómo las matemáticas generan un aporte trascendental en el desarrollo del pensamiento humano y por ende, un avance significativo en el progreso de la humanidad, al menos desde lo científico. En este sentido, se torna fundamental la enseñanza de las matemáticas como eje transformador de la sociedad, a partir de la comprensión de fenómenos que requieren ser descifrados y que en múltiples ocasiones parten de lo cotidiano.

Colombia no ha sido ajena a este razonamiento y por ello ha venido promoviendo desde finales de los setenta y principio de los ochenta, una constante reorganización del currículo de matemáticas que se halle acorde a las necesidades educativas del momento, llegando así a lo que hoy se conoce como los “Lineamientos Curriculares de Matemáticas”, donde se formaliza la enseñanza-aprendizaje de dicha disciplina desde cinco pensamientos: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional (MEN, 1998).

2.1.2 Antecedentes del pensamiento variacional en el sistema educativo colombiano

En consonancia con el resto del mundo, el concepto de variación ha despertado gran interés de estudio en Latinoamérica y desde luego, en Colombia. Ello se evidencia a través del desarrollo de valiosos macro proyectos investigativos como por ejemplo, el proyecto titulado “Pensamiento y Lenguaje Variacional” de Cantoral y Farfán (1998), el cual se puede precisar como una línea de disertación que permite afrontar la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que movilizan y dan vida al área de las matemáticas desde el cambio y la variación. Así mismo, desde un enfoque más cercano a la realidad contextual en el ámbito nacional se encuentra el artículo “Apuntes para una historia del pensamiento variacional en la enseñanza de las matemáticas en Colombia 1989-2004”, Vasco, C. E. (2015), en donde se realiza un recorrido histórico hacia los orígenes del pensamiento variacional en Colombia, con énfasis en momentos claves que dieron pie a dichos orígenes.

De igual forma, se han llevado a cabo diversos mecanismos legales que han respaldado la introducción definitiva en nuestro país del pensamiento variacional, entre 1996 y 1998, tales como la “Ley General de Educación de 1994, las reuniones de preparación para la Resolución 2343 de 1996 y el Encuentro Nacional con Docentes e Investigadores en diciembre de ese mismo año” Vasco, C. E. (2015).

Estas primeras acciones dieron origen a aportes materializados no sólo en la elaboración de los Lineamientos Curriculares en el año 1998, sino también en la construcción de los Estándares Básicos de Competencia propuestos por el MEN, de donde se hace oportuno citar el concepto del pensamiento variacional:

> …tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización del cambio y la variación en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio del cambio y la variación, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas (p. 66).

En últimas, se evidencia la propuesta del MEN para el desarrollo del pensamiento variacional, a partir de un modelo holístico donde intervienen no sólo los otros pensamientos matemáticos, sino los provenientes de otras disciplinas como las ciencias naturales y las ciencias sociales, con el abordaje de situaciones problemáticas como enfoque pedagógico. De igual forma, afirma que para desarrollar este pensamiento se requiere iniciar con el análisis de regularidades y la búsqueda de un patrón de repetición, en donde dichas regularidades se evidencian por secuencias ordenadas que presentan los objetos, las formas o eventos, para finalmente ser modeladas por un procedimiento, un algoritmo o una fórmula (MEN, 2006, p. 66).

Para complementar lo anterior, el MEN, a través de los estándares, sugiere llevar a cabo actividades que induzcan al estudiante al análisis de transformaciones de la forma o el valor en una sucesión; que le facilite el hacer conjeturas sobre el valor o la forma del siguiente término de la secuencia; que le proporcione la posibilidad de expresar a través diferentes representaciones, los términos siguientes de la sucesión, y que le admita modelar el patrón de comportamiento por medio de una fórmula o algoritmo que generaliza las conjeturas iniciales (p. 67).

Por consiguiente, los conceptos que se abordan permiten el reconocimiento de diversos factores cuantificables y cualificables; lo que facilita el proceso de asociación del contenido para lo cual es clave la mediación pedagógica. De esta forma el pensamiento variacional y los sucesos de cambio desarrollados en contextos cuantitativos y cualitativos, incentiva la implementación de mecanismos de interacción, en los cuales el estudiante puede participar activamente desarrollando múltiples destrezas y competencias, dejando atrás los modelos tradicionales y dando una nueva perspectiva educativa a través de la didáctica y la lúdica, partiendo de despertar la motivación intrínseca del alumno como el principal mecanismo para afrontar las situaciones problema planteadas.

2.1.3 El enfoque de resolución de problemas en el desarrollo del pensamiento variacional

Los lineamientos curriculares en matemáticas del MEN (1998), proponen que se desarrolle pensamiento variacional a partir de situaciones del entorno, donde se presenten fenómenos de cambio y variación; para ello propone el uso de diversos sistemas de representación como son los sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.

Sin embargo, el uso de este enfoque para el desarrollo del pensamiento variacional es de sumo cuidado, dado que no se concibe como el fin último de éste, en contrario al de la modelación matemática. Fundamentalmente para Carlos Eduardo Vasco Uribe (2006):

> …el principal propósito del pensamiento variacional es pues la modelación matemática. No es propiamente la resolución de problemas ni de ejercicios; al contrario, para mí, los mejores problemas o ejercicios deberían ser desafíos o retos de modelar algún proceso. Para poder resolver un problema interesante tengo que armar primero un modelo de la situación en donde las variables covaríen en forma semejante a las de la situación problemática, y no puedo hacerlo sin activar mi pensamiento variacional (p. 7).

Cantoral, Molina y Sánchez (2005), expresan que: “el término variacional, relacionado con el concepto de variación, es entendido como una cuantificación del cambio” (p. 464). Esto es, la idea de variación, según ellos, asume importancia significativa debido a que el estudio de la misma se encuentra conexo al de diferentes situaciones de movimiento en nuestro entorno. En consecuencia, es posible caracterizar procesos de razonamiento que conlleven a evidenciar el desarrollo del pensamiento variacional en aspectos relacionados a procesos de cambio y variación. Los lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) plantean específicamente una serie de indicadores que permite verificar los avances en el fortalecimiento de dicho pensamiento en los estudiantes a partir de la resolución de situaciones problema en contexto.

En sintonía con lo hasta aquí afirmado, Hecklein, Engler, Vrancken, & Müller (2011) señalan que:

> Potenciar o desarrollar el pensamiento variacional implica preparar a los alumnos para resolver problemas y tratar la información que reciben del medio, de manera que sean capaces de reconocer las estrategias para su solución y favorecer un mejor entendimiento e interpretación de la realidad. En esta dirección, los

> procesos de cambio y variación constituyen un aspecto de gran riqueza en el contexto escolar (p. 23-24).

La resolución de problemas como enfoque de desarrollo del pensamiento variacional facilita la construcción de procesos basados en modelos cotidianos que ofrecen una perspectiva dinamizadora de los contenidos, a partir de una mirada holística y la implementación de estrategias didácticas comunes a los intereses de los hoy llamados “nativos digitales” (Prensky, 2001), quienes se referencian como la primera generación que ha crecido a la par de las tecnologías digitales; partícipes de vertiginosos cambios sociales que han transformado al individuo y su percepción de la realidad, y que obviamente viene redefiniendo por demás, el ámbito escolar desde sus formas y sus contenidos.

2.1.4 La tecnología como herramienta de apoyo didáctico en el desarrollo del pensamiento variacional

Las TICs pueden llegar a jugar un papel muy importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pero si se utilizan correctamente. Es más, si su uso no es el adecuado, pueden llegar a trazar un camino tortuoso pasando de ser una potente herramienta a una barrera que impida el proceso (Real Pérez, 2010, p. 3).

De igual manera, autores como Artigue (2002); Souchard (2006) o Haspekian & Artigue (2007), explican que:

> …las tecnologías no son antinomia de conocimiento científico o simple aplicación de este, sino más bien que aquellas constituyen una integralidad de lo pragmático y lo epistémico, es decir que sobre todo en la educación, las TIC poseen un valor de construcción de conocimiento y otro de eficacia a partir de una suerte de trasposición tecnológica adecuada y pertinente (Citado en Forero Hernández, 2013, p. 62).

Es por ello que a través de muchos años, “Diversos estudios han demostrado que la naturaleza visual de algunas tecnologías involucra más a los estudiantes y refuerza su comprensión de conceptos (…). En esta línea, las mayores evidencias sobre impactos se encuentran en las asignaturas de lenguaje, matemáticas y ciencias" (CEPAL, 2010, p. 7).

En Colombia, el Ministerio de Educación Nacional viene adelantando desde al año 2000, la implementación del proyecto denominado "Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia", en el que propone implantar una cultura informática en el país, beneficiándose de la capacidad formativa que ofrecen las herramientas tecnológicas.

Es pues un hecho evidente, que con la aparición de las nuevas tecnologías computacionales se ha ampliado el espectro representativo de los fenómenos de cambio y variación, potenciando procesos de razonamiento, comunicación y modelación.

No menos relevante resulta el interés expuesto, durante los últimos años, por continuar llevando a cabo investigaciones formales en torno al desarrollo del pensamiento variacional, tanto a nivel internacional como a nivel nacional y local, que a través de sus objetivos, procesos metodológicos y conclusiones amplían nuestro horizonte de conocimiento en la enseñanza de las matemáticas.

2.1.5 Investigaciones que se han realizado a nivel internacional, nacional y local

A nivel internacional, se considera la investigación realizada por Roque, J. (2009) en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú, titulada "*Influencia de la enseñanza de la matemática basada en la resolución de problemas en el mejoramiento del rendimiento académico*". Se trata de un proyecto llevado a cabo con la intencionalidad pedagógica de ejecutar un estudio que determine en qué medida se pueden apreciar diferencias significativas en los estudiantes de la Escuela de Enfermería de la UAP, en cuanto a su desempeño académico, a partir de un análisis comparativo realizado a los grupos que han de conformarse según la metodología implementada y en concordancia con la estrategia de enseñanza utilizada; en este caso basada en la resolución de problemas, BRP.

Concretamente, para realizar el proceso de recolección y diagnóstico de la información respecto a los dilemas planteados, se recurrió a un método estratégico y didáctico centrado primordialmente en el estudiante, que consiste en un diseño cuasiexperimental compuesto de una preprueba y una postprueba, por lo que se hace necesario la conformación de dos grupos de discentes nominados como grupo experimental y grupo de control. En principio, a ambos grupos se les aplicó la preprueba simultáneamente, luego al grupo experimental se le designó para que aplicasen una estrategia didáctica basada en la resolución de problemas, mientras que al grupo de control sólo se le planteó el mismo conjunto de situaciones problema sin intervención didáctica previa, para que finalmente se les aplicara la postprueba a ambos grupos a la vez y poder obtener así la información definitiva a través de un análisis comparativo.

Posteriormente se señala que el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas por medio de la solución de problemas fortalece significativamente el rendimiento académico de los estudiantes no únicamente visto desde datos estadísticos, sino desde una perspectiva pedagógica y didáctica. Se hizo un análisis comparativo de las calificaciones iniciales de los estudiantes que presentaban un nivel muy bajo y posterior a la intervención realizada, apreciándose unas diferencias sustanciales respecto al rendimiento del grupo intervenido. En conclusión, el proyecto investigativo resalta los procesos de reflexión y solución de situaciones que repercuten en una mejor autoestima y procesos de comunicación en los estudiantes para resolver situaciones problema.

De esta manera, la investigación referenciada aporta grandes valores de fondo a la construcción del presente proyecto, porque aborda elementos conceptuales, prácticos y ordenados acerca de la importancia que debe asimilar, en los espacios pedagógicos, la enseñanza de los objetos matemáticos desde una perspectiva lúdica y basada en la solución de problemas. En los pasos metodológicos de elaboración, ejecución, verificación y mejora de la calidad presenta similitudes con los cuatro pasos fundamentales constituidos en la presente investigación. De igual forma, el análisis teórico-práctico que se realiza en el contexto educativo resulta muy enriquecedor ya que no solo asume la perspectiva del estudiante y su proceso de aprendizaje, sino también la manera en la que enseñanza aborda los vacíos que se pueden presentar.

Siguiendo con el ámbito internacional, se encuentra el trabajo de grado de Gutiérrez Rodríguez, N. (2009), en el Instituto Politécnico Nacional, México, titulado "*Una secuencia didáctica para generar los conceptos de sucesión y serie en el nivel medio superior*". Este trabajo parte del reconocimiento que hace a la didáctica en el área de las matemáticas, abordando las actividades pedagogías para el proceso de enseñanza-aprendizaje, desde la pregunta ¿Pueden los alumnos de nivel medio superior, que no han cursado cálculo, construir el concepto de serie infinita?

Para responder al objetivo, el diseño metodológico parte de secuencias didácticas que buscan en los estudiantes el trabajo gráfico de series infinitas empleando el simulador gráfico *Graphmatica* para el ambiente Windows y conjuntamente se hace uso de escenarios naturales para establecer mecanismos de observación y análisis de situaciones de aprendizaje que giran alrededor de la línea de investigación definida como "Teoría de situaciones didácticas e Ingeniería didáctica". Para esto se hace uso de diferentes fases del proceso como planeación, diseño, análisis preliminar con un enfoque sistémico y experimental, que se basa en las teorías de situaciones didácticas (Brousseau, 1997) y la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1991) que dan un enfoque amplio de las matemáticas desde los procesos interactivos que se presentan entre profesor, alumno y saber enseñado.

En el trabajo de grado en mención, se concluyó además que los estudiantes logran el comportamiento de las gráficas y las semejanzas presentadas al agregar términos a la serie, consiguiendo así comprender el concepto de serie y realizar procesos de verificación de términos de series numéricas y establecer valores, suma de términos, elaboración de conjeturas y de esta forma lograr algún tipo de síntesis de acuerdo a los procesos realizados.

Por tanto, este trabajo brinda valiosos aportes a una construcción coherente y lógica del propósito central que se quiere alcanzar, es decir, comparte puntos interesantes respecto al concepto de sucesión, al análisis de gráficos y a los otros elementos que permiten identificar factores diferenciadores en las series, inherentes al pensamiento variacional. Además, los resultados de esta investigación nos lleva a pensar que el uso de distintos tipos de representaciones, el análisis de situaciones y el desarrollo de procesos de aprendizaje matemático, facilitan la autonomía en la obtención del conocimiento, lo cual es un factor determinante para desarrollar algunos procesos específicos del pensamiento como la comunicación, el razonamiento y la modelación, asimilándose en gran medida con nuestro trabajo.

Finalmente en el ámbito internacional, se verifica también la tesis doctoral de García López, M. del P. (2011), en la Universidad de Almería, Almería, España, titulada "*Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir geogebra en el aula*". Se trata de un estudio llevado a cabo con estudiantes de Secundaria siguiendo una metodología de investigación-acción. El interés del trabajo recae en la exploración de la influencia de Geogebra en la transformación de actitudes relacionadas con las matemáticas y en el desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes.

También se analizan cuáles de las características del software intervienen en dicha transformación actitudinal y desarrollo de competencias matemáticas. Para ello se ha diseñado, puesto en práctica y evaluado una secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de GeoGebra, empleando el procedimiento del análisis didáctico, la cual puede considerarse una aportación importante del trabajo. En igual sentido, este estudio aporta una caracterización de actitudes y una caracterización de competencias, así como los instrumentos de observación diseñados para la recogida de datos durante la puesta en práctica de la experiencia en el aula.

En cuanto a los resultados obtenidos, estos han puesto de relieve las mejoras producidas por el uso del software educativo GeoGebra, destacando ciertas actitudes y competencias, a consecuencia de la mejora experimentada en la mayoría de los estudiantes debido al trabajo con dicho software. El efecto de este programa ha contribuido a potenciar en mayor grado determinadas actitudes y competencias, atribuyéndole ciertos atributos y ventajas al uso el mismo para tal mejora.

Por ende, esta tesis brinda interesantes contribuciones a nuestro trabajo en cuanto a demostrar los efectos positivos que exponen los estudiantes al desempeñarse en ambientes de trabajo distintos a los tradicionales, aproximándose al contexto cotidiano en el que hoy actúan los llamados "nativos digitales", quienes evidencian actitudes más amigables ante el aprendizaje de las matemáticas y la potenciación del pensamiento variacional, con evidentes avances en la adquisición de competencias y el desempeño de los procesos generales que aquí se trabajan.

En el ámbito nacional, se encuentra la tesis de Guzmán Restrepo, W. A. (2012) en la Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia, titulado "*Estrategias didácticas para potenciar el pensamiento variacional a través de situaciones problema, de los estudiantes del grado noveno en la Institución Educativa San José del municipio de Betulia*". La tesis tiene como finalidad llevar a cabo la implementación de estrategias didácticas que permitan el uso de diversas herramientas tecnológicas y de esta forma generar un mejor ambiente en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Este proyecto investigativo, se define como un trabajo que busca potenciar el pensamiento variacional a partir de la actualización desde el método empleado para la enseñanza de las ecuaciones y desde geometría con el uso de herramientas tecnológicas educativas Moodle y GeoGebra. Tal proceso, permite identificar los elementos conceptuales requeridos para establecer soluciones respecto a problemas que parten del contexto inmediato de los estudiantes.

Para el desarrollo metodológico del proyecto se implementa el diseño con el cual cuenta la institución Educativa en la plataforma Moodle, ya que se emplea como una herramienta didáctica que enriquece el ambiente en la construcción de los procesos de enseñanza-aprendizaje, además permite indagar problemas situacionales que se relacionan estrechamente con los temas abordados. Para ello, la ejecución del proyecto facilita que los estudiantes puedan realizar observaciones de gráficos y diversas explicaciones y ejercicios que en conjunto fortalecen los procesos de aprendizaje y facilitan la construcción del saber desde otro tipo de contextos ajenos al aula de clase tradicional, lo cual promueve un proceso en el que se complementa el saber.

Se concluye que el proyecto de investigación plantea diversas situaciones problema como mecanismo para desarrollar competencias matemáticas y a partir de ello se materializa el trabajo realizado, el cual tuvo efectos positivos en el ámbito educativo como reducir dificultades institucionales tales como la deserción escolar y la reprobación del área. De forma analítica, se apreciaron diferencias llamativas en los resultados obtenidos por el grupo experimental frente al grupo de control.

La implementación de la tecnología en el grupo de estudio propició el cambio de pensamiento y disposición hacia el saber, en la medida que se desarrollaron habilidades comunicativas y argumentativas como factor motivacional, pero sin dejar de lado el rigor conceptual.

El trabajo aquí referenciado contribuye con excelentes elementos prácticos y conceptuales para la construcción de este proyecto, dado que el propósito central se asemeja a nuestra investigación y entrega un conjunto de resultados positivos. Específicamente, en ambos casos se enuncia la falta de motivación de los estudiantes debido a la aplicación de modelos tradicionales en el aula; un problema que se vivencia a diario en la puesta en práctica del proceso educativo. De igual manera, se observan falencias al momento de elegir la didáctica y la lúdica a usar en matemáticas, por parte de algunos docentes que continúan aplicando ciertas prácticas obsoletas para el contexto actual.

Una vez más, vale la pena resaltar el empleo de GeoGebra con óptimos resultados, puesto que se destaca la contribución a un enfoque más comprensible de las situaciones problema que se exponen a los estudiantes, generando un aprendizaje significativo como lo sugiere Ausubel (1963). Se entiende pues, que es necesario adaptar los conceptos y contenidos a la era digital en que se encuentran los estudiantes.

También, en el ámbito nacional, es oportuno citar la tesis de Velásquez Naranjo, L. J. (2012) en la Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia, titulada "*Enseñanza de sucesiones numéricas para potenciar el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado cuarto de básica primaria*". Esta tesis tiene como propósito promover la construcción del concepto de sucesión numérica a través de la identificación de patrones regulares de tipo aditivo y multiplicativo y de esta forma fomentar el logro de competencias y el uso eficaz del pensamiento variacional.

Este proceso investigativo, centrado en la enseñanza en el aula, establece diversos mecanismos para el reconocimiento de los procesos de variación subyacentes en las sucesiones, y a partir de allí, identificar y definir acciones en la solución de problemas, partiendo del análisis de patrones y el uso de diversas operaciones; siempre en contextos numéricos.

Para el desarrollo procedimental de la investigación se empleó una metodología que se fundamenta principalmente en la lúdica a través de procesos de observación, entrevistas, registro y análisis de la información y para esto se definió una serie de etapas (diagnóstico, intervención, etapa final, evaluación y análisis de resultados), que se ejecutan bajo un enfoque cualitativo, empleando la técnica de investigación-acción, la cual se relaciona significativamente con las problemáticas que se vivencian en sucesos cotidianos.

Se busca que los estudiantes puedan descubrir patrones en los cuales empleen conceptos previos y se acerquen al concepto de sucesión; además, se promueve una reflexión constante entre el trabajo del estudiante y el docente.

También se evidencia en el proyecto, cómo los sentimientos del sujeto entran en juego durante el proceso de ejecución, ya que se da por sentado la existencia y la importancia de un factor motivacional en el estudiante. Esto genera el desarrollo no sólo de lo cognitivo, sino también de competencias socio-afectivas, puestas en escena posteriormente en cualquier rol que desempeñe dentro de su comunidad. Toma pues relevancia, el trabajo en conjunto, el desempeño responsable durante las actividades y el interés demostrado para el desarrollo de las mismas.

El proyecto referenciado tiene una gran relación con el estudio que se desarrolla, ya que ambos abordan el concepto de variación a partir de la solución de problemas; además, presentan semejanzas en diversos factores característicos en la metodología empleada para el proceso de recolección y análisis de la información. Da valiosos resultados, destacando no sólo el enriquecimiento conceptual que representa el desarrollo de este pensamiento, sino la forma como el estudiante adquiere consciencia de su proceso educativo mediante técnicas de autoaprendizaje y autoevaluación, lo cual también es un propósito del presente trabajo, puesto que se desea que el estudiante logre una autonomía intelectual de forma tal que tenga la capacidad de diferenciar por sí mismo los cambios que se presentan en las figuras y demás sistemas de representación.

De la misma forma, en el ámbito local, se encuentra el estudio elaborado por Motta Trujillo, J.A. (2017) en la Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia, titulado "*La proporcionalidad en la solución de problemas de medición, variación y* *aleatoriedad*". Este estudio tiene como propósito central utilizar la noción de proporcionalidad mediante diversas representaciones, concibiéndolo como estrategia para la solución de situaciones aplicadas en contextos de medición, variación y aleatoriedad.

Para llevar a cabo dicho trabajo, se recurrió al enfoque cualitativo para así establecer qué avances y/o dificultades se presentan durante la solución de los problemas planteados. Para el análisis se emplearon las técnicas de George Pólya (1965), definidas en cuatro fases, a saber: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución. Estas fueron llevadas a cabo a través de estrategias pedagógicas como talleres de transposición didáctica, talleres de profundización, solución y socialización de problemas.

De este modo se concluyó que establecer la relación con el uso de las TIC mediante la exploración de páginas web y Apps, despierta la motivación del estudiante puesto que le permite interactuar y solucionar problemas referentes al tema. También fue posible el desarrollo de habilidades en el manejo de razones y proporciones, en situaciones de probabilidad y análisis de cambio, amén de la adquisición de competencias para realizar procedimientos que determinan constantes y variables en diversas situaciones.

De esta manera el proyecto enriquece el sentido del presente trabajo ya que desde el proceso metodológico, la planificación y el análisis de la información, proponen una visión analítica y reflexiva de acuerdo a la relevancia de cada situación problemática. A partir de esta última, en ambos proyectos, con el apoyo de las TIC, se logra el fortalecimiento de las competencias matemáticas, con avances evidentes en los estudiantes durante el proceso de resolución de problemas.

Por último, en el ámbito local se considera el estudio de Muñoz Hernández, H. M. (2013) en la Universidad Autónoma de Manizales, Manizales, Colombia, titulado "*Modelos conceptuales de profesores de educación básica sobre las matemáticas y su enseñanza*". Investigación que se desarrolla desde los procesos didácticos de la asignatura de matemáticas relacionado con la formación de los docentes y partir de esto identifica modelos conceptuales y aporta reflexiones referentes a dicha formación en los procesos de enseñanza. Por lo cual este proyecto se adentra en el pensamiento del pedagogo, sus concepciones y las perspectivas que tiene hacia esta área del conocimiento; además, refleja la importancia que representa para él los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes.

Para la construcción y puesta en marcha del proyecto se empleó un enfoque cualitativo-descriptivo con un alcance interpretativo, y para ello se usaron diversos mecanismos de recolección de información como cuestionarios y entrevistas que se enriquecen con los relatos de los estudiantes; ello facilita inferir, predecir, analizar e interpretar las experiencias de aprendizaje de cada uno en particular.

Todo lo expuesto en el proyecto trajo como resultado un progreso significativo en la calidad educativa, ya que las concepciones de los educadores del área aportan reflexiones y espacios de socialización que resaltan la labor del docente, reconociendo teorías como el constructivismo con su papel fundamental en el desarrollo de las prácticas.

Este proyecto referenciado contribuye con el presente trabajo, en la medida que se le da relevancia al docente en el ámbito educativo del área de matemáticas, es decir, ya muchos estudios se han citado respecto al pensamiento variacional, la solución de problemas, la importancia de la tecnología en el proceso y lo relacionado con el aprendizaje del estudiante, pero también es importante analizar las concepciones de los docentes en cuanto a los procesos de enseñanza y aprendizaje; más aún, teniendo en cuenta que es necesario que el formador ayude a mejorar la motivación del estudiante por medio de actividades de aprendizaje innovadoras, distintas a las tradicionales.

En suma, los antecedentes históricos, legales e investigativos anteriormente referenciados son elementos conceptuales, prácticos, pedagógicos y experiencias vivenciales que aportan ideas, fuerza y practicidad al proyecto, además de tener una dimensión real de la importancia que tiene el área de las matemáticas en la vida del hombre y específicamente lo necesario que resulta potenciar el desarrollo del pensamiento matemático y específicamente, el pensamiento variacional. Los resultados no sólo se evidencian desde un punto de vista teórico con sus implicaciones, sino también que se logran apreciar las positivas repercusiones que genera la formación integral de un individuo, a través de la reflexión, la contextualización y la interacción constante con sus compañeros y su docente.

2.2 Marco teórico

A continuación se especifican diversos aportes, definidos como teorías de autores que enriquecen el sentido conceptual y procedimental del presente proyecto investigativo. Destacando en primera instancia una definición que engloba todo lo relacionado al pensamiento variacional, a continuación se abordan los procesos del pensamiento que entran en juego para la construcción del conocimiento matemático y finalmente se enfatiza en diversas teorías del aprendizaje que dan muestra de los múltiples elementos que se deben aplicar en el contexto para hacer más enriquecedora cada una de las practicas pedagógicas.

2.2.1 Pensamiento variacional

Para comenzar, cabe destacar que el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos se concibe como una oportunidad única en el desarrollo del área de las matemáticas para localizar, analizar e interpretar de forma coherente las diversas variaciones que se presentan en gráficos con base en diversos patrones, datos, números, figuras y datos algebraicos lo cual potencia en gran medida el desarrollo de la lógica y el razonamiento.

Vasco, C. E. (2003) expresa al respecto lo siguiente:

> El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas, de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (p. 6)

En este sentido, los distintos tipos de representaciones mentales generan un aporte a la construcción constante del pensamiento matemático en el alumno desde el estudio y la predicción de patrones, hasta la materialización de las ideas en un análisis efectivo de las variaciones presentadas en secuencias diversas, ya sea de gráficos, números o formas geométricas.

Es bueno destacar como esto potencia algunos procesos intelectuales tan importantes en el área de las matemáticas, tales como el cambio y la variación, en palabras del mismo Vasco, C. E. (2003):

> El movimiento mental de este pensamiento tiene pues un momento de captación de lo que cambia y de lo que permanece constante y de los patrones que se repiten en ciertos procesos, como los cambios de temperatura durante el día y la noche, de los movimientos de caída libre o tiro parabólico; luego tiene un momento de producción de sistemas mentales cuyas variables internas interactúen de manera que reproduzcan con alguna aproximación las covariaciones detectadas, sistemas que podemos llamar "modelos mentales". (p. 6)

El pensamiento variacional facilita que dichos modelos mentales desarrollen innumerables destrezas de comparación y modelación de forma efectiva, que no solo son aplicables desde las variaciones sino que también se relacionan con el resto de pensamientos matemáticos (numérico, espacial, métrico o de medida, aleatorio o probabilístico) y adquieren un carácter contextual al ser abordados desde las diversas dinámicas incluida la cotidianidad del estudiante. Son múltiples los escenarios matemáticos y no matemáticos que demandan un análisis lógico y por consiguiente el uso de dichas representaciones mentales.

Sin embargo, “Uno de los problemas de la elaboración de currículos escolares de matemáticas es el mismo plural de la palabra “matemáticas”, que apunta a la diversidad de las matemáticas mismas” (Vasco, 2003, p. 2). Esto quiere decir que, no se reconoce la practicidad e interdisciplinariedad de los contenidos de dicho saber en el contexto escolar trayendo como consecuencia vacíos en la adquisición del conocimiento y habilidades matemáticas que se exteriorizan a diario en las prácticas pedagógicas como consecuencia de procedimientos poco prácticos y obsoletos tanto en la enseñanza como en el aprendizaje y que entorpecen tanto la labor docente como la del educando; lo que convierte dicha problemática en una de las razones principales por las cuales se debe ahondar en esta realidad, desde estructuras y contextos problemáticos en los cuales se analicen datos algebraicos, gráficos y representaciones simbólicas, que ayuden a resolver diversas situaciones de variación de forma que movilicen los diversos procesos mentales que lleva acabo el estudiante en la construcción del saber.

2.2.2 Procesos del pensamiento desde una perspectiva teórica

- **Formulación y resolución de problemas**

Al abordar las situaciones problema resulta trascendental mencionar los aportes de George Pólya (1965), quien afirmó que existe un procedimiento lógico de cuatro pasos para resolver cualquier tipo de problema: comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan y la visión retrospectiva del mismo.

Lo anterior enriquece el proceso ya que permite comprender el interrogante y emplear diversos mecanismos de análisis de la información, lo cual conduce a determinar la solución de forma autónoma por ir adquiriendo la habilidad de examinar el camino hasta llegar a una respuesta lógica.

Sin embargo, el mismo Pólya (1965) plantea que “El estudiante debe adquirir en su trabajo personal la más amplia experiencia posible”; pero aclara inmediatamente que “…si se le deja solo frente a su problema, sin ayuda alguna o casi sin ninguna, puede que no progrese. Por otra parte, si el maestro le ayuda demasiado, nada se le deja al alumno” (p. 25). De tal suerte que propone dejarle apropiarse al estudiante de la mayor parte del trabajo a realizar.

Para complementar lo anterior, es interesante hacer referencia a las palabras con las cuales concluye René Descartes su tratado "*Géométrie*" (1637), que a la letra dice: “…Y yo espero que nuestros sobrinos me lo agradezcan, no sólo por las cosas que he explicado aquí, sino también por aquellas que he omitido voluntariamente, a fin de dejarles el placer de descubrirlas” (p. 110).

Por tanto, el desarrollo de la lógica matemática y específicamente del pensamiento variacional debe ser un proceso conjunto en el que se conecten las ideas plenamente, así como cada ficha debe encajar en un rompecabezas. Dicho de otra manera, el

estudiante ha de reconfigurar sus paradigmas a través del autoaprendizaje y la experimentación con la respectiva orientación del docente, sin que éste intervenga subjetivamente en el proceso de cognición y reconfiguración del nuevo paradigma.
En su obra "*Cómo plantear y resolver problemas*" y en referencia a lo anterior, Pólya (1965) afirma:

> El resolver problemas es una cuestión de habilidad práctica como, por ejemplo, el nadar. La habilidad práctica se adquiere mediante la imitación y la práctica. Al tratar de nadar imitamos los movimientos de pies y manos que hacen las personas que logran así mantenerse a flote, y finalmente aprendemos a nadar practicando la natación. Al tratar de resolver problemas, hay que observar e imitar lo que otras personas hacen en casos semejantes, y así aprendemos problemas ejercitándolos al resolverlos. (p. 27)

Por consiguiente, es primordial incentivar prácticas pedagógicas en las que se promueva un pensamiento analítico y crítico que explore a fondo el problema en el sentido que el educando tenga no solo la motivación, sino también la capacidad de tomar como ejemplo las mejores estrategias del docente y adquirir la habilidad de determinar desde su perspectiva cuál es el método correcto a seguir en situaciones de variación, siendo un proceso de interacción en el que cada vez se tendrá mayor capacidad de identificar elementos como magnitudes, graficas, datos algebraicos y símbolos para la apropiación de modelos en diversos contextos problematizadores.

Benítez y Benítez (2013), en referencia a Brousseau, afirman que:

> Es importante que el docente elabore problemas interesantes y adecuados a los conocimientos de los estudiantes, que le permitan desarrollar aptitudes y facultades inventivas, que no quiten la responsabilidad que debe sentir por resolverlo y disfrutar la satisfacción que genera el encontrar, por sus propios medios, la solución. Además, el problema no debe tener una solución inmediata, sino que debe hacer pensar al estudiante. Encontrar la solución requerirá poner en juego todas sus capacidades y conocimientos. Es ir más allá de resolver un ejercicio rutinario, es responder a la pregunta para qué y por qué resolver el problema. (p. 3)

En consecuencia, Schoenfeld (1985) asegura que es imperativo que el docente realice un diagnóstico previo del conjunto de recursos que posee el estudiante y de la forma cómo accede a ellos, con el propósito de plantear situaciones problemáticas accesibles al esquema mental del discente y que de igual manera pueda ejercer un control sobre dichas situaciones para determinar con propiedad el momento en que deba rehacer su camino hacia la solución definitiva.

Además, sostiene que:

> Puede haber varias estrategias heurísticas posibles que pueden usarse para resolver un determinado problema. Entre esas estrategias puede ser que una o varias sirvan, o que se crea que algunas que sirven no sirvan, o si alguna sirve puede presentar mayores obstáculos que otras. Cada una de las heurísticas o estrategias que se usen pueden tener sus diferencias; puede que se seleccione una que es inútil, existiendo muchas que son útiles. Todo eso debe ser controlado. (Citado en Barrantes, 2006, p. 2-3)

Finalmente, en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas se indica que es importante "abordar problemas abiertos donde sea posible encontrar múltiples soluciones (…), experimentar con problemas a los cuales les sobre o les falte información, o con enunciados narrativos o incompletos, para los que los estudiantes mismos tengan que formular las preguntas" (p. 52).

- **Razonamiento**

Razonar implica ordenar con lógica y relacionar ideas para llegar a una conclusión o a la solución de un problema. Luego este proceso subyace a la resolución de problemas matemáticos y al desarrollo del pensamiento variacional.

En la ejecución del plan que se diseña para resolver un problema hay que asegurarse de tener plena comprensión de éste, efectuar las operaciones factibles y tener plena certeza del procedimiento a seguir; producto esto de un razonamiento formal o de un discernimiento intuitivo o de ambos, inclusive (Pólya, 1965).

Al respecto, los lineamientos curriculares de matemáticas plantean que el nivel de razonamiento matemático es progresivo con base a la edad del estudiante (MEN, 1998). En este sentido, muestra una similitud a lo que expone Jean Piaget (1954), en su teoría del desarrollo cognitivo cuando afirma que el niño comienza a razonar de manera intuitiva desde los cuatro años, pero ya estructuralmente de los siete a los 11.

Piaget (1954) además afirma que una de las operaciones mentales con que el niño organiza sus ideas para la comprensión del contexto es a través de la seriación, la cual consiste en la capacidad de ordenar los objetos en progresión lógica. Análogamente, en los lineamientos curriculares de matemáticas se propone que para generar razonamiento "se deben plantear situaciones problema al estudiante donde éste establezca patrones de secuencia para luego expresarlos en forma matemática" (p. 54). Con esto se logra reafirmar la trascendencia que tiene el proceso de razonamiento en el desarrollo del pensamiento variacional.

De otro lado, es importante recalcar la responsabilidad que tiene el educador para poner en práctica la mayéutica con un ambiente de aula en donde se estimule a los discentes al cuestionamiento, la exploración y la verificación de ideas. Esto supone que los docentes escuchen a sus estudiantes, orienten el desarrollo de sus pensamientos y hagan uso extensivo y reflexivo de los elementos que posibiliten la comprensión de conceptos abstractos (MEN, 1998)

En los estándares básicos de competencias matemáticas (MEN, 2006) se reafirma que:

> Es conveniente que las situaciones de aprendizaje propicien el razonamiento en los aspectos espaciales, métricos y geométricos, el razonamiento numérico y, en particular, el razonamiento proporcional apoyado en el uso de gráficas. En esas situaciones pueden aprovecharse diversas ocasiones de reconocer y aplicar tanto el razonamiento lógico inductivo y abductivo, al formular hipótesis o conjeturas, como el deductivo, al intentar comprobar la coherencia de una proposición con otras aceptadas previamente como teoremas, axiomas, postulados o principios, o al intentar refutarla por su contradicción con otras o por la construcción de contraejemplos. (p. 54)

Lo anterior refuerza la intencionalidad que tiene la presente investigación en cuanto al uso de GeoGebra como herramienta didáctica que potencia y optimiza el proceso de razonamiento, como parte del desarrollo del pensamiento variacional.

- **Comunicación**

En contrario de lo que se acostumbra a decir, las matemáticas no son un lenguaje en esencia, pero se comprenden, se construyen, se transmiten, gracias a distintos lenguajes, a través de los cuales se logran procesos de expresión y representación, de lectura y escritura, de habla y escucha (MEN, 2006). El lenguaje que se utiliza para comunicar los códigos y expresiones de la matemática hacen parte esencial de su hermenéutica y entendimiento.

> Las distintas formas de expresar y comunicar las preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos no son algo extrínseco y adicionado a una actividad matemática puramente mental, sino que la configuran intrínseca y radicalmente, de tal manera que la dimensión de las formas de expresión y comunicación es constitutiva de la comprensión de las matemáticas. (MEN, 2006, p. 54)

Sin embargo, existen autores que aseveran que las matemáticas si son un lenguaje. En su libro "El lenguaje matemático en el aula", Pimm (1990) afirma:

> El canal oral, en las clases de matemáticas de enseñanza secundaria, suele estar controlado de modo estricto como medio de comunicación. Parte de la dificultad que presentan las matemáticas radica en la exigencia de una atmosfera individual tranquila, controlada, como más apropiada para su aprendizaje, para no mencionar su enseñanza. (p. 18)

El lenguaje matemático se convierte muchas veces en un obstáculo epistemológico al utilizar ciertas expresiones de forma desligada con la realidad o sin ejemplificar claramente a qué hacen referencia, lo que genera que muchas veces el estudiante las vea como algo complejo de entender y poco aplicable. Es indispensable generar en el aula de clase experiencias en las que se promueva la implementación de terminología adecuada al momento de interpretar y resolver situaciones matemáticas de una manera comprensible; al mismo tiempo que se toman ejemplos cotidianos para relacionar y construir el vocabulario que emerge entre conocimientos previos y el nuevo aprendizaje.

> La comunicación juega un papel fundamental, al ayudar a los niños a construir los vínculos entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas; cumple también una función clave como ayuda para que los alumnos tracen importantes conexiones entre las representaciones físicas, pictóricas, gráficas, simbólicas, verbales y mentales de las ideas matemáticas. (MEN, 1998, p. 74)

Por tal razón, es preponderante propiciarle al estudiante un ambiente de aprendizaje que le garantice desarrollar sus procesos de pensamiento de una manera completa e integral.

> Evidentemente, el trabajo de los alumnos debe dejar de ser actuar con estructuras ajenas, responder a preguntas ajenas y esperar que el profesor compruebe la respuesta. Tampoco debe ser evaluar el conocimiento con arreglo a respuestas correctas o incorrectas. En la creación del conocimiento sólo existe lo que se ajusta a la estructura del conocimiento matemático ya creado por el alumno y lo que no se ajusta a ella y debe, por tanto, sugerir la conjetura.
>
> Si se consideran complementarias, las funciones y el trabajo de los alumnos y de los profesores, el trabajo de éstos es bastante distinto. Su trabajo consiste en apoyar, promover, estimular y facilitar de cualquier modo la creación de conocimiento por los alumnos. Además, deben crear un entorno de aprendizaje cooperativo en el que los alumnos puedan explorar e investigar problemas. En consecuencia, deben guiar, escuchar, discutir, sugerir, preguntar y clarificar el trabajo de los alumnos. Para hacerlo, deben dirigir actividades apropiadas e interesantes sin dejar de atender a las necesidades de cada alumno.
>
> (…). En lugar de proporcionar a los alumnos actividades que deben realizar con lápiz y papel en sus pupitres, se deben proponer algunas actividades de resolución de problemas en grupo. La tecnología utilizada en la resolución de problemas puede incluir la utilización de grabaciones de vídeo, de calculadoras y

> de ordenadores como herramientas para los alumnos. La evaluación debe incluir los juicios de los alumnos y de sus profesores sobre la coherencia de la presentación, los razonamientos expuestos, etc. (Romberg, 1992, p. 375-376)

En síntesis, es trascendental que el maestro brinde las herramientas necesarias a sus estudiantes, a través de actividades apropiadas e interesantes, para que este último aplique la hermenéutica y así la comunicación en torno a las matemáticas no genere las "barreras mentales" que hoy afectan el desarrollo óptimo del pensamiento disciplinar.

- **Modelación**

"…la matematización o modelación puede pues entenderse como la detección de esquemas que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente" (MEN, 2006, p. 53).

El concepto de modelación o matematización, como aparece desde 1977, es un concepto bastante amplio y complejo, que contempla diversas connotaciones y perspectivas. En el ámbito matemático, surgió en Holanda un movimiento liderado por el matemático Hans Freudenthal (1968) que consideraba las matemáticas como una actividad humana y que como tal, se originaba en contextos reales o formales, desde donde el estudiante esquematiza, previa formulación del problema, una situación problemática en procura de identificar varios caminos que conlleven a una misma solución, diseñando distintos modelos donde cada uno es reestructurable desde las necesidades de quien plantea dicha situación, para culminar en una etapa de predicción que coadyuva a la toma de decisión o el emprendimiento de acciones efectivas. Es importante tener presente que "resultados tienen que ser validados, es decir, se tienen que volver a trasladar al mundo real, para ser interpretados en relación con la situación original" (MEN, 1998, p. 76).

En el proceso de resolución de problemas, "Los computadores se pueden utilizar también para simular casos que no son accesibles desde el punto de vista analítico" (MEN, 1998, p. 76). Precisamente, esta investigación propone el uso de GeoGebra como herramienta didáctica que estimula el desarrollo del pensamiento variacional a partir de situaciones problemáticas del contexto que generan cambio o variación “modelizables” para ser analizados en profundidad.

Lynn Arthur Steen (1988) afirma en su obra “The Science of Patterns” que tales esquemas que llama “modelos” o “patrones” se repiten indefinidamente y en la multitud de ellos la intención es hallar otros que permitan hacer teoría sobre sus relaciones, para de esta manera configurar nuevas estructuras matemáticas (p. 616).

La construcción permanente de modelos mentales bien estructurados permite al estudiante desarrollar habilidades en la resolución de problemas, a partir de representaciones de partes de la realidad que pertenecen a un sistema, pero teniendo en cuenta que “todo modelo es una representación, mas no toda representación es necesariamente un modelo” y análogamente, “todo modelo es un sistema, mas no todo sistema es un modelo” (MEN, 2006, p. 52).

Cuando un estudiante no es capaz de matematizar un problema, supone la ausencia de un proceso de modelación en los hechos relatados, a causa de un nivel deficiente en el lenguaje del estudiante, falencias en la metodología utilizada por el docente o definiciones memorizadas de los textos, por ejemplo. Por tanto, el rol que desempeña el educador en el aula durante este proceso es determinante para promover la heurística en el discente, logrando afianzar con propiedad los nuevos constructos que se configuran a partir de la modelación de situaciones problémicas del contexto y en nuestro caso particular, donde se desarrollan procesos de variación. El MEN (1998) en este sentido es claro al afirmar que: “Se puede impulsar el nivel de matematización de los alumnos escogiendo problemas apropiados” (p. 80).

- **Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos**

No menos importante que los anteriores procesos es la realización de procedimientos o rutinas conceptuales, bajo la premisa de realizarlos rápido, pero con conocimiento de causa. Es decir, si bien los procedimientos de alguna manera, a raíz de la práctica, se vuelven mecánicos, no se puede desvirtuar en su ejecución la conceptualización, el desarrollo comprensivo y significativo desde lo conceptual.

Los procedimientos como algoritmos (conjunto de instrucciones lógicas y secuenciales que llevan a un resultado) deben provocar en el estudiante toda su atención para determinar qué contribuciones como mecanismo cognitivo pueden generar en el desarrollo del pensamiento matemático, ajustándose pertinentemente desde lo conceptual a la situación problema que en particular se resuelve. Es así, que uno de tales mecanismos es la alteración de momentos en los que prima el conocimiento conceptual y otros el procedimental lo cual implica entre otros la verificación e interpretación de resultados parciales. Otro mecanismo cognitivo clave es la automatización, que si bien no contribuye directamente al desarrollo significativo y comprensivo del objeto matemático en cuestión, si permite adquirir destreza en la ejecución comprensiva de tareas. Por último, la reflexión es otro mecanismo cognitivo que conduce al reconocimiento de patrones y regularidades al interior de lo simbólico, exigiéndole al estudiante explicar sobre cuáles conceptos se apoya un algoritmo. Por lo anterior, es conveniente que el docente fomente la práctica de ensayar varios algoritmos para una misma situación, justificando su uso e identificando ventajas y desventajas en los mismos; esto permite distinguir las operaciones conceptuales en las distintas formas de ejecución y la motivación al estudiante de inventar nuevas maneras.

Los procedimientos se pueden verificar de diferente índole, sin categorizarlos. Luis Rico (1995) en su artículo “Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas” habla de técnicas y destrezas que presumen el dominio de los hechos y los procedimientos usuales desarrollados en base a rutinas secuenciadas. De acuerdo al campo de las matemáticas en que operan las clasifica como: destrezas aritméticas, aquellas utilizadas en la numeración del sistema decimal y las cuatro operaciones; como métricas, las que emplean correctamente aparatos de medida para la longitud, la superficie, el peso, la capacidad, la amplitud y el tiempo; como geométricas, son las rutinas para construir un modelo de concepto geométrico o una representación en el plano del mismo; como gráficas y de representación, las utilizadas para dar una imagen visual de un concepto o una relación.

En los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998) aparece otra categoría denominada procedimientos analíticos, que se materializan en actividades como “modelar situaciones de cambio a través de las funciones, las gráficas y las tablas;

traducir de una a otra las distintas representaciones de una función; resolver ecuaciones; comprender y hallar las tasas de inflación, los intereses en un préstamo, etc.” (p. 82).

De otro lado, el Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias (del inglés Trends in International Mathematics and Science Study, TIMSS), categoriza los procedimientos de una manera similar a la anterior, donde la mayoría de los procedimientos anteriormente expuestos, se enmarcan dentro de lo que ellos llaman procedimientos de rutina, mientras que el empleo de reglas, transportadores, calculadoras y computadores lo encuadran dentro del uso de equipos.

En resumen, se destaca que este proceso del pensamiento centra su profundidad procedimental en un enriquecimiento constante. Implica una secuencia de pasos que se dan gradualmente a lo largo del proceso escolar y reúne variables, magnitudes, operaciones y diversos factores de cambio determinantes al momento de llevar a cabo cálculos e identificar modelos de representación para realizar óptimamente tales algoritmos y su comprobación.

Después de revisar los procesos del pensamiento matemático, es imprescindible mencionar algunas de las teorías más relevantes que facilitan el alcance del saber desde diversas perspectivas, las cuales trascienden de la teoría a la práctica pedagógica.

2.2.3 La teoría del aprendizaje significativo

Son numerosos los cambios positivos que ha generado el vertiginoso progreso del ser humano debido al enriquecimiento conceptual y pragmático que ha adquirido para afrontar y perfeccionar las dinámicas de la vida en busca de transformar la realidad; en consecuencia, su deseo ha sido creciente por conocer cuáles son los elementos determinantes en el proceso de aprendizaje, pues es gracias a su adquisición, investigación y práctica que ha logrado evolucionar en los distintos contextos en que se desenvuelve. De acuerdo con Ausubel, D.; Novak, J. & Hanesian, H. (1968):

> Durante mucho tiempo se consideró que el aprendizaje era sinónimo de cambio de conducta, esto, porque dominó una perspectiva conductista de la labor educativa; sin embargo, se puede afirmar con certeza que el aprendizaje humano

> va más allá de un simple cambio de conducta, conduce a un cambio en el significado de la experiencia. (p. 1)

Por tanto, la perspectiva que se tiene de la adquisición del saber se ha transfigurado de acuerdo a los mismos cambios sociales que ha experimentado la sociedad en la medida que, ya no solo se relaciona la adquisición del saber con el aprender a adaptarse al entorno y llevar a cabo mecanismos para subsistir, sino que se promueven procesos mentales que permiten a la persona encontrar las habilidades que puede desarrollar en su formación integral.

Al respecto Ausubel (1963) plantea que “El aprendizaje del alumno depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información, entendiendo por "estructura cognitiva", al conjunto de conceptos, ideas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización” (Citado en Bolívar, 2009, p. 1).

El aprendizaje significativo en el ámbito matemático y específicamente para el desarrollo del pensamiento variacional se debe orientar a partir del contexto socio-cultural en el que está inmerso el estudiante, desde donde vivencia fenómenos de variabilidad significativos para él, para luego correlacionarlos con los nuevos que se adquieren al interior del aula. Los primeros conformarán el inventario cognitivo del joven como materia prima para el anclaje requerido al recibir un nuevo constructo que reconfigurará su conocimiento; por esto, y en aras de optimizar su pensamiento variacional, es fundamental que el docente provoque el enriquecimiento de su sistema de representación a través del dominio comprensivo de gráficas, símbolos, datos algebraicos, representaciones geométricas, patrones y sucesiones, fórmulas, tablas en el análisis de variaciones, etc.; garantizando de esta manera la construcción de aprendizajes perdurables. David Paul Ausubel (1963) afirma en relación a ello:

> Un aprendizaje es significativo cuando los contenidos son relacionados de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria se debe entender que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura

> cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición (p. 2).

En suma, los preconceptos aprehendidos son condición *sine qua non* para el aprendizaje significativo, por lo cual el nuevo concepto no ha de abordarse de manera aislada o mecánica, sino que debe procurarse su asimilación e integralidad con el conocimiento ya adquirido, en la pretensión de desarrollar, además, el pensamiento variacional. En este sentido, el docente tiene la función de diseñar actividades que faciliten el tránsito de un aprendizaje de representaciones hacia un aprendizaje de conceptos y de proposiciones (Ausubel, 1963).

2.2.4 El enfoque problémico

El ser humano en su cotidianidad se encuentra expuesto a situaciones problema que traen consigo diversas variables y factores que repercuten de forma significativa en su entorno inmediato, por lo tanto el ser humano demanda la aplicación de habilidades para saber cómo afrontar dichas situaciones, es ahí donde entra en juego la perspectiva contextual de la educación y el rol del docente para orientar al estudiante en la toma inteligente de decisiones ante determinadas situaciones problema en un contexto matemático o cotidiano.

Aquí cabe citar entonces el valioso aporte de Freire (2006), quien da una perspectiva de cómo debe ser el pensamiento del educador para el desarrollo de dicha teoría: “Enseño porque busco, porque indagué, porque indago y me indago. Investigo para comprobar, comprobando intervengo, interviniendo educo y me educo. Investigo para conocer lo que aún no conozco y comunicar o anunciar la novedad” (p. 14).

En el caso específico de las matemáticas, para el manejo de conceptos del pensamiento variacional es indispensable conocer las exigencias de la sociedad, es decir, generar procesos reflexivos de enseñanza y aprendizaje en los que se estimulen las situaciones problema a partir de circunstancias existentes que permitan un detallado análisis de variaciones y representaciones. Esto desarrolla la lógica, el razonamiento y una versatilidad conceptual que le ayuda al estudiante en su formación personal y en su desempeño dentro de la sociedad.

Tal y como lo afirma Bernal, Y. R. (2010):

> La metodología del aprendizaje basado en problemas concibe al estudiante como un sujeto activo, por lo que debe realizar una actividad para poder apropiarse del conocimiento, y con ello desarrollar su intelecto. Es importante precisar que el estudiante, junto con el conocimiento, hace que la enseñanza problémica permita asimilar métodos y procedimientos, acercándolos al desarrollo de la lógica de la actitud científica y a la formación en la investigación. (p. 82)

2.2.5 La teoría constructivista de Jean Piaget

Piaget afirma que:

> Efectivamente, el proceso de construcción de los conocimientos es un proceso individual que tiene lugar en la mente de las personas que es donde se encuentran almacenadas sus representaciones del mundo. El aprendizaje es, por tanto, un proceso interno que consiste en relacionar la nueva información con las representaciones preexistentes, lo que da lugar a la revisión, modificación, reorganización y diferenciación de esas representaciones. (Citado en Serrano y Pons, 2011, p. 6)

A partir de esta perspectiva resulta interesante resaltar los grandes aportes que hizo Jean Piaget a la educación desde el punto de vista de la psicología evolutiva, a través de la cual no sólo contribuye con elementos teóricos que explican la importancia del aprendizaje desde el desarrollo cognitivo, sino que por medio de la misma se enfatiza en lo relevante de la construcción colectiva del conocimiento.

Una vez más, se destaca el rol protagónico que debe asumir el estudiante en su proceso de formación, adquiriendo de esta manera una autonomía intelectual y un desarrollo cognoscitivo revelador, a partir de la integración de constructos previos y adquiridos, desde la interacción permanente con su contexto.

2.2.6 Teoría de los campos conceptuales

Vergnaud (1990) asume que para que haya conocimiento se requiere de un proceso de adaptación del sujeto al contexto, un proceso de asimilación del nuevo saber al antiguo y un proceso de acomodación a la eventualidad. Esto implica que el estudiante requiere de un marco teórico para comprender lo que aprende.

Un concepto es ante todo una construcción pragmática. Por lo tanto, éste no se debe reducir a la elaboración de una simple definición, ya que sólo a través de las situaciones vivenciadas por el estudiante y de la resolución de problemas que él realice podrá darle sentido a lo que aprende como conocimiento.

En consecuencia, Vergnaud (1994) afirma que:

> La teoría de los campos conceptuales, es una teoría compleja, pues involucra la complejidad derivada de la necesidad de abarcar en una única perspectiva teórica, todo el desarrollo de situaciones progresivamente controladas, de conceptos y teoremas necesarios para operar eficientemente en esas situaciones, y de las palabras y símbolos que pueden representar eficazmente esos conceptos y operaciones para los estudiantes, dependiendo de sus niveles cognitivos. (Citado en Moreira, 2004, p. 2-3)

Según Brousseau (1986), “el personal docente debe crear situaciones para sus estudiantes, en las cuales los conocimientos aparecerán como la solución óptima a los problemas propuestos y sea el alumnado quien lo descubra” (Citado en Alfaro y Fonseca, 2016, p. 21).

Se evidencia de esta forma que para el desarrollo del pensamiento variacional es vital que el docente plantee situaciones problematizadoras a partir de las experiencias significativas y los conocimientos previos que tenga el estudiante. De igual forma, la propuesta de usar una nueva estrategia didáctica mediada por tecnologías de información y comunicación con el objetivo de propiciar espacios de análisis y reflexión eficaces, cobra igual importancia en la potenciación de dicho pensamiento.

2.2.7 Teoría del aprendizaje colaborativo o cooperativo

Bruffee (1993) establece que:

> El aprendizaje colaborativo se inscribe dentro de una epistemología socioconstructivista (…). El conocimiento es definido como un proceso de negociación o construcción conjunta de significados, y esto vale para todo el proceso de enseñanza-aprendizaje. Aunque el peso del concepto está puesto en el reconocimiento del valor de la interacción cognitiva entre pares, el aprendizaje colaborativo involucra también al docente, o sea a todo el contexto de la enseñanza –comunidad de aprendizaje–. (Citado en Roselli, 2011, p. 179)

Por tanto, esta teoría se centra en el proceso de construcción epistémica en ambientes microsociales tales como el aula de clase o el grupo de trabajo, donde todos los actores de la comunidad educativa interactúan en consenso, respetando el punto de vista del otro, para conjuntamente propiciar un conocimiento nuevo.

Para Gunawardena, Lowe y Anderson (1997) “la interacción se convierte en un elemento clave, si se toma en cuenta que el proceso esencial es juntar las contribuciones de los participantes en la co-creación de conocimiento” (Citado en Galindo González, 2012, p. 2).

En tal sentido, el trabajo en equipo posibilita la discusión entre pares y potencia la reconfiguración efectiva de constructos y paradigmas que conllevan a la solución de situaciones problémicas de contexto con alcances comunitarios, inclusive.

Según Monereo (2004), “Cuando el educando está en interacción con (…) alguien que se le parece, tarda menos en resolver problemas con la ayuda de un adulto o de compañeros más capaces que si lo hiciera solo” (Citado en Galindo González, 2012, p. 5). Cada vez más nuestras instituciones educativas deben atender a una población con necesidades educativas especiales, para lo cual es importante desarrollar un trabajo en equipo teniendo en cuenta las similitudes en los procesos mentales de aprendizaje. Lamentablemente, estos aspectos no se tienen en cuenta en ocasiones al momento de diseñar la estrategia grupal, generando en el mejor de los casos estancamiento epistémico y aislamiento social.

2.2.8 Teoría socio-cultural de Vygotsky

Es innegable que el contexto en el que se desenvuelve el estudiante tiene injerencia en el desarrollo de su pensamiento, desde la posibilidad de intercambiar ideas, confrontar razonamientos, consensuar conjeturas, acordar generalidades, entre otras.

Vygotsky (1979) afirma que el individuo construye el conocimiento en la medida que participa en actividades sociales y transfiere dichas significaciones a una nueva estructura psicológica interna. En ese sentido, el docente debe proponer actividades didácticas para desarrollar en equipo, las cuales han de garantizar en los estudiantes una curiosidad epistémica y un aprendizaje dialógico.

La comunicación y la intercomunicación entre estudiantes son indispensables para la obtención del conocimiento, (…). En consecuencia, la finalidad de la educación no puede ser repetir la doctrina dominante (Freire y Macedo, 1989). Para optimizar el pensamiento variacional a partir de la puesta en escena de los procesos generales que lo configuran, es necesario el planteamiento a estudiantes de actividades con situaciones problémicas contextualizadas y significativas que involucren eventos de variación, pero definitivamente será fundamental que dichas actividades se desarrollen en un ambiente socio-cognitivo, donde haya espacio para la construcción de conocimiento de manera diversa, discutida, analizada y razonada en conjunto.

Según Vygotsky (1996 y 1978), el hombre, para realizar cualquier actividad utiliza dos tipos de instrumentos, uno de los cuales denomina signos-símbolos. Estos presentan una forma física, en principio, pero luego se interiorizan y conducen a cambios en los procesos psíquicos del sujeto. Dichos instrumentos se convierten en mediadores que transforman la realidad del entorno en lugar de imitarla y una vez interiorizados generan las funciones psicológicas superiores.

Para originar concepto en el estudiante se requiere de la generalización de la palabra aprendida e interiorizada a través del proceso de comunicación y el lenguaje semiótico, coadyuvado tal proceso por el uso de herramientas tecnológicas que faciliten el análisis holístico, el razonamiento formal y en últimas, el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en el discente.

2.2.9 Teoría de la cognición situada

De acuerdo a Díaz Barriga y Hernández (2002), existe una dura crítica por parte de varios teóricos de este paradigma hacia la forma cómo las instituciones educativas están promoviendo el aprendizaje actualmente. Cuestionan la metodología utilizada para enseñar aprendizajes declarativos abstractos y descontextualizados, desmotivantes y de poca relevancia social. (Citado en Díaz Barriga Arceo, 2003, p. 3)

Esta teoría respalda la hipótesis del enfoque sociocultural de Lev Vygotsky en cuanto a que afirman que el conocimiento es situado; es decir, forma parte y es producto de la actividad, el contexto y la cultura. En ese sentido, toma relevancia la mediación, la construcción conjunta de significados y los mecanismos de ayuda ajustada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, donde la episteme se construye desde la interacción con el medio en el que se desenvuelve el individuo.

El estudiante requiere en esencia aprender para saber hacer en contexto, mostrando permanente motivación e interés, por tal razón el docente no debe incurrir en la repetición insulsa de conceptos no aplicables a la realidad, sino que en contrario, ha de propiciar espacios dinámicos de autoaprendizaje desde lo experiencial en lo cotidiano. Así, algunas estrategias que encarnan este paradigma corresponde a la solución de problemas auténticos, a las prácticas *in situ* en escenarios reales, al trabajo en equipos cooperativos y al aprendizaje mediado por las nuevas tecnologías, entre otras.

Para la potenciación del pensamiento variacional es pertinente partir de elementos gráficos que representen fenómenos socioculturales de su entorno, que a su vez le faciliten el uso de un lenguaje semiótico en pro de modelar soluciones efectivas al respecto. Ello conllevará a una mayor comprensión de la realidad y a la construcción de generalidades y nuevos modelos de la misma.

Scardamalia y Bereiter (2003) postulan que la principal función de la educación debería ser la construcción de conocimientos colectivos mediante el aprendizaje basado en problemas de contexto, incorporando la alfabetización tecnológica. (Citado en Díaz Barriga Arceo, 2003, p. 10)

2.2.10 Teoría de representaciones semióticas de Duval

Sin lugar a dudas las representaciones semióticas ejercen una función preponderante en el aprendizaje de las matemáticas, en el sentido que convergen y son determinantes en la estructuración de los modelos mentales del sujeto, dándose un proceso de esquematización de la información en el que se usan múltiples recursos simbólicos para especificar diferentes elementos claves en el análisis de variables. Duval (2004) afirma:

> El aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión. (Citado en Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui, 2012, p. 30)

Es oportuno mencionar entonces, la existencia de tres actividades cognitivas inherentes a toda representación, en relación a los sistemas semióticos considerados desde su función en el desarrollo del pensamiento, según Duval (1999):

La primera es denominada *formación de la representación de un registro dado*. Son las representaciones de un registro semiótico particular, la cual constituye un conjunto de marcas perceptibles e identificables que permiten expresar o evocar un objeto como una representación de alguna cosa en un sistema determinado, esta representación debe cumplir con unas reglas de conformidad, por razones de comunicación y de transformación de representaciones llamada formación.

La segunda, denominada *tratamiento*, son las transformaciones de la representación dentro del mismo registro donde se ha formado de acuerdo con unas únicas reglas que le son propias al sistema, de modo que a partir de éstas se obtengan otras representaciones que puedan constituirse como una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iníciales se denomina tratamiento de una representación y hace referencia a la transformación de esta representación en el mismo registro donde ha sido producida es decir, se refiere a la transformación interna en un registro, debido a esto cada tratamiento requiere el reconocimiento y aplicación de las reglas propias a cada registro.

Y la tercera es la *transformación de una representación dada en un registro*, en otra representación en un registro diferente, que conserva parte del significado de la representación inicial pero al mismo tiempo da otras significaciones al objeto representado. A esta habilidad para cambiar de registros de representación semiótica, el poder convertir las representaciones producidas de un sistema de representación a otro sistema, de manera que este otro sistema permita explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado se le denomina conversión. Por ejemplo, se hace una conversión cuando al tener una ecuación construimos una gráfica a partir de ella. (Citado en Ospina García, 2012, p. 34-35)

Luego estas representaciones permiten construir un sistema en el cual se tiene la capacidad -por ejemplo- de tener diversas formas de graficar determinado valor o procedimiento de manera que se enriquece el conocimiento sin dejar a un lado el registro inicial que se tiene, dándose un constante proceso de aprendizaje en donde entran en juego múltiples variables de traducción y conservación de los contenidos.

Oviedo et al. (2012) refieren que:

> Los conceptos matemáticos no son objetos reales y por consiguiente se debe recurrir a distintas representaciones para su estudio y para llevarlo a cabo resulta importante tener en cuenta que las mismas no son el objeto matemático en sí, sino que ayudan a su comprensión. Si no se distingue el objeto matemático (números, funciones, rectas, triángulos, etc.) de sus representaciones (escritura decimal o fraccionaria, gráficos, trazados de figuras, etc.) no puede haber comprensión en matemática. Por otra parte, las representaciones semióticas no deben confundirse con las representaciones mentales es decir con el conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener acerca de un objeto, una situación y sobre todo lo asociado al mismo. (p. 30)

2.3 Marco conceptual

A continuación se expone la definición de algunos términos, conceptos y teorías propios del presente estudio, teniendo en cuenta de alguna manera el contexto en el cual se desarrolla el mismo, lo que conlleva a una comprensión sólida del proceso investigativo que aquí se realiza, amén de los múltiples elementos que contribuyen a la puesta en marcha de dicho estudio y del análisis efectuado sobre los resultados obtenidos.

2.3.1 Geometría

Es una rama fundamental de las matemáticas y una de las que tiene mayor trascendencia en la historia de la ciencia, puesto que ha ejercido un papel protagónico en el desarrollo de la humanidad, materializado en diversos ámbitos de la vida como por ejemplo: la realización de construcciones que son un rasgo característico de las grandes civilizaciones, además de su estudio en numerosas profesiones y actividades diarias. Se puede afirmar que la geometría se encarga del estudio de las propiedades y medidas que representan las figuras con relación a su ubicación en el plano o espacio, para lo cual entran en juego conceptos o nociones como: puntos, rectas, planos, curvas etc. Esto fomenta una dimensión real de las característicos de las figuras en cuanto su superficie, forma, caras, vértices y por ende el estudio de volúmenes, perímetros y áreas. Por lo tanto, es aplicable en múltiples contextos y es de gran utilidad en la solución de distintas situaciones problema.

2.3.2 Pensamiento lógico matemático

Según Piaget (1954) el conocimiento lógico-matemático, emerge de una abstracción reflexiva ya que éste no es observable y es el niño quien lo construye a través de las relaciones con los objetos, aclarando que el conocimiento adquirido una vez procesado no se olvida, debido a que la experiencia no emana de los objetos sino de la acción misma sobre ellos. (Citado en Paltan Sumba, 2011, p. 14)

El desarrollo del pensamiento lógico, es un proceso de adquisición de nuevos códigos que hace posible la comunicación con el entorno y la aprehensión de conocimientos en todas las áreas de la ciencia. Comprende la conjunción de procesos mentales que desarrolla una persona al razonar y actuar de forma eficaz ante situaciones numéricas, por ejemplo. En general, este paradigma se pone de manifiesto muchas veces ante situaciones problémicas del contexto en donde se hace necesario resolverlas a través del uso del razonamiento y la reflexión para una toma inteligente de decisión.

Sin embargo, su desarrollo va mucho más allá de las meras capacidades numéricas, pues aporta importantes beneficios como la capacidad de entender conceptos y establecer relaciones basadas en la lógica de forma esquemática; la virtud de solucionar problemas en diferentes ámbitos de la vida, formulando hipótesis y estableciendo predicciones; la habilidad de ordenar y dar sentido a las acciones y/o decisiones; la habilidad para identificar patrones de comportamiento, generalizar y modelar. En consecuencia, implica adquirir habilidades naturales de cálculo, cuantificación y elaboración de proposiciones o hipótesis.

Todos nacemos con la capacidad de desarrollar este tipo de inteligencia. Las diferentes capacidades van a depender de la estimulación recibida. Es importante saber que estas capacidades se pueden y deben entrenar, pues sólo con una estimulación adecuada se consiguen importantes logros y beneficios.

2.3.3 El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos

Se podría decir que es la capacidad que se tiene para analizar y transformar las funciones numéricas, manipulándolas de manera flexible y creativa, con el fin de entender, justificar y modelar situaciones de cambio. En esencia, este pensamiento se concibe como la posibilidad de percibir mediante la interpretación del lenguaje de símbolos, los elementos de variación que se presentan en diversos contextos reales y mentales. Para ello entra en juego la relación existente entre cantidades, funciones y formas de representación que se plasman mediante símbolos algebraicos, gráficos, tablas y representaciones pictóricas, haciendo uso de elementos como el plano cartesiano y programas de matemática dinámica que facilitan el proceso. Por tanto, el docente debe proponer el desarrollo de actividades de variación numérica y geométrica, donde se puedan identificar los cambios que se presentan, a través del análisis y la reflexión. En esa medida, los estudiantes adquieren autonomía y comprensión de fenómenos exógenos de variación que los faculta para asumir un rol protagónico en la sociedad, resolviendo situaciones problémicas de trascendencia en su contexto.

2.3.4 Sucesiones

Una sucesión matemática es un conjunto ordenado de objetos matemáticos, generalmente números. Cada uno de ellos es denominado término o también elemento o miembro de la sucesión y al número de elementos ordenados, posiblemente infinitos, se le denomina la longitud de la sucesión. No debe confundirse con una serie matemática, que es la suma de los términos de una sucesión.

A diferencia de un conjunto, el orden en que aparecen los términos sí es relevante y un mismo término puede aparecer en más de una posición. De manera formal, una sucesión puede definirse como una función sobre el conjunto de los números naturales o un subconjunto del mismo y es por tanto una función discreta.

En pues, un concepto que promueve el pensamiento variacional al detectar patrones y elementos ordenados como números o figuras, proporcionando destrezas en cuanto a la predicción de secuencias, lo que fomenta la solución de diversas situaciones problémicas de variación en las cuales se hace uso de estos conceptos.

2.3.5 Resolución de problemas

Es un proceso que se lleva a cabo en todas las circunstancias y contextos de la vida humana a partir de situaciones dilema de la cotidianidad, por tanto sus rasgos característicos se relacionan con aspectos de la vida social donde se procura dar respuesta a determinada dificultad, extendiéndose en nuestro caso al contexto escolar. Este tipo de actividades sugiere un análisis del contexto y conocer cuáles son las diversas variables que lo modifican, lo que hace fundamental trasmitir al estudiante el alcance de sus habilidades en virtud de su formación cognitiva y social. Los problemas son inherentes al ser humano y en tal sentido, se hace responsabilidad común identificar posibles soluciones como forma de producir estados superiores.

2.3.6 Razonamiento

Es una actividad mental que se materializa en una efectiva capacidad de las personas para llevar a cabo un análisis estructurado, descriptivo y claramente argumentado que sustente explicaciones claras ante situaciones problema. Al abordarlo desde el contexto matemático, éste se relaciona con una búsqueda lógica de procedimientos y declaración concreta de variables que faciliten la formulación y resolución de un problema.

El razonamiento está asociado a la adquisición del significado de conceptos y procedimientos matemáticos que se desarrollan a través de espacios donde la explicación, la justificación y la conjetura son las herramientas que posibilitan su desarrollo. El razonamiento está asociado a la comunicación y resolución de problemas.

2.3.7 Comunicación

Se puede considerar como las múltiples formas en las cuales el hombre tiene la habilidad de expresar sentimientos e ideas que desea dar a conocer a través de diversas manifestaciones orales, escritas y físicas. En este orden de ideas y desde el contexto de las matemáticas, se refiere al conjunto de recursos que emplean estudiante/docente a través de su expresión oral, escrita, gráfica y de otro tipo como la representación semiótica, para comprender y explicar los conceptos propios del lenguaje matemático. Dichos recursos son utilizados como acervos del lenguaje natural, siendo un proceso de interacción que estimula la comprensión de dichos conceptos, símbolos, tablas, iconos o gráficos en sus diversas representaciones.

2.3.8 Modelación

Un modelo matemático de un objeto o fenómeno real corresponde a cualquier esquema simplificado e idealizado del mismo, constituido por símbolos y operaciones o relaciones. El concepto de modelo matemático se puede abordar como actividad científica o como herramienta en el aula de clase. En el primer caso se construye para solucionar problemas de otras ciencias y los conceptos emergen a través de un proceso de abstracción y simplificación. En el segundo caso se elabora para construir un concepto matemático dotado de un significado y los conceptos se consideran a priori según los propósitos preestablecidos.

Se hace necesario entonces reconocer el concepto de modelo como parte de un sistema para poder comprenderlo y desde aquí, asimilar que éste se estructura específicamente en la construcción de representaciones mentales, las que a su vez se configuran por medio de una gráfica, un elemento tridimensional o cualquier forma de lenguaje semiótico. Por lo general, tales representaciones corresponden a una situación problémica de contexto, que bajo esta organización abre la puerta a un análisis con múltiples miradas, conllevando a un mejor entendimiento el entorno.

2.3.9 Autonomía intelectual

En el ámbito de las matemáticas se considera como una capacidad que va desarrollando el estudiante de forma progresiva para analizar y llevar a cabo acciones de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos en la resolución de problemas, de manera tal que adquiera destrezas para determinar si el proceso que ha seguido es el adecuado para llegar a una solución efectiva del mismo o en su defecto, optar por otras opciones que sean las óptimas para lo planteado; lo cual también coadyuva a que el estudiante potencie sus habilidades en los procesos de autoevaluación y en el de toma de decisiones.

Paulo Freire (2004) afirma en su obra *Pedagogía da autonomía* que “en el fondo, lo esencial de las relaciones entre educador y educando, entre autoridad y libertades, entre padres, madres, hijos e hijas es la reinvención del ser humano en el aprendizaje de su autonomía” (p. 43). Dicha afirmación obviamente entraña la autonomía intelectual.

Por su parte Jean Piaget, en su libro *El derecho a la Educación*, solicitado por la UNESCO, manifiesta: “admitamos que «apuntar al pleno desarrollo de la personalidad humana y a un refuerzo de los derechos del hombre y de las libertades fundamentales» consiste en formar individuos capaces de una autonomía intelectual y moral…” (p. 43).

2.3.10 Herramientas tecnológicas

Para abordar dicho concepto, es pertinente considerar inicialmente el de tecnología. Éste corresponde al conjunto de conocimientos de orden práctico y científico que, articulados bajo una serie de procedimientos y métodos técnicos, son aplicados para la satisfacción de necesidades en un ámbito concreto o para la resolución de un problema determinado.

En general, una herramienta tecnológica comprende cualquier *software* o *hardware* que coadyuva al logro de la eficiencia, en términos de calidad, tiempo y optimización de recursos, durante el desarrollo de actividades simples o complejas. Posibilitan además el intercambio de experiencias, estudios e investigaciones tanto en las organizaciones como con su entorno.

2.3.11 GeoGebra[1]

Es un software interactivo y libre para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en varios de sus niveles y sistemas: geométrico, de datos y, algebraicos y analíticos. Ofrece diversas representaciones de los objetos desde cada una de sus perspectivas: vista gráfica, algebraica, estadística y de organización en tablas y planillas, y hoja de datos dinámicamente vinculada.

Está escrito en el lenguaje de programación Java, por lo que se encuentra disponible en múltiples plataformas como Windows, Linux, MacOS, Android, IOS. Debido a que se trata de un software gratuito y de código abierto, son muchos los usuarios de todo el mundo que aportan a su desarrollo de manera constante.

Además de la gratuidad y la facilidad de aprendizaje, la característica más destacable de GeoGebra es la doble percepción de los objetos, ya que cada uno de ellos tiene dos representaciones, una en la *Vista Gráfica* (**Geo**metría) y otra en la *Vista Algebraica* (Ál**gebra**), lo cual establece una permanente conexión entre los símbolos algebraicos y las gráficas geométricas. Para el estudiante se convierte en una potente herramienta de análisis ya que permite abordar la geometría y otros aspectos de las matemáticas, a través de la experimentación y la manipulación de distintos elementos, facilitando la

[1] La primera versión del programa fue desarrollada entre 2001 y 2002 por el austriaco Markus Hohenwarter como parte de su tesis magisterial en "Didáctica de las matemáticas y la informática" en la Universidad de Salzburgo, obteniendo el premio al mejor Software Académico Europeo en 2002. Entre 2003 y 2006, Hohenwarter desarrolló aún más el programa para su tesis doctoral sobre "Didáctica de las matemáticas" en la misma universidad y así ganó otros cinco premios internacionales. Durante el mismo período, el programa se tradujo a otros 25 idiomas. Para 2006, se traslada a la Florida Atlantic University a continuar su trabajo en GeoGebra como post-doc. Posteriormente, Yves Kreis de la Universidad de Luxemburgo se le une como nuevo desarrollador. En diciembre de 2007, los desarrolladores fundaron el International GeoGebra Institute (IGI), que tuvo su primera reunión en mayo de 2008 en Cambridge (Inglaterra). Para julio de 2009, se llevó a cabo la primera conferencia internacional de GeoGebra en Linz.

realización de construcciones para deducir resultados y propiedades a partir de la observación directa.

2.3.12 Sistema de representación

El término representación en sí es complejo de abordar, ya que al poderse adaptar en diversos ámbitos implica múltiples significados. En matemáticas, comprende el conjunto de herramientas –acciones, signos o gráficos– que se hacen presentes en la modelación de conceptos y procedimientos con los que interactúan docentes y estudiantes, facilitando el proceso de enseñanza-aprendizaje. Las representaciones no están aisladas, sino que se articulan en sistemas estructurados. Existen dos tipos según Cucoo (2001), las externas y las internas. Las primeras se hacen escribiendo en papel, haciendo ecuaciones o representaciones geométricas, y las segundas corresponden a las que creamos en la mente para representar procesos u objetos matemáticos y que se pueden inferir según lo que dice o hace el estudiante. Duval (1998) afirma que “las externas son un medio para exteriorizar las representaciones mentales internas” (Citado en Espinosa, 2011, p. 5).

Teniendo en cuenta la trascendencia de las representaciones en la educación matemática, el desarrollo eficaz de sistemas de representaciones internas en los estudiantes deberá presentar una correspondencia coherente y buena comunicación con el sistema matemático establecido, es decir, lo que atañe a las representaciones externas (Goldin y Shteingold, 2001).

De acuerdo a Raymond Duval (2004) el aprendizaje de las matemáticas implica el análisis de actividades cognitivas como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. A su vez, dichas actividades requieren aparte del lenguaje natural o de imágenes, el uso de distintos registros de representación y expresiones. En matemáticas existen distintos sistemas de escritura para expresar relaciones, operaciones, etc., entre objetos matemáticos. Cada una de las actividades anteriores configura una forma semiótica distinta, entendiéndose por tal a la actividad de formación de representaciones recreadas por medio de signos. La experiencia en su manejo y el uso de distintas representaciones para un mismo concepto es primordial para la comprensión de los objetos matemáticos. (Citado en Oviedo et al., 2012, p. 30)

En suma, los conceptos u objetos matemáticos como los números o los triángulos no son reales y requieren, para su tratamiento, ser representados por escritura decimal o por trazado geométrico, respectivamente. De igual forma, su representación mental demanda una representación semiótica a través de signos para su comprensión.

Para Fernández (1997), los sistemas de representación "son un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, que nos permiten expresar aspectos y propiedades de un concepto, teniendo presente que ningún sistema de representación agota por sí solo un concepto" (Citado en Espinosa, 2011, p. 6).

2.3.13 Generalización

> La generalización permite pasar del análisis de hechos, datos procesos u objetos particulares, al establecimiento de leyes, que se cumplen bajo ciertas condiciones, para un conjunto de elementos dados. Una tentativa de generalización parte de un esfuerzo por comprender los hechos observados y cómo se interrelacionan; se parte de la analogía con otros hechos o por visualización de reglas de formación; se verifica en nuevos casos particulares; se hacen conjeturas y se llega a reglas generales. Este proceso es llamado inducción. (Pérez Peña, 2005, p. 35).

Es evidente pues, que el concepto de generalización ayuda a la comprensión de patrones de índole numérico y geométrico en considerables situaciones de la realidad. Mason (1985) afirma que:

> La generalización en álgebra es el punto de partida hacia la abstracción matemática y puede ser desarrollada a partir del trabajo con patrones o regularidades. Para aprender el lenguaje algebraico, es importante que el alumno tenga algo que comunicar; así, al percibir un patrón o una regularidad, puede intentar expresarlo y comunicárselo a alguien. Para el referido autor, hay cuatro etapas para trabajar la generalidad en el salón de clases: percepción de un

patrón; expresión de un patrón; registro de un patrón; prueba de la validez de la(s) fórmula(s). (Citado en citado Butto y Rojano, 2010, p. 62)

2.3.14 La metodología cualitativa

Se define como el método investigativo que promueve la puesta en marcha del proyecto desde una perspectiva descriptiva; es decir, que se profundiza en las expresiones, comportamientos y actitudes de las personas que intervienen en el suceso observado para llevar a cabo el respectivo análisis, sin recurrir a los resultados numéricos obtenidos. En este paradigma se privilegia la interpretación y narración de todas las conductas y acciones contempladas en la población objeto de estudio durante la ejecución de dicho suceso, con el propósito de lograr una comprensión global del fenómeno evaluado y realizar las respectivas sugerencias al respecto.

2.3.15 Conjetura

Consiste en el proceso de descubrimiento que lleva a generalizaciones de teoremas y sus demostraciones. Se pueden formular conjeturas basándose en muchos tipos de evidencias mediante la identificación de posibles patrones que impliquen una secuencia determinada. La conjetura una vez que se ha formulado, es necesario comprobar si es cierta o no, usualmente a través de contraejemplos. Cuando se contempla su veracidad, se intenta llegar a una generalidad o su demostración.

2.3.16 Semiótica

Corresponde al estudio de los distintos sistemas de signos o símbolos creados por el ser humano en diferentes y específicas situaciones que permiten la comunicación entre individuos, sus modos de producción, de funcionamiento y de recepción. El fenómeno de la semiosis es la instancia donde *algo significa algo para alguien* y es por lo tanto portador de sentido. Para la semiótica, un signo siempre refiere a algo. En tanto, ese signo remitirá a algo concreto en la mente de una persona.

Las personas estamos constantemente usando signos y atribuyéndole significado a cada cuestión que se percibe. Desde este aspecto es que se puede afirmar que la semiótica dispone de un lugar relevante en el inicio del proceso de conocimiento y por ello se propone un profundo abordaje en todo lo referente al signo, que es su objeto de estudio.

El signo, entendido como entidad abstracta, ha sido creado por el ser humano para simbolizar diferentes tipos de conceptos de diversas maneras. Es por esto que el signo siempre hace referencia a otra entidad, por lo cual se sostiene que un signo es en todas las ocasiones dependiente de otro elemento, de aquel al cual está simbolizando, aunque su significado pueda variar de manera interminable.

La semiótica comenzó a formar parte explícita de la didáctica de la matemática a mediados de la década del 90 cuando, cuando Raymond Duval evidenció la necesidad de hacer uso de ésta, mostrando las felonías que se presentan en la construcción cognitiva de los objetos matemáticos por parte de nuestros estudiantes.

2.3.17 Heurística

Se define como la capacidad que tiene el hombre de crear o inventar algo, con la finalidad de proporcionar estrategias que ayuden a la resolución de un problema. Los seres humanos a través de su creatividad, pensamiento divergente y en algunos casos de experiencias propias, son capaces de encontrar la solución más viable para resolver algún conflicto. Fue Pólya quien dio lustre al término en su libro “cómo resolverlo”.

Su importancia radica en que permite a la persona manifestar una conducta proactiva y beneficiosa en la búsqueda de soluciones, caso contrario sería que el individuo se quedará con los brazos cruzados sin hacer nada por remediar el conflicto.

Como disciplina científica la heurística puede ser aplicada en diversas ciencias con el objetivo de crear medios, estrategias y principios como ayuda para alcanzar la solución más eficaz y eficiente al problema que estudia el individuo. Como método científico la heurística está compuesta por tres procedimientos llamados “procedimientos heurísticos”, los cuales consisten en formas de trabajo y de pensamiento que favorecen la realización consciente de rigurosas actividades mentales. Estos procedimientos se dividen en principios, reglas y estrategias.

Los principios heurísticos, tienen que ver con las sugerencias que se facilitan para encontrar de manera directa, la idea de solución. Las reglas heurísticas, intervienen como impulsos comunes dentro del proceso de búsqueda, ayudando a encontrar los medios para resolver el problema. Por su parte, las estrategias heurísticas, son utilizadas como recurso organizativo dentro del proceso de resolución, con la finalidad de determinar el camino que lleve a la solución del problema abordado. En este caso existen dos estrategias a aplicar:

El trabajo hacia adelante: esta estrategia parte de lo que se ha transmitido para realizar las reflexiones que lleven a la solución del problema.

El trabajo hacia atrás: esta estrategia analiza primero lo que se busca, para luego basarse en los conocimientos obtenidos, estudiando los posibles resultados a fin de deducir lo buscado.

2.3.18 Hermenéutica

Corresponde al arte de explicar, traducir o interpretar textos o escritos que rodean al concepto. La hermenéutica intenta descifrar el significado detrás de la palabra, vista como signo para el presente estudio, y con ello, procurar la exégesis de la razón misma sobre el significado.

Se trata de comprender la complejidad del fenómeno investigado tanto a través de la intuición que brinda el conocimiento, como por medio de la reflexión tras la objetividad expuesta por el autor en el texto producido. La hermenéutica recurre al simbolismo, cual es una construcción y estructura en sí mismo, aprovechando la cultura como matiz yuxtapuesta al contexto.

En el desarrollo del pensamiento variacional emergen procesos interpretativos para configurar el concepto de objetos matemáticos en el ámbito del cambio y la variación, por ende la orientación hermenéutica juega un papel preponderante en la aprehensión y comprensión definitiva de dicho concepto. Para tal efecto, se hace necesario inquirir sobre los fundamentos propedéuticos en torno a la variación de tal manera que haya una reconfiguración más compleja y estructurada del concepto.

2.3.19 Mayéutica

Sócrates fue uno de los exponentes más brillante de la filosofía griega universal, maestro de Platón, quien posteriormente tendría a Aristóteles como su discípulo; personajes que son considerados los padres de la filosofía griega. Sócrates utilizaba un método que se asentaba en la construcción de percepciones y conocimientos, ayudando a crear ideas, buscando como objetivo principal la verdad fundamentada en la razón. A esta técnica se conocía como Mayéutica. Éste asumía una actitud de ignorancia, de una persona que no tenía idea de lo que preguntaba, interrogaba a la gente para luego poner en evidencia la incongruencia de sus afirmaciones.

Luego, la mayéutica es el método a través del cual el maestro hace que el alumno, por medio de preguntas, descubra conocimientos. La técnica consiste en preguntar al interlocutor acerca de algo como un problema, por ejemplo, y luego se procede a debatir la respuesta dada por medio del establecimiento de conceptos generales. El debate lleva al interlocutor a un concepto nuevo desarrollado a partir del anterior.

La mayéutica emplea el diálogo como instrumento dialéctico para llegar al conocimiento. Solamente el diálogo implica el pensar crítico, potencializando con ello la capacidad de trascendencia y creatividad del hombre al educar dentro de un contexto de libertad y no de imposición. Por eso para Freire (1985), la verdadera educación es diálogo.

Este método socrático se caracteriza además por favorecer en el educando un aprendizaje a partir del autoreconocimiento de su ignorancia (metacognición), mediante tres fases: momento de construcción, momento de de-construcción y momento de re-construcción. En el primer momento, el educador presenta una actividad considerando de antemano las dificultades o los problemas que va a ocasionar en sus estudiantes. En el segundo momento, el docente rectifica la conjetura dada por los alumnos enfrentándolos a su error, haciéndoles conscientes de la existencia de un conflicto cognitivo y motivándolos a la reflexión. En el último momento, el maestro guía a los discentes para que construyan una nueva solución que les permita comprender lo que hasta ahora desconocían en relación a la situación problémica propuesta.

En el desarrollo de actividades de aula orientadas a la resolución de problemas donde se procura por parte del docente potenciar el pensamiento variacional del estudiante es pertinente poner en práctica una estrategia didáctica que facilite el cuestionamiento a través de preguntas con sentido reflexivo y por ende el afianzamiento del concepto en estudio. Los interrogantes no sólo deben ser planteados por el maestro al alumno, sino en sentido contrario y entre pares, posibilitando un ambiente de discusión y consenso permanente.

2.3.20 Holística

Proviene de la palabra Holismo, que es una posición metodológica y epistemológica que postula cómo los sistemas (físicos, mentales, lingüísticos, etc.) y sus propiedades, deben ser analizados de manera integral y no sólo a través de los elementos que los componen. El holismo considera que el "todo" es un sistema más complejo que una simple suma de las partes que lo configuran. La comprensión de los procesos y las situaciones debe tener lugar desde el propio *holos*, ya que en su eficacia surge una nueva sinergia, se producen nuevas relaciones y se generan nuevos eventos. Sin embargo, esto no impide el análisis de cada caso particular.

Dicho esto, es concebible el desarrollo del pensamiento variacional como un todo, a partir de los procesos generales que lo constituyen como el razonamiento, la comunicación, la modelación, entre otros. De hecho, muchas de sus funciones se traslapan y confluyen en un sistema de pensamiento complejo que deriva en la construcción del conocimiento y los nuevos constructos. De igual forma, Vygotsky (1978) afirma que el contexto moldea el pensamiento del individuo a través de la cultura y a su vez, el individuo configura el contexto por medio de herramientas técnicas, en una dialéctica epistémica-pragmática.

Es notable recalcar que los lineamientos curriculares de matemáticas están concebidos de una manera holística, ya que invitan al abordaje de los cinco pensamientos y sistemas matemáticos de tal manera que el estudiante pueda desarrollarlos de manera simultánea e integral y así asimilarlos como un todo, conllevando a un aprendizaje completo y al desarrollo del pensamiento crítico, clave en la toma de decisiones.

"Como ocurrió en el pasado, el desarrollo futuro de las matemáticas afectará sin duda, de forma directa o indirecta, a nuestra forma de vivir y pensar."

Stephen Hawking.

Capítulo 3

Metodología

En el capítulo que a continuación se inicia se explica la metodología de la investigación utilizada en la realización de este trabajo. Se detallan aspectos relevantes como el modelo de investigación determinado por el contexto y los objetivos trazados, se establecen los instrumentos que permiten la medición de los procesos que se evalúan, se precisa la muestra a partir del tipo de trabajo que se realiza y la caracterización de la población, se identifican las fuentes de información principales y secundarias, y se describe la manera cómo se llevará a cabo el análisis e interpretación de resultados con base en algunos indicadores que determinan el desarrollo del pensamiento variacional a través de los procesos generales asociados a dicho pensamiento.

3.1 Tipo de trabajo

Se trata de una investigación de tipo cualitativo-descriptivo basada en el enfoque problémico y el uso de tecnologías computacionales, que busca determinar y explicar las dificultades o avances que presentan los estudiantes de secundaria en los procesos de razonamiento, comunicación y modelación de situaciones problemáticas en contexto, los cuales se hallan asociados al desarrollo del pensamiento variacional, según lo planteado por los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998). Para esto se hace necesario facilitar la puesta en práctica de diversos sistemas de representación.

3.2 Instrumentos metodológicos

Para efectos del análisis y descripción de los resultados obtenidos en la investigación, se desarrollan unas actividades prácticas de aula que problematizan situaciones en contexto, con el uso de herramientas tecnológicas que demandan tres momentos: de familiarización, de orientación y de profundización. Lo anterior garantiza en gran medida la intervención directa sobre la problemática planteada y un aprendizaje significativo, de acuerdo a lo expuesto por Ausubel (1963).

3.2.1 Actividad de familiarización

Esta actividad está diseñada para que el estudiante explore las herramientas básicas del software educativo GeoGebra y de esta manera, identifique un nuevo ambiente de aprendizaje que le ayudará a comprender mejor los objetos matemáticos y sus relaciones (ver Anexo A).

3.2.2 Actividad de orientación

A través de esta actividad el estudiante intervendrá los objetos matemáticos con el acompañamiento del docente, propiciando una construcción colectiva de nuevos conocimientos o ajuste a los ya existentes. El propósito es que el joven desarrolle habilidades de pensamiento que coadyuve al análisis y solución de situaciones problemáticas, específicamente en un contexto variacional (ver Anexo B).

3.2.3 Actividad de profundización

La actividad de profundización comprende situaciones problemáticas de variación en distintos contextos y en un nivel de mayor complejidad. Los estudiantes deberán resolver en parejas y sin la asesoría del docente, esta actividad. En esta etapa se pretende que el joven reflexione en detalle y conjeture hacia un conocimiento exacto del objeto estudiado (ver Anexo C).

3.3 Población y muestra

Para nuestra investigación se considera como población objetivo la conformada por los estudiantes de grados octavo y noveno, jornada vespertina, de la institución educativa Gerardo Arias Ramírez del municipio de Villamaría, Caldas. En suma son: dos octavos, con 32 estudiantes cada uno y dos novenos, con 37 estudiantes cada uno, a la fecha del estudio. Vale la pena anotar que por efectos de horario, no se tuvieron en cuenta la población de octavos y novenos de la jornada matutina y la población de ciclo IV de la jornada nocturna.

Teniendo en cuenta que el método de investigación es cualitativo y que existe una significativa facilidad para acceder a los estudiantes objeto de análisis, se determina usar un muestreo por conveniencia (Sampieri, 2014). El número de jóvenes de ambos sexos que conforman la muestra, asciende a 40 (equipo experimental); la franja etaria de la misma está comprendida entre los 13 y los 18 años; y la estratificación socioeconómica donde se ubican corresponde a los niveles 1, 2 y 3.

3.4 Fuentes de información

La información que nos permitirá describir los resultados obtenidos en el presente trabajo, proviene de las siguientes fuentes:

- La producción escrita de los estudiantes en el desarrollo de las actividades, como fuente principal.
- La observación directa en el aula por parte del docente.
- La interacción y comunicación entre estudiante-docente y estudiante-estudiante.

3.5 Análisis e interpretación de los resultados

A partir de los avances y dificultades que los estudiantes presenten en el desarrollo de las actividades, etapa por etapa, se realizará una comparación detallada de un antes y un después en la aplicación de los procesos generales de pensamiento matemático, por parte del educando, que permitan llegar a unas conclusiones concretas y precisas.

Seguidamente, se explicarán los resultados obtenidos a la luz de los indicadores planteados en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) para los tres procesos generales asociados al desarrollo del pensamiento variacional y que se han tomado como referentes en este estudio. Estos indicadores son:

Para el proceso de razonamiento:

- Da cuenta del cómo y del porqué de los procesos que sigue para llegar a la solución de las situaciones problemáticas planteadas.
- Justifica las estrategias y los procedimientos utilizados como evidencia de su comprensión efectiva, con respecto al objeto de estudio.
- Formula hipótesis, hace conjeturas y/o predicciones, contextualiza a la realidad, expone contraejemplos e indica propiedades y relaciones, para explicar los procesos.
- Halla patrones y los expresa en forma matemática.
- Argumenta con lógica matemática la exposición de sus ideas.

Para el proceso de comunicación:

- Expresa ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas.
- Comprende, interpreta y evalúa ideas que son presentadas oralmente, por escrito y en forma visual.
- Construye, interpreta y asocia varias representaciones de ideas y de relaciones.
- Hace observaciones y conjeturas, formula preguntas, y reúne y evalúa información.
- Produce y presenta argumentos persuasivos y convincentes.

Para el proceso de modelación:

- Esquematiza la situación original de un problema en contexto.
- Formula y visualiza un problema en diferentes formas.
- Descubre relaciones y uniformidades entre objetos matemáticos.
- Reconoce estructuras similares en problemas distintos.
- Representa una relación a través de una fórmula.
- Demuestra regularidades en un procedimiento matemático.
- Aplica diferentes modelos en una misma situación problémica.

“Sólo podemos ver poco del futuro,
pero lo suficiente para darnos cuenta
de que hay mucho que hacer.”

Alan Turing.

Capítulo 4

Resultados y discusión

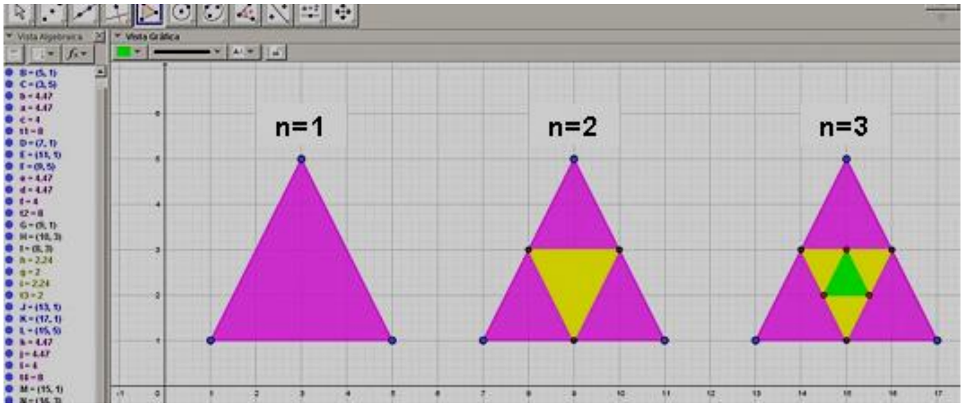
En el actual capítulo que enseguida se expone se realiza una descripción en detalle de las experiencias observadas durante el desarrollo y aplicación de los tres instrumentos que se plantearon en el capítulo anterior como parte de la metodología usada para esta investigación, cuales son: una actividad de familiarización, una actividad de orientación y una actividad de profundización. Es preciso recordar que el propósito de la primera es acercar al estudiante al manejo básico de GeoGebra con el acompañamiento permanente del docente, la segunda demanda ciertas habilidades del estudiante para identificar una regularidad, proponer una generalidad y plantear un modelo algebraico para establecer el valor del ángulo interno de un polígono regular y la tercera busca que el educando, de manera más autónoma, reconozca los patrones en una sucesión y en una progresión y formule una estructura algebraica que posibilite el cálculo de algunos elementos propios de estos objetos matemáticos (razón, término general, sumatoria, etc.)

4.1. Experiencias en la actividad de familiarización

Al inicio de la actividad hubo mucha expectativa, motivación y disposición de trabajo por parte de los estudiantes, dado el nuevo ambiente de trabajo (uso de las Tablets, manejo del software GeoGebra, integración con pares de otros grados, etc.)

En este taller el docente orientó a los educandos para que aprendieran a manipular las herramientas básicas del GeoGebra y al final del trabajo para que formulasen una expresión algebraica que representa la generalidad hallada. En concreto, la actividad consistió en construir tres triángulos isósceles congruentes en los que se inscribieron otros triángulos, a partir del segundo, ubicando los vértices de cada triángulo inscrito en el punto medio de cada lado del triángulo que respectivamente lo delimita, como se ilustra en la Figura 4-1.

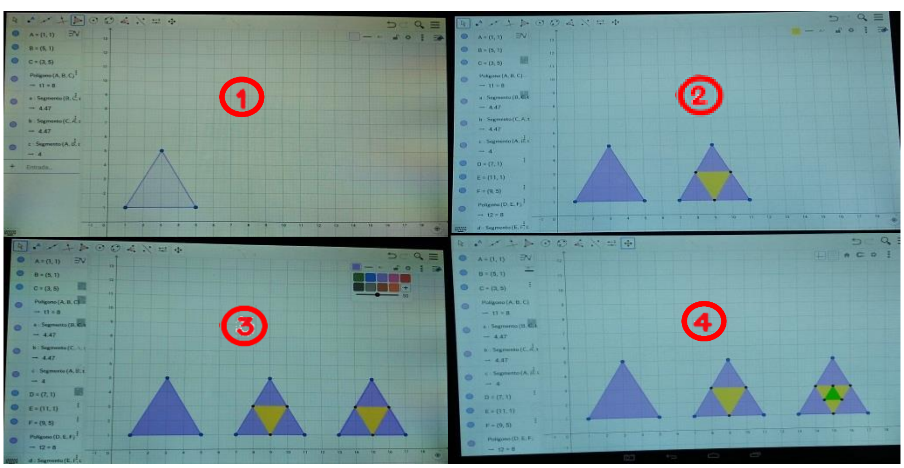
Figura 4-1: Sucesión de triángulos inscritos en triángulos isósceles.



Fuente: Elaboración propia.

Llamó la atención la habilidad con la que los jóvenes manejaron las herramientas tecnológicas (recordemos que son “nativos digitales”) y la comprensión de la actividad como tal, dado que es primera vez que se usa esta estrategia didáctica en matemáticas (Figura 4-2). Por el contrario, se evidenció cierta dificultad generalizada en el manejo de algunos conceptos de la geometría como triángulo isósceles, segmento, punto medio, entre otros.

Figura 4-2: Progreso del trabajo de los estudiantes con GeoGebra.



Fuente: Elaborado por los estudiantes.

Se promovió el trabajo autónomo para seguir instrucciones y evaluar así el nivel de entendimiento en la comunicación, luego de experimentar un primer momento acompañado por el docente, como se evidencia en las orientaciones del punto 9 de esta actividad de familiarización (Figura 4-3). Los alumnos respondieron.

Figura 4-3: Instrucciones para evaluar el nivel de comprensión.

9. Repita el paso 6 para trazar un cuarto triángulo congruente con los dos primeros; sus coordenadas podrían ser (13,1); (17,1) y (15,5). A continuación establezca los puntos medios de los lados de dicho triángulo como en el paso 7 y finalmente repita el paso 8 para inscribir un quinto triángulo a partir de los puntos medios determinados. Las coordenadas de este último triángulo inscrito corresponden a (15,1); (16,3) y (14,3). Tenga en cuenta además mantener los mismos colores. Observe

Fuente: Actividad Práctica de Aprendizaje No. 1.

Más adelante, se pide a los estudiantes que completen una tabla donde se define a **n** como la variable que representa la posición ordenada que ocupa cada construcción triangular y a **k** como la variable que representa el número de triángulos que se forman en cada construcción triangular, a excepción del primer triángulo dibujado que delimita el resto (triángulo externo grande), tal y como se expone en la Figura 4-4.

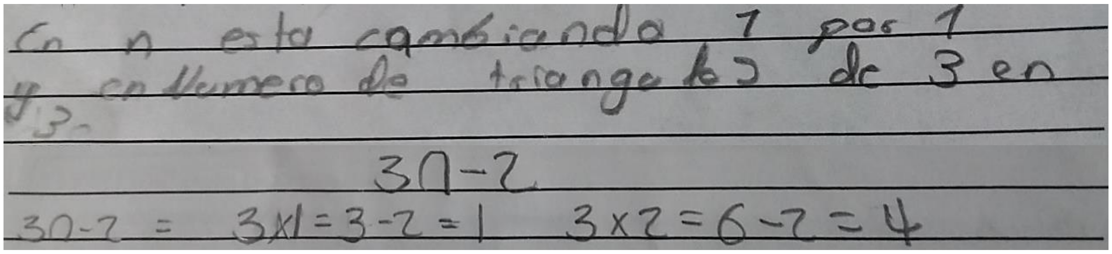
Figura 4-4: Información sobre el número de triángulos por figura construida.

Posición (n)	1	2	3	4	5	6
Número de Triángulos (k)	1	4	7	10	13	16

Fuente: Actividad práctica de aprendizaje No. 1.

En los siguientes interrogantes se solicita al estudiante que luego de analizar el comportamiento de **n** y **k**, de triplicar **n** y de determinar la diferencia entre **3n** y **k**, intente escribir una expresión algebraica que represente el término general de la sucesión que se identifica. La cantidad de educandos de los grados octavos y novenos que respondieron con solvencia es significativa, tal y como se evidencia en la Figura 4-5.

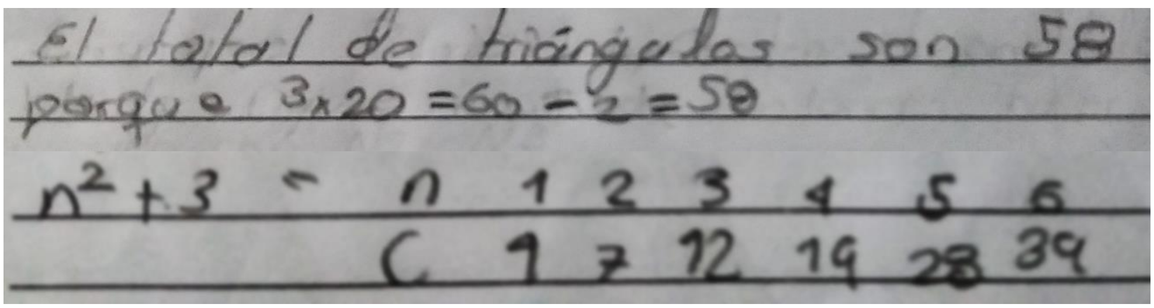
Figura 4-5: Regularidad y generalidad.



Fuente: Actividad práctica de aprendizaje No. 1.

En la Figura 4-6 se observa una de las respuestas dada por los estudiantes al solicitarles que calculen el valor de la variable **k** cuando **n = 20** y que propongan un modelo de sucesión parecido al anteriormente trabajado.

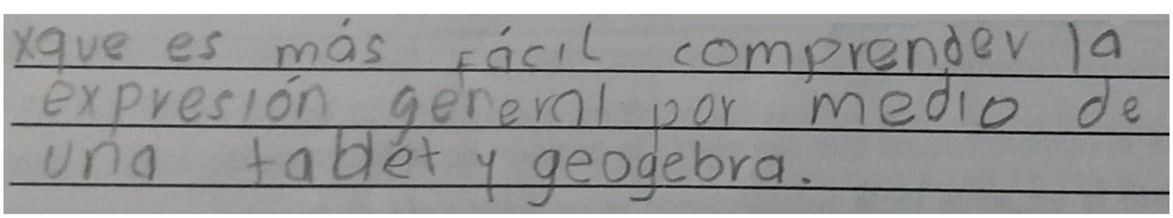
Figura 4-6: Cálculo número de triángulos y propuesta nuevo modelo.



Fuente: Actividad de familiarización desarrollada por estudiante de grado octavo.

Los estudiantes, al final de la actividad, manifestaron la satisfacción de la nueva experiencia y preguntaron si a partir de ahora las clases de matemáticas siempre iban a ser de esta manera. En muchos de los casos se les facilitó la comprensión de los conceptos tratados hoy, gracias a lo dinámico y relativamente sencillo de manejar el programa GeoGebra, como escribieron algunos (Figura 4-7).

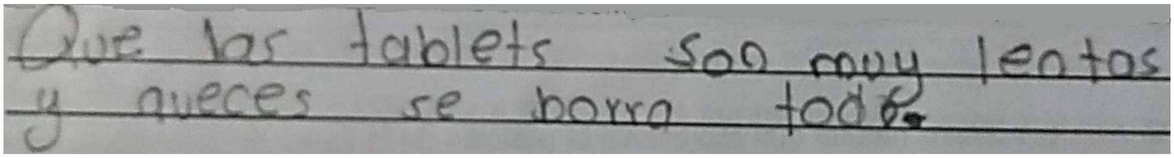
Figura 4-7: Conclusiones actividad de familiarización.



Fuente: Actividad de familiarización desarrollada por estudiantes de grados octavo y noveno.

Sin embargo, hubo otras posiciones que se quejaban del material de trabajo y en especial de las Tablets como se ve en la siguiente conclusión (Figura 4-8).

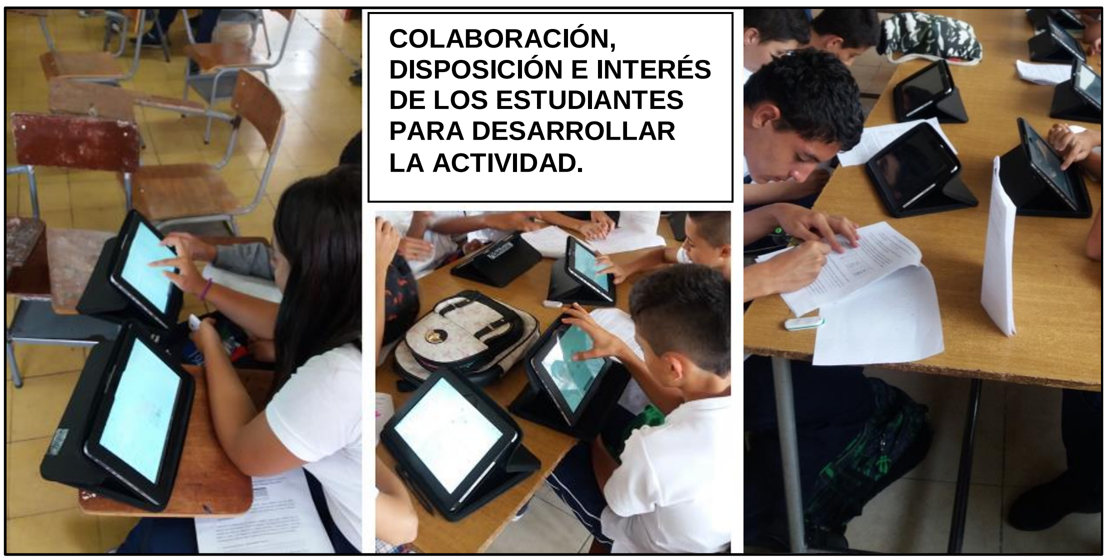
Figura 4-8: Conclusiones de los estudiantes.



Fuente: Actividad de familiarización desarrollada por estudiantes de grados octavo y noveno.

A pesar de esto, los jóvenes, en general, expusieron constantemente durante el desarrollo de la actividad un espíritu de colaboración, disposición e interés como también se observa a continuación en la Figura 4-9.

Figura 4-9: Colaboración e interés en la nueva metodología didáctica.



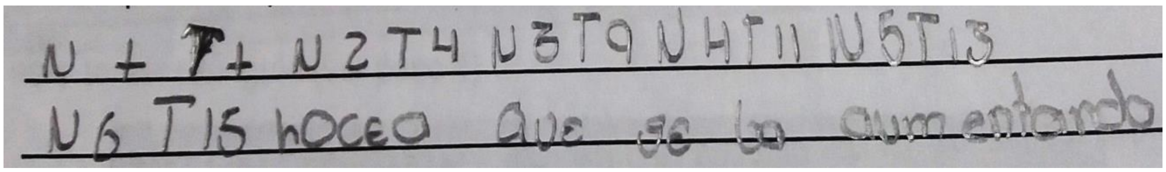
Fuente: Elaboración propia.

A partir de esta actividad se empezó a realizar un análisis del desempeño de los estudiantes en tres de los cinco procesos generales asociados al desarrollo del pensamiento variacional: razonamiento, comunicación y modelación, tal y como se había propuesto desde el principio de esta investigación. Dicho análisis se expone en detalle a continuación.

4.1.1 Análisis proceso de razonamiento

Los estudiantes actúan más guiados por el sentido común en procura de un resultado inmediato que por la lógica del pensamiento matemático. No existe un modelo formal de razonamiento ni identificación del objeto matemático de estudio, sino que hay preocupación por acordarse de un algoritmo que de manera mecánica les ayude a resolver el interrogante de cualquier forma como se observa en la Figura 4-10, con respecto a la pregunta 13 que pide escribir una expresión algebraica que relacione las variables **n** y **k**.

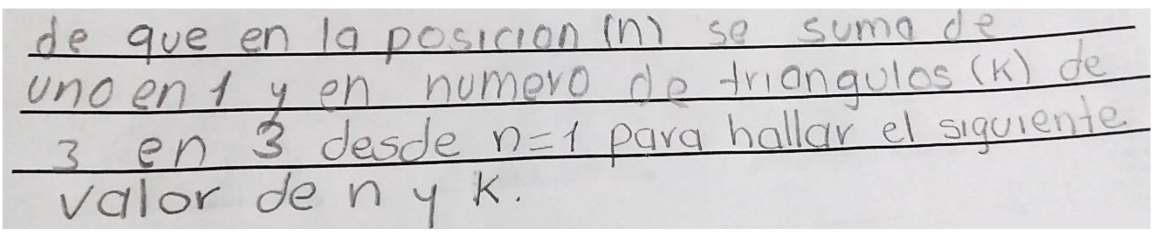
Figura 4-10: Respuesta a la pregunta 13 por estudiante de grado octavo.



Fuente: Actividad práctica de familiarización.

No obstante, algunos estudiantes muestran mayor claridad en el manejo de conceptos, expresando argumentos más razonables como se ilustra a continuación (Figura 4-11)

Figura 4-11: Respuesta de estudiante de grado octavo a la pregunta 11.



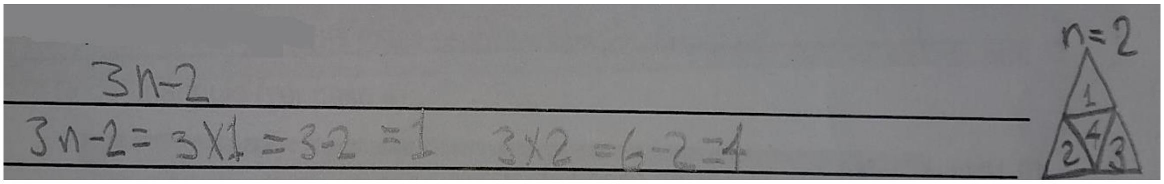
Fuente: Actividad práctica de familiarización.

En la figura anterior se puede percibir la noción que tiene el estudiante sobre una progresión aritmética porque manifiesta que hay una suma de un valor constante para hallar cada uno de los términos o números que componen la sucesión. Igualmente, expone un conocimiento general sobre el concepto de cambio o variación, al insinuar el registro de diferentes valores que asumen las variables **n** y **k**. Por último, es evidente que ha identificado las regularidades que muestran las variables y el patrón de variación que le facilitará más adelante definir el término general de dicha sucesión.

4.1.2 Análisis proceso de comunicación

Los estudiantes expresan sus ideas para hacerse entender utilizando diferentes lenguajes: escrito, gráfico, oral; realizando, inclusive, demostraciones sencillas como se evidencia en una de las respuestas dada por los estudiantes a la pregunta 13 (Figura 4-12).

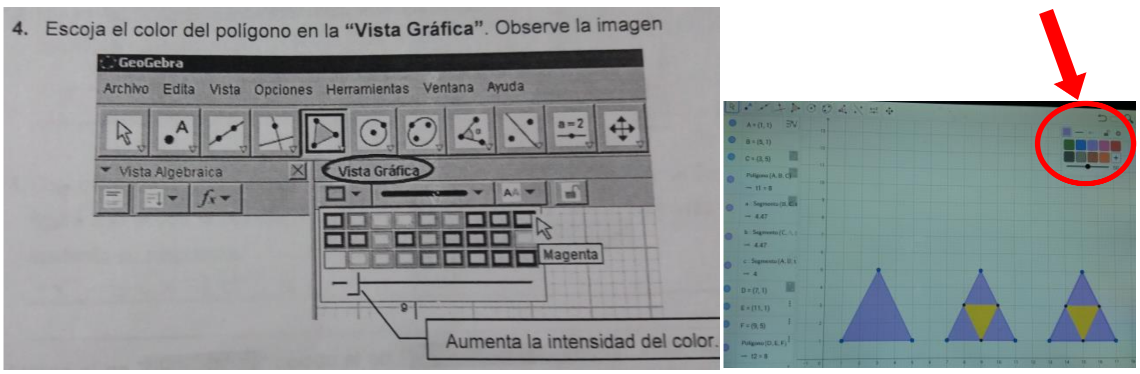
Figura 4-12: Respuesta a pregunta 13 del taller 1.



Fuente: Actividad práctica de familiarización.

Por otro lado, fue una situación generalizada el hecho que muchos de los educandos realizaran la primera parte del trabajo de manera autónoma, mostrando que si entendieron perfectamente las distintas instrucciones que componen el protocolo de la actividad, tal y como se muestra en la siguiente imagen (Figura 4-13), donde se hace énfasis en el uso de diferentes colores para la construcción de los triángulos.

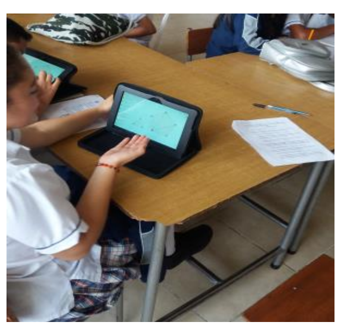
Figura 4-13: Seguimiento de instrucciones.



Fuente: Protocolo actividad de familiarización y Foto a Tablet de un estudiante.

Permanentemente, los jóvenes formularon preguntas respecto a cualquier inquietud que se les presentó, con el fin de reunir además argumentos sólidos sobre los planteamientos que hacían, como se evidencia en la Figura 4-14.

Figura 4-14: Formulación de preguntas frecuentes.

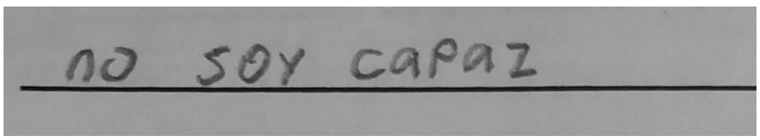


Fuente: Elaboración propia.

4.1.3 Análisis proceso de modelación

Cuando a los estudiantes se les solicitó en el punto 13 que analizaran lo realizado hasta aquí y que con ayuda de las tablas que completaron en los puntos 11 y 12, intentasen escribir una expresión algebraica que representase la generalización de la variación identificada a partir de las regularidades reconocidas, mostraron mucha dificultad para lograrlo. De hecho, fue necesario proporcionar algunas orientaciones para que los alumnos pudiesen comprender el modelo y la fórmula general solicitada. Unos cuantos no fueron capaces como se observa en la Figura 4-15.

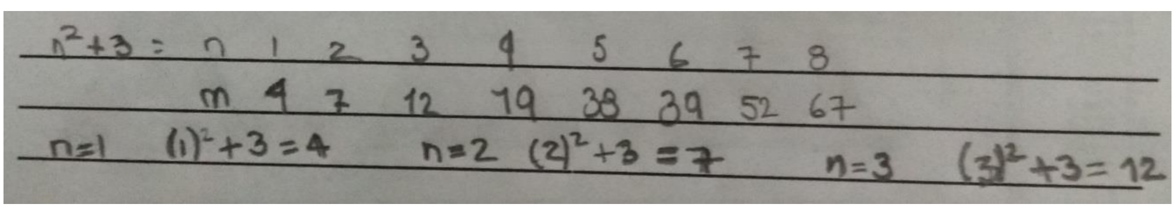
Figura 4-15: Respuesta a pregunta 13 en taller de familiarización.



Fuente: Protocolo actividad de familiarización.

Se pidió a los estudiantes en la pregunta 14 que propusieran un modelo análogo al planteado en la actividad, con el fin de establecer si reconoce estructuras similares. En general, fueron varios los alumnos que finalmente si indicaron esquemas parecidos al del ejercicio e inclusive demostraron regularidades a través del procedimiento matemático, como se puede observar en la siguiente ilustración (Figura 4-16).

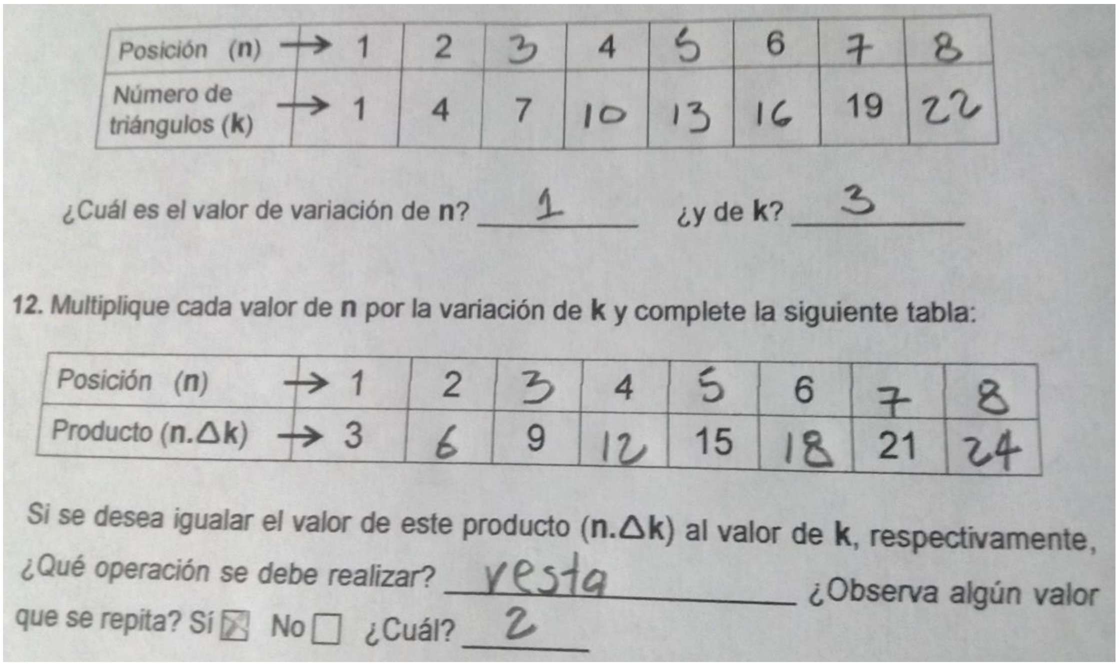
Figura 4-16: Planteamiento modelo similar.



Fuente: Protocolo actividad de familiarización.

A continuación se presenta el caso particular de un estudiante, donde a pesar que completó de manera correcta las tablas de los puntos 11 y 12 para determinar el valor de variación de **n** y de **k** y establecer el valor de la diferencia entre el producto propuesto y **k** (Figura 4-17), no logró establecer la generalización y la fórmula correcta que se pide en el punto 13 (Figura 4-18), que luego les permitiría calcular adecuadamente el valor de **k** cuando **n = 20**, en el punto 14 del protocolo (Figura 4-19).

Figura 4-17: Esquematización de situación original.



Posición (n) →	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de triángulos (k) →	1	4	7	10	13	16	19	22

¿Cuál es el valor de variación de **n**? 1 ¿y de **k**? 3

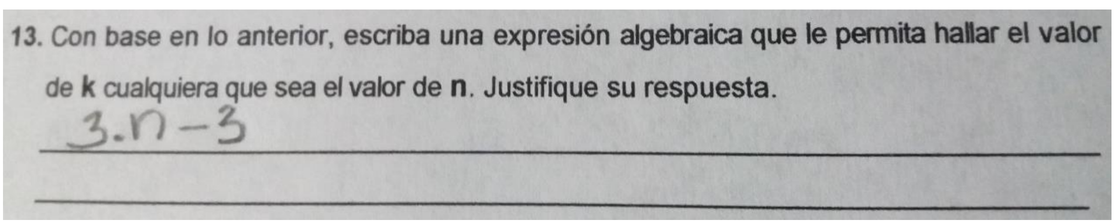
12. Multiplique cada valor de **n** por la variación de **k** y complete la siguiente tabla:

Posición (n) →	1	2	3	4	5	6	7	8
Producto (n.Δk) →	3	6	9	12	15	18	21	24

Si se desea igualar el valor de este producto (**n.Δk**) al valor de **k**, respectivamente, ¿Qué operación se debe realizar? resta ¿Observa algún valor que se repita? Sí ☒ No ☐ ¿Cuál? 2

Fuente: Protocolo actividad de familiarización.

Figura 4-18: Dificultades para modelar.

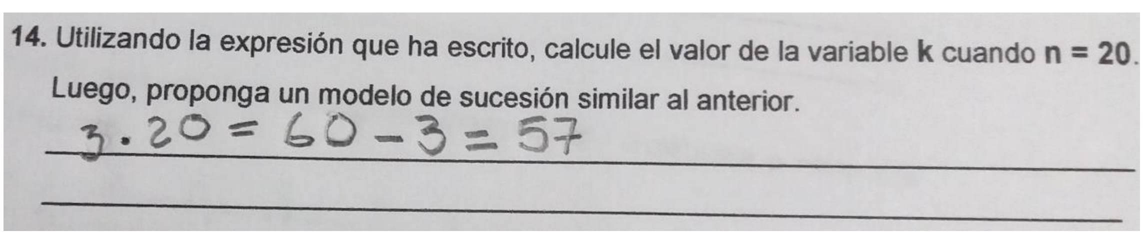


13. Con base en lo anterior, escriba una expresión algebraica que le permita hallar el valor de **k** cualquiera que sea el valor de **n**. Justifique su respuesta.

3.n−3

Fuente: Protocolo actividad de familiarización.

Figura 4-19: Error en cálculo por mala modelación.



14. Utilizando la expresión que ha escrito, calcule el valor de la variable **k** cuando **n = 20**. Luego, proponga un modelo de sucesión similar al anterior.

3.20 = 60 − 3 = 57

Fuente: Protocolo actividad de familiarización.

En términos generales, a los estudiantes se les dificulta la identificación de generalidades, la representación de una relación a través de una fórmula, la aplicación de diferentes modelos a una misma situación y en sí, la modelación matemática.

4.2. Experiencias en la actividad de orientación

De acuerdo a lo planteado en la metodología de trabajo, la actividad de orientación se desarrolló de manera tal que los estudiantes estuviesen acompañados y asesorados a ratos por el docente. La idea era irlos dejándolos actuar con cierta autonomía.

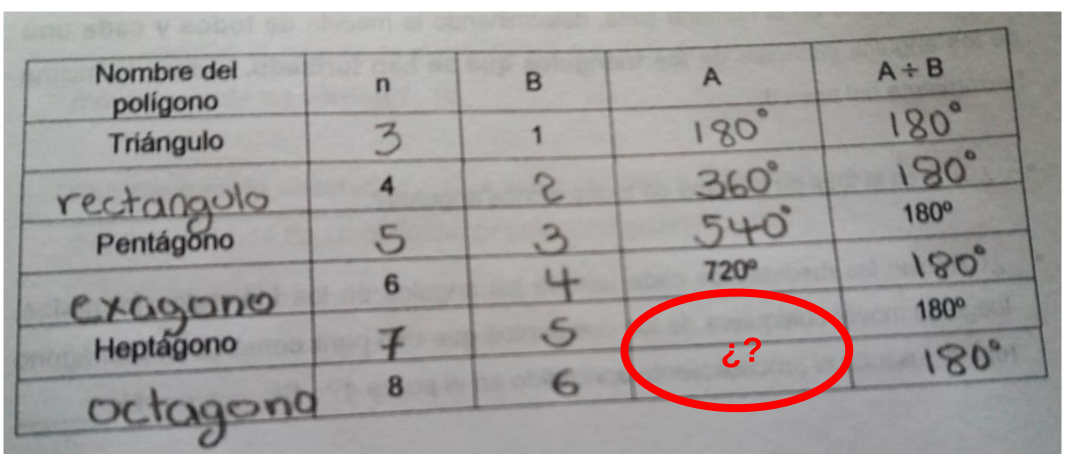
Específicamente, el taller consistió en guiar a los educandos para que construyesen polígonos regulares, diagonales emergentes de un vértice, midieran y compararan ángulos, y luego del análisis e identificación de un patrón de comportamiento, sugirieran un modelo para el cálculo del ángulo interno de estos polígonos, el cual se les solicitó validaran.

4.2.1 Análisis proceso de razonamiento

Se evidencia la dificultad que presentan los estudiantes para razonar en torno a las distintas inquietudes que se les plantea para realizar un juicio generalizado. Algunos plantean las expresiones genéricas que se demanda en cada caso, pero no justifican con razón su planteamiento. De hecho, requieren, por lo general, una orientación extra de parte del docente o la aclaración de ciertos conceptos requeridos como conocimiento previo para la comprensión de determinados procesos.

Lo anterior se evidenció, por ejemplo, en el numeral 11 del taller donde se les solicitó deducir la información correspondiente a un heptágono y a un octágono (Figura 4-20).

Figura 4-20: Dificultades del estudiante para deducir. Pregunta 11 Taller 2.



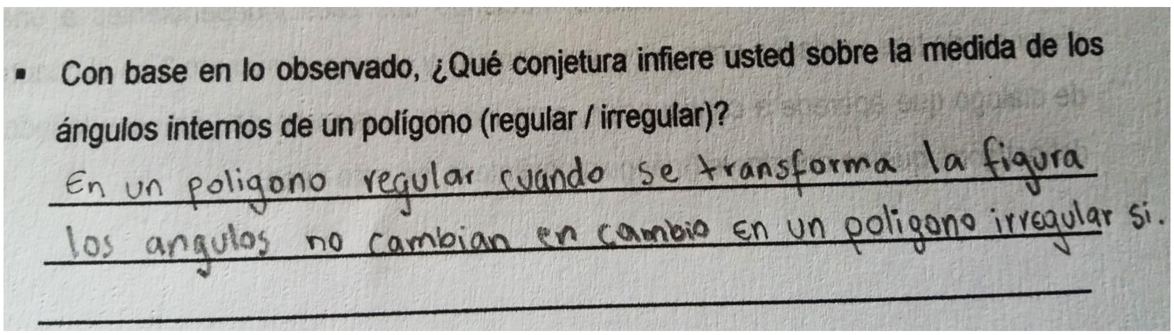
Nombre del polígono	n	B	A	A ÷ B
Triángulo	3	1	180°	180°
rectangulo	4	2	360°	180°
Pentágono	5	3	540°	180°
exagono	6	4	720°	180°
Heptágono	7	5	¿?	180°
octagono	8	6		180°

Fuente: Actividad práctica de orientación.

En la figura anterior se puede observar cómo el estudiante haciendo uso de su sentido común diligencia la información correspondiente al número de lados (n) de un heptágono y un octágono, y al número de triángulos formados en dichos polígonos (B). No infiere que basta con hallar un número que dividido entre 180 da como resultado B.

Sin embargo, en otros cuestionamientos, el estudiante denota análisis y razonamiento de la situación. En la Figura 4-21 se muestra la respuesta a un interrogante de la pregunta 5 del taller de orientación, luego de observar en GeoGebra lo que sucede con la medida de los ángulos cuando se traslada uno de los vértices de un triángulo equilátero y de otro no equilátero.

Figura 4-21: Respuesta a la pregunta 5 del taller 2.



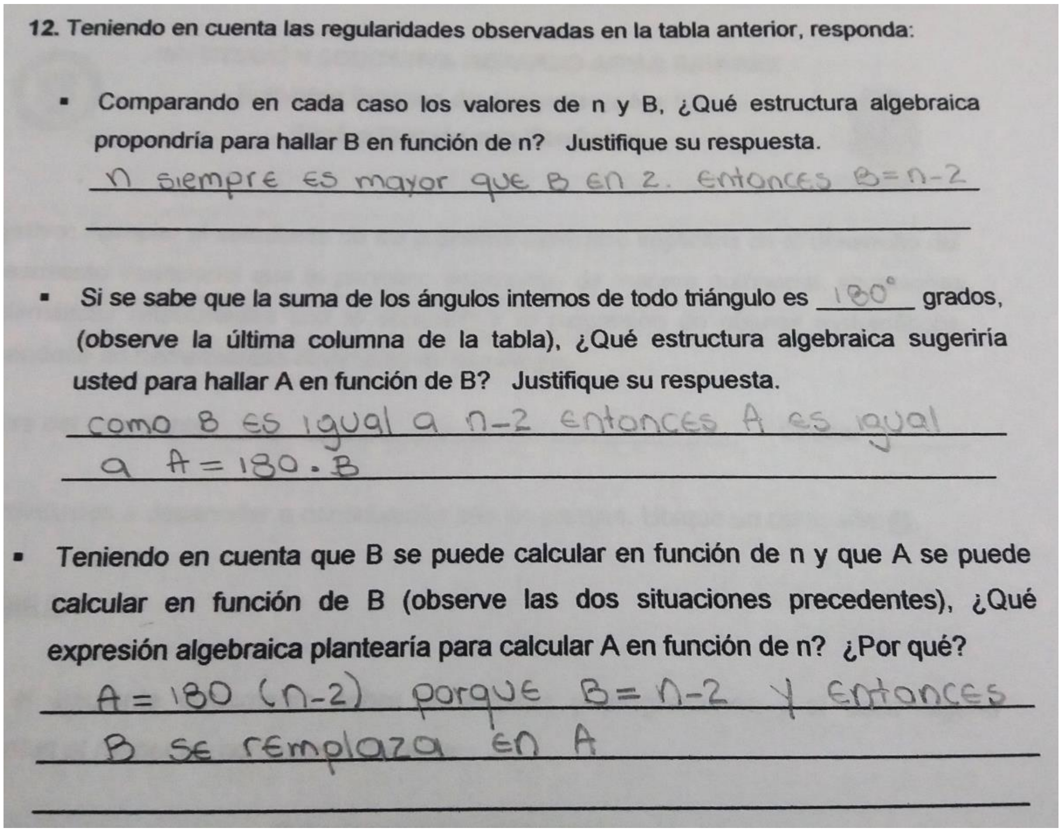
- **Con base en lo observado, ¿Qué conjetura infiere usted sobre la medida de los ángulos internos de un polígono (regular / irregular)?**

En un poligono regular cuando se transforma la figura los angulos no cambian en cambio en un poligono irregular si.

Fuente: Protocolo actividad de orientación.

Algunos estudiantes, en particular del grado noveno, exponen un proceso bastante claro de razonamiento, inclusive con cierta propiedad en el manejo de conceptos relacionados con el pensamiento variacional. Más adelante se expone la Figura 4-22, donde se evidencian varios aspectos que dan muestra de ello. Por ejemplo el uso de la palabra "*siempre*" a través de la cual el discente pretende afirmar que esa proposición es válida para cualquier polígono (generaliza). Otro ejemplo, corresponde al uso del término "*entonces*" como una proposición de implicación, donde se da un antecedente ("como B es igual a n-2") y un consecuente ("A es igual a A=180 • B"). Igualmente, se puede observar el apropiado manejo del lenguaje algebraico al plantear proposiciones formales coherentes con la situación representada, que expresan además matemáticamente los patrones ya identificados. Por último, aun cuando la justificación se antoja algo reducida, si es lo suficientemente concreta y comprensible para argumentar con solidez los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de las situaciones planteadas.

Figura 4-22: Respuesta de alumno grado noveno a pregunta 12 del taller 2.



12. Teniendo en cuenta las regularidades observadas en la tabla anterior, responda:

- Comparando en cada caso los valores de n y B, ¿Qué estructura algebraica propondría para hallar B en función de n? Justifique su respuesta.

  n siempre es mayor que B en 2. entonces B=n-2

- Si se sabe que la suma de los ángulos internos de todo triángulo es 180° grados, (observe la última columna de la tabla), ¿Qué estructura algebraica sugeriría usted para hallar A en función de B? Justifique su respuesta.

  como B es igual a n-2 entonces A es igual a A=180.B

- Teniendo en cuenta que B se puede calcular en función de n y que A se puede calcular en función de B (observe las dos situaciones precedentes), ¿Qué expresión algebraica plantearía para calcular A en función de n? ¿Por qué?

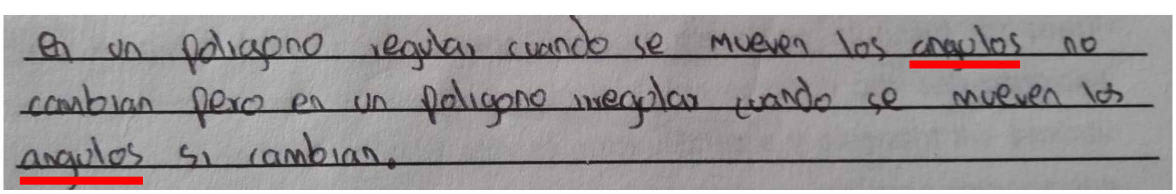
  A=180 (n-2) porque B=n-2 y entonces B se remplaza en A

Fuente: Protocolo actividad de orientación.

4.2.2 Análisis proceso de comunicación

Se observó de manera generalizada la dificultad que presentan la mayoría de los estudiantes para comunicar sus ideas o hacerse entender a pesar que en apariencias han comprendido la situación problema planteada. De igual manera, confunden ciertos conceptos matemáticos y los utilizan indistintamente, en algunos casos como sinónimos. En la Figura 4-23 se observa como el estudiante utiliza el término "*ángulos*" cuando a lo que se quiere referir es a los vértices del polígono en cuestión.

Figura 4-23: Uso indiscriminado de términos y conceptos matemáticos.

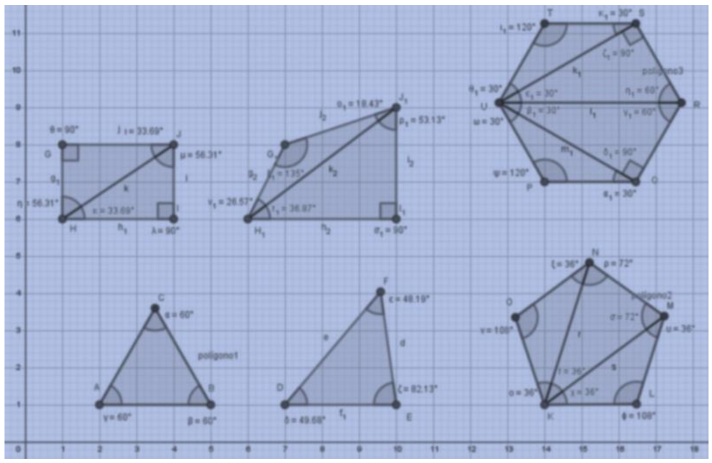


En un poligono regular cuando se mueven los angulos no cambian pero en un poligono irregular cuando se mueven los angulos si cambian.

Fuente: Protocolo actividad de orientación.

En contrario, llamó la atención el hecho que gran parte de los estudiantes no requirió explicación adicional al momento de aplicar cada instrucción del protocolo a través del programa GeoGebra. En un significativo porcentaje, los educandos interpretaron las orientaciones para realizar las distintas gráficas de polígonos como se puede observar en la siguiente imagen (Figura 4-24).

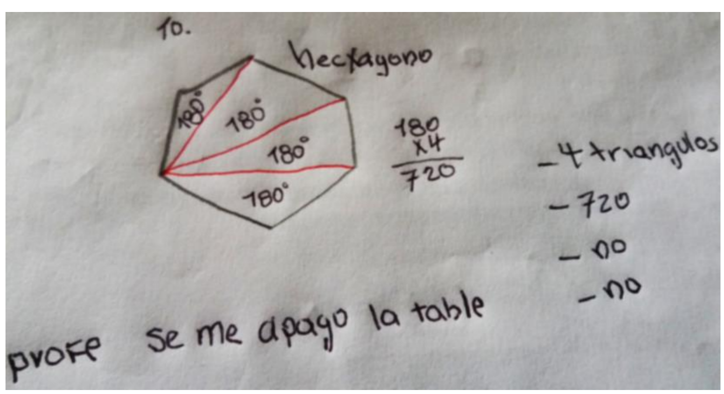
Figura 4-24: Polígonos graficados con GeoGebra.



Fuente: Archivo copiado del hardware usado por un estudiante.

Debido a la falla de algunos dispositivos, que se apagaron repentinamente por falta de carga en su batería, uno de los estudiantes perjudicados optó por continuar realizando ciertos ejercicios de forma manual con papel y lápiz, con tal de lograr comunicar su idea. A continuación se muestra la imagen de su respuesta al numeral 10 del protocolo de orientación, donde se pide la construcción de un hexágono regular (Figura 4-25).

Figura 4-25: Diversas formas de comunicación.



Fuente: Protocolo Taller 2 de un estudiante de grado octavo.

4.2.3 Análisis proceso de modelación

Este proceso generó bastante conflicto en los estudiantes, dado que presentan serias limitaciones para esquematizar una situación problema, para identificar invariantes y relaciones entre variables y para visualizar un sistema desde varias perspectivas. Enseñan una tendencia muy marcada a insinuar un resultado a priori, siguiendo un algoritmo, sin llevar a cabo un análisis detallado de lo estructural.

Sin embargo, las herramientas utilizadas en el protocolo fueron de gran ayuda como estrategia para motivar la modelación. Tal es el caso de las tablas propuestas en los numerales 11 (Figura 4-26) y 14 (Figura 4-27), los cuales coadyuvaron a la visualización esquemática de la situación y por ende a la identificación de patrones y regularidades, más adelante (Figura 4-28).

Figura 4-26: Respuesta a pregunta 11 en taller 2.

Nombre del polígono	n	B	A	A ÷ B
Triángulo	3	1	180°	180°
rectangulo	4	2	360°	180°
Pentágono	5	3	540°	180°
hexagono	6	4	720°	180°
Heptágono	7	5	900°	180°
octagono	8	6	1.080°	180°

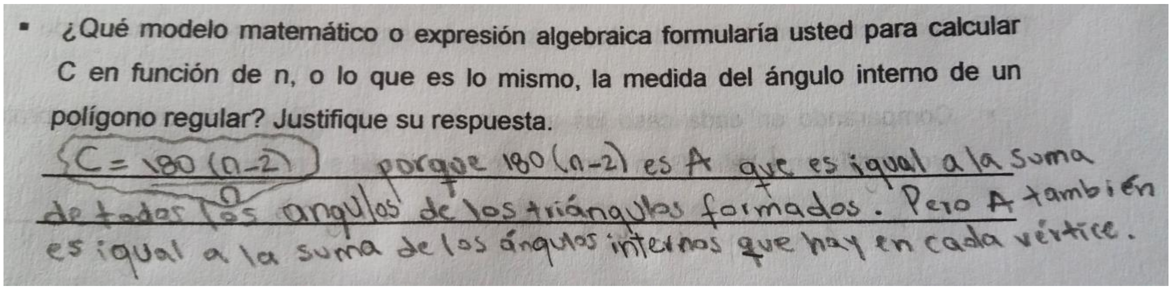
Fuente: Protocolo actividad de orientación.

Figura 4-27: Respuesta a pregunta 14 en taller 2.

Nombre del polígono regular	n	C
Triángulo	3	60°
rectangulo	4	90°
Pentágono	5	108°
hexagono	6	120°

Fuente: Protocolo actividad de orientación.

Figura 4-28: Respuesta a pregunta 15 en taller 2.



▪ ¿Qué modelo matemático o expresión algebraica formularía usted para calcular C en función de n, o lo que es lo mismo, la medida del ángulo interno de un polígono regular? Justifique su respuesta.

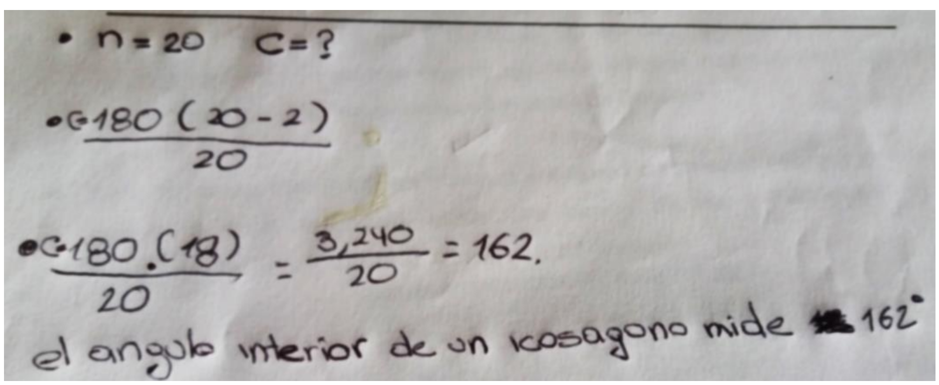
$C = \frac{180(n-2)}{n}$ porque 180 (n-2) es A que es igual a la suma de todos los angulos de los triángulos formados. Pero A también es igual a la suma de los ángulos internos que hay en cada vértice.

Fuente: Protocolo actividad de orientación.

Como se puede observar, el estudiante toma como referente las tablas para identificar regularidades y modelar a través de una fórmula el modo para determinar la medida del ángulo interno de cualquier polígono regular. No menos importante es la argumentación que soporta dicho modelo.

En la Figura 4-29, que se expone a continuación, se evidencia la demostración de la regularidad anterior que realizan los estudiantes como parte del proceso de modelación.

Figura 4-29: Demostración de regularidad.



• $n = 20 \quad C = ?$

• $C = \frac{180(20-2)}{20}$

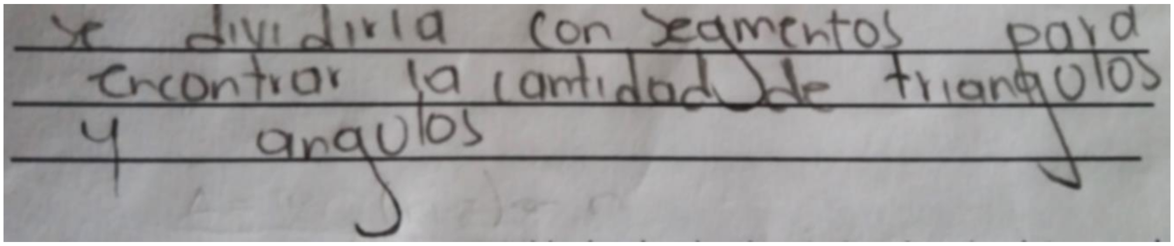
• $C = \frac{180 . (18)}{20} = \frac{3{,}240}{20} = 162.$

el angulo interior de un icosagono mide 162°

Fuente: Protocolo actividad de orientación.

En la figura 4-30 que se expone enseguida, se comprueba lo delicado de algunos eventos en donde el estudiante no muestra siquiera un mínimo de conocimiento y destreza con respecto al planteamiento y formulación de conjeturas que conlleven a la modelación de determinada situación problema. La respuesta corresponde a la entregada por un estudiante de grado octavo al solicitársele que formule un modelo matemático para calcular la medida del ángulo interno de un polígono regular, luego de planteársele varios esquemas que se supone le ayudarían al análisis e interpretación de las regularidades del caso.

Figura 4-30: Respuesta de estudiante de grado octavo a la pregunta 15.


se dividiria con segmentos para
encontrar la cantidad de triangulos
y angulos

Fuente: Actividad práctica de orientación.

4.3. Experiencias en la actividad de profundización

En el taller de profundización se buscó que los estudiantes mostraran un alto grado de autonomía, tratando de resolver las diferentes situaciones problemas que se les planteó, y en ningún caso con asesoría del docente, a menos que fuese estrictamente necesario.

En el trabajo práctico se desarrollaron dos actividades: la construcción de los rectángulos de Fibonacci y la elaboración de una serie cuadrados inscritos con medición de áreas. Estos trabajos permitirían que los estudiantes identificasen ciertas regularidades durante su diseño en GeoGebra, llevándolos a estructurar una sucesión y una progresión, respectivamente. Sin embargo, previo a estos ejercicios, se realizó una lectura individual y una exposición sobre sucesiones y progresiones con el propósito de nivelar al grupo, ya que éste está conformado en un 50% por estudiantes de grado octavo, quienes desconocían a fondo dichos conceptos. Para finalizar esta primera etapa y dar paso al trabajo práctico, se socializaron y aclararon algunas inquietudes con todo el equipo experimental.

4.3.1 Análisis proceso de razonamiento

Si bien la gran mayoría de estudiantes evidenciaron un buen análisis e identificaron el patrón de comportamiento de los cuadrados, ubicando el sexto cuadrado en la posición correspondiente, algunos otros educandos no fueron capaces de determinar la regularidad que se presenta en esta situación. Obsérvese en la siguiente imagen (Figura 4-31) como el estudiante demuestra falencias en el proceso de razonamiento, colocando el polígono mencionado en una posición distinta a la que demanda la lógica matemática en este caso. Podría pensarse inclusive que presenta dificultades de orientación.

Figura 4-31: Falencias de razonamiento en taller 3.

- *¿En qué sentido ubicaría el siguiente cuadrado, atendiendo la regularidad que muestra el diseño?* Arriba ____ Abajo ____ A la izquierda __X__ A la derecha ____

Fuente: Actividad práctica de profundización.

La siguiente respuesta de un estudiante de grado octavo ratifica la interpretación y el correcto razonamiento del caso, al escribir la atinada regularidad que se le solicitó, previo análisis de las tablas que completó para deducir esta conjetura (Figura 4-32).

Figura 4-32: Respuesta pregunta 10 del taller 3.

Que Hay que sumar los dos valores anteriores para ayar el siguiente.

Fuente: Actividad práctica de profundización.

Es importante resaltar, como lo muestra la Figura 4-33, que los estudiantes logran justificar sus estrategias en cuanto buscan la manera de comprender y abordar el problema planteado. En ese sentido, usan argumentos propios para exponer sus ideas, poniendo en acción su pensamiento variacional y su capacidad de raciocinio lógico.

Figura 4-33: Razonamiento y modelación en la actividad 1 del taller 3.

- **Teniendo en cuenta que n representa el número de cuadrados construidos, ¿Qué estructura matemática formal propondría como término general, si se trata de una sucesión, para garantizar que el modelo se pueda validar hasta indefinidas repeticiones? Justifique su respuesta**

Si n=1 entonces diferencia = 1
Si n=2 " " = 1
Si n>2 " se suman las 2 diferencias anteriores

Fuente: Protocolo actividad de profundización.

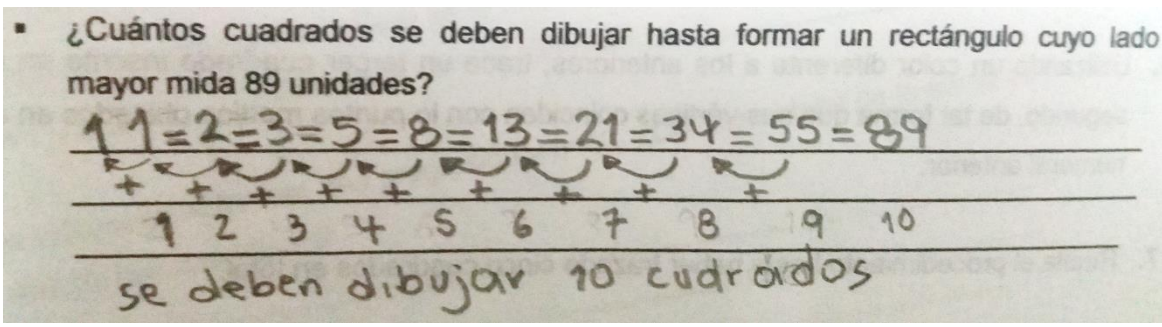
En este caso el estudiante muestra recursividad dado que al parecer hizo uso del documento leído previamente sobre sucesiones y progresiones, escribiendo un argumento no muy formal desde las matemáticas, pero lo suficientemente comprensible.

4.3.2 Análisis proceso de comunicación

Se observa en estos talleres de profundización a los estudiantes con mejor disposición e iniciativa para abordar las situaciones problema, expresando sus ideas en forma oral y escrita con mayor facilidad y tratando de argumentar siendo más convincentes.

En la siguiente imagen (Figura 4-34) el educando propone un esquema poco ortodoxo e informal que representa el proceso de cambio o variabilidad, termino a término de la sucesión, hasta identificar cuántos cuadrados se deben dibujar para lograr formar un rectángulo cuyo lado mayor sea igual a 89 unidades. Una manera particular de expresar su idea y hacerse entender.

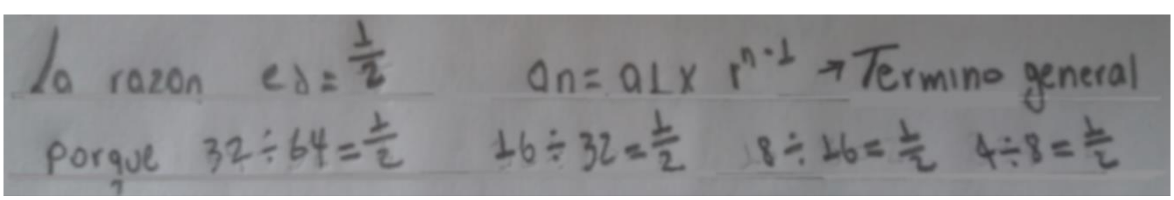
Figura 4-34: Respuesta a situación de cambio en taller 3.



Fuente: Protocolo actividad de profundización.

Para la pregunta 9 de este taller, un estudiante de grado noveno expone con suficiencia los argumentos necesarios para dar cuenta de por qué se trata de una razón y no de una diferencia, es decir, identifica el tipo de progresión tratado aquí (Figura 4-35). Thomas A. Romberg (1991) en su artículo "Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas" afirma que "la comunicación en forma de argumento lógico es fundamental para el discurso matemático" (Citado en MEN, 1998, p. 74).

Figura 4-35: Comunicación lógico-argumentativa.



Fuente: Protocolo actividad de profundización.

Para optimizar la comprensión de variabilidad y estimular la representación de ideas, a partir de la identificación de relaciones entre las variables que se presentan en ambas actividades (sucesión de Fibonacci y progresión área de cuadrados), se propone a los estudiantes completar unas tablas que recopilan información parcial de dichas variables (Figura 4-36).

Figura 4-36: Esquematización representativa de la idea de un estudiante.

Lado mayor del rectángulo	2	3	5	8	13	21	34	55
Lado menor del rectángulo	1	2	3	5	8	13	21	34
Diferencia	1	1	2	3	5	8	13	21

Cuadrados construidos (n)	1	2	3	4	5	6	7	8
Diferencia	1	1	2	3	5	8	13	21

Orden de construcción (n)	1	2	3	4	5
Área del cuadrado (A)	64	32	16	8	4

Fuente: Protocolo actividad de profundización.

Otra estrategia de comunicación en esta actividad de profundización que permitió el intercambio de conceptos a través del debate fue la lectura previa sobre sucesiones y progresiones (Figura 4-37). Este espacio enriqueció los procesos generales del pensamiento variacional en estudiantes de ambos grados, ya que se generaron reflexiones, análisis y conjeturas en torno a lo expuesto.

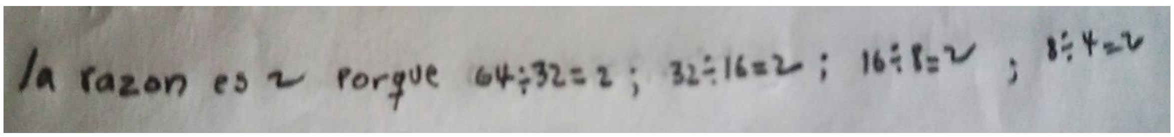
Figura 4-37: Actividad de lectura dentro del proceso comunicativo.

Fuente: Protocolo actividad de profundización.

4.3.3 Análisis proceso de modelación

En general, se evidenció dificultad para construir los modelos matemáticos que se requirieron en las actividades de este taller de profundización. Es así que varios estudiantes se confundieron al determinar la razón de la progresión geométrica en el numeral nueve. A continuación se expone una imagen (Figura 4-38) donde se muestra el error de concepto por parte de un alumno de grado octavo al dividir a_{n-1} entre a_n para determinar la razón, cuando es al contrario.

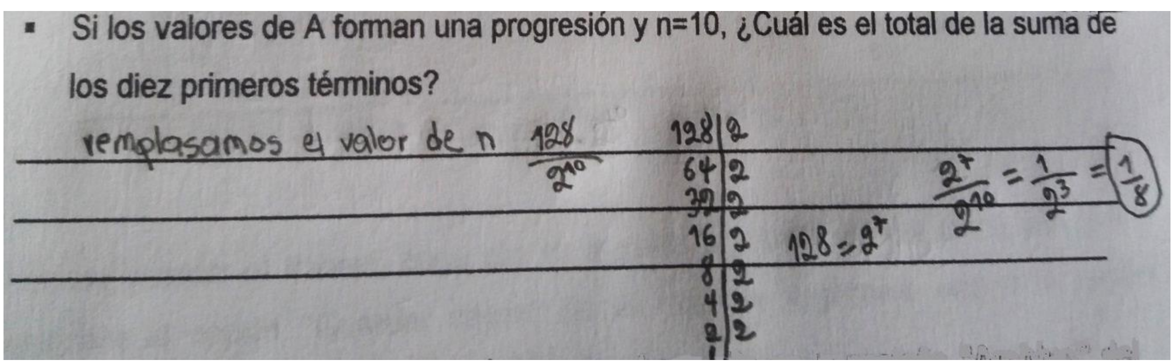
Figura 4-38: Confusiones de concepto para modelar en el taller 3.



Fuente: Protocolo actividad de profundización.

Sin embargo, ciertos estudiantes del grado noveno mostraron suficiencia para argumentar y validar el modelo propuesto, hasta el punto de echar mano de otros conceptos numéricos pertinentes que les permitió defender con propiedad su hipótesis. En la Figura 4-39 se evidencia lo anterior.

Figura 4-39: Demostración hipótesis taller 3.

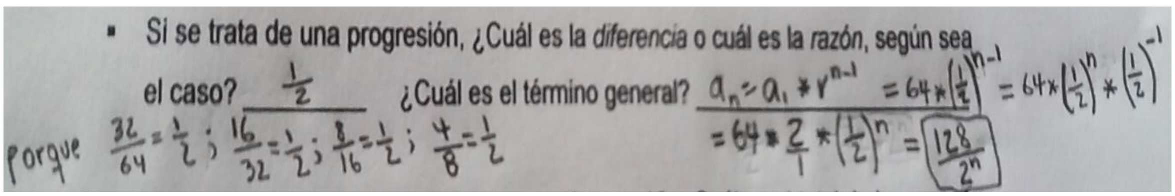


Fuente: Protocolo actividad de profundización.

Se puede observar además en la figura, que al igual que en la actividad de orientación, el estudiante comprende estructuras matemáticas como las secuencias numéricas; sin embargo, esta vez avanza un poco más pues descubre por medio de la descomposición en factores primos de cada número corresponde a potencias de base dos y que el exponente es la variable (2^n). Con esto el alumno está logrando un cambio de representación semiótica; es decir, logra pasar de la representación numérica a la algebraica.

Como reflexión, no deja de ser motivante como docente, el nivel de desarrollo del pensamiento variacional que enseña un grupo de estudiantes con los cuales se ha venido trabajando GeoGebra desde hace ya unos dos años. Su habilidad y destreza para descubrir regularidades y relaciones entre las variables inmersas en una situación problema como las que acá se plantean, quedan de manifiesto en una de las respuestas que alguno de ellos dio al numeral nueve de este taller. Obsérvese la figura 4-40.

Figura 4-40: Término general de una progresión geométrica.



- Sí se trata de una progresión, ¿Cuál es la *diferencia* o cuál es la *razón*, según sea el caso? $\frac{1}{2}$ ¿Cuál es el término general? $a_n = a_1 * r^{n-1} = 64*\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 64*\left(\frac{1}{2}\right)^n * \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ $= 64 * \frac{2}{1} * \left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\frac{128}{2^n}}$

porque $\frac{32}{64} = \frac{1}{2}$; $\frac{16}{32} = \frac{1}{2}$; $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$; $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Fuente: Protocolo actividad de profundización.

Efectivamente, el estudiante ejecuta el proceso adecuado para determinar la razón y para establecer el término general de la progresión geométrica que se plantea. Se observan las cualidades que posee para manejar con eficiencia las propiedades de la potenciación, la competencia para manipular cantidades racionales, la capacidad para realizar procedimientos matemáticos pertinentes, entre otras.

Finalmente, como hechos significativos de avance o dificultad identificados durante el proceso, se resaltan:

- Limitaciones en la conceptualización de algunos presaberes
- Debilidades en el manejo del lenguaje algebraico
- Incapacidad para esquematizar y matematizar
- Inconvenientes para argumentar estrategias y procedimientos
- Dificultad para comunicar sus ideas de manera clara
- Insolvencia para plantear conjeturas y formular hipótesis
- Apatía general por estudiar en algunos casos
- Interés y motivación de los estudiantes por la nueva metodología de enseñanza
- Habilidades en el manejo de las Tics

- Apoyo y compromiso de toda la comunidad educativa
- Optimización del tiempo de enseñanza
- Mejor comprensión de los contenidos por la versatilidad de GeoGebra
- Potenciación en el uso del lenguaje semiótico para interpretar y representar
- Aprendizaje social-cognitivo producto del trabajo colaborativo
- Reconocimiento de líderes y monitores en beneficio de la inclusión
- Incremento del porcentaje de participación en el aula
- Empoderamiento para el autoaprendizaje y la autogestión
- Iniciativa hacia una cultura investigativa
- Buen uso del tiempo libre por parte de los estudiantes
- Desarrollo del pensamiento variacional en base al fortalecimiento de los procesos generales de razonamiento, comunicación y modelación.

“La mente es igual que un paracaídas,
sólo funciona si se abre.”

Albert Einstein.

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

En este último capítulo se presentan, a modo de reflexión, las conclusiones y recomendaciones que se pudieron extraer del análisis de datos realizado para proporcionar informe de los objetivos de investigación expuestos y dar respuesta a la conjetura que orienta este mismo estudio. Se espera desde ya que con base en lo anterior, este trabajo sirva como referente para futuras investigaciones y como activador de reflexiones dentro de un cuerpo de profesionales como los docentes, quienes tenemos la responsabilidad ineludible de formar las generaciones del futuro sin deslindar los retos prospectivos que este implica.

5.1 Conclusiones

Como se expresó en el capítulo tres, este trabajo se enmarca dentro del paradigma de investigación cualitativo-descriptivo con aproximación al enfoque problémico. Debido a este carácter, la investigación ha sido guiada por unos objetivos específicos y general que han sido revisados y redefinidos progresivamente.

A continuación, se recuerdan dichos objetivos para dar razón de las conclusiones a las que se han llegado en el presente estudio. Los objetivos específicos son:

- Proponer un trabajo de aula donde el estudiante mediante el abordaje y solución de problemas de variación, ponga de manifiesto el desarrollo de ciertos procesos asociados al pensamiento variacional, usando GeoGebra.

- Analizar los avances o progresos de los estudiantes en cuanto a los procesos de reconocimiento de la variable, uso de los sistemas de representación, modelación y generalización; a medida que avanzan en el trabajo de aula propuesto.

Con respecto al primero, se puede confirmar en primera instancia que es posible diseñar, ejecutar y evaluar una secuencia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, basada en el uso de las Tics. De igual forma, que el uso de GeoGebra generó avances en el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes, producto del fortalecimiento de procesos generales asociados a la variación como el razonamiento, la comunicación y la modelación.

El software de aprendizaje transformó las actitudes previas y las competencias adquiridas debido a que generó constantemente altas expectativas en los educandos a partir de la posibilidad de interacción dinámica entre ellos para la producción conjunta de conocimiento. GeoGebra es un aplicativo de relativa facilidad para manipular, cuyas herramientas y atributos proporcionan ventajas respecto a métodos tradicionales de papel y lápiz. Normalmente, los resultados en el abordaje de situaciones problema contextualizados, aun trabajándolos en equipo, no son los mejores; sin embargo, se observó que las actividades realizadas con intermediación del software mencionado, fomentaron el diálogo y la labor con sinergia para la solución de dichos problemas. Lavy y Leron (2004) y Sordo (2005) afirman que "el entorno tecnológico potencia el aprendizaje colaborativo de los estudiantes" (Citados en García López, 2011, p. 508).

Otro aspecto a resaltar corresponde a la autogestión y autoaprendizaje que generó el empoderamiento en el desarrollo de talleres. A pesar de las limitantes en el manejo de conceptos y lenguaje simbólico, los estudiantes se apropiaron de cuanto recurso disponían para dar solución a las diferentes situaciones problémicas planteadas.

El nuevo ambiente de enseñanza-aprendizaje también propició condiciones de indagación y reflexión permanente tanto en estudiantes como en otros docentes del área, hasta el punto de llevar a cabo una socialización del trabajo realizado. Con base en lo anterior, se generó un preacuerdo para crear los espacios necesarios con el fin de implementar un nuevo proyecto en el colegio, en torno a esta estrategia de enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, hay conciencia que se hace necesario un curso propedéutico para abordar las etapas de mayor complejidad, más adelante.

En relación al segundo objetivo específico, si bien los estudiantes en general presentan serias limitaciones en la formulación, planteamiento y resolución de situaciones problema contextualizadas, se evidenció un ligero avance en los procesos de esquematización y generalización, mostrando un desempeño homogéneo. Gracias a la versatilidad del programa GeoGebra, los estudiantes mostraron una mayor comprensión de los contenidos tratados, a partir de la identificación de relaciones y propiedades, de la aplicación de distintos tipos de representación semiótica y del razonamiento inductivo, a medida que se avanzó en los talleres. Sin embargo, es de anotar que en la medida en que las tareas adquirieron mayor complejidad, los alumnos fueron perdiendo motivación por la herramienta tecnológica.

Trabajar con un enfoque problémico resultó beneficioso porque los discentes asumieron una actitud más analítica y un desempeño más estructurado en el abordaje de las situaciones. Recurrieron a la observación y experimentación para tratar el problema desde distintas aristas y así realizar conjeturas que los llevaron a demostrar sus hipótesis en cada actividad.

Igualmente, los educandos alcanzaron niveles aceptables para identificar fenómenos de cambio y variación a través de la integración de varios conceptos como número, variable, constante, entre otros. Lograron realizar conclusiones, gracias al manejo de la información de manera gráfica, tabular, oral, etc. Además, fueron propositivos en cuanto a la creación de nuevos modelos diferentes a los inicialmente estructurados, conllevando a la generalización y a la comprensión de realidades.

Hubo una transformación positiva de las actitudes relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas, desmitificándose el paradigma que se ha manejado por largo tiempo en cuanto a la complejidad que demanda el pensamiento matemático. Se generó autoconfianza para practicar procesos de comunicación efectivos con otros compañeros, pero es claro que dicha actitud fue ocasionada más por el uso del software que por el manejo propio de constructos en el área. Estos resultados se alinean con los hallados por Cretchley y Galbraith (2002) y Gómez-Chacón (2010) quienes determinaron que “en el aprendizaje de las matemáticas con ordenadores existe una correlación más fuerte con las actitudes de estos que con las actitudes hacia las matemáticas” (Citados en García López, 2011, p. 510).

No obstante los avances, se mantuvo la tendencia en algunos estudiantes por procurar la ayuda constante del docente para establecer resultados en las actividades, pues sus limitaciones en el manejo de conceptos y procedimientos siguen siendo significativas. Estos escolares muestran dificultades para interpretar, analizar, seguir instrucciones y socializar; amén de la apatía por continuar estudiando debido a múltiples causas manifestadas con antelación.

Finalmente, aludiendo al objetivo general de este estudio que busca “*Contribuir en el fortalecimiento de procesos asociados al pensamiento variacional y los sistemas algebraicos en estudiantes de secundaria, a partir del planteamiento y solución de problemas de variación, usando GeoGebra como instrumento de mediación cognitiva*”, se podría afirmar con base en las conclusiones hasta aquí expuestas que el propósito trazado para dicho estudio se ha alcanzado.

En primer término, las actividades diseñadas como instrumento de medición han cubierto las necesidades de la investigación y resultaron útiles para el fin que fueron creadas. El uso de GeoGebra como instrumento de mediación ha sido altamente positivo, ya que no sólo posibilitó el aprendizaje por exploración orientada sino también el fortalecimiento de los procesos generales asociados al pensamiento variacional, en contextos colaborativos. Según Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez (2006), “el pensamiento variacional, se construye socialmente a partir de las vivencias y experiencias de los individuos y grupos sociales” (Citado en Cantoral, 2013, p. 46).

Por otro lado, la metodología utilizada posibilitó que el estudiante, bajo el enfoque problémico, avanzara en procesos de esquematización y generalización, además de optimizar el uso del leguaje semiótico y los sistemas de representación. El uso de las Tics generó autonomía responsable y un ambiente más agradable de aprendizaje para co-crear conocimiento.

En este sentido, se propone implementar de manera permanente esta estrategia didáctica para enseñar matemáticas en la Institución Educativa “Gerardo Arias Ramírez” de Villamaría (Caldas), escenario de donde fue tomada la muestra para el presente estudio, y promover la conformación de una comunidad educativa local para continuar trabajando con GeoGebra, liderada por profesionales de la educación matemática y estudiantes sobresalientes de secundaria, con el fin de seguir desarrollando investigación académica que redunde en el mejoramiento y la calidad educativa de la región.

5.2 Recomendaciones

La experiencia desarrollada con los estudiantes en este contexto metodológico, exhorta a tener en cuenta algunas recomendaciones para futuras investigaciones similares a ésta o en el supuesto de continuar con ella. Dichas recomendaciones son:

- Efectuar un diagnóstico previo del nivel de competencias de los estudiantes, tanto en el área de matemáticas como en el de manejo de tecnología
- Apersonarse del proyecto en todo momento, con la posibilidad de delegar algunas funciones que no generen trauma
- Llevar a cabo las actividades de aprendizaje de manera tradicional (papel y lápiz) y de manera digital (con GeoGebra), simultáneamente
- Hacer claridad que la tecnología no remplaza los procesos de pensamiento, simplemente coadyuva a fortalecerlos
- Involucrar y comprometer a directivos, padres y docentes para apoyar y garantizar la eficaz ejecución del proyecto
- Promover otras investigaciones sobre del desarrollo de pensamiento Geométrico, Aleatorio o Numérico, inclusive en otros niveles como primaria
- Conformar la Red Local de Maestros para la Enseñanza de la Matemática con herramientas Tics o con uso de GeoGebra

Bibliografía

[1] Ausubel, D. (1963). *The Psychology of Meaningful Verbal Learning*. First edition. New York: Grune & Stratton.

[2] Ausubel, D. P. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View*. First edition. New York: Holt, Rinehart & KWinston.

[3] Bolívar, M. R. (2009, julio). ¿Cómo fomentar el aprendizaje significativo en el aula? *Temas para la educación.* Recuperado de https://www.feandalucia.ccoo.es/andalucia/docu/p5sd5097.pdf

[4] Cantoral, R., y Farfán, R.M. (2003). Matemática educativa: una visión de su evolución. *Educación y Pedagogía, 15*(35), p. 203-214.

[5] Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, (número especial), p. 83-102.

[6] Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. Primera edición. México: Secretaría de Educación Pública.

[7] Castaño, L. F., García, J. C., Carvajal, M. L., Medina, C., Ruiz, J., y Trejos, E. (2008). *Las situaciones de variación y cambio como herramienta para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático desde los primeros grados de escolaridad* (tesis de pregrado). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

[8] CEPAL. (2010). *Impacto de las TIC en los aprendizajes de los estudiantes*. Recuperado de https://repositorio.cepal.org/bitstream/handle/11362/3781/1/lcw339.pdf

[9] Díaz Barriga, F. (2003). Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 5*(2). Recuperado de http://redie.ens.uabc.mx/vol5no2/contenido-arceo.html

[10] Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Segunda edición. (Myriam Vega Restrepo, trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle, Programa Editorial. (Obra original publicada en 1995).

[11] Fandos, M. (2003). Formación basada en las Tecnologías de la Información y Comunicación: Análisis didáctico del proceso de enseñanza-aprendizaje (tesis doctoral). Universitat Rovira I Virgili, Tarragona, España.

[12] Freire, P. (2004). *Pedagogia da autonomia*. Sao Pulo, Brasil: Paz e Terra SA.

[13] García, M. (2011). *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir geogebra en el aula* (tesis doctoral). Universidad de Almería, España.

[14] Godino, J. D., y Font, Vicenç. (2004). Didáctica del razonamiento algebraico para maestros. En J. D. Godino (Ed.), *Didáctica de las matemáticas para maestros* (p. 441-456). Granada, España: Gami.

[15] Godino, J. D., y Font, Vicenç. (2004). Razonamiento algebraico para maestros. En J. D. Godino (Ed.), *Matemáticas para maestros* (p. 379-421). Granada, España: Gami.

[16] Gómez, O. (2015). *Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno* (tesis de maestría). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

[17] Gutiérrez, N. (2009). *Una secuencia didáctica para generar los conceptos de sucesión y serie en el nivel medio superior* (tesis de especialización). Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México.

[18] Guzmán, W. (2012). *Estrategias didácticas para potenciar el pensamiento variacional a través de situaciones problema, de los estudiantes del grado noveno de la institución educativa "San José del municipio de Betulia*" (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

[19] Ley Nº 115. (1994). Expedición Ley General de Educación. *Diario Oficial de la República Nº. 41.214 del 8 de febrero de 1994*. Bogotá, Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

[20] Martínez, X., y Camarena, P. (2015). *La educación matemática en el siglo XXI*. Primera edición. México D. F., México: Instituto Politécnico Nacional.

[21] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

[22] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (Abril de 2004). *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales*. Proyecto del MEN, Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Bogotá, Colombia: Enlace editores.

[23] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

[24] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje de Lenguaje y Matemáticas.* Primera versión. Recuperado de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf

[25] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas.* Segunda versión. Recuperado de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf

[26] Moreno, L., y Waldegg, G. (Diciembre de 2001). Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. En Memorias del I Seminario Nacional de formación de docentes sobre *Uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas*. Proyecto del MEN, Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. (p. 40-66). Bogotá, Colombia: Enlace editores.

[27] Motta, J. (2017). *La proporcionalidad en la solución de problemas de medición, variación y aleatoriedad* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia.

[28] Múnera, J. J. (2011). Una estrategia didáctica para las matemáticas escolares desde el enfoque de situaciones problema. *Educación y Pedagogía, 23*(59), 179-193.

[29] Muñoz, H. (2013). *Modelos conceptuales de profesores de educación básica sobre las matemáticas y su enseñanza* (tesis de maestría). Universidad Autónoma, Manizales, Colombia.

[30] Ospina, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal* (tesis de maestría). Universidad Autónoma de Manizales, Colombia.

[31] Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Primera edición. (Julián Zugazagoitia, trad.). México D. F., México: Trillas. (Obra original publicada en 1945). Recuperado de https://cienciaymatematicas.files.wordpress.com/2012/09/como-resolver.pdf

[32] Rico, L. (1998). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En I Simposio Internacional de Educación Matemática sobre *Educación matemática: Errores y dificultades de los estudiantes, resolución de problemas, evaluación e historia*. (p. 69-108). Bogotá, Colombia: Una empresa docente-Universidad de los Andes.

[33] Roque, J. (2009). *Influencia de la enseñanza de la matemática basada en la resolución de problemas en el mejoramiento del rendimiento académico* (tesis de maestría). Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

[34] Tamayo, J. (2016). *Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra* (tesis de especialización). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

[35] UNESCO. (2006). *Las tecnologías de la información y la comunicación en la enseñanza. Cómo crear nuevos entornos de aprendizaje abierto por medio de las TIC*. (Fernanda Trías y Elizabeth Ardans, trad.). Montevideo, Uruguay: Trilce. (Obra original publicada en 2005)

[36] Universidad de Antioquia, y Gobernación de Antioquia. (2006). Módulo 2: Pensamiento variacional y razonamiento algebraico. *Serie didáctica de las matemáticas*. Diploma en Desarrollo de Competencias Básicas en Matemáticas en la Educación Básica y Media del Departamento de Antioquia. Medellín, Colombia. Recuperado de http://www.galileodidacticos.com/sites/default/files/M%C3%93DULO%202%20PENSAMIENTO%20VARIACIONAL.pdf

[37] Vasco, C. (Mayo de 2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En Memorias del *Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*. (p. 61-70). Bogotá, Colombia. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/10178/1/Vasco2002El.pdf

[38] Vasco, C. (2003). *El pensamiento variacional y la modelación matemática*. Universidades del Valle y de Manizales. Recuperado de http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf

[39] Velásquez, L. (2012). *Enseñanza de sucesiones numéricas para potenciar el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado cuarto de básica primaria* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

[40] Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y Lenguaje*. (María Margarita Rotger, trad.). Buenos Aires, Argentina: Ediciones Fausto. (Obra original publicada en 1934). Recuperado de http://www.iutep.tec.ve/uptp/images/Descargas/materialwr/libros/LevS.Vygotsky-PensamientoyLenguaje.pdf

ANEXOS

Anexo A: Actividad de familiarización

A continuación se exponen las tres actividades de aprendizaje que se aplicaron a los estudiantes, con el propósito de determinar su nivel de avance o dificultad en la solución de situaciones problemáticas, en desarrollo de los procesos generales para el pensamiento matemático, no sin antes realizarles una breve descripción de lo que es GeoGebra.

¿Qué es GeoGebra?

Es un software interactivo libre para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en todos sus niveles (colegio, universidad, etc.). Combina dinámicamente, geometría, álgebra, estadística, gráficos, cálculo y hoja de cálculo en un solo programa fácil de usar. GeoGebra está escrito en Java y por tanto está disponible en múltiples plataformas (Windows, Android, Linux, iOS y macOS). Al ser un software libre puede ser mejorado por profesionales y usuarios en todo el mundo. Su creador Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001, como parte de su tesis de maestría.

La versión 5 del programa ofrece seis vistas: vista gráfica 2D, en la que se pueden realizar construcciones geométricas utilizando puntos, rectas, segmentos, polígonos, y operaciones entre objetos como traslaciones, rotaciones, etc.; vista algebraica, donde se enseñan las expresiones algebraicas de los objetos representados; vista gráfica 3D, en la que se representan cuerpo geométricos; vista hoja de cálculo, planilla con filas y columnas para el tratamiento de datos numéricos; vista CAS, permite realizar cálculos en forma simbólica (derivadas, integrales, etc.); y vista de probabilidades y estadística, que contiene representaciones de diversas funciones de distribución de probabilidad y calcula la probabilidad de éstas.

La actividad de familiarización con GeoGebra consistió en lo siguiente:

INSTITUCIÓN EDUCATIVA GERARDO ARIAS RAMÍREZ

Actividad Práctica de Aprendizaje No. 01

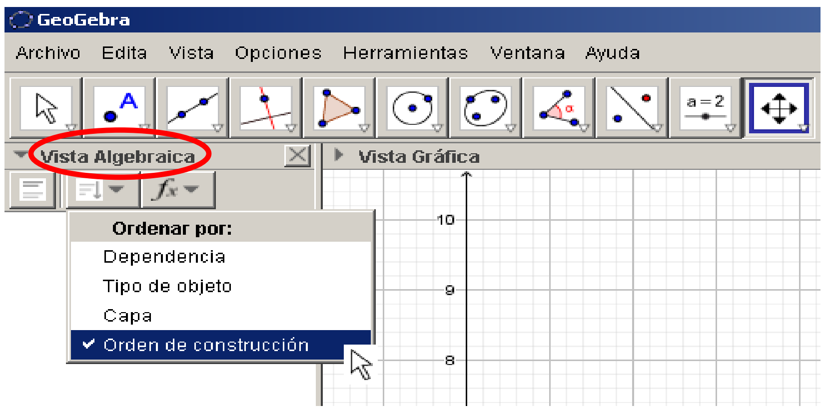
Familiarización con GeoGebra

Objetivo: Capacitar al estudiante en el manejo de funciones básicas de GeoGebra, como herramienta potenciadora del desarrollo del pensamiento variacional.

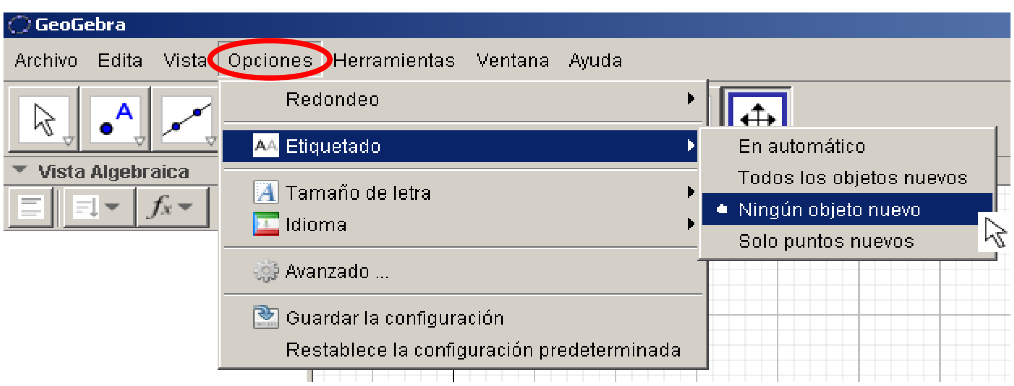
Nombre del estudiante: ___________________________________ Grado: _______

Actividad:

1. Abra el programa GeoGebra y seleccione la opción "Orden de construcción" (segundo botón) en la **"Vista Algebraica"**, como se muestra en la imagen

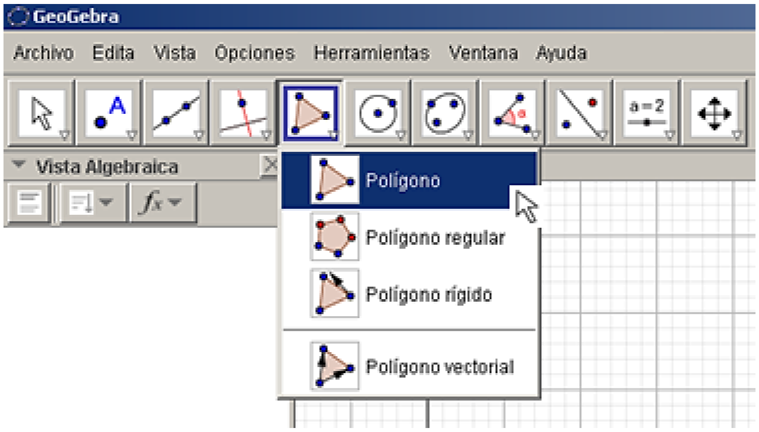


2. Elija la alternativa "Ningún objeto nuevo" de la opción "Etiquetado" en la pestaña **"Opciones"**, como se observa en la ilustración

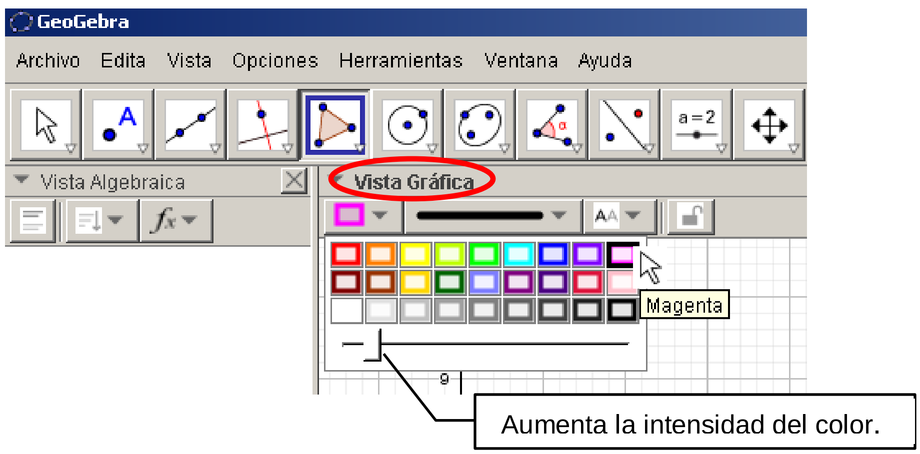


Estos dos pasos anteriores se sugiere hacerlo siempre al iniciar una actividad en GeoGebra. Igualmente, algunos prefieren trabajar sin los ejes y las cuadrículas.

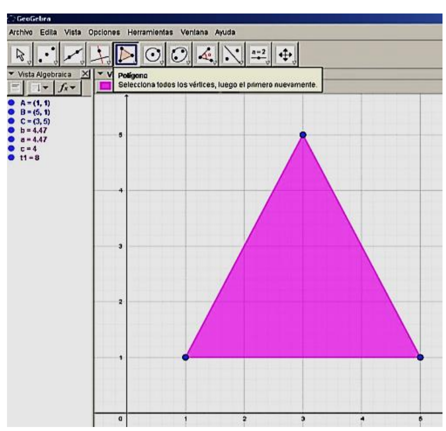
3. Seleccione la herramienta "Polígono" como se señala a continuación



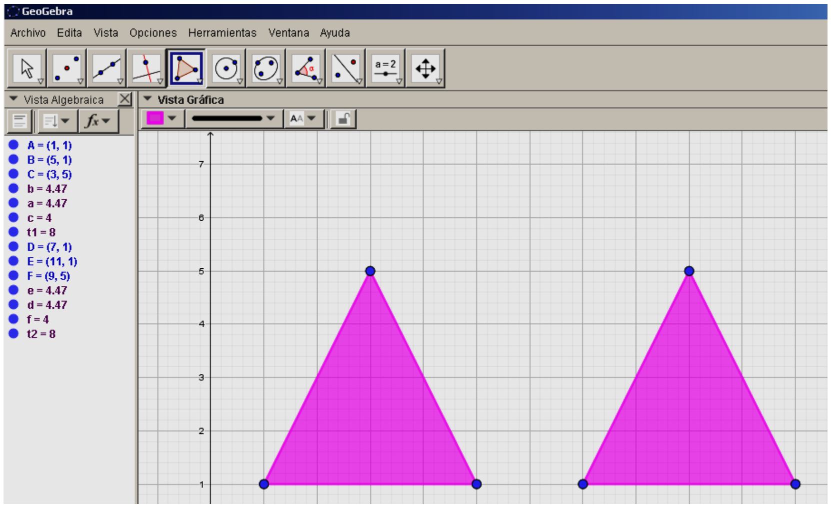
4. Escoja el color del polígono en la **"Vista Gráfica"**. Observe la imagen



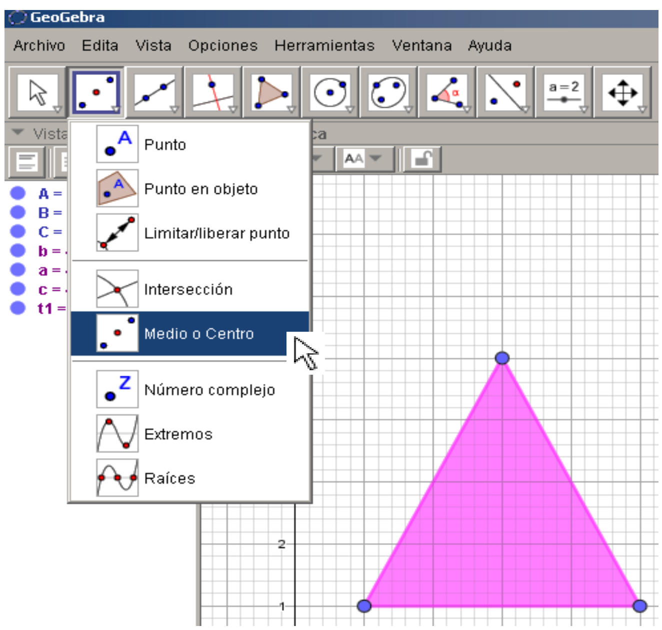
5. Trace un triángulo isósceles, por ejemplo, de la siguiente manera: haga un clic en la coordenada (1,1); luego otro en la coordenada (5,1); otro en la coordenada (3,5) y uno último en la primera coordenada (1,1) para cerrar el polígono. Observe



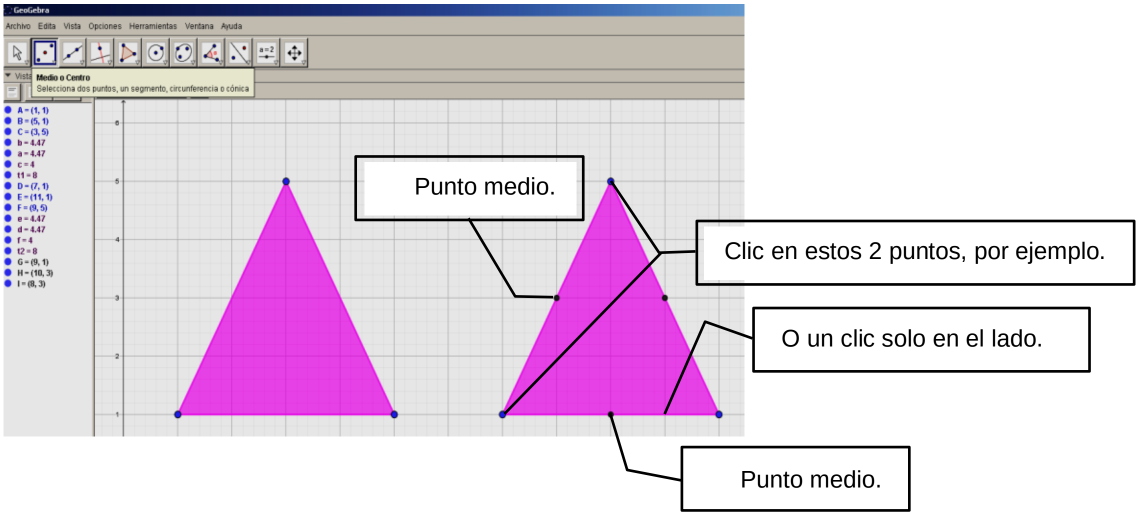
6. Usando otra vez la herramienta "Polígono", trace un segundo triángulo congruente con el anterior en unas nuevas coordenadas. Por ejemplo, (7,1); (11,1) y (9,5). Observe como quedaría la nueva ilustración



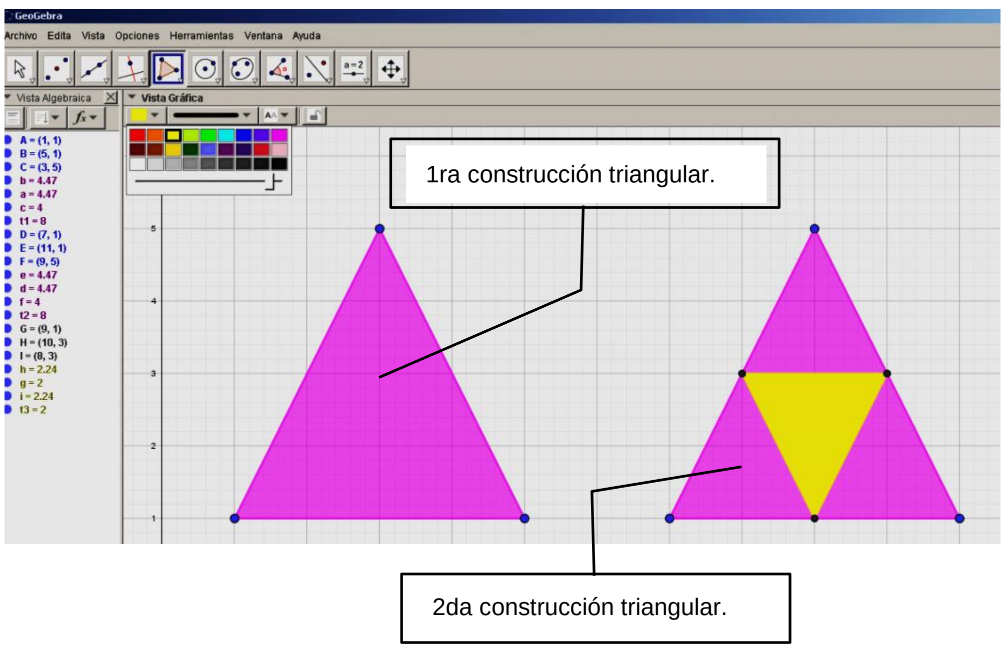
7. Ubique el punto medio para cada lado del segundo triángulo, seleccionando la herramienta **"Medio o Centro"** como se ilustra en la siguiente imagen



Para ubicar dicho punto, basta con hacer clic en los dos puntos extremos de cada lado del segundo triángulo o clic en el lado mismo. Observe el resultado

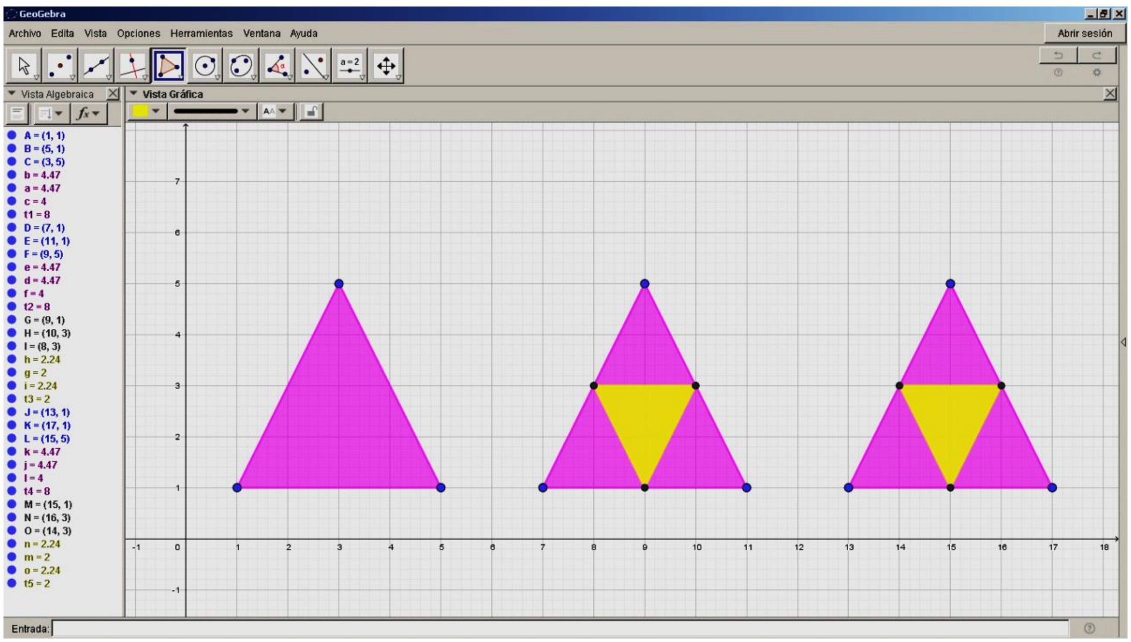


8. Trace un tercer triángulo inscrito (es decir, por dentro) del segundo triángulo, uniendo los puntos medios ubicados en el punto anterior, de tal manera que estos sean los vértices del nuevo triángulo. Use otro color para este tercer triángulo (ver paso 4). Observe

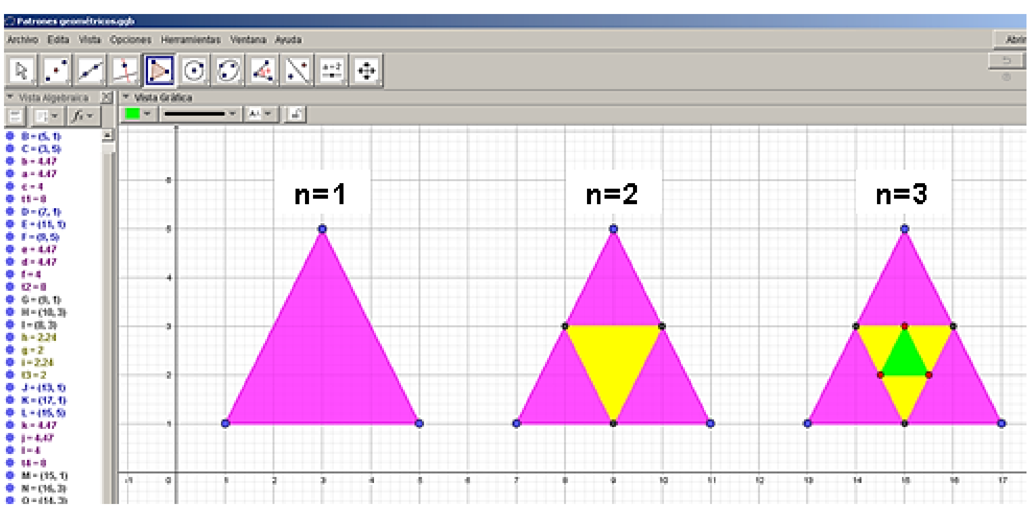


De acuerdo a las coordenadas propuestas para el segundo triángulo (ver paso 6), las coordenadas del tercer triángulo (inscrito) serían (9,1); (10,3) y (8,3). Observe que en la segunda construcción triangular hay cuatro triángulos del mismo tamaño (3 oscuros o violetas y 1 claro o amarillo).

9. Repita el paso 6 para trazar un cuarto triángulo congruente con los dos primeros. Sus coordenadas podrían ser (13,1); (17,1) y (15,5). A continuación establezca los puntos medios de los lados de dicho triángulo como en el paso 7 y finalmente repita el paso 8 para inscribir un quinto triángulo a partir de los puntos medios determinados. Las coordenadas de este último triángulo inscrito serían (15,1); (16,3) y (14,3). Tenga en cuenta además mantener los mismos colores. Observe



10. Ubique los puntos medios en cada lado del último triángulo inscrito y a continuación trace el triángulo que dichos puntos forman, con un color diferente a los usados hasta aquí. La imagen debe quedar de la siguiente manera, donde **n** representa la posición ordenada que ocupa cada construcción triangular.



11. En base a la ilustración anterior y sea **k** la variable que representa el número de triángulos que se forman en cada construcción triangular, sin contar el triángulo externo (el más grande que encierra al resto); complete la siguiente tabla escribiendo los valores que faltan de **n** y de **k**. Por ejemplo, en la segunda construcción triangular **n = 2** y **k = 4**.

Posición (**n**) →	1	2		4		6		
Número de triángulos (**k**) →	1	4	7				19	

¿Cuál es el valor de variación de **n**? ___________ ¿y de **k**? ___________

12. Multiplique cada valor de **n** por la variación de **k** y complete la siguiente tabla:

Posición (**n**) →	1	2		4		6		
Producto (**n.∆k**) →	3		9		15		21	

Si se desea igualar el valor de este producto (**n.∆k**) al valor de **k**, respectivamente, ¿Qué operación se debe realizar? ______________________ ¿Observa algún valor que se repita? Sí ☐ No ☐ ¿Cuál? ________

13. Con base en lo anterior, escriba una expresión algebraica que le permita hallar el valor de **k** cualquiera que sea el valor de **n**. Justifique su respuesta.

____

____

14. Utilizando la expresión que ha escrito, calcule el valor de la variable **k** cuando **n = 20**. Luego, proponga un modelo de sucesión similar al anterior.

____

____

15. ¿Le ha ayudado GeoGebra a comprender mejor lo aquí tratado? Sí ☐ No ☐ ¿Por qué? ____

____

Anexo B: Actividad de orientación

Una vez se aplicó la actividad de familiarización para acercar al estudiante a las funciones básicas de GeoGebra, se llevó a cabo la siguiente etapa de orientación con el acompañamiento necesario del docente. En este caso se requirió el uso y la explicación de algunas otras herramientas del programa, según la demanda. La actividad desarrollada fue la siguiente:

INSTITUCIÓN EDUCATIVA GERARDO ARIAS RAMÍREZ

Actividad Práctica de Aprendizaje No. 02

Orientación con GeoGebra

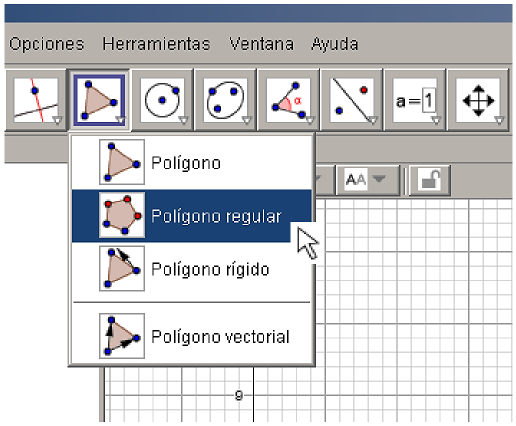
Objetivo: Generar en el estudiante la capacidad de interpretar, aplicar y/o construir un modelo matemático a partir de un patrón hallado, en la idea de comprender el concepto de sucesión; asesorado por el docente y coadyuvado con el programa GeoGebra.

Nombre del estudiante: ______________________________________ Grado: _______

Actividad:

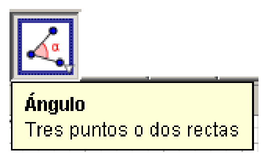
1. Abra el programa GeoGebra y recuerde habilitar las opciones **"Orden de construcción"** en la **"Vista Algebraica"** y **"Ningún objeto nuevo"** en **"Etiquetado"** de la ficha **"Opciones"**, antes de iniciar la actividad. Igualmente pregúntele al docente, durante el desarrollo de este ejercicio, cualquier inquietud que tenga sobre el manejo de algunas herramientas y funciones de GeoGebra.

2. Para trazar en GeoGebra un triángulo equilátero o cualquier otro polígono regular (lados de igual magnitud), existe otra opción distinta a **"Polígono"** llamada **"Polígono regular"**. Observe la imagen a continuación



Trace un triángulo equilátero mediano, haciendo dos clics independientes a una distancia de tres unidades entre ellos, por ejemplo, y escriba el número 3 en el cuadro de diálogo que aparece a continuación, para indicar el número de vértices y/o lados del polígono que se construye (triángulo equilátero, en este caso).

3. Ahora, halle la medida de cada uno de los ángulos internos del triángulo equilátero que se ha construido. Para ello utilice la herramienta **"Ángulo"**.



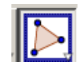
Tenga en cuenta que GeoGebra trabaja en sentido a las manecillas del reloj.  Esto para el orden en que selecciona los tres puntos o los dos segmentos de recta que requiere el procedimiento.

- ¿Cuál es el total de la suma de dichos ángulos? ___________

4. Para mover cualquier objeto dentro de la vista gráfica de GeoGebra existen varias formas, una de ellas es a través de la herramienta **"Elige y Mueve"**.

Elija esta opción. Ahora haga un clic sostenido sobre cualquiera de los dos puntos que determinó para la construcción del triángulo equilátero (paso 2), y luego muévalo hacia cualquier lado, dentro de la vista gráfica (no suelte el botón del mouse).

- ¿se modificaron las medidas de los ángulos? Sí _______ No _______

5. Ensaye el mismo procedimiento usado en los puntos 3 y 4, pero ahora con un triángulo **NO** equilátero. Para ello use la herramienta **"Polígono"**. 

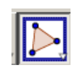
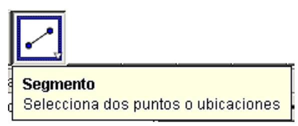
- ¿Se modificaron las medidas de los ángulos? Si ______ No ______.

- ¿Se modificó el total de la suma de los ángulos, después de haber realizado el movimiento de los vértices? Si ______ No ______.

- Con base en lo observado, ¿Qué conjetura infiere usted sobre la medida de los ángulos internos de un polígono (regular / irregular)?

  ____

  ____

6. Trace un rectángulo mediano usando la herramienta **"Polígono"**  y enseguida trace un segmento desde cualquiera de sus vértices hasta su opuesto (**diagonal**), utilizando la herramienta **"Segmento"**. 

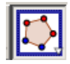
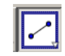
- ¿Cuántos triángulos se formaron? __________________________

7. Ahora, determine la medida **de todos y cada uno** de los ángulos interiores **de los triángulos que se han formado**, utilizando la misma herramienta del paso 3.

- ¿Cuál es el total de la suma de todos dichos ángulos? ____________________

- ¿Cambian las medidas de cada uno de los ángulos en los triángulos formados, luego de mover uno o varios vértices del rectángulo, usando el mismo procedimiento del punto 4? Sí _____ No _____

- ¿Cambia el total de la suma de dichos ángulos, con respecto al calculado al inicio de este mismo numeral, luego de este movimiento? Sí _____ No _____

8. Trace un pentágono regular (cinco lados iguales) de dos unidades de lado, utilizando la herramienta **“Polígono regular”**  y a continuación trace las diagonales que emergen **tan sólo de uno** de sus vértices, usando la herramienta **“Segmento”**. 

- ¿Cuántos triángulos se formaron? _________________________

9. Repita lo hecho en el numeral siete, determinando la medida **de todos y cada uno** de los ángulos interiores **de los triángulos que se han formado**, usando la misma herramienta del paso 3.

- ¿Cuál es el total de la suma de todos dichos ángulos? ____________________

- ¿Cambian las medidas de cada uno de los ángulos en los triángulos formados, luego de mover cualquiera de los dos puntos que usó para construir el pentágono regular, usando el procedimiento aprendido en el punto 4? Sí _____ No _____

- ¿Cambia el total de la suma de dichos ángulos, con respecto al calculado al inicio de este mismo numeral, luego de este movimiento? Sí _____ No _____

10. A continuación, construya un hexágono regular (seis lados iguales), atendiendo requerimientos, procedimientos e inquietudes, tales como los de los numerales 8 y 9.

- ¿Cuántos triángulos se formaron al trazar las diagonales? __________________

- ¿Cuál es el total de la suma de todos los ángulos internos medidos en los triángulos formados? ____________________

- Al mover cualquiera de los dos puntos base para la construcción del hexágono regular, ¿cambian las medidas de los ángulos internos de cada triángulo formado? Sí _____ No _____

- ¿Cambió el total de la suma de dichos ángulos, luego de este movimiento?
  Sí _____ No _____

11. Si n representa el número de lados del polígono construido, B representa el número de triángulos observados o formados en cada polígono (en algunos casos, por el trazado de diagonales que emergen de uno solo de sus vértices) y A representa la sumatoria de todas y cada una de las medidas de los ángulos internos de los triángulos que se formaron en cada polígono, complete la siguiente tabla usando los datos respectivos obtenidos en numerales anteriores e intente deducir la información de las dos últimas filas sin graficar la figura:

Nombre del polígono	n	B	A	A ÷ B
Triángulo		1		
	4			
Pentágono				180º
	6		720º	
Heptágono				180º
	8			

12. Teniendo en cuenta las regularidades observadas en la tabla anterior, responda:

- Comparando en cada caso los valores de n y B, ¿Qué estructura algebraica propondría para hallar B en función de n? Justifique su respuesta.

  ____

- Si se sabe que la suma de los ángulos internos de todo triángulo es ________ grados, (observe la última columna de la tabla), ¿Qué estructura algebraica sugeriría usted para hallar A en función de B? Justifique su respuesta.

  ____

- Teniendo en cuenta que B se puede calcular en función de n y que A se puede calcular en función de B (observe las dos situaciones precedentes), ¿Qué expresión algebraica plantearía para calcular A en función de n? ¿Por qué?

  ____

13. Revise cuánto suma el conjunto de ángulos internos que convergen en cada vértice del polígono regular. ¿Suman lo mismo en cada vértice? Si ___ No ___

14. Si C representa la medida del ángulo ubicado en cada vértice del polígono regular (ángulo interno), resultante de la sumatoria de todos los ángulos que allí confluyen, complete la siguiente tabla:

Nombre del polígono regular	n	C
Triángulo		
	4	
Pentágono		108º
	6	

15. Teniendo en cuenta la expresión planteada por usted para calcular A en función de n (numeral 12) y la tabla anterior (numeral 14), responda:

- ¿Qué modelo matemático o expresión algebraica formularía usted para calcular C en función de n, o lo que es lo mismo, la medida del ángulo interno de un polígono regular? Justifique su respuesta.

  ____

  ____

- Verifique su hipótesis, calculando la medida del ángulo interno de los siguientes polígonos regulares:

  Endecágono (n=11):

  ____

  ____

  Icoságono (n=20):

  ____

  ____

Anexo C: Actividad de profundización

Para la última etapa de la aplicación de instrumentos se desarrolló una actividad en parejas sin el acompañamiento del docente; sólo en casos excepcionales. Adicionalmente, y previo al inicio de dicha actividad, se orientaron algunos conceptos básicos de sucesión y progresión matemática, con el propósito de generar avances significativos en el estudiante en cuanto a la comprensión de conceptos fundamentales para el desarrollo del pensamiento variacional. La actividad en si tiene como objetivo apropiar al discente del proceso de modelación a partir de la generalización de regularidades. Finalmente, se utilizó una vez más el programa GeoGebra como herramienta didáctica de apoyo. La actividad desarrollada se presenta a continuación:

INSTITUCIÓN EDUCATIVA GERARDO ARIAS RAMÍREZ

Actividad Práctica de Aprendizaje No. 03

Profundización con GeoGebra

Objetivo: Apropiar al estudiante de los procesos generales implícitos en el desarrollo del pensamiento variacional que le permitan solucionar, de manera autónoma, situaciones problemáticas relacionadas con la sucesión y la progresión de objetos matemáticos, apoyándose en herramientas dinámicas de tecnología.

Nombre del estudiante: ____________________________________ Grado: _______

Las actividades a desarrollar a continuación son en parejas. Ubique un compañer@.

Actividad 1:

1. Lea el siguiente documento sobre sucesiones y progresiones y si tiene alguna inquietud al respecto, consulte al docente:

Sucesiones y progresiones

Muchas veces pensamos que nada de lo que aprendemos en matemáticas sirve para la vida. Si miramos por ejemplo la inversión de capital en un proyecto, tenemos que manejar el concepto de sucesión y más concretamente, el de progresión geométrica. El interés compuesto es una progresión geométrica. Es decir, al tener ante a nosotros varias propuestas de inversión lo que debemos hacer para elegir la que mejor es analizar la progresión geométrica de cada una, en otras palabras, el interés compuesto que genera cada una.

Pero, ¿Qué es una sucesión? ¿Qué es una progresión? De manera sencilla, se llama sucesión a un conjunto de números dispuestos uno enseguida de otro (3, 6, 9,..., 3n). En forma general, a_1, a_2, a_3,..., a_n. A cada número se llaman *términos de la sucesión*. El subíndice indica el lugar que el término ocupa en la sucesión. El término general es a_n, que corresponde a un criterio que nos permite determinar cualquier término de la sucesión.

Una relación de recurrencia para una sucesión $\{a_n\}_n \therefore n \in \mathbb{N}$ es una ecuación la cual establece el término a_n en función de los términos anteriores a_1, a_2, a_3,..., a_n para todos los enteros n tales que $n \geq n - 1$. La sucesión en sí es la solución de la relación de recurrencia si sus términos cumplen la relación para todo entero positivo n.
Un ejemplo de sucesión por recurrencia es la **sucesión de Fibonacci**, en la cual, cada término a partir del tercero es la suma de los dos términos anteriores.

Esta sucesión, en general, se define como: $a_n = \begin{cases} 1 & si\ n = 1 \\ 1 & si\ n = 2. \\ a_{n-1} + a_{n-2} & si\ \ n > 2 \end{cases}$

Una progresión es una sucesión de números entre los cuales hay una ley de formación constante. Se distinguen dos tipos: progresión aritmética y progresión geométrica. La primera es una sucesión de números tales que cada uno de ellos (salvo el primero) es igual al anterior más un número fijo llamado diferencia que se representa por d. Por ejemplo, en la progresión aritmética 8, 3, -2, -7, -12, … se tiene que 3 – 8 = -5; -2 – 3 = -5; -7 – (-2) = -5; -12 – (-7) = -5. Es decir, d = -5. Para hallar el término general de una progresión aritmética conociendo el primer término, se tiene que $a_n = a_1 + (n - 1) * d$. Para el mismo ejemplo de antes, $a_n = 8 + (n - 1) (-5) = 8 - 5n + 5 = -5n + 13$. Si se conoce el valor que ocupa cualquier otro término de la progresión, se tiene que $a_n = a_k + (n - k) * d$. En el mismo ejemplo, si se va a hallar a_n sabiendo que $a_4 = -7$; $k = 4$ y $d = -5$, se tiene que $a_n = -7 + (n - 4) * (-5) = -7 - 5n + 20 = -5n + 13$. De igual manera, si se desea hallar la suma de los n términos consecutivos, se tiene que $S_n = \frac{(a_1+a_n) * n}{2}$. Para la misma progresión, si se desea calcular la suma de los primeros 3 términos, se tiene que $S_3 = \frac{(8 - 12) * 3}{2} = \frac{-12}{2} = -4$.

La progresión geométrica es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando al anterior una cantidad fija r, llamada razón $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$. Por ejemplo, si se tiene la sucesión 3, 6, 12, 24, 48,… se da que 6 / 3 = 2; 12 / 6 = 2; 24 / 12 = 2; 48 / 24 = 2. Es decir r = 2. Para hallar el término general de una progresión geométrica, teniendo conocimiento del primer término, se tiene que $a_n = a_1 * r^{n-1}$. Para el ejemplo que usamos se da que $a_n = 3 * 2^{n-1} = 3 * 2^n * 2^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right) * 2^n$. Si se conoce el valor que ocupa cualquier otro término de la progresión, se tiene que $a_n = a_k * r^{n-k}$. Continuando con el ejemplo que usamos para este caso, si se va a hallar a_n sabiendo que $a_4 = 24$; $k = 4$ y $r = 2$, se tiene que $a_n = 24 * 2^{n-4} = (24 / 16) * 2^n = (3 / 2) * 2^n$. De igual manera, si se desea hallar la suma de los n término consecutivos, se tiene que $S_n = \frac{a_n * r - a_1}{r-1}$. Para la misma progresión que se usa en este caso, si se desea calcular la suma de los primeros 3 términos, se tiene que $S_3 = \frac{12 * 2 - 3}{2-1} = 21$.

2. Abra el programa GeoGebra y recuerde habilitar las opciones **“Orden de construcción”** en la **“Vista Algebraica”** y **“Ningún objeto nuevo”** en **“Etiquetado”** de la pestaña **“Opciones”**, antes de iniciar la actividad.

3. Deshabilite los ejes XY haciendo clic sobre el primer botón en la **“Vista Gráfica”**.

4. Trace un cuadrado de una unidad de lado. Luego trace otro cuadrado de igual magnitud en la parte inferior al primero y de forma adyacente a éste. Utilice el mismo color para dibujarlos.

5. Trace un cuadrado adyacente a los dos anteriores, ubicado justo a la derecha de ambos y cuyo lado tenga una magnitud equivalente al doble del lado del primer cuadrado. Utilice un color distinto al del punto anterior.

6. Trace un cuarto cuadrado adyacente a los tres anteriores y encima de todos ellos; con un lado cuya magnitud sea equivalente a la sumatoria de la magnitud del lado del primer cuadrado con la del tercero. Use un nuevo color.

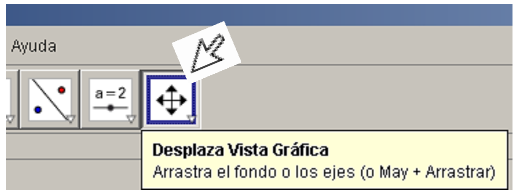
7. Trace un quinto cuadrado de otro color, adyacente y a la izquierda del cuarto y los dos primeros; con un lado cuya magnitud sea equivalente a la sumatoria de la magnitud del lado del cuarto cuadrado con la del segundo. Utilice un color distinto a los anteriores.

8. Ahora responda las siguientes preguntas:

   - ¿En qué sentido ubicaría el siguiente cuadrado, atendiendo la regularidad que muestra el diseño? Arriba ____ Abajo ____ A la izquierda ___ A la derecha ____

   - ¿Cuál sería la magnitud del lado de este último cuadrado a construir? _________

   - Trace el sexto cuadrado con un color diferente a los anteriores. Tenga en cuenta que si requiere desplazarse en el plano, utilice la herramienta **“Desplaza Vista Gráfica”**.



- **¿Cómo funciona?** Una vez habilitada la herramienta, haga un clic sostenido sobre cualquier área del plano cartesiano y arrastre el mouse lentamente hacia donde desee desplazarse.

9. Observe que si se junta cada cuadrado que se construye a la vez (desde el segundo) con todos los que se han ido construyendo antes, se van formando rectángulos. Complete la siguiente tabla, registrando "*la magnitud del lado mayor del rectángulo que se va formando*" y "*la magnitud del lado menor de dicho rectángulo*" (desde el segundo). Luego, reste uno a uno estos valores correspondientemente y ubique el resultado en la casilla respectiva de la tercera fila. Intente deducir los valores del final, siguiendo el patrón de comportamiento.

Lado mayor del rectángulo	2		5				34	
Lado menor del rectángulo	1					13		
Diferencia	1			3				21

10. Sea n un número natural que representa la cantidad acumulada de cuadrados construidos cada vez que uno nuevo se dibuja, complete la siguiente tabla:

Cuadrados construidos (n)	1	2			5		7	
Diferencia	1	1		3				21

- ¿Qué regularidad identifica usted en los valores de la "*Diferencia*"?

- ¿Conforman estos valores una sucesión? Sí _____ No _____

- Teniendo en cuenta que n representa el número de cuadrados construidos, ¿Qué estructura matemática formal propondría como término general, si se trata de una sucesión, para garantizar que el modelo se pueda validar hasta indefinidas repeticiones? Justifique su respuesta

  ____
  ____
  ____

- ¿Cuántos cuadrados se deben dibujar hasta formar un rectángulo cuyo lado mayor mida 89 unidades?

  ____
  ____
  ____

Actividad 2:

Para realizar la siguiente actividad, cree un nuevo archivo seleccionando la opción **"Nuevo"** en la misma pestaña **"Archivo"**.

1. Seleccione la opción **"Ningún objeto nuevo"**, del submenú **"Etiquetado"**, en la pestaña **"Opciones"**. Esto evitará que los objetos que grafique de aquí en adelante, en este archivo, se etiqueten.

2. Usando la herramienta **"Polígono"**, trace un cuadrado cuyo lado mida ocho unidades.

3. Ubique los puntos medios en cada uno de los lados, con ayuda de la herramienta **"Medio o Centro"**.

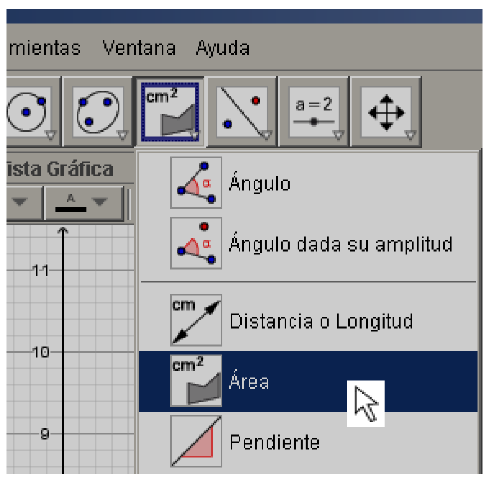
4. Con un color distinto al cuadrado inicial, trace un nuevo cuadrado inscrito[2] en el primero, utilizando la herramienta **"Polígono"**, de tal manera que los vértices de este nuevo cuadrado coincidan con los puntos medios ubicados en el numeral anterior.

5. Ubique los puntos medios del segundo cuadrado trazado (es decir, el inscrito).

6. Utilizando un color diferente a los anteriores, trace un tercer cuadrado inscrito en el segundo, de tal forma que sus vértices coincidan con los puntos medios ubicados en el numeral anterior.

7. Repita el procedimiento hasta haber trazado cinco cuadrados en total.

8. Con la herramienta **"Área"** (ver imagen más adelante), establezca al área de los cuadrados trazados haciendo un clic a la vez sobre cada uno de ellos.



9. Sea n un número natural que representa el orden de construcción de los cuadrados y A el área de dichos cuadrados, complete la siguiente tabla:

Orden de construcción (**n**)	1			4	
Área del cuadrado (**A**)					

[2] Una figura que se dibuja dentro de otra.

- ¿Los valores registrados en **A** corresponden a una progresión? Sí ___ No ___
  Si la respuesta es afirmativa, ¿De qué tipo? Aritmética ____ Geométrica ____

- Si se trata de una progresión, ¿Cuál es la *diferencia* o cuál es la *razón*, según sea el caso? _________ ¿Cuál es el término general? _______________________

- Si los valores de A forman una progresión y n=10, ¿Cuál es el total de la suma de los diez primeros términos?

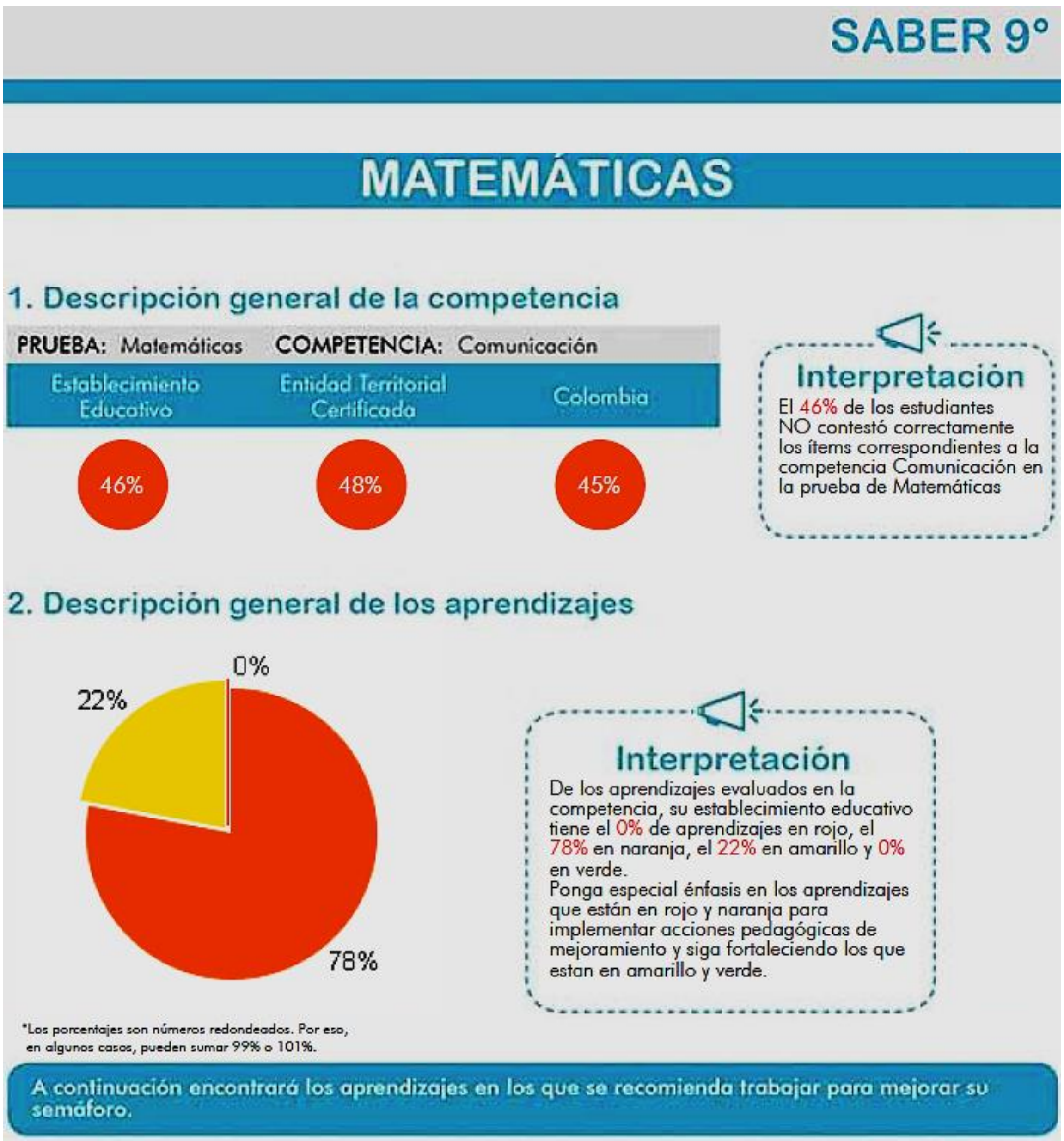
____

____

____

- Si desea guardar el trabajo por primera vez, haga clic en la pestaña **"Archivo"** del menú principal y seleccione la opción **"Guardar como"**, pero si ya lo había guardado antes, selecciones la opción **"Guardar"**.

Anexo D: Resultados prueba SABER 9º Matemáticas – Año 2015



3. Aprendizajes por mejorar

El	69%	de los estudiantes no identifica relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud y determina su pertinencia.
El	65%	de los estudiantes no representa y describe propiedades de objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.
El	56%	de los estudiantes no usa y relaciona diferentes representaciones para modelar situaciones de variación .
El	47%	de los estudiantes no reconoce la media, mediana y moda con base en la representación de un conjunto de datos y explicita sus diferencias en distribuciones diferentes.
El	47%	de los estudiantes no usa sistemas de referencia para localizar o describir posición de objetos y figuras.
El	43%	de los estudiantes no reconoce el lenguaje algebraico como forma de representa procesos inductivos.
El	42%	de los estudiantes no identifica características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan.
El	32%	de los estudiantes no reconoce relaciones entre diferentes representaciones de un conjunto de datos y analiza la pertinencia de la representación.
El	24%	de los estudiantes no establece relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.

Interpretación

El 69% de los estudiantes NO contestó correctamente los ítems correspondientes al primer aprendizaje. Esta interpretación aplica de igual manera para los demás aprendizajes por mejorar.

1. Descripción general de la competencia

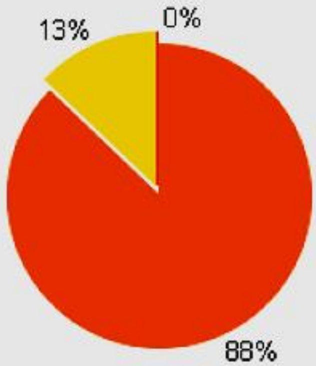
PRUEBA: Matemáticas **COMPETENCIA:** Razonamiento

Establecimiento Educativo	Entidad Territorial Certificada	Colombia
50%	55%	52%

Interpretación

El 50% de los estudiantes NO contestó correctamente los ítems correspondientes a la competencia Razonamiento en la prueba de Matemáticas

2. Descripción general de los aprendizajes



Interpretación

De los aprendizajes evaluados en la competencia, su establecimiento educativo tiene el 0% de aprendizajes en rojo, el 88% en naranja, el 13% en amarillo y 0% en verde.
Ponga especial énfasis en los aprendizajes que están en rojo y naranja para implementar acciones pedagógicas de mejoramiento y siga fortaleciendo los que estan en amarillo y verde.

*Los porcentajes son números redondeados. Por eso, en algunos casos, pueden sumar 99% o 101%.

A continuación encontrará los aprendizajes en los que se recomienda trabajar para mejorar su semáforo.

3. Aprendizajes por mejorar

El 66% de los estudiantes no usa modelos para discutir acerca de la probabilidad de un evento aleatorio.

El 63% de los estudiantes no interpreta tendencias que se presentan en una situación de variación.

El 57% de los estudiantes no establece conjeturas y verifica hipótesis acerca de los resultados de un experimento aleatorio usando conceptos básicos de probabilidad.

El 56% de los estudiantes no interpreta y usa expresiones algebraicas equivalentes.

El 50% de los estudiantes no utiliza propiedades y relaciones de los números reales para resolver problemas.

El	46%	de los estudiantes no hace conjeturas y verifica propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales.
El	43%	de los estudiantes no argumenta formal e informalmente sobre propiedades y relaciones de figuras planas y sólidos.
El	38%	de los estudiantes no utiliza diferentes métodos y estrategias para calcular la probabilidad de eventos simples.

Interpretación

El 66% de los estudiantes NO contestó correctamente los ítems correspondientes al primer aprendizaje. Esta interpretación aplica de igual manera para los demás aprendizajes por mejorar.

1. Descripción general de la competencia

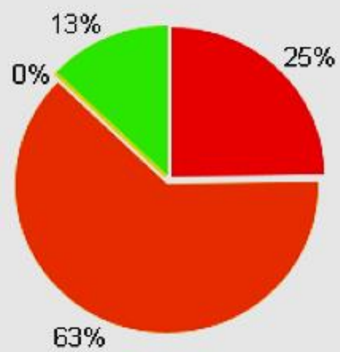
PRUEBA: Matemáticas **COMPETENCIA:** Resolución

Establecimiento Educativo	Entidad Territorial Certificado	Colombia
57%	58%	56%

Interpretación

El 57% de los estudiantes NO contestó correctamente los ítems correspondientes a la competencia Resolución en la prueba de Matemáticas

2. Descripción general de los aprendizajes



Interpretación

De los aprendizajes evaluados en la competencia, su establecimiento educativo tiene el 25% de aprendizajes en rojo, el 63% en naranja, el 0% en amarillo y 13% en verde.
Ponga especial énfasis en los aprendizajes que están en rojo y naranja para implementar acciones pedagógicas de mejoramiento y siga fortaleciendo los que estan en amarillo y verde.

*Los porcentajes son números redondeados. Por eso, en algunos casos, pueden sumar 99% o 101%.

A continuación encontrará los aprendizajes en los que se recomienda trabajar para mejorar su semáforo.

3. Aprendizajes por mejorar

El 77% de los estudiantes no resuelve problemas en situaciones aditivas y multiplicativas en el conjunto de los números reales.

El 73% de los estudiantes no establece y utiliza diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de superficies y volúmenes.

El 67% de los estudiantes no resuelve problemas que involucran potenciación, radicación y logaritmación.

El 61% de los estudiantes no resuelve y formula problemas geométricos o métricos que requieran seleccionar técnicas adecuadas de estimación y aproximación.

El 57% de los estudiantes no resuelve problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos.

El 57% de los estudiantes no resuelve y formula problemas a partir de un conjunto de datos presentado en tablas, diagramas de barras y diagrama circular.

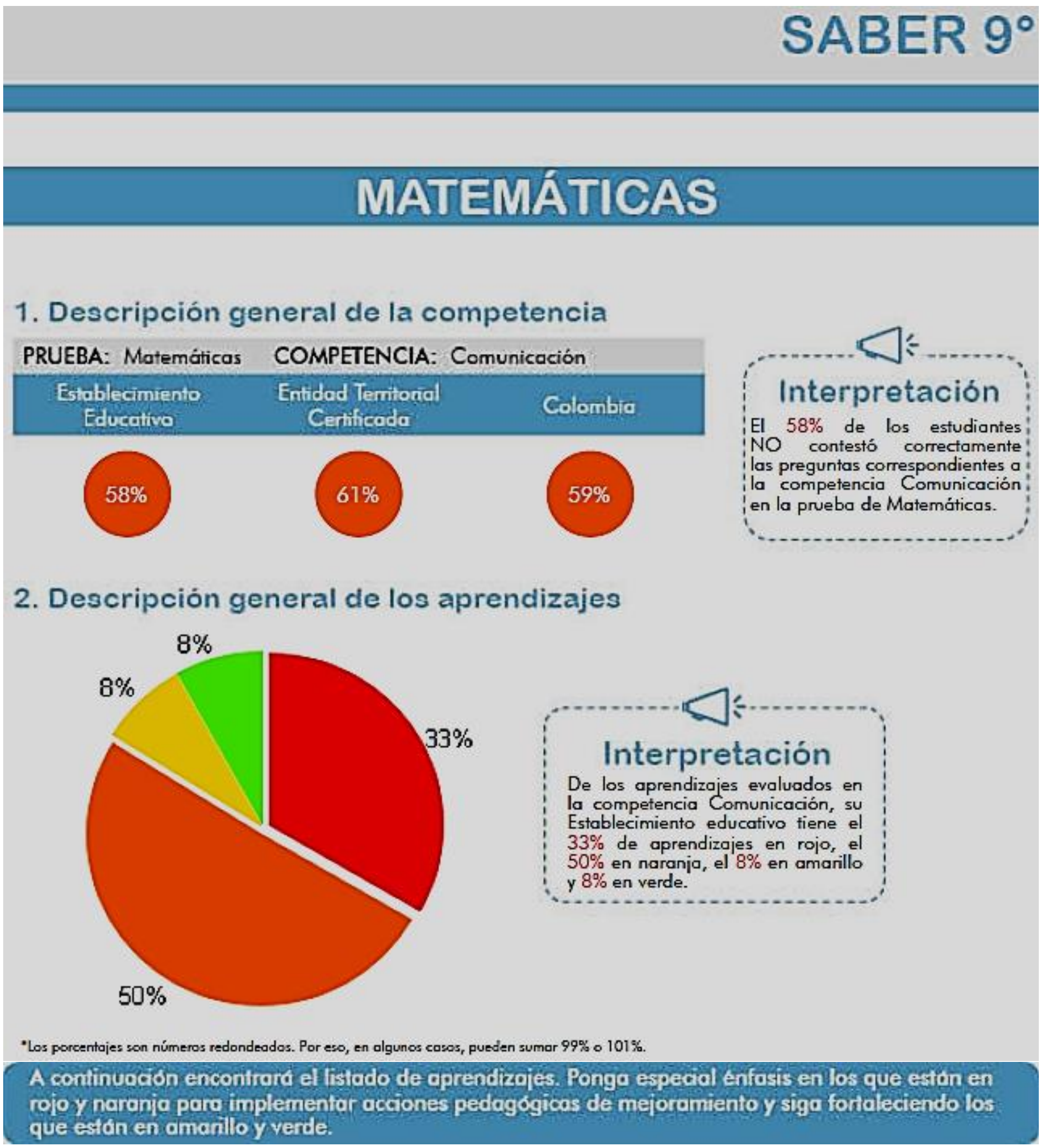
El 53% de los estudiantes no resuelve problemas que requieran el uso e interpretación de medidas de tendencia central para analizar el comportamiento de un conjunto de datos.

El 17% de los estudiantes no resuelve y formula problemas usando modelos geométricos.

Interpretación

El 77% de los estudiantes NO contestó correctamente los ítems correspondientes al primer aprendizaje. Esta interpretación aplica de igual manera para los demás aprendizajes por mejorar.

Anexo E: Resultados prueba SABER 9º Matemáticas – Año 2016



3. Aprendizajes

El	78%	de los estudiantes no reconoce la posibilidad o la imposibilidad de ocurrencia de un evento a partir de una información dada o de un fenómeno.
El	76%	de los estudiantes no identifica relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud y determinar su pertinencia.
El	74%	de los estudiantes no reconoce el lenguaje algebraico como forma de representar procesos inductivos.
El	73%	de los estudiantes no establece relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
El	69%	de los estudiantes no usa ni relaciona diferentes representaciones para modelar situaciones de variación.
El	67%	de los estudiantes no compara, usa e interpreta datos que provienen de situaciones reales ni traduce entre diferentes representaciones de un conjunto de datos.
El	63%	de los estudiantes no identifica características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan.
El	61%	de los estudiantes no usa sistemas de referencia para localizar o describir posición de objetos y figuras.
El	58%	de los estudiantes no reconoce la media, mediana y moda con base en la representación de un conjunto de datos ni explicita sus diferencias en distintas distribuciones.
El	48%	de los estudiantes no identifica ni describe efectos de transformaciones aplicadas a figuras planas.
El	29%	de los estudiantes no reconoce relaciones entre diferentes representaciones de un conjunto de datos ni analiza la pertinencia de la representación.
El	7%	de los estudiantes no representa ni describe propiedades de objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.

Interpretación

El 78% de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas correspondientes al primer aprendizaje. Esta interpretación aplica de igual manera para los demás aprendizajes por mejorar.

1. Descripción general de la competencia

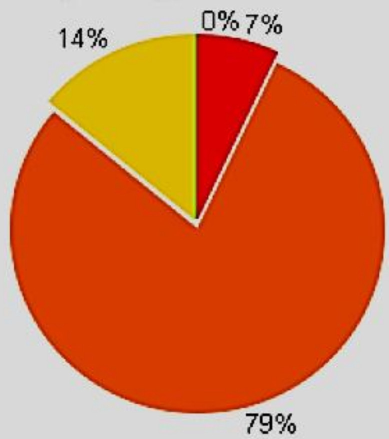
PRUEBA: Matemáticas **COMPETENCIA:** Razonamiento

Establecimiento Educativo	Entidad Territorial Certificada	Colombia
54%	58%	56%

Interpretación

El 54% de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas correspondientes a la competencia Razonamiento en la prueba de Matemáticas.

2. Descripción general de los aprendizajes



Interpretación

De los aprendizajes evaluados en la competencia Razonamiento, su Entidad territorial tiene el 7% de aprendizajes en rojo, el 79% en naranja, el 14% en amarillo y 0% en verde.

*Los porcentajes son números redondeados. Por eso, en algunos casos, pueden sumar 99% o 101%.

A continuación encontrará el listado de aprendizajes. Ponga especial énfasis en los que están en rojo y naranja para implementar acciones pedagógicas de mejoramiento y siga fortaleciendo los que están en amarillo y verde.

3. Aprendizajes

El 74% de los estudiantes no interpreta ni usa expresiones algebraicas equivalentes.

El 69% de los estudiantes no verifica conjeturas acerca de los números reales, usando procesos inductivos y deductivos desde el lenguaje algebraico.

El 66% de los estudiantes no usa representaciones ni procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.

El 65% de los estudiantes no usa modelos para discutir acerca de la probabilidad de un evento aleatorio.

El 63% de los estudiantes no utiliza propiedades ni relaciones de los números reales para resolver problemas.

El	60%	de los estudiantes no generaliza procedimientos de cálculo para encontrar el área de figuras planas y el volumen de algunos sólidos.
El	57%	de los estudiantes no hace conjeturas ni verifica propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales.
El	56%	de los estudiantes no identifica ni describe las relaciones (aditivas, multiplicativas, de recurrencia…) que se pueden establecer en una secuencia numérica.
El	51%	de los estudiantes no formula inferencias ni justifica razonamientos y conclusiones a partir del análisis de información estadística.
El	48%	de los estudiantes no argumenta formal e informalmente sobre propiedades y relaciones de figuras planas y sólidos.
El	48%	de los estudiantes no predice ni explica los efectos de aplicar transformaciones rígidas sobre figuras bidimensionales.
El	46%	de los estudiantes no utiliza diferentes métodos ni estrategias para calcular la probabilidad de eventos simples.
El	36%	de los estudiantes no interpreta tendencias que se presentan en una situación de variación.
El	21%	de los estudiantes no analiza la validez o invalidez de usar procedimientos para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.

Interpretación

El 74% de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas correspondientes al primer aprendizaje. Esta interpretación aplica de igual manera para los demás aprendizajes por mejorar.

1. Descripción general de la competencia

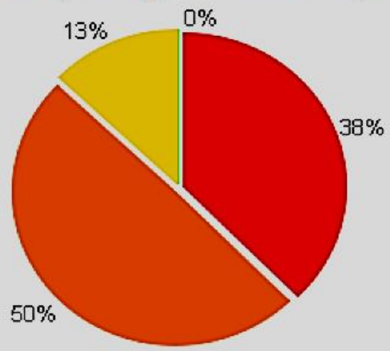
PRUEBA: Matemáticas COMPETENCIA: Resolución

Establecimiento Educativo	Entidad Territorial Certificada	Colombia
59%	61%	60%

Interpretación

El 59% de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas correspondientes a la competencia Resolución en la prueba de Matemáticas.

2. Descripción general de los aprendizajes



Interpretación

De los aprendizajes evaluados en la competencia Resolución, su Establecimiento educativo tiene el 38% de aprendizajes en rojo, el 50% en naranja, el 13% en amarillo y 0% en verde.

*Los porcentajes son números redondeados. Por eso, en algunos casos, pueden sumar 99% o 101%.

A continuación encontrará el listado de aprendizajes. Ponga especial énfasis en los que están en rojo y naranja para implementar acciones pedagógicas de mejoramiento y siga fortaleciendo los que están en amarillo y verde.

3. Aprendizajes

El 72% de los estudiantes no resuelve problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos.

El 71% de los estudiantes no resuelve problemas en situaciones aditivas y multiplicativas en el conjunto de los números reales.

El 70% de los estudiantes no resuelve ni formula problemas en diferentes contextos, que requieren hace inferencias a partir de un conjunto de datos estadísticos provenientes de diferentes fuentes.

El 52% de los estudiantes no plantea ni resuelve situaciones relativas a otras ciencias utilizando conceptos de probabilidad.

El 51% de los estudiantes no resuelve ni formula problemas usando modelos geométricos.

El 43% de los estudiantes no resuelve problemas que requieran el uso e interpretación de medidas de tendencia central para analizar el comportamiento de un conjunto de datos.

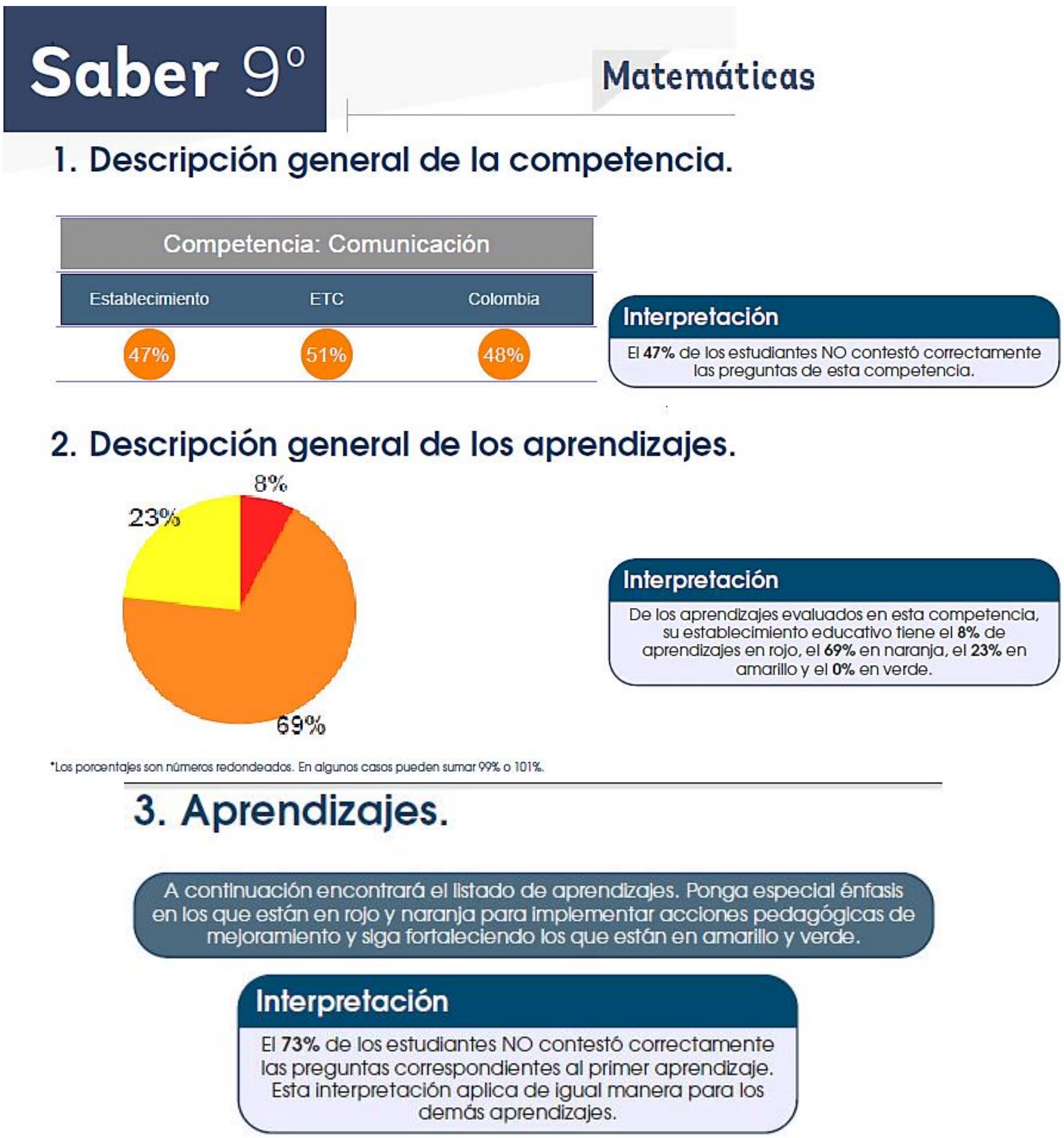
El 40% de los estudiantes no resuelve ni formula problemas geométricos o métricos que requieran seleccionar técnicas adecuadas de estimación y aproximación.

El 21% de los estudiantes no resuelve ni formula problemas a partir de un conjunto de datos presentado en tablas, diagramas de barras y diagrama circular.

Interpretación

El 72% de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas correspondientes al primer aprendizaje. Esta interpretación aplica de igual manera para los demás aprendizajes por mejorar.

Anexo F: Resultados prueba SABER 9º Matemáticas – Año 2017



Saber 9º

Matemáticas

1. Descripción general de la competencia.

Competencia: Comunicación		
Establecimiento	ETC	Colombia
47%	51%	48%

Interpretación

El **47%** de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas de esta competencia.

2. Descripción general de los aprendizajes.

Interpretación

De los aprendizajes evaluados en esta competencia, su establecimiento educativo tiene el **8%** de aprendizajes en rojo, el **69%** en naranja, el **23%** en amarillo y el **0%** en verde.

*Los porcentajes son números redondeados. En algunos casos pueden sumar 99% o 101%.

3. Aprendizajes.

A continuación encontrará el listado de aprendizajes. Ponga especial énfasis en los que están en rojo y naranja para implementar acciones pedagógicas de mejoramiento y siga fortaleciendo los que están en amarillo y verde.

Interpretación

El **73%** de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas correspondientes al primer aprendizaje. Esta interpretación aplica de igual manera para los demás aprendizajes.

El	73%	no reconoce el lenguaje algebraico como forma de representar procesos inductivos.
El	66%	no usa sistemas de referencia para localizar o describir posición de objetos y figuras.
El	57%	no identifica ni describe efectos de transformaciones aplicadas a figuras planas.
El	54%	no dentifica expresiones numéricas y algebraicas equivalentes.
El	53%	no compara, usa o interpreta datos que provienen de situaciones reales ni traduce entre diferentes representaciones de un conjunto de datos.
El	51%	no identifica relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud y determinar su pertinencia.
El	48%	no reconoce relaciones entre diferentes representaciones de un conjunto de datos ni analiza la pertinencia de la representación.
El	46%	no identifica características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan.
El	44%	no reconoce la media, mediana y moda con base en la representación de un conjunto de datos ni explicita sus diferencias en distribuciones diferentes.
El	43%	no diferencia magnitudes de un objeto ni relaciona las dimensiones de éste con la determinación de las magnitudes.
El	33%	no usa ni relaciona diferentes representaciones para modelar situaciones de variación.
El	31%	no establece relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
El	21%	no representa ni describe propiedades de objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.

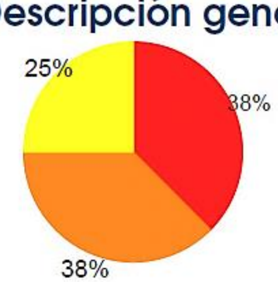
1. Descripción general de la competencia.

Competencia: Resolución		
Establecimiento	ETC	Colombia
57%	57%	54%

Interpretación

El **57%** de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas de esta competencia.

2. Descripción general de los aprendizajes.



Interpretación

De los aprendizajes evaluados en esta competencia, su establecimiento educativo tiene el **38%** de aprendizajes en rojo, el **38%** en naranja, el **25%** en amarillo y el **0%** en verde.

*Los porcentajes son números redondeados. En algunos casos pueden sumar 99% o 101%.

3. Aprendizajes.

A continuación encontrará el listado de aprendizajes. Ponga especial énfasis en los que están en rojo y naranja para implementar acciones pedagógicas de mejoramiento y siga fortaleciendo los que están en amarillo y verde.

Interpretación

El **85%** de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas correspondientes al primer aprendizaje. Esta interpretación aplica de igual manera para los demás aprendizajes.

El 85%	no resuelve problemas que involucran potenciación, radicación y logaritmación.
El 72%	no establece ni utiliza diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de superficies y volúmenes.
El 72%	no resuelve problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos.
El 64%	no resuelve problemas de medición utilizando de manera pertinente instrumentos y unidades de medida.
El 51%	no resuelve ni formula problemas a partir de un conjunto de datos presentado en tablas, diagramas de barras y diagrama circular.
El 41%	no resuelve ni formula problemas usando modelos geométricos.
El 39%	no resuelve problemas en situaciones aditivas y multiplicativas en el conjunto de los números reales.
El 36%	no plantea ni resuelve situaciones relativas a otras ciencias utilizando conceptos de probabilidad.

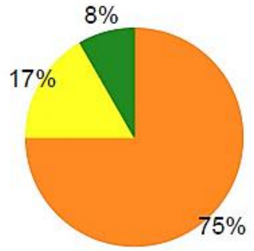
1. Descripción general de la competencia.

Competencia: Razonamiento		
Establecimiento	ETC	Colombia
50%	51%	48%

Interpretación

El **50%** de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas de esta competencia.

2. Descripción general de los aprendizajes.



*Los porcentajes son números redondeados. En algunos casos pueden sumar 99% o 101%.

Interpretación

De los aprendizajes evaluados en esta competencia, su establecimiento educativo tiene el **0%** de aprendizajes en rojo, el **75%** en naranja, el **17%** en amarillo y el **8%** en verde.

3. Aprendizajes.

A continuación encontrará el listado de aprendizajes. Ponga especial énfasis en los que están en rojo y naranja para implementar acciones pedagógicas de mejoramiento y siga fortaleciendo los que están en amarillo y verde.

Interpretación

El **70%** de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas correspondientes al primer aprendizaje. Esta interpretación aplica de igual manera para los demás aprendizajes.

El	70%	no analiza la validez o invalidez de usar procedimientos para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.
El	64%	no generaliza procedimientos de cálculo para encontrar el área de figuras planas y el volumen de algunos sólidos.
El	64%	no fundamenta conclusiones utilizando conceptos de medidas de tendencia central.
El	58%	no predice ni explica los efectos de aplicar transformaciones rígidas sobre figuras bidimensionales.
El	57%	no interpreta ni usa expresiones algebraicas equivalentes.
El	56%	no formula inferencias ni justifica razonamientos y conclusiones a partir del análisis de información estadística.

El	51%	no argumenta formal e informalmente sobre propiedades y relaciones de figuras planas y sólidos.
El	48%	no interpreta tendencias que se presentan en una situación de variación.
El	40%	no usa modelos para discutir acerca de la probabilidad de un evento aleatorio.
El	36%	no identifica ni describe las relaciones (aditivas, multiplicativas, de recurrencia) que se pueden establecer en una secuencia numérica.
El	34%	no utiliza diferentes métodos ni estrategias para calcular la probabilidad de eventos simples.
El	14%	no establece conjeturas ni verifica hipótesis acerca de los resultados de un experimento aleatorio usando conceptos básicos de probabilidad.