



UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

***EL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS DEBIDO A LA GRAVITACIÓN:  
UNA EXPLICACIÓN PARA ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO DEL  
COLEGIO ROSARIO DE SANTO DOMINGO***

**CARLOS ANDRÉS CASTAÑEDA SUA**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de ciencias, Departamento de física  
Bogotá D.C., Colombia  
2017-2

***EL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS DEBIDO A LA GRAVITACIÓN:  
UNA EXPLICACIÓN PARA ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO DEL  
COLEGIO ROSARIO DE SANTO DOMINGO***

**CARLOS ANDRÉS CASTAÑEDA SUA**

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en enseñanza de las ciencias exactas y naturales**

Director:

MSc. Benjamín Calvo Mozo

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de ciencias, Departamento de física  
Bogotá D.C., Colombia  
2017-2

*A mi madre y hermanas por su apoyo incondicional  
y nunca dejarme desfallecer.*

# Agradecimientos

Agradezco a todas aquellas personas que hicieron parte de mi proceso formativo en especial en este último peldaño académico.

Agradezco a la Universidad Nacional de Colombia por permitirme formarme y mejorar mi proceso Académico con la ayuda de sus maestros.

A las estudiantes de grado décimo del Colegio del Rosario de Santo Domingo por permitirme tomarlas como parte de estudio para la generación del presente proyecto de investigación.

## Resumen

La enseñanza de la física es un campo de conocimiento de vital importancia, el cual se ha venido trabajando desde el inicio de la historia de la ciencias, con la explicación del *por qué los objetos se mueven*, pregunta que hasta nuestros días causa un gran interés por los científicos y en general. Este trabajo trata de identificar ideas presentes en las estudiantes de grado décimo del Colegio del Rosario de Santo domingo respecto a los conceptos inmersos en la Ley de gravitación universal y cómo es posible relacionar el movimiento que describen los cuerpos al dejarlos caer en la superficie de la Tierra y los movimiento presentados por los planetas y satélites en el sistema solar, todo esto mediante el análisis de la dinámica que se ve aplicada en ambos movimientos.

La metodología realizada para llevar a cabo ésta propuesta es mediante el trabajo colaborativo donde se busca generar una mejor comprensión de las causas del movimiento basándose en la construcción colectiva de conocimiento.

Palabras claves: Enseñanza, Ciencias, Ley de gravitación universal, trabajo Colaborativo, Ideas, Movimiento, fuerza.

## Abstract

The teaching of physics is a field of knowledge of vital importance, which has been working since the beginning of the history of science, with the explanation of why objects move, question that to this day causes great interest by scientists and in general. This work tries to identify present ideas in the tenth grade students of the Colegio del Rosario de Santo Domingo with respect to the concepts immersed in the Law of Universal Gravitation and how it is possible to relate the movement that the bodies describe when dropped on the surface of the Earth and the movements presented by the planets and satellites in the solar system, all this by analyzing the dynamics that are applied in both movements.

The methodology used to carry out this proposal is through collaborative work that seeks to generate a better understanding of the causes of the movement based on the collective construction of knowledge.

Keywords: Teaching, Sciences, Law of universal gravitation, Collaborative work, Ideas, Movement, force.

## Tabla de contenido

Agradecimientos .....	4
Resumen.....	5
Abstract.....	6
INTRODUCCIÓN .....	10
OBJETIVOS .....	12
Objetivo General .....	12
Objetivos Específicos .....	12
Capítulo 1: Marco epistemológico y disciplinar .....	13
1.1. Aspectos históricos y epistemológicos sobre el concepto de fuerza .....	13
1.1.1. Visión Aristotélica .....	14
1.1.2. Visión Galileana .....	15
1.1.3. Visión Newtoniana .....	16
1.2. Las leyes de Johannes Kepler .....	19
1.3. Derivación de Newton de la fuerza gravitacional.....	21
1.4. Descripción moderna del problema gravitacional de los dos cuerpos .....	28
1.5. Consideración sobre la energía y el movimiento .....	37
1.6. Tercera ley de Kepler .....	41
Capítulo 2: Marco pedagógico y propuesta de unidad de aprendizaje .....	43
2.1. La enseñanza de la ley de gravitación universal .....	43
2.2. Metodología de la propuesta de aprendizaje .....	45
2.3. Descripción de la propuesta .....	46
2.3.1. Actividad diagnóstica o pre-Test.....	48
2.3.2. Actividad 1 .....	51
2.3.3. Actividad 2.....	55
2.3.4. Actividad 3.....	57
Capítulo 3: Análisis de la propuesta y de su aplicación.....	59
3.1. Análisis del pre-test o prueba diagnóstica .....	59
3.1.1. Pregunta 1 .....	60
3.1.2. Pregunta 2 .....	62

3.1.3. Pregunta 3 .....	63
3.1.4. Pregunta 4 .....	65
3.1.5. Pregunta 5 .....	66
3.1.6. Pregunta 6 .....	68
3.2. Análisis de la implementación .....	68
4. Conclusiones y recomendaciones.....	70
Bibliografía .....	72
ANEXO 1.....	73
ANEXO 2.....	74



## Tabla de Figuras y gráficas

Figura 1. Esquema de la balanza de torsión de Cavendish, vista superior. Elaboración propia. ....	27
Figura 2. Esquema de del haz de luz incidente y reflejado que permite determinar el ángulo de torsión mediante la distancia en la pared.....	27
Figura 3. Las posiciones de dos partículas ( $m_1$ , $m_2$ ) en un sistema de referencia inicial dado. Elaboración propia.....	29
Figura 4 Coordenadas cartesianas y polares de un punto P en el plano. Elaboración propia.....	31
Figura 5 área barrida por el radio vector. Elaboración propia. ....	33
Figura 6 Interacción entre un cuerpo extenso y uno puntual separados una distancia d. Elaboración propia.....	36
Figura 7: Interacción entre dos cuerpos uno en el interior del otro. Elaboración propia. ....	37
Figura 8 Dos órbitas de igual semi-eje mayor. Elaboración propia.....	40

## Tabla de Imágenes y tablas

Imagen 1 Balanza de torsión a escala 1:48 que se encuentra en el museo de ciencia de Londres. Tomada de <a href="http://ww.escriitoscientificos.es/trab21a40/pesotierra/pagina02.htm">ww.escriitoscientificos.es/trab21a40/pesotierra/pagina02.htm</a> .....	24
Imagen 2 Esquema frontal de la balanza de torsión utilizada por Cavendish. Tomada de <a href="http://ww.escriitoscientificos.es/trab21a40/pesotierra/pagina02.htm">ww.escriitoscientificos.es/trab21a40/pesotierra/pagina02.htm</a> .....	25
Imagen 3 Esquema superior de la balanza de torsión utilizada por Cavendish. Tomada de <a href="http://www.escriitoscientificos.es/trab21a40/pesotierra/pagina02.htm">www.escriitoscientificos.es/trab21a40/pesotierra/pagina02.htm</a> ...	26
Imagen 4 Prueba diagnóstica aplicada a las estudiantes. ....	48
Tabla 1 Rúbrica para el análisis de la prueba diagnóstica aplicada a las estudiantes. ....	50

## INTRODUCCIÓN

El presente documento presenta una propuesta pedagógica que pretende denotar la importancia de la ley de gravitación universal a la hora de comprender y enseñar la gravedad como temática básica de la ciencia. Lo anterior, en respuesta a los actuales enfoques de enseñanza que reducen la comprensión de la gravedad a la formulación matemática o al notarla como un valor constante en el cual no se observa de donde fue hallado.

La reducción de la ley de gravitación universal a una fórmula matemática o a una constante, limita las posibilidades de aprendizaje de los estudiantes, imposibilitando la resolución de situaciones contextuales reales a través del concepto de gravedad. Es por ello que se hace necesario diseñar estrategias pedagógicas que permitan aprehender el concepto en su complejidad y faciliten el análisis de problemas concretos.

Si bien dentro del contexto colombiano y latinoamericano existen estudios que buscan avanzar en la resolución de esta problemática, dando a conocer las aplicaciones de las leyes de Newton o de la dinámica, a partir de los fenómenos celestes o el contexto histórico, haciendo uso de situaciones de contexto y cercanas para los estudiantes que permiten comprender la razón por la cual los cuerpos celestes se mueven en determinadas trayectorias, dichas situaciones concretas impiden establecer la relación entre el movimiento de caída de los cuerpos y el movimiento de rotación de los cuerpos celestes ya que se enfocan en encontrar una respuesta numérica o en presentar una ecuación para que los estudiantes la modelen y presenten un resultado numérico a la situación, más aun cuando estos eventos son vistos por los estudiantes lejanos a su cotidianidad..

De allí que se proponga en el presente trabajo abordar la caída de los cuerpos sobre la superficie terrestre como el resultado de la fuerza de gravitación

universal, la cual se expresa como la ley de gravitación universal enunciada por Isaac Newton, con un enfoque alternativo que acerque el concepto matemático mediante la asociación con eventos más cercanos a su entorno local y que se permiten explicar mediante los mismos fundamentos teóricos.

Para cumplir este objetivo con los estudiantes de educación media se propone el uso del análisis cualitativo y el trabajo en grupo mediante la discusión de situaciones presentes en el cielo, ya que estas permiten familiarizar a los estudiantes con lo que sucede en el universo, debido a que no se puede presentar una tener una vivencia o una experimentación más cercana o con los propios sentidos, se desea relacionar todo esto con experiencias de su cotidianidad dando una ayuda más que visual a lo que sucede donde no podemos llegar con los otros sentidos.

Cabe señalar que el presente proyecto se realizará con estudiantes de grado décimo del Colegio del Rosario de Santo Domingo ubicado en la localidad de Chapinero en la ciudad de Bogotá D.C., estudiantes que manejan muy bien las bases matemáticas y la formulación de situaciones problema, pero al momento de relacionar con su entorno local presentan dificultades y en algunas ocasiones no relacionan que lo que realiza en el aula es lo que se describe en la naturaleza. Por otra parte cuentan con facilidad de acceso a herramientas TIC's desde el aula de clase, lo que les permite estar familiarizados con este tipo de equipos y herramientas tecnológicas, facilitando la búsqueda de información y la discusión lo cual genera otro tipo de enfoque educativo en la escuela.

Teniendo en cuenta lo esbozado se presenta la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo generar una relación entre los conceptos de gravitación universal y el movimiento de caída de los cuerpos terrestres mediante la utilización de herramientas virtuales y los movimientos cotidianos?, para poder comprender de esta forma como el movimiento depende de la ley de gravitación universal.

# OBJETIVOS

## Objetivo General

*Desarrollar una estrategia didáctica que permita a los estudiantes de grado décimo establecer las relaciones y diferencias entre la fuerza de gravitación universal y el movimiento de caída de los cuerpos terrestres con el fin de encontrar que en ambos casos son producto de la misma fuerza.*

## Objetivos Específicos

- Identificar las habilidades de los estudiantes frente a las temáticas de fuerza y movimiento con respecto a los cuerpos celeste y su relación con lo vivido en la caída de los cuerpos en la Tierra.
- Relacionar los conceptos de gravitación universal con movimiento de los cuerpos celestes, a través del análisis geométrico del movimiento uniforme circular referentes a la generación del concepto de gravedad.
- Generar y aplicar una estrategia didáctica que permita a los estudiantes entender la relación existente entre la dinámica de los cuerpos celestes y la cinemática.
- Evaluar la estrategia didáctica con respecto a las habilidades obtenidas por los estudiantes al abordar la temática fuerza gravitacional mediante la comparación y relación con la caída de los cuerpos en la superficie de la Tierra.

# Capítulo 1: Marco epistemológico y disciplinar

## 1.1. Aspectos históricos y epistemológicos sobre el concepto de fuerza

Así como el concepto de movimiento evolucionó en la historia de la humanidad, desde la antigüedad se observa un estudio sobre cómo se genera este movimiento en los cuerpos tanto a nivel local como en el espacio con los diferentes cuerpos celestes, pasando por una visión mística en donde se pensaba que el movimiento era generado a través de un espíritu que poseían todos los cuerpos, hasta pensar que debido a la naturaleza con que estaban hecho los distintos materiales en la naturaleza, los objetos generaban un movimiento para estar en el lugar que corresponde. Luego el movimiento es llevado no solo a los objetos de su ámbito local, sino a los cuerpos celestes, en los cuales se indagaba sobre el porqué del movimiento de estos, si no existía un “motor” que le adujese a mantenerse en movimiento y pensando que si no existe la acción por otro cuerpo para generar del movimiento, todos los cuerpos sin excepción de los cuerpos errantes tenderían a su quietud, pensando en que todo tiende a estar quieto como lo pensaban en la antigüedad.

En los siguientes apartados se realizará un conteo histórico respecto al concepto de fuerza empezando desde las teorías expuestas por Aristóteles hasta observar las explicaciones abordadas por Isaac Newton, la cual es la dada a conocer desde los diferentes currículos en la escuela secundaria, basándose en los estándares expuestos por el ministerio de educación priorizando y en algunos casos desconociendo su evolución histórica y que ésta no se hubiese construido sin las explicaciones antes expuesta por los diferentes filósofos y científicos de cada una de la las diferentes épocas de la historia de la ciencia , y llegando a los diferentes estudiantes como el descubrimiento de una ecuación o fórmula que permite solucionar algunas de las situaciones o preguntas que desde el principio de los tiempos la humanidad se ha realizado, desconociendo el proceso histórico-

epistemológico que se generó bajo el concepto de fuerza y más aún el de fuerza gravitacional.

### 1.1.1. Visión Aristotélica

La visión presentada por Aristóteles y que marcó gran parte de la historia de la ciencia, respecto a las teorías del movimiento y las causas del mismo, se generan al determinar que los cuerpos buscan su lugar natural, por tal motivo todos los cuerpos intentan ubicarse en el lugar que Dios les otorgó, de esta razón los cuerpos livianos se encuentran en la parte superior mientras que los objetos pesados se dejan caer y ocupar su posición en el suelo. Respecto a por qué los cuerpos se mueven, esto se da porque existe una fuerza que hace que el cuerpo no ocupe su lugar natural, pero que en el momento que ésta fuerza deje de actuar el objeto naturalmente se moverá hasta volver a su lugar natural. Se puede observar que la visión aristotélica propone que dentro de cada ser u objeto se encuentra un “motor” el cual le permite volver a su lugar natural como lo expresa Rivera & Madrigal al afirmar que según Aristóteles “Que los cuerpos “pesados” caigan “naturalmente” quiere decir que tienen en sí mismo el origen de tal movimiento; la causa eficiente y final está en ellos, por lo tanto sin que se necesite, una causa externa eficiente para moverlos; no como debe ocurrir para los movimientos forzados.”<sup>1</sup>, se nota que en esta mirada la fuerza que presentan los movimientos forzados en los cuerpos se da al tener un contacto entre dos cuerpos, mientras que los cuerpos que no son sometidos a estas fuerzas tienden a estar inmóviles o a volver a su estado de quietud, generando una dificultad al momento de entender el movimiento de los cuerpos celestes como son el Sol, la Luna y los planetas visibles a simple vista, ya que en ellos no se observa un movimiento forzado pero tampoco se ve que el cuerpo celeste se intente detener.

---

<sup>1</sup> (Rivera, Madrigal-Melchor, Cabrera-Muruato, & Mercado, 2014)

En referencia al movimiento celeste se generan otras explicaciones frente al movimiento de éstos intentando dar a conocer el movimiento forzado de los astros pero muy complicados de explicar y entender , lo cual da que las fuerzas no son concebidas a distancia por lo cual se complica aún más el poder explicar el movimiento de diferentes objetos en el cielo, solo dando una explicación de que los objetos poseen esa característica propia de generar ese movimiento o de caer naturalmente para buscar su lugar.

### 1.1.2. Visión Galileana

La visión presentada por Aristóteles respecto a ese motor que genera el movimiento en los cuerpos fue aceptada por científicos tales como Copérnico, debido a que presentaba una simplicidad que contrastaba la simple intuición y comprobada a simple vista, por lo cual se necesitó de muchos años para poder dar el salto en referencia a la concepción del concepto de fuerza, hasta llegar al que se presenta y se demuestra mediante un lenguaje matemático, entre los científicos que mostraron una nueva explicación del por qué los cuerpos se mueven y cómo lo hacen se encuentra Juan Filópon en donde al explicar el movimiento de proyectiles mediante una “fuerza impresa” la cual es dada al proyectil por el objeto que le generó el movimiento y no que esta provenía del mismo objeto o del medio donde se movía, como lo daba por hecho Aristóteles, este salto da una primera explicación de forma distinta a la que se daban hasta el momento y que Galileo en sus primeras explicaciones presenta cierta similitud y utiliza el concepto de fuerza impresa.

Galileo en sus primeras explicaciones sobre el concepto de fuerza muestra gran similitud con lo expresado por Aristóteles refiriéndose a ésta como una presión que se realiza sobre un objeto para que se mueva en dirección contraria a la que se movería naturalmente el objeto, visión que determinaba que la fuerza era algo externo al cuerpo y que si no existiera el objeto se movería hacia su lugar determinado por su naturaleza. Al pasar el tiempo su percepción sobre la fuerza

se va transformando por una teoría más cercana a la fuerza impresa o ímpetu, en la cual puede ser transferida a diferentes cuerpos y separarse de la fuente que la genera, muy similar a las cualidades sustanciales como el calor o el sonido, pero todo esto debía tener un lenguaje matemático del cual carecía en ese momento, por lo cual fue necesario que Galileo generara una nueva visión alejada de los paradigmas Aristotélicos y las visiones de fuerza impresa que se trabajaban en contraposición de la mirada aristotélica, como lo expresa Geymonat “le convencería de la necesidad de constituir una nueva mecánica liberada tanto de los esquemas aristotélicos como de los de la física parisina” (Geymonat, 1969), de esta forma fue necesario la generación de una base matemática que permitiera cuantificar la fuerza y sus efectos, generando también diferencias entre lo que se entendía por ímpetus a pasar a denominar este como el efecto observable debido a la aplicación de una fuerza, generándose una similitud con el concepto moderno de movimiento lineal debido a la relación dada por Galileo al ímpetu entre la masa de un cuerpo y la velocidad presente en éste.

### 1.1.3. Visión Newtoniana

Newton intenta dar solución a dos inquietudes que se presentaron en el siglo XVII en las cuales se deja de lado esa pregunta expuesta por Platón y que los grandes filósofos y científicos de la ciencias habían intentado explicar de forma cuantitativamente, esta pregunta a la que intentaron dar respuesta fue *¿Qué hipótesis de movimiento uniforme y ordenados puede explicar el movimiento aparente de los planetas?*, la nueva preocupación por los hombres de ciencia rondaba sobre dos inquietudes distintas, aunque sobre el mismo tema de interés; *¿Qué fuerzas actúan sobre los planetas para explicar la trayectorias observadas?* Y *¿Cómo han de explicarse los efectos observados de la gravitación terrestre ahora que la doctrina aristotélica ha fallado?.* Los estudios que se llevaban hasta el momento de la historia se basaban en aspectos cualitativos, pero con el avance de los instrumentos de medición y la ciencia en general, apoyados en lo expuesto por Galileo se empieza a tener una nueva ciencia, en donde se ve la



necesidad de cuantificar las teorías y poder explicar de forma matemática cada uno de los descubrimientos y avances encontrados en estos nuevos campos.

Se debe destacar que Newton a la edad de 24 años ya presentaba varios aportes a lo referente de la matemática, tal es el caso de la generación del teorema del binomio y como no nombrar la creación del cálculo diferencial, al mismo tiempo que Leibniz. También en otros campos como lo fueron la óptica con su teoría acerca de la luz y el color, en los cuales recibió muchas críticas desde lo cual dejó de realizar publicaciones, no dejando de lado su interés por la indagación y la solución de los diferentes interrogantes expuestos en este siglo. De esta forma es que se concentró en sus estudios sobre la mecánica celeste y el movimiento planetario encontrando cuáles eran sus dinámicas y las fuerzas que determinaban estos. Todo esto debido a que ya existían unas leyes que determinaban los movimientos de los planetas (las leyes expuestas por Kepler) pero no se habían podido cuantificar o matematizar como era la fuerza que regía estas nuevas trayectorias elípticas que presentaban los planetas.

Es por esto que su gran amigo Edward Halley le pidió una explicación a él por qué o cuál era el valor de la fuerza que los planetas generaran una trayectoria elíptica, a lo cual Newton ya tenía una explicación matemática y es lo que hoy conocemos como la ley de gravitación universal , y es lo que lo lleva a publicar una de las obras más importantes de la ciencia como lo es el PRINCIPIOS DE LA FILOSOFÍA NATURAL, en la cual se exponen como es que las fuerzas que rigen los movimientos en la Tierra son idénticos a los que rigen la mecánica celeste.

Aunque su obra maestra no es totalmente un trabajo sobre la fuerza de gravitación que permite que los objetos masivos interactúen uno con otro, si se puede decir que *Principios* es una puerta a entender toda la dinámica de los cuerpos terrestres y es desde allí que se empieza a dar unas definiciones importantes en la interpretación y explicación de las fuerzas y luego de generar esas tres leyes de la dinámica, que en general es la recopilación de la perspectiva de que poseían todos esos grandes científicos antecesores de

Newton como Galileo, pero que son plasmados y explicados mediante un lenguaje nuevo como es el de la matemáticas.

Algo muy importante en el análisis realizado por Newton respecto a las fuerzas que actúan en las trayectorias elípticas de los cuerpos celestes, es que estos no se encuentran en equilibrio y que existe una fuerza resultante que es la que permite que los objetos generen esta trayectoria, ya que si no estuviera presente ésta fuerza centrípeta los objetos se moverían en trayectorias rectilíneas. El decir que la fuerza va dirigida hacia el centro fue deducción a partir de la segunda ley de Kepler, identificando que la fuerza debía estar dirigida hacia uno de los focos de la elipse y si es el caso especial de un círculo hacia el centro de éste.

Luego de corroborar la existencia de una fuerza en dirección hacia el centro (fuerza centrípeta) surgía la necesidad de encontrar cuál era el valor o magnitud de dicha fuerza. Para ello Newton centró todos sus esfuerzos en encontrar una ley que permitiese evidenciar la trayectoria lo más exacta posible como lo había podido comprobar observacionalmente Johannes Kepler. Para ello se enfocó en la geometría de las figuras cónicas, dando como resultado que la fuerza descrita está dada a razón de:

$$F = \frac{C}{R^2}$$

En donde C es una constante diferente en cada uno de los cuerpos en los cuales se evidencia la fuerza y R es la distancia media desde el foco de la elipse hasta el centro del objeto.

Con esto no se quiere decir que antes no se tuvieran teorías sobre la naturaleza de esta fuerza, Kepler había dado como posible fuerza magnética producida por el Sol que generaba una atracción entre los diferentes planetas y el astro mayor del sistema solar, lo cual solo le servía para dar cuenta del movimiento mas no para poder determinar un valor exacto de esta fuerza y el por qué se movía en esta órbita determinada. Cabe resaltar que Johannes Kepler pensó por primera vez que el Sol posee un factor importante, aunque no de naturaleza magnética.

Para dar respuesta a todos estos interrogantes Isaac Newton propone que *“que todos los cuerpos en el universo se atraen unos a otros con una fuerza gravitatoria, como la que existe entre una piedra que cae en la Tierra.”* De esta forma se considera que la gravedad podría unificar los fenómenos terrestres como los fenómenos que ocurren al interior de la Tierra y es así como se puede llegar a pensar en las descripciones físicas de los cuerpos bajo la mirada de la ley de gravitación universal de Newton.

## 1.2.Las leyes de Johannes Kepler

Johannes Kepler pensando en el modelo Copernicano de un sistema planetario heliocéntrico y con movimiento de los cuerpos celestes conocidos hasta el momento de forma de movimiento circular uniforme y con unos pocos epiciclos, intento con la ayuda de los datos recopilados por su jefe Tycho Brahe, dado que posee unos instrumentos de medición mucho más precisos a los utilizados por Copérnico, en encontrar las características de este movimiento pensándolo en primer momento uniforme. Analizando los datos para determinar la órbita de Marte, se pudo dar cuenta que los cálculos diferían de los datos por ocho minutos de arco, de esta forma encontraba fallas en las la teoría copernicana de las órbitas celestes de los planetas ya que las observaciones que se hacían en esos momentos de la historia presentaban una precisión mayor a el error encontrado.

Dadas estas cuestiones encontradas y que la teoría desarrollada por Copérnico no podía responder, Kepler intenta explicarlas no desde un movimiento circular sino acoplando otra trayectoria que permitiera reducir el error y diera cuenta del movimiento de los planetas observables o conocidos hasta el momento. Es así como encuentra que la elipse se ajusta exactamente a lo que se observa en las órbitas planetarias, simplificando lo referente a las excentricidades y los epiciclos propuestos por Copérnico, de esta forma se llega a la explicación de la primera ley de Kepler *“Los planetas describen trayectorias elípticas en donde el Sol ocupa uno de los focos de la misma”*, se evidencia que es un ley empírica ya que

describe las trayectoria de los astros pero no puede determinar ni la posición, ni la velocidad con que estos planetas se mueven en estas órbitas, lo cual es de vital importancia para explicar el por qué en determinadas épocas del año se percibe al Sol con velocidades diferentes atravesar las estrellas en el cielo.

Para poder responder o predecir en donde se encontrará un planeta en su órbita en un determinado momento del año Kepler realiza una serie de hipótesis para poder intuir y explicar esta ley, lo primero que se postula es que las órbitas se realizan debido a una fuerza aplicada por el Sol y que la intensidad de ésta era inversamente proporcional a la distancia a la que se encuentre del planeta el Sol, concluyendo Kepler que la velocidad del planeta es directamente proporcional a la fuerza aplicada e inversamente proporcional a la distancia de separación entre ellos. Otra de las hipótesis propuesta por Kepler fue la de pensar la órbita como si fuera una circunferencia perfecta, que no difiere mucho con las órbitas de la mayoría de los planetas y al realizar la suma de las distancias a las que se encontraba el planeta del Sol e determinados tiempos era igual al área barrida por la línea trazada desde el Sol hasta el planeta de referencia. Es así como se postula la segunda ley de Kepler: *“Durante un determinado intervalo de tiempo una recta trazada del planeta al Sol barre áreas iguales en cualquier punto de su trayectoria.”* con lo cual también se puede predecir la posición de cualquier satélite de un planeta en su órbita.

Al dar a conocer las dos primeras leyes, Kepler no se siente satisfecho con su trabajo debido que no concebía que cada planeta en su trayectoria fuese independiente de los otros planetas y que no existiría una vinculación entre todos estos movimientos, de eta forma y analizando los datos para cualquier planeta deduce su tercera ley llamada también la ley armónica en la cual establece: *“el cuadrado del periodo de un planeta dado  $T$  es proporcional al cubo del radio  $R$  medio de su órbita”*, es así que no importa el plantea que se desee estudiar ya que su relación es una constante que tiene el mismo valor para cualquier planeta, la cual se entenderá mejor al momento de determinar la ley de gravitación universal expuesta por Newton.

### 1.3. Derivación de Newton de la fuerza gravitacional

Dado el avance en la cinemática de los cuerpos celestes expuesta por Kepler y sus tres leyes, existía la necesidad de encontrar la razón por la cual estos cuerpos reproducían estas órbitas y bajo qué fuerzas se mantenían los cuerpos celestes para que se mantuviesen girando con velocidades aparentemente constantes. Los primeros avances en comprender la dinámica celeste que realizó Newton estuvieron destinados a comprender el movimiento que realiza la Luna alrededor de la Tierra ya que si no existiera una fuerza que mantuviese a la Luna en su órbita esta se alejaría en línea recta con una velocidad constante, si se observa la trayectoria desde la Tierra es aproximadamente circular, aunque ya se sabe que la trayectoria es una elipse de excentricidad del orden de 0.0167. De ahí se genera la explicación de Newton respecto a que el mismo tipo de fuerza asociada a la caída de un objeto en la Tierra podría ser la responsable de mantener a la Luna en su órbita.

Ya la aceleración con que caían los cuerpos en la Tierra se había podido medir gracias a los cálculos de Galileo Galilei dando como valor aproximado  $9.8 \text{ m/s}^2$  (en unidades actuales, acá escogimos SI); al realizar los cálculos para determinar la aceleración con la que gira la Luna respecto a la Tierra, Newton tomó como cálculo de la distancia de separación entre los dos cuerpos en relación al radio de la Tierra, dando como distancia 60 veces este, encontrando un valor de la aceleración entre la Tierra-Luna de aproximadamente  $2.7 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$ . Dados los resultados obtenidos y tomando como suposición de que se trata del mismo tipo fuerza con la que la Tierra atrae a la Luna y la que realiza al dejar caer un objeto, Newton tuvo que relacionar la distancia como factor importante en la fuerza atractiva entre los dos cuerpos cualesquiera.

Para poder llegar a la ley de gravitación universal se necesitó pasar del caso anterior al del movimiento de los planetas alrededor del Sol, asumiendo que la naturaleza de la fuerza es la misma, aunque los cuerpos son diferentes, y tener como referencia la tercera ley de Kepler y así encontrar las fuerzas centrípetas

que permiten a los planetas mantenerse en sus órbitas determinadas. Para ello, aunque se sabe que son órbitas elípticas, se consideró que en primera aproximación se pueden considerar como órbitas circulares, en cuyo caso la aceleración es del tipo centrípeta e igual a:

$$a = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

Utilizando esta aceleración y reemplazándola en la segunda ley del movimiento de Newton, se encuentra que la fuerza centrípeta que permite a cualquier planeta orbitar alrededor del Sol es:

$$F = M \left( \frac{4\pi^2 R}{T^2} \right)$$

Dónde:  $T$  es periodo orbital y  $R$  es el radio orbital del planeta.

Si se utiliza la tercera ley de Kepler para sustituir el periodo en la anterior ecuación se obtiene:

$$F = M \left( \frac{4\pi^2 K}{R^2} \right)$$

En donde la fuerza solo depende de la masa del planeta ( $M$ ) y la distancia que separa al planeta del Sol, los demás términos de la ecuación se consideran como constantes que en su momento se pensó que era la característica propia del elemento masivo que permite atraer a los diferentes objetos como lo son los planetas. De esta forma Newton demuestra que la fuerza de atracción es directamente proporcional a la masa del planeta e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que lo separa del Sol. Ahora bien, de acuerdo con la tercera ley de Newton, si un cuerpo A atrae a otro cuerpo B, también B debe atraer al cuerpo A, en direcciones contrarias; esto es aplicable al caso de las fuerzas centrales como lo es la fuerza gravitacional. De acuerdo con esto y el raciocinio anterior, la expresión de la fuerza de atracción gravitacional entre cuerpos debe incluir en forma proporcional directa las masas en forma

multiplicativa, mientras que la distancia aparece en dicha ley en forma inversa con el cuadrado de la distancia. En resumen, Newton encuentra que si en general dos cuerpos masivos de masas  $M_1$  y  $M_2$ , separados una distancia  $d$ , la magnitud de la fuerza con que se atraen gravitacionalmente es igual a:

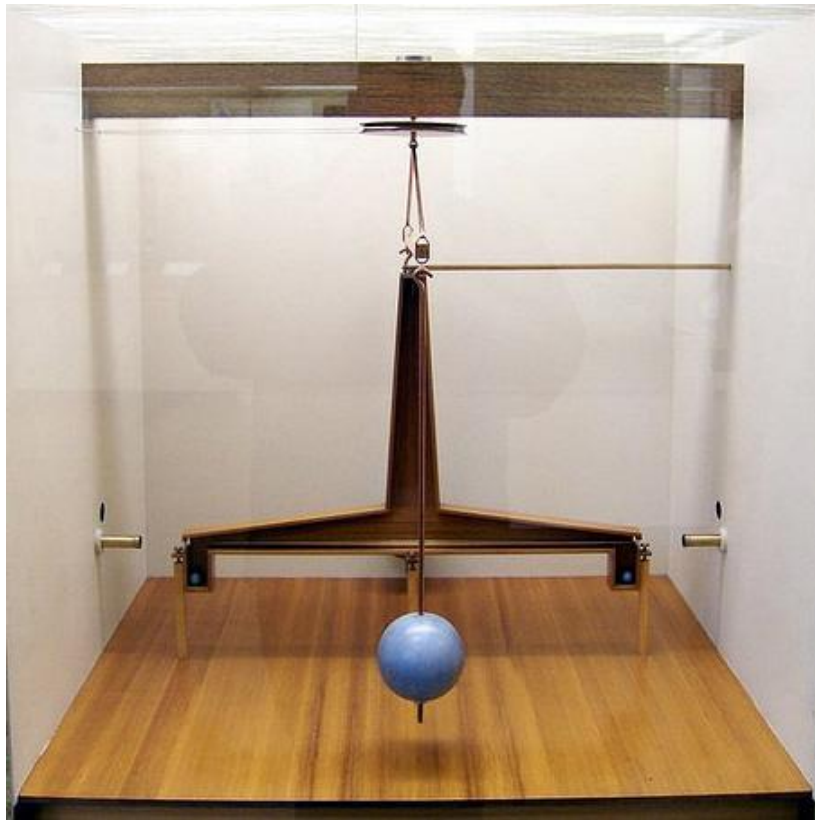
$$F = G \frac{M_1 M_2}{d^2}$$

En donde  $G$  es la constante de gravitación o constante de Cavendish. La primera versión la publicó Newton en la edición primera de los Principia en 1687, pero él no reportó ningún valor para la constante  $G$ . La forma vectorial de esta ley la desarrollamos en la sección siguiente. El primer intento experimental para medir esta constante es debida a Henry Cavendish (1731-1810)<sup>2</sup>, quien dado su conocimiento de la ley de gravitación universal, le generó un gran interés el saber cuál era la magnitud de la ley de gravitación, de la ecuación (1) y (2) para ello diseñó un experimento, utilizando una balanza de torsión que le proporcionó su amigo geólogo el reverendo John Michell (1724 – 1793), quien intento mas no logró llevar a cabo el experimento antes de su muerte y para no perder sus avances fue enviado a Cavendish quien tomando su idea rediseña su balanza de torsión y así poder determinar tanto la densidad media de la Tierra como la masa de esta, su balanza consistía en una barra de alambre en la cual de cada extremo se encontraba una esfera pequeña de plomo de iguales masas y diámetro, esta barra de alambre reforzado con plata colgaba de un fino alambre y a cada extremo, cerca se encontraban dos esferas de 175 Kg de plomo, cada una, las cuales generan una atracción a las masas de la balanza, para que el viento no interfiriera en la medición el experimento se realizó en un cuarto donde no existiera corrientes de aire y el movimiento se midió a través de un telescopio debido a la mínima atracción que se presentaba por los cuerpos. La balanza giraba hasta que la fuerza de atracción fuese igual a la fuerza soportada por el

---

<sup>2</sup> adaptado de la página web de la American physical society  
<https://www.aps.org/publications/apsnews/200806/physicshistory.cfm> y de un experimento para pesar el mundo <http://www.escriitoscientificos.es/trab21a40/pesotierra/pesotierra.htm>

hilo en torsión, el ángulo de giro por el hilo al igual que la fuerza de torsión eran los únicos valores necesarios para que Cavendish encontrara la densidad media de la Tierra utilizando la ley de gravitación universal de Newton, dando como valor  $5.448 \pm 0.033$  veces la densidad del agua ( $1 \text{ g/cm}^3$ ), aunque este valor presentaba un error de procedimiento el cual fue encontrado por Francis Baily corrigiéndose a  $5.48 \pm 0.038$ , luego con la determinación del periodo de oscilación, fue posible encontrar la constante de gravitación universal aunque para ello paso un tiempo determinado ya que para Cavendish ese no era el objetivo de su experimento.



**Imagen 1** Balanza de torsión a escala 1:48 que se encuentra en el museo de ciencia de Londres. Tomada de [ww.escrioscience.es/trab21a40/pesotierra/pagina02.htm](http://ww.escrioscience.es/trab21a40/pesotierra/pagina02.htm)

En la imagen 1 se observa una réplica de la balanza de torsión utilizada por Cavendish en la cual se observan las esferas de plomo y como estas interactúan con el brazo de madera y las otras dos esferas mucho más pequeñas del mismo



material. Es importante comprender que se utiliza plomo debido a que este no presenta propiedades magnéticas que puedan afectar la medición.

A continuación se presentan dos imágenes más del montaje experimental utilizado y explicado por Cavendish en sus manuscritos para llevar a cabo su experimento, se observan tanto una imagen frontal (Imagen 2), como una imagen vista desde la parte superior (Imagen 3)

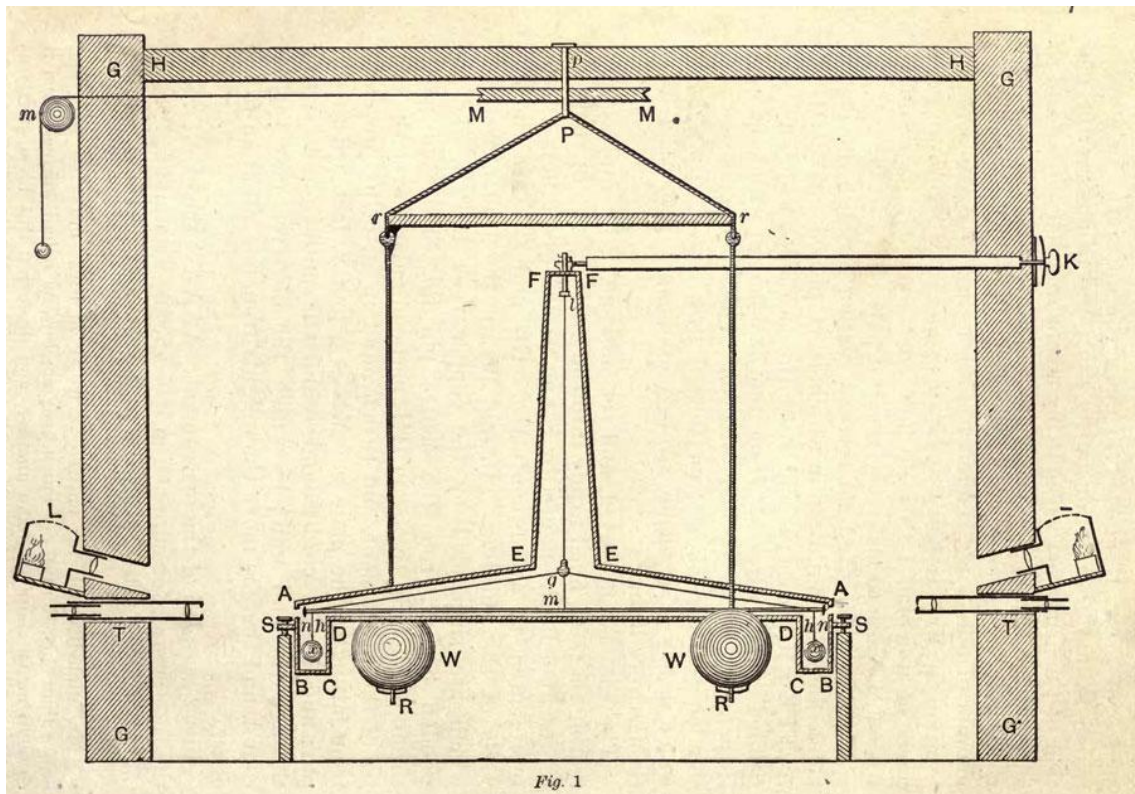


Imagen 2 Esquema frontal de la balanza de torsión utilizada por Cavendish. Tomada de [ww.escritoscientificos.es/trab21a40/pesotierra/pagina02.htm](http://ww.escritoscientificos.es/trab21a40/pesotierra/pagina02.htm)

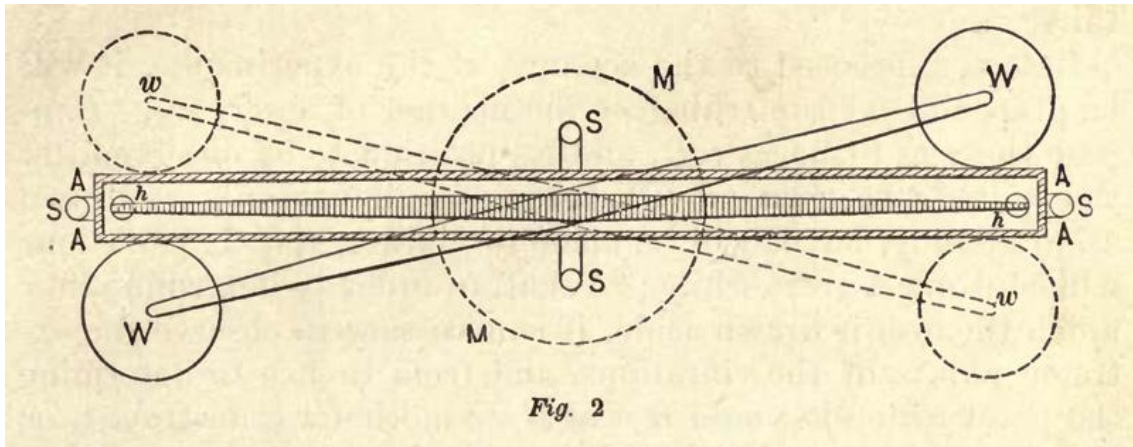


Imagen 3 Esquema superior de la balanza de torsión utilizada por Cavendish. Tomada de [www.escriitoscientificos.es/trab21a40/pesotierra/pagina02.htm](http://www.escriitoscientificos.es/trab21a40/pesotierra/pagina02.htm)

En cada una de las imágenes se ilustra las partes de la balanza denotadas en letras mayúsculas de la A a la F, tomando una escala de realización de 1:13.

En la imagen 3 se ilustra la oscilación realizada por la barra cuando se le colocan las dos esferas masivas de plomo debido a la atracción que se produce, como se observa la barra pasa de las líneas punteadas a su ubicación W, posición final.

Para la determinación de la constante de proporcionalidad observada en la ley de gravitación universal el físico y químico Henry Cavendish utilizó la fuerza de atracción entre masas, pero no como la de los planetas sino la de dos masas de igual diámetro masivas de plomo. Las dos masas separadas una distancia determinada por medio de una barra rígida se consideran con masa despreciables por ende su periodo se puede determinar como:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{2md^2}{K}}$$

Donde:

$2md^2$  es el momento de inercia de la barra rígida que posee en sus extremos las dos masas de plomo.

$K$  es la constante de torsión que presenta el hilo de donde cuelga la barra.

Al despejar esta  $K$  se obtiene:

$$K = \frac{8\pi^2 m d^2}{p^2}$$

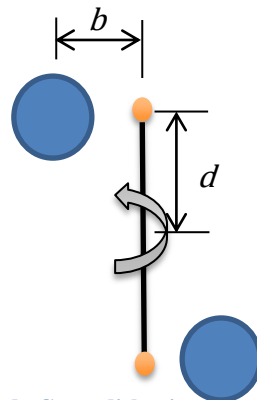


Figura 1. Esquema de la balanza de torsión de Cavendish, vista superior. Elaboración propia.

Para determinar la fuerza de atracción entre las masas grandes ( $M$ ) y las masas sujetas a la barra ( $m$ ) se puede expresar mediante la expresión:

$$F = G \frac{Mm}{b^2}$$

Para medir en ángulo de torsión Cavendish utilizó un telescopio y un espejo en el cual incidía un haz de luz que se desviaba al momento de presentarse la fuerza de atracción entre las masas. De esta forma teniendo en cuenta que el ángulo formado entre el haz de luz incidente y reflejado, describe una distancia total en la pared determinada como de  $x_f$ , de esta forma se puede determinar el ángulo de torsión como se observa en la figura (2) mediante la expresión:

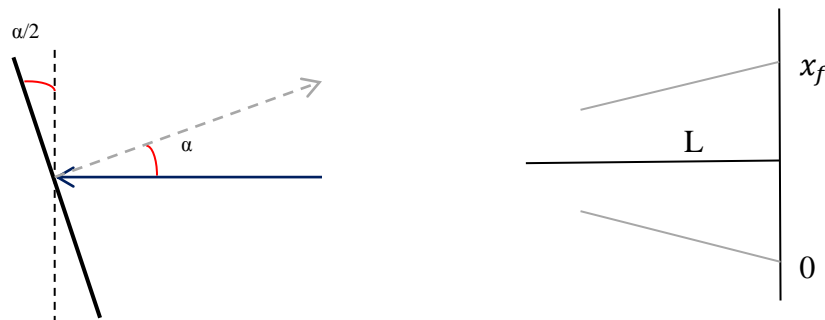


Figura 2. Esquema de del haz de luz incidente y reflejado que permite determinar el ángulo de torsión mediante la distancia en la pared.

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{x_f}{2L}$$

Esta consideración se puede dar debido a que el ángulo es muy pequeño y su variación con la tangente es mínima. Al igualar las fuerza de torsión y la fuerza de atracción entre las dos masa observamos que:

$$G \frac{Mm}{b^2} = \frac{K\alpha}{4d}$$

Reemplazando la constante K y el ángulo de torsión en la igualdad se obtiene:

$$G \frac{Mm}{b^2} = \frac{8\pi^2 m d^2 x_f}{4d P^2 2L}$$

Despejando la constante gravitacional G se obtiene:

$$G = \frac{\pi^2 b^2 d x_f}{M P^2 L}$$

El valor aceptado hoy en día (CODATA 2014) de la constante gravitacional de Cavendish es:

$$G = 6.67408 (31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ Kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

#### 1.4. Descripción moderna del problema gravitacional de los dos cuerpos

Como la fuerza de atracción gravitacional entre dos cuerpos de masa  $m_1$ ,  $m_2$  es atractiva, la dirección de la fuerza está en la línea que une los cuerpos (asumiéndolos puntuales). Por ello se dice que la fuerza de gravitación es una fuerza central.

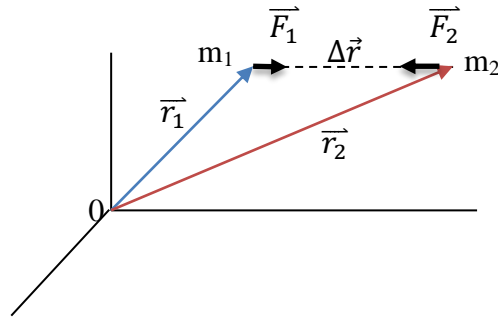


Figura 3. Las posiciones de dos partículas ( $m_1, m_2$ ) en un sistema de referencia inicial dado. Elaboración propia

En la figura (3)  $\Delta\vec{r}$  es  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$  y  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  representan los vectores de posición de las partículas de las  $m_1, m_2$  respectivamente, con respecto a un sistema inercial, allí  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  denotan las fuerzas con que la partícula 2 atrae gravitacionalmente la partícula 1,  $\vec{F}_1$  y la fuerza con la que la partícula 1 atrae a la partícula 2  $\vec{F}_2$ . De acuerdo con la ley gravitacional de Newton, la magnitud de la fuerza de atracción gravitacional es directamente proporcional al producto de las masas de las partículas interactuantes e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas:

$$\vec{F}_1 = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{e}_r, \vec{F}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{e}_r$$

En donde  $G = 6,67408(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ Kg}^{-1}$  (tomado de [www.codata.org](http://www.codata.org)), es la constante de Cavendish  $r = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$  es la magnitud del vector  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  y  $\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$  es el vector unitario en la dirección y sentido en la que va la partícula 1 hasta la partícula 2.

Como la fuerza gravitacional es central el torque total es nulo y por tanto el momentum angular total también es nulo. En efecto nuestro sistema de coordenadas que se ilustra en la figura (1) y suponiendo que es un sistema de referencia inercial, se realiza el torque total. Ahora bien el moméntum angular total del sistema es  $\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$ . La derivada con respecto al tiempo de este moméntum angular total es:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2) = \dot{\vec{r}}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_1 \times \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{r}}_2 \times \vec{p}_2 + \vec{r}_2 \times \dot{\vec{p}}_2$$

$$\text{Pero: } \begin{cases} \dot{\vec{r}}_1 \times \vec{p}_1 = \vec{v}_1 \times (m_1 \vec{v}_1) = \vec{0} \\ \dot{\vec{r}}_2 \times \vec{p}_2 = \vec{v}_2 \times (m_2 \vec{v}_2) = \vec{0} \end{cases}$$

Ya que en general  $\vec{A} \times (\beta \vec{A}) = \vec{0}$ ,  $\beta$  es un escalar entonces:

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2) = \vec{r}_1 \times \dot{\vec{p}}_1 + \vec{r}_2 \times \dot{\vec{p}}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{\tau} = \vec{0}$$

En otras palabras, el torque total de este sistema es nulo e igual a la derivada temporal del momento angular total del sistema, lo cual implica la conservación de este último.

Esta conservación del momento angular total implica a su vez que el movimiento de las dos partículas se realiza en un plano. En efecto,  $\vec{L}$  es perpendicular tanto a  $\vec{r}_1, \vec{p}_1$  como a  $\vec{r}_2, \vec{p}_2$ , y cada pareja vectorial citada  $(\vec{r}, \vec{p})$  nos define el plano instantáneo de la trayectoria de cada partícula.

Implicando que el movimiento se lleva a cabo en un plano. En efecto:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 &= \vec{r}_1 \times \frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{e}_r - \vec{r}_2 \times \frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{e}_r = \frac{Gm_1m_2}{r^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \hat{e}_r \\ &= -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{e}_r \times \hat{e}_r = \vec{0} \end{aligned}$$

En resumen:

$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ , entonces si  $\vec{\tau} = \vec{0}$ ;  $\vec{L} = \text{constante}$  en el sistema de referencia dado:  $\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$ , vemos entonces que los vectores de posición  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  y de momentum  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$  están en un mismo plano. Apliquemos ahora la segunda ley de Newton a la partícula, asumiendo sus masas constantes:

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1 = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{e}_r, \quad m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2 = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{e}_r, \quad (1)(2)$$

En donde las aceleraciones  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  vienen dadas por:

$$\vec{a}_1 = \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}, \quad \vec{a}_2 = \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}$$

Remplazando las aceleraciones en las expresiones de la fuerza (ecuación 1,2) tenemos:

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \frac{Gm_2}{r^2} \hat{e}_r, \quad \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{r^2} \hat{e}_r$$

Restándolas obtenemos:

$$\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2} \hat{e}_r$$

O bien, como:

$$\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

De este modo, hemos llegado a :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2} \hat{e}_r \quad (3)$$

En donde la cantidad  $\mu$  de la ecuación anterior se define como:  $\mu = G(m_1 + m_2)$

Como el movimiento se lleva a cabo en un plano, es conveniente usar coordenadas polares:

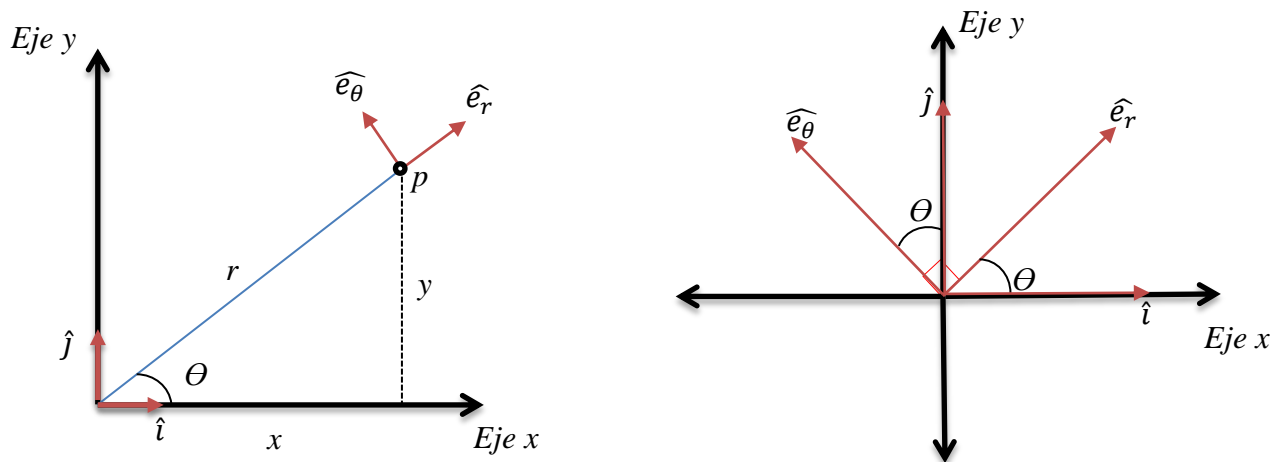


Figura 4 Coordenadas cartesianas y polares de un punto P en el plano. Elaboración propia

El vector de posición  $\vec{r}$  en el plano (ver figura 2) se puede escribir en el plano, usando las coordenadas cartesianas(x,y) o polares (r,Θ) de un punto dado. En la figura 2,  $\hat{i}, \hat{j}$  es la base ortogonal cartesiana (direcciones “fijas” en el espacio), mientras que la base ortogonal  $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$  es la asociada a las coordenadas polares, sus direcciones varían con el punto a describir. De acuerdo con lo anterior:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = r\hat{e}_r \quad (4)$$

A  $\vec{r}$  se conoce como el vector relativo entre las partículas. La figura 2 nos permite escribir:

$$\hat{e}_r = \hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta, \quad \hat{e}_\theta = -\hat{i} \sin \theta + \hat{j} \cos \theta \quad (5)$$

Derivando las bases polares con respecto al tiempo (ecuación 5)

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta, \quad \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r \quad (6)$$

En donde el punto representa la derivada con respecto al tiempo:

$$\dot{\hat{e}}_r = \frac{d\hat{e}_r}{dt}, \quad \dot{\hat{e}}_\theta = \frac{d\hat{e}_\theta}{dt}, \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

Con base en las ecuaciones (4), (6) podemos expresar  $\ddot{\vec{r}}$  en la base polar, en efecto:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

Derivando otra vez:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\hat{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\hat{e}}_\theta$$

O bien:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta \quad (7)$$

Dos vectores son iguales si sus componentes respectivas son iguales entre sí. Así, llevando la ecuación (7) a la ecuación (3), e igualando las componentes obtenemos:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \quad (8)$$



$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad (9)$$

Si multiplicamos ambos lados de la ecuación (9) por r:

$$0 = r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

Se encuentra así una constante de movimiento

$$h = r^2\dot{\theta} : \text{constante} \quad (10)$$

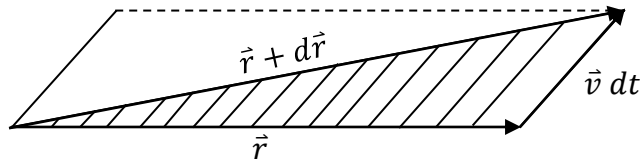


Figura 5 área barrida por el radio vector. Elaboración propia.

Para interpretar la ecuación (10) veamos la figura (5), el paralelogramo tiene un área  $\|\vec{r} \times \vec{v} dt\|$  y la mitad de dicha área representa el área barrida por el vector de posición en el intervalo infinitesimal de tiempo  $dt$ , el cual se denota  $dA$ , ahora bien:

$$(dA) \hat{K} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} dt = \frac{1}{2} (r\hat{e}_r) \times (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) dt = \frac{1}{2} (r^2\dot{\theta} dt) \hat{K} = \frac{1}{2} h \hat{K} \quad (11)$$

En donde  $\hat{K}$  es el vector unitario en la dirección positiva del eje z cartesiano. De las ecuaciones (10) (11), vemos que:

$$h = r^2\dot{\theta} = 2 \frac{dA}{dt} \quad (12)$$

Para intervalos de tiempo finitos ( $\Delta t$ ) la ecuación (12) lleva a la segunda ley de Kepler

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = h : \text{constante}$$

O en palabras, el radio vector heliocéntrico del planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

Es decir, la constante  $h$  que es una integral de movimiento, representa tanto el momento angular por unidad de masa, así como el doble del área barrida por el

radio vector relativo en la unidad de tiempo. Si despejamos  $\dot{\theta}$  en la ecuación (10) y la reemplazamos en la ecuación (8) se llega a:

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{\mu}{r^2} \quad (13)$$

Hagamos un cambio de variable independiente (tiempo) de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} = \frac{dh}{r^2} \frac{d}{d\theta} = \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta}$$

En donde tuvimos en cuenta la ecuación (10) para  $\dot{\theta}$

Entonces:

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \right) = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right)$$

Si esta forma de expresar  $\ddot{r}$  se lleva a la ecuación (8) y si además tenemos en cuenta la ecuación (10) para escribir el término  $r\dot{\theta}^2$  entonces queda:

$$r\dot{\theta}^2 = \frac{h^2}{r^3}$$

La nueva forma de la ecuación (8) es:

$$\frac{h}{d\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{\mu}{r^2}$$

O bien, simplificando  $r^2$  en ambos lados se obtiene:

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{1}{r} = -\frac{\mu}{h^2} \quad (14)$$

Procedemos entonces en la ecuación (14) a realizar un cambio de variable radial de:

$$u = \frac{1}{r} \quad (15)$$

Así:

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = u^2 \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) = u^2 \left( -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{du}{d\theta}$$

De este modo la ecuación (14) toma la forma:

$$\frac{d}{d\theta} \left( -\frac{du}{d\theta} \right) - u = -\frac{\mu}{h^2}$$

Finalmente se encuentra una ecuación diferencial de segundo orden equivalente a la ecuación (13)

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2} \quad (16)$$

La solución es de tipo

$$u = u_H + u_p$$

En donde  $u_H$  es la solución de la ecuación homogénea y  $u_p = \frac{\mu}{h^2}$  es la solución particular. La solución homogénea es armónica:

$$u_H = B \cos(\theta - \theta_0)$$

En donde B y  $\theta_0$  son constantes, se redefine B así:

$$B = \frac{e\mu}{h^2}$$

En donde  $e$  es un número real.

La solución general de la ecuación (16) es:

$$u = u_H + u_p = \left( \frac{e\mu}{h^2} \right) \cos(\theta - \theta_0) + \frac{\mu}{h^2}$$

De este modo (ver ecuación (15)) se puede concluir que la trayectoria relativa es:

$$\frac{1}{r} = \left( \frac{\mu}{h^2} \right) [1 + e \cos(\theta - \theta_0)]$$

O bien:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (17)$$

En donde  $p = \frac{h^2}{\mu}$ , La ecuación (17) es la forma polar de una cónica:

1. Si  $e=0$ , se tiene una circunferencia.

2. Si  $0 < e < 1$ , se tiene una elipse de excentricidad  $e$ , y semi-lado recto  $p = a(1 - e^2)$  en donde  $a$  es el semi-eje mayor de la elipse.
3. Si:  $e = 1$ , se tiene una parábola.
4. Si:  $e > 1$ , se tiene una hipérbola.

La ecuación (17) representa la trayectoria relativa del problema Newtoniano de los dos cuerpos en coordenadas polares, este se debe aplicar al caso de la interacción del Sol y la Tierra, claramente desde la Tierra es posible observar al Sol como un objeto extenso, no puntual sino con una extensión angular comparable a medio grado. Así, el radio es de unos 700000 kilómetros mientras que la unidad astronómica, distancia media Tierra-Sol, es del orden de 150 millones de kilómetros. Es decir la Tierra está a unos 214.3 radios solares.

Newton demostró dos teoremas para cuerpos con simetría esférica, el primero de ellos considera la interacción gravitacional entre un cuerpo extenso con simetría esférica (masa  $M$ , radio  $R$ ) y una partícula puntual (masa  $m$ ) externa, encontrando que dicha interacción es equivalente al de dos partículas puntuales separadas una distancia  $d$  que va del centro del cuerpo extenso a la partícula, ver figura (6).

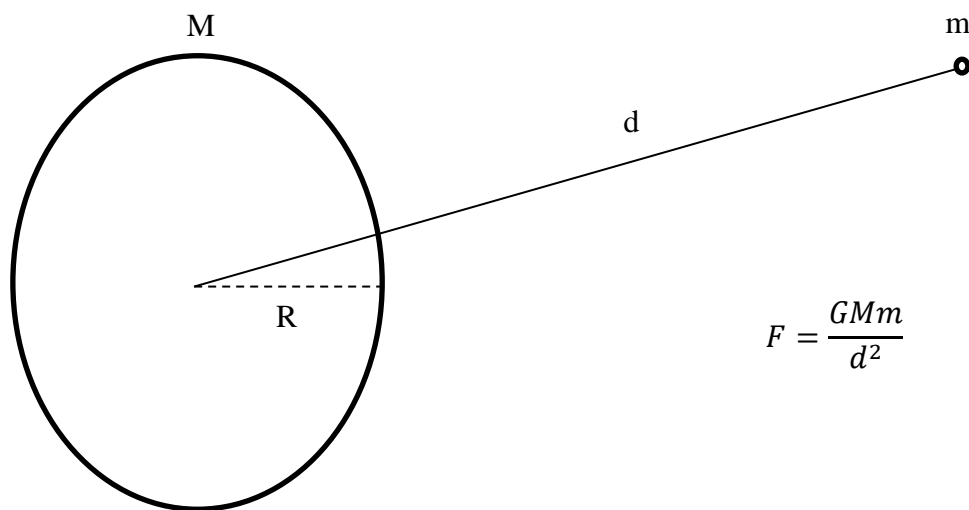


Figura 6 Interacción entre un cuerpo extenso y uno puntual separados una distancia  $d$ . Elaboración propia

El segundo teorema considera a la partícula puntual en el interior del cuerpo extenso, encontrando que la fuerza neta que el cuerpo extenso ejerce sobre la partícula puntual viene dada por la masa  $M(r)$  encerrada en el radio  $r$ , siendo este radio la distancia a la que está la partícula puntual con respecto al centro de la configuración.

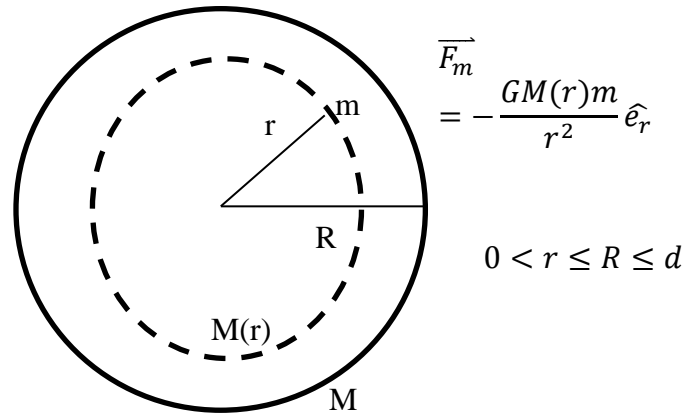


Figura 7: Interacción entre dos cuerpos uno en el interior del otro. Elaboración propia.

### 1.5. Consideración sobre la energía y el movimiento

La ecuación  $\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \hat{e}_r$  que describe la versión Newtoniana de los dos cuerpos, si se multiplica escalarmente en ambos lados de la ecuación por  $\dot{\vec{r}}$  (recordar ecuación  $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$ )

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \hat{e}_r \cdot (\dot{r}\hat{e}_r) + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \cdot \dot{\theta}\hat{e}_\theta = -\frac{\mu\dot{r}}{r^2} \quad (18)$$

Pero:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \right) = \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\mu}{r} \right) = -\frac{\mu\dot{r}}{r^2}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\mu}{r} \right) \quad (19)$$

De esta expresión, parando ambos términos a la igualdad, tenemos:

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\mu}{r} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} \right)$$

Por lo tanto encontramos otra cantidad de movimiento:

$$E = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} : \text{constante} \quad (20)$$

La cual (E) se conoce como "la energía total" por unidad de masa

$$\frac{1}{2} v^2 = \text{Energía cinética por unidad de masa}$$

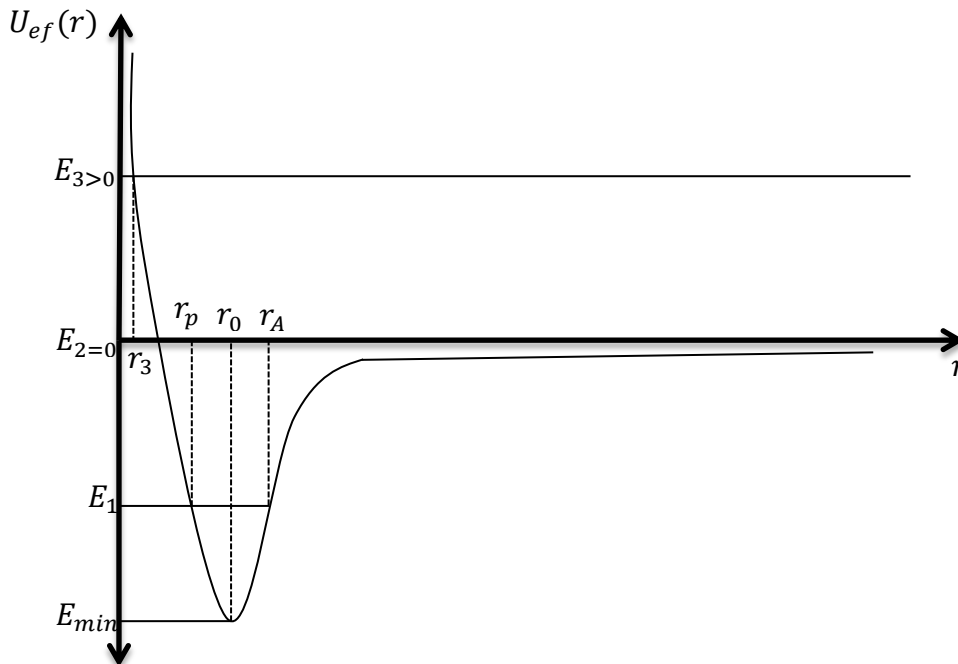
$$-\frac{\mu}{r} = \text{Energía potencial por unidad de masa}$$

Ahora, en coordenadas polares tenemos que:

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{h^2}{2r^2}$$

De este modo se acostumbra a definir la denominada "Energía efectiva" por unidad de masa, dada por:

$$U_{ef}(r) = -\frac{\mu}{r} + \frac{h^2}{2r^2} \quad (21)$$



Gráfica 1 Energías por unidad de masa. Elaboración propia.

En la gráfica (1) se representa la energía potencial ejercida  $U_{ef}(r)$  en función de  $r$ .

Veamos cuatro casos de referencia en la gráfica 1, estos son:

$$\text{Casos: } \begin{cases} E_{min} < 0, & r = r_0 \\ E_{min} < E_1 \leq 0, & r_p \leq r \leq r_A \\ E_2 < 0, & r_2 < r < \infty \\ E_3 > 0, & r_3 \leq r < \infty, & r_3 < r_2 \end{cases}$$

El caso I Corresponde al movimiento circular ya que  $r = r_0$

Si se tiene el caso II  $E_{min} < E_1 \leq 0$  se tiene el caso de un movimiento elíptico donde:

$$p = \frac{h^2}{\mu}: \text{Semi - lado recto de la elipse}$$

$$p = a(1 - e^2), \begin{cases} a = \text{semi - eje mayor} \\ e = \text{Excentricidad} \end{cases}$$

$$\frac{h^2}{\mu} = a(1 - e^2): e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu a}}$$

Además en la elipse, podemos ver que para los puntos en el afelio y perihelio,  $\dot{r} = 0$ , ya que la velocidad es siempre tangente a la trayectoria.

$$r_A = a(1 + e): \text{distancia afelio (o apocentro en general)}$$

$$r_p = a(1 - e): \text{distancia perihelio (o pericentro en general)}$$

$$\vec{v}_p = (r\dot{\theta})_p \widehat{e}_\theta, \quad \vec{v}_A = (r\dot{\theta})_A \widehat{e}_\theta$$

$$v_p^2 = (r\dot{\theta})_p^2 = \frac{h^2}{r_p^2}$$

De esta forma la energía total por unidad de masa queda:

$$E = \frac{1}{2} v_p^2 - \frac{\mu}{r_p} = \frac{h^2}{2a^2(1-e)^2} - \frac{\mu}{a(1-e)} = \frac{\mu(1-e^2)}{2a(1-e)^2} - \frac{2\mu}{2a(1-e)}$$

$$E = \frac{\mu}{2a(1-e)} \left\{ \frac{1-e^2}{1-e} - 2 \right\} = \frac{\mu}{2a(1-e)} \{1+e-2\} = -\frac{\mu}{2a(1-e)} (1-e)$$

$$E = -\frac{\mu}{2a} \quad (22)$$

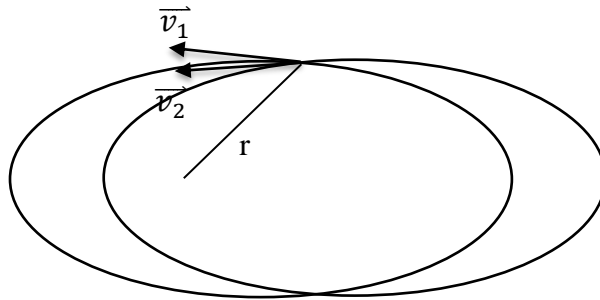


Figura 8 Dos órbitas de igual semi-eje mayor. Elaboración propia

De acuerdo a la figura (8) se observa que si se tienen dos órbitas diferentes alrededor de un cuerpo masivo con diferente excentricidades pero igual semi-eje mayor, se tiene que en los puntos de intersección de las órbitas, la magnitud de las velocidades es la misma, siendo el vector velocidad en caso tangente a la respectiva trayectoria; en efecto la energía total viene dada por el semi-eje mayor y en este caso son iguales, de otro lado de acuerdo a la ecuación (20) para radios (r) iguales el cuadrado de la velocidad es igual en todo momento. De acuerdo a la ecuación 22 y nuestra expresión de la excentricidad para la cónica en términos de las variables físicas del problema tenemos que:

$$e = \sqrt{1 + \frac{h^2}{2a^2 E}}$$

La expresión anterior para la excentricidad es totalmente compatible con la gráfica 1. En efecto el mínimo valor de la excentricidad es  $e = 0$ , la cual corresponde a una órbita circular cuya energía es igual a:



$$E = \frac{h^2}{2a^2}$$

Y para valores de la energía negativos pero mayores que el valor anterior,  $e < 1$ , la órbita es elíptica, mientras que para energías positivas tenemos  $e > 1$ , es decir una hipérbola el nexo entre excentricidad y energía anterior no es aplicable para la órbita parabólica,  $e = 1$ , pues en ese caso  $E = 0$ .

Las velocidades en el afelio (apogeo, apocentro)  $v_A$  y en el perihelio (perigeo, pericentro)  $v_p$ , se pueden calcular solamente conociendo  $\mu, a, e$ . En efecto de la ecuación de la energía constante; y de la ecuación (22) se tiene que:

$$-\frac{\mu}{2a} = \frac{1}{2}v_p^2 - \frac{\mu}{a(1-e)}$$

$$-\frac{\mu}{2a} = \frac{1}{2}v_A^2 - \frac{\mu}{a(1+e)}$$

Por lo tanto:

$$v_p^2 = \frac{\mu}{2a} \left( \frac{1+e}{1-e} \right)$$

$$v_A^2 = \frac{\mu}{2a} \left( \frac{1-e}{1+e} \right)$$

## 1.6. Tercera ley de Kepler

En la enseñanza de la física desde el currículo en la secundaria se acostumbra a enseñar las tres leyes de Kepler en donde ya se ha visto tanto la primera ley como la segunda ley en el contexto Newtoniano de los dos cuerpos. En el caso de la primera ley la conclusión a la que se llega mediante la descripción Newtoniana de los dos cuerpos es más general que la encontrada por Kepler ya que en el análisis Newtoniano del problema de los dos cuerpos se considera como órbita una cónica.

En el caso de la tercera ley se observará que se sigue obteniendo que el cuadrado del periodo orbital es directamente proporcional al cubo del semi-eje mayor de la órbita, asumiéndola elíptica. Sin embargo, la constante de proporcionalidad arroja un conocimiento acerca de la suma de las masas del sistema de los dos cuerpos.

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} h$$

En una revolución completa el radio vector barre el área total de la elipse en donde  $\pi ab$  es el área,  $a$  es el semi-eje mayor y  $b$  el semi-eje menor, también se sabe que el tiempo que tarda en dar una revolución completa se determina periodo  $\Delta t = T$ . De esta forma tenemos:

$$h = 2 \frac{dA}{dt} = \frac{\pi ab}{T} = \pi a^2 \frac{\sqrt{(1 - e^2)}}{T}$$

$$h^2 = \mu a(1 - e^2)$$

$$h^2 = \frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{T^2} = \mu a(1 - e^2)$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu}, \quad \mu = G(m_1 + m_2)$$

En otras palabras cuando se aplica la tercera ley de Kepler en el caso de un satélite orbitando un planeta podemos hallar la masa del planeta, mientras que el estudio de la órbita elíptica relativa de dos estrellas que forman un par binario permite conocer la suma de las masas de las estrellas:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

## Capítulo 2: Marco pedagógico y propuesta de unidad de aprendizaje

### 2.1. La enseñanza de la ley de gravitación universal

Los estudios de la enseñanza de la ciencia en Colombia y en América latina, coinciden en señalar la ausencia de un marco pedagógico que permita comprender la ley de gravitación universal más allá de la aplicación de una fórmula matemática (Segarra, 2016).

En general los autores que se dedican a estudiar esta problemática afirman que la pedagogía tradicional reduce la enseñanza de la gravedad y la física a fórmulas de contexto que deben ser memorizadas. (Flores, Chavéz, Luna, Gonzáles, Demoss, & Hernandez, 2008).

Lo anterior limita la capacidad de los estudiantes en la comprensión efectiva del significado de la gravedad así como su contenido conceptual (Lara, 2008). Como resultado, el uso de dicho concepto para resolver problemas reales queda restringida.

A nivel teórico- conceptual la gravedad tiende a confundirse con una fuerza que solo es posible identificar y describir en un marco local como la Tierra. De manera que al momento de preguntar por otro lugar o el espacio en general, los estudiantes creen que no existen efectos y que la gravedad es nula.

Los estudiantes no encuentran una relación entre la ley de gravitación universal y la caída de los cuerpos. Dado que estas dos eventos son generadas por la misma fuerza, la cuales una acción a distancia dada por la Tierra hacia el objeto; y al mismo tiempo del objeto sobre la Tierra, que se puede comparar y compararla con la acción o fuerza realizada por el Sol hacia cada uno de los planetas y viceversa.

En síntesis, a causa de la reducción matemática de la enseñanza de la física, la gravedad se entiende como una fórmula de aplicación universal mecánica y no

como un concepto amplio que explica diferentes fenómenos de la naturaleza y que debe someterse a una constante revisión, mediante la comprobación empírica.

Ante esta falencia algunos especialistas en el tema proponen un enfoque analítico que permita superar la ausencia de aprendizaje efectivo dentro de las aulas (Dibar & Pérez, 2007). Es decir un aprendizaje del concepto gravedad que facilite interiorizar el significado del mismo y por esta vía el desarrollo de problemas contextuales concretos.

El enfoque propuesto es un enfoque experimental que afirma “la relación directa sujeto-objeto en el plano real” (Flores, Chavéz, Luna, Gonzáles, Demoss, & Hernandez, 2008) como una fuente efectiva para la construcción de conocimiento.

Esta propuesta hace hincapié en el carácter experimental de la física, de manera que “las demostraciones y el laboratorio” (Flores, Chavéz, Luna, Gonzáles, Demoss, & Hernandez, 2008) se superponen a las ecuaciones y formulaciones. Lo anterior, puesto que la física no busca una resolución numérica (Dibar & Pérez, 2007), sino la reflexión frente a leyes que permiten dar respuesta a problemas de la realidad.

La experimentación constante sería entonces el camino para la comprensión efectiva de la realidad y la construcción conceptual, es decir para la comprensión y conceptualización de la gravedad. La constante interacción permitiría aprehender el significado del concepto y por este camino refinar el lenguaje mediante el cual se expresa la comprensión del mismo (Lara, 2008).

Cabe aclarar que no se pretende la desvinculación de la utilización de las matemáticas en la enseñanza de las ciencias y en específico de la Física, pero es importante para los estudiantes que primero comprendan cualitativamente un evento para que de esta manera se pueda implementar la parte cuantitativa de una forma más familiar, dado que ya se poseen análisis de lo que está

sucedido y cómo la matemática permite dar un valor determinado y una explicación numérica que refleja lo que antes se observó.

Por otro lado para el docente es de vital importancia que posea una apropiación tanto de la parte matemática como de la parte experimental e histórica, ya que de esta manera podrá realizar un mejor acercamiento para los estudiantes cambiando la imagen de que *“las ciencias Naturales son matemáticas”* y que se den cuenta que todos desde pequeños somos científicos que nos preguntamos por los fenómenos que observamos a nuestro alrededor y que esa es la primera acción que hace todo científico desde el inicio de la historia de las ciencias hasta nuestros días, para terminar dando una explicación respecto sus conocimientos expresándolas en un lenguaje matemático que es confirmado por los demás miembro que hacen parte de una comunidad.

Por lo anteriormente anotado el presente proyecto retoma este enfoque direccionado hacia las estudiantes de grado décimo desde una parte cualitativa que permita encontrar una relación entre las fuerzas que se evidencian en la Tierra y las que actúan entre los cuerpos celestes. A continuación se muestra la unidad didáctica realizada para mejorar la comprensión de los conceptos implícitos en la ley de gravitación relacionándolos con situaciones cotidianas.

## 2.2. Metodología de la propuesta de aprendizaje

El enfoque metodológico utilizado en el presente proyecto de investigación es de carácter cualitativo bajo un enfoque de investigación acción participativa la cual se caracteriza por una constante reflexión por parte del docente en su proceso de aula para determinar mejores estrategias que permitan vincular las problemáticas evidenciadas desde su entorno y bajo su experiencia como docente, en este caso respecto a la enseñanza de la física en específico la dinámica de los cuerpos desde una perspectiva Newtoniana, cabe aclarar que es un proceso que está en constante revisión y que dependiendo de lo observado se realizan las distintas correcciones bajo una reflexión crítica que debe realizar el docente de su labor. (LATORRE., 2003)

A continuación se enuncian las etapas de la investigación acción que se tuvieron en cuenta para el desarrollo del presente proyecto de investigación:

- Identificación de posible problema de interés.
- Determinar posible ruta de solución a la problemática encontrada.
- Generar un plan de inmersión en el aula.
- Evidenciar los avances o retrasos en la inversión del plan.
- Evaluar la pertinencia de las acciones implementadas y del plan en general.

A continuación se realiza una descripción detallada del plan realizado para mejorar el aprendizaje de las estudiantes de grado décimo, respecto a la ley de gravitación universal de Newton y su relación con los eventos en el entorno local de la Tierra.

### 2.3.Descripción de la propuesta

Esta unidad didáctica se realizó con tres grupos muestrales cada uno de ellos consta de 20 estudiantes, los cuales oscilan entre las edades de 14 a 16 años de edad, adolescentes que son estudiantes de grado décimo del colegio Rosario de Santo Domingo de la localidad de Chapinero; las estudiantes están divididas en tres grupos que presentan las mismas características iniciales, referentes a el proceso académico con similitud en las temáticas y actividades desarrolladas en el año anterior, según algunas actividades llevadas a cabo con las estudiantes se refleja un bajo interés por las ciencias exactas y naturales debido a entender que estas están en referencia a solamente la utilización de fórmulas y procesos matemáticos y en algunos casos desconociendo su relación con eventos que suceden en la naturaleza o en la cotidianidad pero que no son interiorizados por parte de las educando ya que comprenden la física como una matemáticas menos abstracta, pero que no es familiar para ellas.

Cabe aclarar que según el currículo de la institución las estudiantes empiezan a ver la asignatura de física como tal desde grado Noveno, empezando por un

conocimiento de la cinemática, donde se exponen las temáticas de movimiento uniforme rectilíneo (MUR), Movimiento uniforme acelerado (MUA), Operaciones básicas entre vectores y Movimiento en el plano o movimiento en dos dimensiones, de ahí que encuentre que la física se asemeja a las matemáticas haciendo referencia a la solución de situaciones problemas, mediante la utilización de fórmulas y despeje de incógnitas, mas no se genera una explicación cualitativa de cada uno de los temas antes mencionados. Adicional a esto las estudiantes reconocen la gravedad como la aceleración realizada por la Tierra Hacia un cuerpo que este en su superficie, la cual va dirigida siempre hacia el centro.

Al momento de generar preguntas desestabilizadoras en las estudiantes para iniciar una nueva temática puede ser referente a los conceptos antes abordados o que se piensan abordar en la clase, se observa que estas sienten inseguridad al participar debido a que no saben lo que pensarán sus compañeras o el docente en otros momentos se observa que buscan responder de forma sistemática y muy apegadas a las definiciones que observan en su texto guía, aun sin entender lo que se está diciendo, negándose la posibilidad de cometer errores y que la socialización de sus explicaciones sea expuestas al grupo en general, esto genera una cierta dificultad al momento de aplicar una prueba ya que ellas intentan responder “bien” para que de esta forma sus reportes académicos no se vean afectados, aun cuando se explique que las pruebas no tienen un carácter cuantitativo.

La unidad se divide en tres partes una primera parte en la cual se intenta tomar referencia de las actitudes presentes en los estudiantes respecto a el movimiento que presentan los cuerpos debido de la atracción gravitacional que genera la Tierra, al igual que las causa por las cuales los cuerpos en el espacio giran alrededor de otros de forma cíclica, para lo cual se realizó una prueba diagnóstica con preguntas abiertas donde las estudiantes poseen la libertad de omitir cualquier interrogante si no posee una explicación de la misma o no se sienten con los suficientes fundamentos o información para responder.


### 2.3.1. Actividad diagnóstica o pre-Test

La actividad diagnóstica se llevó a cabo en momentos diferentes para cada uno de los grupos de forma individual con un tiempo límite para la misma de 20 minutos, la prueba contiene seis inquietudes todas con la intención de llevar al contexto o lenguaje que las estudiantes reconozcan como propio intentando omitir tecnicismo o vocabulario que desconozcan, debido a que manejan o tienen conceptos sobre la cinemática de los cuerpos antes mencionados; se intenta trasponer estos conceptos al ámbito del espacio y de los objetos que interactúan con la Tierra.

En el pre-test se deja en claro, como se observa, que la prueba no tiene ningún valor cuantitativo, sino que se da con el interés de conocer saber por parte del profesor que tanto se sabe de la temática que se va a abordar en el segundo bimestre académico respecto a la dinámica de los cuerpos pero en este caso llevándolo a los cuerpos que se encuentran en el espacio y que a veces se omiten en nuestra explicación de la naturaleza en la clase de física.

A continuación se muestra la respectiva prueba realizada a las estudiantes para conocer sus conocimientos previos sobre las fuerzas, los movimientos de los cuerpos y la ley de gravitación universal.



	<b>COLEGIO DEL ROSARIO DE SANTO DOMINGO</b> <i>2017: CRSD: 1957-2017 60 Años al servicio de la educación colombiana</i>			
	<b>ASUNTO: PRE-TEST DÍNÁMICA</b>			
	Asignatura:	FÍSICA	Fecha:	
	Docente:	CARLOS ANDRES CASTAÑEDA SUA	Curso:	
Nombre:				

A continuación encontrarás unas preguntas referentes al tema a abordar en el segundo periodo las cuales deberás responder según lo que entiendas sobre el tema o lo que has escuchado en los años anteriores o a través de los medios de comunicación y que te permitan dar explicación el por qué sucede lo que se pregunta.

Ten en cuenta que esta prueba es solamente exploratoria por lo cual no es necesario, pero sí de gran importancia para el proceso de la clase, que respondas todas las preguntas. Si por alguna razón no puedes responder a alguna estas en toda la libertad de dejarla en blanco y continuar con la siguiente.

Esta prueba no presenta ningún porcentaje numérico en la nota final del bimestre.

1. Si existe una fuerza de atracción gravitacional entre la Luna y la Tierra ¿Por qué la Luna no se aproxima cada vez más a la Tierra?
2. ¿Existe una fuerza realizada por la Luna para atraer a la Tierra?
3. ¿Si la Luna dejara de girar alrededor de la Tierra y permaneciera en un solo lugar qué pasaría con ella?
4. ¿Por qué los satélites artificiales enviados por el hombre al espacio no se alejan ni se caen a la Tierra?
5. ¿Los planetas se demoran lo mismo al realizar una vuelta completa alrededor del Sol? ¿Por qué sucede esto?
6. ¿El movimiento de la Luna alrededor de la Tierra varía su velocidad o permanece constante?

Debido a que las preguntas son de carácter abierto y exploratorio se propone la siguiente rúbrica para de esta forma poder agrupar de alguna manera las respuesta y explicación que poseen las estudiantes dependiendo de sus experiencias, intentando que el análisis sea siempre bajo la mirada las concepciones de la dinámica y la cinemática.

PREGUNTAS	DESCRIPTORES			
	Descriptor 4	Descriptor 3	Descriptor 2	Descriptor 1
1. <b>Sí existe una fuerza de atracción gravitacional entre la Luna y la Tierra ¿Por qué no se aproxima cada vez más a la Tierra?</b>	La estudiante confirma la existencia de una fuerza de atracción gravitacional relacionándola con el movimiento de la Luna.	La estudiante confirma la existencia de una fuerza de atracción gravitacional interpretando su acción en forma de repulsión.	La estudiante confirma la existencia de la fuerza de atracción gravitacional comprendiéndola como algo externo a los dos cuerpos.	La estudiante no determina la existencia de una fuerza de atracción gravitacional entre los dos cuerpos.
2. <b>¿Existe una Fuerza realizada por la Luna para atraer a la Tierra?</b>	La estudiante afirma la existencia de la fuerza y la relaciona con la que produce la Tierra hacia la Luna.	La estudiante afirma la existencia de la fuerza, pero no comprende quien la produce.	La estudiante niega la existencia de la fuerza producida por la Luna y solo evidencia una acción realizada por la Tierra sobre la Luna.	La estudiante niega la existencia de cualquier tipo de fuerza entre los dos cuerpos.
3. <b>¿Si la Luna dejara de girar alrededor de la Tierra y permaneciera en un solo lugar que pasaría con ella?</b>	La estudiante comprende que el movimiento permite que el sistema Tierra Luna se mantenga a una cierta distancia y lo relaciona con una fuera.	La estudiante comprende la relación del movimiento y la distancia pero no la relaciona con una fuerza.	La estudiante comprende que el movimiento es un factor importante, más no es relevante si la Luna deja de girar.	La estudiante no tiene claro que la luna se mueve alrededor de la Tierra.
4. <b>¿Por qué los satélites artificiales enviados por el hombre al espacio no se alejan ni caen a la Tierra?</b>	La estudiante comprende la existencia de la acción de una fuerza entre el satélite y la Tierra.	La estudiante relaciona lo que sucede con el satélite a fuerzas diferentes a la acción de gravedad con la Tierra.	La estudiante encuentra un sistema inmóvil por parte del satélite respecto a la Tierra.	La estudiante niega la existencia de una fuerza que mantiene al satélite en órbita.
5. <b>¿Los planetas se demoran lo mismo al realizar una vuelta completa alrededor del Sol? ¿Por qué sucede esto?</b>	La estudiante identifica cambios en los tiempos, relacionándolos con la distancia de separación.	La estudiante identifica cambios en los tiempos relacionándolos con la masa que poseen los planetas en relación al Sol.	La estudiante identifica cambios los tiempos, pero no enuncia explicación.	La estudiante no encuentra cambios de los tiempos de recorrido.
6. <b>¿El movimiento de la Luna alrededor de la Tierra varía su velocidad o permanece constante?</b>	La estudiante afirma la existencia de una velocidad constante y da explicaciones del por qué.	La estudiante afirma la existencia de una velocidad constante, pero no da explicaciones del por qué.	La estudiante afirma que la velocidad varía pero no da explicaciones del por qué.	La estudiante no responde a la pregunta.

Tabla 1 Rúbrica para el análisis de la prueba diagnóstica aplicada a las estudiantes.

En el siguiente capítulo se realizará el análisis de las respuestas arrojadas por las estudiantes frente a cada una de las preguntas antes mencionadas.

### 2.3.2. Actividad 1

A partir de los resultados arrojados en la actividad diagnóstica se procede a realizar la actividad # 1, respecto al movimiento circular uniforme, debido a la necesidad de interconectar temáticas con las abordadas en el año y bimestre anterior, dado a que ya conocían las características de la aceleración en un movimiento uniforme acelerado y a las características vectoriales de la velocidad se propone la segunda actividad para la cual se cuenta para un bloque de clase el cual tiene como tiempo de duración noventa minutos y tiene como objetivo mostrar la existencia de una aceleración que genera el cambio de movimiento de un objeto que orbita o se mueve en una trayectoria circular con velocidad constante, para esta actividad esta actividad se les pidió formar grupos de cinco (5) estudiantes las cuales debían traer los siguientes materiales:

- $\frac{1}{2}$  pliego de cartulina.
- 2 escuadras.
- Un cordón de aproximadamente un metro de largo.
- Marcadores de diferentes colores.
- Cinta.

La actividad # 1 consistió en realizar un círculo centrado en el medio pliego de cartulina utilizando para ello el cordón al cual se le amarraba un lápiz en un extremo y a una distancia aproximada de 16 cm se ubica otro lápiz el cual va a servir como centro del círculo, posterior a este paso se les pide a las estudiantes hacer marcas en el perímetro del círculo a una distancia de 15 cm luego con las escuadras en cada uno de estos puntos se trazan líneas tangentes (vectores) de 10 cm en cada uno de los puntos del perímetro, luego mediante la utilización del manejo de las escuadras se realiza el desplazamiento del vector anterior con su magnitud, dirección y sentido a el siguiente punto y así sucesivamente hasta que en cada punto se encuentren dos vectores con sus respectivas direcciones pero de igual magnitud, en este momento se realiza una explicación a las estudiantes

que lo que se acaba de realizar es la ubicaciones de la velocidad inicial y final de un objeto que se desplaza en una trayectoria circular y que los 10 cm corresponden a la magnitud de la velocidad y como se puede observar la dirección en cada punto es diferente en referencia a la velocidad inicial con respecto a la final, es así como se llega a la conclusión de que en un movimiento circular uniforme la velocidad permanece constante, pero teniendo en cuenta lo relacionado en las temáticas anteriores en las cuales ellas han determinado que para que un objeto cambie de trayectoria es necesario la existencia de una aceleración, surge la siguiente pregunta entre algunos grupos que realizan la actividad ¿Por qué cambia la velocidad si no hay una aceleración presente? Para responder a esta pregunta luego de socializarla a todos los grupos, se les pide a cada grupo que una las cabezas de cada uno de los vectores que representan las velocidades en cada uno de los puntos de la trayectoria y que ubiquen la cabeza del vector en el mismo lugar donde está la del vector velocidad final. Para finalizar se les pide que con una línea punteada prolonguen ese nuevo vector hacia la parte interior del círculo hasta que llegue a el centro, como se puede observar en la siguientes imágenes.

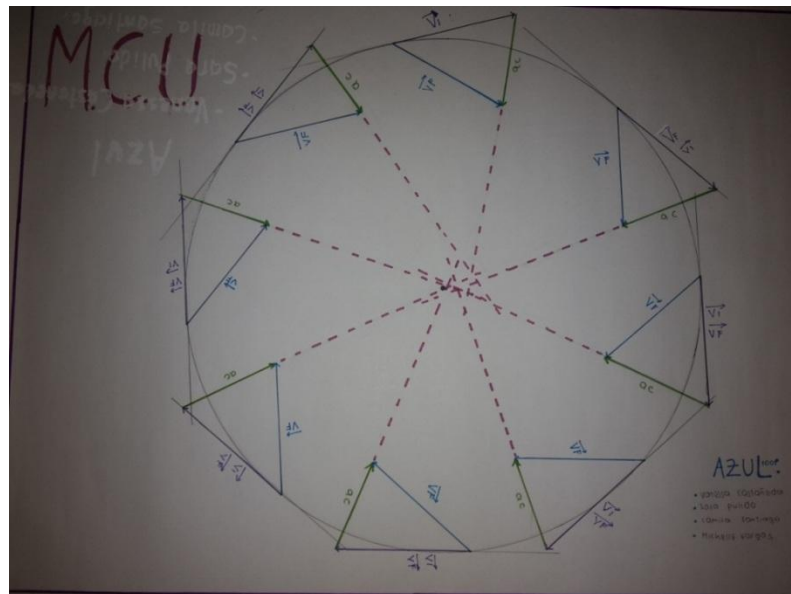


Gráfico 1 Movimiento circular realizado por uno de los grupos.

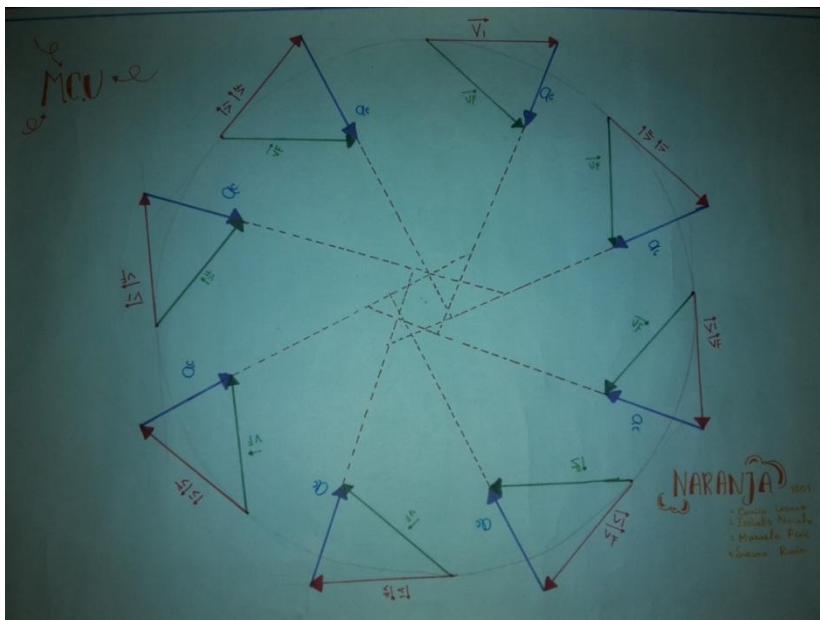


Gráfico 2 Movimiento circular realizado por otro de los grupos

Al vector dirigido hacia el centro se le da el nombre de aceleración centrípeta, debido a su dirección hacia el centro de la trayectoria circular, Pero las estudiantes se hicieron una nueva pregunta que si es una aceleración centrífuga ¿Por qué no todos los vectores realizados no se encuentran en el centro sino que se ven desviaciones en algunos más que otros?; para lo cual se les hace referencia a las estudiantes que primero es posible que se presenten falencias al momento de tomar los vectores de la velocidad, respecto a la dirección tangencial y que debido a la separación entre los puntos de referencia de la trayectoria incide en que se presente este error o desviación del centro de nuestra aceleración centrípeta.

Para solucionar el problema del desvío, se le pide a las estudiantes que realicen los vectores de la velocidad en cada punto a una distancia menor de los 10 cm con una longitud de estos menor, inicialmente se les pide que sea la mitad tanto de la longitud como de la distancia de separación en la trayectoria y que se siga esta reducción hasta que se observe que los vectores de la aceleración coincidan en el centro, en las siguientes imágenes se observa la corrección y el encuentro de la aceleración en el centro de la trayectoria.

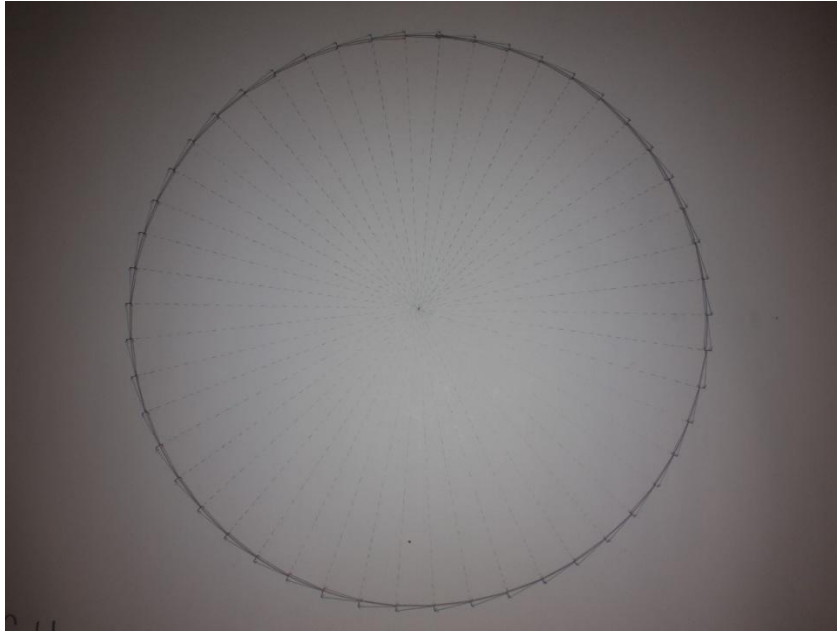


Gráfico 3 Corrección del desvío de la aceleración centrípeta por uno de los grupos

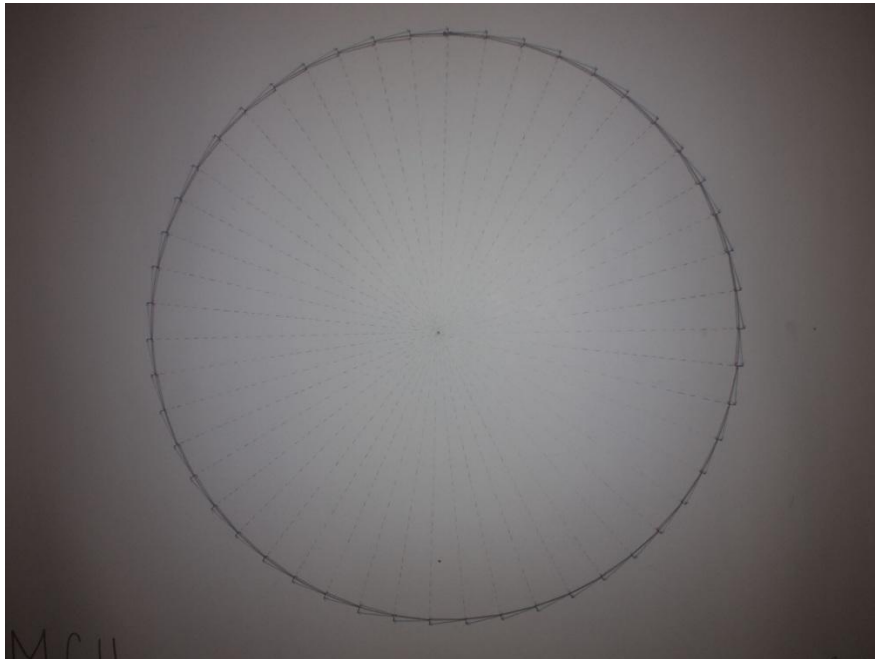


Gráfico 4 Corrección del desvío de la aceleración centrípeta por un segundo grupo.

### 2.3.3. Actividad 2

La actividad # 2 se realiza luego de abordar toda la temática referente a las leyes de Newton su análisis cualitativo y cuantitativo, siguiendo el plan de estudio expuesto por la institución para grado decimo, con el objetivo de tener una mejor comprensión de los marcos de referencia en los cuales se puede evidenciar los cambios en la aceleración referente a una fuerza neta existente, debido a el movimiento o no del sistema de referencia, para llevar a cabo esta actividad se necesitó solamente de una báscula digital y de un ascensor el cual se encuentra en las instalaciones de la institución educativa.

Para la comprobación de estos marcos de referencia tanto inerciales como no inerciales, se realiza la toma de la masa de una estudiante en una báscula en el salón de clases, considerando que en este caso tanto la estudiante como el salón se encuentran quietos o con velocidad constante, luego con el grupo de trabajo que se mantiene de cinco estudiantes, se realiza una pregunta para que sea respondida antes de su comprobación, la cual era: ¿Qué sucederá con la masa o peso de la estudiante si se mide en un elevador?, y como pregunta asociada se realizó la siguiente cuestión ¿Si el elevador se encuentra ascendiendo o si se encuentra descendiendo la medida de la báscula varía?. Cabe aclarar que esta actividad fue pensada a la facilidad de acceder a un elevador con el que se cuenta y que permite ser más evidente la existencia de una fuerza neta diferente debido al movimiento del marco de referencia seleccionado esto se da a conocer cuando se realizan una medición dentro del elevador cuando éste se encuentra en movimiento ya sea hacia ascendiendo o descendiendo generando una controversia entre las representantes de cada grupo que subieron al ascensor para observar la lectura de la báscula, ya que al momento de ascender el valor es la masa que se muestra en la báscula es mayor a la observada cuando la báscula y el elevador se encuentran descendiendo. Comparando estos resultados con los obtenidos en el salón de clase se evidencia un cambio en las lecturas, lo cual persiste en asombrar a las estudiantes ya que ellas en primer momento piensan que el peso de la estudiante cambio en la actividad a lo cual se

da a conocer por parte del docente dando a conocer que la masa de la persona sobre la báscula nunca varia ya que se puede considerar como constante, por ende debe existir una aceleración que modifica la aceleración neta o se obtiene el valor de la fuerza neta sobre la báscula.

Dando a conocer que las fuerzas que actúan sobre un cuerpo depende del marco de referencia en el cual se tomen y de esta forma tomar la mejor decisión sobre un marco de referencia inercial en el cual es donde se cumplen las leyes de Newton., caso muy similar si se analiza el problema de los dos cuerpo determinado por Newton, en este caso entre la Tierra y la Luna, ya que estos dos cuerpos son muy cercanos para las estudiantes debido a que en la cotidianidad ven a la Luna como el objeto observable en algunas noches y que aparentemente es periódica sus apariciones.

Dadas las actividades descritas hasta el momento se inicia el acercamiento hacia la ley de gravitación universal, para lo cual se retoma que para que los objetos describan trayectorias elípticas como lo menciona Kepler en su primera ley es necesario la existencia de una fuerza que permita que los objetos mantengan esta trayectoria y como ya se ha realizado un acercamiento a las leyes de Newton y que según su tercera ley, las fuerzas actúan en pares en direcciones contrarias, indicando que la Luna también ejerce una fuerza de la misma magnitud que la ejercida por la Tierra pero en direcciones opuestas, pero debido a las dimensiones o masas de los objetos hablados se evidencia más la generada por la Tierra sobre la luna, dando a conocer la importancia de la masa de los cuerpos en la determinación de la fuerza con que se atraen los cuerpos y que esta masa debe ser constante ya que si no fuese así no se generaría una trayectoria elíptica como fue demostrada por Kepler.



### 2.3.4. Actividad 3

La actividad # 3 se lleva a cabo bajo el marco del principio de conservación de la energía conociendo desde antes la existencia de la energía potencial gravitacional y la energía cinética, para lo cual se utilizan los siguientes materiales:

- Cinta métrica.
- Celular o cámara con video.
- Cuerpos esféricos de diferentes masas.
- Balanza de triple brazo.

Para el desarrollo de la actividad se llevan a los grupos al patio de la institución donde se elige una representante de cada grupo para que arrojen los diferentes cuerpos desde una altura determinada, la cual se mide con la cinta métrica, luego con la ayuda del celular o la cámara de video se realiza una toma del descenso de los diferentes objetos, para lo cual antes de realizar la caída de los objetos se hace la medición de la masa que poseen los distintos cuerpos esféricos y se proponen la siguiente pregunta a responder por parte de las estudiantes ¿Qué objeto posee mayor energía potencial al momento del lanzamiento? Y ¿Cuál de los objetos caerá más rápido? Observando en sus respuestas que indican que el objeto de mayor masa es el que posee mayor energía, al igual que el que caerá primero, se puede evidenciar en sus respuestas que asimilan que la masa es el indicador de que los objetos se muevan con mayor velocidad desconociendo que para todos los objetos atraídos por la Tierra cerca de su superficie la aceleración es constante y se puede considerar el valor de esta aceleración aproximadamente como  $9,81 \text{ m/s}^2$ . A esta aceleración la conocemos como la aceleración de la gravedad, asociada a un campo gravitacional uniforme.



Gráfico 5 Estudiante lanzando objeto para determinar el tiempo de caída.

Luego del análisis se habla de qué pasa con esa misma fuerza pero si se analiza para un cuerpo fuera de la superficie de la Tierra, como por ejemplo la Luna en el cual su masa ya no se puede considerar despreciable en comparación con la de la Tierra, pero la fuerza que actúa entre estos cuerpos si es de orden atractivo con las mismas características que dejamos caer en el experimento pero se da a entender que la fuerza no puede tener la misma magnitud ya que la distancia de separación es mucho mayor en el caso de los objetos fuera de la superficie terrestre, indicando que la distancia disminuye su magnitud encontrando que la fuerza entre dos cuerpos es directamente proporcional a la masa de los dos objetos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de separación entre ellos encontrando así la misma relación encontrada por Isaac Newton respecto a la gravitación universal y que igual a él se debe utilizar una constante de proporcionalidad la cual más adelante en la historia de la ciencia el científico Británico Henry Cavendish encontraría su valor. Él midió la constante gravitacional usando una balanza de torsión. Con un valor de la constante Gravitacional  $G$  podemos usar la ecuación de la Ley de Gravitación universal empleando unidades convencionales para las masas y las distancias.

Finalmente se evalúa nuevamente para saber qué tan eficiente fue la nueva forma de introducir la temática de la ley de gravitación universal y cómo se ven sus efectos en algunos eventos de astronomía como son los movimientos de satélites artificiales alrededor de la Tierra. Para ello se vuelve aplicar el pre-test encontrando mejorías en relación a comprender que las fuerzas que actúan en el sistema solar respecto al movimiento de los planetas alrededor del Sol se rigen mediante la misma ley de gravitación universal determinada por Isaac Newton y que gracias al análisis cuantitativo de las situaciones se pueden encontrar características de similitud entre diferentes eventos. Por último se observa entre algunos grupos la comprensión de que los objetos que orbitan alrededor de otro caen constantemente como lo hace un cuerpo en movimiento parabólico pero debido a su trayectoria nunca entran en contacto debido a su distancia de separación y que entre mayor sea esta menor será la acción de atracción.

## Capítulo 3: Análisis de la propuesta y de su aplicación

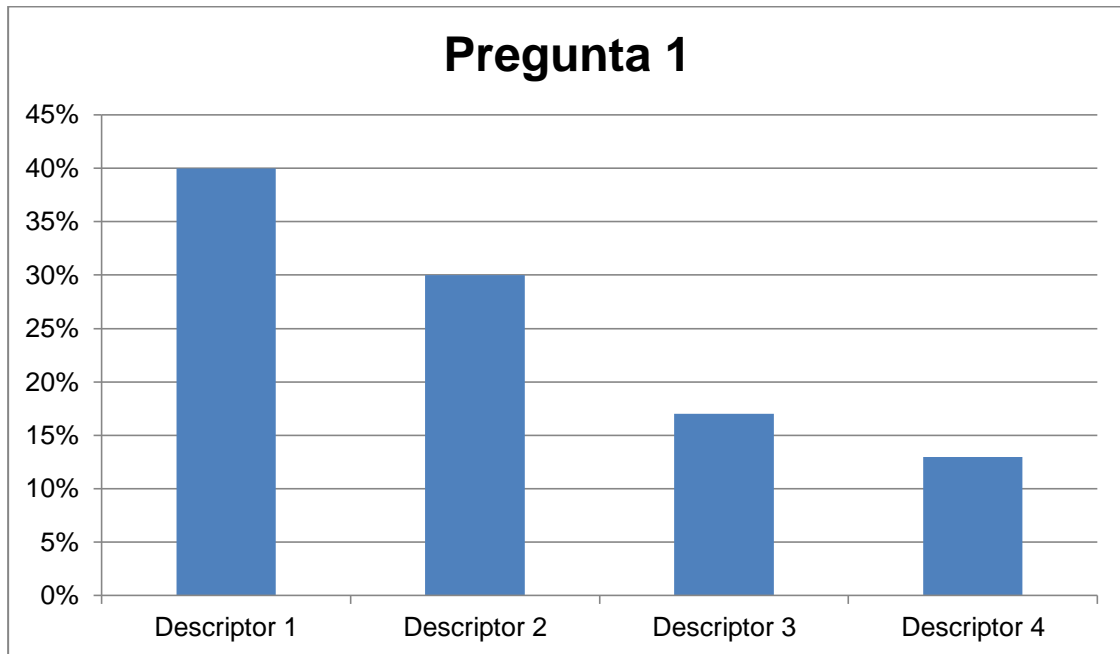
### 3.1. Análisis del pre-test o prueba diagnóstica

Como ya se ha visto en la sección anterior las preguntas realizadas en el pre-test o prueba diagnóstica son de carácter exploratorio y de respuesta abierta por lo cual, no se realiza una evaluación cuantitativa de los resultados sino un análisis de carácter cualitativo, en donde lo que se intenta corroborar es la apropiación de los temas de cinemática previamente expuestos a las estudiantes y cómo éstos se relacionan con la dinámica que presentan algunos cuerpos no en la superficie de la Tierra, pero si en el espacio y que se puede llegar a confirmar como un evento local si el marco de referencia es nuestro sistema solar.

La dinámica realizada con las estudiantes de grado décimo intenta dar evidencia de cómo se comprenden los fenómenos que ocurren en el espacio tomando como referencia lo que se observa a simple vista como es la Luna y algunos satélites artificiales y también lo enseñado desde primeros años de escolaridad referente al sistema solar y su movimiento respecto al Sol.

### 3.1.1. Pregunta 1

**Si existe una fuerza de atracción gravitacional entre la Luna y la Tierra ¿Por qué no se aproxima cada vez más a la Tierra?**



Básicamente podemos resumir las respuestas de las estudiantes en dos tipos, mientras que una de las estudiantes expresó su respuesta diferente (la tercera). A continuación encontrarán las tres respuestas generales que se observan en las estudiantes:

(1) *Debido a las órbitas que poseen los dos astros, los mantiene girando en un lugar que no cambia.*

(2) *La luna genera una fuerza en dirección opuesta.*

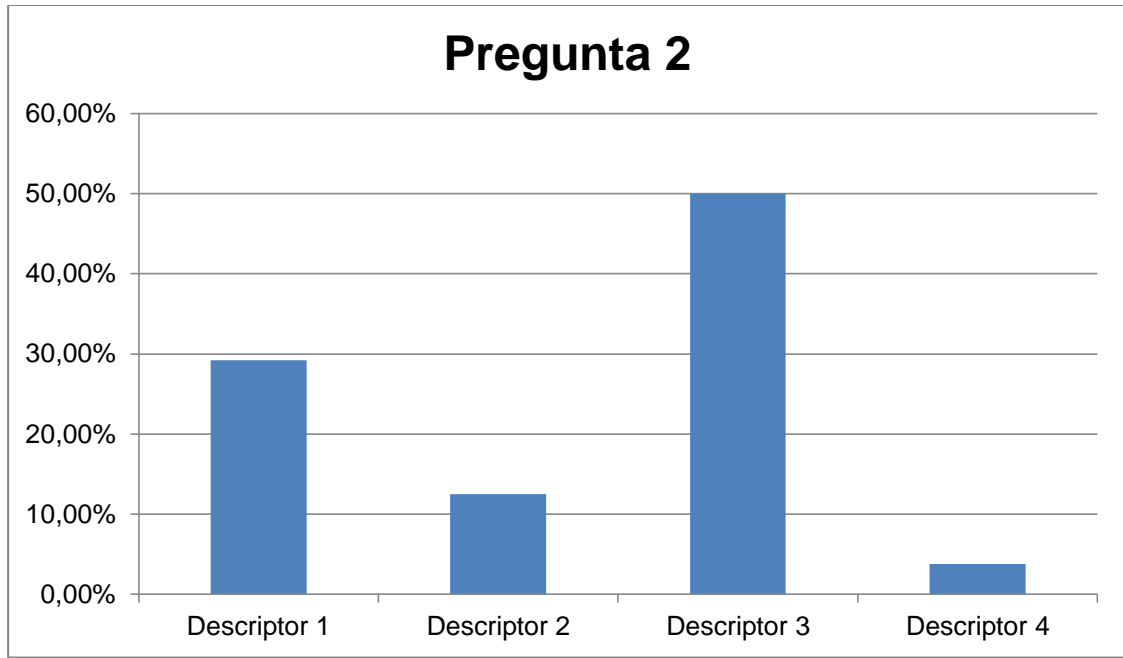
(3) *Hay un cuerpo o fuerza externa que mantiene a los cuerpos a distintas distancias la Luna tiene algo que hace orbitar a la Tierra debido a que cada una posee una gravedad distinta que impide que se aproximen más. La Luna y la Tierra cada una posee un campo electromagnético o algo así y la Luna posee uno que no logra irse o chocar contra la Tierra, pero la Tierra tiene uno más grande, entonces atrae a la Luna.*

Al revisar las respuestas que suministran las estudiantes respecto a esta pregunta se observa que un factor importante en sus explicaciones, el cual hace referencia a la gravedad relacionándola como una propiedad intrínseca de los objetos y que debido a que esta es mayor en la Tierra que en la Luna éste aspecto permite regular que los cuerpos no se acerquen a la Tierra. En las otras de las respuestas se evidencia que todos los cuerpos en el espacio poseen ya preestablecidas unas órbitas las cuales no se pueden modificar por ninguna razón y deben seguirse en todo momento para mantener el orden en el espacio. Una de las explicaciones arrojadas y que llama la atención, es la tercera antes descrita, en la cual se realiza una analogía con los campos electromagnéticos en donde éstos generan unas fuerzas, una de repulsión en el caso de la Luna y otra de atracción en referencia a la Tierra, como son en direcciones opuestas estos se contrarrestan permitiendo que la Luna mantenga su órbita constante.

Se puede evidenciar que las estudiantes presentan diferentes explicaciones respecto a el por qué la Luna no se aproxima a la Tierra de diferente índole hasta generando analogías con las fuerzas magnéticas, pero no les es claro qué factor es el que impide que la Luna y la Tierra choquen, dando en algunas “explicaciones” a que desde el momento en que aparecen los cuerpos celestes por sí solos ya pre-establecen unos lugares y órbitas determinadas para su ubicación. Se desconoce por parte de las estudiantes la existencia de una fuerza centrípeta producto de las fuerzas centrales entre dos cuerpos masivos que se atraen y que al tener un cuerpo en movimiento en este caso la Luna, permite un cambio en la trayectoria generando que se mantenga a una distancia media constante.

### 3.1.2. Pregunta 2

**¿Existe una Fuerza realizada por la Luna para atraer a la Tierra?**



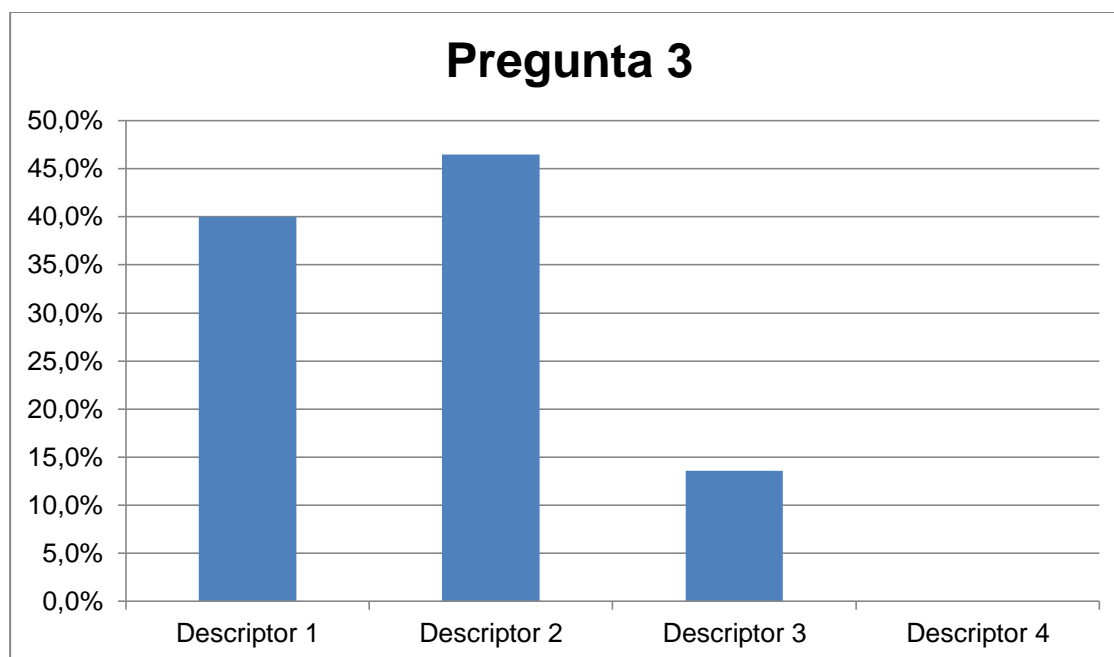
Para esta pregunta las explicaciones dadas por las estudiantes se pueden medir a través de una agrupación de tres ítems en los cuales se observa una clara distinción de explicaciones en las cuales no es claro para ellas si en verdad la Luna ejerce algún tipo de fuerza para atraer a la Tierra. Las respuestas agrupadas de las estudiantes se pueden recopilar de la siguiente manera:

- ✓ Se observa un 50% de las estudiantes que opinan que es la Tierra la que realiza la fuerza de atracción más no la Luna y es por esta causa que la Luna se mantiene orbitando constantemente respecto a la Tierra y no la Tierra respecto a la Luna.
- ✓ Mientras que un 29.2% confirma la existencia de una fuerza procedente de la Luna hacia la Tierra, dicha afirmación la realizan en referencia a que escuchan que por culpa de ella es que se producen las mareas o mejoramiento del crecimiento de la cosecha debido a la posición de la Luna respecto a la Tierra.

- ✓ Por último, un 12.5% de las estudiantes cree que la fuerza es dada entre los dos objetos (la Tierra y la Luna) y que la fuerza es de atracción entre ellos pero solo hasta cierto punto o distancia de separación entre los dos cuerpos luego de la cual la fuerza deja de presentarse por alguna razón, la cual no es expuesta en sus escritos.
- ✓ En un porcentaje de 3,8%, se encuentran algunas otras explicaciones por parte de las alumnas en donde explican o dan su forma de entender la dinámica entre los dos cuerpos celestes diciendo que en el espacio no se dan ningún tipo de fuerza por lo cual hay una negación a la existencia de una fuerza de atracción gravitacional, o que la fuerza se asocia a los polos y que es ésta la que permite la rotación de los cuerpos.

### 3.1.3. Pregunta 3

**¿Si la Luna dejara de girar alrededor de la Tierra y permaneciera en un solo lugar que pasaría con ella?**



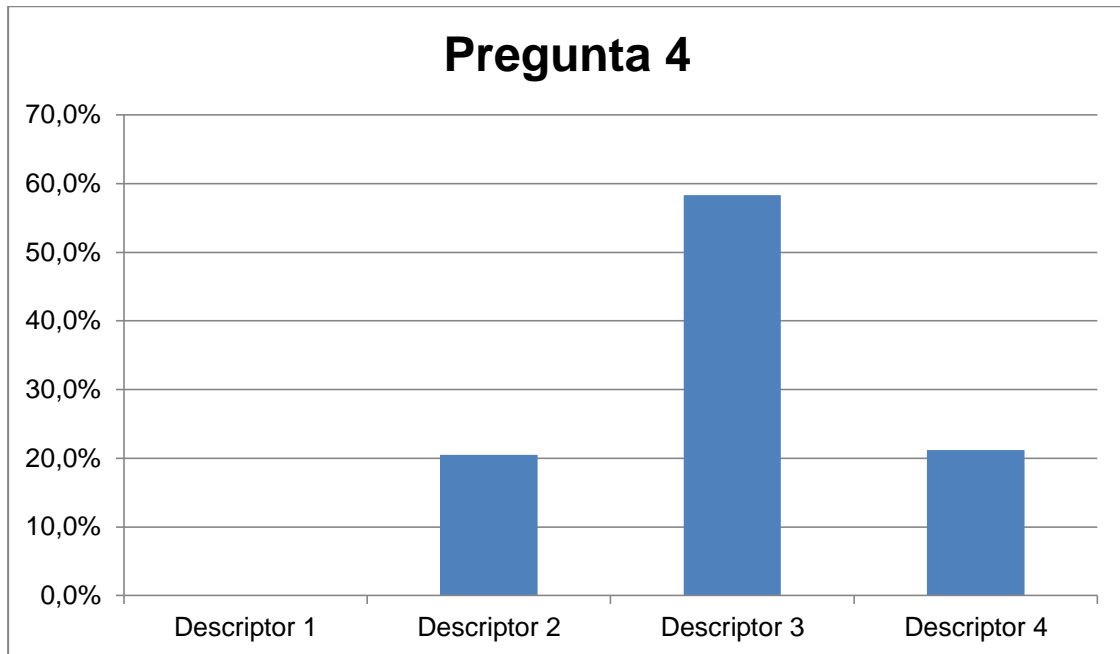
Se encontraron una dispersión mayor en las respuestas de las estudiantes en las cuales se intentó agrupar respecto a la idea central expuesta de su respuesta encontrando las siguientes agrupaciones de sus “explicaciones”:

- ✓ Un 46,5 % de las respuestas dadas por las estudiantes tienen como premisa fundamental que si la Luna dejase de girar este evento no afectaría, piensan que no le pasa nada a la Luna y que ésta se quedaría atrás a medida de que la Tierra se traslade alrededor del Sol, mostrando que el movimiento de rotación de la Luna no tiene una relación con la fuerza de gravitación y al mismo tiempo determinan que la Luna no se verá afectada por los demás cuerpos que se encuentran en el espacio como por ejemplo el Sol u otro planeta.
- ✓ también se observa que 32,6 % de las estudiantes piensan en un cambio de órbita sin determinar si es más próxima a la Tierra o más alejada de la misma. De esta manera se observa que al existir un cambio en el movimiento en la Luna esto se evidencia en cambios de posición y aunque no es textual en las respuestas también permitiría concluir que el movimiento elíptico se mantendría presente.
- ✓ Adicional a las anteriores respuesta un 13,6 % de las estudiantes explican que de quedar quieta la Luna esta “caerá” dando a entender dos posibles situaciones una en la cual será atraída por la Tierra hasta llegar a estrellarse con ésta o que en el espacio todos los objetos se encuentran sobre un inmenso plano el cual es regulado por las interacciones entre los cuerpos los cuales producen el movimiento y al no estar presente éste los cuerpos salen de este plano.
- ✓ Por último, se observa que el 7,3 % de las explicaciones de las estudiantes se expresa que el movimiento es el que permite el distanciamiento de los cuerpos celestes y al estar quieto la distancia se puede reducir hasta producir la colisión o por el contrario ser atraída por otro planeta o cuerpo celeste.



### 3.1.4. Pregunta 4

**¿Por qué los satélites artificiales enviados por el hombre al espacio no se alejan ni caen a la Tierra?**



Al revisar las respuestas que arrojan las estudiantes respecto a la pregunta se encontraron las siguientes explicaciones:

- ✓ 58,3 % de las estudiantes encuentran que los satélites Artificiales en el espacio permanecen inmóviles según las indicaciones programadas en la Tierra antes de su lanzamiento, ahondando en esta respuesta entre las estudiantes del por qué creen que los satélites artificiales no se mueven en el espacio se encuentra que al observar algunas películas de ciencia ficción dan a entender que los satélites permanecen inmóviles a una determinada distancia de separación.
- ✓ En un 21,2 % de las explicaciones dadas a conocer por las estudiantes se encuentra que al no existir una gravedad en el espacio los satélites permanecen inmóviles en un determinado lugar, dando a entender que los satélites artificiales se ubican en un determinado lugar y al inferir que la

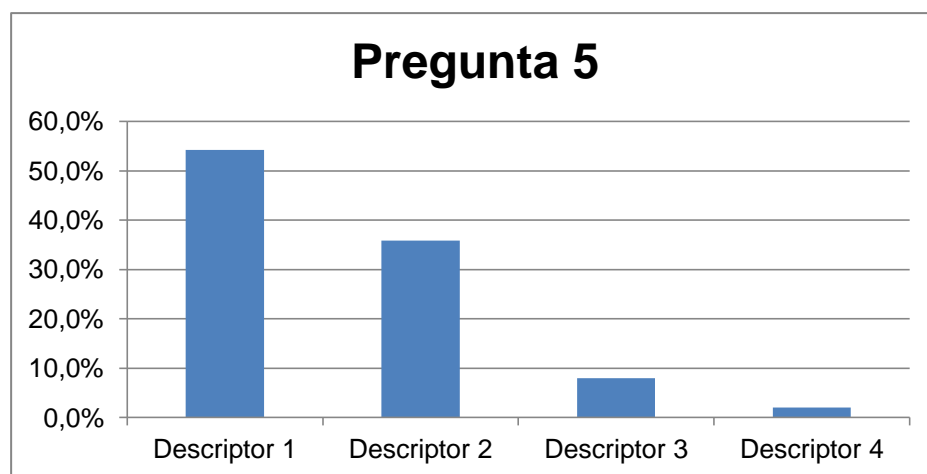
gravedad no existe o ejerce ninguna acción en el objeto este permanece a una distancia constante de separación.

- ✓ Por último un 20,5 de las estudiantes dejan dicho en sus respuestas que al momento del lanzamiento los satélites artificiales, estos son programados, están en órbita y son controlados por especialistas de la NASA, para que se mantengan girando alrededor de la Tierra, lo cual permite que los satélites no se caigan a la Tierra.

Se analiza que no es clara la acción de la gravitación universal en la generación de las órbitas tanto de los cuerpos celestes naturales como artificiales y que aunque existen diferentes herramientas tecnológicas para controlar las distancias orbitales de los satélites artificiales es mediante la atracción generada entre la Tierra y el satélite la que permite que se mantenga su movimiento en el espacio y que no se aleje de la Tierra en su órbita.

### 3.1.5. Pregunta 5

**¿Los planetas se demoran lo mismo al realizar una vuelta completa alrededor del Sol? ¿Por qué sucede esto?**

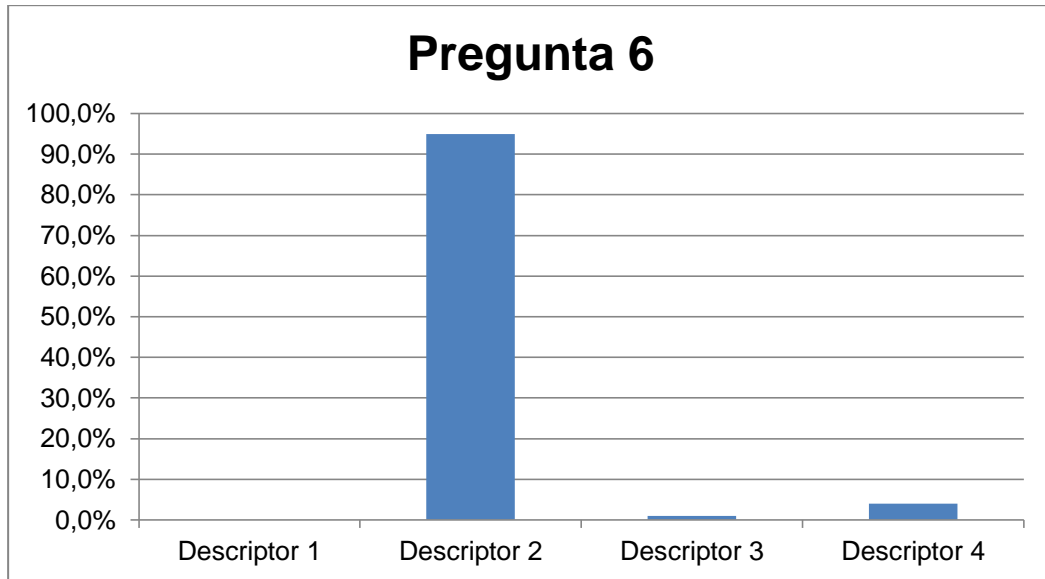


Se evidencia que el 90 % de las estudiantes responden rotundamente que los tiempos de dar una vuelta completa por cada uno de los planetas no es igual, variando únicamente en la explicación del por qué no lo son. Encontrando que las explicaciones se dividen en:

- ✓ La dependencia con la distancia a la que se encuentra el planeta del Sol, la cual es llamada por las estudiantes radio o qué tan lejos está el planeta. Identificando que la velocidad de recorrido está relacionada con la distancia a la cual se encuentra encontrando que a mayor distancia se observa un mayor tiempo en su recorrido.
- ✓ La dependencia con la masa, el tamaño y la gravedad que presenta el Sol hacia cada uno de los planetas. Encontrando que entre mayor masa posea el planeta esto le genera una aceleración que le permitirá girar en un menor tiempo que un planeta en el cual su masa es muy pequeña en relación a la que posee el Sol.
- ✓ Por último se encuentra un 8 % de las estudiantes que afirman que los tiempos de los planetas son diferentes pero no anexan ninguna explicación para su variación. El restante 2 % responde a la pregunta que si evidentemente se demoran lo mismo, pero de igual manera no dan ninguna explicación del por qué es la misma velocidad o tiempo que tarda en dar una vuelta.

### 3.1.6. Pregunta 6

**¿El movimiento de la Luna alrededor de la Tierra varía su velocidad o permanece constante?**



En tanto a la pregunta se evidencia que el 95% de las encuestadas afirma que la velocidad es constante con respecto a lo que se demora en dar una vuelta completa y aunque no se dan explicaciones de por qué se mantiene constante la velocidad, después de profundizar en el porqué con las estudiantes se observa que de forma verbal que es debido a que los días duran lo mismo, relacionando el movimiento de la Luna con los tiempos de rotación de la Tierra. Solo un 1% de las estudiantes responde que no está segura de que la Luna gire alrededor de La Tierra y por tal razón no da una explicación o afirmación a ésta pregunta. El 4% restante, no dan respuesta a la pregunta.

### 3.2. Análisis de la implementación

Luego de finalizar la implementación y siguiendo los lineamientos curriculares de la institución, en relación a una evaluación cuantitativa y cualitativa, se evidencia en las estudiantes una mejor aproximación a la Ley de gravitación universal comparando con los resultados obtenidos en el pre-test, dando una explicación y

relacionando los eventos con una fuerza que ejerce la Tierra sobre los objetos, tanto en un marco de referencia local como el evidenciado en la superficie de la Tierra, como en un marco un poco más desconocido como lo es el del espacio y los cuerpos celestes que se encuentran en este.

Se evidencia que al trabajar en equipo se facilita la socialización y explicación de distintas inquietudes que pueden encontrarse en las estudiantes, permitiendo que se generen explicaciones generales en las cuales todas se encuentran en acuerdo y proponen soluciones bajo la mirada de un enfoque colaborativo, en el cual no es el docente el que posee el conocimiento el cual es transmitido a sus estudiantes, sino que se convierte más en un guía en donde intenta que sus estudiantes no pierdan su rumbo pero permitiendo que en el camino se puedan equivocar y replantear los procesos.

Por último se pudo evidenciar que la aplicación de una propuesta cuantitativa como se expone por las distintas investigaciones realizadas de un enfoque experimental genera mejores resultados que la aplicación netamente de una fórmula para obtener un resultado numérico ya determinado, con esto no se quiere negar la posibilidad que para otros grupos o poblaciones se encuentre mejores resultados al utilizar una propuesta inversa, pero si se toma como referencia la investigación presente se denota que los resultados obtenidos y socializados a en general demuestran unos resultados buenos respecto a la ley de gravitación universal.

## 4. Conclusiones y recomendaciones

- Se evidencia en las estudiantes unas habilidades de análisis desde una perspectiva cualitativa, en donde es necesario la manipulación o la posibilidad de experimentar para mejorar los procesos de asimilación y poder realizar semejanzas entre diferentes eventos ya que solamente el leerlo e interpretarlo como lo muestran en los libros de texto, genera poca comprensión y en algunos casos puede conllevar a producir errores en la comprensión de conceptos claves como lo son la gravedad y la aceleración.
- Al hacer uso de la geometría como herramienta pedagógica para la comprensión de la aceleración centrípeta producto de la acción de dos cuerpos en interacción se puede concluir que permite evidenciar en las estudiantes una comprensión de la dirección de la aceleración y cómo es posible encontrarla realizando un análisis del cambio de dirección de la velocidad, al mismo tiempo se comprende la existencia de una fuerza relacionada con la aceleración centrípeta.
- Luego de la aplicación y evaluar la estrategia didáctica implementada se puede corroborar que los resultados muestran un acercamiento frente a los conceptos inmersos en la ley de gravitación universal y su dependencia con la masa de los cuerpos en relación, al igual de un marco de referencia el cual es factor importante para determinar los valores de la aceleración y el cumplimiento de las leyes del movimiento expuestas por sir Isaac Newton.
- Se evidencia una mejora en el análisis de situaciones de caída de objetos y su relación con el movimiento observado en los diferentes cuerpos celestes, por lo cual se puede concluir que las estudiantes asimilaron de una mejor forma la relación existente entre el movimiento de caída libre bajo un marco de referencia inercial y el movimiento de traslación de la Tierra respecto al Sol, encontrando la relación entre las variables de distancia a la que se encuentran los dos objetos y la masa que cada uno de ellos posee, lo cual influye en la fuerza observada entre los dos eventos descritos.

- Mediante la creación de la estrategia didáctica se puede concluir que es de vital importancia contar con un plan de acción determinado en donde se implemente el trabajo colaborativo a través de grupos de trabajo determinados en donde se busque la solución a una situación problema concreta, como en este caso la relación existente entre la caída de los cuerpos y la ley de gravitación universal, para de esta forma contextualizar y obtener unos resultados óptimos que mejoren la comprensión y la enseñanza de las ciencias y en específico de la física.

## Bibliografía

- Aguilar, J. (1989). *Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas*. Barcelona: Reverté S.A.
- Antonio, B. (2008). Acerca de la enseñanza-aprendizaje de los conceptos de fuerza y trabajo. *Latin-America Journal of Physics Education*, 253-258.
- Bayona, W. (1013). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las leyes de Kepller Por medio del aprendizaje colaborativo*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Cubero, R. (1989). *Cómo trabajar con las ideas de los alumnos*. España: Diadas Editoras.
- Dibar, C., & Pérez, S. (2007). Análisis de las dificultades de los conceptos de peso y gravedad: algunos resultados de investigación desde un marco teorico neuroconstructivista. *Revista de Enseñanza de la Física*, 33-39.
- Flores, Chavéz, Luna, Gonzáles, Demoss, G., & Hernandez. (2008). El aprendizaje de la física y las matemáticas en contexto. *CULCyt Año 5. N°24*.
- Geymonat, L. (1969). *Galileo Galilei*. Barcelona: Península.
- Hewson, P. (1990). La enseñanza de la fuerza y el movimiento. *Historia y Epistemología de las ciencias*, 157-171.
- Jimenez, E., & Segarra, P. (2002). IDEAS DE LOS PROFESORES DE FÍSICA SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL BACHILLERATO. *Universidad Nacional Autonoma de Mexico*.
- Lara, A. (2008). Acerca de la enseñanza- Aprendizaje de los conceptos de fuerza y trabajo. *Latin American Journal Physics*.
- LATORRE., A. (2003). *La investigación Acción*. España: Editorial GRAO.
- MEN. (2006). *ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS*. Bogotá: Ministerio de educación nacional.
- Rivera, J., Madrigal-Melchor, J., Cabrera-Muruato, E., & Mercado, C. (2014). Evolución histórica del concepto de fuerza. *Latin-American Journal of Physics Education*, Vol. 8, Número 4.
- Schaim, U. h., CrossJudson, John, D., & JAMES, W. (1972). *PSSC FÍSICA tercera Edición*. Barcelona: Reverté S.A.
- Segarra, P. (2016). Ideas de los profesores de física sobre la enseñanza de la solución de problemas en el bachillerato. *Researchgate*.
- Serrano, J., & María, P. (2012). La enseñanza y el aprendizaje de la Física y el trabajo colaborativo con el uso de las TIC. *Revista latinoamericana de tecnología educativa*, 95-107.



## ANEXO 1



Fotografía tomada en la realización de la primera actividad, en donde las estudiantes trabajan en la realización de un círculo y la ubicación de los vectores de la velocidad inicial y la velocidad final.



Fotografía de las estudiantes en la actividad 1 ubicando el vector aceleración centrípeta, analizando que su dirección es hacia el centro del círculo.

## ANEXO 2



Fotografía tomada en la realización de medio de la realización de la actividad 3 en donde se busca por parte de las estudiantes encontrar la masa que poseen distintos cuerpos esféricos para luego dar respuesta a las preguntas que se abordan en la actividad, lanzando los objetos desde una misma altura.



Fotografía de las estudiantes lanzando los distintos objetos para comprobar sus hipótesis con los resultados reales en relación al tiempo de caída y su masa.