UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES

DISEÑO Y APLICACIÓN DE UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA FACILITAR LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO DE LA I.E BATEAS

Juan Carlos Claros Molina

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Manizales, Colombia

2017

DISEÑO Y APLICACIÓN DE UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA FACILITAR LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO DE LA I.E BATEAS

Juan Carlos Claros Molina

Trabajo final de maestría presentado como requisito para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.

Director:

Doctor: Simeón Casanova Trujillo

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Manizales, Colombia

2017

DEDICATORIA

A Dios, por regalarme el maravilloso Don de la vida,

a mis padres, mi esposa y mi infinita felicidad:

mi hija Gabriela.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, por su apoyo, paciencia y comprensión.

A mi asesor de trabajo de Grado Doctor Simeón Casanova Trujillo, por sus enseñanzas y acompañamientos.

A mi compañero de Maestría, Alexander Paredes Martínez por su amistad y colaboración en la aplicación del trabajo de grado con sus estudiantes.

A todos los Maestros de la MECEN sede Manizales, por abrir nuevos caminos para la búsqueda del conocimiento.

RESUMEN

El presente trabajo busca desarrollar e implementar una estrategia didáctica, que permita mejorar el proceso de enseñanza – aprendizaje de los sistemas usuales de medición angular (sexagesimal y circular) y la conversión entre sus unidades, en los estudiantes de grado décimo de la I.E Bateas, del municipio de Acevedo (Huila).

Se inicia con una prueba diagnóstica, que permite identificar las dificultades que presentan los estudiantes en el tema. A continuación con el diseño y aplicación del juego Dominó Gradianes, se practican los métodos de conversión entre grados y radianes, que permiten finalmente, asimilar mejor el conocimiento y aplicarlo en la solución de situaciones matemáticas a través de las guías posteriores.

Palabras clave: Juego, dominó, trigonometría, ángulo, grados, número pi, radianes.

Design and application of a didactic strategy to facilitate the teaching-learning of angular measurement systems in tenth grade students from Bateas Educational Institution.

ABSTRACT

The present work aims to develop and implement a didactic strategy, which allows to improve the teaching - learning process, of the usual systems of angular measurement (sexagesimal and circular) and the conversion between their units, in the tenth grade students of Bateas Educational Institution, of the municipality of Acevedo (Huila).

It starts from a diagnostic test, which allow to identify the difficulties presented by students in the subject. Then with the construction and application of the Dominó game Gradianes, the conversion methods between degrees and radians are practiced, which finally allows to assimilate the knowledge better and apply it in the solution of mathematics situations through the subsequent guides.

Keywords: Game, dominó, trigonometry, angle, degrees, pi number, radians.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE GRÁFICAS

LISTA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

Según los estándares básicos de competencias matemáticas que se maneja en nuestro país, en el conocimiento matemático se han distinguido dos tipos: el conocimiento conceptual y el conocimiento experimental. El primer tipo de conocimiento hace referencia al "saber qué y saber por qué" y en el segundo a las técnicas, estrategias y habilidades para poder utilizar ese conocimiento en mejorar su calidad de vida, no solo en esta área, si no que se extienda a todas las áreas del conocimiento (García 2003, p5) es decir, el "para qué".

Gran parte de los jóvenes de esta época se sienten interesados en lo práctico del conocimiento (en su utilidad), y muchos docentes no tenemos en cuenta ese aspecto a nuestro favor, por lo que las clases de matemáticas se convierten en una cadena de conocimientos teóricos.

Por ejemplo, la trigonometría que se imparte en el grado décimo de nuestro país y que es herencia directa de la cultura griega, es de vital importancia en la solución de situaciones matemáticas y prácticas (cálculo de alturas de objetos, distancia entre dos puntos y áreas de regiones planas), además de su transversalización a otras áreas del conocimiento (la física, ingenierías, astronomía entre otras), es decir, las aplicaciones de esta rama de las matemáticas son muchas, como también lo son los contextos y proyectos de vida que tienen los alumnos de la Institución. Desafortunadamente, en muchas ocasiones, esta alternativa de aplicación del conocimiento no se emplea en las aulas de clase, quedando solo en contenido teórico, impidiendo que el aprendizaje sea significativo.

En la trigonometría, al igual que los triángulos, también son importantes sus componentes (vértices, lados, ángulos) porque permiten precisamente su definición y concepto. Una de estas partes del triángulo es el ángulo, concepto matemático que se maneja desde los primeros años de escolarización, pero del cual se ignoran la mayoría de aplicaciones y sistemas de medición. Dada la importancia de la trigonometría en las matemáticas, se infiere la necesidad de aclarar todas las dudas partiendo desde sus conceptos más básicos. Por tal motivo, esta estrategia parte de la importancia del concepto de ángulo, sus métodos más comunes de medición y sus aplicaciones.

Aunque a los alumnos de la I.E BATEAS les agrada e interesa la utilidad del conocimiento, hay muchas dificultades en la transmisión y recepción del conocimiento conceptual, esto debido al manejo de clases tradicionales y la no utilización de estrategias didácticas.

Por tales motivos, mediante este proyecto se desea implementar una estrategia didáctica que permita mejorar los canales de comunicación y por lo tanto el lenguaje, que es la base principal del aprendizaje.

Dicha estrategia implica directamente el juego, utilizado desde tiempos inmemoriales para el esparcimiento, pero también para la enseñanza- aprendizaje. Sobre este tema Freud expresa que: entre las particularidades del juego se destacan: se basa en el principio del placer, logra la transformación de lo pasivo a lo activo, merced a lo cual el niño obtiene la vivencia de dominio de sus experiencias traumáticas, satisface la compulsión a la repetición por el aprendizaje que con él se logra y por el placer derivado de la repetición misma *(Cañeque, 1993)*. Por tal motivo, teniendo en cuenta las virtudes del juego como herramienta que mejora y motiva el aprendizaje, se ha planteado una estrategia para aplicarla en clase.

Es importante recordar que el quehacer matemático en nuestro país está orientado por medio de cinco procesos (competencias), de cinco componentes (pensamientos) y de referentes curriculares como: lineamientos curriculares, estándares básicos por competencias EBC, derechos básicos de aprendizaje DBA, entre otros, todos de vital importancia en la comprensión del sentido y la finalidad de la Matemática en el proceso educativo (escuela). Tanto los procesos, como componentes y referentes curriculares (nacionales) se utilizan para la planeación y aplicación de esta propuesta metodológica.

En el primer capítulo se hace una revisión de la historia y epistemología de la trigonometría, enfocados en concepciones y sistemas de medición angular. Además de la importancia, origen y aplicación del número π (pi) a la matemática. También se muestra la importancia del juego y la didáctica en la enseñanza de la matemática y se exponen las principales definiciones y conceptos matemáticos utilizados en el plan de aula.

En el segundo capítulo, se expone todos los componentes relacionados con la metodología, las competencias evaluadas, los momentos del plan de aula, los avances y resultados por competencias, el juego (Dominó Gradianes) y sus reglas. Posteriormente se presentan los anexos como la prueba diagnóstica y las guías.

Finalmente, se presentan las conclusiones y las recomendaciones.

EL PROBLEMA

En la actualidad los jóvenes, específicamente los alumnos de la I.E BATEAS, en su gran mayoría se encuentran atraídos y sumergidos en el mundo de la facilidad y desinformación que les proponen las redes sociales, en el deseo de experimentar, compartir su sexualidad, por el acceso al alcohol o drogas (que les permiten de algún modo sentirse aceptados por la sociedad actual), dejando de lado la proyección y construcción de sus proyectos de vida.

La comunidad que gira alrededor de la institución trabaja en la agricultura o en el comercio de los productos agrícolas, sus niveles académicos son bajos, sus conocimientos son empíricos y se basan esencialmente en leer, escribir y realizar cuentas (analfabetismo funcional). Cultural y socialmente, estas familias no tienen una gran aspiración o proyecto de vida para sus hijos; comúnmente optan por continuar en las labores familiares o en trabajos informales.

Por estas razones, la Escuela como institución formadora, se encuentra relegada a una obligación (no está en sus prioridades actuales), porque lo que allí ven o escuchan en muchas ocasiones no tiene sentido ni aplicación a su vida real o porque las estrategias de enseñanza basadas en las clases tradicionales no son de su agrado. Esta situación se refleja en su desinterés por el proceso académico y en la poca asimilación y aplicación de la información (Matriz de Vester).

La enseñanza de las Matemáticas no es la excepción, se han convertido en una cantidad de conocimientos teóricos y abstractos a los cuáles el alumno no le encuentra sentido ni importancia para su diario vivir, lo que conlleva a que muestre poco interés por su aprendizaje. Por lo tanto, el objetivo como maestro de matemáticas no es dar información sin contextualizarla, ya que al alumno le resultará aburrida y poco atractiva; por el contrario, se le debe mostrar que incluso los conceptos más pequeños y simples, tendrán aplicación a su vida cotidiana y a los distintos tejidos del conocimiento. Para este propósito, es necesario diseñar estrategias didácticas y lúdicas, que mejoren la atención del estudiante y que faciliten la asimilación del conocimiento.

Las unidades de medición de la amplitud de un ángulo y sus relaciones son muy importantes en las matemáticas para el grado décimo, undécimo y formación universitaria, porque son bases de la trigonometría; pero para muchos estudiantes es un dolor de cabeza por su dificultad para asimilarlo.

Por otro lado, culturalmente la mayoría de los alumnos juegan y disfrutan con el conteo y las probabilidades del dominó. Por estas razones, se plantea la necesidad de utilizar el JUEGO DEL DOMINÓ como estrategia de enseñanza- aprendizaje para las conversiones entre unidades de medición angular, que permitirá que el alumno juegue y se divierta, pero también que se apropie del conocimiento.

OBJETIVO GENERAL

Diseñar y aplicar una estrategia didáctica que facilite la enseñanza, comprensión, aplicación y conversión entre unidades del sistema sexagesimal y radial, en los estudiantes de grado décimo de la I.E BATEAS de ACEVEDO – HUILA.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar y relacionar los principales sistemas de medición angular a partir de guías, donde se propongan y solucionen situaciones problémicas.

- Resolver problemas matemáticos y reales donde se aplique el aprendizaje obtenido, mejorando el desempeño de las competencias matemáticas (Comunicación, Modelación, Ejercitación y Razonamiento - Solución de problemas).

- Diseñar y construir una propuesta didáctica que permita optimizar y aplicar el conocimiento adquirido a través del juego Dominó Gradianes.

1. MARCO TEÓRICO

1.1.BARRIDO HISTÓRICO Y CONSIDERACIONES EPISTEMOLÓGICAS

Los trabajos pioneros realizados hace miles de años sobre la base de conceptos primitivos como número, magnitud y forma, han permitido obtener muchos de los adelantos tecnológicos que se poseen hoy en día (Boyer 1999, pág. 19). Es conveniente exponer que las nociones primitivas de número no son exclusivas de la raza humana, de hecho, investigaciones científicas muestran que algunos animales tienen capacidades de distinguir conjuntos con más pequeña cantidad de elementos, lo que abre la puerta al interrogante de la exclusividad de las matemáticas para la humanidad.

Cuando viajamos en avión o cuando hacemos una llamada con nuestro celular, no somos conscientes de la cantidad de conocimiento que ha evolucionado por miles de años (algebra, geometría, trigonometría, física, química etc.) para permitirlo, ni mucho menos de los centenares de personan vinculadas a estos desarrollos. respecto al tema expone I. Stewart: Muchos descubrimientos humanos son efímeros; el diseño de las ruedas de carro fue muy importante para el reino Egipcio, pero hoy en día no son exactamente tecnología de vanguardia. Las matemáticas, por el contrario, suelen ser permanentes. Una vez que se ha hecho un descubrimiento matemático está a disposición de cualquiera, y con ello adquiere una vida propia. Las buenas ideas matemáticas difícilmente pasan de moda, aunque la forma de implementarlas puede sufrir cambios espectaculares (I. Stewart. 2007, pág. 2).

Las principales culturas de las cuales se pueden registrar vestigios de los orígenes de las matemáticas corresponden a Egipto, Mesopotamia, India y China. Para estas culturas y para muchas otras, el origen del número y de la matemática están ligadas indiscutiblemente a la necesidad del ser humano de registrar correctamente información. Estos registros han cambiado muchas veces tanto de forma (desde simples marcas, rayas o cuñas, hasta nuestros símbolos para representar los números de origen Indio), como de material (desde la roca, arcilla, piel de animales, hasta el papel). Uno de los más antiguos de los cuales aún se tienen en la actualidad (Universidad de Oxford) es de origen Egipcio, en el que se nombran 120.000 prisioneros y 1.422.000 cabras capturadas (Boyer 1999, pág. 31) y el cual tiene más de 5.000 años. Con esta información se puede inferir la importancia que tenía para este imperio el poder, reflejado en la mano de obra y los recursos económicos.

Para esta época, pocas personas tenían la habilidad y capacidad de elaborar este tipo de registros por lo que la dificultad en la trasferencia de saberes era muy alta. Incluso con limitaciones de recursos y simbología (notación), los Egipcios trabajaron en la solución de problemas particulares de repartición (indicios de fracción), algebraicos, geométricos (áreas de rectángulos, triángulos), que tenían aplicación directa en los cálculos numéricos y la agrimensura, pero en los cuales no se evidencian justificaciones en los procedimientos. Uno de estos problemas los lleva a determinar una aproximación del número $\pi \approx 3\frac{1}{6}$ (sin la interpretación actual de este número), esto lo podemos conocer gracias a sus marcas en piedra y a escritos como el papiro de Rhind y el de Moscú (Boyer 1999, pág. 32-33).

Aproximadamente hace unos 5500 años, los pueblos que habitaban Mesopotamia (que significa entre ríos, porque viene del griego Messos "medio" y Potamos "ríos") ubicados entre los ríos Tigris y Éufrates (hoy Iraq), entre otros, los Sumerios, Acadios, Asirios, Caldeos y Persas, de los cuales se tiene registro gracias a su organización política, social, económica, y además a que ya conocían la escritura cuneiforme (cuñas en tablas de arcilla cocida). En los registros conocidos actualmente de estos pueblos, se evidencia la utilización de un sistema decimal similar al Egipcio, con el cual llevaban principalmente las cuentas correspondientes a impuestos y propiedades. Estos registros los llevaban personas instruidas en el tema, que desde temprana edad mostraron facilidades con el manejo de números.

Posiblemente, buscando métodos que permitieran facilidades para llevar este tipo de cuentas, la cultura Sumeria opta por la utilización de un sistema sexagesimal (base 60), en donde se pueden realizar particiones exactas por dos, tres, cuatro, cinco, seis, diez, doce, quince, veinte, treinta y sesenta, sin mayor dificultad; cualquiera que haya sido el motivo del surgimiento del sistema sexagesimal, éste ha tenido un recorrido muy largo que continua hasta la actualidad, muestra de ello, son las unidades de tiempo (horas, minutos y segundos usados actualmente). Este sistema además permitió dividir la circunferencia en 360 arcos iguales dando origen al grado, colocando la primera piedra para el desarrollo de la trigonometría (Caballero 2013, pág. 23).

Los sumerios con su tipo de escritura formaron su propio sistema de pesas y medidas con el cual calculaban intereses simples y compuestos; elaboraban tablas de raíces cuadradas, cúbicas, ternas pitagóricas, secantes (sin las definiciones actuales) que introducían a la solución de problemas particulares de ecuaciones, área y volumen de sólidos. Además, al igual que los egipcios tenían su propia aproximación del número $\pi \approx 3\frac{1}{8}$. En conclusión, al igual que en Egipto, en Mesopotamia se trabajaron temas variados de aritmética, álgebra y geometría, que permitían resolver problemas particulares y de su época a través de algoritmos, por ejemplo, la aproximación de las raíces cuadradas o ecuaciones cuadráticas y cubicas.

Además de las culturas Egipcia y Mesopotámica, muchas otras crearon por necesidad sus propios sistemas de numeración aditivos o posicionales. Entre los más conocidos y utilizados están: Romano (hace dos mil años aproximadamente), Maya (Guatemala. Más o menos año 400 D.C), Inca (el quipu, método de representación más antiguo, se calcula que corresponde al año 2500 A.C aproximadamente), China (2750 a 1000 A.C aproximadamente) e Indio (300 A.C Aproximadamente) (Ospina 2016).

Una de las grandes dificultades que presentaron las culturas Egipcia y Mesopotámica fue la ausencia de generalización en la solución de problemas, situación que corrigieron los Griegos al formalizar los conocimientos (los demostraron para darles un sentido general y no particular). Esta etapa se conoce como “época Heroica de la matemática”, porque ninguna otra cultura hizo tanto por esta ciencia con tan pocas herramientas. Los Griegos se caracterizaron por su alto grado de curiosidad intelectual, por sus concepciones filosóficas y matemáticas del universo, por sus creativos métodos de solución, en los que implícitamente manejaban el concepto de infinito, como en el “método de exhausción” y en las paradojas de Zenón:

Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano (Boyer 1999, pág. 129).

Se atribuye a los mercaderes y negociantes griegos que viajaban a los antiguos centros del saber egipcio y babilónico, el contacto con el conocimiento matemático. El auge de la matemática griega (cultura helénica) se da porque además de apropiarse de dicho conocimiento, lo sistematiza, dando forma a las ciencias de la geometría, trigonometría y la astronomía. El trabajo de los Griegos Tales de Mileto, Pitágoras, Anaxágoras, Hipias, Filolao, Demócrito, Platón, Eudóxo, Euclides, Arquímedes y Apolonio entre otros, son solo ejemplos de todo el conocimiento desarrollado en la cultura griega no solo en matemáticas, sino también en filosofía, arte, música entre otras. Cada uno tiene su aporte a la historia de las matemáticas, aunque no se puede precisar con exactitud cuál, debido a los pocos textos que aún se conservan de dicha época. Como lo expone Martin Gardner: La historia biográfica, tal como se enseña en nuestros colegios, es todavía en su mayor parte la historia de personajes estúpidos, reinas y reyes ridículos, líderes políticos paranoicos, viajeros compulsivos, generales ignorantes, los deshechos de las corrientes históricas. Los hombres y mujeres que alteraron radicalmente la historia, los grandes científicos y matemáticos creativos, rara vez se mencionan, si es que se mencionan (Recamán 2010, pág. 12).

Otro aspecto importante de la cultura Griega, fue que además de solucionar problemas de situaciones concretas y prácticas de geometría, aritmética, astronomía, música, física, entre otras, supieron encontrar y explorar la belleza de la matemática abstracta, la cual debió, en algunos casos, esperar muchos años para tener aplicación. Uno de estos conocimientos hace referencia a la cuadratura del círculo. Consiste en dibujar con regla y compás, un cuadrado que tenga igual área que un círculo especifico (la imposibilidad de resolver este problema con regla y compás, solo se demostró aproximadamente hace 130 años cuando Lindemann (1882) demuestra que π es trascendente). Es preciso aclarar que, aunque los griegos realizaron muchos trabajos sobre áreas de polígonos y sectores circulares, ningún matemático de esa época utilizaba el símbolo π, ni la idea de un número que representaba la razón entre la circunferencia y su diámetro. También se le debe a la cultura Helénica, la división de la circunferencia en 360 partes iguales (grados) y las fórmulas que relacionan las cuerdas con los ángulos de un circulo (funciones trigonométricas de suma de ángulos y de ángulo medio), resultados que se aplicaron principalmente al estudio astronómico y a la navegación. En esta época, la transmisión de conocimientos se hacía por medio de los discípulos o por medio de los copistas (personas encargadas de transcribir libros completos para multiplicarlos).

Se atribuye a la cultura griega entre otros aportes: la proporción áurea, los números triangulares, cuadrados, pentagonales; las leyes de la acústica, los números primos y amigos; la propuesta de los tres problemas clásicos de la antigüedad: cuadratura del círculo, la duplicación del cubo, trisección del ángulo; además, la cuadratura de las lúnulas, los números inconmensurables, el álgebra geométrica (método de cálculo geométrico general), la medida del círculo, el área del segmento parabólico, el volumen de la esfera, las cónicas, el método deductivo.

Tal vez uno de los resultados más importantes de la cultura griega, específicamente de Arquímedes (287-212 a.C), es el valor aproximado de π. Este valor fue hallado a través de un método que consistía en construir dos polígonos, uno inscrito y otro circunscrito a la circunferencia cuyo radio es igual a uno. El valor de la longitud de la circunferencia debía encontrarse entre los valores del perímetro de los polígonos. Al trabajar con polígonos de 96 lados obtuvo un valor de $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ aproximadamente (Boyer 1999, pág. 171).

Desde entonces, han sido muchos los matemáticos que han dedicado sus vidas a crear métodos que permitan acercar cada vez más al valor de π. Brahmagupta (600 a.C) obtuvo $\sqrt{10}$, Wang Fau (263 a.C.) 3.14, Ptolomeo (200 a.C.) 3.14166, Fibonacci en 1220 lo aproximó a 3.141818. Lambert en 1766 nombró y mostró a π como irracional. Lindemann en 1882 demuestra que π es trascendente. Con la ayuda de las computadoras en la actualidad (2016) se conocen más de 13,3 billones de cifras decimales. (Ruiz 2016). Del tema en un artículo de la UNAM se expone: Lo cierto es que sólo cuatro decimales de Pi con suficiente precisión bastan para las necesidades prácticas. Con 16 decimales se obtiene, con el espesor aproximado de un cabello, la longitud de una circunferencia que tenga por radio la distancia media de la Tierra al Sol. Si reemplazamos el Sol por la nebulosa más lejana y el cabello por el corpúsculo más pequeño conocido por los físicos, no harían falta más que 40 decimales. Entonces ¿Qué necesidad existe para buscar tantas cifras? Quizá ninguna necesidad práctica, pero el hombre no se resigna aún a aceptar cosas que no pueda llegar a comprender, como por ejemplo el infinito.

Otro concepto de gran relevancia, aportado por los griegos a las matemáticas y específicamente a la trigonometría es el de ángulo, aunque su definición es para nada explicita. Proclo (Alvares. C & Martínez. R. pág. 25) al respecto dice: desde la antigüedad la naturaleza del ángulo ha sido fuente de serios problemas, dentro del esquema Aristotélico un ángulo se podría considerar como una relación, como una cantidad o como una cualidad. Por ejemplo, Euclides en su libro I de los Elementos define: “Un ángulo plano es la inclinación mutua de las líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta”. En la cual se evidencia el tratamiento de ángulo como una relación entre dos rectas, pero de igual forma de cantidad al tener la posibilidad de calcularse su magnitud; esta definición es esencial para la geometría Euclidiana. En la matemática moderna, por ejemplo apoyados del Álgebra Lineal, aunque la definición de ángulo se conserva, su forma de medirlo es un poco más compleja, porque aplica directamente el concepto de vector y las funciones trigonométricas: El ángulo θ entre dos vectores v y w, es el arco coseno de la razón entre el producto punto de los dos vectores y el producto de la norma o magnitud de los mismos, es decir, $\theta = \arccos(\frac{v.w}{\|v\|\|w\|})$ (Fraleigh J. B & R. A beauregard 1995, pág. 24).

Por otro lado, referente a las culturas India y Árabe se conoce que los hindúes tenían muy desarrollada una capacidad de asociación y analogía, de intuición y de instinto estético, unidos a una imaginación natural, mientras que los árabes tenían una mentalidad más práctica y más aterrizada (Boyer 1999. pág. 298). Al igual que los Griegos, los Árabes se interesaron mucho por la organización sistemática de los conocimientos y sus aplicaciones generales. Estas culturas, además del legado de nuestro sistema de numeración decimal posicional, también hicieron valiosos aportes a la trigonometría influenciados por la cultura Griega. Aryabhata (siglo V) (Boyer 1999. pág. 280) expone que: (en nuestra terminología) “el seno de un ángulo pequeño es casi igual a la medida del ángulo en radianes”. Abu’l Wefa (siglo X) construyo tabla de las seis funciones trigonométricas.

En la Europa Medieval (siglo V-XV) se dan dos aspectos importantes referentes a la estructuración de las matemáticas: por un lado, Fibonacci muestra la relación cercana de la aritmética y la geometría, y por el otro, Jordano Nemorarius muestra la aplicación que tienen las matemáticas a la física; por ejemplo, la aplicación de las funciones trigonométricas en la mecánica. Esta es una época oscura para las matemáticas por el dominio del cristianismo romano hacia la ciencia, la poca matemática que se trabaja, resuelve problemas básicamente de cambio de monedas y aplicaciones prácticas.

Posteriormente, en el Renacimiento además del trabajo con fracciones sexagesimales para algunas situaciones específicas , G.J Rheticus (siglo XVI), compañero de estudio de Copérnico, centra su trabajo de funciones trigonométricas en los lados y ángulos de un triángulo rectángulo, a diferencia de los arcos de circunferencia como en la antigüedad. Los textos de historia muestran las dificultades que se presentaban al intentar definir las unidades de medida de las variables (ángulos) de dichas funciones, (Buendía & Montiel 2008). Euler (preludio de la matemática moderna siglo XVIII) manejaba tanto grados, como radianes sin ningún problema, evidenciando el trabajo con el triángulo, pero también con la circunferencia, mostrando una nueva cara de la trigonometría.

Con la llegada de la imprenta, la matematica se vuelve universal, por la posibilidad de compartir a gran escala y en poco tiempo el conocimiento (difiere de las cartas que se enviaban en épocas anteriores, las cuales en ocasiones nunca llegaban a su destino). En ésta epoca se resalta el trabajo en algebra y la trigonometría, en aplicaciones reales (contabilidad, cartografia, agrimensura, óptica entre otras).

Finalmente, en el preludio y posterior llegada de la matemática moderna, donde a partir de la solución de un problema, surgen más o nuevas ramas de la matematica (geometrías no eucledianas) y donde más que nunca se investiga en matematicas (teorías, artículos) con infinidad de aplicaciones y estudios abtractos (aplicaciones impensadas para las culturas que vieron su origen), que generan cambios radicales al trabajo y desarrollo de ésta ciencia. Al respecto F. Viéte expone: la matemática consiste en una forma de razonamiento y no un saco de trucos como los que ofrecía Diofanto (Boyer 1999. pág. 386). La belleza de la matemática moderna no radica como en épocas anteriores a la aplicación, si no por el contrario, mayor la belleza e importancia entre más abstracta y menos aplicación tenga a la realidad; pero es claro, que en algunos años existirán mentes brillantes que se encargaran de encontrarla.

Hoy sabemos la importancia que tiene el ángulo en las matemáticas y que su estudio se puede tratar tanto con el sistema sexagesimal (amplitud del ángulo) o con la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro ($número\ \pi$) sistema radial o circular, estos temas son obligatorios en nuestro sistema educativo actual porque permite aplicarlos a longitud de arcos de circunferencia, área de sectores circulares y movimiento circular uniforme entre otros.

1.2. MATEMÁTICAS Y JUEGO.

En nuestro país, para la formación integral de los niños en la primera infancia, son necesarias cuatro actividades fundamentales sobre las cuales está orientado el trabajo pedagógico: juego, arte, literatura y exploración del medio. En estas edades todo el conocimiento es asimilado gracias a las actividades lúdicas, que son indispensables para su formación, además, el juego es reflejo de la cultura, de las dinámicas sociales de una comunidad, y en él las niñas y los niños representan las construcciones y desarrollos de su vida y contexto (Cárdenas A. & Gómez C. 2014. pág. 12).

Desafortunadamente, la importancia del juego se queda en esa etapa de desarrollo y no transciende con igual calidad a la educación básica primaria y menos aún, a la secundaria o media. Esta situación permeabiliza todas las áreas del conocimiento, incluidas las matemáticas. Dichas áreas, en muchas ocasiones se limitan a la exposición de teorías (sin sentido, ni satisfacción para los estudiantes) de manera tradicional, que solo estarán en la memoria de los estudiantes a corto plazo, porque no son aplicables a sus situaciones cotidianas. Como lo expone De Guzmán:

En mi opinión, el objetivo primordial de la enseñanza básica y media no consiste en embutir en la mente del niño un amasijo de información que, pensamos, le va a ser necesaria como ciudadano en nuestra sociedad. El objetivo fundamental consiste en ayudarle a desarrollar su mente y sus potencialidades intelectuales, sensitivas, afectivas, físicas de modo armonioso (De Guzmán M, 1991 pág. 5).

Estas potencialidades, se pueden desarrollar eficazmente cuando son de interés para los estudiantes y permiten el disfrute y aprendizaje en su proceso, una herramienta valiosa para tal objetivo es el juego. Acerca del tema, de las importantes características del juego, el sociólogo Johann Huizinga (De Guzmán M, 1989 pág. 61) expone entre otros, los siguientes rasgos:

– Es una actividad libre, es decir, se ejerce por gusto y no por su beneficio.

– Tiene una función en el desarrollo del hombre, al igual que a los animales nos prepara en la niñez para la competencia y la vida en general. Además, en la juventud y adultez proporciona libertad, relajación, ocio y disfrute.

– El concepto de juego no es sinónimo de broma, es decir, que el juego debe ser tomado en serio.

– Es una actividad separada de la vida ordinaria.

– El juego como arte, produce placer a través de su contemplación y su ejecución.

– Se dan ciertos elementos de tensión, cuya solución produce satisfacción y placer.

– Da lugar a lazos especiales entre los participantes.

– Crea a través de sus reglas, un nuevo orden, una nueva vida.

Estas características individuales y sociales del juego, no se alejan de la actividad matemática, es decir, el juego y la matemática están estrechamente relacionados, porque a través de la lúdica se pueden desarrollar competencias matemáticas, y es que, a partir de la manipulación de un buen juego (con objetivos claros), se puede llegar a resolver problemas matemáticos, que dejan excelentes e importantes conclusiones. La matemática ha sido y es *arte y juego* y esta componente artística y lúdica es tan consustancial a la actividad matemática misma que cualquier campo de desarrollo matemático que no alcanza un cierto nivel de satisfacción estética y lúdica permanece inestable ... (De Guzmán M, 1989 pág. 61). Reforzando esta idea, Martin Gardner expone:

Las matemáticas recreativas proporcionan el mejor camino para captar el interés de los jóvenes durante la enseñanza de la matemática elemental. Un buen rompecabezas matemático, una paradoja o un truco de apariencia mágica pueden excitar mucho más la imaginación de los niños que las aplicaciones «prácticas», sobre todo cuando estas aplicaciones se encuentran lejanas de las experiencias vividas por ellos (Martin Gardner, 1980. pág. 2).

A partir de lo anterior, se evidencia no solo la importancia del juego en las matemáticas, sino la necesidad de aplicarlo, tanto en la escuela como en el colegio, como una herramienta que potencie su enseñanza- aprendizaje, a través de su transversalización, del goce y de la construcción significativa del conocimiento.

Lo que deberíamos proporcionar a nuestros estudiantes a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos (De Guzmán M, 1991 pág. 6), que es la habilidad o competencia con la que más se relaciona dicha ciencia, en otras palabras, es el corazón de las matemáticas; a partir de estos problemas, es que nacen hábitos de estudio, motivaciones, capacidades de tratarlos con una mirada holística, habilidades de socialización y trabajo en grupo, que también se pueden alcanzar a través de los juegos.

Uno de los principales métodos que se implementan en la actualidad para la solución de problemas, es el del matemático George Pólya (Corbalán F & Deulofeu J, 1996, pág. 104) que data del año de 1945 y en el que plantea lo necesario para tratarlos; comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y examinar la solución obtenida. Esta misma teoría heurística se puede implementar en la implementación de juegos (De Guzmán M, 1991 pág. 7), dadas las similitudes con el que hacer matemático:

- Antes de hacer, tratar de entender. Efectivamente, hace referencia a la necesidad de analizar todos los componentes del juego (reglas, tablero, fichas), antes de iniciar sin una lógica establecida.

- Desarrollar una estrategia: En esta etapa, se buscan similitudes o conexiones con otros juegos o situaciones que conozca con anterioridad, posiblemente de menor complejidad; permitiendo elaborar un plan de acción. Algunas de las preguntas que pueden ayudar a la estructuración de las estrategias son: ¿conozco un juego similar? ¿qué puedo tomar de él para facilitar la solución de éste? ¿puedo resolver el juego por partes? ¿puedo partir del final hacia el punto de partida? ¿puedo ayudarme de tablas, gráficas o colores? De tal forma que al final se construya un esquema mental de las posibles soluciones del juego.

- Mirar si la estrategia lleva al final. En este punto, se ponen a prueba las estrategias planteadas para la solución del juego. Si no se consigue la solución con las tácticas buscadas, es válido retroceder, sin darse por vencido e idear nuevas estrategias.

- Sacar jugo al juego. Finalmente, cuando se resuelve el problema se tiende a pensar que todo terminó, pero no es así. Lo más importante, tal vez, ni siquiera es la solución en sí del juego, si no, lo que se puede hacer con ella; ¿por qué y cómo lo solucione?, ¿en que otro juego o problema puedo aplicarlo? ¿puedo crear mi propio juego?

Muchos matemáticos a través de la historia han utilizado el juego para desarrollar conceptos y habilidades matemáticas:

La lista de objetos matemáticos que se han desarrollado motivados por el espíritu de los juegos sería interminable. Baste señalar algunos de los nombres de matemáticos famosos que se podrían destacar en este contexto: Fibonacci, Fermat, Pascal, Leibniz, Euler, Bernoulli, Gauss, Hamilton, Hilbert… (De Guzmán M, 1989 pág. 62).

Actualmente, hay una rama de las matemáticas conocida como teoría de juegos, desarrollada por el matemático Jhon F. Nash, que lo llevó a ser merecedor del premio nobel de economía, precisamente por su aplicación como modelo dominante en la teoría económica y la contribución significativa a la ciencia política, a la biología y a estudios de seguridad nacional, entre otros (Monsalve S. 2003, pág. 137).

1.3. TEORIA BÁSICA SOBRE LA CONVERSIÓN ENTRE SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR.

Desde sus orígenes se conoce al ángulo como la abertura formada por dos semirrectas unidas en un solo punto llamado vértice. En la actualidad cuando se involucra su concepto en la trigonometría, se puede distinguir como aquel que se genera por la rotación de un rayo desde una posición inicial hasta otra posición final, siempre alrededor de un punto fijo llamado vértice. Un ángulo se considera positivo o negativo dependiendo de su sentido de rotación.

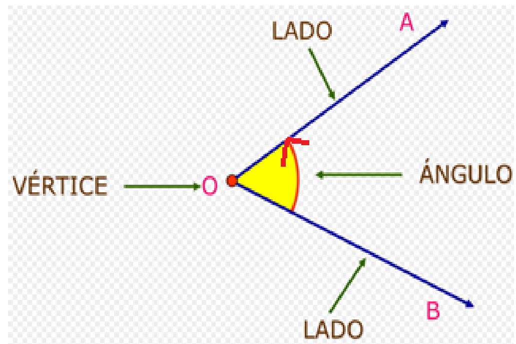


Figura 1. Ángulo

Los sistemas de medición angular son las diferentes formas o métodos utilizados para la medición de ángulos. Entre los más utilizados y conocidos están: El sistema Sexagesimal y Radial o Circular.

SISTEMA SEXAGESIMAL (INGLÉS)

Divide un ángulo completo en 360 partes iguales. Cada una de estas partes se conoce como (1°) grado sexagesimal. Es decir:

Un ∢ completo = 360°

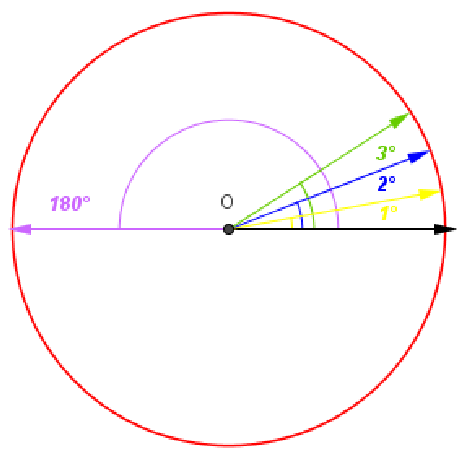


Figura 2. Grados.

SISTEMA CIRCULAR O RADIAL (INTERNACIONAL)

Un radián (**rad**) es la medida de un ángulo cuyo arco mide lo mismo que el radio con el que se ha trazado. Es importante tener en cuenta que cuando se miden ángulos en radianes, se obtiene la longitud del arco de la circunferencia (números reales).

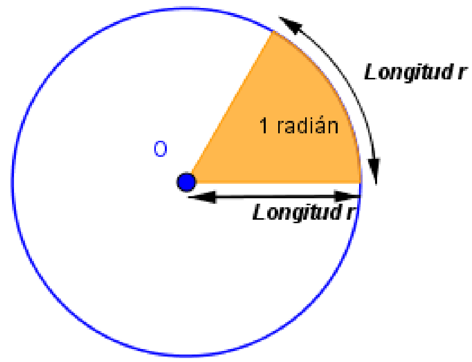


Figura 3. Radián.

- **RELACIÓN ENTRE EL SISTEMA SEXAGESIMAL Y CIRCULAR**

El numero π es la razón entre la longitud de la circunferencia L y su diámetro D. Es decir, $\pi = \frac{L}{D}$. De donde se tiene que: $L = \pi D = \pi(2r) = 2\pi r$ entonces, $L = 2\pi r$. Además, se tiene que la cantidad de veces que cabe r en la circunferencia es $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$; es decir que un ángulo completo (360° en el sistema sexagesimal) equivale a $2\pi\, radianes$ (en el sistema circular). Por lo tanto:

$$360° = 2\pi\, rad$$

$$\mathbf{180° = \pi\, rad}$$

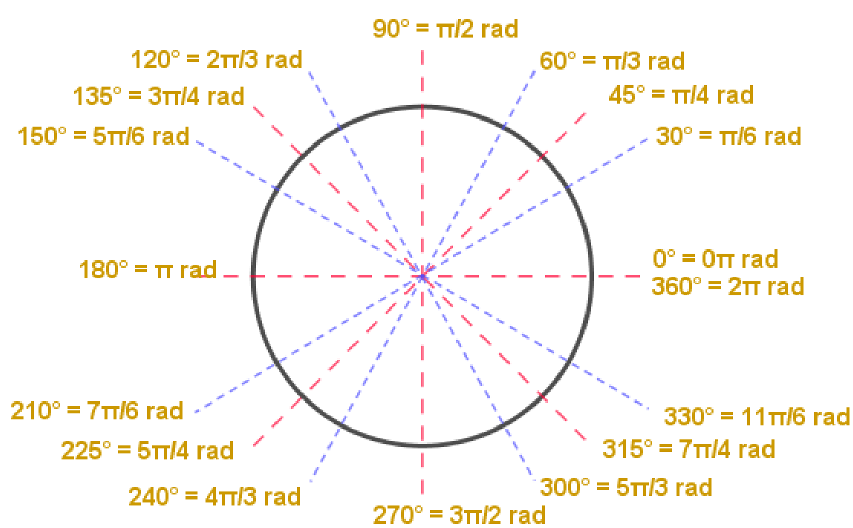


Figura 4. Relación entre grados y radianes.

- **LONGITUD DEL ARCO DE CIRCUNFERENCIA**

La longitud de una circunferencia corresponde a $L = 2\pi r$, donde 2π es la medida de un ángulo completo, por tanto, si se quiere encontrar la longitud de una porción de la circunferencia (arco), se multiplica el valor del ángulo con el radio r, es decir:

Longitud de arco $S = \theta . r$ **,** donde θ se mide en radianes.

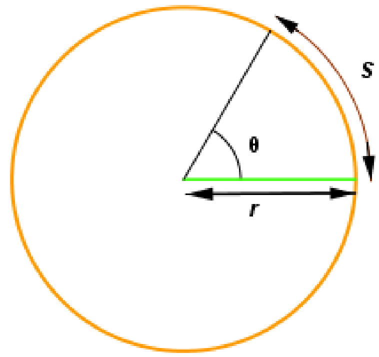


Figura 5. Longitud de arco.

- **ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR**

Se puede definir el área de un sector circular a través de una regla de tres simple directa (dado que las áreas son proporcionales) así: Si la longitud de una circunferencia es $2\pi r$ y el área de dicha circunferencia es $\pi r^2 (A_O)$, entonces ¿cuál será el área del sector circular (A_S) que tiene por arco θr?. Simbólicamente se tiene lo siguiente:

$$A_O \longrightarrow 2\pi r$$

$$A_S \longrightarrow \theta r$$

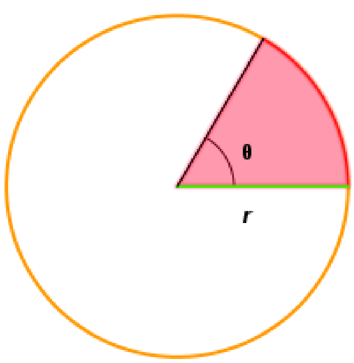


Figura 6. Área del sector circular.

De aquí tendríamos que:

$$A_s = \frac{A_o * \theta r}{2\pi r} = \frac{\pi r^2 * \theta r}{2\pi r} = \frac{\theta r^2}{2}$$

Área del sector circular: $A_S = \dfrac{\theta r^2}{2}$ donde θ se mide en radianes.

2. METODOLOGÍA

El proyecto se desarrolló en los estudiantes de grado décimo de la I.E. BATEAS, implementando el método cuantitativo. A través del juego, el alumno (con un acompañamiento del docente) construyó y descubrió por sí mismo el conocimiento, partiendo de los saberes previos y el contexto en el cual se desenvuelve.

Es preciso aclarar que la construcción de las guías para la aplicación del plan, están relacionadas directamente con las prácticas de aula, entendidas por el Ministerio de Educación Nacional como el conjunto de acciones y momentos de las clases que orienta al maestro y tienen como finalidad la construcción conceptual y el fortalecimiento de habilidades cognitivas y sociales en los estudiantes. De igual forma, para el mejoramiento de la calidad educativa el gobierno nacional ha elaborado una serie de insumos (lineamientos curriculares, estándares básicos por competencias, derechos básicos entre otros) que permiten al maestro conocer las competencias, componentes y aprendizajes, que necesitan los estudiantes para enfrentarse idónea y críticamente a las situaciones actuales; dichos insumos están aplicados directamente en esta propuesta.

Histórica y culturalmente se cree que el quehacer matemático es simplemente solucionar problemas (Niño 1994, pág. 15), pero actualmente se reconocen cuatro competencias más, que al igual que la anterior son de vital importancia en la formación académica de dicha área del conocimiento. Por este motivo, tanto la prueba diagnóstica, como las guías de aplicación, tienen ejercicios que permiten verificar el manejo de cada una de estas competencias.

Inicialmente, por medio de un examen diagnóstico (con preguntas abiertas y cerradas) se determinó el conocimiento previo de los estudiantes acerca del tema. Luego, con la información obtenida en dicho examen diagnóstico, se planearon y aplicaron guías de clase (preguntas abiertas) para acercar al alumno a la teoría requerida. Con los resultados de las guías, se elaboraron tablas y gráficas estadísticas de las habilidades y dificultades que presentan los estudiantes en el manejo del tema y sus aplicaciones. Es preciso resaltar que el trabajo de las guías inició con la medición por parte de cada uno de los alumnos, de objetos circulares (longitud de la circunferencia y diámetro) con hilo y regla, para que reconocieran el valor de la constante que resulta al comparar estas dos magnitudes, es decir el valor aproximado de pi.

Después de exponer la información y practicar, se les presentó el juego Dominó Gradianes, con el cual además de motivarlos y divertirlos, también permitió practicar el tema aprendido. A continuación, en grupos de alumnos, elaboraron su propio dominó con materiales del medio, donde se buscó mejorar el trabajo en equipo y creatividad.

Luego, con el fin de hacer significativo el conocimiento, se desarrolló una guía final en la cual el alumno aplicó lo aprendido, por medio de situaciones propias de área como longitud de arco y área del sector circular.

Finalmente, se realizaron las comparaciones del manejo de las competencias, tanto en la prueba diagnóstica como en las guías de aplicación.

2.1. COMPETENCIAS EVALUADAS

Según los lineamientos curriculares de nuestro país, en el área de Matemáticas se deben desarrollar en los alumnos cinco procesos generales (competencias**),** que tienen que ver directamente con el aprendizaje: el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

- RESOLUCIÓN Y PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS Y RAZONAMIENTO: Entendida como la capacidad o habilidad de utilizar el conocimiento adquirido en la solución de situaciones matemáticas y/o contextuales, además es el arte de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión. Según los lineamientos curriculares, “en la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando una mente inquisitiva y perseverante, van aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel.”

- MODELACIÓN: Entendida como la capacidad de utilizar estrategias que faciliten y simplifiquen la solución de situaciones matemáticas. Según los lineamientos curriculares es “la forma de describir ese juego o interrelación entre el mundo real y las matemáticas es la modelación”.

- ELABORACIÓN, COMPARACIÓN Y EJERCITACIÓN DE PROCEDIMIENTOS: Entendida como la habilidad de realizar correctamente cálculos o la aplicación conveniente de algoritmos para solucionar situaciones matemáticas.

- COMUNICACIÓN: Entendida como la capacidad de expresar las ideas o conocimientos matemáticos. Esta competencia es esencial para todas las demás, pues es la base para la enseñanza-aprendizaje y su aplicación.

2.2. VALORACIÓN DE LAS VARIABLES

Para realizar la evaluación cuantitativa de las competencias, se tiene en cuenta la siguiente tabla con los valores que se manejan en la institución.

COMPETENCIA	VALORACIÓN		INDICADOR
	CUALITATIVA	CUANTITATIVA	
RESOLUCIÓN Y PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS Y RAZONAMIENTO	SUPERIOR	4.6 - 5.0	Resuelve excepcionalmente problemas matemáticos o contextuales.
	ALTO	4.0 - 4.5	Resuelve problemas matemáticos o contextuales.
	BÁSICO	3.0 - 3.9	Resuelve parcialmente problemas matemáticos o contextuales.
	BAJO	1.0 – 2.9	Presenta dificultades para resolver problemas matemáticos o contextuales.
MODELACIÓN	SUPERIOR	4.6 - 5.0	Utiliza excepcionalmente estrategias y herramientas para la solución de situaciones matemáticas.
	ALTO	4.0 - 4.5	Utiliza estrategias y herramientas para la solución de situaciones matemáticas.
	BÁSICO	3.0 - 3.9	Utiliza parcialmente estrategias y herramientas para la solución de situaciones matemáticas.
	BAJO	1.0 – 2.9	Presenta dificultades para utilizar estrategias y herramientas para la solución de situaciones matemáticas.
ELABORACIÓN, COMPARACIÓN Y	SUPERIOR	4.6 - 5.0	Aplica excepcionalmente algoritmos y procesos lógicos para el cálculo de valores.
	ALTO	4.0 - 4.5	Aplica algoritmos y procesos lógicos para el cálculo de valores.
	BÁSICO	3.0 - 3.9	Aplica parcialmente algoritmos y procesos lógicos para el cálculo de valores.

EJERCITACIÓN DE PROCEDIMIENTOS	BAJO	1.0 – 2.9	Presenta dificultades en la aplicación de algoritmos y procesos lógicos para el cálculo de valores.
COMUNICACIÓN	SUPERIOR	4.6 - 5.0	Argumenta y expresa excepcionalmente las ideas matemáticas.
	ALTO	4.0 - 4.5	Argumenta y expresa las ideas matemáticas.
	BÁSICO	3.0 - 3.9	Argumenta y expresa parcialmente las ideas matemáticas.
	BAJO	1.0 – 2.9	Presenta dificultades para argumentar y expresar las ideas matemáticas.

Tabla 1. ***Valoración de las variables.***

2.3. PLAN DE AULA Y SUS MOMENTOS.

Aunque no existe un único camino que lleve directamente al éxito, es decir, no hay una fórmula para asegurar que el aprendizaje llegue a los estudiantes, este proceso depende mayormente de la metodología que tengan los maestros y de las herramientas o insumos que utilicen.

Algunas de estas herramientas las ha querido exponer y practicar el Ministerio de Educación Nacional por medio de sus proyectos, incluido el de Todos Aprender. Este proyecto además de realizar acompañamientos en las instituciones educativas que han presentado dificultades en los resultados de pruebas nacionales como Aprendamos, Supérate con el Saber y las pruebas Saber, también realiza procesos de mejoramientos curriculares entre ellos el PLAN DE AULA. Para este plan, además de conocer los referentes nacionales, los docentes deben emplear el contexto y las acciones específicas dentro del aula. Estas acciones o momentos son:

MOTIVACIÓN Y EXPLORACIÓN: En este momento, básicamente se pretende identificar el conocimiento previo de los estudiantes acerca del tema, para identificar el punto de partida de la clase y realizar actividades (lúdicas-dinámicas-manipulativas) para motivar al estudiante a acercarse a dicho conocimiento.

EXTRUCTURACIÓN Y PRACTICA: Después de que el estudiante este motivado, se expone el tema, su importancia, ejemplos y aplicación. Además, en este momento el estudiante practica la aplicación del conocimiento.

TRANSFERENCIA Y VALORACIÓN: En este momento los estudiantes deben mostrar o demostrar que se ha cumplido el objetivo de la clase, mediante la actividad que haya planeado el docente (socialización, transversalidad del conocimiento, aplicaciones etc.). De este proceso, se puede elegir también un método de evaluación y finalmente de retroalimentación, teniendo en cuenta las fortalezas y debilidades.

2.4. AVANCE Y RESULTADOS POR COMPETENCIAS.

En las siguientes tablas se evidencia el resultado de la práctica tanto de la prueba diagnóstica como de las guías de aplicación. Además, se presenta los avances respecto a las competencias evaluadas.

2.4.1. PRUEBA DIAGNÓSTICA

- 1,2. Comunicación.
- 3,4. Ejercitación.
- 5,6,7,8. Razonamiento y solución de problemas.
- 9,10. Modelación.

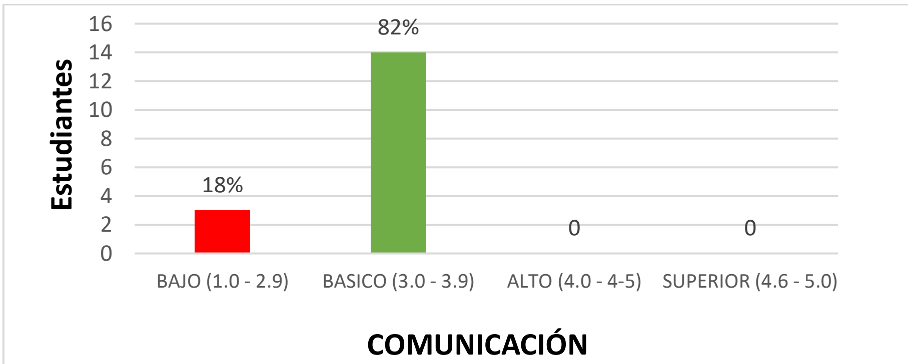
ESTUDIANTE \ PREGUNTA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taylor Alexander López Murcia	1	5	1	1	1	1	1	1	1	1
Anyi Milena Losada	1	5	5	1	5	5	5	1	5	1
Angie Carolina Ramírez Muñoz	1	5	1	1	1	5	1	1	1	1
Vanessa Váquiro	1	5	1	1	1	1	1	1	1	1
Sorani Molina Montiel	1	5	1	1	1	1	1	1	1	1
Sebastián Perdomo Gómez	1	5	1	1	1	1	1	1	1	1
Helbert Flórez Córdoba	1	5	1	1	1	1	1	1	1	1
Luz Maider Rodríguez Moreno	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Paula Fernanda Guerra Hernández	1	5	1	1	1	1	1	1	1	1
Yuri Alejandra Quiñonez Patiño	1	5	1	1	1	1	1	1	1	1
Karen Alarcón Rodríguez	1	5	1	1	1	1	1	1	1	1
María Fernanda Gaita Granada	1	1	1	1	5	1	1	1	1	1
Ximena Peña Benítez	1	5	1	1	1	1	1	1	1	1
Aceneth Peña Trujillo	1	5	1	1	1	1	1	1	1	1
Cesar García Ramírez	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Harold Tapiero Capera	1	5	1	1	1	1	1	1	1	1
Yuberli Gaita Granada	1	5	5	1	5	5	1	1	5	1
PROMEDIO POR PREGUNTA	1,0	4,3	1,5	1,0	1,7	1,7	1,2	1,0	1,5	1,0
PROMEDIO POR COMPETENCIA	2,6		1,2		1,4				1,2	

Tabla 2. ***Resultados prueba diagnóstica.***

2.4.1.1. OBSERVACIONES Y ANÁLISIS PRUEBA DIAGNÓSTICA.

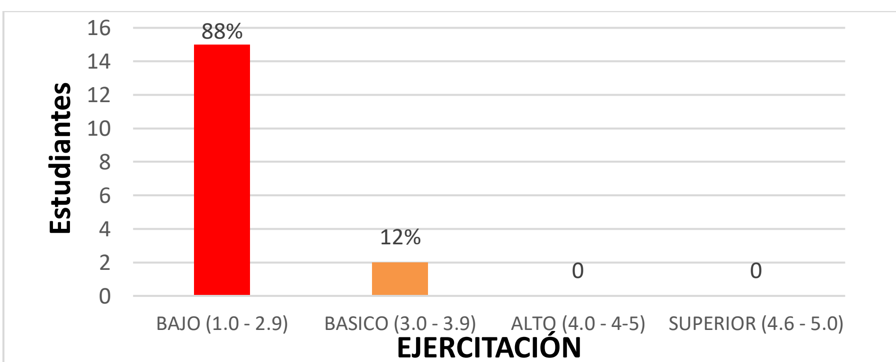
Aunque los estudiantes ya habían trabajado el tema en el presente año escolar, en esta prueba diagnóstica se evidencia las dificultades que presentan en el desempeño del aprendizaje.

- Las preguntas 1 y 2, evalúan la competencia comunicativa referente al conocimiento del concepto de ángulo y sus sistemas de medición. El 100% de los estudiantes mostró dificultad en dar su propia definición o concepto de ángulo, mientras que el 82% de los mismos reconocían los grados y los radianes como medidas del ángulo. Teniendo en cuenta el SIE institucional, se puede decir que en la prueba diagnóstica el 82% de los estudiantes de grado décimo tienen un desempeño BAJO (entre 1.0 y 2.9) en la competencia de COMUNICACIÓN, mientras que el 18% tienen un desempeño básico; no hay estudiantes en desempeño alto ni superior (Gráfica 1).



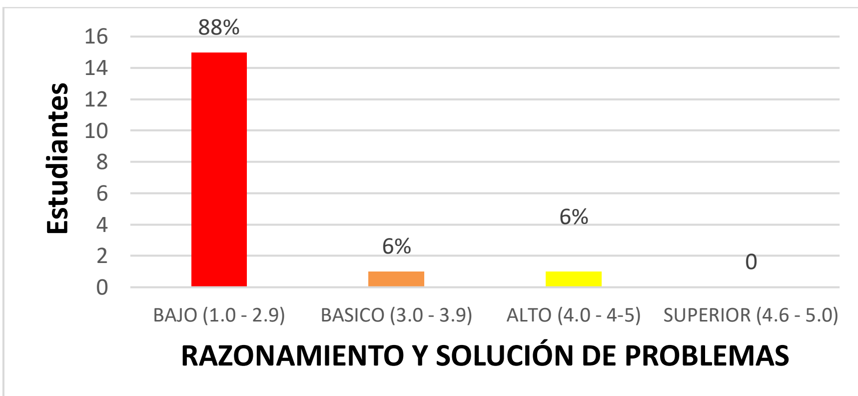
Gráfica 1. **Resultados prueba diagnóstica (competencia comunicación).**

- Las preguntas 3 y 4, evalúan la competencia de ejercitación; los algoritmos que utilizan los estudiantes para realizar conversiones entre unidades de los sistemas de medición. En la prueba diagnóstica el 88% de los estudiantes de grado décimo tienen un desempeño BAJO (entre 1.0 y 2.9) en la competencia de EJERCITACIÓN, mientras que el 12% tienen un desempeño básico; no hay estudiantes en desempeño alto ni superior (Gráfica 2).



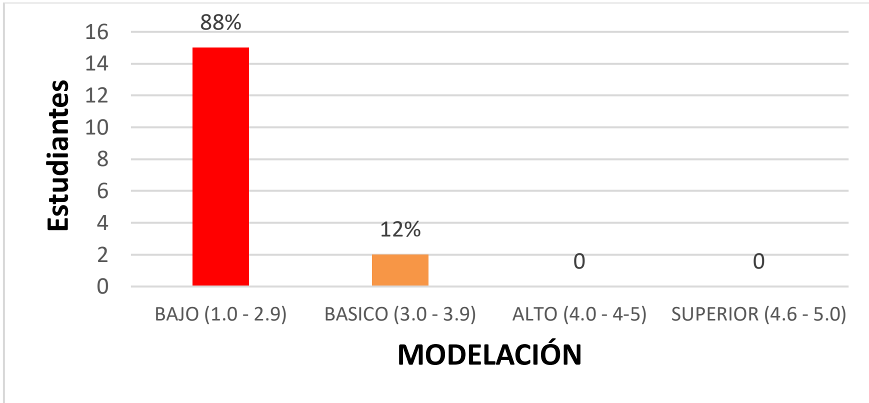
Gráfica 2. **Resultados prueba diagnóstica (competencia ejercitación).**

- Las preguntas 5,6,7 y 8, evalúan las competencias de razonamiento y solución de problemas. Únicamente el 18% de los estudiantes mostró competencia para aplicar la conversión de unidades de los sistemas de medición angular, en la solución de situaciones matemáticas; el 6% de los estudiantes aplicó correctamente los sistemas de medición angular al cálculo de longitud de circunferencia y el 100% de los estudiantes mostró dificultad en la utilización de los sistemas de medición angular en la solución de problemas referente al área del sector circular. Teniendo en cuenta el SIE institucional, se puede decir que en la prueba diagnóstica el 88% de los estudiantes de grado décimo tienen un desempeño BAJO (entre 1.0 y 2.9) en las competencias de RAZONAMIENTO Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS, mientras que el 6% tienen un desempeño básico y únicamente el 6% de ellos tienen un desempeño alto (Gráfica 3).



Gráfica 3. **Resultados prueba diagnóstica (competencias razonamiento y solución de problemas).**

- Las preguntas 9 y 10, evalúan la competencia de modelación; estrategias y metodologías referente a la aplicación del conocimiento del concepto de ángulo y sus sistemas de medición, en la solución de situaciones matemáticas. En la prueba diagnóstica el 88% de los estudiantes de grado décimo tienen un desempeño BAJO (entre 1.0 y 2.9) en la competencia de MODELACIÓN, mientras que el 12% tienen un desempeño básico; no hay estudiantes en desempeño alto ni superior (Gráfica 4).



Gráfica 4. **Resultados prueba diagnóstica (competencia modelación).**

- En promedio, en todas las competencias se evidencia un desempeño bajo por parte de los estudiantes.

2.4.2. GUÍA I

- 1 comunicación.
- 2,3,4,5. Ejercitación.
- 6. Modelación.
- 7,8,9. Razonamiento y solución de problemas.

PREGUNTA / ESTUDIANTE	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Taylor Alexander López Murcia	5	5	5	5	5	4,5	5	5	5
Anyi Milena Losada	5	5	5	5	5	4,5	5	5	5
Angie Carolina Ramírez Muñoz	5	5	5	5	5	4,5	5	1	5
Vanessa Váquiro	5	5	5	5	5	4,5	5	5	5
Sorani Molina Montiel	5	5	5	5	5	4,5	5	5	5
Sebastián Perdomo Gómez	1	5	5	1	5	4	5	5	5
Helbert Flórez Córdoba	5	5	5	5	5	3,5	5	1	5

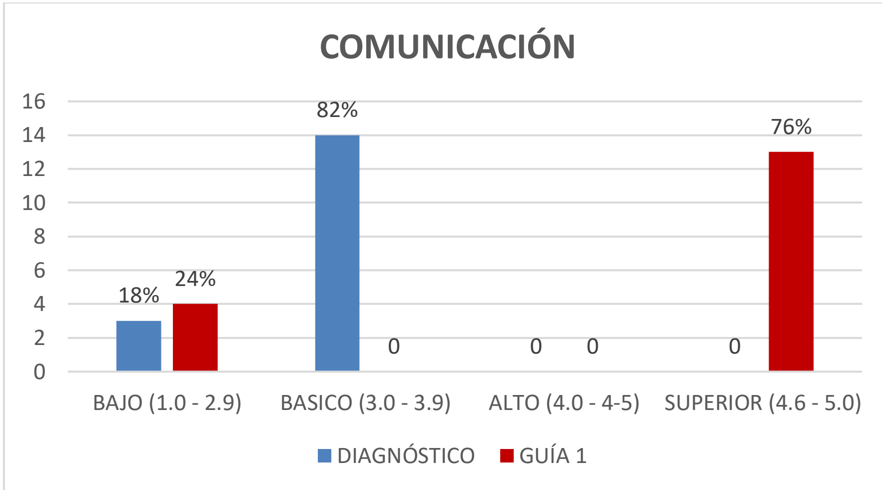
Luz Maider Rodríguez Moreno	1	1	1	5	1	3,5	5	1	1
Paula Fernanda Guerra Hernández	5	5	5	5	5	4	5	5	5
Yuri Alejandra Quiñonez Patiño	1	1	1	5	1	3,5	5	1	1
Karen Alarcón Rodríguez	5	5	5	5	5	4	5	5	5
María Fernanda Gaita Granada	5	5	5	5	5	3,5	5	1	5
Ximena Peña Benítez	5	5	5	5	5	3,5	5	1	5
Aceneth Peña Trujillo	5	5	5	5	5	4,5	5	5	5
Cesar García Ramírez	1	5	5	5	5	3,5	5	1	5
Harold Tapiero Capera	5	5	5	5	5	4	5	5	5
Yuberli Gaita Granada	5	5	5	5	5	4	5	1	5
PROMEDIO POR PREGUNTA	4,1	4,5	4,5	4,8	4,5	4	5,0	3,1	4,5
PROMEDIO POR COMPETENCIA	4,1	4,6				4	4,2		

Tabla 3. ***Resultados guía I.***

2.4.2.1. OBSERVACIONES, ANÁLISIS GUÍA I Y COMPARACIÓN CON PRUEBA DIAGNÓSTICA.

Luego de realizar la retroalimentación de la prueba diagnóstica y de analizar los resultados, se propone el estudio y desarrollo de la guía I, teniendo en cuenta las principales dificultades que presentaron los estudiantes, como por ejemplo los problemas de concepto, de simplificación y omisión de unidades como los radianes.

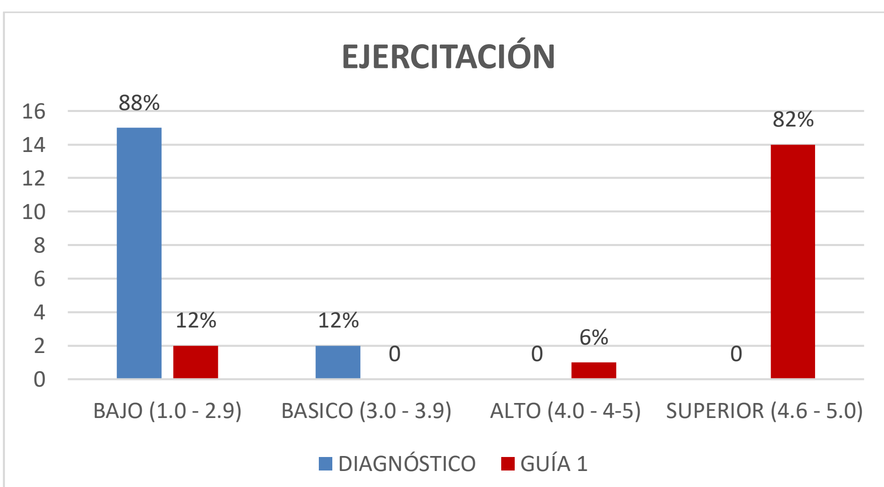
La pregunta 1 evalúa la competencia comunicativa. El 76% de los estudiantes reconoce adecuadamente las semejanzas y diferencias de los sistemas sexagesimal y circular. En comparación con la prueba diagnóstica, hay una mejoría significativa, pasa de un desempeño promedio de 2,6 a 4,1. Aunque se aumenta en un 6% el nivel de desempeño bajo se ubica un 76% de los estudiantes en nivel superior (Gráfica 5).



Gráfica 5. **Resultados guía I y comparación con prueba diagnóstica (competencia comunicación).**

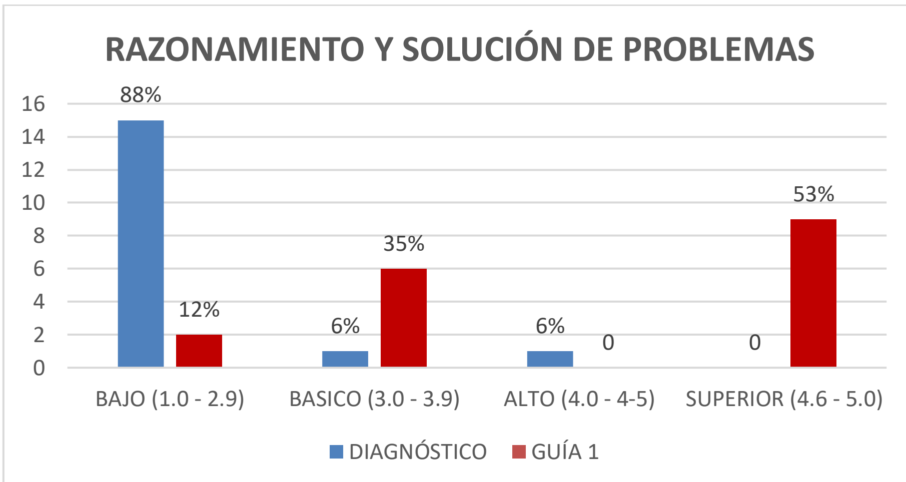
- Las preguntas 2,3,4 y 5 evalúan la competencia de ejercitación; En la guía I el 82% de los estudiantes de grado décimo tienen un desempeño superior, el 6% en alto y solamente el 12% en bajo.

En comparación con la prueba diagnóstica, hay una mejoría significativa en esta competencia. Pasa de un desempeño promedio de 1,2 a 4,6. Se disminuye el desempeño bajo en un 76% y se pasa de 0% a 82% en el nivel superior (Gráfica 6).



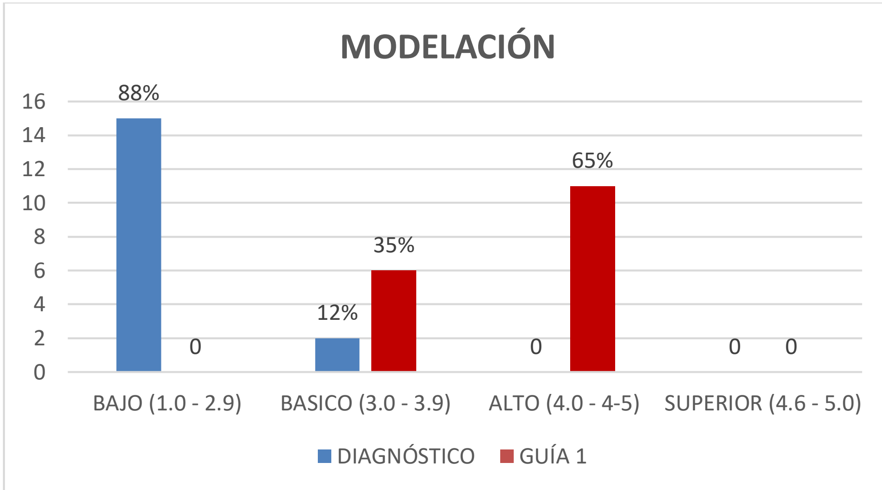
Gráfica 6. **Resultados guía I y comparación con prueba diagnóstica (competencia ejercitación).**

- Las preguntas 7, 8 y 9 evalúan las competencias de razonamiento y solución de problemas. El 35% de los estudiantes (aproximadamente) mostró un nivel de desempeño alto para aplicar la conversión de unidades de los sistemas de medición angular, en la solución de situaciones matemáticas; el 53% de los estudiantes presentó un desempeño superior. En comparación con la prueba diagnóstica, hay una mejoría significativa en esta competencia. Pasa de un desempeño promedio de 1,4 a 4,2. Se disminuye el desempeño bajo en un 76%, se aumenta el nivel básico en un 29% y se pasa de 0% a 53% en el nivel superior (Gráfica 7).



Gráfica 7. **Resultados guía I y comparación con prueba diagnóstica (competencia razonamiento y solución de problemas).**

- El ejercicio 6 evalúa la competencia de modelación aplicada en la construcción del juego Dominó Gradianes, en la cual todos los estudiantes participaron, mostrando sus habilidades artísticas, de colaboración y trabajo en equipo. En esta competencia el promedio de desempeño sube de 1,2 a 4,0 (Gráfica 8).



Gráfica 8. **Resultados guía I y comparación con prueba diagnóstica (competencia modelación).**

2.4.3. GUÍA II.

- 1. Ejercitación.
- 2,3,4,5. Razonamiento y solución de problemas.
- 6,7. Modelación.
- 8. Comunicación.

PREGUNTA / ESTUDIANTE	1	2	3	4	5	6	7	8
Taylor Alexander López Murcia	5	3	5	1	5	3	3	5
Anyi Milena Losada	5	5	5	5	5	4	5	3,5
Angie Carolina Ramírez Muñoz	5	4	4	5	4	4,5	5	5
Vanessa Váquiro	3	2	4	5	5	2	4	3,5
Sorani Molina Montiel	3,5	2	4	5	5	2	3	4
Sebastián Perdomo Gómez	5	5	5	5	5	4	4	3,5
Helbert Flórez Córdoba	5	4	3	5	4	3	3	1
Luz Maider Rodríguez Moreno	3	3	5	4,5	3	2	4	3
Paula Fernanda Guerra Hernández	3	2	3	5	5	2	5	3,5
Yuri Alejandra Quiñonez Patiño	3	3	5	4,5	3	1	3	3

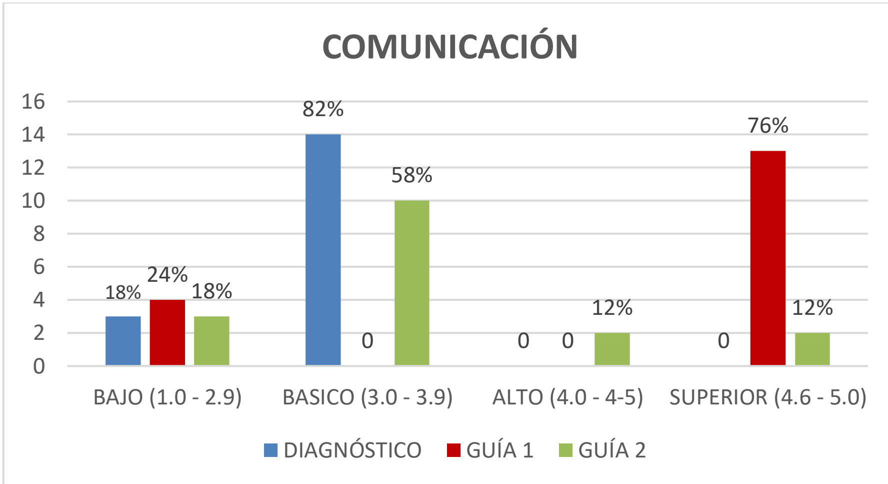
Karen Alarcón Rodríguez	4	4	4	5	3	4	4	4
María Fernanda Gaita Granada	4,5	2	3	1	5	4	3	3,5
Ximena Peña Benítez	4	3	3	1	3	4	1	1
Aceneth Peña Trujillo	5	3	4	5	5	2	3	3,5
Cesar García Ramírez	4	4	4	1	5	4	1	1
Harold Tapiero Capera	5	3	4	4	5	2	4	3,5
Yuberli Gaita Granada	4	5	4	5	4	4	3	3
PROMEDIO POR PREGUNTA	4,2	3,4	4,1	3,9	4,4	3,0	3,4	3,2
PROMEDIO POR COMPETENCIA	4,2	4				3,2		3,2

Tabla 4. ***Resultados guía II.***

2.4.3.1. OBSERVACIONES, ANÁLISIS GUÍA II Y COMPARACIÓN CON PRUEBA DIAGNÓSTICA Y GUÍA I.

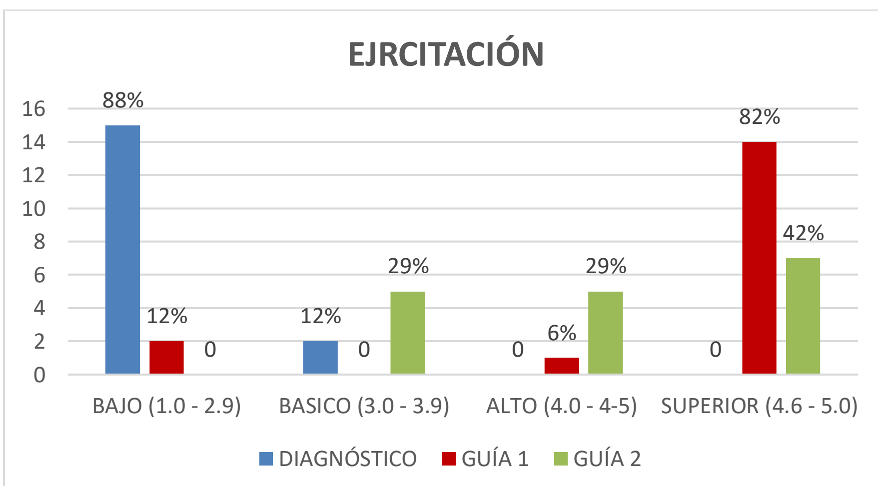
Esta guía se realiza la aplicación de los sistemas de medición angular al cálculo de longitud de arco y sector circular. además, se presta mucha atención en la forma como los estudiantes contestan las preguntas y sobre las unidades que debe tener cada magnitud.

- Respecto a la prueba diagnóstica y la guía I, en la competencia de comunicación, se evidencia una disminución del 24% en el desempeño básico y un aumento del 12% en el desempeño alto (Gráfica 9).



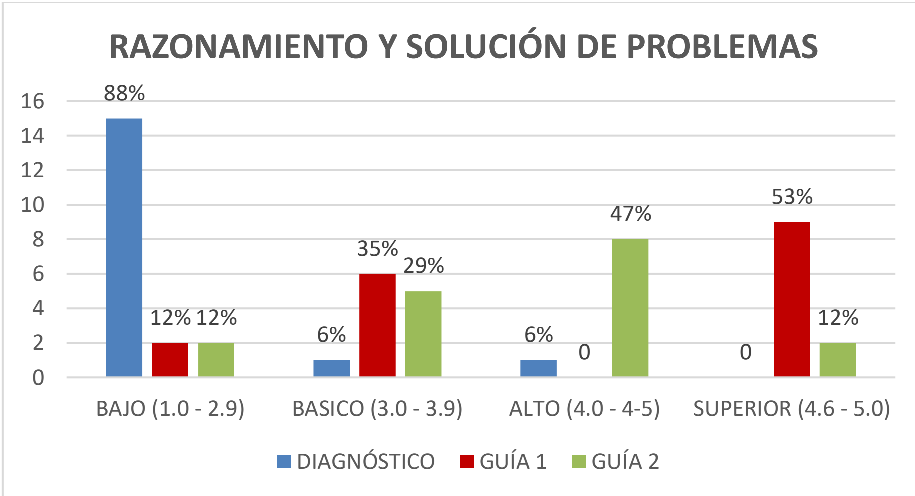
Gráfica 9. **Resultados guía II, comparación con prueba diagnóstica y guía I (competencia comunicación).**

- Respecto a la prueba diagnóstica y la guía I, en la competencia de ejercitación, se muestra que el desempeño bajo disminuyó del 88% al 0%, el nivel básico subió del 12% al 29%, el nivel alto pasó de 0% al 29% y aunque el nivel superior bajo respecto a los resultados de la guía I, subió un 42% respecto a la prueba diagnóstica (Gráfica 10).



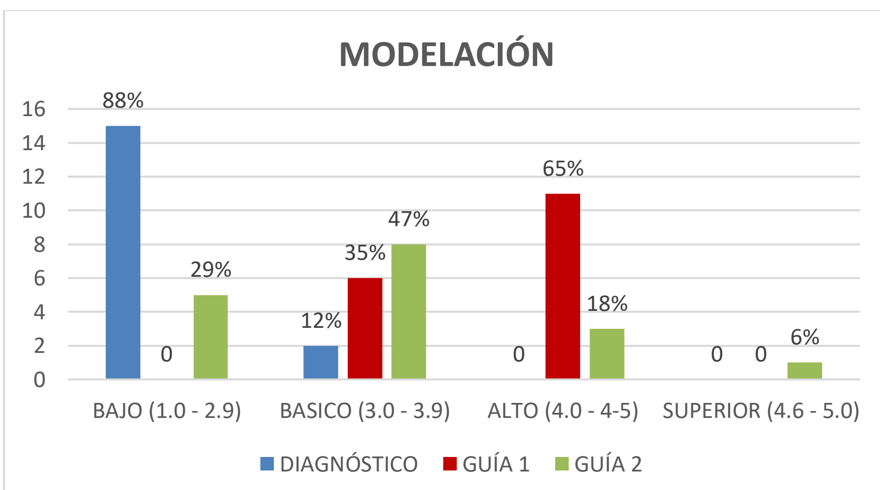
Gráfica 10. **Resultados guía II, comparación con prueba diagnóstica y guía I (competencia ejercitación).**

- En esta competencia, se evidencia la disminución significativa del desempeño bajo del 88% al 12%, además un aumento en el desempeño alto del 6% al 47% (Gráfica 11).



Gráfica 11. **Resultados guía II, comparación con prueba diagnóstica y guía I (competencia razonamiento y solución de problemas).**

- Respecto a la prueba diagnóstica y la guía I, en la competencia de modelación, se refleja la disminución del desempeño bajo del 88% al 29%, el nivel básico subió del 12% al 47% y el desempeño superior subió un 6% (Gráfica 12).



Gráfica 12. **Resultados guía II, comparación con prueba diagnóstica y guía I (competencia modelación).**

2.5. JUEGO DOMINÓ GRADIANES Y SUS REGLAS.

Para lograr que el conocimiento sea significativo y para afianzar las competencias evaluadas, se emplea el juego del dominó como estrategia o herramienta para convertir unidades del sistema sexagesimal y radial (grados y radianes).

El juego que se utilizará como estrategia de enseñanza aprendizaje es el Dominó Gradianes, que tiene las mismas reglas del tradicional juego de mesa, pero en vez de tener números desde cero (0) a seis (6), tendrá los valores correspondientes a medidas especiales de ángulos (30, 45, 60, 90, 180, 225, 270 y 360 grados).

***Figura 7*. Dominó Gradianes.**

Las fichas tendrán todas las combinaciones entre dichos ángulos, pero una parte en grados y la otra en radianes, de tal forma que sea una herramienta para practicar la conversión entre unidades del sistema sexagesimal y circular. Con un total de 36 fichas pueden participar entre 4 y 6 jugadores. Es necesario aclarar que el juego puede tener la variación del número de ángulos que se utilicen, teniendo en cuenta la totalidad de los ángulos notables y por lo tanto del número de jugadores.

Esta variación del juego en la que se presentan 8 (ocho) fichas con cada uno de los valores, permite que el juego termine (en la mayoría de veces) y cada participante tenga fichas en su mano, haciendo necesaria la conversión a grados para identificar el ganador de la partida.

2.5.1. REGLAS DE JUEGO

Para jugar se deben seguir estas instrucciones:

1. Se colocan las fichas boca abajo y se revuelven, cada jugador coge la misma cantidad.
2. Inicia el juego quien tenga la pareja 360°- 2π.
3. El jugador que este a la derecha continua, ubicando una ficha que tenga 360° o 2π y asi sucesivamente.
4. Gana el jugador que coloque de primero todas sus fichas. Si no hay posibilidad de que los jugadores coloquen más fichas, gana quien en la suma de los ángulos (en grados) de todas las fichas tenga menor valor. Si dos jugadores quedan igualados en grados, gana quien tenga menos cantidad de fichas.

NOTA: Si un jugador se equivoca al colocar una ficha (los valores en grados y radianes no coincidan), éste pierde el turno sin colocar la ficha.

2.5.2. LAS FICHAS

Esta variación del juego consta de 36 fichas, con sus respectivos valores.

Figura 8. **Las fichas del juego.**

2.5.3. EJEMPLO DEL JUEGO

Un ejemplo del juego para 4 jugadores (9 fichas cada uno) se muestra en la figura 9. Al final el ganador es el jugador 4, porque en la suma de los grados obtiene el menor valor.

Jugador 1: $\frac{\pi}{2} + 270° = 90° + 270° = 360°$

Jugador 2: $45° + \frac{5\pi}{4} = 45° + 225° = 270°$

Jugador 3: $90° + \frac{\pi}{2} = 90° + 90° = 180°$

Jugador 4: $30° + \frac{\pi}{3} = 30° + 60° = 90°$ Gana el juego.

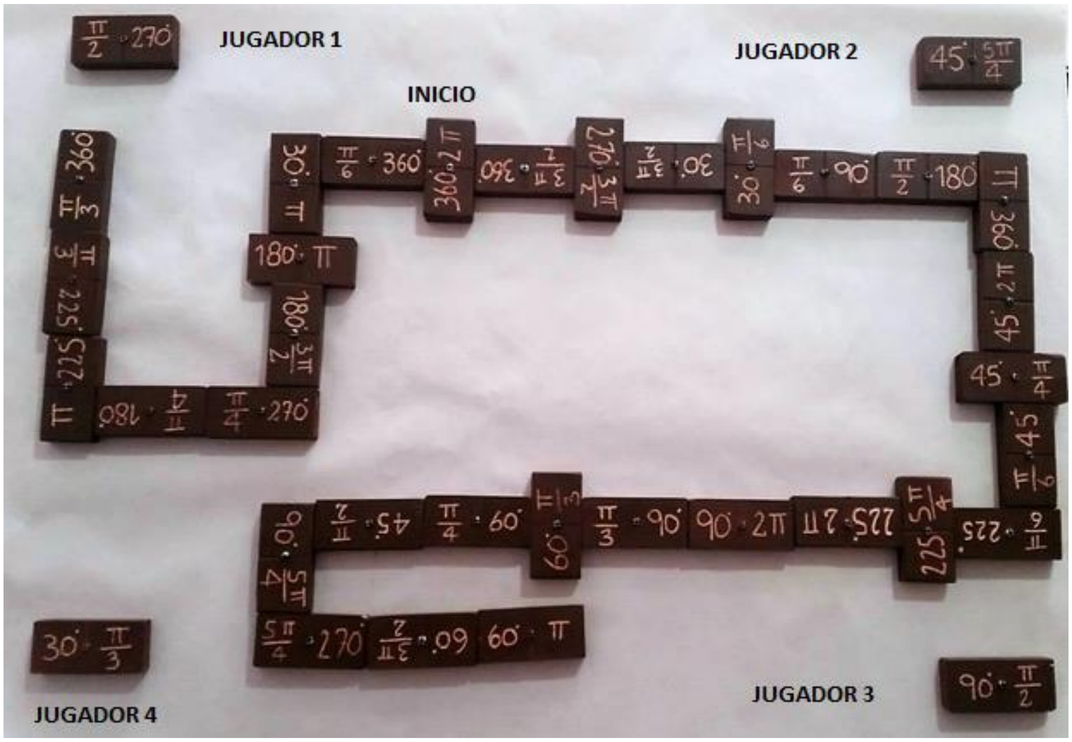


Figura 9. Ejemplo del juego.

3. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

Uno de los problemas que más se presenta en el área de matemáticas es la poca receptividad por parte de los estudiantes frente a ella; es satisfactorio ver el cambio de actitud que muestran de cara a la actividad lúdica (juego Dominó Gradianes), reconociendo el valor de trabajo cooperativo, la creatividad, la sana competencia y los objetivos que se pretender alcanzar a través del juego.

A pesar de que el tema ya se había trabajado en el presente año lectivo con los estudiantes del grado décimo, se demostró a través de la prueba diagnóstica, que los educandos no hicieron suyo el conocimiento, mucho menos reconocían su importancia, ni su utilidad en el área o en la cotidianidad.

En la aplicación de la propuesta didáctica se reconoce la importancia de utilizar nuevas herramientas en el aula de clase, para captar la atención y motivar a los estudiantes a adquirir y aplicar el conocimiento, pero también es determinante la planeación en el proceso formativo, planeación que se hace importante cuando se tiene en cuenta el contexto, los conocimientos previos, los referentes nacionales y el aprendizaje por competencias y no por contenidos (plan de aula, motivación, guías de práctica y aplicación). En este sentido, el juego Dominó Gradianes mostró ser una herramienta apropiada para la comprensión de la conversión entre unidades del sistema sexagesimal y radial.

Luego de la construcción y aplicación del juego y las guías, se evidencia una mejora significativa en las competencias matemáticas respecto a la comprensión, aplicación y conversión entre unidades del sistema sexagesimal y circular: **Ejercitación,** el desempeño bajo disminuyó del 88% al 0%; esta competencia es base importante para la solución de situaciones matemáticas y no matemáticas, porque muestra reconocimiento y manejo de algoritmos; **Razonamiento y solución de problemas**, el desempeño bajo disminuyó del 88% al 12%, además aumento el desempeño alto del 6% al 47%; **Modelación,** disminuye el desempeño bajo del 88% al 29%, el nivel básico subió del 12% al 47% y el desempeño superior subió un 6%; **Comunicación,** aumenta en un 12% el desempeño alto y superior.

Las principales dificultades que se observaron en los estudiantes y que dificultan el proceso de enseñanza y aprendizaje, están relacionados con el manejo del conjunto de números reales, sus propiedades y operaciones; la mala costumbre de no dar respuesta a las preguntas que se les hace (del área) y el manejo de las unidades respecto a las distintas magnitudes, por ejemplo, grados (°) y radianes (rad).

Fue tanta la acogida de la actividad lúdica que, aunque ésta estaba diseñada únicamente para los estudiantes de grado décimo, al final los jóvenes de grado once también quisieron unirse, participando en el concurso del juego de Dominó Gradianes.

RECOMENDACIONES

La educación actual requiere nuevos métodos, teorías y estrategias, que permitan identificar y analizar, tanto las necesidades actuales de los estudiantes, como sus gustos y formas de aprendizaje; algunas de estas herramientas son: la tecnología y el juego. Como lo expone Martín Gardner: con seguridad el mejor modo de despertar a un estudiante consiste en presentarle un juego matemático intrigante, un puzle, un truco matemático, una paradoja, un modelo o cualquiera otra entre una veintena de posibilidades que los profesores aburridos tienden a evitar porque parecen frívolas (De Guzmán 1989, pág. 64).

Es necesario para que halla aprendizaje significativo, la manipulación de los elementos por parte de los estudiantes, además de la aplicación en los contextos, en este caso, poner a volar la imaginación y creatividad de los jovenes en la construcción y aplicación del juego.

La tecnología es fundamental en el proceso formativo actual de los estudiantes, se recomienda la construcción de una app, para la manipulación del juego Dominó Gradianes.

ANEXOS

A. PLAN DE AULA.

REPÚBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO DEL HUILA
INSTITUCIÒN EDUCATIVA BATEAS-ACEVEDO.
NIT: 900147345-2 *DANE: 241006000361*
Reconocimiento Oficial Resolución 0889 de 2015

PLAN DE AULA RESPECTO AL ANÁLISIS Y ESTRATEGIAS PARA EL MEJORAMIENTO DE LOS APRENDIZAJES

Este instrumento permite realizar un análisis de múltiples aspectos que nos brindan información clave para generar acciones concretas respecto de los aprendizajes que requieren mayor atención y continuación de los procesos académicos significativos.

Fuente de información y estado actual

- Informe por colegios pruebas saber 9 (2017), presentadas por los estudiantes en el año 2016. (estudiantes que actualmente cursan grado 10): En promedio el 58**%** de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas correspondientes a las competencias de Resolución de problemas, Razonamiento y Comunicación en la prueba de Matemáticas.
- Prueba diagnóstica: la totalidad de los estudiantes presentaron desempeño bajo en las competencias evaluadas.

Situación deseada

– Aumento significativo del porcentaje de los estudiantes que contestan correctamente las situaciones correspondientes a las competencias de matemáticas, en las actividades planteadas sobre conversión entre unidades del sistema sexagesimal y circular, respecto a las pruebas Saber y la prueba diagnóstica.

Aprendizajes por mejorar

Reconoce el radian y el grado como unidades de medida angular, reconoce sus significados geométricos y lo aplica en la solución de situaciones matemáticas y reales.

Características de los estudiantes

La Institución Educativa BATEAS está ubicada en el corregimiento de Bateas; a la cual pertenecen 7 sedes ubicadas en zona rural. Una de las sedes es Bateas, en la actualidad cuenta con una población de 17 estudiantes (12 mujeres y 5 hombres), pertenecientes a grado 10° a cargo del docente Alexander Paredes Martínez. La edad promedio de los estudiantes es 16 años, y la mayoría de ellos, se encuentran clasificados en el estrato socioeconómico 1, además, tienen muchas dificultades para el acceso a la Internet.

Evidencias de aprendizaje

Reconoce el radián como unidad de medida angular y su significado geométrico.

- Identifica distintas unidades de medidas angulares.
- Realiza conversiones entre unidades del sistema sexagesimal y circular
- Halla la longitud de un segmento de circunferencia y el área de un sector circular.

Estándar Básico de Competencia (EBC)

- Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.
- Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.

Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) relacionados

- Reconoce el radian como unidad de medida angular y conoce su significado geométrico.

<table>
<tr><th colspan="3">ESTRUCTURA DE LA CLASE</th></tr>
<tr><th>MOMENTOS</th><th>ACTIVIDAD</th><th>CONTENIDOS/ RECURSOS/TIEMPO</th></tr>
<tr><td>Momento de exploración</td><td>Se realiza a los estudiantes una prueba escrita que permita identificar los conocimientos previos que poseen los estudiantes acerca del sistema sexagesimal, circular y su conversión entre ellas.

De motivación se utilizan distintos objetos circulares e hilo, para realizando mediciones del perímetro de la circunferencia y su diámetro, se pueda calcular el valor del número π.


Figura 10. Motivación, encontrando al número pi.</td><td rowspan="2">Prueba diagnóstica.
Motivación.
GUIA 1. Sistemas de medición.
GUIA 2. Aplicaciones del sistema sexagesimal y circular.

TIEMPO:
9 HORAS.</td></tr>
<tr><td>Momento de estructuración y práctica</td><td>En este momento se presentará a los estudiantes los sistemas de medición de ángulos: sexagesimal y circular, además su relación. Luego, se aplicará lo aprendido mediante ejercicios y en la construcción del</td></tr>
</table>

	Dominó Gradianes. Finalmente se resolverán problemas de aplicación. Anexo GUIA 1.  ***Figura 11.*** **Construcción del juego.**	
Momento de transferencia y valoración	En este último momento se trabajará en la aplicación de los sistemas de medición angular (longitud de arco, área del sector circular) y se resolverán problemas enfocados al razonamiento y modelación matemática. Anexo GUIA 2. Para culminar la actividad y verificar el conocimiento adquirido a través de una evaluación formativa, se pedirá a cada estudiante la elaboración de una situación real (cotidiana), que se pueda resolver con el tema visto.  ***Figura 12.*** **A jugar.**	

Tabla 5. Estructura de la clase.

B. PRUEBA DIAGNÓSTICA.

	DEPARTAMENTO DEL HUILA MUNICIPIO DE ACEVEDO *INSTITUCIÒN EDUCATIVA BATEAS* *NIT: 900147345-2* *DANE: 241006000361* *Reconocimiento Oficial* *Resolución No. 0889 de 2015*	

PRUEBA DIAGNÓSTICA

Nombre: ____ Fecha: ___________

La siguiente prueba diagnóstica, tiene como objetivo determinar los conocimientos previos de los estudiantes respecto a la medición de ángulos en distintos sistemas y su aplicación a la resolución de problemas.

La prueba consta de preguntas abiertas y cerradas, que deben tener su respectiva justificación para determinar su validez.

COMUNICACIÓN

1. Escriba su concepto de ángulo: ____

____

____

____

2. Un ángulo se puede medir utilizando:

A. Radianes
B. Grados
C. Grados y Radianes.
D. Razones trigonométricas.

EJERCITACIÓN

3. ¿A cuántos radianes equivalen 108°?

A. $\frac{\pi}{8}$
B. $\frac{5\pi}{3}$
C. $\frac{3\pi}{5}$
D. π

4. ¿A cuántos grados equivale 1 radian?

A. 0,017°

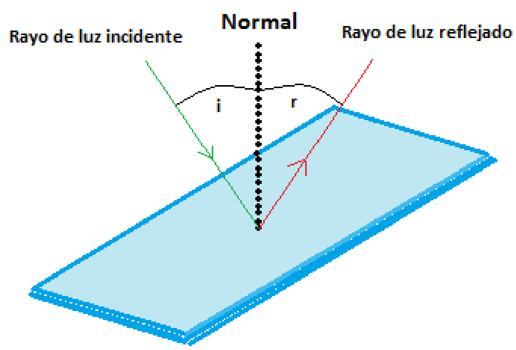
B. 57,3°

C. 180°

D. 360°

RAZONAMIENTO Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

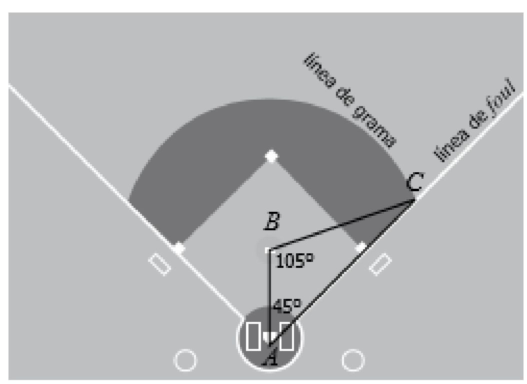
5. La Reflexión de la luz es el cambio de dirección que experimenta la luz cuando choca con un objeto y "rebota", además, la segunda ley de la reflexión expone que: El ángulo de incidencia (i) es igual al ángulo de reflexión(r). Si en un experimento el ángulo de reflexión es de $\frac{\pi}{3}$ radianes entonces el ángulo de incidencia es equivalente a:



A. 30°
B. 45°
C. 60°
D. 90°

6. La gráfica de la figura muestra una sección de una cancha de béisbol, los vértices del triángulo ABC están determinados por el home, el montículo del lanzador y la intersección de la línea de grama y la línea de foul. El ángulo BAC mide 45° y el ángulo CBA mide 105°.

A: Home.
B: Montículo del lanzador.
C: Intersección de línea de grama con línea de foul.



La medida del ángulo ACB es:

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{2}$

7. La longitud de arco que describe la torre Colpatria ubicada en Bogotá, debido al movimiento de rotación de la tierra (radio aproximado de la tierra 6.372 km), luego de 8 horas es:

A. 6.380 π km
B. 4248 π km
C. 20.008 π km
D. 50.976 π km

8. La pluma limpia parabrisas de los vehículos giran aproximadamente 135°, si la pluma mide 50 cm, ¿qué área del parabrisas limpia la pluma?

A. $\frac{75}{4}\pi$ cm²
B. 185 cm²
C. $\frac{55}{2}\pi$ cm²
D. 7850 cm²

MODELACIÓN.

9. En el sistema sexagesimal una circunferencia (ángulo giro o completo) se divide en 360 partes iguales, cada una de las cuales recibe el nombre de grado (un grado =1°). Por otro lado, en el sistema circular una circunferencia se divide en 2π partes iguales y su unidad se conoce como radian (1 radian = 1rad). ¿Cuál es la ecuación que relaciona el sistema sexagesimal y circular para un ángulo llano?

10. Alexander y Juan han realizado el siguiente experimento: con ayuda de hilo toman el valor del perímetro y el radio de distintos objetos circulares (tapas, monedas etc.) y concluyen que el cociente entre esos valores siempre se aproxima a 6,28. es decir: $\frac{p}{r} = 6{,}28$. Construya una gráfica (plano cartesiano) que relacione el radio del circulo (r), con la razón $\frac{p}{r}$ y determine a qué tipo de función corresponde.

C. MOTIVACIÓN

DEPARTAMENTO DEL HUILA
MUNICIPIO DE ACEVEDO
INSTITUCIÒN EDUCATIVA BATEAS
NIT: 900147345-2 *DANE: 241006000361*
Reconocimiento Oficial *Resolución No. 0889 de 2015*

MOTIVACIÓN

- Con ayuda de hilo, tome la medida del perímetro y diámetro de los objetos con forma circular. Complete los datos de la tabla.

OBJETO					
PERÍMETRO					
DIÁMETRO					
COCIENTE P/D					
PROMEDIO P/D					

- ¿A qué valor tienden los datos de P/D?____
____

- Calculemos nuestro error de medida $ERROR\ RELATIVO = \frac{V_{m-}V_r}{V_r}.100\%$, donde V_m es el valor de nuestra medida (promedio) y V_r es el valor real.

D. GUÍA Y PRÁCTICA I.

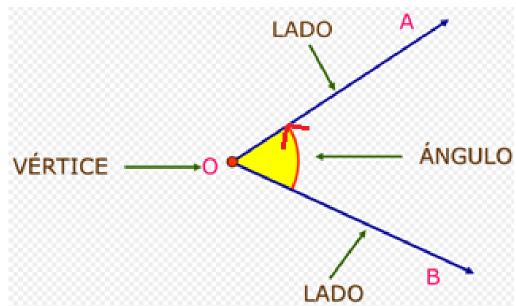
DEPARTAMENTO DEL HUILA
MUNICIPIO DE ACEVEDO
INSTITUCIÒN EDUCATIVA BATEAS
NIT: 900147345-2 *DANE: 241006000361*
Reconocimiento Oficial *Resolución No. 0889 de 2015*

ÁNGULOS Y SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR

• ÁNGULOS

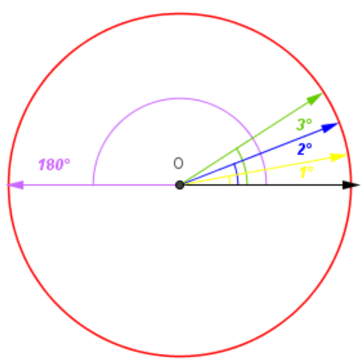
Desde sus orígenes se conoce al ángulo como la abertura formada por dos semirrectas unidas en un solo punto llamado vértice. En la actualidad, cuando se involucra su concepto en la trigonometría se puede distinguir como aquel que se genera por la rotación de un rayo desde una posición inicial hasta otra posición final, siempre alrededor de un punto fijo llamado vértice.

Un ángulo se considera positivo o negativo dependiendo de su sentido de rotación. Se simboliza como $\measuredangle BOA$.



• SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR

Son las diferentes formas utilizadas para la medición de ángulos. Entre las más utilizadas y conocidas están: El sistema Sexagesimal y Circular.



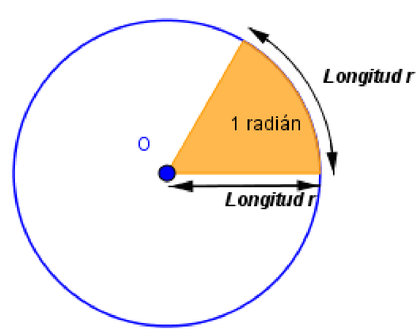
SISTEMA SEXAGESIMAL (INGLÉS)

Divide un ángulo completo en 360 partes iguales. Cada una de estas partes se conoce como (1°) grado sexagesimal. Es decir:

Un $\measuredangle$ completo = 360°

SISTEMA CIRCULAR O RADIAL (INTERNACIONAL)

Un radián (**rad**) es la medida de un ángulo cuyo arco mide lo mismo que el radio con el que se ha trazado. Es importante tener en cuenta que cuando se miden ángulos en radianes, se obtiene la longitud del arco de la circunferencia (números reales).



- **RELACIÓN ENTRE EL SISTEMA SEXAGESIMAL Y CIRCULAR**

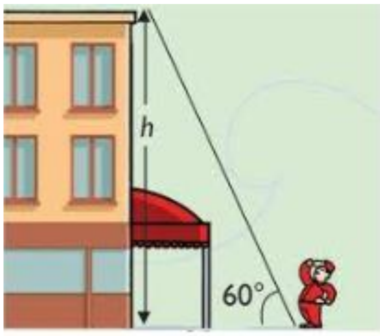
Sabemos que la longitud de la circunferencia está dada por $L = 2\pi r$, donde r es su radio, la cantidad de veces que cabe r en la circunferencia es $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$; es decir que un ángulo completo (360°) equivale a 2π. Por lo tanto:

$$360° = 2\pi\, rad$$
$$180° = \pi\, rad$$
$$\frac{\pi}{180°} rad = 1 unidad = \frac{180°}{\pi\, rad}$$

- **MÉTODOS DE CONVERSIÓN**

POR UNIDAD DE CONVERSIÓN	**POR REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA**
expresar 45° en radianes. $45° = 45°.(\frac{\pi}{180°} rad) = \frac{45\pi}{180°} rad = \frac{\pi}{4} rad$ Convertir $\frac{5\pi}{6} rad$ a grados sexagesimales. $\frac{5\pi}{6} rad = \frac{5\pi}{6} rad(\frac{180°}{\pi\, rad}) = 150°$	expresar 45° en radianes. 180° $\rightarrow$ π rad 45° $\rightarrow$ X X = $\frac{45°.\ \pi\, rad}{180°} = \frac{\pi}{4} rad$ Convertir $\frac{5\pi}{6} rad$ a grados sexagesimales. 180° $\rightarrow$ π rad X $\rightarrow$ $\frac{5\pi}{6} rad$ X = $\frac{180°.\ \frac{5\pi}{6} rad}{\pi\, rad} = \frac{150°\, \pi\, rad}{\pi\, rad}$ = 150°

3. Mario observa desde el suelo una mujer que se encuentra en la azotea de un edificio, con un ángulo de elevación de 60°, ¿cuál es la medida en radianes del ángulo definido por el suelo y la línea de visión?



De aquí debemos relacionar el ángulo descrito por la trayectoria de visión de Mario, con su correspondiente en el sistema circular; de modo que realizaremos la debida conversión de la siguiente manera:

$$60° = 60°(\frac{\pi}{180°} rad) = \frac{\pi}{3}\ rad$$

Por tanto, tenemos que el ángulo en el sistema circular será $\frac{\pi}{3}\ rad$.

PRÁCTICA I

NOMBRE: ____ FECHA: __________

COMUNICACIÓN.

1. ¿Qué semejanzas y diferencias tienen entre sí el sistema sexagesimal y circular?

____

____

____

____

EJERCITACIÓN.

2. Expresa los siguientes ángulos a grados o radianes según corresponda utilizando el método de conversión que desee.

A. $35°$
B. $\frac{4\pi}{7}\ rad$
C. $120°$
D. $\frac{2\pi}{9}\ rad$

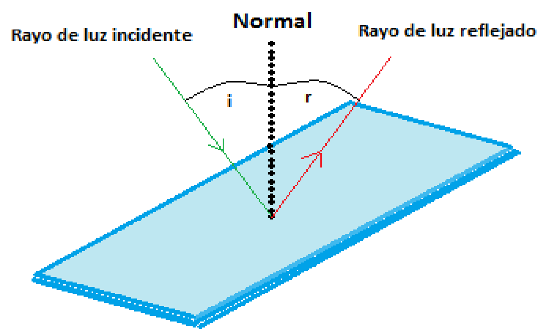
MODELACIÓN.

3. Construcción y aplicación del DOMINÓ GRADIANES.

Además de la construcción del juego se realizará un campeonato con los estudiantes de grado décimo.

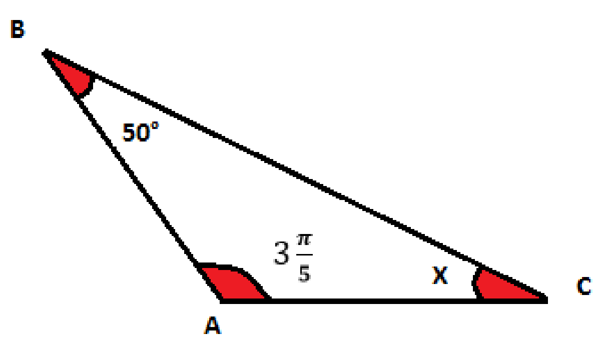
RAZONAMIENTO Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

4. **La Reflexión de la luz** es el cambio de dirección que experimenta la luz cuando choca con un objeto y "rebota", además, la segunda ley de la reflexión expone que: El ángulo de incidencia(i) es igual al ángulo de reflexión(r). Si en un experimento el ángulo de reflexión es de $\frac{\pi}{4}$ radianes, ¿Qué valor en grados tiene el ángulo de incidencia?



5. En una hora el minutero de un reloj gira 21600°, ¿cuántos radianes gira el minutero en $\frac{1}{4}$ de día? (Día = 24 horas).

6. Las casas de Bernardo, Camilo y Andrés se encuentran ubicadas en los vértices B, C y A respectivamente, formando un triángulo como se ve en la gráfica. ¿Cuál es la medida en radianes del ángulo faltante en dicho triángulo?



E. GUÍA Y PRÁCTICA II.

DEPARTAMENTO DEL HUILA
MUNICIPIO DE ACEVEDO
INSTITUCIÒN EDUCATIVA BATEAS
NIT: 900147345-2 *DANE: 241006000361*
Reconocimiento Oficial *Resolución No. 0889 de 2015*

GUÍA Y PRÁCTICA II
APLICACIONES DEL SISTEMA SEXAGESIMAL Y CIRCULAR

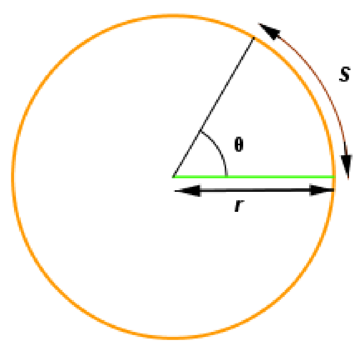
NOMBRE:____ FECHA:___________

EJERCITACIÓN

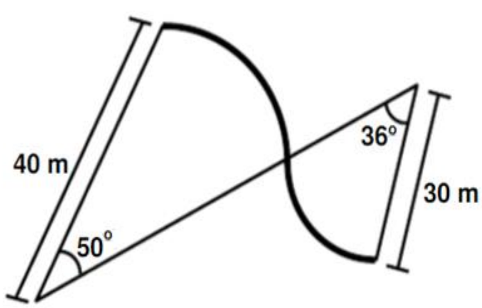
1. ¿A cuántos radianes equivale 1 grado y a cuántos grados equivale 1 radián?

RAZONAMIENTO Y SOLUCION DE PROBLEMAS

Contesta la pregunta 1 a partir de la siguiente información.
La longitud de una circunferencia corresponde a $L = 2\pi r$, donde 2π es la medida de un ángulo completo, por tanto, si se quiere encontrar la longitud de una porción de la circunferencia (arco), es suficiente con multiplicar el valor del ángulo con el radio r, es decir:

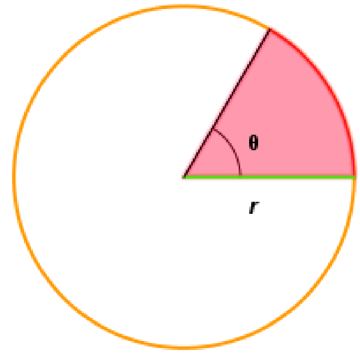


Longitud de arco $\boldsymbol{S = \theta . r}$ donde $\boldsymbol{\theta}$ se mide en radianes.



2. El tramo de una carretera está constituido como muestra el gráfico. Calcule la longitud de dicho tramo. (Recuerde que $\pi \approx 3{,}14$)

Contesta la pregunta 3 a partir de la siguiente información.



Se puede definir el área de un sector circular a través de una regla de tres simple directa, así: si la longitud de una circunferencia es $2\pi r$ y el área de dicha circunferencia es πr^2, entonces cual será el área del sector circular que tiene por arco θr. Simbólicamente se tiene lo siguiente:

$$A_o \longrightarrow 2\pi r$$
$$A_s \longrightarrow \theta r$$

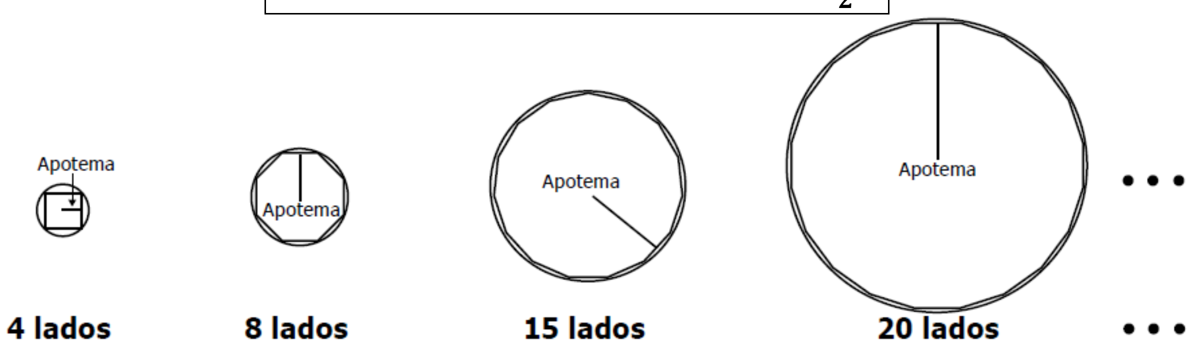
De aquí tendríamos que:

$$A_s = \frac{A_o * \theta r}{2\pi r} = \frac{\pi r^2 * \theta r}{2\pi r} = \frac{\theta r^2}{2}$$

3. La pluma limpia parabrisas de los vehículos gira aproximadamente 135°, si la pluma mide 50 cm, ¿Qué área del parabrisas limpia la pluma?

4. En la siguiente secuencia de figuras, se representan polígonos regulares de lado 6 cm, cada uno de ellos inscrito en una circunferencia. En cada polígono se señala la apotema.

Área del sector circular $\boldsymbol{A_S = \frac{\theta r^2}{2}}$



Si se continúa la secuencia y el número de lados del polígono aumenta indefinidamente, ¿cuál es la razón entre el perímetro del polígono y su apotema?

5. El péndulo de un reloj de pared mide 32 cm y en su balanceo se desplaza $\frac{\pi}{8}$, ¿cuál es la longitud del arco que se describe en el movimiento? ¿qué área es barrida en dicho movimiento por el péndulo?

MODELACIÓN

6. Utilice dos métodos distintos para hallar el área de un octavo de círculo unitario.

7. Se crean dos nuevos sistemas de medición angular "A" y "B", tales que sus unidades (1^a y 1^b) equivalen a la 1/500 y 1/600 partes del ángulo de una vuelta, respectivamente. Si en un triángulo dos de sus ángulos interiores miden 100^a y 100^b, ¿Cuál es la medida en radianes del tercer ángulo?

COMUNICACIÓN

8. Qué aplicaciones tiene los sistemas de medición angular.

BIBLIOGRAFÍA

- Recamán. B (2010). Los números una historia para contar. Bogotá. Editorial Taurus.
- Alvares C & Martínez R. (2000). *Descartes y La Ciencia del Siglo XVII*. Ed. Siglo veintiuno S.A. México D.F.
- Boyer. C.B (1999). Historia de la matemática. Madrid. Editorial Alianza.
- Buendía .A & Montiel E. (2009). *Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas.* En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1287-1296). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/5131/.
- Caballero. O.O (2013) Una transición de la Geometría a la trigonometría, utilizando problemas históricos de la astronomía como recurso didáctico en la clase de Matemáticas. Maestría. Universidad Nacional Bogotá.
- Cañeque H. (1993). Juego y vida. Buenos Aires, El Ateneo.
- Cárdenas A. & Gómez C. 2014.Seguimiento al desarrollo integral de las niñas y los niños en la educación inicial. Bogotá. MEN.
- Cardona F. (2016). Derechos básicos de aprendizaje Vol. 2. MEN. Panamericana Formas E Impresos S.A. Bogotá.
- Corbalán F & Deulofeu J. (1996). Pólya, un clásico en resolución de problemas. Revista Suma (n° 22). Editorial trillas. México.
- De Guzmán, M (1989). Juego y matemáticas. Suma: revista sobre Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, (n° 4), pág. 61-64.

- De Guzmán, M (1986). *Juegos matemáticos en la enseñanza*. Actas IV jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, Santa cruz de Tenerife. Pag. 49-85.
- Euclides, *"Elementos, Libros I-IV "*, Introducción de Luis Vega. Traducción de María Luisa Puertas Castaños. Editorial Gredos, Biblioteca Clásica Gredos.
- Euclides, *"Elementos, Libros I-IV, V-IX, X-XII "*, Introducción de Luis Vega. Traducción de María Luisa Puertas Castaños. Editorial Gredos, Biblioteca Clásica Gredos.
- Fraleigh J. B & R. A beauregard (1995). Linear Algebra third editión. University of Rhode Island.
- García O. *(2003). Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas. Bogotá, MEN.*
- Gardner, M. (1980). *Carnaval matemático*. Madrid. Editorial alianza.
- Giha Y. (2017). Anexo 3. Análisis y estrategias para el mejoramiento de los aprendizajes. Programa todos Aprender 2.0. MEN. Recuperado de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/ckfinder/userfiles/files/3_%20%20Estrategias%20de%20Aula.pdf
- Jurado. C. (2010) Directora General de la ENP. Página del Colegio de Matemáticas de la ENP-UNAM. México. Recuperado de http://dgenp.unam.mx/direccgral/secacad/cmatematicas/pdf/pi.pdf.
- Monsalve, S (2003). John Nash y la teoría de juegos. Lecturas matemáticas Vol. 24. Universidad nacional. Bogotá.
- Niño J. (1994). Lineamientos curriculares de Matemáticas. *Bogotá, MEN.*
- Peña M. (2012). Cuadernillo de pruebas saber 11. Icfes mejor saber y MEN. Bogotá.
- Ospina. O.E. (septiembre 2016). Sistemas numéricos. Notas clase Contenidos Científicos I. Maestría en enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional Manizales.

- Peláez. R. (marzo 2016). Dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje. Notas clase Seminario de investigación. Maestría en enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional Manizales.
- Stewart I. (2008) Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años. Recuperado de http://www.librosmaravillosos.com/historiadelasmatematicasenlosultimos10000anos/pdf/Historia%20de%20las%20matematicas%20-%20Ian%20Stewart.pdf
- Ramírez F. (2013). Los Caminos del Saber Matemáticas 10. Editorial Santillana. Bogotá.
- Ruiz G. (abril 2016). Conocemos 13,3 billones de números de π, pero ¿cuántos necesitamos en verdad? Divulgación Científica. Sevilla. Recuperado de http://www.tecnoxplora.com/ciencia/divulgacion/conocemos-133-billones-numeros-pero-cuantos-necesitamos verdad_2016041157fcff080cf2a2e945bac546.html
- Sistema de medición angular. Recuperado de https://cambridgecollegesecondarymaths.wikispaces.com/file/view/guia+1+-+Sistema+de+Medici%C3%B3n+Angular+%28I%29U.pdf