

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Dinámica no suave en un modelo de mercado del café de Colombia

Cristian Felipe Jiménez Varón

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas y Estadística
Manizales, Colombia
2018

Dinámica no suave en un modelo de mercado del café de Colombia

Cristian Felipe Jiménez Varón

`cfjimenezv@unal.edu.co`

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Ciencias: Matemática Aplicada

Supervisor:
Ph.D. Gerard Olivar Tost

Línea de Investigación: Sistemas Dinámicos
Grupo de Investigación: ABC Dynamics

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas y Estadística
Manizales, Colombia

2018

Dedicatoria

A mi madre: El mejor ejemplo de lucha y perseverancia que he tenido en la vida.
Quien es la principal autora de todos mis logros.

A mi novia, por ser quien es, una mujer que siempre vale la pena.
Mi mejor compañía siempre.

A mis amigos, quienes siempre estuvieron directa o indirectamente siendo mi mejor momento de distracción y descanso.

Agradecimientos

- En primera instancia agradecer a Dios, por la constante bendición sobre mi vida.
- Agradezco a mi familia, en especial a mi madre, la mujer que siempre me ha orientado en cómo recorrer mejor este camino que es la vida.
- Mi linda novia Verónica, quien siempre con su amor eterno y comprensión, estuvo en cada uno de los momentos del recorrido de esta tesis. El amor de mi vida.
- A todos mis amigos, quienes estuvieron ahí siempre con la mejor actitud y humor, brindándome compañía y apoyo en cada momento.
- Al doctor Gerard Olivar Tost, quien fue mi director, profesor y compañero. Mi más grande gratitud hacia su gran espíritu y buena actitud mostrada en cada asesoría en el desarrollo de esta tesis.
De igual manera le viviré agradecido por los valiosos aprendizajes que me brindó siempre, desde su gran y amplia experiencia profesional y personal.
- Al magíster Reinel Tabares Soto, "Rei", por su gran colaboración y asesoría en cuanto a lo computacional que requerí en diferentes momentos de mi trabajo. Pero principalmente por ser mas allá de un colega un gran amigo.
- Al doctor Fabián Fernando Serrano Suárez, decano de la facultad de ciencias exactas y naturales de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales, quien ha sido un gran apoyo y un orientador en mi vida profesional.
- Agradezco a Colciencias por el financiamiento parcial de esta tesis, a través del proyecto "Modelado y simulacion del Metabolismo Urbano de Bogota D.C. Codigo 111974558276"

Resumen

La presente tesis tiene como propósito modelar algunas de las variables del mercado del café colombiano crudo comercializado como *commodity* tales como la oferta, la demanda, el precio, el *stock* y las ventas. A partir de dichas variables se formula un modelo de sistemas dinámicos a través de ecuaciones diferenciales ordinarias, que pueda describir el comportamiento del mercado del café colombiano. El modelo se realizó con base en el estudio del mercado actual y de las interacciones económicas de las variables consideradas.

En el análisis realizado se tienen en cuenta diferentes parámetros tales como: tasas de exportación, importación, precios históricos, ventas, entre otros. Estos se estiman a partir de datos históricos sobre el mercado del café. Algunos de estos parámetros intervendrán en el análisis de bifurcaciones. En primer lugar, se procede por simulación; en segundo lugar, se calculan los puntos de equilibrio y de estabilidad, los cuales serán representados en diferentes diagramas de fases para evaluar el comportamiento de las variables de estado.

Palabras clave: Sistemas Dinámicos, Modelo Económico, Café Colombiano, Sistemas No Suaves.

Non-smooth dynamic in a model of Colombian coffee market

Abstract

The purpose of this thesis is to model some of the Colombian coffee market variables, such as supply, demand, price, stock and sales related to Colombian raw coffee market as *commodity*. From these variables, a dynamical system is formulated through ordinary differential equations that can describe the behavior of the Colombian coffee market. The model was made based on the current market study and the economic interactions of the variables considered.

Different parameters are taken into account such as: export rates, import, historical prices, sales, among others. These parameters are estimated from historical data on the coffee market. Some of them will intervene in the bifurcation analysis. First, simulation is performed; secondly, equilibrium and stability points are calculated, which will be represented in different phase diagrams to evaluate the behavior of the state variables.

Keywords: Dynamical Systems, Economic Model, Colombian Coffee, Non-Smooth System.

Contenido

Resumen	v
Lista de figuras	ix
Lista de tablas	xiii
1 Introducción	1
1.1 Problema de investigación-pregunta de investigación-objetivos	2
1.2 Antecedentes	2
1.3 Justificación	3
2 Marco teórico	5
2.1 Mercado del café colombiano	5
2.2 Modelación matemática	7
3 Preliminares	10
3.1 Ecuación diferencial	10
3.1.1 Clasificación	10
3.2 Operador de evolución	11
3.3 Variable de estado	11
3.4 Tiempo	11
3.5 Sistema dinámico	11
3.6 Teorema de existencia y unicidad	13
3.7 Fundamentos teóricos de estabilidad	14
3.7.1 Linealización	14
3.8 Teorema de Hartman-Grobman	15
3.9 Sistemas dinámicos discontinuos	15
3.9.1 Clasificación de los sistemas dinámicos discontinuos	16
3.10 Teoría de Filippov	17
3.10.1 Sistema de Filippov	17
3.10.2 Deslizamiento	18
3.10.3 Cruce	18
3.11 Puntos tangentes	19

3.12	Campo de Filippov	19
3.12.1	Ejemplo ilustrativo de la aplicación de la teoría de Filippov	19
3.13	Bifurcaciones	24
4	Construcción de un modelo del mercado económico del café: inversión constante en la oferta	26
4.1	Consideraciones generales sobre el modelo	26
4.2	La oferta del mercado del café	27
4.2.1	La ecuación de oferta	28
4.2.2	Inversión en la oferta	30
4.3	Demanda del mercado del café	30
4.3.1	La ecuación de demanda	30
4.3.2	Ecuación simplificada de la demanda	32
4.4	El <i>stock</i> de café	32
4.4.1	La ecuación del <i>stock</i>	33
4.5	La comercialización del café verde: las ventas	33
4.5.1	La ecuación de ventas	34
4.6	Modelo matemático con inversión constante en la oferta	36
4.6.1	Parámetros del modelo	36
4.7	Expresión explícita para el modelo propuesto	37
4.8	Existencia y unicidad	44
4.9	Simulaciones y análisis del modelo obtenido	45
4.10	Comportamiento de la variable oferta	45
4.10.1	Análisis de la dinámica de la variable en ausencia de inversión	45
4.10.2	Análisis de la dinámica de la variable oferta al incorporar la inversión	46
4.11	Comportamiento de la variable demanda	47
4.12	Comportamiento dinámico de la variable <i>stock</i>	47
4.13	Cálculo de los puntos de equilibrio para el modelo de la Sección 4.6	48
4.13.1	Cálculo de los puntos de equilibrio para la región $x_2 > x_1 + x_4$	50
4.13.2	Cálculo de los puntos de equilibrio para la región $x_2 < x_1 + x_4$	51
4.14	Determinación de la estabilidad de los puntos de equilibrio del modelo de la Sección 4.6	52
4.15	Retratos de fase del modelo de la Sección 4.6	53
4.16	Análisis de bifurcaciones no suaves para el modelo de la Sección 4.6	56
4.16.1	Análisis para la zona de deslizamiento	58
5	Construcción de un modelo del mercado económico del café: inversión variable en la oferta	60
5.1	Modelo matemático con inversión variable en la oferta	60
5.1.1	La ecuación de la oferta	60

5.1.2	La ecuación de la demanda	61
5.1.3	La ecuación de la inversión	61
5.2	Regiones para el modelo de la Sección 5.1	61
5.3	Comportamiento dinámico del modelo de la Sección 5.1	62
5.4	Cálculos de los puntos de equilibrio para el modelo expuesto en la Sección 5.1	63
5.5	Estabilidad local del modelo expuesto en la Sección 5.1	64
5.6	Retrato de fase del modelo de la Sección 5.1	65
5.7	Análisis de bifurcaciones no suaves para el modelo de la Sección 5.1	67
5.7.1	Bifurcaciones	69
6	Incorporación del precio como variable estocástica a un modelo dinámico: una primera exploración	72
6.1	Precio del café	72
6.2	Modelo con inclusión del precio del mercado económico del café	74
6.2.1	Ecuación de oferta	74
6.2.2	Ecuación de demanda	75
6.2.3	Ecuación del precio	75
6.2.4	Ecuación del <i>stock</i>	75
6.3	Enfoque de la exploración	78
6.4	Simulaciones numéricas del modelo: comportamiento de las variables	78
6.4.1	Comportamiento en el tiempo del precio como variable aleatoria	78
6.4.2	Comportamiento en el tiempo de la demanda bajo la influencia del precio como variable aleatoria	79
7	Conclusiones	81
	Anexo 1: Estimación de parámetros del modelo	84
	Anexo 2: Códigos para simulaciones	91
	Anexo 2: Códigos para simulaciones	92
1	Códigos para la solución del modelo con inversión constante en la oferta.	92
2	Código para solución del modelo con inversión variable en la oferta.	95
3	Solución del modelo estocástico	96
	Bibliografía	100

Lista de Figuras

3-1.	Representación esquemática de la trayectoria de un sistema que cruza la superficie Σ entre regiones adyacentes de dinámicas diferenciables. Tomado de [24].	16
3-2.	a) Sistemas continuos y no diferenciables. b) Sistemas con campo vectorial discontinuo. c) Sistemas que presentan discontinuidades en los estados [9].	17
3-3.	Representación de a) Deslizamiento, b) Deslizamiento inestable, c) Cruce. Tomada de [43].	18
3-4.	Zona de cruce y deslizamiento. Los puntos rojos, pertenecen a la zona de deslizamiento y los azules a la de cruce.	23
3-5.	En las figuras (a) y (b) se pueden observar las trayectorias que sigue el sistema para una condición inicial dada. En la figura(a) se observa que para una condición inicial por encima de la superficie de conmutación, el sistema la cruza en su punto tangente y continua deslizándose hasta encontrar el pseudoequilibrio ubicado en la coordenada (1,1). De forma análoga en la figura (b) para una condición inicial por debajo de la superficie de conmutación el sistema realiza la misma evolución.	24
	a. Evolución del sistema desde la condición inicial (5,2)	24
	b. Evolución del sistema desde la condición inicial (-1,-2)	24
4-1.	Dinámica de la oferta sin inversión respecto al tiempo. En esta figura se observa el comportamiento decreciente de la oferta en el tiempo al no incluir la inversión. Comportamiento explicado por la capacidad instalada para producción r , la cual disminuye a medida que avanza el tiempo debido al deterioro de toda la cadena de producción.	45
4-2.	Comportamiento de la variable oferta con influencia de la inversión respecto al tiempo. En esta figura se puede apreciar el comportamiento de la oferta al incorporar la inversión, se debe tener en cuenta que al considerar este tercer termino lineal en la ecuación de la oferta, esta cambia el comportamiento mostrado en la Figura 4-1, pasando a ser creciente. Es necesario tener presente que dependiendo del valor de la inversión el comportamiento puede crecer aun mas, esto explicado por las mejoras continuas que podría tener la capacidad instalada.	46

<p>4-3. Comportamiento de la variable demanda en función del tiempo. En esta figura se puede observar el comportamiento de la demanda en el tiempo, un comportamiento de tipo logístico, es decir, la demanda arranca con un comportamiento creciente, hasta estabilizarse al alcanzar la capacidad máxima de la demanda (parámetro w), en la Sección 4.13 se muestra que el valor de cero para la demanda, corresponde a un punto de equilibrio tipo punto de silla, y el valor de w para la demanda corresponde a un punto de equilibrio estable.</p>	47
<p>4-4. Dinámica del Stock respecto al tiempo. Ene esta gráfica se observa el comportamiento de la variable <i>stock</i>, el comportamiento decreciente mostrado, se explica por la disminución de inventarios debido a las ventas efectivas y a las ventas de futuras cosechas.</p>	48
<p>4-5. Retrato de fase de las variables oferta y demanda. En este retrato de fase para las variables oferta y demanda, es posible observar como dado un conjunto de condiciones iniciales arbitrario, las trayectorias del sistema, abordan dos posibles situaciones: la primera, es converger al punto de equilibrio estable localizado aproximadamente sobre la coordenada $(17, 20)$, esto ocurre pues las condiciones iniciales dadas satisfacen la región donde $x_2 > x_1 + x_4$, la segunda opción para las trayectorias del sistema es ubicarse en algunas de las dos rectas de equilibrios generadas para la región donde $x_2 < x_1 + x_4$, esto mostrado aquí como la recta paralela al eje de la oferta.</p>	54
<p>4-6. Retrato de fase de las variables oferta, demanda y <i>stock</i>. En la figura acá mostrada se puede observar el flujo que abordan las trayectorias para el sistema tridimensional, conformado por las variables, oferta, demanda y <i>stock</i>, la gráfica debe interpretarse desde diferentes partes: la primera es observar que al estar una condición inicial en la región donde $x_2 > x_1 + x_4$, el sistema evoluciona de tal manera que busca el punto de equilibrio estable, aproximándose directamente hacia el o cruzando la superficie de conmutación hasta alcanzarlo. La segunda parte podemos observar que dados los dos conjuntos de puntos de equilibrios paralelos al eje de la variable <i>stock</i>, para ciertas condiciones iniciales el sistema evoluciona de una recta de equilibrios a la otra. para una mejor comprensión de estos fenómenos es necesario observar diagrama explicativo mostrado en la Figura 4-7.</p>	55
<p>4-7. Diagrama explicativo del retrato de fase mostrado en la Fig. 4-6. El diagrama acá presentado es una ilustración más clara de los fenómenos presentados en retrato de la Figura 4-6, con este se busca interpretar de una forma más sencilla los fenómenos descritos en la imagen anterior, es necesario tener en cuenta los puntos de equilibrio y estabilidad que se calcularon en la Sección 4.13.</p>	56

4-8.	Análisis de la zona de cruce. En esta figura podemos observar la trayectoria del sistema tridimensional al partir de una condición inicial dada por debajo del plano de conmutación, el sistema inicia su evolución cruza la superficie de conmutación y luego continua en la siguiente región hasta alcanzar el punto de equilibrio estable, alcanzado en el valor de 20 millones de sacos para la variable demanda.	59
5-1.	Dinámica en el tiempo de la oferta con inversión variable. En la presente figura se evidencia que la oferta adquiere al inicio un comportamiento decreciente, sin embargo, esto cambia rápidamente ya que el valor de la inversión adopta valores que permiten el mejoramiento de las condiciones para la producción de café.	63
5-2.	Diagrama de fase de las variables oferta y demanda del modelo de la Sección 5.1. La simulación se realizó con una condición inicial del sistema de (15.8, 14.2), valor a partir del cual el sistema evolucionó hasta alcanzar el punto de equilibrio, equivalente al valor de la capacidad máxima de demanda que corresponde a 20 millones de sacos de 60 Kg.	66
5-3.	Retrato de fase de las variables oferta y demanda del modelo de la Sección 5.1. Con estos retratos se puede evidenciar el comportamiento que adoptan las diferentes trayectorias del sistema a partir de un conjunto arbitrario de condiciones iniciales. Esto permite observar la dinámica general que presenta el modelo.	66
5-4.	Variación del parámetro Y : la inversión. En la figura (a) y (b) se aprecia que para un valor de la inversión de 4000 millones de dólares el sistema parte de una condición inicial, evoluciona hasta cruzar la superficie de conmutación en donde continua su desarrollo acercándose nuevamente a la superficie de conmutación para deslizarse sobre ella. En la Figura (c) y (d) se observa que el sistema evoluciona desde su condición inicial hasta encontrarse con la superficie de conmutación y presentar deslizamiento sobre la misma.	70
	a. Inversión(Y)=4000 millones de dólares	70
	b. Inversión(Y)=4000 millones de dólares con acercamiento	70
	c. Inversión(Y)=6000 millones de dólares	70
	d. Inversión(Y)=6000 millones de dólares con acercamiento	70
5-5.	Variación del intercepto (N) de la superficie de conmutación. En la Figura se observa que la variación del intercepto de la superficie de conmutación puede generar que el punto de equilibrio se ubique encima, sobre o debajo de la superficie de conmutación, situaciones que resultan en sistemas que deben ser analizados bajo diferentes consideraciones. Las anteriores variaciones para el parámetro N se realizaron bajo la consideración de $Y = 2000$ en el sistema.	71
	a. $N=10$	71

b.	$N=20$	71
c.	$N=30$	71
d.	$N=40$	71
6-1. Comportamiento del precio externo del café.		73
6-3. Dinámica de la demanda en el tiempo teniendo en cuenta el efecto del precio como variable aleatoria. En la figura (a) se muestra el comportamiento del precio en el tiempo en donde se evidencia una tendencia clara pero con presencia de aleatoriedad debido al parámetro ϵ aumentado y en (b) se muestra un acercamiento de la figura (a) para observar mejor la variabilidad de los datos.		79
a.	Comportamiento de la demanda en el tiempo	79
b.	Comportamiento de la demanda en el tiempo con acercamiento	79
6-2. Dinámica del precio en el tiempo usando diferentes distribuciones. En las Figuras (a),(b) y (c) se muestra el comportamiento del precio al usar la distribución normal para generar valores del precio en el tiempo bajo diferentes desviaciones estándar, en las Figuras (d),(e) y (f) se muestra el comportamiento del precio al usar la distribución uniforme para generar valores del precio en el tiempo bajo diferentes desviaciones estándar.		80
a.	Distribución normal con desviación estándar de 10.	80
b.	Distribución normal con desviación estándar de 46.2	80
c.	Distribución normal con desviación estándar de 100.	80
d.	Distribución uniforme con desviación estándar de 10.	80
e.	Distribución uniforme con desviación estándar de 46.2.	80
f.	Distribución uniforme con desviación estándar de 100.	80
A.1. Datos de producción de café usados para realizar la linealización que permite encontrar r		85
A.2. Datos del consumo de café usados para realizar la linealización que permite encontrar a		86
A.3. Datos del producción exportable de café usados para realizar la linealización que permite encontrar b		87
A.4. Precio al productor en centavo de dólar por libra entre 1990 y 2015		89
A.5. Precios mayores al productor en centavo de dólar por libra entre 1990 y 2015		90

Lista de Tablas

4-1. Modelo matemático con inversión constante en la oferta.	36
4-2. Tabla de parámetros, valores estimados y unidades.	37
5-1. Nomenclatura del modelo matemático con inversión variable en la oferta. Tomados a partir de [64].	61
6-1. Modelo matemático con el precio como variable de estado.	76
6-2. Parámetros para el modelo con el precio como variable estocástica	77

1 Introducción

Actualmente, el estudio de sistemas dinámicos es aplicado a diferentes problemas de la ingeniería en el mundo como el diseño de dispositivos, controladores, equipos de procesos químicos, entre otros. Además, en la última década han surgido diversas aplicaciones en la rama de las ciencias sociales, economía y el desarrollo sostenible [14, 17, 54]. Dichas aplicaciones, buscan aprovechar la capacidad del modelamiento matemático en diferentes estudios del mercado económico, el desarrollo sostenible, las inversiones financieras, entre otros, con el fin de conocer y explorar detalladamente el entorno social y económico de un problema determinado. Por ejemplo, la volatilidad del precio, la variabilidad de las ventas y otros factores del mercado del café son problemáticas que afectan tanto las decisiones financieras de inversionistas, como los ingresos de más de medio millón de pequeños caficultores en Colombia, repercutiendo directa o indirectamente en la economía del país.

La presente tesis plantea en primer lugar, analizar un modelo del mercado del café colombiano, el cual es construido a partir de su panorama nacional e internacional. En segundo lugar, se propone realizar un análisis de tipo cuantitativo y cualitativo a las ecuaciones diferenciales para generar información que pueda ser de utilidad a los agentes que toman decisiones en dicho mercado.

Las variables que se ven involucradas en el modelamiento son: la demanda nacional (caracterizada por el consumo tradicional del café a nivel doméstico), la demanda internacional (proveniente en su mayoría de países norte americanos y algunos europeos como Alemania), la oferta nacional e importaciones de café para abastecer parte de la demanda local, el *stock* de café (bodegas y almacenaje debido a periodos de cosechas y de recepción de cultivos previos a ser exportado o comercializado en el mercado nacional) y por último, las ventas.

Respecto de esta última variable (ventas) existen diferentes modalidades respecto a la unidad de venta del café, en particular para el arábigo colombiano, se encuentran sacos de 60 y 70 kilogramos. Además, se consideran dos clasificaciones del tipo de ventas, *spot* y ventas futuras[38].

1.1. Problema de investigación-pregunta de investigación-objetivos

Problema de investigación.

Actualmente, el mercado del café en Colombia presenta alteraciones y variabilidad que afectan directa e indirectamente a caficultores e inversores. Sin embargo, no existen modelos matemáticos que tengan en cuenta variables importantes que ayuden a la toma de decisiones a los agentes inversores del mercado.

Pregunta de investigación.

¿Cuál es el comportamiento económico del café arábigo colombiano, -a partir del estudio de un conjunto de variables: oferta, demanda, precio, *stock* y ventas- con base en el análisis dinámico y de puntos de equilibrio para sistemas no suaves.

Objetivo general

Formular un estudio de la dinámica de un modelo de mercado del café arábigo colombiano, mediante el análisis de las variables más relevantes encontradas en su economía.

Objetivos específicos

- Establecer un modelo matemático que reúna las variables económicas del mercado del café, el cual permita realizar análisis y ayude a generar información de importancia y toma de decisiones en este sector.
- Calcular los puntos de equilibrio del modelo, caracterizándolos en cuanto a su estabilidad, con miras a interpretarlos dentro de la realidad de este mercado.
- Analizar la dinámica del modelo mediante bifurcaciones de algunos de los parámetros, con la finalidad de obtener información acerca de su influencia sobre el sistema estudiado.

1.2. Antecedentes

En la actualidad, el mercado del café presenta un comportamiento volátil en el tiempo debido a las variables que definen su economía. A raíz de los cambios espontáneos del mercado, en las últimas décadas diferentes entidades estatales y privadas han desarrollado diferentes investigaciones enfocadas al análisis económico del mercado del café. Estas en su mayoría han sido investigaciones sociales, económicas y de mercadeo. Sin embargo, no se encuentran investigaciones en el campo de la matemática aplicada a este sector, específicamente desde el área de los sistemas dinámicos no suaves.

Los autores de [38], fueron auspiciados por la Superintendencia de Industria y Comercio, para realizar un estudio sobre el sector del café en Colombia con el objetivo de analizar el comportamiento de éste en la última década y comprender los antecedentes de la situación de los caficultores en el país.

Existe una problemática para uno de los actores más relevantes en el mercado del café colombiano -los caficultores quienes hacen parte importante del proceso de recolección y producción del café- puesto que permanentemente son afectados por el comportamiento diverso de la economía del café. El trabajo realizado en [1] plantea diferentes esquemas estratégicos de inversión para los caficultores colombianos. Los autores proponen el uso de dinámica de sistemas aplicado al estudio de diferentes escenarios del precio del café.

La modelación matemática ha permitido en las últimas décadas ser aplicada a diferentes sectores de interés del mundo académico, particularmente el estudio de sistemas dinámicos no suaves, pues en aplicaciones de economía y estudios de mercados, han logrado análisis importantes en cuanto a las variables que interactúan alrededor de un problema [14, 17, 22, 54].

En la revisión de los antecedentes se encontró que [55] realizó una modelación matemática con las variables de oferta y demanda del mercado de electricidad, el cual condujera a establecer algunas reglas que permitieran tomar decisiones a los agentes que hacen parte de este mercado en particular.

Una síntesis metodológica es propuesta en [64] con base en un estudio cualitativo para comprender el comportamiento complejo del mercado de electricidad Colombiano. En este mismo trabajo se sugieren diferentes análisis de bifurcaciones variando los parámetros del modelo del sistema no suave propuesto, a su vez se propone analizar los diferentes comportamientos de los campos vectoriales en su estudio, lo cual lleva a una investigación detallada con sistemas de Filippov o sistemas suaves a tramos del tipo PWS.

1.3. Justificación

La Federación Nacional de Cafeteros, establece que 22 departamentos y 580 municipios de Colombia, cultivan café. Este, es recolectado por caficultores, quienes a su vez lo venden en centros de acopio, para posteriormente ser desplazados a plantas donde serán procesados y finalmente ser exportados a diferentes países [2],[12].

Con base en lo anterior, son bastantes los agentes que toman parte de este sector de la economía y por tanto basan su sustento en el comportamiento del mismo.

Esta tesis formula un modelo matemático que asocia algunas de las variables más relevantes de la economía del café colombiano, realiza algunos análisis desde los sistemas dinámicos con el fin de obtener información de interés, que permita disminuir la incertidumbre sobre el sector.

El mercado del café en Colombia tiene gran impacto en la economía nacional, cifras demuestran que un porcentaje muy alto de la población depende de los ingresos que proporciona el café [1].

Se identifica la tendencia creciente de este mercado del café, la importancia en la economía colombiana y el nivel de riesgo de país que se tiene sobre las fluctuaciones y volatilidades de las variables del mismo[13].

Es entonces, que a partir de un modelo matemático se indaga sobre la dinámica de este sector, contribuyendo al desarrollo investigativo del mismo y proporcionando resultados de interés que permita mejorar en todo el proceso de comercialización de este *commodity*.

2 Marco teórico

Actualmente, el café es el segundo *commodity* más tranzado en el mundo; solo superado por el petróleo [36]. El café es producido en su mayoría en tres países: Brasil, Vietnam y Colombia; y su economía se ve afectada por diversos factores: devaluación de moneda local, cultivos, zonas aptas para cultivos, factores climáticos y la volatilidad de los precios de comercialización.

El presente marco teórico se centrará en dos puntos: el primero, abarca la literatura relacionada con el mercado del café colombiano (panorama nacional e internacional) y el segundo, su modelación matemática, aquí se revisa la teoría de sistemas dinámicos no suaves, la cual se dispone a ser la herramienta que permita estudiar la actualidad del mercado del café, sus variables más influyentes y su comportamiento dinámico.

2.1. Mercado del café colombiano

Según [38], *habían 70 países productores de café en el mundo, sin embargo alrededor de 55 % del café era únicamente producido por Brasil, Vietnam y Colombia.*

En el mercado internacional se reconocen dos variedades de café, la arábica y la robusta. Alrededor de 6 de cada 10 sacos de café producidos están clasificados como arábigos[38], donde Colombia produce entre 9 y 12 millones de sacos por año cafetero. De igual manera, el consumo mundial de café para el año 2010 era de 129.7 y en 2016 155.46 millones de sacos respectivamente[13].

Para el año 2015 Colombia produjo 14.2 millones de sacos de café de 60 kg, el nivel más alto registrado para la producción desde 1992[19], lo que da una indicación de crecimiento en la producción y por tanto en exportaciones.

Teniendo las exportaciones de café verde, como el actor principal dentro de la cadena de comercialización, encontramos que Estados Unidos es el principal importador de café colombiano, pues a 2015 había exportado 5.3 millones de sacos, conservando para Colombia el puesto número 1 en cantidad de café importado[19].

Según [19]: *"Los principales destinos de exportación de café verde colombiano, se destacan:*

Estados Unidos 41.7%, seguido de Europa con 32.4% y Japón con el 10.5%".

Según [6], *El mercado de los commodities se caracteriza por un bajo crecimiento de los sectores de consumo, donde la calidad no es un factor determinante para la comercialización del grano, dada la saturación del mercado y el énfasis puesto en los procesos mercantiles a gran escala. Generalmente son productos fabricados en masa con tecnología, es decir, la producción pasa por procesos de manufactura previamente estructurados y reducidos a la mínima inversión de fuerza laboral, pero mayor incremento de la producción tecno-industrial.*

El café verde siendo un *commodity* maneja un nivel de incremento del consumo de aproximadamente 1.2% promedio anual[38], lo cual indica que a pesar de ser un *commodity*, su consumo y comercialización en países importadores mantiene una tendencia creciente.

Según [31], *el crecimiento del consumo mundial y la relativa escases de oferta, ocasionó que las exportaciones constituyeran el 99% de la producción nacional, con unas importaciones cercanas a 900 mil sacos destinadas a abastecer el mercado nacional.*

En la historia del café colombiano (1977), alrededor del 60% de la producción pasó de 6.66 millones de sacos a 10.6 millones de sacos. Las caídas más representativas se dieron en 2009 con un 32% (se pasó de 11.4 millones de sacos a 7.8) y en 1999 con un 29% (se pasó de 12.7 millones de sacos a 7.8) [20].

La FNC[20] indica que la caída de la producción nacional en el año 2009 se debió, en gran parte, a factores climáticos. El nivel de lluvias en ese año aumentó superando al promedio histórico, lo cual rompió con la tendencia creciente del valor monetario de la producción de café.

El número de exportadores de café colombianos oscila alrededor de 100, Un alto porcentaje de estos se concentra en Bogotá y Caldas. Se estima que 84 de estas organizaciones exportan café verde, 50 café tostado y 13 café soluble. Café Buendía (Chinchiná, Caldas), es la única empresa colombiana que produce café liofilizado [38].

El café verde tiene casi el 90% de participación de las exportaciones del mercado colombiano. En cuanto al precio interno del café en Colombia, presenta un comportamiento volátil en comparación con el precio internacional; ya que, si la producción nacional disminuye, el precio en el mundo aumenta debido a su gran participación en el mercado internacional [38].

El consumo de café en Colombia está en crecimiento; sin embargo, la producción nacional no es suficiente para suplir la demanda local. Debido a este factor el consumo de los colombianos debe ser suplido por importaciones de países vecinos. En 2012 se registró que el 65% de los cafés que bebieron los colombianos eran hechos de granos importados [28].

En el siguiente año se registró que las importaciones del grano superaron el millón de sacos para el año 2012 [25].

El café en Colombia es un factor que dinamiza su economía, ya que aproximadamente se calcula que 726.000 personas viven de esta actividad. El valor agregado del cultivo de café en proporción al PIB (precios constantes), ha sido inferior al 1% con respecto al PIB agrícola [38].

Para el año 2017 en el mes de julio se reportó la cifra más alta de exportación de café para Colombia en este año llegando a 1034 millones de sacos para solo ese mes, lo que mantiene la tendencia creciente de la exportación y por tanto en las ganancias en la economía por la actividad cafetera [13].

2.2. Modelación matemática

A continuación en el marco teórico se sigue con el tema de sistemas dinámicos, en específico las referencias más relevantes desde el estado del arte de los sistemas no suaves y sus principales aplicaciones y objeto de estudio actual.

Los sistemas dinámicos es un campo que es estudiado y desarrollado con el fin de dar respuestas del mundo real desde variables matemáticas. Sin embargo, aún es necesario profundizar en esta temática puesto que son bastantes los retos que desde esta disciplina aún están por cumplir.

En [53] realizan una ambientación del estado del arte en cuanto al modelado y la simulación mediante sistemas dinámicos, allí logran establecer lo alcanzado hasta el momento por la ciencia y el futuro de las aplicaciones en este campo, en cuanto al análisis y posibles resultados a obtener desde el modelado matemático y la simulación.

Para el modelamiento de sistemas dinámicos y su análisis, existen muchos tipos o niveles de agregación que se usan para abstraer las características de la realidad [64]. Cada uno de los fenómenos presentes en la naturaleza poseen una gran variedad de características y representaciones particulares, para ello los sistemas dinámicos presentan alternativas de estudio de las variables que afectan directa o indirectamente un entorno determinado, con ello el análisis cualitativo se hace necesario para la abstracción de las matemáticas traídas al mundo real [5].

Dentro del campo de la economía y los negocios asociado al estudio de sistemas dinámicos se encuentra que [60, 62] basan sus estudios en la modelación matemática de diferentes fenó-

menos de un contexto económico particular a través de sistemas dinámicos, con el modelado de algunas variables y uso de la dinámica no lineal con el fin de representar situaciones reales.

Desde el campo de las ciencias sociales y en particular desde la economía y los negocios, los paradigmas asociados a los diferentes fenómenos se ven enmarcados por la resistencia que tienen sus diferentes políticas sociales de actuación, ya que las respuestas de los modelos deben incluir este tipo de variaciones para ser útil y representativo en el tiempo [60].

El modelado matemático, su nivel de agregación y complejidad, permiten representar las variables presentes en cada fenómeno observado, incluso algunas investigaciones como [35] han mostrado el modelamiento de fenómenos políticos y sociales, enmarcados en un panorama de políticas públicas particular, observando los diferentes comportamientos presentes en la simulación matemática.

En [68] muestran una metodología de estudio de sistemas discontinuos con impactos, a sistemas planares con la variación de un parámetro, esto permite analizar las trayectorias que presentan las ecuaciones diferenciales y los cambios que presentan los campos vectoriales al pasar de una zona a otra de la frontera denominada de conmutación.

En [16] se muestra una breve introducción a la literatura concerniente a las formulaciones matemáticas rigurosas para dinámicas no suaves sobre modelos, como el manejo de ecuaciones diferenciales con suavidad a tramos y sistemas dinámicos híbridos. Allí se analizan los diferentes tipos de discontinuidades en los modelos para luego finalizar con el análisis de bifurcaciones con sistemas de impacto.

En [9] se plantea la amplia variedad de escenarios dinámicos donde se producen impacto en sus condiciones de equilibrio, esto hace referencia a bifurcaciones relacionadas a sistemas con discontinuidad, estas implican equilibrios de flujos n -dimensionales suaves. Allí se muestran diferentes escenarios del análisis de bifurcaciones en sistemas no suaves y sistemas con impacto, en el cual se muestran transiciones que ocurren cuando se perturba un equilibrio en la frontera de conmutación. Finalmente demuestra que los equilibrios sobre este tipo de sistemas pueden permanecer bajo condiciones de los parámetros o desaparecer bajo otras circunstancias.

Para el caso particular de los sistemas dinámicos suaves a trozos, en la literatura se encuentran diferentes metodologías que permiten su estudio ya sea desde el enfoque analítico o numérico mediante simulación [16, 21]. La selección entre una metodología u otra depende en gran medida del campo que se esté simulando y de las variables intervenidas, pues la información debe ser validada y verificada con los resultados obtenidos.

Cuando un modelo dinámico representa una realidad en donde hay toma de decisiones, evidentemente esto se traduce en discontinuidades en las ecuaciones que lo representan. Estas discontinuidades no pueden ser representadas por funciones matemáticas suaves continuas, pues los resultados que se obtendrían no reflejarían el comportamiento de la realidad dentro del fenómeno particular. Esto se evidencia en que cada una de las ecuaciones dentro de la función no suave de un sistema presenta propiedades dinámicas diferentes, es decir el comportamiento alrededor de una ecuación perteneciente a un sistema suave a tramos, cambia para cada ecuación dentro de la misma función no suave [21].

Dentro de la clasificación de sistemas discontinuos se encuentran las siguientes posibilidades: sistemas con trayectorias discontinuos (sistemas con impactos), trayectorias continuas con campos vectoriales discontinuos (sistemas de Filippov) y sistema continuo suave a trozos (PSW), este último caracterizado por poseer un Jacobiano discontinuo [3, 58, 63, 64].

Dentro del análisis cualitativo que se le realiza a un sistema no suave, los sistemas de Filippov y sistemas con impactos pueden presentar gran variedad de situaciones en cuanto a la dinámica se refiere, entre las cuales se encuentran bifurcaciones y caos [9, 68].

En cuanto al análisis de bifurcaciones que puede darse en los sistemas suaves a trozos, se puede encontrar variaciones de parámetros que conllevan a bifurcaciones de tipo *Fold*, *Hopf* y aquellas inducidas por discontinuidades sobre el sistema [10, 37]. En este último caso, las trayectorias que cursan los campos discontinuos muestran un desarrollo no trivial en el espacio de estados, y las conmutaciones en la frontera son dramáticas de un campo a otro. Mostrándose allí dinámicas caóticas, puntos de cruce, deslizamientos sobre la frontera, entre otros [3, 9, 29].

El análisis de bifurcaciones en sistemas no suaves, ha traído bastantes aplicaciones y explicaciones del modelo en el mundo real, estas se caracterizan por representar matemáticamente las situaciones donde se presentan decisiones y controles dentro de un fenómeno en particular [63].

Dentro de las ventajas que trae modelar este tipo de sistemas está la posibilidad de analizar las situaciones sobre las fronteras de decisión (conmutación en el modelo), los estados de las variables consideradas al pasar de un campo a otro con base en unas condiciones iniciales dadas; finalmente con esto más proximidad entre la simulación y el mundo real [9, 68].

3 Preliminares

En el presente capítulo, son definidos múltiples conceptos que son requeridos para el entendimiento de los capítulos posteriores de esta tesis. Aquí se expone la teoría referente a sistemas dinámicos, sistemas no suaves y su análisis cualitativo desde los sistemas de Filippov y de bifurcaciones. La información acá condensada fue principalmente tomada de las referencias [4, 9, 37, 43, 45, 56, 67, 68].

3.1. Ecuación diferencial

Definición 3.1.1. Una ecuación diferencial corresponde a una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

3.1.1. Clasificación

Las ecuaciones diferenciales se clasifican según:

1. El tipo

a) **Ecuación diferencial ordinaria**

Ecuación que contiene únicamente derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente.

b) **Ecuación en derivadas parciales**

Ecuación que está compuesta por derivadas parciales de una o más variables dependientes, respecto a dos o más variables independientes.

2. El orden

Las ecuaciones diferenciales tanto ordinarias como en derivadas parciales adquieren el orden de la derivada de mayor orden.

3. La linealidad o no linealidad

Se dice que una ecuación diferencial de la forma $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ es lineal cuando es una función lineal de $y, y', \dots, y^{(n-1)}$. Esto significa que una ecuación es lineal si se puede escribir en la forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

En esta última ecuación, se evidencian dos propiedades características de las ecuaciones diferenciales lineales:

- La variable dependiente y y todas sus derivadas son de primer grado; esto es, la potencia de todo término donde aparece y es 1.
- Cada coeficiente sólo depende de x , que es la variable independiente.

Las funciones de y como $\sin(y)$ o las funciones de las derivadas de y , como $\exp(y')$ no pueden aparecer en una ecuación lineal. Cuando una ecuación diferencial no es lineal, se dice que es no lineal.

3.2. Operador de evolución

El operador de evolución φ^t corresponde a un mapa definido en el espacio de estados X , para un tiempo $t \in T$,

$$\varphi^t : X \rightarrow X$$

dicho operador permite que para un tiempo t , un estado inicial $x_0 \in X$, sea transformado en un estado $x_t \in X$,

$$x_t = \varphi^t x_0$$

3.3. Variable de estado

Todos los estados de un sistema son caracterizados por los puntos de algún conjunto X . Este conjunto es denominado el espacio de estados del sistema. Actualmente, la especificación de un punto $x \in X$ debe ser suficiente no sólo para describir la posición actual del sistema sino también determinar su evolución.

3.4. Tiempo

La evolución de un sistema dinámico significa el cambio en el estado del sistema con un tiempo $t \in T$, donde T es un conjunto numérico.

3.5. Sistema dinámico

Definición 3.5.1. Un sistema dinámico es una tripleta $\{T, X, \phi^t\}$, donde T es el conjunto del tiempo, X es el espacio de estados y $\phi^t : X \rightarrow X$ es una familia de operadores de evolución parametrizada por $t \in T$ y satisfaciendo las propiedades,

1. $\phi^0 : X \rightarrow X$ es la función identidad.

Cuando se utiliza una ecuación diferencial para modelar la evolución de la variable de estado para un proceso físico o biológico, un problema trascendental es determinar los valores futuros de la variable de estado desde su valor inicial. El modelo matemático viene dado por un par de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0 \rightarrow \text{Condición inicial} \end{cases} \quad (3-2)$$

Si la ecuación diferencial se define como $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ y $(t_0, x_0) \in J \times U$, entonces el par de ecuaciones (3-2) se denomina problema de valor inicial (P.V.I). Por lo tanto, una solución a este problema de valor inicial corresponde únicamente a una solución Φ^t de la ecuación diferencial tal que $\Phi^{t_0} = x_0$ [51].

3.6. Teorema de existencia y unicidad

Teorema 3.6.1. (Teorema de existencia y unicidad) Si $J \subseteq \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ son conjuntos abiertos, $f : J \times U \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continuamente diferenciable y $(t_0, x_0, \lambda_0) \in J \times U \times \Lambda$, entonces existen subconjuntos abiertos $J_0 \subseteq J, U_0 \subseteq U, \Lambda_0 \subseteq \Lambda$ con $(t_0, x_0, \lambda_0) \in J_0 \times U_0 \times \Lambda_0$ y una función $\Phi^t : J_0 \times J_0 \times U_0 \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $(t, s, x, \lambda) \mapsto \Phi(t, s, x, \lambda)$ tal que para cada punto $(t_1, x_1, \lambda_1) \in J_0 \times U_0 \times \Lambda_0$, la función $t \mapsto \Phi(t, t_1, x_1, \lambda_1)$ es la única solución definida en J_0 para el problema de valor inicial dado por la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ y la condición inicial $x(t_1) = x_1$.

Las soluciones de una ecuación diferencial pueden no existir para todo $t \in \mathbb{R}$. Sin embargo, por simplicidad, supongamos que cada solución existe para todo tiempo, en cuyo caso una solución se llama completa, y el hecho de que ϕ define un grupo uniparamétrico se expresa mediante la siguiente propiedad aditiva,

$$\phi^{t+s} = \Phi^t(\Phi^s x)$$

Si la solución comienza en el tiempo cero en el punto x se continua hasta el tiempo s , cuando llega al punto $\Phi^s x$, y si una nueva solución en este punto con tiempo inicial cero se continua hasta el tiempo t , entonces esta nueva solución alcanzara el mismo punto que habría sido alcanzado si la solución original, que comenzó en el tiempo cero en el punto x , se continua hasta el tiempo $t + s$.

Si $\Phi^t : X \rightarrow X$ es un sistema dinámico y $x \in X$, sea $x(t) = \Phi^t x$ y supongamos que $f : X \rightarrow X$ esta definida por,

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \Phi^t x \right|_{t=0}$$

La igualdad anterior se puede reescribir como $\dot{x} = f(x)$ y así, $x(t)$ o $\Phi^t x$ es la curva solución que satisface la condición inicial $x(0) = 0$.

3.7. Fundamentos teóricos de estabilidad

Con el propósito de estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio de los modelos expuestos en ésta tesis, a continuación se proporciona una breve fundamentación teórica como herramienta para el entendimiento de los cálculos realizados en los capítulos posteriores.

Los conceptos acá mostrados fueron obtenidos a partir de [51].

3.7.1. Linealización

El análisis del sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) \tag{3-3}$$

se puede iniciar determinando sus puntos de equilibrio y describiendo su comportamiento cerca a ellos. Se ha mostrado que el comportamiento del sistema no lineal (3-3) cerca a un punto de equilibrio hiperbólico x_0 es cualitativamente determinado por el comportamiento del sistema lineal

$$\dot{x} = Ax \tag{3-4}$$

con la matriz $A = Df(x_0)$, cerca al origen. La función lineal $Ax = Df(x_0)x$ es llamada *la parte lineal de f en x_0* .

Definición 3.7.1. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es llamado *un punto de equilibrio* o *punto crítico* de (3-3) si $f(x_0) = 0$. Un punto de equilibrio x_0 es llamado un *punto de equilibrio hiperbólico* de (3-3) si ninguno de los valores propios de la matriz $Df(x_0)$ tienen parte real nula. El sistema lineal (3-4) con la matriz $A = Df(x_0)$ es llamada *la linealización* de (3-3) en x_0 .

Si $x_0 = 0$ es un punto de equilibrio de (3-3), entonces $f(0) = 0$ y, por medio del teorema de Taylor

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2}D^2f(0)(x, x) + \dots$$

se tiene que la función lineal $Df(0)x$ es una buena primera aproximación de la función no lineal $f(x)$ cerca a $x = 0$ y es razonable esperar que el comportamiento del sistema no lineal (3-3) cerca al punto $x = 0$ va a ser aproximado por el comportamiento de su linealización en $x = 0$. Este es el caso si la matriz $Df(0)$ tiene eigenvalores no nulos o imaginarios puros.

Note que si x_0 es un punto de equilibrio de (3-3) y $\Phi_t : E \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el flujo de la ecuación diferencial (3-3), por lo tanto $\Phi_t(x_0) = x_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, x_0 es llamado *un punto fijo del flujo* de Φ_t ; también es llamado *cero*, *un punto crítico* o *punto singular del campo vectorial $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$* .

A continuación se da una clasificación simple de los puntos de equilibrio de 3-3 de acuerdo a los signos de las partes reales de los eigenvalores de la matriz $Df(x_0)$.

Definición 3.7.2. Un punto de equilibrio x_0 de (3-3) es llamado un *sumidero* si todos los eigenvalores de la matriz $Df(x_0)$ tienen partes reales negativas; es llamado una *fente* si

todos los eigenvalores de $Df(x_0)$ tienen partes reales positivas; y es llamado una *silla* si este es un punto de equilibrio hiperbólico y $Df(x_0)$ tiene al menos un eigenvalor con parte real positiva y al menos un eigenvalor con parte real negativa [51].

3.8. Teorema de Hartman-Grobman

El teorema de Hartman-Grobman es un resultado importante en la teoría local cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias. El teorema muestra que cerca a un punto de equilibrio hiperbólico x_0 , el sistema no lineal (3-3) tiene la misma estructura cualitativa que el sistema lineal (3-4).

A continuación se debe asumir que el punto de equilibrio x_0 ha sido trasladado al origen.

Definición 3.8.1. Un mapeo continuo uno a uno f de un espacio X en un espacio Y es llamado mapeo topológico o homeomorfismo (entre X y $f(X) = Y' \subseteq Y$) si el inverso de f es un mapeo continuo de Y' a X . Dos espacios ... son llamados homeomórficos si se pueden mapear topológicamente entre sí [48].

Definición 3.8.2. Dos sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos como (3-3) y (3-4) se dice que son *topológicamente equivalentes* en una vecindad del origen o que tienen la misma estructura cualitativa cerca al origen si hay un homeomorfismo H , que mapea un conjunto abierto U que contiene el origen sobre un conjunto abierto V , que también contiene el origen que mapea las trayectorias de (3-3) en U sobre las trayectorias de (3-4) en V y preserva su orientación en el tiempo en el sentido de que si una trayectoria es direccionada desde x_1 hasta x_2 en U , entonces su imagen es direccionada desde $H(x_1)$ hasta $H(x_2)$ en V . Si el homeomorfismo H preserva la parametrización en el tiempo, entonces los sistemas (3-3) y (3-4) son *topológicamente conjugados* en una vecindad del origen.

Teorema 3.8.1. Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n el cual contiene el origen, sea $f \in C^1(E)$, y sea Φ_t el flujo de un sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$. Suponga que $f(0) = 0$ y que la matriz $A = Df(0)$ no posee eigenvalores con parte real nula. Por lo tanto, existe un homeomorfismo H de un conjunto abierto U que contiene el origen sobre un conjunto abierto V que también contiene el origen, tal que para cada $x_0 \in U$, existe un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}$ tal que para cada $x_0 \in U$ y $t \in I_0$.

$$H \circ \Phi_t(x_0) = \exp(At)H(x_0);$$

es decir, H mapea las trayectorias del sistema $\dot{x} = f(x)$ cercanas al origen sobre trayectorias de $\dot{x} = Ax$ cercanas la origen y preserva la parametrización en el tiempo [51].

3.9. Sistemas dinámicos discontinuos

Los sistemas dinámicos discontinuos son no diferenciables, adicionalmente con frecuencia en sus soluciones se dan restricciones que se presentan en forma de desigualdades. Dichos

factores aumentan la dificultad de su análisis desde el punto de vista matemático[33].

Los sistemas dinámicos discontinuos se presentan con frecuencia en los modelos matemáticos de sistemas físicos, que conmutan entre diferentes regiones que están asociadas a un conjunto diferente de ecuaciones diferenciales [23].

3.9.1. Clasificación de los sistemas dinámicos discontinuos

Los sistemas dinámicos discontinuos pueden ser descritos por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias diferenciables por tramos. Dichos conjuntos son diferenciables en regiones G_i del espacio de estados, dicha diferenciable se pierde al cruzar las fronteras $\Sigma_{i,j}$ entre regiones adyacentes, como se observa en la Figura 3-1. Estas fronteras se denominan *conjuntos o variedades de conmutación*. Si se tiene el modelo de discontinuidad,

$$\dot{x} = F(x, t, \mu)$$

donde $F : \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable por partes, t es la variable de tiempo, $\mu \in \mathbb{R}^m$ es un vector de parámetros y $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados. En cada región G_i del espacio de estados, la dinámica del sistema es descrita por una forma diferente, f_i , del vector de campo del sistema [24].

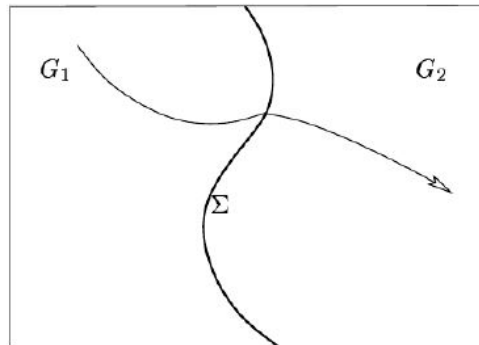


Figura 3-1: Representación esquemática de la trayectoria de un sistema que cruza la superficie Σ entre regiones adyacentes de dinámicas diferenciables. Tomado de [24].

A continuación se definen los sistemas dinámicos discontinuos de interés, divididos en tres categorías según el tipo de no diferenciable de sus órbitas y campos vectoriales [45].

1. Sistemas continuos y no diferenciables: son sistemas no diferenciables cuyas órbitas y campos vectoriales son continuos en todas partes, o sistemas continuos diferenciables por tramos. Estos sistemas tienen órbitas continuas diferenciables pero discontinuidades en la primera derivada o en las superiores, i.e. $f_i(x_0, \mu) = f_j(x_0, \mu)$, pero $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\partial^n f_i}{\partial x^n}(x_0, \mu) \neq \frac{\partial^n f_j}{\partial x^n}(x_0, \mu)$, $\forall x_0 \in \Sigma_{ij}$.

2. Sistemas con campo vectorial discontinuo: i.e., $f_i(x_0, \mu) \neq f_j(x_0, \mu), \forall x_0 \in \Sigma_{ij}$. Estos sistemas son también llamados sistemas de Filippov.
3. Sistemas que presentan discontinuidades (ó saltos) en el estado o sistemas con impacto: como ejemplos podemos mencionar los sistemas de impacto con velocidad reversible o máquinas de vibro-impacto. Estos sistemas son comúnmente formulados como un sistema híbrido con saltos discontinuos (i.e., como leyes de restitución) descritos por mapeos auxiliares.

En la Figura 3-2 se muestra un esquema que representa los diferentes sistemas dinámicos discontinuos mencionados.

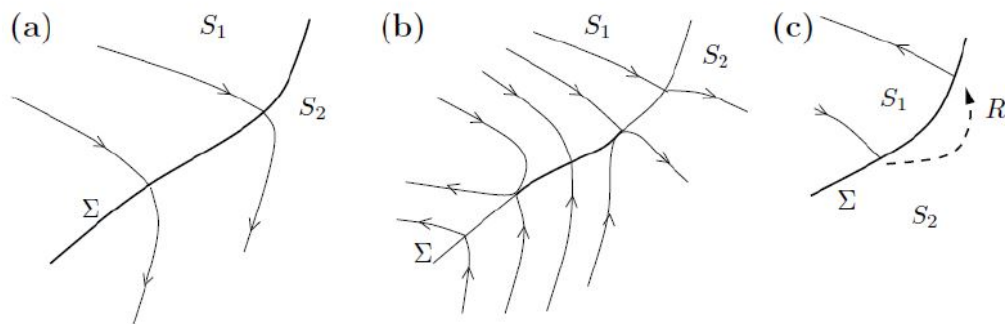


Figura 3-2: a) Sistemas continuos y no diferenciables. b) Sistemas con campo vectorial discontinuo. c) Sistemas que presentan discontinuidades en los estados [9].

3.10. Teoría de Filippov

En las superficies de conmutación características de los sistemas no suaves pueden existir tres tipos de fenómenos: impactos, continuo a trozos y deslizamientos, como se muestra en la Figura 3-2. Un sistema no-suave del tipo 2 anterior, se conoce como Sistema de Filippov [24].

3.10.1. Sistema de Filippov

La definición para campos planares dada por [52] establece que,

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & x \in S_1 \\ F_2(x), & x \in S_2 \end{cases}$$

donde $F_1(x)$ es un campo vectorial asociado a un sistema dinámico definido en S_1 y $F_2(x)$ un campo vectorial asociado a S_2 . Los cuales, van a estar separados por una superficie de conmutación dada por $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2/H(x) = 0\}$. Así,

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2/H(x) < 0\}$$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2/H(x) > 0\}$$

lo cual implica la existencia de tres clases de conjuntos en alguna región de la superficie de conmutación, denominados deslizamiento estable, deslizamiento inestable y cruce, los cuales se ilustran en la Figura 3-3.

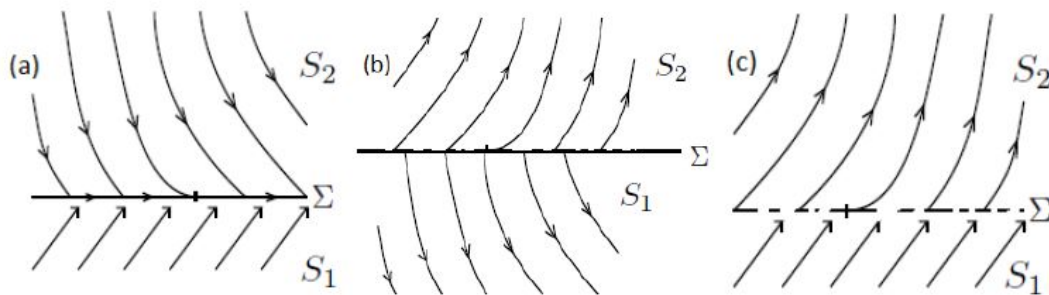


Figura 3-3: Representación de a) Deslizamiento, b) Deslizamiento inestable, c) Cruce. Tomada de [43].

Para x en Σ se establece $\sigma(x) = \langle \nabla H, F_1(x) \rangle \langle \nabla H, F_2(x) \rangle$.

3.10.2. Deslizamiento

La zona de deslizamiento se define como los $x \in \Sigma$ de tal forma que $\sigma < 0$.

Dentro de la zona de deslizamiento, se encuentra una zona de deslizamiento estable denominada *sliding* y otra de deslizamiento inestable denominada *escaping*.

$$\Sigma_{Deslizamiento} = \{x \in \Sigma/\sigma(x) < 0\}$$

3.10.3. Cruce

Conjunto donde no existe deslizamiento y por ende cruzan órbitas de una región hacia la otra. Los vectores de los campos vectoriales sobre Σ apuntan en la misma dirección, matemáticamente definido como:

$$\Sigma_{Cruce} = \{x \in \Sigma/\sigma(x) > 0\}$$

3.11. Puntos tangentes

Hay un punto tangente $x \in \Sigma$, si existe un punto sobre la superficie de conmutación tal que $\langle \nabla H, F_1(x) \rangle = 0$ o $\langle \nabla H, F_2(x) \rangle = 0$.

3.12. Campo de Filippov

Es el sistema asociado a la región de deslizamiento. Este sistema siempre es de una dimensión menos que la de los campos vectoriales y está definida por la siguiente representación vectorial:

$$\dot{x} = z(x), x \in \Sigma_{\text{Deslizamiento}}$$

donde,

$$z(x) = \frac{F_1 + F_2}{2} + B(x) \frac{F_1 - F_2}{2}$$

y

$$B(x) = -\frac{\langle \nabla H, F_1 + F_2 \rangle}{\langle \nabla H, F_1 - F_2 \rangle}, \quad \text{con } \langle \nabla H, F_1 - F_2 \rangle \neq 0$$

El campo de Filippov puede tener también equilibrios. A los $\tilde{x} \in \Sigma_{\text{Deslizamiento}}$ tales que, $z(\tilde{x}) = 0$, se les denomina *Pseudoequilibrios*.

Dicha diferencia se hace para no confundirlos con los equilibrios de cada campo vectorial F_1 y F_2 [43].

A continuación se dará un ejemplo, que permita ilustrar la aplicación de algunos de los conceptos expuestos en la Sección 3.10.

3.12.1. Ejemplo ilustrativo de la aplicación de la teoría de Filippov

Consideremos

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} F_1 & \text{si } y > 1 \\ F_2 & \text{si } y < 1 \end{cases}$$

donde

$$F_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3-7}$$

y

$$F_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{3-8}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \text{si } y > 1 \\ \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} & \text{si } y < 1 \end{cases} \quad (3-9)$$

Y sea $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$; $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\}$; $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 1\}$.
A continuación se analiza el sistema (3-9), mediante:

1. Cálculo de los puntos de equilibrio locales

- Para el sistema en la región S_1 , tenemos

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y \\ \dot{y} = -x - 3y \end{cases}$$

Los puntos de equilibrio se encuentran en la solución del sistema homogéneo,

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -x - 3y = 0, \end{cases}$$

del cual se obtiene una solución única trivial en el punto mostrado en (3-10),

$$(x^*, y^*) = (0, 0) \quad (3-10)$$

- Para el sistema en la región S_2 , considerando $y < 1$ tenemos

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 2 \\ \dot{y} = -x - 3y + 8 \end{cases}$$

Los puntos de equilibrio se encuentran en la solución del sistema,

$$\begin{cases} -x + 2y - 2 = 0 \\ -x - 3y + 8 = 0, \end{cases}$$

del cual se obtiene un único punto de equilibrio en el punto mostrado en (3-11),

$$(x^{**}, y^{**}) = (2, 2) \quad (3-11)$$

Nótese que para el sistema en la región S_1 el punto de equilibrio está en la región S_2 . Y similarmente, para la otra región, el punto de equilibrio del sistema en la región S_2 se encuentra en la región S_1 . Tales puntos de equilibrio se denominan virtuales [24] [61] [27].

2. Determinación de estabilidad local

- Para $y > 1$ se encontró un punto de equilibrio en el origen. Para determinar la estabilidad se calcula la matriz jacobiana del sistema de la región S_1 , donde se define $F_1 = (F_1^1, F_1^2)$

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1^1}{\partial x} & \frac{\partial F_1^1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_1^2}{\partial x} & \frac{\partial F_1^2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Cuyos valores propios son,

$$\lambda_1 = -2 + i$$

$$\lambda_2 = -2 - i$$

Como $Re(\lambda_i) < 0$ para $i = 1, 2$ el punto de equilibrio $(0, 0)$ es estable y es de tipo espiral en el origen.

- Para $y < 1$ se encontró un punto de equilibrio en $(2, 2)$. Análogamente, al caso anterior, se calcula la matriz jacobiana. Se define el sistema en la región S_2 donde F_2^1, F_2^2 .

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_2^1}{\partial x} & \frac{\partial F_2^1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2^2}{\partial x} & \frac{\partial F_2^2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Y entonces se tiene

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Cuyos valores propios son también

$$\lambda_1 = -2 + i$$

$$\lambda_2 = -2 - i.$$

El punto $(2, 2)$, es también un punto de equilibrio estable y de tipo espiral.

3. Aplicación de la teoría de Filippov al sistema anterior

Considerando la superficie de conmutación,

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = 0\} \quad (3-12)$$

definiendo $H(x, y) = y - 1$, se tiene que $\nabla H = (0, 1)$.

Ahora se calculan las zonas de deslizamiento y cruce del sistema con respecto a la superficie de conmutación (3-12):

- **Zona de cruce:**

El conjunto de puntos de cruce se define como:

$$\Sigma_c = \{(x, y) \in \Sigma : \langle \nabla H, F_1 \rangle \langle \nabla H, F_2 \rangle > 0\}.$$

Así se tiene

$$\langle \nabla H, F_1 \rangle = ((0, 1), (-x + 2y, -x - 3y)) = -x - 3y \quad (3-13)$$

$$\langle \nabla H, F_2 \rangle = ((0, 1), (-x + 2y - 2, -x - 3y + 8)) = -x - 3y + 8. \quad (3-14)$$

Ahora,

$$\langle \nabla H, F_1 \rangle \langle \nabla H, F_2 \rangle = (-x - 3y)(-x - 3y + 8).$$

Como en Σ , $y = 1$, entonces,

$$\langle \nabla H, F_1 \rangle \langle \nabla H, F_2 \rangle = (-x - 3)(-x + 5)$$

Así en la superficie de conmutación hay cruce, sí

$$\boxed{(-x - 3)(-x + 5) > 0}$$

Sean los conjuntos $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -3 \text{ y } y = 1\}$ y $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 5 \text{ y } y = 1\}$.

El sistema presenta cruce para $R_1 \cup R_2$, como se observa en la Figura 3-4.

- **Zona de deslizamiento:**

El conjunto de puntos deslizantes se define como:

$$\Sigma_s = \{(x, y) \in \Sigma : \langle \nabla H, F_1 \rangle \langle \nabla H, F_2 \rangle < 0\}.$$

Lo cual se cumple para $x \in (-3, 5)$, lo cual se representa en la Figura 3-4.

4. Cálculo de puntos tangentes:

Con base en los resultados obtenidos en (3-13), (3-14) y lo definido en la Sección 3.11; a continuación, se realizarán los cálculos de los puntos tangentes del sistema anterior.

Se tienen dos posibles casos:

- **Caso 1:** Se tiene que verificar $(x, y) \in \Sigma$ y $\langle \nabla H, F_1 \rangle = 0$

$$\langle \nabla H, F_1 \rangle = 0 \rightarrow -x - 3y = 0$$

con $y = 1$, se tiene $x = -3$. Por lo tanto, un punto tangente corresponde a $(-3, 1)$.

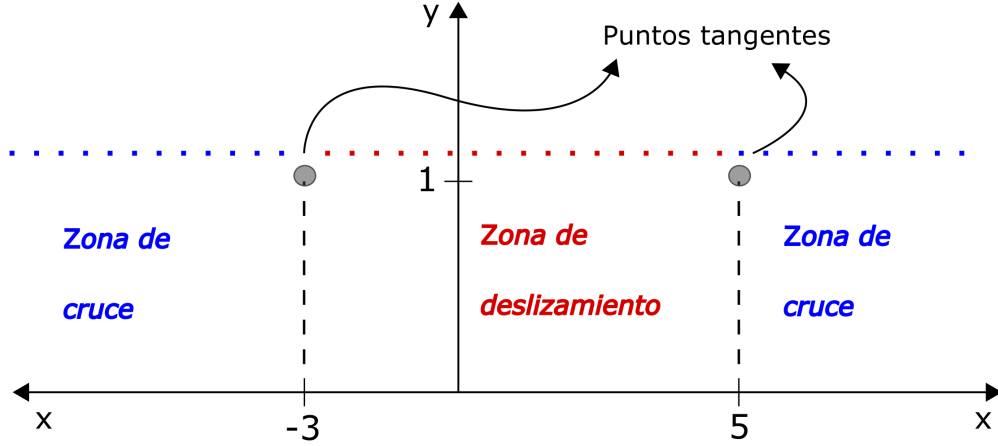


Figura 3-4: Zona de cruce y deslizamiento. Los puntos rojos, pertenecen a la zona de deslizamiento y los azules a la de cruce.

- **Caso 2:** Análogamente, se tiene que verificar $(x, y) \in \Sigma$ y $\langle \nabla H, F_2 \rangle = 0$

$$\langle \nabla H, F_2 \rangle = 0 \rightarrow -x - 3y + 8 = 0$$

con $y = 1$, se tiene $x = 5$. Por lo tanto, otro punto tangente corresponde a $(5, 1)$.

5. Cálculo del campo de Filippov

Según la Sección 3.12, el campo de Filippov está asociado a la región de deslizamiento. Se define, para $(x, y) \in \Sigma_s$, $(\dot{x}, \dot{y}) = z(x, y)$ donde

$$z(x, y) = \frac{F_1 + F_2}{2} + B(x) \frac{F_1 - F_2}{2}$$

donde F_1 y F_2 , están dados por las Eqs.(3-7) y (3-8), y

$$B(x) = -\frac{\langle \nabla H, F_1 + F_2 \rangle}{\langle \nabla H, F_1 - F_2 \rangle} \quad \langle \nabla H, F_1 - F_2 \rangle \neq 0$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla H, F_1 + F_2 \rangle &= ((0, 1), (-2x + 4y - 2, -2x - 6y + 8)) \\ &= -2x + 2 \quad \text{puesto que } y = 1 \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\langle \nabla H, F_1 - F_2 \rangle = ((0, 1), (2, -8)) = -8$$

Así,

$$B(x) = -\frac{1}{4}(x - 1)$$

De esta manera el campo de Filippov viene dado por,

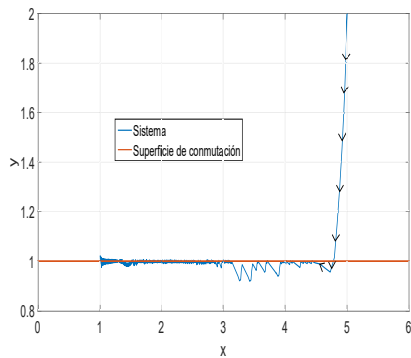
$$z(x, y) = \begin{pmatrix} -x + 1 \\ -x + 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{4}(x - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4}x + \frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde $z_1(x, y) = -\frac{5}{4}(x - 1)$ y $z_2(x, y) = 0$.

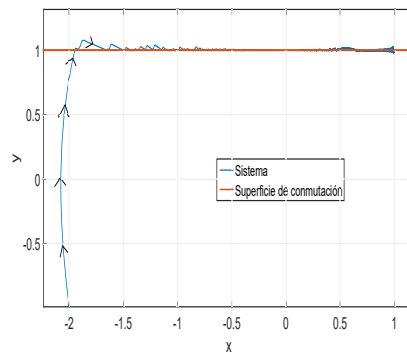
Si $z(x, y) = (0, 0)$, entonces $x = 1$, por lo tanto, el punto $(1, 1)$ es un pseudoequilibrio del sistema, pues es un punto en Σ_s que hace que se anule el campo de Filippov.

En vista de que el campo de Filippov encontrado depende únicamente de la variable x , el jacobiano está dado por $J(x) = -5/4$, lo que conlleva a que el punto de pseudoequilibrio sea de carácter estable.

Los resultados de los cálculos anteriormente desarrollados pueden ser observados en la Figura 3-5.



(a) Evolución del sistema desde la condición inicial (5,2)



(b) Evolución del sistema desde la condición inicial (-1,-2)

Figura 3-5: En las figuras (a) y (b) se pueden observar las trayectorias que sigue el sistema para una condición inicial dada. En la figura(a) se observa que para una condición inicial por encima de la superficie de conmutación, el sistema la cruza en su punto tangente y continúa deslizándose hasta encontrar el pseudoequilibrio ubicado en la coordenada (1,1). De forma análoga en la figura (b) para una condición inicial por debajo de la superficie de conmutación el sistema realiza la misma evolución.

3.13. Bifurcaciones

En un sistema dinámico que depende de parámetros, cuando se da una variación de los parámetros a su vez se presenta una variación de su retrato de fase. En este caso se pueden dar dos situaciones: el sistema permanece topológicamente equivalente al original o su topología cambia [68].

Definición 3.13.1. La aparición de un retrato de fase no equivalente topológicamente bajo variación de parámetros, es llamado una *bifurcación*.

En otras palabras, una bifurcación se da cuando se presenta un cambio del tipo topológico de un sistema mientras los parámetros atraviesan un valor de bifurcación o crítico.

Definición 3.13.2. Un *diagrama de bifurcación de un sistema dinámico* es una estratificación de su espacio de parámetros inducido por la equivalencia topológica, junto con retratos de fase representativos para cada estrato.

4 Construcción de un modelo del mercado económico del café: inversión constante en la oferta

En el presente capítulo se expondrán los elementos necesarios para comprender las características más relevantes sobre el mercado económico del café arábigo colombiano. Se inicia por definir conceptos tales como: *commodities*, oferta, demanda, manejo de inventarios (*Stock*) y ventas; esto orientado al mercado económico del café.

Con base en lo anterior se formula un modelo matemático que desde los sistemas dinámicos permite abstraer características de la realidad del mercado económico del café colombiano. Inicialmente, el modelo estará formado por tres ecuaciones diferenciales correspondientes a las variables de oferta, demanda, y *stock*. Posteriormente, se considera una ecuación para la variable ventas, variable implícita en la ecuación de *stock*. Una vez formulado el modelo, se realizan los cálculos correspondientes a los puntos de equilibrio y el análisis de su estabilidad. Finalmente se estudian los retratos de fase del sistema y sus posibles cambios por bifurcaciones.

Es relevante tener en cuenta que la construcción del modelo y su interpretación está influenciada por la relación de las variables del mismo, como se afirma en [34]. Teniendo esto en cuenta, los modelos se construyen con la interrelación de las variables que afectan en mayor medida este mercado.

El sistema construido en este trabajo está basado en experiencias anteriores de creación de sistemas para modelar diferentes mercados económicos. Entre ellos, se encuentran los trabajos [39], [40], [66], [15], a partir de los cuales, en [64] se propuso un modelo de mercado aplicado al sector eléctrico colombiano, que corresponde a la base para la formulación del modelo aquí presentado.

4.1. Consideraciones generales sobre el modelo

Cada una de las variables consideradas atenderán a las políticas actuales sobre el mercado económico del café colombiano comercializado como *commodity*, y con esto obtener conclusiones basadas en el panorama real. Algunas consideraciones más importantes sobre el trabajo de modelado se enuncian a continuación:

- Para los modelos presentados en este capítulo se consideran cuatro variables, la oferta, la demanda, el *stock* y las ventas.
- En el modelo se considera únicamente el café verde colombiano comercializado como *commodity*.

“El mercado de los commodities se caracteriza por un bajo crecimiento de los segmentos de consumo, donde la calidad no es un factor determinante para la comercialización del grano, dada la saturación del mercado y el énfasis puesto en los procesos mercantiles a gran escala. Generalmente, son productos fabricados en masa con tecnología, es decir, la producción pasa por procesos de manufactura previamente estructurados y reducidos a la mínima inversión de fuerza laboral, pero mayor incremento de producción tecnológica” [6].

- Inicialmente en este capítulo se considera la variación del precio como constante, es decir, no se considerará el precio como variable de estado en los modelos aquí descritos.
- La estimación de los parámetros necesarios para el modelo, tales como: tasas de exportación, importación y ventas, son determinados a partir de técnicas de regresión de datos históricos reportados por entidades oficiales de información del café tales como: Federación Nacional de Cafeteros (FNC) y de la Organización Internacional del Café (OIC). Para mayor detalle del cálculo de estos parámetros, en el Anexo 1, se realiza la descripción de su estimación.

4.2. La oferta del mercado del café

En el documento [42] se plantea la siguiente definición de oferta: "*Combinación de productos, servicios, información o experiencias que se ofrece en un mercado para satisfacer una necesidad o deseo*".

Estos autores enfocan la definición de oferta dentro de un panorama global de un mercado, en el cual intervienen diferentes componentes como lo son: productos físicos, servicios, actividades y los recursos asociados a estos, como por ejemplo, los humanos, los de infraestructura e información.

Según [46] se define la oferta de un mercado como: "*La cantidad de un bien que los vendedores quieren y pueden vender*". Esta definición atribuye a la oferta un elemento inherente a la dinámica de un mercado económico, orientado a las cantidades que luego serán traducidas en ventas, al referirse a un bien; indica la posibilidad de ser tangible como un producto o

intangibles como un servicio, siendo ambos parte de un proceso comercial.

Con base en los conceptos expuestos anteriormente podemos concebir la oferta de un mercado económico como las cantidades de un bien o servicio que son colocados dentro de los panoramas de comercialización de los mismos.

Para el caso particular del mercado económico del café y según [41], se define la oferta como el total de la producción de un año cafetero específico. La oferta exportable corresponde a la oferta total descontando el consumo nacional y las existencias laborales (aquellas que son necesarias para mantener el flujo de las exportaciones).

Para el caso colombiano al ser un país productor, la mayoría de su producción es para exportación alcanzando porcentajes de más del 70 % sólo para esta actividad, además también hace parte de la oferta los inventarios que se tienen como existencias de años anteriores o cosechas no vendidas; y finalmente, las importaciones para abastecer la demanda interna [28].

4.2.1. La ecuación de oferta

A continuación, se expone la ecuación para la oferta del café arábigo colombiano, comercializado como *commodity*. Este es analizado desde dos puntos: el primero, la producción generada por la capacidad e infraestructura interna; y el segundo, el correspondiente a las importaciones de café crudo para comercialización interna.

$$\dot{x}_1 = -rx_1 + \frac{c}{x_1}, \quad x_1 \neq 0 \quad (4-1)$$

donde, $r \in \mathbb{R}^+$ corresponde a la tasa de descenso de la producción, $x_1 \in \mathbb{R}^+$ representa la oferta y $c \in \mathbb{R}^+$ la tasa de café importado.

La ecuación de la oferta se explica por dos componentes: uno relacionado con lo que se produce en la capacidad instalada interna. Este factor es atribuido a las zonas de cultivo de café arábigo dentro del terreno colombiano. Según [19] *el parque cafetero llegó en 2015 a 941 mil hectáreas conformadas por 4.835 millones de árboles plantados, alcanzando una densidad de siembra de 5.484 árboles por hectárea y una edad promedio de 7,1 años. Actualmente el 97 % de las plantaciones son tecnificadas, el 83 % son jóvenes, el 85 % se encuentra en edad productiva (más de 2 años) y el 71 % se encuentra sembrado en variedades resistentes a la roya.*

Por otro lado la capacidad instalada interna es influenciada en el tiempo por diferentes factores tales como: la broca, la roya y la edad de las siembras, los cuales afectan los cultivos y por ende, la capacidad de producción que finalmente conforma la oferta de café colombiano.

En la ecuación (4-1), la tendencia de la oferta se considera en descenso a una tasa constante, denominada r , pues ante una afectación fuerte por alguna enfermedad sobre los cultivos estos tenderían a desaparecer (ver primer componente de la ecuación de oferta (4-1)).

A continuación se enuncian algunos conceptos que desde la literatura son referentes importantes de factores que limitan la oferta del mercado del café económico colombiano, en cuanto a su plataforma de producción nacional.

- Según [11] *La broca del café Hypothenemus hampei (Ferrari), es el insecto plaga más importante que afecta el cultivo del café no solo en Colombia, sino en casi todos los países productores causando pérdidas cuantiosas a los cultivadores. Debido a que es una plaga introducida en Colombia sin enemigos naturales, la primera estrategia fue la introducción desde África al país de agentes de control biológico como los parasitoides, Cephalonomia stephanoderis, Prorops nasuta y Phymastichus coffea).*
- La roya es un patógeno que afecta a los cultivos y Según [56]. *El agente causal de la roya del cafeto es el hongo Hemileia vastatrix, de la familia de los uredinales, que se especializa en parasitar células vegetales vivas, lo que implica unos requerimientos nutricionales muy especiales, que hacen de este hongo un parásito obligado, que no puede sobrevivir en suelo o en material vegetal inerte, y que hasta ahora ha sido imposible de cultivar en el laboratorio.*
- Según [57], *La roya del cafeto (Hemileia vastatrix), desde los comienzos del siglo XX fue una constante preocupación de los colombianos, hasta cuando arribó al Brasil en 1970. A partir de ese momento, Colombia tomó una serie de acciones orientadas a afrontar la eminente llegada del patógeno.*
- Respecto de la edad de los cultivos, hace referencia a las condiciones en las cuales la producción de café presenta la mayor eficiencia posible, La FNC clasifica los cultivos colombianos bajo el siguiente esquema: cultivos tecnificados jóvenes, productivos y variedades resistentes a la roya. Según [19] *En 2015 la producción de café en Colombia ascendió a 14,2 millones de sacos de café verde, 17% más que en 2014, un dato no visto en el país desde hace más de 20 años y que responde a una productividad media de 17,7 sacos/ha. Este importante logro refleja el estado actual de la estructura del parque cafetero más tecnificado, joven y resistente y en consecuencia más productivo.*

Por otro lado, el segundo componente que define la oferta es la tasa de importaciones de café verde comprado a otros países productores para satisfacer la demanda interna. Considerando a Colombia como un país productor, según informes de medios nacionales legales, se afirma que en la última década las tasas de importación han indicado estar sobre el 80% del café consumido en Colombia [25, 28].

Las tasas de importación de café verde se consideran inversamente proporcional a (ver (4-1)) la variación de la oferta, pues entre más grande sea la producción nacional y más alta sea la capacidad instalada, menor es la tasa de importaciones (parámetro c) sobre la oferta global.

4.2.2. Inversión en la oferta

La oferta hasta ahora es sólo considerada con base en dos componentes: la capacidad instalada interna de producción y el tema de café importado para consumo interno. En este momento se incorpora a la ecuación de oferta un término lineal correspondiente a la inversión, ya sea realizada por entes gubernamentales o no, que permita mejorar la capacidad de producción y finalmente la oferta que se tenga de café en un momento dado.

$$\dot{x}_1 = -rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y \quad (4-2)$$

donde, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ el factor de conversión para la inversión en la oferta y $Y \in \mathbb{R}^+$ la inversión en infraestructura interna de producción de café, cuyos valores se muestran en la Tabla 4-2.

4.3. Demanda del mercado del café

Según [46] se define la demanda como *"la cantidad de un bien que los compradores quieren y pueden comprar"*.

Según [42] *"la demanda es el deseo que se tiene de un determinado producto pero que está respaldado por una capacidad de pago"*.

Con base en los anteriores aportes encontramos que la demanda puede ser conceptualizada como la cantidad de bienes y servicios, que en un mercado donde hay oferentes y consumidores, están en disposición de adquirir para satisfacer una necesidad individual o colectiva.

Para el caso del mercado económico del café arábigo colombiano, la demanda se ve explicada por dos grandes factores, el primero es el mercado internacional caracterizado por las exportaciones y el segundo es la demanda nacional que tiene Colombia para su consumo doméstico, el cual incluye, las compras de café verde a otros países productores.

4.3.1. La ecuación de demanda

La ecuación de la demanda (4-3) se construye a partir de dos panoramas: el nacional que está constituido por políticas de consumo nacional colombiano y el internacional caracterizado

por las políticas de exportación a los diferentes clientes del café arábigo colombiano.

$$\dot{x}_2 = ax_2 \left(1 - \frac{x_2}{w_1}\right) + bx_2 \left(1 - \frac{x_2}{w_2}\right), \quad w_1, w_2 \neq 0 \quad (4-3)$$

donde, $x_2 \in \mathbb{R}^+$ corresponde a la demanda, $a \in \mathbb{R}^+$ es la tasa de consumo interno, $b \in \mathbb{R}^+$ es la tasa de producción de café para exportación, $w_1 \in \mathbb{R}^+$ es la capacidad máxima de demanda nacional (demanda interna) y $w_2 \in \mathbb{R}^+$ la capacidad máxima de demanda internacional (demanda externa).

El primer término del miembro derecho de la Eq.(4-3) corresponde a la demanda nacional de café verde que se comercializará para el consumo doméstico de Colombia. Según [19] *En Colombia el consumo interno llegó a 1,7 millones de sacos en 2015, con un incremento cercano al 4 % comparado con el año anterior. Este incremento está explicado por un aumento de consumidores jóvenes y una mayor frecuencia de consumo diario tanto dentro como fuera del hogar.*

El segundo término, se construye a través de la demanda internacional, caracterizada por las exportaciones. Según [19] *los principales destinos de exportación se destacan los Estados Unidos con el 41,7 %, seguido de Europa con 32,4 % y Japón con el 10,5 % de las exportaciones de totales de café, este último considerado como el principal cliente para los cafés especiales.*

La demanda internacional del café es más del 80 % de la producción nacional, y ésta generalmente mantiene una baja tasa de cambio (parámetro b), pues generalmente la demanda variable está concentrada en el mercado local y la tasa de cambio de la demanda para consumo interno respecto de la producción es mayor (parámetro a).

En éste trabajo vamos a suponer que el comportamiento de la demanda en cuanto a su componente internacional se considera creciente, gracias a su alto consumo mundial. No obstante, este crece hasta el límite que brinda la capacidad máxima de producción en la infraestructura interna, obteniéndose con esto un crecimiento de tipo logístico.

Análogamente, la demanda nacional también se considera bajo una tendencia creciente y del tipo logístico. Sin embargo, el factor preponderante en este crecimiento es la demanda máxima ligada al tema de exportaciones. Se debe tener en cuenta que no todo el consumo interno de café es producido en el país, parte de este café demandado es comprado a otros países productores.

4.3.2. Ecuación simplificada de la demanda

La capacidad de demanda máxima w es en total la demanda interna y la externa, $w = w_1 + w_2$, sin embargo, ésta última es prácticamente su totalidad, por lo cual la demanda máxima del modelo se puede aproximar a la demanda externa: $w \approx w_2$. Así la ecuación simplificada de la demanda obtenida es:

$$\dot{x}_2 = (a + b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right), \quad w \neq 0$$

Si $\rho = a + b$

$$\dot{x}_2 = \rho x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right), \quad w \neq 0$$

donde $x_2 \in \mathbb{R}^+$ representa la demanda, $a \in \mathbb{R}^+$ la tasa de consumo interno, $b \in \mathbb{R}^+$ la tasa de producción de café para exportación y $w \in \mathbb{R}^+$ la capacidad máxima de la demanda.

4.4. El stock de café

En [26] los términos de *stock*, inventarios o existencias, se utilizan para referirse a los artículos que permanecen almacenados en la empresa, a la espera de una posterior utilización. Son recursos ociosos que tienen un valor económico y que están pendientes de ser empleados en el proceso productivo.

Según [8], los inventarios son acumulaciones de materias primas, provisiones, componentes, trabajo en proceso y productos terminados que aparecen en numerosos puntos a lo largo del canal de producción y de logística de una empresa. Los inventarios se hallan con frecuencia en lugares como almacenes, patios, pisos de las tiendas, equipos de transporte y estantes, esto puede costar al año entre 20 y 40% de su valor. Por lo tanto, administrar cuidadosamente los niveles de inventario tiene un buen sentido económico.

En [65] desarrollan una investigación para " *CV Colombian Coffee* ", empresa colombiana comercializadora de café tostado en grano y molido. En dicho estudio, parten de la justificación de que " *CV colombian coffee* " , presenta ciertos problemas con las muestras que se utilizan para el área comercial y de calidad. Dado esto inician su investigación con el marco referencial en el tema de inventarios de materias primas agrícolas, la importancia de su cuidado y distribución en almacenes con el fin de formular estrategias que propongan varias soluciones, algunas de ellas son: clasificación de las muestras, el inventario objetivo, el volumen y frecuencia del pedido, el control del ingreso y salida del producto; así como la distribución física del almacenaje.

En cuanto a existencias de café, la OIC hace una diferencia entre existencias retenidas en países importadores, las cuales comúnmente se le denominan inventarios, y las existencias retenidas en países productores, estas simplemente se denominan existencias o *stock* [41].

Según [38], con base en los reportes de la OIC se menciona que las existencias mundiales totales pasaron de representar el 31,58 % en 2005/06 a 17,03 % en 2009/10. La mayor parte correspondió a las existencias de arábica con respecto a la producción de esta misma variedad (37,62 % y 21 %, en 2005/06 y 2009/10, respectivamente). Además, indican que la tendencia decreciente de las existencias pudo verse explicada por el aumento en el precio internacional antes de 2012, lo que incentivó las exportaciones al igual que el consumo interno de los países productores, el cual, se incrementó en un 3,6 %.

4.4.1. La ecuación del *stock*

Es importante resaltar que la variación de la producción total se ve afectada por las ventas como puede evidenciarse en la Eq.(4-4).

$$\underbrace{\dot{x}_4 + \dot{x}_1}_{\text{Variación de la producción total}} = \underbrace{-Lx_5}_{\text{Ventas}} \quad (4-4)$$

Por lo tanto, se obtiene

$$\dot{x}_4 = -\dot{x}_1 - Lx_5 \quad (4-5)$$

donde, $x_4 \in \mathbb{R}$, corresponde a la variable *stock*, $x_1 \in \mathbb{R}^+$ a la oferta, $L \in \mathbb{R}^+$ a la tasa de ventas y $x_5 \in \mathbb{R}$ a las ventas.

Con base en la importancia que tienen los *stock* de café dentro del proceso de comercialización y desarrollo de este mercado económico, la ecuación (4-5) se construye a partir de dos componentes: el primero corresponde a la variación de la oferta, la cual es definida en la Subsección 4.2.2 y el segundo corresponde a las ventas que se tienen de la producción en cada uno de los periodos cafeteros.

4.5. La comercialización del café verde: las ventas

Dentro del proceso de comercialización del café, intervienen diferentes agentes en el mercado, los cuales ocupan un papel importante dentro de toda la cadena. La FNC y en particular el estudio [38], mencionan que los principales agentes del mercado son:

- **Los caficultores:** la FNC considera a un caficultor el propietario o poseedor de un predio que cumpla con las siguientes condiciones [38]:

- Poseer un área sembrada igual o superior a media hectárea.
 - El área señalada debe contar con al menos 1.500 árboles plantados.
- **Los exportadores:** dentro del mercado del café colombiano se consideran exportadores a todas aquellas firmas que se encargan de la actividad de comercialización extranjera del café verde, procesado o cafés especiales producidos en Colombia.

En [38], con base en cifras reportadas de la OIC y la FNC [20, 31, 41], se menciona que en 2012 existían un total de 96 firmas exportadoras, las cuales se ubican en el 42,4 % de los departamentos (14 de los 33), estando el mayor número en Bogotá y Caldas. La mayoría de dichas firmas exportan café verde (84 de las 96), 50 exportan café tostado y 13 café soluble.

- **Las empresas torrefactoras:** en el mercado del café colombiano, las empresas torrefactoras son aquellas encargadas de los procesos de adecuación de los granos, descascarillado, tostión y molido del café. De acuerdo a [18], las empresas torrefactoras en Colombia están divididas así:
- En 2009, 218 empresas torrefactoras dedicadas a proceso de tostión.
 - El café procesado en Colombia está concentrado en 10 empresas que abarcan más del 90 % del total de las ventas.
 - En 2008, 5 empresas concentraban el 84,08 % del mercado nacional de café tostado. El resto de las compañías tenía una participación en el mercado inferior al 3 %.

Según [19], con el aumento de la producción de café en el año cafetero 2014-2015, las ventas externas de café colombiano bordearon los 12,7 millones de sacos, un 16 % más en comparación con los 10,9 millones exportados el año anterior.

En [32], se menciona que el consumo de café en Colombia en 2016 sigue aumentando, pues la bebida ya tiene una penetración del 91 % en los hogares y el volumen de ventas creció un 3,1 % en comparación con 2015.

4.5.1. La ecuación de ventas

A continuación se construye la ecuación que modela el comportamiento de las ventas de café verde colombiano comercializado como *commodity*.

$$x_5 = \begin{cases} p_n x_2 & \text{si } x_2 < x_1 + x_4 \\ p_h(x_1 + x_4) & \text{si } x_2 > x_1 + x_4 \end{cases} \quad (4-6)$$

donde, $p_n \in \mathbb{R}^+$ es el precio normal de venta, $p_h \in \mathbb{R}^+$ es el precio alto de venta, $x_1 \in \mathbb{R}^+$ es la oferta, $x_2 \in \mathbb{R}^+$ es la demanda, $x_4 \in \mathbb{R}$ es el *stock* y $x_5 \in \mathbb{R}$ las ventas.

Dentro de la función definida a tramos (4-6), la superficie de conmutación del sistema esta definida por el plano:

$$x_2 = x_1 + x_4$$

La Eq.(4-6), se construye considerando dos escenarios:

1. Escenario 1: el mercado de café tiene una baja demanda (variable x_2) y tanto la oferta (variable x_1) como el *stock* (variable x_4) de café superan con exceso la demanda del momento.

-Esta situación ($x_2 < x_1 + x_4$) se caracteriza por:

- Disponibilidad de existencias para ser agotadas, y alta producción con respecto a la demanda, la cual controla las ventas.
- El precio de venta es denominado normal (parámetro p_n), pues deben bajar los precios de venta para que se dé la comercialización y agotar existencias de inventario y posteriormente la producción.

2. Escenario 2: la demanda es alta, la oferta y el *stock* no alcanzan a satisfacer la demanda de café del momento.

-Esta situación ($x_2 > x_1 + x_4$) se caracteriza por:

- La demanda es alta; por lo tanto, el *stock* y la oferta no alcanzan a satisfacerla, ya que éstas últimas definen el proceso de ventas que corresponden a la capacidad de responder la demanda.
- El precio de venta es denominado alto (parámetro p_h), pues el proceso de venta se realiza con el mejor postor, aprovechando la situación de escasez de producto.

A partir del estudio de este mercado, se concluye que la situación se encuentra generalmente sobre el segundo escenario, ya que la comercialización del café colombiano es una actividad de venta en general asegurada. Ello debido a que, como se mencionó en el marco teórico, el café es el segundo *commodity* más tranzado en el mundo, lo que hace que su comercialización y venta sea una actividad efectiva.

La ecuación de ventas concluye la formulación de este modelo que incluye las variables oferta, demanda y *stock*.

4.6. Modelo matemático con inversión constante en la oferta

Una vez se expuso detalladamente cada componente del mercado del café colombiano y la formulación de cada ecuación, se presenta finalmente en la Tabla 4-1 el modelo dinámico no suave que estudia algunas de las principales variables del mercado económico del café.

Tabla 4-1: Modelo matemático con inversión constante en la oferta.

Ecuación de oferta	$\dot{x}_1 = -rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y$ <p>con $x_1 \neq 0$</p>
Ecuación de demanda	$\dot{x}_2 = ax_2 \left(1 - \frac{x_2}{w_1}\right) + bx_2 \left(1 - \frac{x_2}{w_2}\right)$ <p>con $w_1, w_2 \neq 0$</p>
Ecuación simplificada de la demanda	$\dot{x}_2 = (a + b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right)$ <p>con $w \neq 0$</p>
Ecuación del <i>stock</i>	$\dot{x}_4 = -\dot{x}_1 - Lx_5$
Ecuación de ventas	<p>- si $x_2 < x_1 + x_4$</p> $x_5 = p_n x_2$ <p>- si $x_2 > x_1 + x_4$</p> $x_5 = p_h (x_1 + x_4)$

4.6.1. Parámetros del modelo

En la Tabla 4-2, se presenta el listado de parámetros utilizados en la formulación del modelo: las descripciones, valor y unidad de cada uno, los cuales son punto de referencia para todos los análisis realizados en las secciones posteriores.

Tabla 4-2: Tabla de parámetros, valores estimados y unidades.

Parámetro	Símbolo	Valor estimado	Unidad
Tasa de descenso de la producción: Caída de la producción debido a otros factores, ajenos a la capacidad instalada.	r	0.2962	millones de sacos de 60 kg/millones de sacos de 60 kg (adimensional)
Tasa de consumo interno: Expresa la cantidad de la demanda de café que se vende en el interior del país.	a	2.2559	millones de sacos de 60 kg/millones de sacos de 60 kg (adimensional)
Tasa de producción de café para exportación: Expresa la cantidad de café demandada a nivel internacional.	b	0.0304	millones de sacos de 60 kg/millones de sacos de 60 kg (adimensional)
Tasa de café importado: Expresa la cantidad de café que llega al país para consumo interno. Importación.	c	0.116	millones de sacos de 60 kg/millones de sacos de 60 kg (adimensional)
Tasa de ventas: La tasa de crecimiento o decrecimiento de las ventas de café, por cualquier fuente, ya sea de mercado externo o interno.	L	0.002546	millones de sacos de 60 kg/millones de sacos de 60 kg (adimensional)
Factor de conversión para inversión en la oferta:	λ	0.00252	millones de sacos de 60 kg/millones de dólares
Inversión en infraestructura interna de producción de café: Inversión en capacidad instalada interna de producción.	Y	2000	millones de dólares
Precio normal: Precio normal para la función de ventas.	p_n	108.68	USD cent/lb
Precio alto: Precio alto para la función de ventas.	p_h	169.79	USD cent/lb
Capacidad máxima de demanda	w	20	millones de sacos de 60 kg

Se debe tener en cuenta que los parámetros son determinados a partir de datos históricos reportados por los organismos oficiales en el sector café, tales como la Federación Nacional de Cafeteros (FNC) y la Organización Internacional del Café (OIC). En el Anexo 1 se encuentra una explicación más detallada sobre el cálculo de estos parámetros.

4.7. Expresión explícita para el modelo propuesto

En la presente sección se expone todo el desarrollo analítico del sistema de ecuaciones diferenciales, con el ánimo de observar la dinámica de la solución. Como se evidenciará el análisis se concluye con ayuda de una herramienta computacional tipo MATLAB[®], debido a la complejidad de las expresiones a las que se llega. La técnica numérica usada en la simulación corresponde a un ODE45 con eventos, el código a partir del cual se obtuvieron los resultados se muestra en el Anexo 2.

Inicialmente se analizará la ecuación diferencial para la variable oferta.

1. Ecuación de oferta

$$\dot{x}_1 = -rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y, \quad x_1 \neq 0.$$

Se tienen dos casos: el primero con $\lambda Y = 0$, y el segundo con $\lambda Y \neq 0$.

- **Caso 1:** Si la inversión es considerada nula, es decir, $\lambda Y = 0$, se tiene,

$$\frac{dx_1}{dt} = -rx_1 + \frac{c}{x_1} = \frac{-rx_1^2 + c}{x_1}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x_1}{-rx_1^2 + c} dx_1 = \int dt$$

Sustituyendo $u = -rx_1^2 + c$ y $du = -2rx_1 dx_1$, se obtiene

$$-\frac{1}{2r} \int \frac{du}{u} = t + C_1.$$

Integrando

$$-\frac{1}{2r} \ln |-rx_1^2 + c| = t + C_1.$$

Luego de algunos cálculos algebraicos se obtiene,

$$x_1 = \left(\frac{c - \exp\{-2r(t + C_1)\}}{r} \right)^{\frac{1}{2}}$$

donde

$$x_1 = x_1(t) \text{ esté definido para } \exp(-2r(t + C_1)) < c \quad (4-7)$$

- **Caso 2:** Si la inversión es considerada no nula, es decir, $\lambda Y \neq 0$, se tiene,

$$\dot{x}_1 = -rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y.$$

Por tanto,

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{-rx_1^2 + c + \lambda Y x_1}{x_1} = \frac{-rx_1^2 + \lambda Y x_1 + c}{x_1}$$

y así

$$x_1 \frac{dx_1}{dt} = -rx_1^2 + \lambda Y x_1 + c,$$

integrando

$$\int \frac{x_1}{-rx_1^2 + \lambda Y x_1 + c} dx_1 = \int dt$$

y finalmente

$$\int \frac{x_1}{x_1^2 - \frac{\lambda Y}{r} x_1 - \frac{c}{r}} dx_1 = -rt + C_2 \quad (4-8)$$

Para calcular la integral anterior se realizan las sustituciones, $\xi = \frac{\lambda Y}{r}$ y $\zeta = \frac{c}{r}$, con lo cual se obtiene,

$$I = \int \frac{x_1}{x_1^2 - \xi x_1 - \zeta} dx_1 = \frac{1}{2} \int \frac{2x_1}{x_1^2 - \xi x_1 - \zeta} dx_1$$

Renombrando los términos $u = x_1^2 - \xi x_1 - \zeta$ y $du = (2x_1 - \xi) dx_1$,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x_1 - \xi + \xi)}{x_1^2 - \xi x_1 - \zeta} dx_1 = \frac{1}{2} \int \frac{(2x_1 - \xi)}{x_1^2 - \xi x_1 - \zeta} dx_1 + \frac{\xi}{2} \int \frac{dx_1}{x_1^2 - \xi x_1 - \zeta} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} + \frac{\xi}{2} \int \frac{dx_1}{x_1^2 - \xi x_1 - \zeta} = \frac{1}{2} \ln |x_1^2 - \xi x_1 - \zeta| + \frac{\xi}{2} \int \frac{dx_1}{x_1^2 - \xi x_1 - \zeta} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} + \frac{\xi}{2} \int \frac{dx_1}{x_1^2 - \xi x_1 - \zeta} = \frac{1}{2} \ln |x_1^2 - \xi x_1 - \zeta| + \frac{\xi}{2} II \end{aligned}$$

Calculando la integral anterior,

$$II = \int \frac{dx_1}{x_1^2 - \xi x_1 - \zeta} = \int \frac{dx_1}{x_1^2 - \xi x_1 + \frac{\xi^2}{4} - \frac{\xi^2}{4} - \zeta}.$$

Luego se sustituye $\alpha^2 = \frac{\xi^2}{4} + \zeta$,

$$II = \int \frac{dx_1}{(x_1 - \frac{\xi}{2})^2 - \alpha^2}.$$

Si $v = x_1 - \frac{\xi}{2}$, $dv = dx_1$

$$II = \int \frac{dv}{v^2 - \alpha^2}$$

Utilizando fracciones parciales,

$$II = \int \frac{dv}{(v + \alpha)(v - \alpha)} = \int \left[\frac{A}{v + \alpha} + \frac{B}{v - \alpha} \right] dv$$

de donde se obtiene

$$II = \frac{1}{2\alpha} \ln \left| \frac{v - \alpha}{v + \alpha} \right| = \frac{1}{2\alpha} \ln \left| \frac{x_1 - \frac{\xi}{2} - \alpha}{x_1 - \frac{\xi}{2} + \alpha} \right|.$$

Por lo tanto, se tiene para I ,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \ln |x_1^2 - \xi x_1 - \zeta| + \frac{\xi}{2} \left(\frac{1}{2\alpha} \ln \left| \frac{x_1 - \frac{\xi}{2} - \alpha}{x_1 - \frac{\xi}{2} + \alpha} \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln |x_1^2 - \xi x_1 - \zeta| + \frac{\xi}{4\alpha} \ln \left| \frac{x_1 - \frac{\xi}{2} - \alpha}{x_1 - \frac{\xi}{2} + \alpha} \right| \quad x_1 - \frac{\xi}{2} + \alpha \neq 0. \end{aligned}$$

Volviendo a la Eq.(4-8), se tiene,

$$\int \frac{x_1 dx_1}{x_1^2 - \frac{\lambda Y}{r} x_1 - \frac{c}{r}} = -rt + C_2.$$

Así,

$$\frac{1}{2} \ln |x_1^2 - \xi x_1 - \zeta| + \frac{\xi}{4\alpha} \ln \left| \frac{x_1 - \frac{\xi}{2} - \alpha}{x_1 - \frac{\xi}{2} + \alpha} \right| = -rt + C_2$$

obteniéndose después de algunos cálculos algebraicos

$$(x_1^2 - \xi x_1 - \zeta)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x_1 - \frac{\xi}{2} - \alpha}{x_1 - \frac{\xi}{2} + \alpha} \right)^{\frac{\xi}{4\alpha}} = \exp(-rt + C_2)$$

para $\frac{x_1 - \frac{\xi}{2} - \alpha}{x_1 - \frac{\xi}{2} + \alpha} > 0$ y $x_1 - \frac{\xi}{2} + \alpha \neq 0$.

Haciendo, $\beta_1 = \frac{\xi}{2} + \alpha$ y $\beta_2 = \alpha - \frac{\xi}{2}$, finalmente se obtiene la expresión

$$\boxed{(x_1^2 - \xi x_1 - \zeta) \left(\frac{x_1 - \beta_1}{x_1 + \beta_2} \right)^{\frac{\xi}{2\alpha}} = (\exp(-rt + C_2))^2} \quad (4-9)$$

para $\left(\frac{x_1 - \beta_1}{x_1 + \beta_2} \right) > 0$ y $x_1 + \beta_2 \neq 0$.

Como podemos observar en el desarrollo de la ecuación diferencial correspondiente a la variable oferta, en el caso en el que la inversión es diferente de cero, esta variable se hace difícil expresarla como forma explícita del tiempo (Eq.(4-9)).

Con el objetivo de lograr representar explícitamente la oferta x_1 de la Eq. (4-9), podría considerarse la aproximación

$$\left(\frac{x_1 - \beta_1}{x_1 + \beta_2} \right)^{\frac{\xi}{2\alpha}} \simeq 1.$$

Para que esta aproximación sea razonable, se debería tener $\xi \rightarrow 0$ o $\alpha \rightarrow \infty$. De esta manera, la expresión (4-9), se reduciría a,

$$(x_1^2 - \xi x_1 - \zeta) = (\exp(-rt + C_2))^2.$$

De esa expresión, la variable x_1 podría obtenerse explícitamente. Sin embargo, dado que para el modelo usado, los parámetros ξ y α no cumplen con las condiciones requeridas, ya que,

$$\xi = 17.0155$$

$$\alpha = 8.5307$$

no es posible simplificar de esta forma la Eq.(4-9).

En el caso de que no haya inversión sobre la oferta, la solución explícita que se logra obtener es del tipo exponencial decreciente, como se evidencia en la Eq.(4-7).

2. Ecuación de demanda

A continuación se muestra el procedimiento para la solución explícita de la variable demanda.

$$\dot{x}_2 = (a + b) x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right) \quad w > 0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (a + b) x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right) = \left(\frac{a + b}{w}\right) (w - x_2) x_2 dt.$$

Reemplazando $\gamma = \frac{a+b}{w}$ tenemos,

$$\begin{aligned} dx_2 &= \gamma x_2 (w - x_2) dt \\ \frac{dx_2}{x_2(w - x_2)} &= \gamma dt, \quad x_2 \neq 0 \text{ y } w \neq 0 \end{aligned}$$

integrando

$$\int \frac{dx_2}{x_2(w - x_2)} = \int \gamma dt$$

y después de algunos cálculos algebraicos se obtiene

$$\boxed{x_2(t) = \frac{w \exp(w\gamma t + C_3 w)}{1 + \exp(w\gamma t + C_3 w)}}.$$

3. Ecuación del stock

A partir de la ecuación

$$\dot{x}_4 = -\dot{x}_1 - Lx_5,$$

se obtiene la expresión explícita para la variable *stock*, con

$$x_5 = \begin{cases} p_n x_2 & \text{si } x_2 < x_1 + x_4 \\ p_h (x_1 + x_4) & \text{si } x_2 > x_1 + x_4 \end{cases}$$

Para calcular la solución de esta ecuación diferencial sólo se considerará la expresión de la oferta x_1 reportada en la Eq.(4-7),

$$x_1(t) = \left(\frac{c}{r} - \frac{1}{r} \exp(-2r(t + C_1)) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se tiene,

$$\frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 = \frac{1}{2 \left(\frac{c}{r} - \frac{1}{r} \exp(-2r(t + C_1)) \right)^{\frac{1}{2}}} \left(-\frac{1}{r} \exp(-2r(t + C_1)) \right) (-2r).$$

Así,

$$\dot{x}_1 = \frac{-\frac{1}{r} \exp(-2r(t + C_1)) (-2r)}{2x_1(t)} = \frac{\exp(-2r(t + C_1))}{x_1(t)}.$$

A continuación se analizan los dos posibles casos para la variable *stock*:

- Caso 1: para $x_2 < x_1 + x_4$ se tiene:

$$\dot{x}_4 = \frac{-\exp(-2r(t + C_1))}{x_1(t)} - L(p_n x_2(t))$$

donde,

$$x_2(t) = \frac{w \exp(w\gamma t + C_3 w)}{1 + \exp(w\gamma t + C_3 w)}$$

- Caso 2: para $x_2 > x_1 + x_4$ se tiene:

$$\dot{x}_4 = \frac{-\exp(-2r(t + C_1))}{x_1(t)} - L(p_h(x_1(t) + x_4(t)))$$

Así se llega a

$$\dot{x}_4 = \begin{cases} \frac{-\exp(-2r(t+C_1))}{x_1(t)} - L p_n x_2(t) & \text{si } x_2 < x_1 + x_4 \\ \frac{-\exp(-2r(t+C_1))}{x_1(t)} - L (p_h (x_1(t) + x_4(t))) & \text{si } x_2 > x_1 + x_4 \end{cases}$$

Para cada uno de los dos casos podemos escribir lo siguiente.

- **Caso 1:** Si $x_2 < x_1 + x_4$

$$\dot{x}_4 = f_1(t)$$

donde,

$$f_1(t) = \frac{-\exp(-2r(t+C_1))}{\left(\frac{c}{r} - \frac{1}{r}\exp(-2r(t+C_1))\right)^{\frac{1}{2}}} - Lp_n \left(\frac{w \exp(w\gamma t + C_2 w)}{1 + \exp(w\gamma t + C_2 w)} \right).$$

Por lo tanto,

$$\frac{dx_4}{dt} = f_1(t)$$

y entonces

$$x_4(t) = \int f_1(t)dt \equiv F(t).$$

- **Caso 2:** Si $x_2 > x_1 + x_4$

$$\dot{x}_4 = -\dot{x}_1 - Lp_h(x_1 + x_4) = -\dot{x}_1 - Lp_h x_1 - Lp_h x_4$$

y así,

$$\dot{x}_4 = \frac{-\exp(-2r(t+C_1))}{x_1(t)} - Lp_h x_1(t) - Lp_h x_4(t).$$

Por lo tanto,

$$\dot{x}_4 + Lp_h x_4(t) = \frac{-\exp(-2r(t+C_1))}{x_1(t)} - Lp_h x_1(t).$$

Sea ahora

$$f_2(t) = \frac{\exp(-2r(t+C_1))}{x_1(t)} - Lp_h x_1(t).$$

Tenemos

$$\dot{x}_4 + Lp_h x_4(t) = f_2(t).$$

Para este caso se obtiene una EDO lineal de primer orden cuya solución puede calcularse introduciendo un factor integrante, lo cual arroja la expresión dada por

$$x_4(t) = C_3 \exp(-\int Lp_h dt) + \exp(-\int Lp_h dt) \int \exp(\int Lp_h dt) f_2(t) dt.$$

por tanto

$$x_4(t) = C_3 \exp(-Lp_h t) + \exp(-Lp_h t) \int \exp(Lp_h t) f_2(t) dt \equiv G(t)$$

y así se obtiene finalmente:

$$x_4(t) = \begin{cases} F(t) & \text{si } x_2 < x_1 + x_4 \\ G(t) & \text{si } x_2 > x_1 + x_4 \end{cases}$$

4.8. Existencia y unicidad

Sea el sistema

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1 \in S_1 \\ F_2 \in S_2 \end{cases}$$

donde $x = (x_1, x_2, x_4)$,

$$F_1 = \left(-rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y, (a+b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right), rx_1 - \frac{c}{x_1} - \lambda Y - p_n Lx_2\right)$$

$$F_2 = \left(-rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y, (a+b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right), rx_1 - \frac{c}{x_1} - \lambda Y - p_h L(x_1 + x_4)\right)$$

y sea la superficie de conmutación del sistema

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_4) \in \mathbb{R}^3 : H(x_1, x_2, x_4) = 0\}$$

donde

$$H(x_1, x_2, x_4) = x_1 + x_4 - x_2 = 0.$$

Con el propósito de definir las regiones S_1 y S_2 , a continuación se definen los conjuntos:

$$\pi = \{(x_1, x_2, x_4) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\}$$

$$\hat{S}_1 = \{(x_1, x_2, x_4) \in \mathbb{R}^3 : H(x_1, x_2, x_4) < 0\}$$

$$\hat{S}_2 = \{(x_1, x_2, x_4) \in \mathbb{R}^3 : H(x_1, x_2, x_4) > 0\}$$

$$r_1 = \hat{S}_1 \cap \pi = \{(x_1, x_2, x_4) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, x_4 - x_2 < 0\}$$

$$r_2 = \hat{S}_2 \cap \pi = \{(x_1, x_2, x_4) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, x_4 - x_2 > 0\}$$

A partir de los conjuntos anteriores se definen las regiones S_1 y S_2 donde se encuentran los campos F_1 y F_2 respectivamente.

$$S_1 = \hat{S}_1 - r_1 = \hat{S}_1 \cap \bar{r}_1$$

$$S_2 = \hat{S}_2 - r_2 = \hat{S}_2 \cap \bar{r}_2$$

Dada una condición inicial $x_0 = (x_1^0, x_2^0, x_4^0)$ en S_1 , como F_1 es un campo vectorial continuo y diferenciable en esta región, en virtud del teorema de existencia y unicidad expuesto en la Sección 3.6, el sistema $\dot{x} = F_1(x)$ en S_1 tiene siempre solución y ésta es única. De forma análoga para F_2 en S_2 .

En el caso de que una condición inicial $X_1 = (x_1^1, x_2^1, x_4^1)$ esté ubicada sobre la superficie de conmutación a excepción de los puntos de la forma $(0, x_2, x_4)$, las hipótesis del teorema de existencia y unicidad no se cumplen, pues allí no están definidos los campos F_1 y F_2 . En [33] se afirma que en sistemas de Filippov dada la condición inicial X_1 en Σ con F_1 y F_2 continuos y diferenciales, se garantiza existencia de la solución, sin embargo, esta no es única, es decir las trayectorias que inician en un campo pueden o no pasar al otro, ocasionando cruces, deslizamientos estables y deslizamientos inestables, o varios de estos fenómenos para la misma condición inicial X_1 . Para mayor detalle, se recomienda ver: [24, 33, 68].

4.9. Simulaciones y análisis del modelo obtenido

A continuación, se muestran algunas simulaciones y análisis para el modelo obtenido. Dichas simulaciones se realizan para el sistema de ecuaciones diferenciales expuesto en la Sección 4.6 mediante el programa MATLAB[®], por medio del método numérico denominado ODE45 que éste lenguaje ofrece.

En vista de que el modelo es no suave y dado que la ecuación diferencial del *stock* es definida a tramos, se aplicó el método numérico ODE45 con eventos. En el Anexo 2 se muestra el código a partir del cual se obtuvieron los resultados mostrados.

4.10. Comportamiento de la variable oferta

En esta sección se analiza el comportamiento de la oferta por medio de los resultados de las simulaciones, tanto para el caso en el cual se omite el efecto de la inversión como en el que se incluye.

4.10.1. Análisis de la dinámica de la variable en ausencia de inversión

De acuerdo al comportamiento presentado por la variable oferta, en la Figura 4-1 podemos observar una tendencia decreciente, la cual se ve explicada por el aumento de importaciones para consumo interno, pues entre más altas sean estas, la variación de la oferta se hace menor a medida que avanza el tiempo.

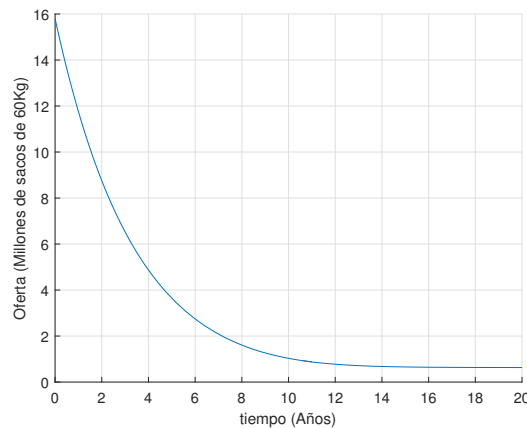


Figura 4-1: Dinámica de la oferta sin inversión respecto al tiempo. En esta figura se observa el comportamiento decreciente de la oferta en el tiempo al no incluir la inversión. Comportamiento explicado por la capacidad instalada para producción r , la cual disminuye a medida que avanza el tiempo debido al deterioro de toda la cadena de producción.

4.10.2. Análisis de la dinámica de la variable oferta al incorporar la inversión

Dado el desgaste de la capacidad instalada de la oferta debido a factores como enfermedades de cultivos, mantenimiento en la industria, entre otros, tanto el gremio cafetero como el gobierno, se ven en la necesidad de invertir para asegurar que la producción en este importante sector de la economía alcance los niveles esperados y evitar que su comportamiento en el tiempo sea decreciente.

Por lo tanto, es relevante incorporar la inversión en el modelo propuesto. Para ello, se modificó la ecuación de la oferta como se muestra en la Eq.(4-2). Adicionalmente, fue necesario determinar el valor mínimo que la inversión debe adquirir para lograr que la oferta tome un comportamiento creciente, lo cual se realizó a través ciertas simulaciones por medio del software MATLAB[®]. A partir de dicho análisis se evidenció que, para cierto valor de inversión Y , la oferta inicia cambiando lentamente su tendencia y posteriormente tiene un crecimiento sutil a partir de la condición inicial, como se muestra en la Figura 4-2.

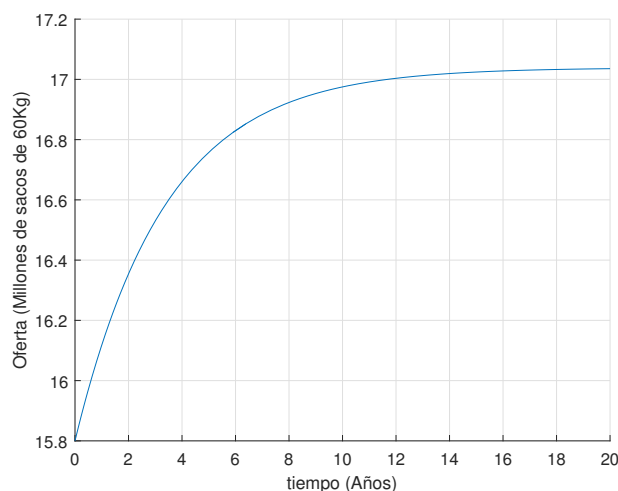


Figura 4-2: Comportamiento de la variable oferta con influencia de la inversión respecto al tiempo. En esta figura se puede apreciar el comportamiento de la oferta al incorporar la inversión, se debe tener en cuenta que al considerar este tercer termino lineal en la ecuación de la oferta, esta cambia el comportamiento mostrado en la Figura 4-1, pasando a ser creciente. Es necesario tener presente que dependiendo del valor de la inversión el comportamiento puede crecer aun mas, esto explicado por las mejoras continuas que podría tener la capacidad instalada.

Es de tener en cuenta que al ser el café un mercado de dinamismo rápido, las tasas de inversión en este sector se hacen cada vez más elevadas en la medida que la dinámica de comercialización se agiliza, pues el desgaste de cultivos, equipos, maquinarias y en general, la industria cafetera, es cada vez mayor, por lo que el tema de inversión para mejorar la oferta

toma importancia.

4.11. Comportamiento de la variable demanda

En la Figura 4-3, se puede observar un comportamiento creciente de tipo logístico para la demanda, tal como se formuló en la Eq. (4-3). En la misma figura se observa que la variable crece hasta su valor máximo, determinado por el parámetro w , el cual está constituido por la demanda nacional más la internacional, siendo esta última superior al 80% del total.

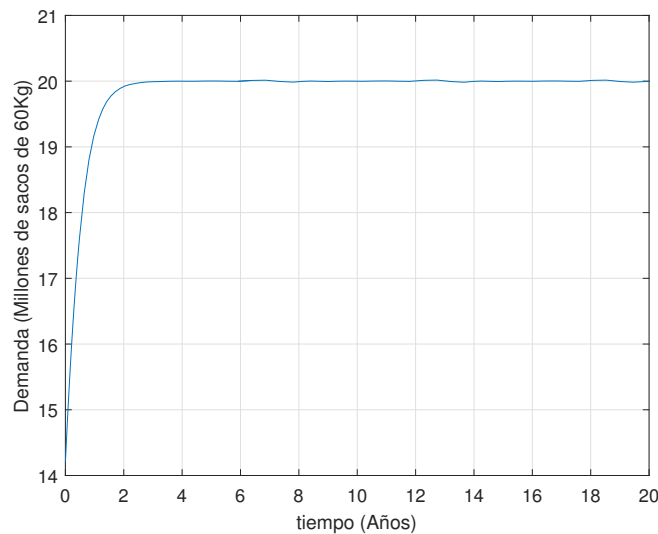


Figura 4-3: Comportamiento de la variable demanda en función del tiempo. En esta figura se puede observar el comportamiento de la demanda en el tiempo, un comportamiento de tipo logístico, es decir, la demanda arranca con un comportamiento creciente, hasta estabilizarse al alcanzar la capacidad máxima de la demanda (parámetro w), en la Sección 4.13 se muestra que el valor de cero para la demanda, corresponde a un punto de equilibrio tipo punto de silla, y el valor de w para la demanda corresponde a un punto de equilibrio estable.

4.12. Comportamiento dinámico de la variable *stock*

El comportamiento de la variable *stock* en el tiempo se muestra en la Figura 4-4, en donde se evidencia inicialmente la disminución de los inventarios disponibles hasta ser agotados. Luego se da la aparición de inventarios negativos, lo cual se explica por el aumento de demanda y, por ende, de ventas efectivas. El inventario negativo representa las ventas que se darán debido a las mejoras en la capacidad instalada, lo que permite comprometer ventas a futuro.

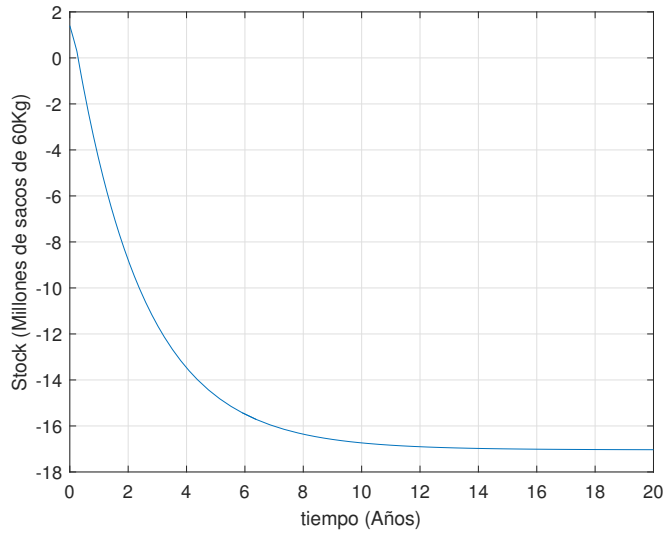


Figura 4-4: Dinámica del Stock respecto al tiempo. En esta gráfica se observa el comportamiento de la variable *stock*, el comportamiento decreciente mostrado, se explica por la disminución de inventarios debido a las ventas efectivas y a las ventas de futuras cosechas.

4.13. Cálculo de los puntos de equilibrio para el modelo de la Sección 4.6

En la presente sección se muestran los cálculos de puntos de equilibrio del modelo propuesto en la Sección 4.6 para las regiones $x_2 < x_1 + x_4$ y $x_2 > x_1 + x_4$. Para la adecuada comprensión de los cálculos aquí desarrollados se recomienda tener en cuenta los conceptos expuestos en el Capítulo 3.

Considerando el modelo,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y \\ \dot{x}_2 = (a + b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right) \\ \dot{x}_4 = -\dot{x}_1 - Lx_5 \end{cases} \quad (4-10)$$

y con

$$x_5 = \begin{cases} p_n x_2 & \text{si } x_2 < x_1 + x_4 \\ p_h (x_1 + x_4) & \text{si } x_2 > x_1 + x_4 \end{cases} \quad (4-11)$$

Tenemos,

$$\dot{x}_4 = \begin{cases} rx_1 - \frac{c}{x_1} - \lambda Y - Lp_n x_2 & \text{si } x_2 < x_1 + x_4 \\ rx_1 - \frac{c}{x_1} - \lambda Y - Lp_h (x_1 + x_4) & \text{si } x_2 > x_1 + x_4 \end{cases} \quad (4-12)$$

Para calcular los puntos de equilibrio se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones,

$$0 = -rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y \quad (4-13)$$

$$0 = (a+b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right) \quad (4-14)$$

$$0 = -\dot{x}_1 - Lx_5 \quad (4-15)$$

- De la Eq.(4-13) tenemos,

$$-rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y = 0, \quad x_1 \neq 0 \quad \text{es decir,} \quad -rx_1^2 + \lambda Y x_1 + c = 0,$$

cuyas soluciones son

$$x_1 = \frac{-\lambda Y \pm \sqrt{\lambda^2 Y^2 + 4rc}}{-2r}$$

Para el caso,

$$\boxed{x_1^* = \frac{-\lambda Y + \sqrt{\lambda^2 Y^2 + 4rc}}{-2r}} \quad (4-16)$$

Se tiene que $\sqrt{\lambda^2 Y^2 + 4rc} > \lambda Y$ y por lo tanto x_1^* toma un valor negativo.

Para el caso,

$$\boxed{x_1^{**} = \frac{\lambda Y + \sqrt{\lambda^2 Y^2 + 4rc}}{2r}} \quad (4-17)$$

En la Eq.(4-17), x_1^{**} toma un valor positivo.

- De la Eq.(4-14) se tiene,

$$\boxed{x_2^* = 0}$$

$$\boxed{x_2^* = w} \quad (4-18)$$

- Teniendo en cuenta que en el equilibrio, $\dot{x}_1 = 0$, de la Eq.(4-15) se obtiene, $-Lx_5 = 0$ lo que implica $x_5 = 0$.

Dado que x_5 es definida en (4-11) como una función a tramos, a continuación se analiza cada una de las regiones.

4.13.1. Cálculo de los puntos de equilibrio para la región

$$x_2 > x_1 + x_4$$

Para $x_2 > x_1 + x_4$, tenemos

$$-Lp_h(x_1 + x_4) = 0,$$

lo cual implica

$$x_1 + x_4 = 0 \Rightarrow \boxed{x_4^* = -x_1^*}$$

Así, los puntos de equilibrio encontrados para el sistema definido en la región $x_2 > x_1 + x_4$ son:

$$\begin{aligned} & (x_1^*, 0, -x_1^*) \\ & (x_1^{**}, 0, -x_1^{**}) \\ & (x_1^*, w, -x_1^*) \\ & (x_1^{**}, w, -x_1^{**}) \end{aligned}$$

Una vez realizados los reemplazos respectivos, con los parámetros reportados en la Tabla 4-2, obtenemos,

$$\begin{aligned} x_1^* &= -0.0229 \\ x_1^{**} &= 17.0385 \end{aligned}$$

Por tanto, los puntos de equilibrio para el modelo 4.6, en la región $x_2 > x_1 + x_4$, son:

$$\begin{aligned} P_1 &= (-0.0229, 0, 0.0229) \\ P_2 &= (17.0385, 0, -17.0385) \\ P_3 &= (-0.0229, 20, 0.0229) \\ P_4 &= (17.0385, 20, -17.0385) \end{aligned} \tag{4-19}$$

Análisis de los puntos de equilibrio encontrados en la región $x_2 > x_1 + x_4$

A continuación, se realizan dos conclusiones importantes de acuerdo a los resultados encontrados en las expresiones en (4-19).

- Nótese que los puntos de equilibrio al estar ubicados en la región $x_2 > x_1 + x_4$ y al considerarse que en el equilibrio $x_1 = x_4$, los puntos de equilibrio P_1 y P_2 encontrados en (4-19), son virtuales, ya que se encuentran la superficie de conmutación [24] [27].
- Los puntos de equilibrio P_1 y P_3 encontrados en (4-19), no pueden ser aplicados a la realidad de este mercado, ya que la oferta no puede adquirir valores negativos. Es decir, éstos puntos de equilibrio son no admisibles [61].

4.13.2. Cálculo de los puntos de equilibrio para la región

$$x_2 < x_1 + x_4$$

En esta región las soluciones de las Eqs. (4-13), (4-14), corresponden a los resultados ya mostrados en (4-16), (4-17) y (4-18).

Continuando con el análisis, se debe recordar que en el equilibrio, $\dot{x}_1 = 0$ y $\dot{x}_4 = 0$.

Sabiendo que:

$$\dot{x}_4 = -\dot{x}_1 - Lx_5 \quad \text{con} \quad x_5 = p_n x_2$$

Por lo tanto,

$$\dot{x}_4 = -\dot{x}_1 - Lp_n x_2,$$

y así

$$Lp_n x_2 = 0.$$

De esto, puede afirmarse que $x_2 = 0$.

Así x_4 es una variable libre, y los puntos de equilibrio estarían sobre dos rectas paralelas al eje x_4 .

1. El primer conjunto de puntos de equilibrio de esta región puede representarse como

$$(x_1^{**}, 0, x_4), \quad x_4 \in \mathbb{R}$$

donde la primer recta de equilibrios, está dada por la Eq.(4-20).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{**} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + g_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g_1 \in \mathbb{R} \quad (4-20)$$

2. El segundo conjunto de puntos de equilibrio de esta región puede representarse como

$$(x_1^*, 0, x_4), \quad x_4 \in \mathbb{R}$$

donde la segunda recta de equilibrios, está dada por la Eq.(4-21).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + g_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g_2 \in \mathbb{R} \quad (4-21)$$

Las Eqs. (4-20) y (4-21), representan conjuntos de puntos de equilibrios, no aislados para esta región del sistema. Al ser no aislados, no pueden aplicarse directamente los teoremas clásicos de linealización, y la determinación de la estabilidad se vuelve más compleja [51].

Sea el sistema no lineal, genéricamente expresado de la forma $\dot{x} = f(x)$, correspondiente al modelo expuesto en la Sección 4.6 para la región $x_2 < x_1 + x_4$. Ahora supongamos que se le puede analizar la estabilidad a sus puntos de equilibrio por medio de su sistema lineal equivalente $\dot{x} = AX$. Los puntos de equilibrio se encuentran haciendo $\dot{x} = 0$, es decir

$$AX = 0. \tag{4-22}$$

Para que el sistema homogéneo (4-22) tenga solución se debe dar una de las siguientes condiciones:

1. $X = 0$ lo que implica que el sistema tiene única solución. Siendo ésto imposible para el caso estudiado ya que como se encontró en las Eqs.4-20 4-21 el sistema tiene infinitas soluciones.
2. $\det(A) = 0$ lo que implica que alguno de sus eigenvalores deben ser 0, y por tanto sus puntos de equilibrios no hiperbólicos, razón por la cual los teoremas clásicos de linealización tales como el Hartman-Grobman, expuesto en la Sección 3.8 no pueden aplicarse directamente.

Este caso en particular, se debe analizar desde otro punto de vista. En [30], se inicia el estudio de este tipo de conjuntos continuos de puntos de equilibrio para un sistema dado, en donde la linealización no es permitida, este fenómeno es definido como bifurcación Zip.

Análogamente [29] con base en [30], presenta un estudio de la bifurcación zip, en la cual se analiza como se genera y como se clasifica la estabilidad de los puntos de equilibrio.

4.14. Determinación de la estabilidad de los puntos de equilibrio del modelo de la Sección 4.6

Considerando el sistema definido por las Eqs. (4-10), (4-11) y (4-12); y los puntos de equilibrio encontrados en (4-19). A continuación, se determina la estabilidad de dichos puntos de equilibrio ubicados localmente en la región $x_2 > x_1 + x_4$.

Se debe tener en cuenta, que el análisis de estabilidad para la región $x_2 < x_1 + x_4$, no se realiza en ésta tesis. Situación argumentada, en la Sección 4.13.2.

Para $x_2 > x_1 + x_4$ la estabilidad local de los puntos de equilibrio se estudia mediante la matriz jacobiana del sistema (4-23),

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y \\ (a+b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right) \\ rx_1 - \frac{c}{x_1} - \lambda Y - Lp_h(x_1 + x_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \\ H \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana viene dada por:

$$J(x_1, x_2, x_4) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_4} \\ \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & \frac{\partial G}{\partial x_4} \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_4} \end{pmatrix}$$

$$J(x_1, x_2, x_4) = \begin{pmatrix} -r - \frac{c}{x_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & (a+b) - 2\frac{(a+b)}{w}x_2 & 0 \\ r + \frac{c}{x_1^2} - p_h L & 0 & -Lp_h \end{pmatrix} \quad (4-23)$$

Calculando los valores propios de la matriz jacobiana se obtienen tres valores propios reales:

$$\lambda_1 = -Lp_h$$

$$\lambda_2 = -r - \frac{c}{x_1^2}$$

$$\lambda_3 = (a+b) - x_2 \left(\frac{2(a+b)}{w} \right)$$

Al evaluar los cuatro puntos de equilibrio y determinar el signo de los valores propios se obtiene que λ_1 y λ_2 son siempre negativos, y que la estabilidad va a depender de λ_3 :

- Para el punto de equilibrio P_1 se tiene: $\lambda_3 > 0$ correspondiente a un punto de silla.
- Para el punto de equilibrio P_2 se tiene: $\lambda_3 > 0$ correspondiente a un punto de silla.
- Para el punto de equilibrio P_3 se tiene: $\lambda_3 < 0$ correspondiente a un punto de equilibrio estable.
- Para el punto de equilibrio P_4 se tiene: $\lambda_3 < 0$ correspondiente a un punto de equilibrio estable.

Se debe tener en cuenta que únicamente los puntos de equilibrio P_2 y P_4 tienen sentido físico pues como se mencionó en las Secciones anteriores, la oferta sólo está definida para valores positivos. Así, P_1 y P_3 no tienen sentido físico, razón por la cual no se analizarán.

4.15. Retratos de fase del modelo de la Sección 4.6

A continuación se expondrán algunos de los retratos de fase para el modelo mostrado en la Sección 4.6. En los cuales, se busca interpretar el flujo que adoptan las diferentes trayectorias del sistema a partir de un conjunto arbitrario de condiciones iniciales. Esto permite observar la dinámica general que presenta el modelo.

En la Figura.4-5 se presenta el retrato de fase para las variables oferta y demanda, en el cual se puede observar como a partir de distintas condiciones iniciales, el flujo lleva al sistema a

conseguir un punto de equilibrio de tipo estable aproximadamente en la coordenada (17, 20). De la misma manera, en ésta figura se puede observar que para ciertas condiciones iniciales el sistema se encuentra en la región donde $x_2 < x_1 + x_4$ en donde se generan conjuntos de puntos de equilibrio que se evidencian en la figura como una recta paralela al eje de la oferta.

El cálculo de puntos de equilibrio para este modelo es mostrado en la Sección.4.13.

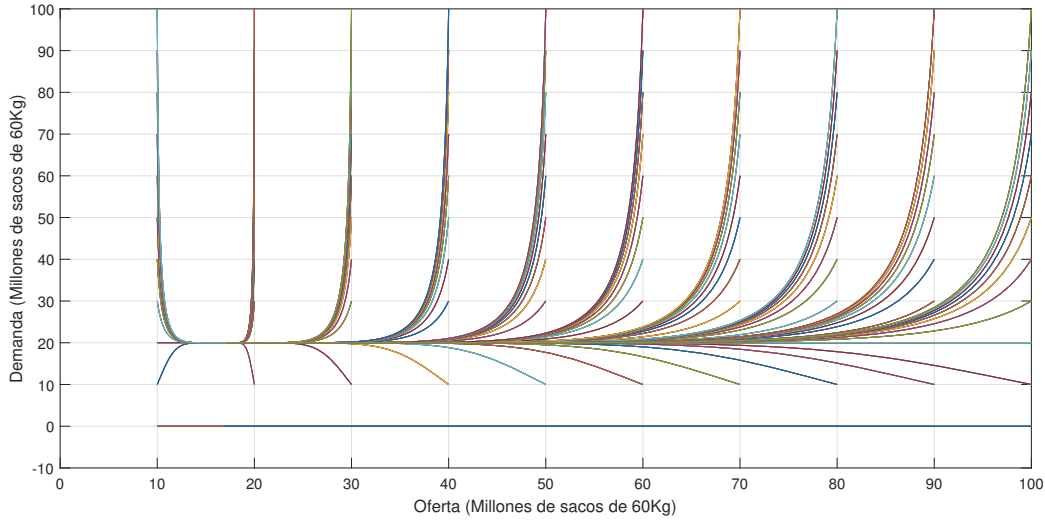


Figura 4-5: Retrato de fase de las variables oferta y demanda. En este retrato de fase para las variables oferta y demanda, es posible observar como dado un conjunto de condiciones iniciales arbitrario, las trayectorias del sistema, abordan dos posibles situaciones: la primera, es converger al punto de equilibrio estable localizado aproximadamente sobre la coordenada (17, 20), esto ocurre pues las condiciones iniciales dadas satisfacen la región donde $x_2 > x_1 + x_4$, la segunda opción para las trayectorias del sistema es ubicarse en algunas de las dos rectas de equilibrios generadas para la región donde $x_2 < x_1 + x_4$, esto mostrado aquí como la recta paralela al eje de la oferta.

En la Figura 4-6, se observa el retrato de fase para el sistema tridimensional del modelo 4.6, en el cual para un conjunto dado de condiciones iniciales se observan las diferentes trayectorias del sistema, al igual que la superficie de conmutación. Al analizar esta figura, se encuentra que dependiendo de la posición de la condición inicial el sistema puede adquirir dos comportamientos:

1. Aproximarse al punto de equilibrio estable, ya sea que esto implique o no atravesar la superficie de conmutación $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_4) : x_2 = x_1 + x_4\}$. Es necesario tener presente los cálculos mostrados en la Sección 4.13, pues allí se calcularon los puntos de equilibrio y su estabilidad.
2. Aproximarse a uno de los conjuntos de puntos de equilibrio que conforman una de

las rectas paralelas al eje x_4 . Estas rectas fueron calculadas y mostradas en las Eqs (4-20)(4-21) correspondientes la Sección 4.13.2.

Para facilitar la interpretación de los fenómenos descritos anteriormente, se muestra un diagrama explicativo en la Figura.4-7 en donde se representan con mayor claridad los fenómenos evidenciados en el retrato de fase mostrado en la Figura 4-5, se debe tener presente que esta ilustración es tan sólo de carácter explicativo y no representa los valores encontrados en la simulación y mostrados en la Figura 4-6.

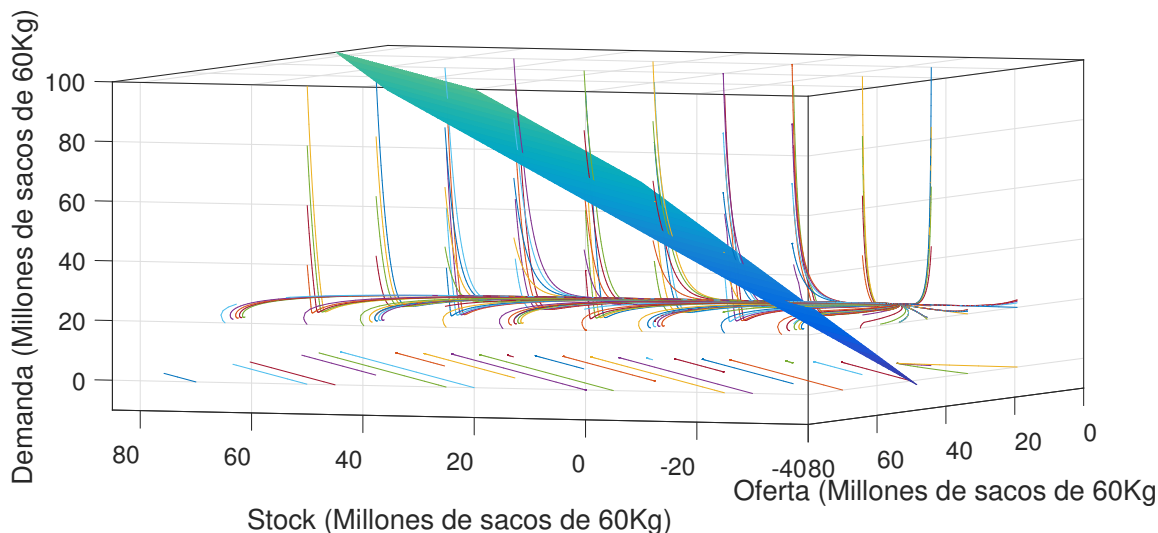


Figura 4-6: Retrato de fase de las variables oferta, demanda y *stock*. En la figura acá mostrada se puede observar el flujo que abordan las trayectorias para el sistema tridimensional, conformado por las variables, oferta, demanda y *stock*, la gráfica debe interpretarse desde diferentes partes: la primera es observar que al estar una condición inicial en la región donde $x_2 > x_1 + x_4$, el sistema evoluciona de tal manera que busca el punto de equilibrio estable, aproximándose directamente hacia el o cruzando la superficie de conmutación hasta alcanzarlo. La segunda parte podemos observar que dados los dos conjuntos de puntos de equilibrios paralelos al eje de la variable *stock*, para ciertas condiciones iniciales el sistema evoluciona de una recta de equilibrios a la otra. para una mejor comprensión de estos fenómenos es necesario observar diagrama explicativo mostrado en la Figura 4-7.

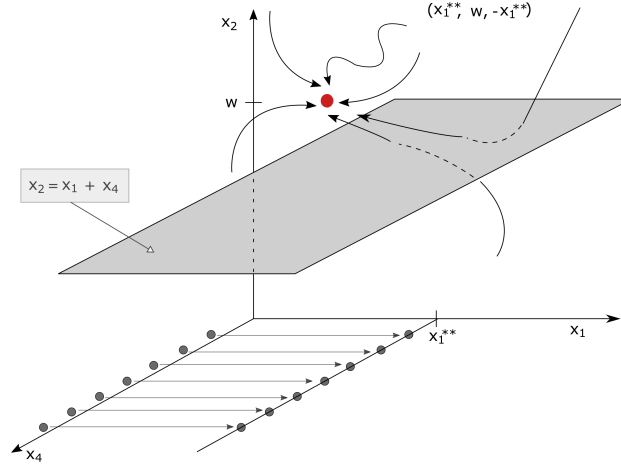


Figura 4-7: Diagrama explicativo del retrato de fase mostrado en la Fig.4-6. El diagrama acá presentado es una ilustración más clara de los fenómenos presentados en retrato de la Figura 4-6, con este se busca interpretar de una forma más sencilla los fenómenos descritos en la imagen anterior, es necesario tener en cuenta los puntos de equilibrio y estabilidad que se calcularon en la Sección 4.13.

4.16. Análisis de bifurcaciones no suaves para el modelo de la Sección 4.6

Finalmente, al modelo en cuestión se le realiza un análisis desde la teoría de los sistemas de Filippov [33] con el objetivo de observar las posibles bifurcaciones de tipo no suave que puede presentarse al variar los parámetros. Es pertinente tener en cuenta los preliminares teóricos expuestos en la Sección 3.10.

Consideremos entonces el sistema,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y \\ \dot{x}_2 &= (a+b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right) \end{aligned}$$

$$\dot{x}_4 = \begin{cases} rx_1 - \frac{c}{x_1} - \lambda Y - Lp_n x_2 & \text{si } x_2 < x_1 + x_4 \\ rx_1 - \frac{c}{x_1} - \lambda Y - Lp_h(x_1 + x_4) & \text{si } x_2 > x_1 + x_4 \end{cases} \quad (4-24)$$

Por lo tanto, tendremos,

- Para $x_2 < x_1 + x_4$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y \\ \dot{x}_2 = (a+b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right) \\ \dot{x}_4 = -\dot{x}_1 - Lp_n x_2 \end{cases}$$

- Para $x_2 > x_1 + x_4$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y \\ \dot{x}_2 = (a+b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right) \\ \dot{x}_4 = -\dot{x}_1 - Lp_h(x_1 + x_4) \end{cases}$$

donde la superficie de conmutación

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_4) \in \mathbb{R}^3 : H(x_1, x_2, x_4) = 0\}$$

donde $H(x_1, x_2, x_4) = x_4 + x_1 - x_2$

y así

$$\vec{\nabla} H(x_1, x_2, x_4) = (1, -1, 1).$$

Con el ánimo de encontrar las zonas de cruce y deslizamiento del modelo, con base en las Secciones 3.10 a 3.12, a continuación, se analizarán los productos escalares para cada campo vectorial del sistema definido en (4-24).

$$\begin{aligned} \langle \vec{\nabla} H, F_1 \rangle &= \left\langle (1, -1, 1), \left(-rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y, (a+b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right), -\dot{x}_1 - Lp_n x_2 \right) \right\rangle \\ &= -rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y - (a+b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right) - \dot{x}_1 - Lp_n x_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{= -(a+b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right) - Lp_n x_2} \quad (4-25)$$

Dado que los parámetros a , b , w , L , p_n y la variable x_2 son positivos, (ver Tabla 4-2), se cumple que $\langle \nabla H, F_1 \rangle < 0$. Ahora,

$$\begin{aligned} \langle \vec{\nabla} H, F_2 \rangle &= \left\langle (1, -1, 1), \left(-rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y, (a+b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right), -\dot{x}_1 - Lp_h(x_1 + x_4) \right) \right\rangle \\ &= -rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y - (a+b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right) - \dot{x}_1 - Lp_h(x_1 + x_4) \end{aligned}$$

$$\boxed{= -(a+b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right) - Lp_h(x_1 + x_4)} \quad (4-26)$$

Para los análisis siguientes se define

$$\sigma(x_1, x_2, x_4) = \langle \vec{\nabla} H, F_1 \rangle \langle \vec{\nabla} H, F_2 \rangle$$

- Si $\sigma(x_1, x_2, x_4) > 0 \rightarrow$ El sistema presenta cruce.
- Si $\sigma(x_1, x_2, x_4) < 0 \rightarrow$ El sistema presenta deslizamiento

4.16.1. Análisis para la zona de deslizamiento

A continuación, dados los resultados en (4-25) y en (4-26), se analiza el deslizamiento posible de los campos vectoriales sobre la superficie de conmutación.

Se inicia con el estudio de cada producto escalar. Dado que $\langle \vec{\nabla} H, F_1 \rangle < 0$ y

$$\langle \vec{\nabla} H, F_2 \rangle = - \left[(a + b) x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w} \right) + Lp_h (x_1 + x_4) \right]$$

para que halla deslizamiento el producto escalar $\langle \vec{\nabla} H, F_2 \rangle$ debe ser positivo, entonces,

$$\langle \vec{\nabla} H, F_2 \rangle > 0$$

$$- \left[(a + b) x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w} \right) + Lp_h (x_1 + x_4) \right] > 0$$

de donde,

$$Lp_h (x_1 + x_4) < - (a + b) x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w} \right)$$

por tanto

$$x_4 < - \frac{(a + b)}{Lp_h} x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w} \right) - x_1$$

como $x_2 = x_1 + x_4$ en Σ , se tiene,

$$1 < - \frac{(a + b)}{Lp_h} \left(1 - \frac{x_2}{w} \right) \Rightarrow x_2 > \left(1 + \frac{Lp_h}{(a + b)} \right) w$$

donde finalmente,

$$x_2 > \Psi w \quad \text{con} \quad \Psi = \left(1 + \frac{Lp_h}{(a + b)} \right)$$

Lo que indica que para que halla deslizamiento, la variable demanda (x_2) en el sistema, debe ser superior a la capacidad máxima (w), lo cual, en la realidad de éste mercado no es posible, pues x_2 está definida para $0 \leq x_2 \leq w$.

Debido a que el sistema no genera deslizamiento para las condiciones definidas del sistema, éste debe generar cruce. Nótese, que para valores de la variable x_2 superiores a la capacidad máxima w , el sistema si presenta deslizamiento.

En la Figura 4-8, se evidencia en donde el sistema parte de una condición inicial ubicada bajo la superficie de conmutación ($x_2 = x_1 + x_4$), para luego desarrollarse hasta alcanzarla y atravesarla.

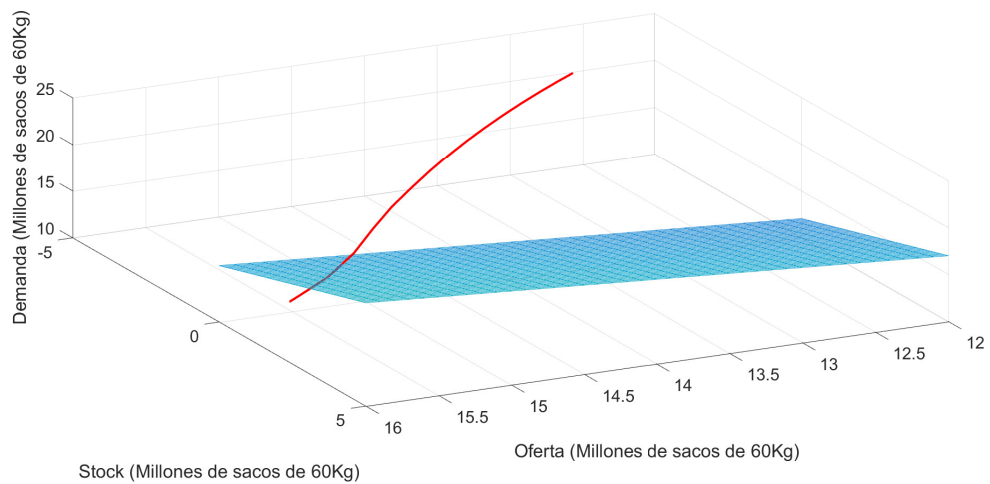


Figura 4-8: Análisis de la zona de cruce. En esta figura podemos observar la trayectoria del sistema tridimensional al partir de una condición inicial dada por debajo del plano de conmutación, el sistema inicia su evolución cruza la superficie de conmutación y luego continua en la siguiente región hasta alcanzar el punto de equilibrio estable, alcanzado en el valor de 20 millones de sacos para la variable demanda.

5 Construcción de un modelo del mercado económico del café: inversión variable en la oferta

En la Sección 4.6 del capítulo anterior, se presentó un modelo matemático en el cual el término de inversión para la oferta se considera constante. En éste capítulo, con base en los aportes de [64], quien a su vez referencia a [39], [40], [66] y [15], se propone un nuevo modelo que incluye las variables oferta y demanda descritas en el capítulo anterior, con la diferencia de que se toma la inversión como una función definida a tramos. Adicionalmente, se presenta el cálculo de los punto de equilibrio, su respectiva estabilidad, los retratos de fase y las bifurcaciones del sistema.

5.1. Modelo matemático con inversión variable en la oferta

A continuación se presenta el nuevo modelo del mercado del café con inversión variable en la oferta analizado en éste capítulo. Se debe tener en cuenta que el modelo acá presentado es dos dimensional conformado por las variables oferta y demanda. Aquí se deben tener en cuenta todas las características presentadas en el capítulo anterior para estas variables, desde la perspectiva del mercado económico del café Colombiano.

5.1.1. La ecuación de la oferta

La ecuación para la oferta está descrita por

$$\dot{x}_1 = -rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y_v(x_1, x_2) \quad x_1 \neq 0$$

donde $r \in \mathbb{R}^+$ corresponde a la tasa de descenso de la producción, $x_1 \in \mathbb{R}^+$ representa la oferta, $x_2 \in \mathbb{R}^+$ representa la demanda, $c \in \mathbb{R}^+$ la tasa de café importado, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ el factor de conversión para la inversión en la oferta y $Y_v(x_1, x_2)$ es una función $Y_v : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ representa la función de inversión para la oferta.

5.1.2. La ecuación de la demanda

La ecuación para la demanda está descrita por la expresión presentada en la Sección. 4.3.2

$$\dot{x}_2 = \rho x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right)$$

5.1.3. La ecuación de la inversión

La función de la inversión corresponde a

$$Y_v(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{si } R(x_1, x_2) < \alpha. \\ Y, & \text{si } R(x_1, x_2) > \alpha. \end{cases}$$

donde, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ es una constante positiva que denota el mínimo retorno sobre la inversión y $R(x_1, x_2)$ es una función $R : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dada por,

$$R := R(x_1, x_2) = \frac{LF(P(x_1, x_2) - V_C) - LC}{LC}$$

donde $P(x_1, x_2)$ es una función $P : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ y corresponde al costo real de producción, dado por

$$P(x_1, x_2) = d + f \exp \left[\frac{-(x_1 - x_2)}{K} \right].$$

Donde $d, f, LF, LC, V_C \in \mathbb{R}^+$ son parámetros definidos en la Tabla 5-1.

Símbolo	Parámetro
V_C	Costos variables
LC	Costos de ventas
LF	Factor de utilidad
α, d, f, K, Y	Constantes ecuación de costo de la producción

Tabla 5-1: Nomenclatura del modelo matemático con inversión variable en la oferta.

Tomados a partir de [64].

Con base a la función definida para la inversión, se debe tener en cuenta que ésta es formulada de tal forma que para un retorno mínimo se genere inversión sobre la oferta del café. Dado un retorno mínimo sobre la inversión del 5%, se debe invertir un valor Y sobre la oferta.

5.2. Regiones para el modelo de la Sección 5.1

A partir de la definición de las ecuaciones del modelo, podemos definir dos regiones a partir de la función de inversión en la oferta definida en la Eq 5.1.3. Las regiones S_1 y S_2 se definen

a continuación,

$$S_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : R(x_1, x_2) < \alpha\}$$

$$S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : R(x_1, x_2) > \alpha\},$$

la superficie de conmutación se define como sigue,

$$\Sigma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : H(x_1, x_2) = 0\}$$

donde $H(x_1, x_2) = R(x_1, x_2) - \alpha = 0$.

A continuación, se simplifica la ecuación definida por $R(x_1, x_2) = \alpha$, a partir de las ecuaciones definidas en la Sección 5.1.3, de donde al sustituir y reducir, se tiene,

$$\exp \left[\frac{-(x_1 - x_2)}{K} \right] = \frac{1}{f} \underbrace{\left(V_C + \frac{LC}{LF}(1 + \alpha) - d \right)}_M$$

para

$$V_C + \frac{LC}{LF}(1 + \alpha) > d \quad \text{y} \quad M > 0$$

donde finalmente se obtiene

$$x_2 = x_1 + \underbrace{K \ln(M)}_N$$

$$\boxed{x_2 = x_1 + N} \tag{5-1}$$

Inicialmente, se considera para el análisis del modelo una aproximación de $N = 0$ para la superficie de conmutación expresada en la Eq.(5-1). Posteriormente, en la Sección 5.7.1 se discuten otros escenarios al variar éste parámetro N de la superficie de conmutación.

5.3. Comportamiento dinámico del modelo de la Sección 5.1

En la Figura 5-1 se evidencia que inicialmente al incorporar la inversión como una función definida a tramos, el comportamiento de la oferta en el modelo 5.1 se muestra decreciente, esto debido a la ausencia de inversión, es decir, bajo un retorno inferior al valor de α . Sin embargo, posteriormente se evidencia un cambio en la dinámica de la oferta al volverse creciente, esto gracias a la influencia de la inversión positiva sobre la variable.

Se debe tener en cuenta que para el caso de la demanda el comportamiento dinámico es similar al encontrado para el modelo 4.6, como se muestra en la Figura. 4-3.

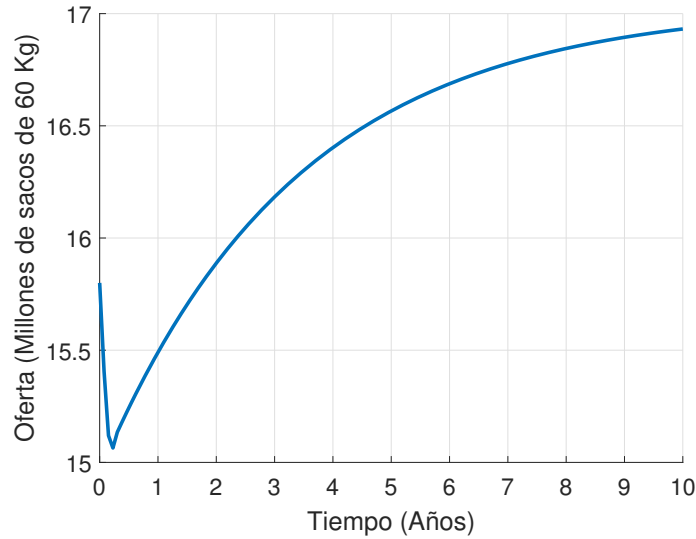


Figura 5-1: Dinámica en el tiempo de la oferta con inversión variable. En la presente figura se evidencia que la oferta adquiere al inicio un comportamiento decreciente, sin embargo, esto cambia rápidamente ya que el valor de la inversión adopta valores que permiten el mejoramiento de las condiciones para la producción de café.

5.4. Cálculos de los puntos de equilibrio para el modelo expuesto en la Sección 5.1

De forma análoga a la Sección 4.13, se calculan los puntos de equilibrio para el modelo con inversión variable en la oferta, descrito en la Sección 5.1.

Para ello, se considera el modelo,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} F_1 & \text{si } R(x_1, x_2) < \alpha \\ F_2 & \text{si } R(x_1, x_2) > \alpha \end{cases} \quad (5-2)$$

donde,

$$F_1 = \begin{pmatrix} -rx_1 + \frac{c}{x_1} \\ (a+b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right) \end{pmatrix} \quad (5-3)$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} -rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y \\ (a+b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right) \end{pmatrix} \quad (5-4)$$

- **Caso 1:** Para $R(x_1, x_2) < \alpha$

Los puntos de equilibrio se encuentran cuando $\dot{x}_1 = 0$ y $\dot{x}_2 = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} -rx_1 + \frac{c}{x_1} &= 0 \\ (a+b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (5-5)$$

de donde,

$$x_1^* = \sqrt{\frac{c}{r}}, \quad x_2^* = 0, \quad x_2^{**} = w$$

Nótese que dado que la variable oferta esta definida en los reales positivos, no se toma en cuenta la raíz negativa de la Eq. (5-5).

Así, los puntos de equilibrio encontrados para $R(x_1, x_2) < \alpha$ son:

$$P_1 = (x_1^*, x_2^*) = \left(\sqrt{\frac{c}{r}}, 0\right) = (0.6258, 0) \quad (5-6)$$

$$P_2 = (x_1^*, x_2^{**}) = \left(\sqrt{\frac{c}{r}}, w\right) = (0.6258, 20) \quad (5-7)$$

- **Caso 2:** Para $R(x_1, x_2) > \alpha$

Los puntos de equilibrio para ésta región son iguales a los calculados para x_1 y x_2 del Sistema 4.6, expuestos en la Sección 4.13, específicamente, a los resultados mostrados en las Eqs. (4-16), (4-17) y (4-18).

5.5. Estabilidad local del modelo expuesto en la Sección 5.1

Considerando el sistema definido en (5-2), (5-3) y (5-4), se pretende establecer la estabilidad local de los puntos de equilibrio encontrados en (5-6) y (5-7).

- **Caso I:** Para $R(x_1, x_2) < \alpha$

La matriz jacobiana viene dada por,

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

donde F y G están definidas en las Eqs.(5-8) y (5-9),

$$F(x_1, x_2) = -rx_1 + \frac{c}{x_1}, \quad x_1 \neq 0 \quad (5-8)$$

$$G(x_1, x_2) = (a+b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right), \quad w \neq 0 \quad (5-9)$$

por lo tanto,

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -r - \frac{c}{x_1^2} & 0 \\ 0 & (a+b) - \frac{2(a+b)x_2}{w} \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios son

$$\lambda_1 = -r - \frac{c}{x_1^2}$$

$$\lambda_2 = (a+b) - \frac{2(a+b)x_2}{w}.$$

- **Para P_1 :** $x_1^* = \sqrt{\frac{c}{r}}$ y $x_2^* = 0$, se obtiene,

$$\lambda_1 = -2r \quad (5-10)$$

$$\lambda_2 = (a+b). \quad (5-11)$$

En la Eq.(5-10), con $r > 0$ se tiene $\lambda_1 < 0$ y de la Eq.(5-11), con $a, b > 0$ se tiene que $\lambda_2 > 0$.

Así, el punto de equilibrio definido en (5-6), es un punto de silla.

- **Para P_2 :** $x_1^* = \sqrt{\frac{c}{r}}$ y $x_2^* = w$, se obtiene,

$$\lambda_1 = -2r \quad (5-12)$$

$$\lambda_2 = -(a+b). \quad (5-13)$$

Para la Eq.(5-12), se cumple que $\lambda_1 < 0$ pues $r > 0$ y para la Eq.(5-13) $\lambda_2 < 0$ para $a, b > 0$. Por lo tanto, el punto de equilibrio definido en (5-7), es estable.

- **Caso II:** Para $R(x_1, x_2) > \alpha$ la estabilidad de los puntos de equilibrio coincide con los cálculos mostrados en la Sección 4.14.

5.6. Retrato de fase del modelo de la Sección 5.1

A continuación se exponen dos retratos de fase para el modelo expuesto en la Sección 5.1. El primero, mostrado en la Figura 5-2 se genera para una condición inicial dada para el modelo, es decir, se ilustra una trayectoria específica del sistema. El segundo retrato de fase expuesto en la Figura 5-3 incluye la superficie de conmutación y se genera a partir de un conjunto arbitrario de condiciones iniciales, en el cual se observa el flujo del sistema.

En la Figura 5-2 se evidencia que dada la condición inicial para el mercado económico del café, el sistema evoluciona de tal manera que cruza la superficie de conmutación y va hacia el punto de equilibrio de la zona siguiente, éste punto de equilibrio se alcanza en el valor de la capacidad máxima de demanda w .

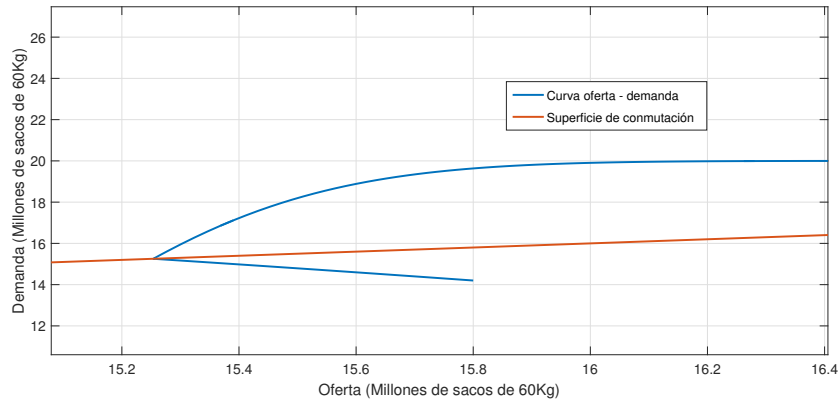


Figura 5-2: Diagrama de fase de las variables oferta y demanda del modelo de la Sección 5.1. La simulación se realizó con una condición inicial del sistema de (15.8, 14.2), valor a partir del cual el sistema evolucionó hasta alcanzar el punto de equilibrio, equivalente al valor de la capacidad máxima de demanda que corresponde a 20 millones de sacos de 60 Kg.

En la Figura 5-3 podemos observar un retrato de fase para el modelo 5.1, usando una superficie de conmutación con intercepto en el origen. En su elaboración se usó un conjunto de condiciones iniciales arbitrarias las cuales permiten analizar el flujo del sistema. En ésta figura se logra ver como todas las trayectorias sin importar su condición inicial buscan el punto de equilibrio estable, ya sea que tengan o no que cruzar la superficie de conmutación. En la Sección 5.7.1 se muestran retratos de fase para usando diferentes valores de N es decir, diferentes interceptos para la superficie de conmutación.

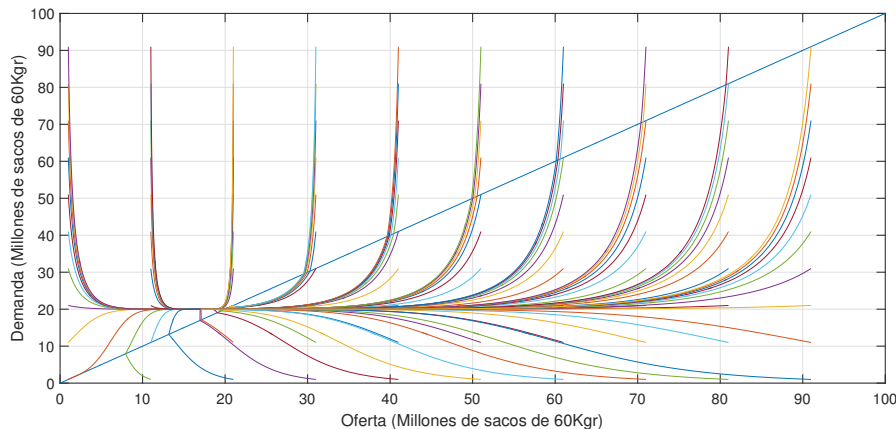


Figura 5-3: Retrato de fase de las variables oferta y demanda del modelo de la Sección 5.1. Con estos retratos se puede evidenciar el comportamiento que adoptan las diferentes trayectorias del sistema a partir de un conjunto arbitrario de condiciones iniciales. Esto permite observar la dinámica general que presenta el modelo.

5.7. Análisis de bifurcaciones no suaves para el modelo de la Sección 5.1

A continuación, se analizará el modelo de la Sección 5.1, desde los sistemas de Filippov. Para lo cual, se tendrán especialmente en cuenta los preliminares teóricos expuestos en la Sección 3.10.

Partiendo de lo definido en el modelo expuesto en la Sección 5.1, se tienen las siguientes regiones:

- **Región S_1**

En esta región se tiene que,

$$\dot{x} = F_1(x),$$

es decir

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -rx_1 + \frac{c}{x_1} \\ \dot{x}_2 = \rho x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right) \end{cases}$$

- **Región S_2**

En esta región se tiene que

$$\dot{x} = F_2(x),$$

es decir

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y \\ \dot{x}_2 = \rho x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right) \end{cases}$$

La superficie de conmutación es

$$\Sigma : \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : H(x_1, x_2) = 0\}$$

donde

$$H(x_1, x_2) = x_2 - x_1 - N$$

y así,

$$\vec{\nabla} H = (-1, 1).$$

- **Zonas de cruce y deslizamiento**

A continuación se analizan los respectivos productos escalares para el modelo descrito en la Sección 5.1, con el fin de determinar las zonas de cruce y deslizamiento del sistema.

$$\text{Si } \langle \vec{\nabla} H, F_1 \rangle \langle \vec{\nabla} H, F_2 \rangle < 0 \rightarrow \text{Deslizamiento}$$

$$\text{Si } \langle \vec{\nabla} H, F_1 \rangle \langle \vec{\nabla} H, F_2 \rangle > 0 \rightarrow \text{Cruce}$$

1. Por una parte, se tiene

$$\langle \vec{\nabla} H, F_1 \rangle = \left((-1, 1), \left(-rx_1 + \frac{c}{x_1}, \rho x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w} \right) \right) \right) = rx_1 - \frac{c}{x_1} + \rho x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w} \right)$$

2. Por otra parte, se tiene

$$\langle \vec{\nabla} H, F_2 \rangle = \left((-1, 1), \left(-rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y, \rho x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w} \right) \right) \right) = rx_1 - \frac{c}{x_1} - \lambda Y + \rho x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w} \right)$$

Hay cruce si,

$$\langle \vec{\nabla} H, F_1 \rangle \langle \vec{\nabla} H, F_2 \rangle > 0$$

$$\begin{aligned} & \left(rx_1 - \frac{c}{x_1} + \rho x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w} \right) \right) \left(rx_1 - \frac{c}{x_1} - \lambda Y + \rho x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w} \right) \right) > 0 \\ & \underbrace{\left(rx_1 - \frac{c}{x_1} + \rho x_2 - \rho \frac{x_2^2}{w} \right)}_I \underbrace{\left(rx_1 - \frac{c}{x_1} - \lambda Y + \rho x_2 - \rho \frac{x_2^2}{w} \right)}_{II} > 0 \quad (5-14) \end{aligned}$$

Para solucionar la desigualdad (5-14) N se considera fijo e igual a 0, así la superficie de conmutación está dada por $x_2 = x_1$. Por lo tanto, para que haya cruce pueden darse dos casos:

a) **Caso 1:** $I > 0$ y $II > 0$

- I es positiva cuando $x_1 \in (0.21, 22.58)$.
- II es positiva cuando $x_1 \in (2.18, 20.43)$.
- Así para que $(I)(II) > 0$: $x_1 \in (2.18, 20.43)$.

b) **Caso 2:** $I < 0$ y $II < 0$

- I es negativa cuando $x_1 \in (0, 0.21) \cup (22.58, \infty)$.
- II es negativa cuando $x_1 \in (0, 2.18) \cup (20.43, \infty)$.
- Así para que $(I)(II) > 0$: $x_1 \in (0, 0.21) \cup (22.58, \infty)$.

A partir de lo anterior es posible afirmar que las zonas de cruce del sistema son:

$$x_1 \in (0, 0.21) \cup (2.18, 20.43) \cup (22.58, \infty).$$

Con base en los resultados anteriores se tiene que las zonas de deslizamiento vienen dadas por:

$$x_1 \in [0.21, 2.18] \cup [20.43, 22.58]$$

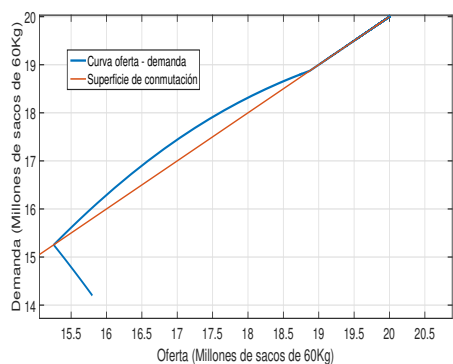
5.7.1. Bifurcaciones

A continuación se muestran algunas bifurcaciones del sistema al hacer variar el parámetro inversión o el parámetro N correspondiente a el intercepto de la superficie de conmutación.

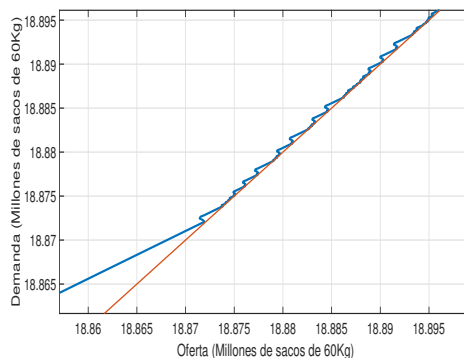
Variación de la inversión

Los resultados de la Sección.5.7 son influenciados en gran medida por el efecto que tiene la inversión sobre la oferta y la demanda. Para lograr observarlo se realizan múltiples simulaciones cambiando el valor de dicha variable. Los resultados se muestran en la Figura 5-4, en donde se ve que el punto de equilibrio se traslada hacia la superficie de conmutación a medida que la inversión aumenta hasta que para valores muy grandes se genera deslizamiento.

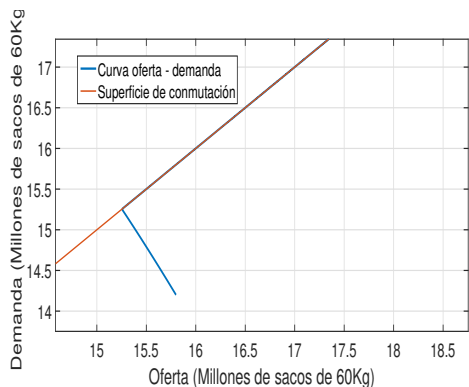
En la Figura 5-4 se observa que para un valor de la inversión de 4000 millones de dólares, el sistema cruza la superficie de conmutación, presenta inicialmente un desarrollo en la zona superior a ésta y finalmente desliza sobre la misma. Adicionalmente, para una inversión de 6000 millones de dólares, se observa que el sistema evoluciona hasta alcanzar la superficie de conmutación y deslizar sobre ella. Por lo tanto a mayores valores de inversión, el sistema presenta deslizamiento con mayor rapidez.



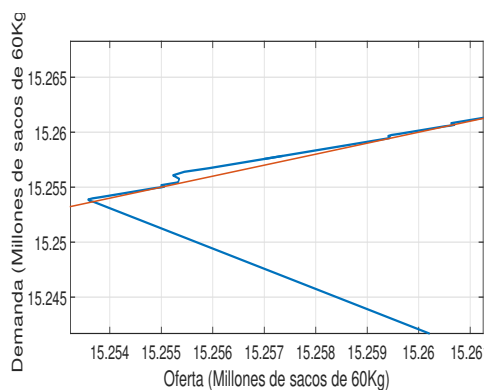
(a) Inversión(Y)=4000 millones de dólares



(b) Inversión(Y)=4000 millones de dólares con acercamiento



(c) Inversión(Y)=6000 millones de dólares



(d) Inversión(Y)=6000 millones de dólares con acercamiento

Figura 5-4: Variación del parámetro Y : la inversión. En la figura (a) y (b) se aprecia que para un valor de la inversión de 4000 millones de dólares el sistema parte de una condición inicial, evoluciona hasta cruzar la superficie de conmutación en donde continua su desarrollo acercándose nuevamente a la superficie de conmutación para deslizar sobre ella. En la Figura (c) y (d) se observa que el sistema evoluciona desde su condición inicial hasta encontrarse con la superficie de conmutación y presentar deslizamiento sobre la misma.

Variación del intercepto de la superficie de conmutación (N)

A continuación, se analiza la situación en la cual el mercado puede tomar una dirección que no permita que N pueda aproximarse a 0. Para ello se realizan múltiples simulaciones en MATLAB[®] para analizar el comportamiento del sistema bajo diversos valores de N . Los resultados se muestran en la Figura 5-5.

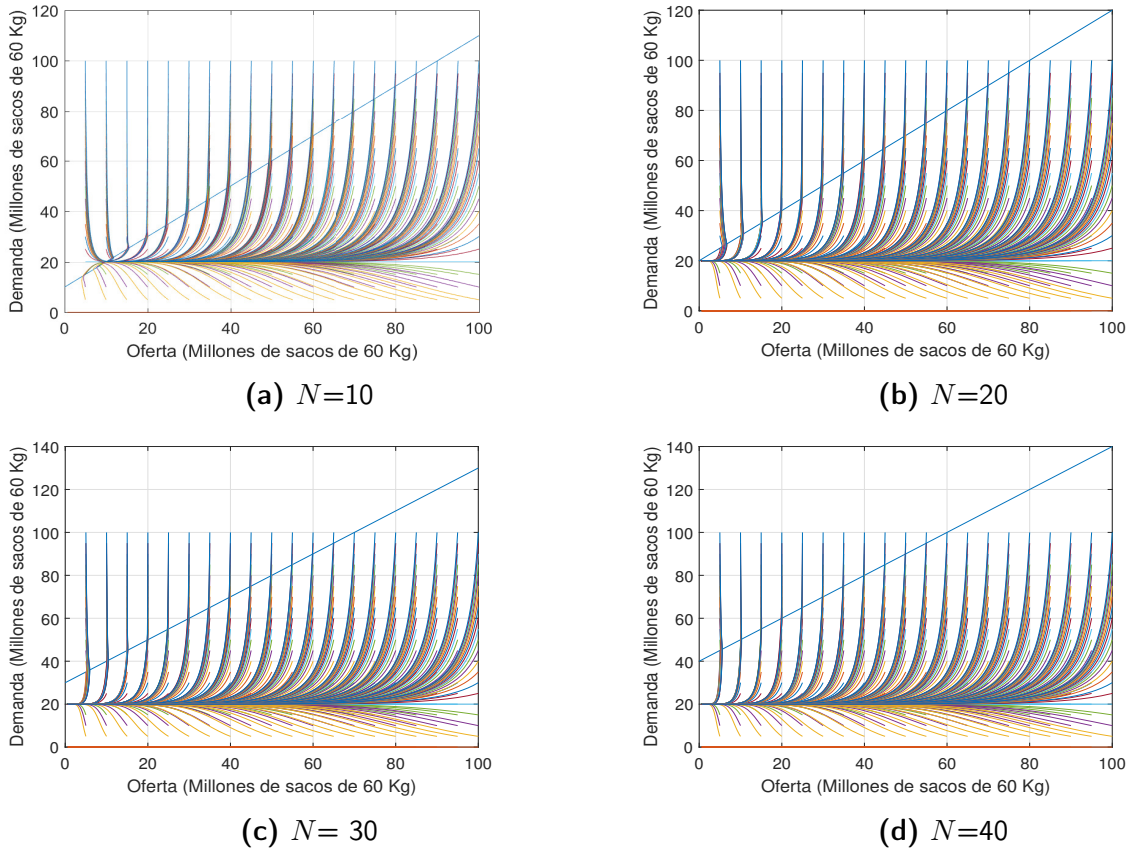


Figura 5-5: Variación del intercepto (N) de la superficie de conmutación. En la Figura se observa que la variación del intercepto de la superficie de conmutación puede generar que el punto de equilibrio se ubique encima, sobre o debajo de la superficie de conmutación, situaciones que resultan en sistemas que deben ser analizados bajo diferentes consideraciones. Las anteriores variaciones para el parámetro N se realizaron bajo la consideración de $Y = 2000$ en el sistema.

6 Incorporación del precio como variable estocástica a un modelo dinámico: una primera exploración

En el Capítulo 4, en la Sección 4.6 se propuso un modelo matemático para las variables oferta, demanda y *stock* del mercado económico del café colombiano. Dicha representación excluía el precio como variable de estado, sin embargo, desde el análisis del sector cafetero se encuentra su importancia [38].

En el estudio de la economía moderna se han estado desarrollando modelos matemáticos que permitan estudiar el comportamiento y la variación de los precios de los servicios y productos ofertados en un mercado. Las matemáticas financieras son un área emergente, las cuales se pueden aplicar para cuantificar algunas actividades que tradicionalmente no eran medibles. Estos incluyen, entre otros, oferta, demanda y precios de los productos.

En consecuencia de lo anterior, en el presente capítulo se realiza una primera exploración en la implementación del precio como variable estocástica y sus posibles efectos sobre las variables del modelo anteriormente estudiado; los análisis presentados fueron obtenidos mediante la simulación numérica por medio de la herramienta computacional MATLAB[®].

6.1. Precio del café

A continuación, se introduce el precio en el contexto del mercado del café y sus principales características. Posteriormente se exponen algunos datos históricos de esta variable, con el fin de evidenciar su comportamiento en el tiempo y argumentar la importancia de su inclusión en el modelo.

El café al ser comercializado como *commodity*, se enfrenta a un mercado de altas volatilidades, en donde participan diferentes actores y políticas económicas que están en constante interacción y cambio, lo que genera que aspectos como el precio sean dinámicos y difíciles de predecir.

Debido a los mecanismos de producción y comercialización del café, la OIC presenta diferentes tipos de precios reconocidos en el mercado mundial, según [41] se reconocen 4 tipos:

- **Precios físicos** (*physicals*): corresponde al precio al que se transa el café verde o café físico.
- **Precios indicativos** (*indicators*): se calculan para cada grupo de café. La OIC determina precios para cuatro grupos de café, los arábigos suaves colombianos, arábigos suaves brasileños, arábigos naturales y robustos. La misma organización publica diariamente un *precio indicativo compuesto* que combina los cuatro grupos aplicando ponderaciones de participación en el mercado[38].
- **Precios futuros**: indican las proyecciones de precios futuros para calidades de café estándar, reflejan un estimativo de la disponibilidad y demanda futura del café. El precio futuro para la variedad arábica se calcula en la bolsa de Nueva York y para la variedad robusta en Londres.
- **Precios diferenciales**: este constituye un sistema que permite asociar dos tipos de precios el físico y el futuro.

La OIC, también maneja precios tipo "*spot*", es decir al contado para cafés de disponibilidad inmediata.

Se debe tener en cuenta que los precios de operación comercial bajo los cuales actúa el café, son precios extranjeros, pues estos son transados en la bolsa de Nueva York a diario, el precio que desde allí se determine, sirve también para fijar los umbrales de ventas al interior del país.

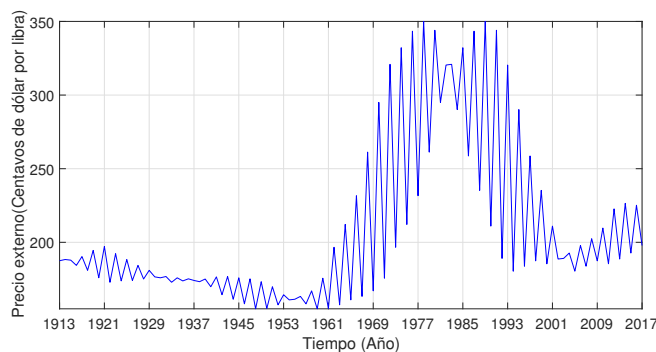


Figura 6-1: Comportamiento del precio externo del café.

Como se mencionó anteriormente el precio del café es muy inestable, lo cual se evidencia en los datos históricos reportados por la FNC y mostrados en la Figura 6-1. En donde se puede observar que aproximadamente a partir de 1955 la variabilidad del precio es alta, esto se debe principalmente al comportamiento de la oferta, la cual se ve afectada por eventos climatológicos recurrentes en el tiempo tales como sequías, heladas, entre otros los cuales afectan directamente la capacidad de producción interna. Dado que la demanda mundial es

más estable en el tiempo, el precio cambia generalmente según la cantidad ofertada de café [44].

Cuando existe poca oferta, el precio aumenta debido a que algunos demandantes están dispuestos a pagar más que otros, para adquirir el producto. Sin embargo, éste incremento se da hasta un punto en el cual los productores no logran vender la cantidad que esperan, lo que los lleva a disminuir el precio, generando aumento de la demanda ya que los compradores esperan beneficiarse de los bajos precios, esto hasta que nuevamente la demanda supera al oferta y continúa el ciclo [50].

En la literatura hay variedad de trabajos académicos que han intentado desde la estadística modelar algunos de los tipos de precios del café. En [47], realizan estimaciones para la corrección de errores de los precios *spot* para diferentes tipos de café. Por su parte, [7] expone una revisión de la literatura en cuanto al panorama de determinación y estimación de precios.

6.2. Modelo con inclusión del precio del mercado económico del café

Dado que los modelos matemáticos permiten estudiar la relación entre las cantidades vendidas y sus precios (a través de datos históricos o de investigaciones comerciales), por medio de técnicas estadísticas o funciones matemáticas que relacionan ambas variables, en esta sección se presenta un modelo matemático que incluye una perturbación estocástica al comportamiento en el tiempo del precio. Con ello se pretende realizar un análisis exploratorio de como influye éste efecto en la dinámica del sistema además de tener una mejor aproximación y entendimiento de los efectos que posee el precio sobre variables como la oferta, la demanda, el *stock* y las ventas.

Con la finalidad de realizar un primer acercamiento a este modelo, se supone que la perturbación estocástica implementada sigue una distribución tipo normal estándar. Sin embargo, cabe mencionar que dicha distribución podría ser de otro tipo.

A continuación se muestra el modelo matemático propuesto para la primera aproximación de la implementación del precio como variable aleatoria.

6.2.1. Ecuación de oferta

La expresión que describe la oferta es igual a la usada en el modelo presentado en la Sección 4.6 y presentada acá nuevamente como la Eq.(6-1).

$$\dot{x}_1 = -rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y \quad (6-1)$$

6.2.2. Ecuación de demanda

Dado que la decisión de compra de los demandantes esta basada en gran medida en el valor del producto, en el siguiente modelo se tiene en cuenta lo que se denomina la elasticidad. Esto se logra por medio de la incorporación del efecto que tiene el precio sobre la demanda. Con ello se obtiene la expresión mostrada en el Eq.(6-2).

$$\dot{x}_2 = aA_1(x_3)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w_1}\right) + bA_2(x_3)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w_2}\right), \quad w_1, w_2 \neq 0 \quad (6-2)$$

donde

$$A_1(x_3) = \left(\frac{x_3}{P_1}\right)^\epsilon$$

$$A_2(x_3) = \left(\frac{x_3}{P_2}\right)^\epsilon$$

donde $x_3 \in \mathbb{R}$ corresponde al precio, A_1 y A_2 son funciones definidas en \mathbb{R} que representan las funciones de efectos del precio sobre la demanda, $P_1 \in \mathbb{R}^+$ y $P_2 \in \mathbb{R}^+$ corresponden a los precios base del periodo anterior para la demanda nacional e internacional respectivamente.

6.2.3. Ecuación del precio

El análisis para establecer la ecuación que modela el precio se inicia al asumir que éste posee una variación constante y creciente, como se muestra en la Eq.(6-3).

$$\dot{x}_3 = K, \quad \text{con} \quad x_3(t_0) = x_3^0 \quad (6-3)$$

donde $K \in \mathbb{R}$ tasa de variación del precio.

La solución de la Eq.(6-3) viene dada por

$$x_3(t) = x_3^0 + K(t - t_0)$$

6.2.4. Ecuación del *stock*

Las ecuaciones para el *stock* y las ventas coinciden con las utilizadas en los capítulos anteriores, está especificada en la Eq. (4-5).

Finalmente, el modelo económico del mercado del café que incluye al precio como una variable aleatoria se muestra en la Tabla 6-1. Los parámetros usados se encuentran en las Tablas 4-2 y 6-2.

Tabla 6-1: Modelo matemático con el precio como variable de estado.

Ecuación de oferta	$\dot{x}_1 = -rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y$ <p>con $x_1 \neq 0$</p>
Ecuación de demanda	$\dot{x}_2 = aA_1(x_3)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right) + bA_2(x_3)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right)$
Ecuación del precio	$x_3(t) = x_3^0 + K(t - t_0)$
Ecuación del stock	<p>- si $x_2 < x_1 + x_4$:</p> $\dot{x}_4 = -\dot{x}_1 - Lp_n x_2$ <p>- si $x_2 > x_1 + x_4$:</p> $\dot{x}_4 = -\dot{x}_1 - Lp_h(x_1 + x_4)$
Ecuación de ventas	<p>- si $x_2 < x_1 + x_4$:</p> $x_5 = p_n x_2$ <p>- si $x_2 > x_1 + x_4$:</p> $x_5 = p_h(x_1 + x_4)$

Tabla 6-2: Parámetros para el modelo con el precio como variable estocástica

Parámetro	Símbolo	Valor estimado	Unidad
Variación porcentual anual del precio: Es la variación porcentual del precio anual del café en un intervalo de tiempo.	K	0.0174	USD cent/lb
Elasticidad del precio: Expresa la sensibilidad del precio.	ϵ	$18.304 \cdot 10^{-5}$	USD cent/saco de 60 Kg
Desviación estándar del precio: Expresa el margen de variación del precio del café tranzado en la bolsa, llegando a un valor máximo y mínimo de este.	σ	$\frac{2134.59 \text{ (varianza)}}{46.2 \text{ (desv estándar)}}$	USD cent/lb
Precio base del periodo anterior: Es el precio medio del período anterior (año cafetero).	$P_{1,2}$	119.4	USD cent/lb

6.3. Enfoque de la exploración

Dado el sistema de ecuaciones expuesto en la Tabla 6-1 se busca solucionarlo mediante simulación numérica en el programa MATLAB[®], utilizando el método Runge-Kutta de paso fijo cuyo programa se presenta en el Anexo 2. Así el sistema de ecuaciones diferenciales considerado es:

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = g_1 \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \hat{x}_3^{(n)}, x_4^{(n)} \right) \\ x_2^{(n+1)} = g_2 \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \hat{x}_3^{(n)}, x_4^{(n)} \right) \\ x_3^{(n+1)} = g_3 \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \hat{x}_3^{(n)}, x_4^{(n)} \right) \\ x_4^{(n+1)} = g_4 \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \hat{x}_3^{(n)}, x_4^{(n)} \right) \end{cases}$$

Por medio de ésta simulación se pretende determinar si una perturbación aleatoria en la variable x_3 arroja comportamientos cualitativamente diferentes en el sistema en comparación a los ya obtenidos.

Para ello en cada paso n de la aproximación numérica, se tiene

$$\hat{x}_3^{(n)} = x_3^{(n)} + \delta_n$$

donde δ_n es una realización de la variable aleatoria X que sigue una cierta distribución f_X con una esperanza $E[X] = \mu = 0$ y una varianza $Var(X) = \sigma^2 > 0$. En el análisis se prueban diferentes distribuciones f_X con diferentes valores de σ^2 .

6.4. Simulaciones numéricas del modelo: comportamiento de las variables

A continuación se muestran los resultados de la implementación en MATLAB[®] del modelo anteriormente expuesto. El código a partir del cual se obtuvieron los resultados se muestra en el Anexo 2.

6.4.1. Comportamiento en el tiempo del precio como variable aleatoria

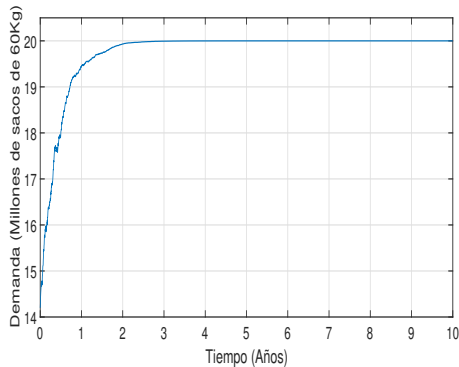
Mediante la herramienta computacional MATLAB[®] se usan generadores de números aleatorios basados en diferentes distribuciones para simular el precio en el tiempo. Los generadores con distribución normal y uniforme, se implementaron usando diferentes desviaciones estándar para observar el efecto que tienen en el comportamiento del precio. En los resultados mostrados en la Figura 6-2, se evidencia que para mayores desviaciones estándar, el precio adopta valores en un rango más amplio a lo largo del tiempo sin importar el tipo de distribución que se implemente.

6.4.2. Comportamiento en el tiempo de la demanda bajo la influencia del precio como variable aleatoria

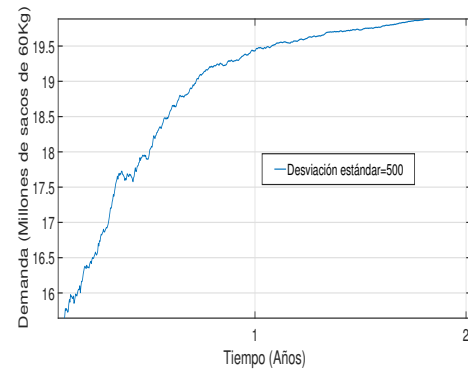
La ecuación diferencial para la demanda (x_2), esta influenciada por el efecto del precio mediante, las funciones A_1 y A_2 enunciadas en la Eq (6-2), sin embargo, como dichas funciones dependen de la elasticidad del precio, este valor al ser muy cercano a cero, estas funciones no tienen ningún efecto sobre la misma. Conservando el mismo comportamiento ya mostrado en el modelo presentado en el capítulo 4, es decir el comportamiento de dicha variable se vuelve independiente del precio. Lo que también conlleva a que la variable *stock*, permanezca con el mismo comportamiento anteriormente mostrado.

Este fenómeno es explicado debido, a la inelasticidad que presenta el precio en este mercado, pues toda la producción de café verde que se produce año a año es vendido en su totalidad afrontando las diferentes dinámicas aleatorias que presente el precio por efectos de su cotización en la bolsa de Nueva York, cumpliendo con la demanda.

En la Figura 6-3, se evidencia como para un valor de elasticidad próximo a 1 y una alta desviación estándar σ ($\sigma \approx 500$), el carácter estocástico del precio afecta el comportamiento de la demanda, pues a pesar de continuar mostrando la misma tendencia que en el modelo analizado en capítulos anteriores, presenta una dinámica aleatoria leve en su trayectoria.



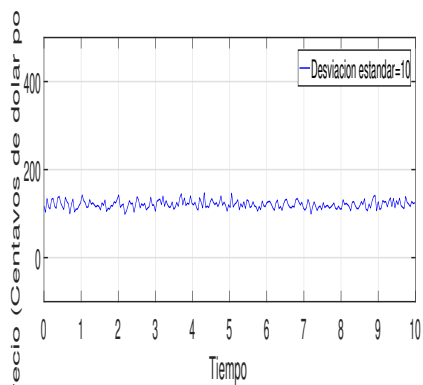
(a) Comportamiento de la demanda en el tiempo



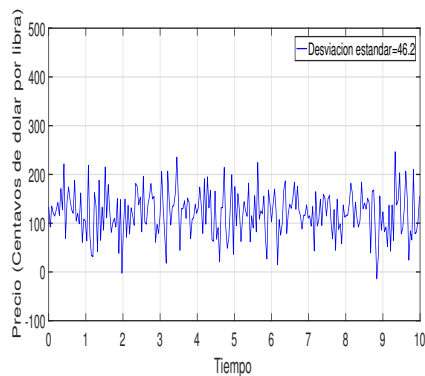
(b) Comportamiento de la demanda en el tiempo con acercamiento

Figura 6-3: Dinámica de la demanda en el tiempo teniendo en cuenta el efecto del precio como variable aleatoria. En la figura (a) se muestra el comportamiento del precio en el tiempo en donde se evidencia una tendencia clara pero con presencia de aleatoriedad debido al parámetro ϵ aumentado y en (b) se muestra un acercamiento de la figura (a) para observar mejor la variabilidad de los datos.

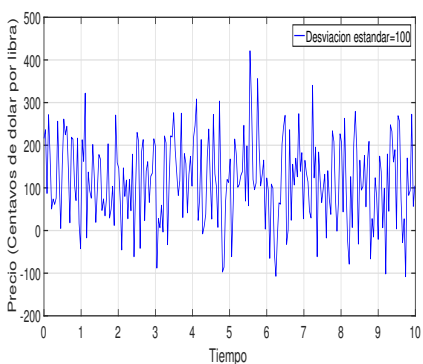
6 Incorporación del precio como variable estocástica a un modelo dinámico: una primera exploración



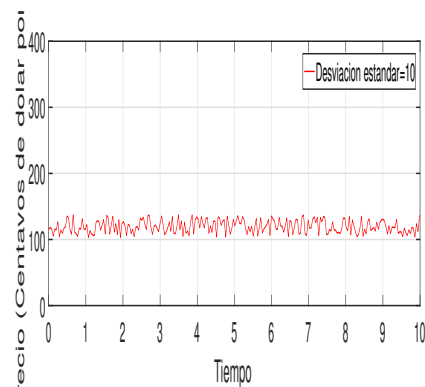
(a) Distribución normal con desviación estándar de 10.



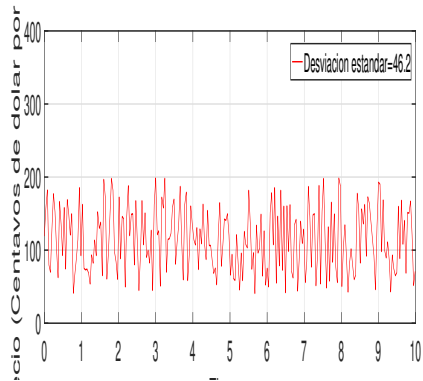
(b) Distribución normal con desviación estándar de 46.2.



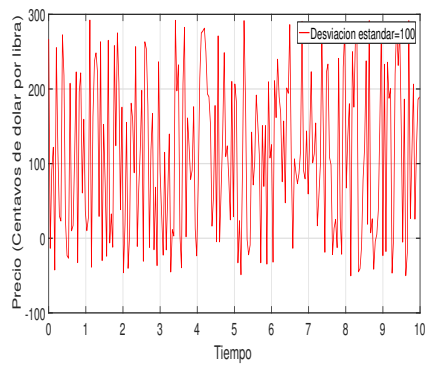
(c) Distribución normal con desviación estándar de 100.



(d) Distribución uniforme con desviación estándar de 10.



(e) Distribución uniforme con desviación estándar de 46.2.



(f) Distribución uniforme con desviación estándar de 100.

Figura 6-2: Dinámica del precio en el tiempo usando diferentes distribuciones. En las Figuras (a),(b) y (c) se muestra el comportamiento del precio al usar la distribución normal para generar valores del precio en el tiempo bajo diferentes desviaciones estándar, en las Figuras (d),(e) y (f) se muestra el comportamiento del precio al usar la distribución uniforme para generar valores del precio en el tiempo bajo diferentes desviaciones estándar.

7 Conclusiones

En este capítulo se expone una recopilación de los principales resultados de esta tesis de maestría, al igual que algunas discusiones y recomendaciones en investigaciones futuras.

En el Capítulo 4 se presenta una revisión detallada de las principales variables que afectan el mercado económico del café colombiano, así mismo se expone literatura de este sector. Esto con el propósito de tener en cuenta las características más relevantes del mercado en el modelo tridimensional posteriormente planteado, el cual incluye las variables: oferta, demanda y *stock*.

Por medio de la solución del modelo se realizaron diferentes análisis para cada una de las variables. Para la oferta (x_1), se observa que la producción representa un componente con gran influencia sobre el mercado, ya que la capacidad instalada interna adquiere un comportamiento decreciente en el tiempo, lo que indica que en un tiempo finito la oferta tiende a desaparecer debido a cuestiones de mantenimiento y falta de inversión. Debido a esto en la ecuación diferencial que describe la oferta, se incorpora un término lineal correspondiente a una inversión constante, esto con la finalidad de que la dinámica de la oferta cambie su comportamiento decreciente por uno creciente.

Por otro lado, al estudiar la demanda para el sector cafetero colombiano se encuentra que esta variable es gobernada por la demanda de carácter internacional y que permanece en aumento hasta su capacidad máxima dada por el parámetro w , lo que conlleva a que se comporte como una ecuación diferencial del tipo logística. Finalmente, para la variable *stock* se plantea una ecuación definida a tramos, en la cual se observa un comportamiento decreciente explicado por las ventas efectivas en tiempo real, y ventas futuras que se realizan a cosechas en proceso y cosechas futuras.

Así, el modelo planteado en el Capítulo 4 es de tipo no lineal, acoplado y no suave, pues la ecuación diferencial planteada para la variable *stock*, está definida a tramos y a su vez depende de las variables oferta (x_1) y demanda (x_2).

En este modelo se encuentra que para la región donde $x_2 > x_1 + x_4$ el sistema presenta cuatro puntos de equilibrio, de los cuales dos de ellos (P_2 y P_4), son los únicos admisibles para el modelo, pues los puntos P_1 y P_3 se obtienen para una oferta con valor negativo, lo cual es no admisible para el sector analizado. En los puntos de equilibrio se obtiene uno de tipo silla para cuando la demanda es 0, lo que explica que allí las trayectorias del sistema salen de dicho punto. Por otro lado, cuando la demanda toma el valor de la capacidad máxima de la misma correspondiente a 20 millones de sacos de 60 Kg, se obtiene un punto de equilibrio

estable.

Por medio de diversas simulaciones se observa que dado un conjunto arbitrario de condiciones iniciales para las variables de estado del sistema (oferta, demanda, *stock*), el campo vectorial definido en la región $x_2 > x_1 + x_4$ evoluciona de tal manera que todas las trayectorias se acercan al punto de equilibrio estable, aun cuando esto implique que tengan que cruzar la superficie de conmutación.

En la región donde $x_2 < x_1 + x_4$, se encuentra que el sistema de ecuaciones diferenciales no presenta puntos de equilibrios aislados, en lugar de esto, el sistema muestra que las regiones de equilibrios son rectas continuas del espacio tridimensional paralelas al eje x_4 . Sin embargo, al ser puntos de equilibrio no aislados y no hiperbólicos, los teoremas de linealización clásicos no pueden ser aplicados, razón por la cual no se realiza su análisis de estabilidad, ya que este tipo de comportamientos encontrados en sistemas no lineales son denominados bifurcación Zip y su análisis se hace más complejo. Como tema de investigación futura, a partir de los aportes de [30] y [43] puede analizarse la estabilidad de estas regiones continuas de equilibrio, observando cómo cambia la estabilidad punto a punto y con esto el comportamiento del sistema.

En el Capítulo 5 con base en el modelo planteado por [64], se decide incorporar un nuevo modelo para el mercado económico del café colombiano. El cual es construido al incluir las variables oferta y demanda, ya estudiadas en el Capítulo 4, pero se realiza una variación que consiste en la inclusión de una función definida a tramos para la inversión, la cual está incluida en la ecuación diferencial para la oferta, con esta modificación el nuevo modelo también de tipo no suave se acopla para las dos variables. Con esto se pretende mostrar el comportamiento dinámico de las dos variables ante una nueva no suavidad generada en la oferta por medio de la inversión.

Para la región en donde la función para el retorno de la inversión es menor a un determinado valor α , se encuentra que el sistema presenta ausencia de inversión ($R(x_1, x_2) < \alpha$). Allí se determinan dos puntos de equilibrio, entre ellos uno de tipo estable, al observar la dinámica en este punto se logra ver que la evolución de la oferta muestra un comportamiento decreciente en el tiempo, esto explicado por la falta de inversión en la misma. En la otra región en donde la función para el retorno de la inversión es mayor a un determinado valor α ($R(x_1, x_2) > \alpha$), se encuentran de forma análoga dos puntos de equilibrio, entre ellos uno de tipo estable, en donde el comportamiento de la oferta se muestra creciente en el tiempo, pues ya existe presencia de inversión.

Para el modelo presentado en el Capítulo 5, se realizan análisis de bifurcaciones para dos de los parámetros inmersos en el modelo: el parámetro Y , el cual representa el valor de la inversión y el parámetro N correspondiente al intercepto con el eje de las ordenadas de la ecuación de la superficie de conmutación. Cada uno de los análisis de bifurcación estudiados, parte de dejar fijo alguno de los dos parámetros.

Al variar el parámetro Y , se deja el valor de $N = 0$, lo que genera bifurcaciones de cruce y deslizamiento. A partir de este análisis se logra observar que para inversiones sobre los 2000

y 4000 millones, el sistema genera cruce, pero para valores iguales o superiores a los 4000 millones, el sistema evoluciona de tal manera que al partir de una condición inicial llega a la superficie de conmutación y desliza sobre ella, lo que muestra un equilibrio sobre la oferta y la demanda.

Del mismo modo, al variar el parámetro N se logra observar que el punto de equilibrio del sistema se ubicaba en la primera o segunda región del sistema de acuerdo a los valores que tome N , además para cierto valor de dicho parámetro el punto de equilibrio se ubicaba justo sobre la superficie de conmutación, lo cual se denomina bifurcación de punto de equilibrio [43].

Dado que la variabilidad del precio del café es alta, como se muestra en la Figura 6-1, en el Capítulo 6, se presenta una primera exploración numérica a la implementación del precio como una variable estocástica incorporada al modelo. En esta primera exploración, se realizan simulaciones numéricas mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden y paso fijo, mediante el cual se logra solucionar del sistema de ecuaciones diferenciales al implementar sobre la variable x_3 , una perturbación aleatoria que sigue una determinada distribución f_X . Para iniciar el proceso de simulación se calcula la desviación estándar del precio a partir de datos históricos reales de los últimos años y se determina un parámetro σ . Una vez realizado esto, se implementan múltiples simulaciones variando la desviación estándar de las distribuciones usadas para simular el precio, a partir de lo cual se obtuvo que para mayores desviaciones estándar el precio adquiere valores en un rango cada vez mayor.

Una vez estudiada la variable precio, se analiza la dinámica de la demanda a la cual para este modelo se le incorporan las funciones $A_1(x_3)$ y $A_2(x_3)$, en donde el precio (x_3) corresponde a una variable aleatoria. Al observar los resultados obtenidos al usar la desviación estándar obtenida a partir de los datos reales del precio, el cambio sobre el comportamiento de la demanda es despreciable. Esto se debe a la inelasticidad que presenta esta variable por efectos del precio (valor $\epsilon \approx 0$), pues como se explica en el marco teórico de esta tesis, las ventas demandadas de café son aseguradas en un alto porcentaje, lo que hace que a pesar de las fuertes variaciones que tenga el precio por efectos de la bolsa de Nueva York, la variación que sufre la demanda es prácticamente nula.

Una investigación futura aplicaría para la ampliación de esta primera exploración a la perturbación aleatoria del precio, para lo cual se debe construir un escenario de tipo estocástico, en el cual las ecuaciones diferenciales para el modelo sean de este tipo. Para ello es necesario un marco teórico, que permita analizar las ecuaciones diferenciales estocásticas encontradas y sus implicaciones en las respuestas para este modelo. Se debe iniciar con un desarrollo analítico y una posterior simulación numérica computacional con herramientas como MATLAB[®] u otras que permitan observar los nuevos retratos de fase y sus posibles análisis.

Anexo 1: Estimación de parámetros del modelo

A continuación, se explica la metodología seguida para la determinación de los diferentes parámetros requeridos, para la solución del modelo analizado en esta tesis. Todos los datos usados se encuentran reportados en [49].

1. **Tasa de descenso de la producción (r)** La estimación de este parámetro se realizó a través de la ecuación de oferta dada por la Eq.(A.1),

$$\dot{x} = -rx_1 + \frac{c}{x_1} \quad (\text{A.1})$$

Al hacer $c = 0$ se obtiene,

$$\dot{x}_1 = -rx_1$$

de donde

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t} = -rx_1$$

expresando en diferencias, tenemos

$$x_1^{t+1} - x_1^t = -rx_1^t \Delta t \quad \text{lo que implica} \quad x_1^{t+1} = (1 - r\Delta t)x_1^t$$

tomando $\Delta t=1$ año, obtenemos

$$\boxed{x_1^{t+1} = (1 - r)x_1^t} \quad (\text{A.2})$$

Los datos de producción total entre los años 1990 y 2016, se usaron para realizar un ajuste lineal a partir de la Eq.(A.2). Dicho ajuste se realizó dando mayor prioridad a los últimos cuatro períodos, debido a cambios en políticas y factores externos.

Los datos utilizados pueden observarse en la Figura A.1. Adicionalmente, la recta obtenida con un coeficiente de correlación (R^2) de 0.97, corresponde a la Eq.(A.3),

$$x_1^{t+1} = 0.70x_1^t + 4779.6 \quad (\text{A.3})$$

que tiene una pendiente ($m_r = 0.70$) y por lo tanto r (adimensional),

$$\begin{aligned} 1 - r &= m_r \\ r &= 1 - m_r \\ \boxed{r} &= \boxed{0.29} \end{aligned}$$

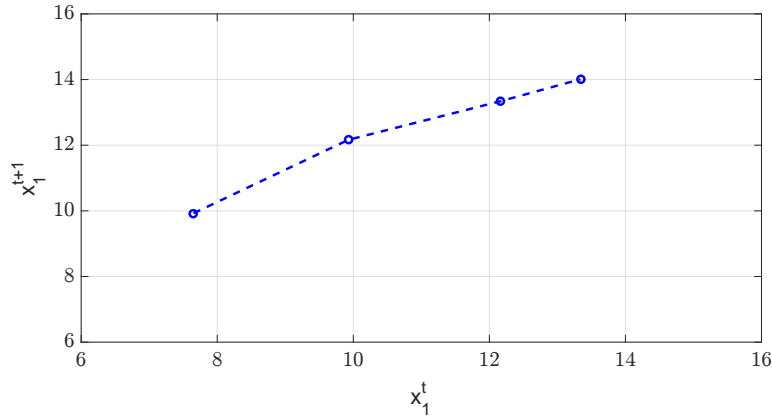


Figura A.1: Datos de producción de café usados para realizar la linealización que permite encontrar r

2. Tasa de consumo interno (a)

La tasa de consumo interno representa la cantidad de la demanda de café que se vende en el interior del país. La cual, ha variado a través de la historia.

Entre el año 1980 y 1987, se evidenció un aumento extraordinario en el consumo debido a la aprobación de un subsidio al consumidor. Sin embargo, entre 1987 y 1989, el consumo presentó un gran descenso debido al desmonte del pacto internacional, del subsidio al consumidor y al aumento del precio. Luego, en el periodo comprendido entre 1990 y 1999, el consumo permaneció relativamente estable gracias a la implementación de políticas de fomento al consumo, a los altos inventarios y a el programa de promoción “Círculo de la Taza de Oro”. Estas estrategias, amortiguaron el impacto negativo sobre el consumo interno que hubieran tenido factores como fenómenos naturales en Brasil y la creciente oferta de sustitutos introducida por la apertura económica.

Dicho panorama cambió durante el 2007 y el 2009, periodo en el cual el consumo per cápita decreció alcanzando valores menores que en latinoamérica. Esta situación generó retos para incentivar el aumento de consumo en el café en el país, lo cual, conllevó a la creación del programa Toma Café entre el 2010 y el 2015.

Para hallar el parámetro a , se partió de la ecuación de la demanda, Eq.(A.4) para lograr obtener una ecuación con la estructura de una línea recta, que permitiera por medio de una linealización determinar su valor numérico, como se muestra a continuación:

$$\frac{dx_2}{dt} = ax_2 \left(1 - \frac{x_2}{w} + bx_2 \left(1 - \frac{x_2}{w} \right) \right) \quad (\text{A.4})$$

Asumiendo $b = 0$,

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta t} = a \left(x_2^t - \frac{(x_2^t)^2}{w} \right)$$

donde,

$$x_2^{t+1} = \left((a + 1)x_2^t - a \frac{(x_2^t)^2}{w} \right) \Delta t$$

Tomando $\Delta t = 1$,

$$\boxed{x_2^{t+1} = (a + 1)x_2^t \Delta t} \quad (\text{A.5})$$

Dados los panoramas tan dinámicos en la situación del consumo de café en Colombia, se decidió darle mayor prioridad a los últimos cuatro años de esta variable. Así, los datos usados para llevar a cabo la linealización a partir de la Eq.(A.5), se muestran en la Figura A.2.

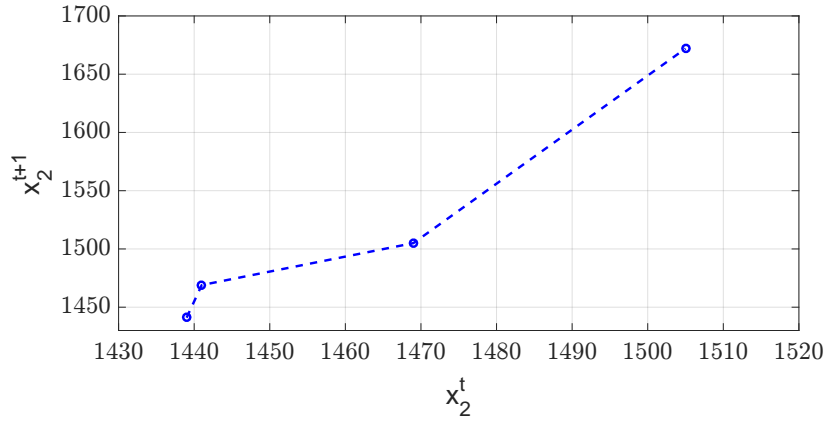


Figura A.2: Datos del consumo de café usados para realizar la linealización que permite encontrar a

La recta obtenida con un coeficiente de correlación (R^2) de 0.94, corresponde a la Eq.(A.6),

$$x_2^{t+1} = 3.25x_2^t - 3243.2 \quad (\text{A.6})$$

que posee una pendiente ($ma=3.2559$), por lo tanto, a (adimensional) es,

$$(a + 1) = ma \text{ de donde } a = ma - 1$$

$$\boxed{a = 2.25}$$

3. Tasa de producción de café para exportación (b)

Este parámetro indica la cantidad de café demandada a nivel internacional. Para hallar el parámetro b , se realizó un procedimiento análogo al mostrado anteriormente para hallar a . Pero en este caso, se usa la ecuación de demanda(A.4), haciendo $a = 0$ y $A_2 = 1$.

Procediendo de esta manera se obtiene la Eq.(A.7), a partir de la cual, se realiza un ajuste lineal.

Para la estimación de b se usaron los datos de producción exportable entre los años 1990 y 2016, dando prioridad a los últimos 7, como se evidencia en la Figura A.3, donde se muestra a su vez la linealización.

$$x_2^{t+1} = (1 + b)x_2^t \Delta t \quad (\text{A.7})$$

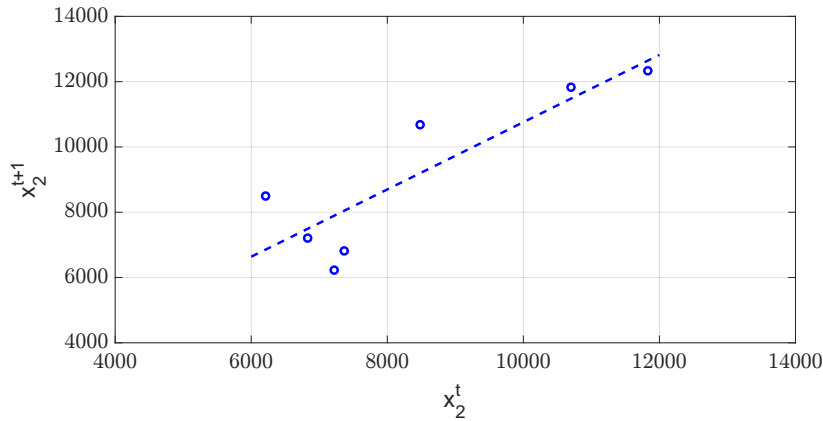


Figura A.3: Datos del producción exportable de café usados para realizar la linealización que permite encontrar b

El ajuste de los datos arrojó la Eq.(A.8), con una pendiente $mb = 1.03$. La regresión presentó un coeficiente de correlación (R^2) de 0.74.

$$x_2^{t+1} = 1.03x_2^t + 454.75 \quad (\text{A.8})$$

Por lo tanto, b (adimensional) es,

$$(1 + b) = mb \text{ de donde } b = 1.03 - 1$$

$$\boxed{b = 0.03}$$

4. Parámetro c

El parámetro c se estima como la participación de las importaciones de café, sobre el total de oferta anual.

Para ellos, se sabe que con base en datos reportados en [19, 28] la tasa de importaciones de café en Colombia oscila entre los 1.4 y 1.7 millones de sacos al año. Adicionalmente, se asumen 12.93 millones de sacos anuales, entre producción nacional e importación. Por lo tanto, c (adimensional), es,

$$c = \frac{1.5}{12.93}$$

$$\boxed{c = 0.116}$$

5. Parámetro K

Dentro de la ecuación del precio determinista, el parámetro K hace referencia a la variación porcentual que cambia año a año en promedio el precio del café. según datos reportados por la OIC, esta variación se da debido a diferentes factores (Explicados en el capítulo 6). Sin embargo, para el estudio de la primera parte del modelo, se considera un promedio constante, caracterizado por tener una variación porcentual aproximada del 2%. Por lo tanto, K (USD cent/lb) adopta un valor de,

$$\boxed{K = 0.0174}$$

6. Factor de bolsa de Nueva York (σ_α)

Este parámetro es simplemente la desviación estándar de los datos del precio al productor.

La ventaja de usar la desviación estándar como medida de dispersión radica en que posee las mismas unidades que la media. Lo cual, permite que ambas sean comparadas para el conocer el grado de variación de la distribución [59].

La desviación estándar corresponde a la raíz cuadrada de la varianza, está dada por la Eq.(A.9),

$$\begin{aligned} \text{Desviación estándar } \sigma &= \sqrt{\frac{\text{Cuadrado de la suma de las desviaciones}}{\text{Número total de datos}}} \\ &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \end{aligned} \tag{A.9}$$

Así, se obtuvo que σ_α (USD cent/lb) corresponde a,

$$\boxed{\sigma_\alpha = 46.2}$$

7. Precio (p_n)

Este parámetro indica el precio normal para la función de *stock* y fue estimado mediante

el promedio de los datos de precio al productor, en centavos de dólar por libra en el periodo comprendido entre los años 1990 a 2015. Dicha información, se evidencia en la Figura A.4.

Esto arrojó un valor para p_n (USD cent/lb),

$$p_n = 108.68$$

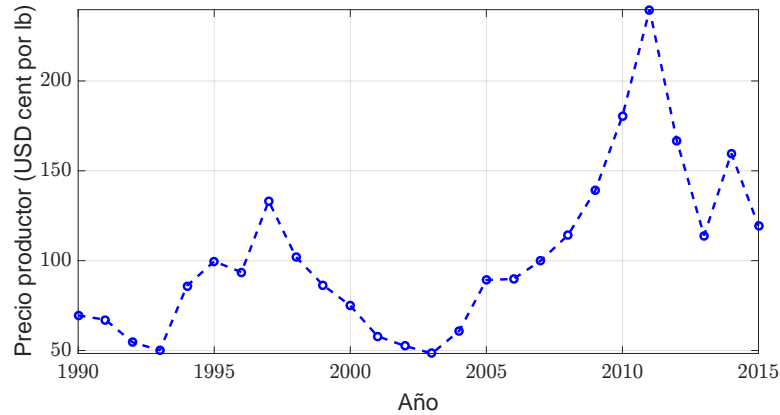


Figura A.4: Precio al productor en centavo de dólar por libra entre 1990 y 2015

8. Precio (p_h)

El precio alto para la función de *stock*, fue estimado al realizar el promedio aritmético entre los datos de mayor valor, para el precio al productor en centavos de dólar por libra para los años 1990 a 2015, los cuales se muestra en la Figura A.5. Así se obtuvo, un valor para p_h (USD cent/lb),

$$p_h = 169.79$$

9. Elasticidad del precio (ϵ)

Este parámetro fue calculado a partir del consumo doméstico y el precio al productor y corresponde a una relación entre la variación de estas dos cantidades. Los datos usados corresponden a los años 1990 a 2015 de los cuales se tomó un promedio dando mayor importancia a los últimos 4 años. Las unidades de este parámetro son centavos de dólar/saco de 60 kg.

$$\epsilon = 0,00018304$$

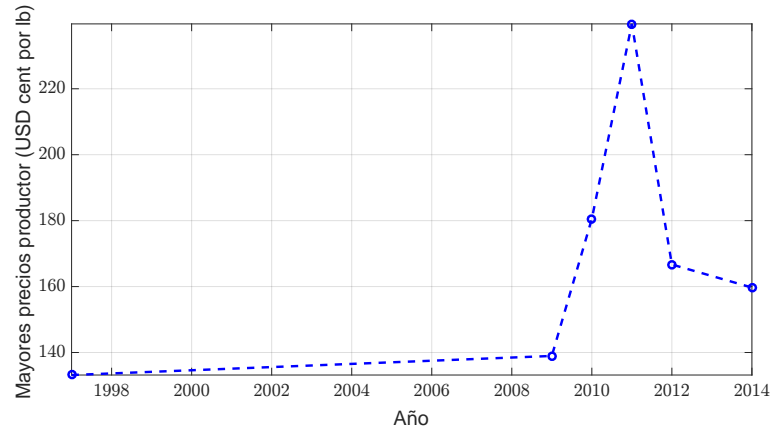


Figura A.5: Precios mayores al productor en centavo de dólar por libra entre 1990 y 2015

10. **Precio base del período anterior (P)**

El precio base del período anterior simplemente corresponde al precio al productor en centavos de dólar por libra para el año inmediatamente anterior.

El cual corresponde a P (USD cent/lb):

$$P = 119.4$$

Anexo 2: Códigos para simulaciones

Anexo 2: Códigos para simulaciones

1. Códigos para la solución del modelo con inversión constante en la oferta.

Código 1 Código para solución del modelo con inversión constante en la oferta.

```
1 %function Mercados_Eventos
2 clc;close all;clear
3 global r c a b ph pn w1 w2 T Y L K
4 r=0.2962;
5 c=0.116;
6 a=2.2559;
7 b=0.0304;
8 L=0.002546;
9 pn=108.68;
10 ph=169.79;
11 w1=20;
12 w2=20;
13 T=0.00252;
14 Y=2000;
15 K=0.0174;
16
17 Tspan=[0 20];
18 ti=Tspan(1);
19 X0=[15.8 14.2 120 1.4];
20
21 if X0(2)<(X0(1)+X0(4))
22     Estado=1;
23 else
24     Estado=2;
25 end
26
27 t=ti;
28 x=X0;
29 %% Asociacion a funciones de evento
30 opciones1=odeset('Events',@eventos1);
31 opciones2=odeset('Events',@eventos2);
```

```
1 %% Continuacion
2 while ti<Tspan(2)
3     fprintf('Estado actual: %d\n',Estado);
4     switch Estado
5         case 1
6             [tt,xx]=ode45(@mercado1,Tspan,X0,opciones1);
7             Estado=2;
8         case 2
9             [tt,xx]=ode45(@mercado2,Tspan,X0,opciones2);
10            Estado=1;
11     end
12     t = [t; tt(2:end)];
13     x = [x; xx(2:end,:)];
14     ti = tt(end);
15     X0 = xx(end,:);
16 end
17 plot(t,x(:,1),'linewidth',2)
18 xlabel('Tiempo','FontSize',20)
19 ylabel('Oferta (Millones de sacos de 60 Kg)','FontSize',20)
20 grid on
21 set(gca,'fontsize',18)
22
23 figure
24 plot3(x(:,1),x(:,4),x(:,2),'linewidth',2);
25 xlabel('Oferta (Millones de sacos de 60Kg)','FontSize',20)
26 ylabel('Stock (Millones de sacos de 60Kg)','FontSize',20)
27 zlabel('Demanda (Millones de sacos de 60Kg)','FontSize',20)
28 set(gca,'fontsize',18)
29 grid on
30 box on;
31 hold on
32 [x,y]=meshgrid(0:0.1:20,0:0.1:30);
33 z=x+y;
34 mesh(x,y,z)
35 hidden off
36 grid on;
37 end
```

```
1 %%% Continuacion
2 function dx = mercado1(t,x)
3 global r c a b ph pn w1 w2 T Y L K
4 dx = zeros(3,1);
5 dx(1) = -r*x(1)+c/x(1)+T*Y;
6 dx(2) = (a*x(2)*(1-x(2)/w1))+(b*x(2)*(1-x(2)/w2));
7 dx(3) = K;
8 dx(4) = -(-r*x(1)+c/x(1)+T*Y)-L*pn*x(2);
9 end
10
11 function dx = mercado2(t,x)
12 global r c a b ph pn w1 w2 T Y L K
13 dx = zeros(3,1);
14 dx(1) = -r*x(1)+c/x(1)+T*Y;
15 dx(2) = (a*x(2)*(1-x(2)/w1))+(b*x(2)*(1-x(2)/w2));
16 dx(3) = K;
17 dx(4) = -(-r*x(1)+c/x(1)+T*Y)-L*ph*(x(1)+x(4));
18 end
19
20 function [value,isterminal,direction]=eventos1(t,x)
21 value = x(2) - (x(1) + x(4));
22 isterminal = 1;
23 direction = 1;
24 end
25
26 function [value,isterminal,direction]=eventos2(t,x)
27 value = x(2) - (x(1) + x(4));
28 isterminal = 1;
29 direction = -1;
30 end
```

2. Código para solución del modelo con inversión variable en la oferta.

Código 2 Código para generar retratos de fase del modelo con inversión variable en la oferta.

```
1 %global r c a b ph pn w1 w2 T
2 r = 0.2962;
3 c = 0.116;
4 a = 2.2559;
5 b = 0.0304;
6 pn = 108.68;
7 ph = 169.79;
8 w1 = 20;
9 w2 = 20;
10 T = 0.00252;
11
12 figure(1)
13 hold on
14 x = 0:0.1:100;
15 y = x;
16 plot(x,y)
17 grid on;
18
19 for i = 0:5:100
20     for j = 0:5:100
21         Tspan = [0 20];
22         X0 = [i j];
23         [t,x] = ode45(@mercado3 ,Tspan ,X0);
24         figure (1)
25         hold on
26         plot(x(:,1),x(:,2));
27         xlabel('Oferta (Millones de sacos de 60Kg)')
28         ylabel('Demanda (Millones de sacos de 60Kg)')
29         grid on
30         box on;
31     end
32 end
```

Código 3 Función con el modelo de inversión variable en la oferta

```
1 %function dx=mercado3(t,x)
2 global r c a b ph pn w1 w2 T
3 dx = zeros(2,1);
4
5 if x(2)<(x(1))
6     Y = 0;
7     dx(1) = -r*x(1)+c/x(1)+T*Y;
8     dx(2) = (a+b)*x(2)*(1-x(2)/w2);
9 else
10    Y = 2000;
11    dx(1) = -r*x(1)+c/x(1)+T*Y;
12    dx(2) = (a+b)*x(2)*(1-x(2)/w2);
13 end
```

3. Solución del modelo estocástico

Código 4 Código del modelo con el precio como variable estocástica

```
1 %global r c a b L K P1 P2 epsilon ph pn w1 w2 T Y x0 z
2 r=0.2962;
3 c=0.1176;
4 a=2.2559;
5 b=0.0304;
6 L=0.002546;
7 K=0.017;
8 P1=119.4;
9 P2=119.4;
10 pn=108.68;
11 epsilon=0.00018304;
12 ph=169.79;
13 w1=20;
14 w2=20;
15 T=0.00252;
```

Código 5 Código del modelo con el precio como variable estocástica

```

1  %%% Continuacion
2  Y=2000;
3  x0=120;
4  z=1;
5
6  Tspan = [0 10];
7  X0     = [15.8 14.2 120 1.4 ];
8  repe  = Tspan(2)*365;
9  h     = (Tspan(2)-Tspan(1))/repe;
10 t     = Tspan(1):h:Tspan(2);
11
12 for i=1:repe+1
13     % Parametros para distribucion uniforme
14     aa = -46.2*sqrt(3);
15     bb = 46.2*sqrt(3);
16     % Distribucion uniforme
17     x3u(i) = x0 + K.*t(i) + (aa + ((bb-aa)*rand()));
18     % Distribucion normal
19     x3n(i) = x0 + K.*t(i) + (46.2*randn());
20 end
21
22 [t,x]=rk4(@mercado_estocastico,Tspan,X0,repe);
23 t=t';
24 x=x';
25
26 figure
27 plot(t(1:15:end),1),x3u(1,1:15:end),'r')
28 xlabel('Tiempo ','FontSize',24)
29 ylabel('Precio (Centavos de dolar por libra)','FontSize',24);
30 legend('Desviacion estandar=46.2')
31 set(gca,'FontSize',22); hold on
32 grid on
33
34 figure
35 plot(t(1:15:end),1),x3n(1,1:15:end),'b')
36 xlabel('Tiempo ','FontSize',24)
37 ylabel('Precio (Centavos de dolar por libra)','FontSize',24);
38 legend('Desviacion estandar=46.2')
39 set(gca,'FontSize',22); hold on
40 grid on

```

Código 6 Código de la función del modelo con el precio como variable estocástica

```

1 %function dx=mercado_estocastico(t,x)
2 global r c a b L K P1 P2 ph pn w1 w2 T Y x0 epsilon
3 dx=zeros(4,1);
4 dx(1)=-r*x(1)+c/x(1)+T*Y;
5
6 % Parametros para distribucion uniforme
7 % aa = -46.2*sqrt(3);
8 % bb = 46.2*sqrt(3);
9 % Distribucion uniforme
10 % A1=( (x0 + K*t + ( aa + ((bb-aa)*rand()) ) ) /P1)^epsilon;
11 % A2=( (x0 + K*t + ( aa + ((bb-aa)*rand()) ) ) /P2)^epsilon;
12 % Parametros para distribucion normal
13 aan = 46.2;
14 % Distribucion normal
15 A1=( (x0 + K*t + ( aan*randn()) ) /P1)^epsilon;
16 A2=( (x0 + K*t + ( aan*randn()) ) /P2)^epsilon;
17
18 dx(2)=(a*A1*x(2)*(1-x(2)/w1)+(b*A2*x(2)*(1-x(2)/w2)));
19
20 if x(2)<(x(1)+x(4))
21     dx(4)=-(-r*x(1)+c/x(1)+T*Y)-L*pn*x(2);
22 else
23     dx(4)=-(-r*x(1)+c/x(1)+T*Y)-L*ph*(x(1)+x(4));
24
25 end

```


Código 7 Código del método de Runge-Kutta

```
1 %function [t,w]=rk4(f,Tspan,alpha,N)
2 a=Tspan(1);
3 b=Tspan(2);
4 m = size(alpha,1);
5
6 if m == 1
7     alpha = alpha';
8 end
9
10 h = (b-a)/N;
11 t(1) = a;
12 w(:,1) = alpha;
13
14 for i = 1:N
15     k1 = h*f(t(i), w(:,i));
16     k2 = h*f(t(i)+h/2, w(:,i)+0.5*k1);
17     k3 = h*f(t(i)+h/2, w(:,i)+0.5*k2);
18     k4 = h*f(t(i)+h, w(:,i)+k3);
19     w(:,i+1) = w(:,i) + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
20     t(i+1) = a + i*h;
21 end
```

Bibliografía

- [1] F. Abaunza Osorio. «Análisis de estrategias de inversión para caficultores colombianos por medio de un modelo de dinámica de sistemas.» Tesis de maestría. Colombia: Universidad Nacional de Colombia. Facultad de minas, Medellín, 2011.
- [2] J. Alberto y P. Toro. «Perspectivas de la política económica internacional». En: 6 (2011), págs. 57-68.
- [3] R. Alzate y col. «Experimental and Numerical Investigation of Coexistence, Novel Bifurcations and Chaos in a Cam-follower System». En: *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 8 (2009), págs. 592 -623.
- [4] J. A. Amador y col. «Dinámicas No-Lineales y No-Suaves en Procesos estrés-enfermedad». En: 8.1 (2016), págs. 9-19.
- [5] J. Aracil. «On the qualitative properties in system dynamics models». En: *European Journal of Economic and Social Systems* 1 (1999), págs. 1-18.
- [6] I. P. Arcila. «Relaciones entre lo local y lo global en un contexto rural colombiano: el caso de Asprocafé Ingruma». En: *Diálogos de derecho y política* 7 (2011), págs. 1-20.
- [7] R. Arguello Cuervo y col. «Precios internacionales de café: relaciones de corto y largo plazo, elasticidades precio y sustitución, y determinantes de los diferenciales de precios». En: (2014), págs. 1-46.
- [8] R. H. Ballou. *Logística: Administración de la cadena de suministro*. 1. Pearson Prentice Hall, 2008.
- [9] M. di Bernardo, A. Nordmark y G. Olivar. «Discontinuity-induced bifurcations of equilibrium in piecewise-smooth and impacting dynamical systems». En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 8 (2007), pág. 18.
- [10] C. J. Budd y P. T. Piiroinen. «Corner bifurcations in non-smoothly forced impact oscillators». En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 220.2 (2006), págs. 127-145.
- [11] A. Bustillo. «Una revisión sobre la broca del café, *hypothenemus hampei* (coleoptera: Curculionidae: Scolytinae), en Colombia». En: *Revista Colombiana de Entomología* 32.2 (2006), págs. 101-116.
- [12] S. Federación Nacional de Cafeteros Jorge Torra. *Política cafetera 2010-2014*. 2003.

-
- [13] O. I. del Café. «Informe mensual OIC agosto 2017. Los precios del café llegan a la cifra más alta en cuatro meses, pero después bajan debido a que el mercado está bien abastecido». En: *OIC* 8 (2017), págs. 1-7.
- [14] I. Carrasco y M. Vivanco. «¿Sistemas dinámicos en ciencias sociales?» En: *Revista de Sociología* 26 (2011), págs. 169-191.
- [15] M. Castañeda e I. Franco Carlos J. and Dyner. «Modelo de dinámica de sistemas de la reforma del mercado eléctrico de Gran Bretaña». En: *X Congreso Latinoamericano de Dinámica de Sistemas* (2012).
- [16] P. Champneys y col. *Piecewise-smooth Dynamical systems. Theory and Applications*. Springer, 2008.
- [17] G. Chaparro y L. Escot. «El control de sistemas dinámicos caóticos en economía: aplicación a un modelo de hiperinflación». En: *Finanzas y Política Económica* 7.1 (2015), págs. 131-145.
- [18] L. G. Chavez. «El café tostado y molido: Caracterización de la industria torrefactora nacional». En: 14 (2009), págs. 98-106.
- [19] F. N. de Cafeteros de Colombia. «Comportamiento de la Industria Cafetera Colombiana 2014». En: *Federación Nacional de Cafeteros de Colombia* (2014), pág. 62.
- [20] F. N. de Cafeteros de Colombia. «El Comportamiento de la Industria Colombiana durante 2009». En: *Federación Nacional de Cafeteros de Colombia* (2009), págs. 1-58.
- [21] A. Colombo y col. «Bifurcations of piecewise smooth flows: Perspectives, methodologies and open problems». En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 241 (22 2012), págs. 1845-1860.
- [22] R. Crespo y F. Tohmé. «The Future of Mathematics in Economics: A Philosophically Grounded Proposal». En: *Foundations of Science* 22.4 (2016), 677–693.
- [23] M. Di Bernardo, C. Budd y A. Champneys. «Gazing, skipping and sliding: analysis of the non-smooth of the dc/dc buck converter.» En: *Nonlinearity* 11.4 (1998a), págs. 859-890.
- [24] M. Di Bernardo y col. *Piecewissmooth dynamical systems: theory and applications*. 168. Springer, 2008.
- [25] C. Domínguez. *El 80 % del cafe que bebemos es importado*. 2013.
- [26] Eduardo E. Pincolini. *CIET Consultora en Instalaciones Eléctricas y Termomecánica. Concepto de Stock y su importancia*.
- [27] K. Efstathiou, X. Liu y H. W. Broer. «The Boundary-Hopf-Fold Bifurcation in Filippov Systems». En: *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 14 (2 ene. de 2015).
- [28] El Tiempo. *Reportan aumento de importaciones de café al país*. Abr. de 2012.

- [29] C. M. Escobar. «Contribución al estudio de los sistemas no suaves». Tesis doct. Colombia: Universidad Nacional de Colombia. Facultad de ingeniería, Manizales, 2013.
- [30] M. Farkas. *Periodic Motions*. 1.^a ed. Applied Mathematical Sciences 104. Springer-Verlag New York, 1994.
- [31] Federación Nacional de Cafeteros. *Comportamiento de la Industria Cafetera Colombiana*. 2011.
- [32] Ferney Arias. *Venta de café mueve \$3.5 billones en Colombia*. 2016.
- [33] A. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [34] G. Galindo Guerra y C. B. Moss. «Mathematical model for mexican cofee market». En: *Revista brasileira de Gestao de Negocios* 15 (2004), págs. 27-33.
- [35] N. Ghaffarzadegan, J. Lyneis y G. P. Richardson. «Policy Informatics with Small System Dynamics Models: How Small Models Can Help the Public Policy Process». En: *Governance in the information Era: Theory and practice of policy informatics* (2015), págs. 144-160.
- [36] M. Gonzalez-Perez. «Cooperation in coffee markets: the case of Vietnam and Colombia». En: *Journal of Agribusiness in Developing and Emerging Economies* 2.1 (2012), págs. 57-73.
- [37] M. Guardia, T. Seara y M. Teixeira. «Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov Systems». En: *Journal of Differential Equations* 250.4 (2011), págs. 1967-2023.
- [38] J. P. Gutiérrez, J. A. Campo Robledo y J. P. Herrera Saavedra. «Estudio sobre el sector del Café en Colombia». En: *Superintendencia de Industria y Comercio* 4 (2012), págs. 1-51.
- [39] O. Hernández, J. D. Velásquez e I. Dyer. «Modelos ARIMA y estructural de la serie de precios promedio de los contratos en el Mercado Mayorista de Energía Eléctrica en Colombia». En: *Energética* 34 (2005), págs. 5-10.
- [40] S. Hoyos, C. Franco e I. Dyer. «Integración de fuentes no convencionales de energía renovable al mercado eléctrico y su impacto sobre el precio». En: *Ingeniería y ciencia* 13.26 (2017), págs. 115-146.
- [41] ICO. «Informe sobre el mercado de café 2011». En: *International Coffee Organization* (2011).
- [42] P. Kotler y G. Armstrong. *Marketing*. 2013.
- [43] Y. A. Kuznetsov, S. Rinaldi y A. Gragnani. «One-Parameter Bifurcations in Planar Filippov Systems». En: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 13 (08 ago. de 2003).

-
- [44] J. Leibovich. *La inestabilidad de los precios internacionales de café y el mercado de futuros*. 1989.
- [45] R. Leine. «Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems». En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 223 (1 2006).
- [46] G. Mankiw. *Principios de la economía*. McGraw-Hill, 2000.
- [47] C. Milas, J. Otero y T. Panagiotidis. «Forecasting the spot prices of various coffee types using linear and non-linear error correction models». En: *Borradores de investigación* 1 (2001), págs. 1-25.
- [48] G. H. Moore. «The evolution of the concept of homeomorphism». En: *Historia Mathematica* 34 (3 2007).
- [49] I. C. organization. *Historical Data on the Global Coffee Trade*. 1965-2018.
- [50] M. Parkin. *Economía*. 8.^a ed. Pearson, 2005.
- [51] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems*. 3ed. Springer, 2006.
- [52] Y. Piironen P. T.; Kuznetsov. «An Event-Driven method to simulate Filippov Systems with Accurate Computing of Sliding motions». En: *ACM Transactions on Mathematical Software* 13 (2008).
- [53] E. Pruyt y T. Islam. «The Future of Modeling and Simulation: Beyond Dynamic Complexity and the Current State of Science». En: *After a br* (2014).
- [54] J. C. Ramírez y D. Juárez. «La nueva escalada matemática». En: *Economía Mexicana* xviii (2009), págs. 71-103.
- [55] J. M. Redondo Ortégón. «Modelado de Mercados de Electricidad». Tesis doct. Colombia: Universidad Nacional de Colombia. Facultad de ingeniería, Manizales, 2012.
- [56] C. A. Rivillas Osorio y col. «La roya del cafeto en Colombia. Impacto, manejo y costos del control». En: *Centro nacional de investigaciones del café* 36 (2014), págs. 1-51.
- [57] Rust y P. Buritic. «La Roya del Cafeto en Colombia : Realizaciones de Impacto Nacional e Internacional en el Siglo XX». En: *Rev.Fac.Nal.Agr.Medellín* 63.1 (2010), págs. 5285-5292.
- [58] A. C. Ruíz Arenas. «Análisis de sistemas no suaves utilizando el método SPT». Tesis de mtría. Colombia: Universidad EAFIT. Departamento de ingeniería mecánica. Medellín, 2013.
- [59] T. T. Soong. *Fundamentals of probability and statistics for engineers*. 1.^a ed. John Wiley & Sons, 2004.
- [60] J. D. Sterman. *Business Dynamics Systems Thinking and Modeling for a Complex World*. McGraw-Hill Higher Education, 2000.

- [61] X. Tana y col. «Sliding bifurcation analysis and global dynamics for a Filippov predator-prey system». En: *J. Nonlinear Sci. Appl.* 9.9 (2016), págs. 3948-3961.
- [62] J. D.S.M. I. of Technology). «Deterministic Chaos in an Experimental Economic System». En: *America* 12 (1988).
- [63] J. Valencia y G. Osorio. «Nonlinear numerical analysis of a cam-follower impacting system». En: *2011 IEEE Second Latin American Symposium on Circuits and Systems (LASCAS)*. Feb. de 2011, págs. 1-4.
- [64] J. Valencia. «Síntesis metodológica para el estudio y representación de dinámicas complejas de mercados eléctricos». Tesis doct. Colombia: Universidad Nacional de Colombia. Facultad de minas, Medellín, 2016.
- [65] V. R. Valencia. *Diseño de una estrategia para la administración del almacén de inventario de las muestras en CV Colombian Coffee*. 2014.
- [66] J. Velásquez, I. Dyner y R. Souza. «Modelado del precio spot de la electricidad en Brasil usando una red neuronal autorregresiva». En: *Ingeniería* (2008).
- [67] S Wiggins y col. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. 1991.
- [68] K. Yuri A. *Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition*. 2nd. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 1998.