



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

**MODELO DE EVALUACION DE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE DE
LA ADICIÓN Y LA SUSTRACCIÓN**

**ASSESSMENT MODEL OF LEARNING DIFFICULTIES OF THE ADDITION
AND SUBTRACTION**

ANA CRISTINA SANTANA ESPITIA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
DEPARTAMENTO DE PSICOLOGÍA
BOGOTÁ
2018

**MODELO DE EVALUACION DE LAS DIFICULTADES DE APRENDIZAJE DE LA
ADICIÓN Y LA SUSTRACCIÓN**

**ASSESSMENT MODEL OF LEARNING DIFFICULTIES OF THE ADDITION
AND SUBTRACTION**

ANA CRISTINA SANTANA ESPITIA

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Doctora en Psicología

Directora:

Aura Nidia Herrera Rojas (Ph.D.)

Línea de Investigación:

Métodos e Instrumentos en Ciencias del Comportamiento

Grupo de Investigación:

Métodos e Instrumentos para la investigación en Ciencias del Comportamiento

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS

DEPARTAMENTO DE PSICOLOGÍA

BOGOTÁ, COLOMBIA

2018

A Diana Catalina, mi razón de ser y mi motor de vida...

Agradecimientos

La realización de esta investigación no habría sido posible sin la colaboración brindada por la Universidad Nacional de Colombia en el transcurso del Doctorado y por la ayuda ofrecida por diversas personas e instituciones, entre quienes quiero destacar:

Al Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación COLCIENCIAS y a COLFUTURO, por su apoyo en el marco de la Convocatoria de Becas de Doctorado Nacionales N^o 647-2014.

A mi directora de tesis Aura Nidia Herrera Rojas, por su confianza en esta investigación, así como por su asesoramiento, observaciones y comentarios que ayudaron a enriquecer las diferentes fases del proyecto.

A los docentes Jesús Armando Fajardo Santamaría, Oscar Alejandro Barrios, Abel Álvarez, Jorge Edilson Solano, Sandra Arévalo y Ángela Restrepo, por sus observaciones y apoyo para el proceso de validación del instrumento de la fase 1 de la tesis, así como su contribución para la validación teórica a-posteriori de los instrumentos de las fases 2 y 3.

A la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), y especialmente a los docentes Luis Sime Poma Ph. D. y Uldarico Malaspina Jurado, Ph. D. por su asesoría y acompañamiento durante la pasantía de investigación realizada en la universidad durante el segundo semestre de 2017.

A los integrantes de la Sociedad Peruana de Psicometría y a los docentes de matemáticas de la Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle (UNE), por sus invaluable aportes en el campo psicométrico y de la educación matemática, respectivamente.

A las docentes Verónica Castillo y Rosa Cardoso, de la PUCP, y al docente Jorge Enrique Quiroz, de la UNE, por su colaboración en el proceso de validación de los instrumentos de la fase 2 y 3.

A los estudiantes, docentes y directivas de los siguientes colegios en Lima-Perú: Virgo Potens, Colegio Experimental de Aplicación UNE y Escuela las Estrellitas, por su colaboración y participación en el estudio piloto de los instrumentos de las fases 2 y 3 de la investigación.

A los estudiantes, docentes y directivos de los siguientes colegios en Colombia: *Bogotá*: Liceo Moderno Mundo Net, Colegio Brasilia-Usme IED, Colegio Orlando Fals Borda IED, Colegio Bilingüe San Gabriel Arcángel y Colegio Gustavo Restrepo IED. *Mosquera*: IE Antonio Nariño, Liceo Lorens, Colegio Cooperativo Tomás Cipriano de Mosquera e IE La Merced sede Los Puentes. *Ubaté*: Escuela Normal Superior de Ubaté y Colegio de La Presentación-Ubaté, por su colaboración y participación en los diferentes procesos tanto de pilotaje de los instrumentos como de aplicación de los mismos en las fases 1, 2 y 3 de la investigación.

A Rosalía Montealegre, Hernán Sierra y Jorge Larreamendy (QEPD), por sus nociones sobre el pensamiento infantil. Con ellos aprendí que la cultura es esencial para el desarrollo y que si queremos adentrarnos en la comprensión de los procesos matemáticos y de sus dificultades debemos considerar las prácticas culturales en las que los niños participan y el carácter situado de las mismas.

A William Duica, por sus ideas y precisiones conceptuales acerca de la triangulación asimétrica.

A los docentes Olga Rodríguez, Martha Fandiño y Bruno D'Amore, por sus acertadas observaciones en la estructuración del proyecto de investigación y posterior examen de calificación.

A mi hija Catalina, a mi suegra, padres, hermanos y demás familia por su paciencia, apoyo y colaboración para el desarrollo de esta tesis.

A Jesús Armando Fajardo Santamaría, por sus observaciones y corrección de estilo realizadas a lo largo de este trabajo, su rigor académico, sus interpelaciones, pero ante todo su amor y paciencia me han ayudado a no desfallecer y a perseverar con más entusiasmo en este camino de la investigación en psicometría, tendiendo puentes con la educación matemática.

Resumen

El objetivo general de este trabajo es proponer un modelo de evaluación de las dificultades de aprendizaje de la adición y la sustracción, que considere los aspectos normativo-situados que no han sido abordados por los modelos de evaluación tradicional, a partir de diferentes fuentes de evidencia de validez. Desde esta perspectiva, la dificultad se asume como *fallos en el acceso y reconocimiento de la naturaleza espacio-temporal de las situaciones matemáticas, los objetos involucrados en dichas situaciones y la normatividad que subyace a las mismas* (Cussins, 2002; Fajardo, 2016; Klaassen, Rietveld, & Topal, 2010, Okuyama, Da Rocha, & Bordini, 2011; Rietveld, 2008).

Este estudio se desarrolló en cuatro fases. Las tres primeras son estudios empíricos que tuvieron como objetivo el desarrollo de un instrumento y la estimación de un tipo de dificultad: (a) La *dificultad experimentada*, evaluada mediante el instrumento DESAS; (b) La *dificultad instituida*, evaluada mediante el instrumento DISAS; y (c) La *dificultad atribuida*, evaluada mediante el instrumento DASAS en sus subpruebas DASAS-D (docente) y DASAS-E (Estudiante). La última fase tuvo como objetivo obtener una primera evidencia de validez del modelo normativo situado a través de análisis adicionales que integran la información recogida sobre las estimaciones de la dificultad de las fases anteriores. Los resultados obtenidos indican que los tres instrumentos presentan adecuados indicadores psicométricos y permiten formular inferencias sobre los tres tipos de dificultad. Se discuten las potencialidades del modelo de evaluación en la comprensión de la dificultad, en términos del ajuste del estudiante a los requerimientos normativos situados.

Palabras clave: Normatividad situada, triangulación asimétrica, descontento dirigido, dificultad experimentada, dificultad instituida, dificultad atribuida, adición, sustracción.

Abstract

The main purpose of this doctoral dissertation is to propose an assessment model of the learning difficulties of addition and subtraction, that includes the normative-situated aspects that have not been approached by the models of traditional evaluation, from different sources of validity. From this perspective, the difficulty is assumed as failures in the access and recognition of the spatio-temporal nature of mathematical situations, the objects involved in those situations and the normativity that underlie them (Cussins, 2002; Fajardo, 2016; Klaassen et al., 2010; Okuyama et al., 2011; Rietveld, 2008).

This study was developed in four phases. The first three are empirical studies that had as objective the development of a tests and the estimation of a type of difficulty: (a) The experienced difficulty, through the DESAS test; (b) The instituted difficulty, through the DISAS test; and (c) the attributed difficulty, through the DASAS tests, in its DASAS-D (teacher) and DASAS-E (Student) subtests. The last phase was aimed at obtaining a first evidence of the validity of the situated normative model through additional analyzes that integrate the information collected on the estimates of the difficulty of the previous phases. The results obtained indicate that the three instruments present adequate psychometric criteria and allow formulating inferences about the three types of difficulty. The potentialities of the evaluation model are discussed in the understanding of the difficulty, in terms of the student's adjustment to the situated normative requirements.

Keywords: Situated normativity, asymmetric triangulation, directed discontent, experienced difficulty, instituted difficulty, attributed difficulty, addition, subtraction.

TABLA DE CONTENIDOS

Resumen.....	6
Abstract.....	7
TABLA DE CONTENIDOS.....	8
LISTA DE TABLAS	12
LISTA DE FIGURAS	16
LISTA DE FOTOGRAFÍAS.....	18
INTRODUCCIÓN	19
ANTECEDENTES CONCEPTUALES.....	24
Dificultades de aprendizaje	24
Dificultades de aprendizaje en matemáticas.	28
Estructura de las operaciones de adición y sustracción.....	34
Hacia un modelo situado de la adición y la sustracción.....	46
Triangulación asimétrica.....	49
Normatividad situada, descontento dirigido e infraestructura normativa.	58
Prácticas de aprendizaje matemático.	66
Evaluación de la dificultad en matemáticas	68
Evaluación matemática en Colombia.....	71
Modelo de evaluación de la dificultad en matemáticas, desde un enfoque situado del aprendizaje	74
EVALUACIÓN DE LA DIFICULTAD EXPERIMENTADA	79
Introducción.	79
Método.	83
Juicio de expertos.....	84
Estudio piloto.	86

Aplicación de validación.....	89
Resultados	98
Juicio de expertos.....	98
Estudio piloto.....	100
Aplicación de validación.....	110
Conclusiones	125
EVALUACIÓN DE LA DIFICULTAD INSTITUIDA	127
Introducción.....	127
Método	135
Juicio de expertos.....	136
Estudio piloto.....	137
Aplicación de validación.....	142
Resultados	144
Juicio de expertos.....	144
Estudio piloto.....	148
Aplicación de validación.....	158
Conclusiones	170
EVALUACIÓN DE LA DIFICULTAD ATRIBUIDA	172
Introducción.....	172
Método	177
Juicio de expertos.....	178
Estudio piloto.....	179
Aplicación de validación.....	183
Resultados	184
Juicio de expertos.....	184
Estudio piloto.....	190
Aplicación de validación.....	198

Conclusiones	211
EVIDENCIA DE VALIDEZ DEL MODELO NORMATIVO SITUADO.....	214
Introducción	214
Procedimiento	219
Resultados	220
DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES	228
REFERENCIAS.....	241
ANEXOS	261
Anexo 1. Formato de consentimiento informado.....	261
Anexo 2. Actividad Diagnóstica Grado 2° Todos a Aprender. Programa para la transformación de la calidad educativa. Ministerio de Educación Nacional (Adaptación).	262
Anexo 3. Actividad Diagnóstica Grado 3° Todos a Aprender. Programa para la transformación de la calidad educativa. Ministerio de Educación Nacional (Adaptación).	263
Anexo 4. Actividad Diagnóstica Grado 4° Todos a Aprender. Programa para la transformación de la calidad educativa. Ministerio de Educación Nacional (Adaptación).	264
Anexo 5. Confiabilidad de subescala de aciertos, descontento dirigido y tiempos de reacción DESAS-Estudio piloto	265
Anexo 6. Mapa de subescala de acierto en los ítems de DESAS-Estudio piloto	267
Anexo 7. Mapa de subescala de descontento-contento dirigido DESAS-estudio piloto.....	268
Anexo 8. Confiabilidad de subescala de aciertos, descontento dirigido y tiempos de reacción DESAS-Versión final.....	269
Anexo 9. Mapa de subescala de acierto a los ítems de-DESAS (27 ítems)	271
Anexo 10. Mapa de subescala de descontento-contento dirigido DESAS (27 ítems).....	272
Anexo 11. Análisis de varianza de totales de acierto y descontento de tipos de problemas y prácticas, por zona.....	273
Anexo 12. Análisis de varianza de totales de acierto y descontento de tipos de problemas y prácticas, por curso.....	276
Anexo 13. Nube de palabras Estrategias para problemas de cambio en Perú y Colombia	279

Anexo 14. Nube de palabras Estrategias para problemas de combinación en Perú y Colombia	280
Anexo 15. Nube de palabras Estrategias para problemas de comparación en Perú y Colombia	281
Anexo 16. Nube de palabras Estrategias para problemas de igualación en Perú y Colombia	282
Anexo 17. Mapa de ítems de escala de dificultad percibida (DISAS estudio piloto)	283
Anexo 18. Mapa de ítems de escala de dificultad instituida (DISAS estudio piloto)	284
Anexo 19. Nube de palabras Estrategias-DISAS- aplicación de validación, en problemas de cambio y combinación	285
Anexo 20. Nube de palabras Estrategias-DISAS- aplicación de validación, en problemas de comparación e igualación.....	286
Anexo 21. Mapa de ítems de escala de dificultad percibida (DISAS aplicación de validación)	287
Anexo 22. Mapa de ítems de escala de dificultad instituida (DISAS aplicación de validación)	288
Anexo 23. Mapa de ítems de DASAS-D. Estudio piloto	289
Anexo 24. Mapa de ítems de panorama reflexivo DASAS-E. Estudio piloto	290
Anexo 25. Mapa de ítems de panorama irreflexivo DASAS-E. Estudio piloto	291
Anexo 26. Mapa de ítems de DASAS-D. Aplicación de validación.....	292
Anexo 27. Mapa de ítems de panorama reflexivo DASAS-E (Aplicación de validación)	293
Anexo 28. Mapa de ítems de panorama irreflexivo DASAS-E (Aplicación de validación).....	294
Anexo 29. Modelo normativo situado con variables activas y suplementarias.....	295

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Reflexión histórica sobre la evaluación y algunas de sus preguntas	69
Tabla 2. Prácticas de aprendizaje matemático a evaluar mediante el instrumento DESAS	81
Tabla 3. Organización formal de la estructura aditiva a evaluar en DESAS	82
Tabla 4. Matriz de especificaciones iniciales del banco de ítems para conformación de la prueba DESAS	84
Tabla 5. Tabla de especificaciones de prueba para DESAS	86
Tabla 6. Esquema muestral aplicación masiva DESAS	90
Tabla 7. Coeficiente de concordancia W de Kendall en coherencia, claridad, relevancia y suficiencia, por prácticas matemáticas (N= 10, gl=3)	99
Tabla 8. Índices de dificultad y discriminación de DESAS-Estudio piloto	101
Tabla 9. Valoración promedio del descontento-contento y correlaciones de Spearman para la subescala de descontento-contento dirigido-Estudio piloto	102
Tabla 10. Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para los ítems de DESAS - Estudio piloto	104
Tabla 11. Estimación de dificultad y ajuste al modelo de crédito parcial, de la valoración de descontento-contento de los ítems del DESAS. Estudio piloto	105
Tabla 12. Correlaciones entre puntuaciones en la subescala de aciertos, de descontento-contento dirigido y los tiempos de reacción para los ítems de DESAS. Estudio Piloto.	108
Tabla 13. Descriptivos de los tiempos de reacción de los ítems de DESAS- Estudiopiloto (valores en segundos)	109
Tabla 14. Índices de dificultad y discriminación de los ítems de DESAS-Aplicación de validación	111
Tabla 15. Valoración promedio del descontento-contento y correlaciones de Spearman para la subescala de descontento-contento dirigido-Aplicación de validación	112
Tabla 16. Estimación de dificultad y ajuste de los ítems de DESAS- Validación.	114
Tabla 17. Estimación de dificultad y ajuste al modelo de crédito parcial de las valoraciones de descontento-contento dirigido DESAS -Aplicación de validación	115
Tabla 18. Estructura final de la prueba DESAS	116

Tabla 19. Estructura factorial de totales de acierto y descontento-contenido dirigido, por tipo de problema	118
Tabla 20. Estructura factorial de totales de acierto y descontento-contenido dirigido, por 10 tipos de problema	119
Tabla 21. Estructura factorial de totales de acierto y descontento-contenido dirigido, por tipo de práctica	120
Tabla 22. Descriptivos de los tiempos de reacción de los ítems de DESAS (27 ítems)	120
Tabla 23. Especificaciones de prueba para el Instrumento de Dificultad Instituida en Situaciones de Adición y Sustracción-DISAS	135
Tabla 24. Esquema muestral de aplicación masiva de DISAS	142
Tabla 25. Porcentaje de acuerdo de jueces en coherencia, claridad y relevancia, por ítems y categorías de reflexión didáctica DISAS (60 ítems*)	145
Tabla 26. Porcentaje de acuerdo de jueces en coherencia, claridad, relevancia y suficiencia, por tipo de problema aditivo DISAS	147
Tabla 27. Valoración promedio y correlaciones Spearman para la escala de dificultad percibida- DISAS Estudio piloto	150
Tabla 28. Valoración promedio y correlaciones Spearman para la escala de dificultad instituida-DISAS. Estudio piloto	151
Tabla 29. Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para los ítems de la escala de dificultad percibida. DISAS - Estudio piloto	155
Tabla 30. Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para los ítems de la escala de dificultad percibida. DISAS - Estudio piloto	156
Tabla 31. Valoración promedio y correlaciones Spearman para la escala de dificultad percibida- DISAS (aplicación de validación)	159
Tabla 32. Valoraciones promedio y correlaciones Spearman para la escala de dificultad instituida-DISAS (aplicación de validación)	160
Tabla 33. Flujo de opciones para intención pedagógica, material didáctico y eje atencional DISAS-aplicación validación	161
Tabla 34. Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para los ítems de la escala de dificultad percibida. DISAS – Aplicación de validación	164

Tabla 35. Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para los ítems de la escala de dificultad instituida. DISAS – Aplicación de validación	165
Tabla 36. Estructura factorial de dificultad percibida DISAS	167
Tabla 37. Estructura factorial de dificultad instituida DISAS	167
Tabla 38. Medidas discriminantes de análisis de correspondencias múltiples DISAS-aplicación de validación.	169
Tabla 39. Especificaciones de prueba para el Instrumento de Dificultad Instituida del docente en Situaciones de Adición y Sustracción- DASAS-D	177
Tabla 40. Especificaciones de prueba para el Instrumento de Dificultad Atribuida del estudiante en Situaciones de Adición y sustracción- DASAS-E	178
Tabla 41. Porcentaje de acuerdo de jueces en coherencia, claridad y relevancia, por categorías de tipo de actividad, explicaciones de la dificultad del estudiante, y explicaciones externas e internas	185
Tabla 42. Porcentaje de acuerdo de jueces en las dimensiones, por categorías de actividad, panorama de la situación de aprendizaje, y panorama reflexivo e irreflexivo	187
Tabla 43. Valoraciones promedio y correlaciones Spearman para la sección docente- DASAS-D (Estudio piloto)	191
Tabla 44. Valoraciones promedio y correlaciones Spearman para panorama reflexivo DASAS-E, (Estudio piloto)	192
Tabla 45. Valoraciones promedio y correlaciones Spearman para el panorama irreflexivo DASAS-E, (Estudio piloto)	193
Tabla 46. Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para DASAS-D – Estudio piloto	194
Tabla 47. Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para ítems de panorama reflexivo DASAS-E- (Estudio piloto)	196
Tabla 48. Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para ítems de panorama reflexivo DASAS-E (Estudio piloto)	197
Tabla 49. Valoraciones promedio y correlaciones Spearman para DASAS-D (Aplicación de validación)	199
Tabla 50. Valoración promedio y correlaciones Spearman para panorama reflexivo DASAS-E, (aplicación de validación)	201

Tabla 51. Valoraciones promedio y correlaciones Spearman para el panorama irreflexivo DASAS-E, (Aplicación de validación)	202
Tabla 52. Flujo de opciones para DASAS-aplicación de validación	203
Tabla 53. Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para DASAS-D (Aplicación de validación)	204
Tabla 54. Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para panorama reflexivo DASAS-E (Aplicación de validación)	206
Tabla 55. Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para panorama irreflexivo DASAS-E (Aplicación de validación)	207
Tabla 56. Estructura factorial de DASAS-D	208
Tabla 57. Estructura factorial de panorama reflexivo DASAS-E	209
Tabla 58. Estructura factorial de panorama irreflexivo DASAS-E	210

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Las situaciones aditivas simples de Carpenter y Moser (Tomada de Quiroz, 2015, p. 23)	42
Figura 2. Triángulo de la didáctica. (Tomado de D'Amore, 2006, p. 242)	54
Figura 3. Triangulación asimétrica y actividades situadas	60
Figura 4. Triangulación asimétrica y descontento dirigido	64
Figura 5. Ejemplo de Derecho Básico de Aprendizaje de Matemáticas Grado 1° (Tomado de Ministerio de Educación Nacional, 2016, p. 8)	73
Figura 6. Propuesta de encuadre teórico para la evaluación de dificultad en matemáticas	76
Figura 7. Modelo de evaluación de la dificultad en matemáticas, desde un enfoque situado del aprendizaje	78
Figura 8. Subescala gráfica de descontento-contento dirigido	87
Figura 9. Escala recategorizada de descontento-contento dirigido	92
Figura 10. Visualización en PEBL-2 de las tareas de DESAS y opciones de respuesta	96
Figura 11. Visualización en PEBL-2 de escala gráfica de descontento-contento dirigido	97
Figura 12. Curva Característica del Test y Función de información de la prueba de la subescala de aciertos en los ítems de DESAS-estudio piloto	105
Figura 13. Mapa de categorías de la subescala de descontento-contento para los ítems del DESAS. Estudio piloto	107
Figura 14. Mapa categorías escala de descontento-contento dirigido DESAS-27 ítems	117
Figura 15. Medias por acierto en prácticas, por zona (15a) Monedas y bus (15b) Recta	121
Figura 16. Medias de descontento-contento dirigido en la práctica de monedas, por zona (16a) Nivel general (16b) Monedas en Combinación 1 y Comparación 3	122
Figura 17. Medias de acierto en la práctica de monedas, por curso	123
Figura 18. Medias de descontento en Igualación 2 y en ítem Dedos Cambio 2, por sector	124
Figura 19. Ejemplo de problema de Cambio 1 CA1	139
Figura 20. Ejemplo de ítem que evalúa intención pedagógica en Cambio 1 CA1	140
Figura 21. Mapa de categorías escala de dificultad percibida (DISAS estudio piloto)	156
Figura 22. Mapa de categorías escala de dificultad instituida (DISAS estudio piloto)	157
Figura 23. Mapa de categorías dificultad percibida DISAS-validación	165

Figura 24. Mapa de categorías escala de dificultad instituida(DISAS validación)	166
Figura 25. Ejemplo de ítem en DASAS-D	180
Figura 26. Ejemplo de ítem de panorama reflexivo en DASAS-E	181
Figura 27. Ejemplo de ítem de panorama irreflexivo en DASAS-E	181
Figura 28. Mapa de categorías DASAS-D (Estudio piloto)	195
Figura 29. Mapa de categorías panorama reflexivo DASAS-E (Estudio piloto)	197
Figura 30. Mapa de categorías panorama irreflexivo DASAS-E (Estudio piloto)	198
Figura 31. Mapa de categorías escala DASAS-D (aplicación de validación)	205
Figura 32. Mapa de categorías panorama reflexivo DASAS-E- validación	206
Figura 33. Mapa de categorías panorama irreflexivo DASAS-E- validación	207
Figura 34. Mapa de la situación	215
Figura 35. Perfiles hipotéticos interjuego acierto-descontento en DESAS	218
Figura 36. Relaciones y asociaciones encontradas entre las variables	221
Figura 37. Localización de los individuos en las dimensiones de enculturación formal y de entusiasmo-apatía por el aprendizaje	224
Figura 38. Distribución del descontento dirigido en los grupos de participantes y de comparación	225
Figura 39. Distribución del descontento dirigido en los grupos conformados por desempeño en MEN	225

LISTA DE FOTOGRAFÍAS

Fotografía 1. Material de trabajo de DESAS	94
Fotografía 2. Disposición espacial de los aplicadores, del examinado y de los materiales de del examinado y de los materiales de DESAS	95
Fotografía 3. Pantalla de instrucciones de aplicación en DESAS	96

INTRODUCCIÓN

Una de las preguntas más frecuentes que los niños se hacen cuando inician el aprendizaje de las matemáticas es ¿para qué me va a servir sumar y restar? La respuesta a dicha cuestión trasciende la dimensión conceptual, en la que el docente imparte una serie de conocimientos relacionados con normas, algoritmos, procedimientos de resolución de problemas que involucren una o más operaciones aritméticas, y requiere considerar a la matemática como un conjunto de prácticas sociales (Cobb, Stephan, McClain, & Gravemeijer, 2001; Godino & Batanero, 1994; Kozulin, 2000; Lave, 1991). En dichas prácticas el niño y sus pares o figuras de autoridad (padres, docentes, otros familiares) convergen en *situaciones* cuyos requerimientos normativos exigen operar con elementos de diferente complejidad, a fin de satisfacer exigencias personales, culturales o institucionales de diversa índole.

Un ejemplo de lo anterior se encuentra en las situaciones de compra y venta de mercado (Carraher, Carraher, & Schliemann, 2000), donde la situación está estructurada en el marco de ciertos consensos culturales, como lo es el empleo de unidades de masa para expresar el peso de los productos, el uso de un sistema monetario compuesto de monedas y billetes que poseen una denominación concreta y unas *operaciones aritméticas* con las que es posible agregar, retirar, incrementar o distribuir cantidades derivadas del interjuego unidades de masa-valor comercial-valor pagado-cambio. Así, el niño desde sus primeros años *participa* con su familia y con otras personas en escenarios informales de aprendizaje matemático a través de diversas situaciones que transcurren en su cotidianidad y que requieren adicionar, sustraer, multiplicar o dividir.

Sin embargo, es frecuente encontrar en las instituciones educativas algunos estudiantes de educación básica primaria que aun cuando tienen adecuado desempeño en situaciones informales cotidianas de agregación y retiro de elementos presentan dificultades en el aprendizaje de las operaciones aritméticas (Carraher et al., 2000; Carraher & Schliemann, 2002), que se traducen en que algunos niños no construyen el concepto de la adición o sustracción, no saben realizar el algoritmo correspondiente, fallan en las estrategias para abordar problemas de adición o sustracción, presentan errores en la comunicabilidad de los resultados o en la gestión de registros semióticos y pueden desarrollar cuadros afectivos de

ansiedad, temor y sentimientos de fracaso hacia las matemáticas; estos fallos pueden darse en uno o varios componentes del aprendizaje de la matemática (Fandiño, 2010).

En Colombia se han realizado estudios desde la etnomatemática (Blanco, 2006; Blanco, Higuera, & Oliveras, 2014) que documentan el desempeño de adultos analfabetas (Mariño, 1985, 1990), albañiles (Arias, Morales, & Orjuela, 2010; Rey & Aroca, 2010), controladores de tiempos de rutas de transporte urbano (Aroca, 2015) e indígenas (Aroca, 2017) en la solución de situaciones cotidianas relacionadas con su quehacer laboral, situaciones que poseen unos requerimientos específicos de adición y sustracción.

En relación con las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, Isaza (2001) menciona que alrededor del 10% de la población escolar no tiene un rendimiento satisfactorio en aprendizajes básicos como leer, escribir o hacer cálculos matemáticos. Otros estudios han mostrado que la prevalencia de las dificultades de aprendizaje en los primeros años de educación puede generar repitencia y deserción escolar. Según Garnier, Stein y Jacobs (1997) el desempeño de los niños en matemáticas y lectura en primer grado predice de manera significativa su desempeño en grado sexto y éste a su vez es predictor de deserción escolar. El informe de educación inclusiva en Colombia (Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO), 2007) señala que las tasas más altas de repitencia y deserción escolar se dan en el primer grado de primaria, siendo del 10% y 18% respectivamente. García, Fernández y Sánchez (2010) respaldan esta afirmación, indicando que las mayores tasas de repitencia se presentan en el sector oficial, así como en los grados que representan una transición entre niveles educativos (de preescolar a primaria y de primaria a secundaria).

La pregunta que surge ante este panorama es si es posible asumir algún enfoque que contribuya a trascender la brecha entre saberes informales y formales en el aprendizaje de las operaciones aritméticas. Por ello, y reconociendo que la matemática es esencialmente una práctica social, es necesario partir de unas consideraciones importantes: En primer lugar se asume el aprendizaje desde una perspectiva *situada* (Lave & Wenger, 1991; Robbins & Aydede, 2009), en donde el infante es un individuo que participa en prácticas tanto dentro como fuera del entorno escolar transformando continuamente su comportamiento, cognición y afectividad de una manera que se *ajusta* a cada situación. Desde esta aproximación no hay brecha entre el saber académico y el de la vida cotidiana sino una adaptación progresiva más

competente a situaciones que están vinculadas por requerimientos intelectuales que varían en nivel de complejidad.

En segundo lugar, la estructura de las situaciones de aprendizaje implica actividades en las que interactúan dos individuos que coinciden sobre un estímulo que corresponde a alguna configuración física del entorno inmediato a los participantes, esto se conoce como *triangulación* (Davidson, 2001). Al respecto, el autor señala que:

Hay una situación pre lingüística y precognitiva que me parece que constituye una condición necesaria para el pensamiento y el lenguaje, una condición que puede existir independiente del pensamiento y puede por tanto precederlo (...) La situación básica involucra dos o más criaturas simultáneamente en interacción mutua y con el mundo que comparten; es lo que yo llamo *triangulación* (p. 128-129).

Este término se ha propuesto para abordar el problema teórico de la ausencia de conceptos que den cuenta de la emergencia del pensamiento, esto es, la transición de un estadio en el que no hay pensamiento a un estado en el cual hay pensamiento, con sus rasgos de holismo, normatividad conceptual y objetividad (Fajardo, 2016). Cabe mencionar aquí que con relación a la característica de normatividad conceptual, Davidson (2004) indica que un individuo que posee un concepto es alguien que cuenta con la capacidad de comprender que su aplicación del mismo puede ser incorrecta.

En ese sentido, en el proceso de enculturación matemática formal, que tiene como objetivo “iniciar a los niños en las simbolizaciones, las conceptualizaciones y los valores de la cultura matemática” (Bishop, 1999, p. 120) la triangulación que se da entre el docente o una persona que posee conocimiento y el aprendiz es *asimétrica* (Duica, 2014, Lopes, 2014). Uno de los participantes (el docente) posee un repositorio de conceptos heredados de una tradición cultural (McDowell, 2003) y recurre a ese depósito común para introducir al niño en la resolución de problemas matemáticos. Por su parte, el niño no opera aún desde los conceptos formales de las operaciones aritméticas sino a partir de parámetros de actividad derivados de su participación en prácticas cotidianas de agregación y retiro de elementos.

En tercer lugar, las situaciones de aprendizaje se configuran en torno a *normatividades situadas* que estipulan los criterios bajo los cuales el comportamiento de los individuos se *ajusta* a lo que es correcto en una situación específica (Rietveld, 2008). Cabe anotar también que cada situación de aprendizaje cuenta con una *infraestructura normativa* (Okuyama et al.,

2011), esto es, se desarrolla en un marco espacio-temporal delimitado y cuenta con una serie de objetos normativos que guían y orientan el comportamiento de los individuos en el proceso de resolución de problemas aritméticos.

Teniendo presente estos tres aspectos, es preciso asumir una noción de dificultad que trascienda el enfoque tradicional que busca la causa únicamente en el estudiante, en el docente o en los hechos matemáticos, para propender por un abordaje de la dificultad que considere de una manera integrada la naturaleza triádica y triangular del aprendizaje matemático, en el trasfondo de prácticas sociales. En ese orden de ideas en este trabajo se concibe la dificultad como *fallos en el acceso, reconocimiento y ajuste normativo en cuanto a la naturaleza espacio-temporal de las situaciones matemáticas, los objetos involucrados en dichas situaciones y la normatividad que subyace a las mismas* (Cussins, 2002; Fajardo, 2016; Klaassen et al., 2010; Okuyama et al., 2011; Rietveld, 2008).

La siguiente cuestión radica en cómo se podría evaluar la dificultad en el aprendizaje de la adición y la sustracción en los primeros grados de escolaridad, desde una perspectiva situada. Precisamente una de las ventajas más importantes de la triangulación asimétrica y la normatividad situada es que proveen herramientas interesantes para abordar el problema de las dificultades de aprendizaje. Mientras en la concepción tradicional se evalúa la dificultad mediante el grado de cumplimiento de objetivos académicos, en las teorías situadas del aprendizaje es posible diseñar un modelo metodológico que incluye las interrelaciones entre docente, estudiante y objetos matemáticos, para postular así tres tipos de dificultad: (a) la que *experimenta* el estudiante cuando se enfrenta a situaciones de adición y sustracción; (b) la relacionada con la manera como el docente *instituye*, planifica y organiza los contenidos de aprendizaje; y (c) las explicaciones que tanto docente como estudiante *atribuyen* cuando se encuentran en escenarios de resolución de problemas de adición y sustracción que pueden acarrear ciertos niveles de dificultad.

Así, el objetivo general de este trabajo es proponer un modelo de evaluación de las dificultades de aprendizaje de la adición y la sustracción, que considere los aspectos normativo-situados que no han sido abordados por los modelos de evaluación tradicional, a partir de diferentes fuentes de evidencia de validez. Para ello se explorarán los antecedentes teóricos sobre la dificultad en el aprendizaje de la matemática, se hará un recorrido por la estructura de las operaciones de adición y sustracción, se postularán los elementos medulares

de la normatividad situada que dan sustento conceptual al modelo y se expondrán aproximaciones tradicionales y alternativas de evaluación de la dificultad en matemática.

Con el propósito de aportar en el mejoramiento de los procesos educativos mediante el desarrollo de instrumentos coherentes con un modelo de evaluación normativo-situado que incluya al docente, al estudiante y a los objetos matemáticos, se plantean los siguientes objetivos específicos, que se constituyen en fases de la investigación:

1. Desarrollar un instrumento para estimar la dificultad experimentada por el niño en la ejecución de situaciones de aprendizaje cotidiano de operaciones aritméticas de adición y sustracción, bajo el enfoque situado.

2. Desarrollar un instrumento para establecer la dificultad instituida por los docentes en la configuración de las situaciones didácticas relacionadas con el aprendizaje de la adición y la sustracción dirigidas a los estudiantes identificados con dificultad experimentada en la Fase 1.

3. Desarrollar un instrumento de evaluación de la dificultad atribuida por los docentes y estudiantes en relación con su quehacer en situaciones cotidianas de aprendizaje de las operaciones aritméticas de adición y sustracción.

4. Obtener una primera evidencia de validez del modelo normativo situado a través de análisis que integran la información recogida sobre las estimaciones de la dificultad de las fases anteriores.

Las tres primeras son estudios empíricos que tuvieron como objetivo el desarrollo de un instrumento y la estimación de un tipo de dificultad de los enunciados anteriormente, siguiendo la estrategia metodológica esbozada por la American Educational Research Association, American Psychological Association y el National Council on Measurement in Education (AERA, APA y NCME, 2014). En la última fase la obtención de una primera evidencia de validez del modelo normativo situado se da mediante diversas estrategias de análisis e integración de información de las fases precedentes.

Finalmente, se discutirán los hallazgos de la investigación a la luz de dos consideraciones: (a) la calidad psicométrica de los instrumentos elaborados para la evaluación de la dificultad experimentada, instituida y atribuida, respectivamente; y (b) las implicaciones del modelo normativo situado propuesto para la comprensión de las dificultades que presentan los niños en el aprendizaje de la adición y sustracción en los primeros años de educación básica primaria.

ANTECEDENTES CONCEPTUALES

-¡Malditas matemáticas! ¿Por qué tengo que perder el tiempo con estas ridículas cuentas en vez de jugar o leer un buen libro de aventuras?-se quejó en voz alta-. ¡Las matemáticas no sirven para nada! (Frabetti, 2007, p. 7).

Dificultades de aprendizaje

Si se desea profundizar en el concepto *dificultades de aprendizaje en matemáticas* es necesario rastrear en primer lugar la evolución de lo que se conoce como *dificultades de aprendizaje* en un sentido más amplio, ya que a partir de esos elementos generales se ha intentado delimitar el estudio de la dificultad de aprendizaje en el dominio matemático. La evolución histórica de los términos dificultad de aprendizaje y dificultad de aprendizaje en matemáticas es concomitante con una visión particular del error, que permea tanto la formulación conceptual como los aspectos evaluativos y metodológicos asociados a cada época. A continuación se hará énfasis en el aspecto conceptual, para en un apartado posterior desarrollar los puntos concernientes a la evaluación de la dificultad.

El concepto de dificultades de aprendizaje se ha empleado desde mediados del siglo XX en medicina y psicología para caracterizar el bajo rendimiento en lectura, escritura y matemáticas a partir de rótulos diagnósticos como dislexia, disgrafía y discalculia, respectivamente (Blanco, 2009). En los años 20 del siglo pasado, con los enfoques localizacionistas y la identificación de centros cerebrales del habla o del lenguaje mediante el estudio de pacientes con algún tipo de lesión cerebral, se comenzaron a plantear los correlatos anatómo-fisiológicos de los fallos en componentes del procesamiento lecto-escrito y matemático (Rains, 2004). En ese orden de ideas, el error se conceptualizaba como *falta de capacidad cognitiva* (Giménez et al., 1997).

En los entornos educativos la presencia de estudiantes con dificultades en lenguaje, matemáticas o en ambos dominios, no explicable por alteraciones visuales, sensoriales o motrices y cuyo desempeño en otras áreas de conocimiento era adecuado, llevó a considerar que las dificultades de aprendizaje eran independientes de lo que en el argot médico se conoce como retardo mental, debían circunscribirse a campos específicos del conocimiento y que se

requerían instrumentos para la identificación de estudiantes con estos tipos de dificultad, a fin de poder desarrollar modelos de intervención eficaces.

Entre los años 20 a 60 del siglo pasado se asistió a un escenario donde convergieron: (a) definiciones propuestas desde la psiquiatría, la medicina y las asociaciones incipientes de padres de familia de estudiantes con dificultades de aprendizaje; (b) la construcción de pruebas psicométricas para la medición de habilidades perceptuales, de lenguaje y matemáticas; (c) el empleo de estos instrumentos normativos en el aula para la identificación de estudiantes con dificultad, en conjunción con otros criterios como el Coeficiente Intelectual (CI); y (d) el desarrollo de intervenciones psicopedagógicas tendientes a superar las dificultades. Bajo este escenario el error se abordó como una *falta de adquisición de conocimiento* (Giménez et al., 1997).

Para citar algunas definiciones, Kirk en 1968 creó el Comité Nacional para los Niños Incapacitados, el cual conceptualizó las “dificultades específicas de aprendizaje” como:

Dificultades en uno o más de los procesos básicos involucrados en el entendimiento y en el uso del lenguaje, la palabra o la escritura que manifiesta en sí mismo una dificultad para comprender, hablar, leer, escribir, deletrear o hacer cálculos mentales. Este término incluye condiciones como discapacidades perceptuales, lesión cerebral, disfunción cerebral mínima, dislexia y afasia del desarrollo. Este término no incluye a los problemas de aprendizaje derivados de discapacidades visuales, auditivas o motores, retraso mental, emocionales o situaciones de desventaja social o cultural (Kavale & Forness, 2000, p. 240).

Salgado y Espinosa (2009) mencionan que las dificultades de aprendizaje:

Implican un rendimiento en el área académica por debajo de lo esperado para la edad, el nivel intelectual y el nivel educativo, y cuyas manifestaciones se extienden a otras áreas de la vida sólo en aquellos aspectos que requieren de la lectura, la escritura o el cálculo, lo que deja fuera de este diagnóstico el retardo mental, los trastornos del lenguaje y los déficits sensoriales primarios (visuales y auditivos), que afectan en forma global la vida cotidiana (p. 93).

Aun cuando no hay consenso en torno a una definición única de las dificultades específicas de aprendizaje, las anteriores definiciones y otras más presentan elementos semejantes. Myers (2004) y Blanco (2009) señalan tres aspectos en común:

1. *Principio de disparidad o discrepancia*: Las definiciones enfatizan la diferencia entre lo que el niño es capaz de hacer y lo que en realidad lleva a cabo.

2. *Especificidad o interés por las alteraciones básicas de los procesos de aprendizaje*, tales como lenguaje, razonamiento, cálculo, escritura, entre otros.
3. *Niños excluidos por la definición*: Dentro de la categoría de dificultades de aprendizaje no se incluyen los niños con talentos excepcionales, alteraciones sensoriales primarias o retraso mental, ya que si bien las dificultades de aprendizaje pueden coexistir con estas alteraciones, éstas no son la causa de las dificultades de aprendizaje.

En los años 70 las críticas se centraron en la generalidad de las intervenciones educativas derivadas de aproximaciones médicas. Como alternativa, los educadores proponen el apoyo educativo focalizado en las áreas del conocimiento en las que el estudiante reporta mayores dificultades (Blanco, 2009).

Posteriormente a partir de la década de los 80 en educación se asume la evaluación referida a criterio como una alternativa de identificación de los estudiantes con dificultad en función de su grado de logro en objetivos académicos. Un ejemplo de esta aproximación se encuentra en la definición de dificultad de aprendizaje propuesta por Arias (2003) en términos de la aprehensión por parte del estudiante de los contenidos curriculares propios del grado escolar al cual asiste, en los que presenta bajo rendimiento académico, según las calificaciones como medida de los logros de un estudiante. En esta época se conceptualizó el error en términos del *reconocimiento de habilidades distintas* (Giménez et al., 1997) y al *análisis de los obstáculos y errores* en el aprendizaje matemático.

En la década de los noventa y principios del siglo XXI se concibe la existencia de *diferentes tipos de dificultad* que reflejan un modelo de estudiante y de profesor. Así, desde la didáctica de la matemática, autores como D'Amore y Fandiño (2002) profundizan en la idea del *triángulo de la didáctica*, noción presente en los trabajos iniciales de Yves Chevallard en la década de los ochenta (Chevallard, 1982; Chevallard & Johsua, 1982; Chevallard, 1985) mediante la cual se plantea que el sistema didáctico está conformado por tres componentes: el estudiante, el docente y el saber.

El didáctico de las matemáticas está interesado en el juego que se está desarrollando (como él puede observarlo y luego reconstruirlo en nuestras clases concretas) entre un *maestro*, *alumnos* y un *saber matemático*. Tres lugares por tanto: es el *sistema didáctico*. Una relación ternaria: esta es la *relación didáctica* (Chevallard, 1982, p. 3).

Además del sistema didáctico, se encuentra el mundo externo a la escuela, donde se halla la sociedad en sentido global, incluyendo padres de familia y matemáticos. Existe una zona intermedia entre los dos sistemas, conocida como noosfera, que contiene a las personas que en la sociedad piensan acerca de los contenidos y métodos de enseñanza.

Teniendo en cuenta lo anterior, las dificultades que presentan los niños en matemáticas pueden resumirse en tres sentidos (Carrillo, 2009; D'Amore & Fandiño, 2002; D'Amore, Fandiño, Marazzani, & Sbaragli, 2010): (a) la dificultad del *estudiante*; (b) la dificultad de ciertos *hechos, contenidos y objetos* que estructuran la matemática; y (c) la dificultad del *docente* en la comunicación y desarrollo de las situaciones y contenidos matemáticos en el aula de clase.

Brousseau (1983, 1989a, 1989b) propuso una teoría de los obstáculos en el aprendizaje de la matemática que recoge de manera sucinta estas tres visiones, definiendo al *obstáculo* como “cualquier cosa que se interpone al aprendizaje esperado en la dirección docente-estudiante, cualquiera sea su naturaleza” (D'Amore et al., 2010, p. 48). La dificultad del estudiante es vista como un *obstáculo ontogenético* en cuanto a que las capacidades y conocimientos del estudiante pueden ser insuficientes para la apropiación de ciertos objetos matemáticos. La dificultad de los saberes matemáticos se equipara con *obstáculos epistemológicos* en tanto hay rupturas o cambios radicales en los conceptos. La dificultad desde el docente puede verse en términos de *obstáculos didácticos*, en tanto la elección de estrategias pedagógicas o didácticas puede ser eficaz para ciertos estudiantes más no para otros.

Puede apreciarse la tendencia a conceptualizar las *dificultades de aprendizaje* en términos del desempeño de los estudiantes en el aula, ya sea asociadas a déficits orgánicos o del desarrollo, así como explicaciones centradas en caracterizar los fallos de los estudiantes en áreas del conocimiento consideradas fundamentales tanto a nivel conceptual, curricular y de aplicabilidad en el funcionamiento cotidiano del individuo, como lo es matemáticas y lenguaje. También se observa la confluencia de enfoques médicos y psicopedagógicos que implican concepciones y estrategias diferentes de evaluación (Bravo, Milicic, Cuadro, Mejía, & Eslava, 2009). En ese sentido, la corriente *psicopedagógica* utiliza pruebas objetivas para establecer el nivel de logro de los estudiantes en contenidos específicos; por su parte el enfoque *médico* emplea instrumentos de inteligencia y de funciones ejecutivas para proporcionar una clasificación diagnóstica e identificar los factores del sujeto que explicarían

las dificultades. En tercer lugar, las aproximaciones al error se caracterizan por su énfasis en *el estudiante* y su desempeño en relación con variables biológicas, cognitivas y de interacción con el docente. El desarrollo del concepto “dificultades de aprendizaje en matemáticas” no ha sido ajeno a estas tendencias, como se verá a continuación.

Dificultades de aprendizaje en matemáticas.

Con relación a las dificultades que se presentan en matemáticas, se han acuñado diversos términos para referirse a esta condición, lo que muestra también la falta de consenso en torno a una definición común y la acentuación en diversos componentes de la dificultad: (a) dificultad como *discapacidad*: niños con discapacidad matemática (Geary, 1993), discapacidad en matemáticas (Ostad, 1997, 1998, 1999) y discapacidad en aritmética y en el razonamiento matemático (Rourke & Conway, 1997); (b) dificultad como *problemas en el aprendizaje de las matemáticas*: discapacidad en el aprendizaje de las matemáticas (Ginsburg, 1997) y dificultades del aprendizaje de las matemáticas (González-Pienda & González Pumariega, 1998; Orrantia, 2006; Östergren, 2013); y (c) dificultad como *problemas en el aprendizaje en áreas específicas de la matemática*: dificultades de aprendizaje en aritmética (García & Jiménez, 2000; Morsanyi, van Bers, McCormack, & McGourty, 2018) y dificultades en el aprendizaje del cálculo (Orrantia, 1997).

Blanco (2009) menciona dos tipos de definiciones de la dificultad de aprendizaje en matemática: *Las definiciones operativas clásicas y las definiciones dinámicas*. En la aproximación operativa clásica los elementos esenciales de la definición son el análisis del *coeficiente intelectual* mediante aplicación de pruebas psicométricas y la *competencia matemática*, a través de pruebas tipificadas teniendo como criterio la puntuación por debajo de un determinado percentil o un patrón de ejecución que denota dos o más años de retraso en comparación con el grupo normativo.

Una de las definiciones más extendidas entre los profesionales incluiría estos tres términos: “Alumnos y alumnas con retraso (dos o más años) o dificultad en adquirir los conocimientos matemáticos, a pesar de su inteligencia normal (superior a 80-90), no padecer problemas emocionales graves ni ningún tipo de déficit físico o sensorial y haber recibido una adecuada escolarización” (Blanco, 2009, p. 31).

El Manual Diagnóstico y Estadístico de los Trastornos Mentales DSM-V (American Psychiatric Association, 2014) plantea la categoría de Trastornos Específicos de Aprendizaje con dificultad matemática. Se indica como criterios diagnósticos, en primer lugar, dificultades para aprender y emplear habilidades académicas, como lo sugiere la presencia durante al menos 6 meses de mínimo uno de los siguientes síntomas:

(...) Dificultades para dominar el sentido numérico, hechos numéricos o el cálculo (tiene pobre comprensión de los números, su magnitud y relaciones; cuenta con los dedos para agregar números de un solo dígito en lugar de recordar el hecho matemático como lo hacen sus pares; se pierde en la realización de los cálculos aritméticos y puede cambiar los procedimientos) (...) Dificultades con el razonamiento matemático (ej. tiene una gran dificultad para aplicar conceptos matemáticos, hechos o procedimientos para resolver problemas cuantitativos) (p. 66).

Otros criterios que contempla el DSM-V es que las habilidades académicas comprometidas son inferiores a las esperadas para su edad cronológica, interfieren con su funcionamiento académico o de la vida cotidiana; las dificultades de aprendizaje comienzan durante la edad escolar pero no surgen hasta que las demandas académicas exceden las capacidades del individuo y las dificultades no se explican por discapacidad intelectual, problemas de agudeza visual o auditiva no corregidos, otros trastornos mentales o neurológicos, inadecuada instrucción educativa o problemas psicosociales. Desde una perspectiva médica, la Clasificación Internacional de Enfermedades (CIE-10) (Organización Mundial de la Salud, 2000) lo cataloga como Trastorno Específico del Cálculo, en donde se altera la capacidad de aprender los conocimientos aritméticos básicos de adición, sustracción, multiplicación y división, más que los conocimientos matemáticos más abstractos del álgebra, trigonometría o geometría. Entre los criterios diagnósticos se encuentran:

- (a) Una puntuación obtenida mediante una prueba estandarizada de cálculo que está, por lo menos, dos desviaciones típicas por debajo del nivel esperable de acuerdo con la edad cronológica del niño y su nivel de inteligencia;
- (b) Unos rendimientos en precisión de la lectura, comprensión y cálculo dentro de límites normales (+/- 2 desviaciones típicas respecto a la media);
- (c) No existen antecedentes de problemas ortográficos o de lectura significativos;
- (d) La escolarización ha sido normal (es decir, la escolarización ha sido razonablemente adecuada);
- (e) Las dificultades para el cálculo están presentes desde los estadios precoces del aprendizaje;
- (f) La alteración descrita en el criterio A interfiere significativamente con los resultados

académicos y con las actividades diarias que requieren el uso del cálculo; y (g) Criterio de exclusión usado con más frecuencia: CI por debajo de 70 en una prueba estandarizada (p. 194).

Por otra parte, en las *definiciones dinámicas* se establece que si hay niños en edades tempranas cuyo rendimiento se encuentra por debajo de lo normal para su edad se definen como en “riesgo de presentar dificultades de aprendizaje”, de manera que se sugiere esperar unos años para establecer si realmente el niño o niña posee dificultades de aprendizaje en matemáticas o si es un retraso en el aprendizaje de conceptos matemáticos.

Una vez se identifican los estudiantes en riesgo de dificultad, mediante bajas puntuaciones en tests estandarizados de matemáticas o cuya puntuación se encuentre por debajo de cierto percentil, ellos participan en programas de instrucción y estrategias de apoyo educativo, de modo que si al ser evaluados después de un cierto período de tiempo se observan mejoras en el aprendizaje de las matemáticas entonces los estudiantes presentaban un retraso en la adquisición de conceptos matemáticos, de lo contrario se ubicaban en la categoría Dificultades Específicas de Aprendizaje.

Para citar algunos ejemplos, Ostad (1997, 1998, 1999) en su investigación longitudinal sobre diferencias de desarrollo en estrategias de adición y sustracción, así como en resolución de problemas aritméticos simples de palabras y problemas de hechos numéricos entre niños normales en matemáticas y niños con dificultades específicas en matemáticas, menciona a niños normales y niños menos hábiles en matemáticas. Define a los estudiantes menos hábiles en matemáticas como aquellos que obtienen una puntuación inferior al percentil 14 en una prueba que mide competencia, dominio y comprensión matemática. Una vez identificados como menos hábiles en matemáticas los incorporaban a un programa de recuperación en matemáticas. Al cabo de dos años se les aplicó nuevamente la prueba, y si los estudiantes obtenían nuevamente una puntuación por debajo del percentil 14, donde no se evidenciaban mejorías derivadas del programa de recuperación, se catalogaban como estudiantes con dificultades específicas en matemáticas.

Burns et al. (2015) al respecto, indican la importancia de realizar intervenciones enfocadas en la comprensión conceptual o procedimental como estrategia para comprender y caracterizar la naturaleza de las dificultades matemáticas de los estudiantes en riesgo, o diagnosticados con dificultades de aprendizaje en matemáticas.

Una visión panorámica del desarrollo del concepto de dificultades de aprendizaje en matemática desde las definiciones clásicas y dinámicas muestra que si bien coexisten en la actualidad aproximaciones médicas donde se habla de trastornos específicos o condiciones neuropsicológicas como la discalculia del desarrollo, así como aproximaciones educativas en las que se prefiere el término dificultades de aprendizaje, existen aspectos problemáticos con tales enfoques en escenarios educativos.

En primer lugar, las conceptualizaciones médicas o educativas son insuficientes para un manejo integral de las dificultades en matemáticas porque privilegian una explicación centrada en la dificultad del niño, sin considerar el rol del maestro o de los objetos matemáticos. En última instancia conciben el centro de la dificultad *al interior* de ese estudiante que presuntamente puede presentar un fallo orgánico o bien no comprende adecuadamente las indicaciones del docente.

En segunda instancia, las explicaciones operativas clásicas privilegian la clasificación en categorías diagnósticas, tendencia que si se aplica de manera masiva en las aulas de clase sin considerar la historia previa de desarrollo y aprendizaje de los niños, puede conducir a una sobreidentificación de estudiantes con trastornos específicos de cálculo o de aprendizaje matemático. Esta situación es especialmente problemática particularmente en los niños que ingresan a la escuela, donde apenas inician su proceso de adquisición de nociones conceptuales como número, clasificación, seriación, orden, adición y sustracción.

La rotulación temprana de niños como presentando algún trastorno relacionado con el cálculo sin considerar los elementos del sistema didáctico, esto es, los objetos matemáticos con los que interactúa el estudiante o la manera como estudiante y docente interactúan en el continuo de enseñanza y de aprendizaje, puede generar repercusiones no sólo en la manera como el niño es tratado en el aula sino también en la manera como se aproxima a la matemática, de modo que pueden aparecer reacciones de ansiedad, temor, fobia a las matemáticas, acrecentando con ello unas dificultades que probablemente podrían estar más asociadas a falta de experiencias cotidianas o a falta de ajuste a los requerimientos de los problemas aritméticos y no a dificultades derivadas de condiciones biológicas o psicológicas presentes solamente en el estudiante.

Precisamente la identificación de estudiantes con posible dificultad en matemáticas en los primeros grados de educación básica primaria es uno de los retos más importantes en entornos

escolares porque aun cuando las aproximaciones operativas clásicas indican que entre el 7% y 8% de la población tiene dificultades de aprendizaje (Blanco, 2009), las dificultades de aprendizaje en matemáticas se manifiestan principalmente entre 3° y 5° grado de primaria.

Esto sugiere a su vez dos cosas: La primera es que el criterio de discrepancia o disparidad entre la ejecución de un niño con respecto a lo esperado para su edad y grado propuesto por las aproximaciones operativas clásicas no es preciso para los estudiantes de primeros cursos de educación básica primaria. En ese sentido, Blanco (2009) indica que “No se pueden observar estas discrepancias en 1° de Educación Primaria, cuando se están iniciando en el aprendizaje de la lectura o de la matemática básica, pues los niños y niñas no aprenden solos a leer ni los algoritmos matemáticos” (p. 43) (Énfasis agregado).

El énfasis agregado obedece a que no se puede perder de vista el hecho de que el aprendizaje de conceptos matemáticos formales en el caso de los niños que cursan sus primeros años escolares no es algo que el niño haga de manera aislada y sin relación con el contexto, antes bien, inicialmente el niño *participa e interactúa* con su familia en *prácticas cotidianas informales* donde tiene lugar el uso de saberes matemáticos. Posteriormente los docentes y pares, en conjunción con la familia, contribuirán con el niño en la adquisición del saber matemático de carácter formal.

La segunda cosa es que se podría entonces tratar de solventar el problema de la identificación de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas aludiendo a las aproximaciones dinámicas del concepto, esto es, debería aplicarse programas de intervención a aquellos estudiantes identificados en un primer momento y evaluar en dos o tres años después para determinar si persisten las dificultades en uno o varios dominios de la matemática. Sin embargo, el problema consiste precisamente en cómo debería darse esa identificación inicial, que más que una categoría diagnóstica particular, podría considerarse como una *sensibilidad* ante situaciones donde se ponen en práctica aprendizajes matemáticos importantes en la vida cotidiana.

En ese orden de ideas, si no se hace una caracterización inicial adecuada de los saberes matemáticos en los que el niño presenta más dificultad se podría estar ante una situación en la cual se apliquen estrategias educativas “remediales” en el aula dirigidas al cumplimiento de objetivos curriculares establecidos en el plan de estudios de las instituciones educativas, sin tener en cuenta la naturaleza de las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje

formal, lo que conllevaría como primera consecuencia a la profundización de las diferencias entre el desempeño del estudiante en escenarios formales versus su desempeño en contextos informales.

Surge entonces la pregunta ¿Cómo evaluar adecuadamente las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes que inician su proceso de instrucción formal? ¿Qué contenidos o saberes matemáticos se podrían evaluar en esta población? Para responder a estos interrogantes es preciso considerar cuatro elementos importantes:

El aprendizaje en la escuela es un proceso *triádico* (estudiante-docente-saber), donde los tres componentes están en interacción permanente, en el marco de situaciones que dotan de sentido el aprendizaje matemático.

El niño *participa* en situaciones cotidianas informales donde pone en juego saberes matemáticos. En la interacción con padres, figuras de autoridad o pares el niño tiene la oportunidad de acercarse de manera incipiente a lo que es el germen inicial de conceptos matemáticos de mayor complejidad. Tal es el caso, por ejemplo, de situaciones lúdicas de conteo de canicas o elementos, toma de bus en el transporte urbano, o salidas para comprar artículos de mercado o ropa.

Teniendo en cuenta que la matemática es un dominio amplio de estudio, es necesario circunscribir las temáticas en las que es posible establecer un vínculo cercano entre los aprendizajes matemáticos formales e informales de los niños. Por ello un punto de partida inicial para caracterizar el desempeño de los niños que ingresan al sistema educativo formal consiste en el análisis de las operaciones aritméticas de *adición* y *sustracción*. Según Maza (2001):

Las operaciones aritméticas remiten a una acción transformadora por la que dos situaciones interactúan para dar lugar a una nueva situación que de nuevo se describe numéricamente (...) Este tipo de acciones transformadoras no sólo son habituales sino que constituyen la estructura habitual de nuestro quehacer cotidiano, tanto en el mundo infantil como en la vida adulta, sea cotidiana o profesional (...) La adición y sustracción son operaciones aritméticas que están presentes en numerosos contextos y situaciones de la vida cotidiana infantil y adulta, particularmente los de compra y venta así como en los relacionados con medidas, sea del tiempo, de volumen, de peso, etc (p. 1 y 2).

La selección de las operaciones de adición y sustracción dentro de la presente investigación se justifica también porque resulta de interés analizar cómo se da ese proceso de triangulación asimétrica en el marco del aprendizaje de los conceptos formales ligados a estas operaciones, en concordancia con Mugny y Pérez (1988), quienes afirman que las interacciones conflictivas de orden cognitivo y social que se pueden dar entre docente y estudiante son más específicamente estructurantes durante la fase inicial del desarrollo de una noción.

Considerando las reflexiones anteriores, una aproximación inicial para comprender las dificultades en el aprendizaje de la adición y la sustracción consiste en proponer un modelo de evaluación de las dificultades de aprendizaje de la adición y la sustracción, que considere los aspectos normativo-situados que no han sido abordados por los modelos de evaluación tradicional, a partir de diferentes fuentes de evidencia de validez, lo que constituye a su vez el objetivo central de esta investigación. Con este propósito en primer lugar se expondrán los principales elementos de la adición y sustracción en los primeros años de escolaridad, posteriormente se desarrollarán los aspectos conceptuales y teóricos que subyacen al modelo de evaluación normativo que se propone en el marco de este trabajo, y finalmente se esbozarán los elementos evaluativos de tal modelo, de manera que se pueda establecer la articulación entre los elementos conceptuales, de medición y evaluación del modelo, en el marco de las dificultades de aprendizaje de la adición y la sustracción.

Estructura de las operaciones de adición y sustracción

En matemática “una operación es una acción que se ejerce sobre unos elementos transformándolos en otros” (Maza, 1991, p. 19). Esta definición considera varios aspectos: Unos elementos iniciales, un operador aplicable y unos elementos finales, todo esto teniendo como trasfondo una situación meta a la que se pretende llegar.

En este orden de ideas, las operaciones aritméticas son aquellas que se realizan con los números, y en las que se dispone de una serie de elementos pertenecientes a diversos sistemas numéricos (ej. naturales, enteros, racionales) que poseen propiedades específicas y que al aplicarles un operador (+, -, \times y \div , por citar sólo algunos) se obtiene un resultado particular, que es susceptible de describirse de manera numérica. Así, la adición y la sustracción son operaciones aritméticas, y la suma y la resta son los resultados de tales operaciones, respectivamente.

Las operaciones aritméticas no sólo se limitan a cuantificar elementos, permiten simbolizar y representar de manera formal las acciones, relaciones y transformaciones que se realizan inicialmente con los objetos físicos – agregar, separar, reiterar y repartir - y hacen posible la construcción de “un sistema de relaciones interno dentro del conjunto de los números y una estructura respecto de dichas operaciones esencialmente de la adición y de la multiplicación y sus operaciones inversas - la sustracción y la división” (Castro, Rico, & Castro, 1995, p 18).

Teniendo en cuenta lo anterior, sería posible hablar de dos tipos de modelos que coexisten. Uno o más modelos formales vinculado con la estructura lógica de las operaciones aritméticas y modelos informales que las personas construyen en torno a las operaciones aritméticas, que se nutren de las acciones que realizan los individuos en el marco de experiencias cotidianas.

Con relación al segundo tipo de modelos, Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985) propusieron la idea de *modelos intuitivos* que están ligados a las operaciones aritméticas y son de naturaleza esencialmente conductual, en la medida que cuando se pretende indagar por el modelo que guía a un individuo en la realización de operaciones aritméticas se pueden advertir elementos conductuales (ej. acciones de añadir, distribuir, quitar) que permean la comprensión de la operación y la posterior realización de los algoritmos relacionados con dichas operaciones. Al respecto, los autores mencionan que

Cada operación fundamental de la aritmética generalmente permanece vinculada a un modelo intuitivo, primitivo e implícito. La identificación de la operación necesaria para resolver un problema con dos elementos de datos numéricos se lleva a cabo no directamente, sino según la mediación del modelo. El modelo impone sus propias restricciones en el proceso de búsqueda (Fischbein et al., 1985, p. 4).

Así, los modelos intuitivos aluden a una comprensión *práctica* de las operaciones, la cual puede vincularse de manera robusta al concepto, incluso mucho después que el concepto ha adquirido un estatus formal, debido a su carácter simple, concreto e inmediato (Fischbein, 1989).

En ese orden de ideas, la adición y la sustracción poseen varios modelos intuitivos para un mismo modelo formal. Fischbein et al. (1985) indican que un modelo intuitivo asociado con la adición consiste en poner juntos dos o más conjuntos disjuntos de objetos para obtener un conjunto que es la unión de los conjuntos precedentes. Así, dos cantidades se *combinan* para dar lugar a una cantidad que en ocasiones es mayor que las partes. Además de este modelo,

puede considerarse otro según el cual la adición es una operación de *cambio* en la cual a una cantidad inicial se le añade una segunda cantidad que da como resultado una cantidad a veces mayor a la inicial. En cuanto a la sustracción, Fischbein et al. (1985) mencionan al menos dos interpretaciones conductuales: La primera tiene que ver con *quitar*, en términos de la *transformación* que sufre una cantidad inicial cuando se le quita una cantidad determinada, y el resultado obtenido en ocasiones es menor que la cantidad inicial. El segundo modelo es el de *reunir*, en términos de la relación parte-todo, en la cual conociendo el todo y una parte se indaga por la parte faltante. Es así que desde esta perspectiva la adición y la sustracción pueden conceptualizarse como acciones de transformación o combinación (Castro, 2016).

Con relación a los modelos *formales*, la adición y sustracción se han conceptualizado de tres maneras diferentes: (a) la concepción conjuntista; (b) los axiomas de Peano; y (c) los desplazamientos en la recta numérica.

La adición desde la visión conjuntista se define como el “cardinal resultante de unir dos conjuntos disjuntos” (Maza, 1991, 2001). La sustracción se define como la operación conjuntista de complemento, cuando el sustraendo es menor o igual que el minuendo. Para ello se parte de un conjunto A con a elementos y un subconjunto B con b elementos. La diferencia A-B es el cardinal complementario de A respecto a B. En ese sentido “la estrecha dependencia en la que se mueve la enseñanza de la Aritmética respecto de la Teoría de Conjuntos ha conducido a que las primeras sentencias numéricas sean la traducción simbólica de los diagramas de Venn” (Maza, 1991, p. 83).

La definición de la adición y la sustracción basada en los axiomas de Peano sugiere que la adición puede verse como un conteo progresivo o contar hacia adelante, por su parte la sustracción es un conteo regresivo (contar hacia atrás). Esta es la definición:

- $p + 0 = p$, para todo número natural p .
- $p + sig(n) = sig(p + n)$, para todo n diferente de cero.

En consecuencia, procedemos como sigue:

- Para sumar 1 a un número p se toma el sucesor del número p $sig(p) = p + 1$,
- Para sumar 2 se toma el sucesor del sucesor, etc.
- Se supone que se sabe sumar n al número p y para sumar $(n+1)$ se toma el sucesor de $n + p$, o sea,

$$p + (n + 1) = sig(p + n) = (p + n) + 1 \text{ (Cid, Godino, \& Batanero, 2004, p. 235).}$$

En la adición y sustracción desde los desplazamientos en la recta numérica los números se interpretan geoméricamente como distancias. La adición se define como la distancia total resultante de la combinación de dos tramos, mientras que la sustracción consiste en el retroceso desde la distancia total hacia la izquierda n posiciones.

En matemáticas usualmente la adición y la sustracción se tienden a estudiar bajo una estructura común - la *estructura aditiva*- ya que la sustracción se clasifica como un tipo especial de adición. Por problemas de tipo aditivo se entiende aquellos cuya solución exige adiciones o sustracciones. La estructura aditiva es aquella estructura o relación en juego que sólo está formada por adiciones o sustracciones (Vergnaud, 1991). En este caso se dice que un problema aritmético involucra una estructura aditiva si para su resolución se requiere utilizar una adición (Bonilla, Sánchez, \& Vidal, 1999). Se han propuesto diferentes clasificaciones de la estructura aditiva según se privilegien los elementos sintácticos, la coincidencia entre los significados formales e intuitivos de las operaciones aritméticas o los componentes semánticos.

Las clasificaciones *sintácticas* (Jerman, 1974; Jerman \& Mirman, 1974; Jerman \& Rees, 1972) enfatizan en elementos como el número de palabras en el enunciado del problema, el número de operaciones involucradas, el grado de dificultad, el tamaño de los números y la presencia de enunciados abiertos en el problema.

En cuanto al *grado de concordancia entre los significados formales e intuitivos* de las operaciones aritméticas Fischbein et al. (1985) mencionan que los niños pueden tener dificultades en la resolución de problemas aritméticos verbales debido a ciertos efectos de arraigo de algunos modelos intuitivos (ej. la adición siempre es una operación que aumenta y la sustracción es una operación que disminuye), incluso con posterioridad a la adquisición de nociones matemáticas formales más elaboradas. Esto genera dificultades a la hora de resolver problemas elementales con datos numéricos que conducen a “conflictos entre la operación correcta y las imposiciones del modelo tácito correspondiente” (Lago, Rodríguez, Zamora, \& Madroño, 1999, p. 75).

En ese orden de ideas, aquellos problemas aditivos y sustractivos en los que convergen tanto el significado formal e intuitivo serán más fáciles (ej. el significado intuitivo de sustracción como quitar y el enunciado “Si tengo 10 carros y le doy 3 a Juan ¿cuántos carros

me quedan”) que aquellas situaciones donde no hay una coincidencia de tales significados (ej. el significado intuitivo de sustracción como quitar y el empleo de estrategias aditivas “Carlos gastó \$500. Ahora tiene en su billetera \$2000. ¿Cuánto dinero tenía antes?

Las clasificaciones *semánticas* por su parte privilegian la relación de significación que se da entre los elementos que componen las situaciones aritméticas. Es así que se documentan diferentes tipos de clasificaciones semánticas:

Una primera aproximación semántica es la clasificación de Durand y Vergnaud (1976) y Vergnaud (1991) que se basa en la secuencia temporal de los problemas aditivos y el rol diferencial de los números involucrados en la situación- cardinal, ordinal y de medida. Vergnaud (1991) plantea que las relaciones aditivas son relaciones terciarias que pueden encadenarse de diferentes maneras para generar varias estructuras aditivas. Estas estructuras aditivas se fundamentan en la concepción piagetiana de esquema de acción y se representan gráficamente mediante ecuaciones, las cuales tienen una notación simbólica particular.

Teniendo en cuenta lo anterior, Vergnaud (1991) propone seis esquemas ternarios fundamentales:

- *Dos medidas se componen para dar lugar a una medida* (ej. Pablo tiene 6 pelotas grandes y 8 pelotas pequeñas. En total tiene 14 pelotas).
- *Una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida* (ej. María 7 tiene canicas antes de empezar a jugar. Ganó 5 canicas. Ahora tiene 12 canicas).
- *Una relación une dos medidas* (ej. Pedro tiene 8 manzanas. Jaime tiene 4 manzanas menos, entonces Jaime tiene 4 manzanas).
- *Dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación* (ej. Eduardo ganó 6 canicas ayer y perdió 9 hoy. En total perdió 3).
- *Una transformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar lugar a un estado relativo* (ej. Sara debe 10 canicas a Mauricio. Le devuelve 4. Sólo le debe 6).
- *Dos estados relativos (relaciones) se componen para dar lugar a un estado relativo* (ej. Santiago debe 4 canicas a Pablo y 9 canicas a Felipe. Debe 13 canicas en total).

La aproximación de Vergnaud ha influenciado posteriores conceptualizaciones de la clasificación semántica de las situaciones aditivas. Es así que Maza (2001) propone cuatro diferentes tipos de problemas de adición y sustracción: *Combinación*, entendida como la reunión de elementos de dos conjuntos disjuntos; *cambio aumentando*, en donde se aplica una transformación sobre la cantidad inicial que conduce a un resultado mayor que el inicial; *cambio disminuyendo*, en donde la cantidad inicial sufre una transformación conducente a una cantidad final menor que la inicial, y *comparación*, en donde dos cantidades se contrastan en términos de mayor o menor que. Las representaciones esquemáticas de estos problemas siguen la estructura esquemática de Vergnaud, y es así que la combinación de sentencias canónicas (donde se desconoce el total) y no canónicas (donde se desconoce el primer o segundo término de la operación) dan lugar a 11 tipos de problemas- en Combinación solamente hay dos tipos de problema, cuando se desconoce el todo o una de las partes.

Cid et al. (2004) en su clasificación de las situaciones aditivas, indican que la adición y la sustracción “se construyen como un medio de evitar los recuentos o procesos de medida en situaciones parcialmente cuantificadas” (Cid et al., 2004, p, 49). Así, proponen seis tipos de situaciones aditivas que resultan del interjuego a nivel de relaciones terciarias que se pueden dar entre tres tipos de roles que pueden fungir los números en una situación: Número como *estado* (esto es, cuando los números fungen como cardinal de un conjunto, ordinal de un elemento o medida de una cantidad de magnitud); número como *transformación*, en tanto el número expresa la variación de un estado; el tercer rol es el de número como *comparación* en tanto el número denota la diferencia entre dos estados que se comparan.

Dentro de la aproximación semántica existen otras categorizaciones que no sólo consideran la estructura aditiva en términos esquemáticos sino enfatizan en los *problemas aritméticos verbales* y en el significado de las relaciones que se pueden dar entre los elementos de la situación y la operación aritmética en juego. Los problemas aritméticos verbales se definen como aquellas descripciones verbales de carácter oral o escrito de situaciones problémicas, de las cuales surgen uno o varios interrogantes cuya respuesta puede obtenerse mediante la aplicación de operaciones numéricas sobre los datos numéricos que se proporcionan en el enunciado (Verschaffel, De Corte, & Lasure 1994). Existen dos clasificaciones importantes en educación matemática, la de Carpenter, Hiebert y Moser (1981) y la de Riley y Greeno (1988).

Carpenter et al. (1981) realizaron una clasificación semántica de las situaciones de adición y sustracción para los niños en primaria, que refiere al significado de las relaciones que se pueden dar entre los elementos de la operación aritmética involucrada.

Existen cuatro tipos de problemas diferentes a nivel semántico: Cambio, combinación, comparación e igualación. En los problemas de *cambio* se tiene una cantidad inicial que se somete a una acción de transformación y genera como resultado una cantidad final que puede ser mayor o menor a la cantidad inicial. Las situaciones de *combinación* se caracterizan porque no hay acción causante de cambio sino la reunión de dos cantidades (subconjuntos) que pueden ser consideradas como partes de un todo (conjunto). Los problemas de *comparación* consisten en cotejar dos cantidades, en términos de mayor y menor que. Las situaciones de *igualación* implican elementos de cambio y comparación, es decir, son situaciones en las que se comparan dos cantidades, se quiere igualar una con respecto a la otra y se indaga por la acción de transformación (aumento o disminución) que se debe realizar para que ambas cantidades sean iguales.

En el análisis de los problemas verbales aditivos identifican tres dimensiones básicas:

1. *Relación dinámica o estática entre los conjuntos implicados en el problema.* Existen problemas en los que hay una referencia a la *acción de cambio* que modifica la cantidad dada en el problema: (a) cambio unión (ej. Pedro tiene 12 galletas, su mamá le da 10 galletas más ¿Cuántas galletas tiene en total?); (b) cambio separación (ej. Mónica tenía 5 colores y le regaló 3 colores a Patricia ¿Con cuántos colores quedó Mónica?); y (c) igualación (ej. Miguel tiene 3 canicas y Antonio tiene 10. ¿Cuántas canicas debe comprar Miguel para tener el mismo número de canicas que Antonio?).

Por su parte, en los problemas de combinación (ej. María compró 5 bananos y 3 peras, ¿Cuántas frutas compró en total?) y comparación (ej. Manuel tiene 15 años y Eduardo 8 años, ¿Cuántos años más tiene Manuel con respecto a Eduardo?), no se da ninguna acción, por tanto hay una relación estática entre las cantidades dadas en el problema.

2. *Relación de inclusión de conjuntos o una relación conjunto-subconjunto*, es decir, dos conjuntos pueden ser subconjuntos de otro (ej. Arturo compró 5 zanahorias y 6 lechugas ¿Cuántas verduras compró?- aquí las zanahorias y las lechugas son subconjuntos del conjunto “verduras”); o uno de los dos conjuntos es disyunto con los otros dos (ej. Teresa tiene

\$350.000 en el banco y Mauricio tiene \$190.000. ¿Cuánto dinero más tiene Teresa en comparación con Mauricio?).

3. *La acción del problema conduce a un aumento o disminución de la cantidad inicial dada* (ej. Consuelo tiene \$2.000 y recibe un pago de \$100.000 ¿cuánto dinero tiene Consuelo en total?).

Si adicional a estas dimensiones se incluye la variable sintáctica, esto es, el orden de los términos en el enunciado, se obtienen 20 tipos de problema, de los cuales 6 son de cambio, 6 de comparación, 6 de igualación y 2 de combinación. Carpenter y Moser (1984) indican que para estos problemas se han identificado tres tipos de estrategias aditivas: Las que se basan en el modelamiento directo con dedos o con objetos físicos, las basadas en el uso de secuencias de conteo y las que se apoyan en el recuerdo de hechos numéricos. Un esquema del modelo de Carpenter et al. (1981) se ilustra en la Figura 1.

Riley y Greeno (1988) mencionan tres tipos de problema: Cambio, combinación y comparación. Los problemas de cada tipo pueden ser resueltos mediante adición y sustracción, y en función del término a encontrar (cantidad inicial, cantidad intermedia o cantidad final), se generan 6 problemas por categoría, para un total de 18 problemas. Estos autores clasifican a su vez estos problemas en tres niveles de dificultad creciente, en función de modelos de procesamiento cognitivo. El nivel 1 alude a problemas que se pueden resolver mediante modelado directo del problema, el nivel 2 requiere generar una representación mental del problema que incluya conjuntos cuyo cardinal se desconoce, pero que permiten realizar acciones concretas para obtenerlo, por su parte el nivel 3 alude a la puesta en juego de relaciones parte-todo.

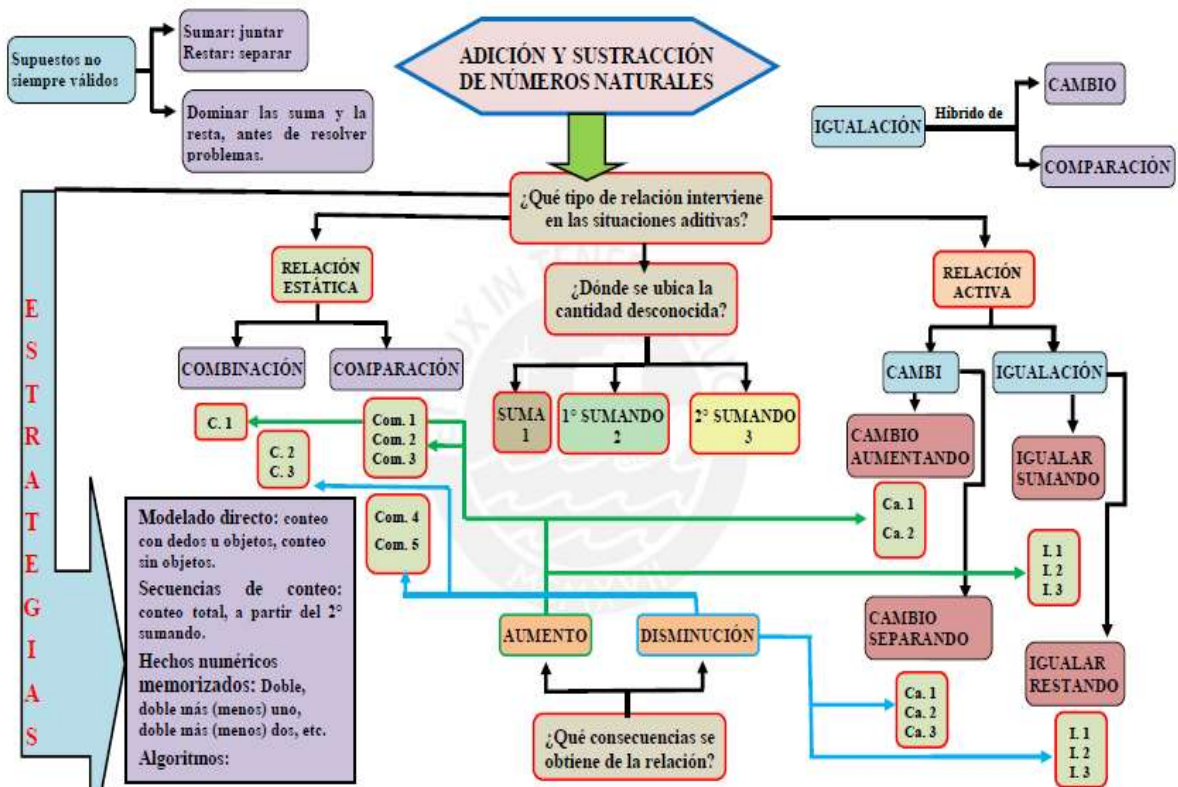


Figura 1. Las situaciones aditivas simples de Carpenter y Moser (Tomada de Quiroz, 2015, p. 23)

Luego de hacer un recorrido por los principales significados de la adición y de la sustracción, y por algunas clasificaciones semánticas de las situaciones aditivas, pueden apreciarse ciertas tendencias de interés. En primer lugar, la significación predominante en la adición y sustracción tiene que ver con situaciones donde el individuo *ejerce acciones* sobre los objetos concretos u abstractos para lograr transformaciones de un estado inicial. Aun en las concepciones esquemáticas como la de Vergnaud (1991), Maza (2001), o en la propuesta de Carpenter et al. (1981) se advierte que en problemas numéricos, con objetos físicos o en problemas aritméticos verbales la categoría de cambio está presente. Incluso en procesos de formación docente, su conocimiento “informal” sobre estas operaciones está permeado de la noción de adición expresada en verbos como agregar, aumentar y añadir (Castro, 2016).

En segundo lugar, aun cuando se reconoce que la adición está ligada a acciones y que aprender a sumar y restar es un hito académico fundamental, puesto que un sinnúmero de destrezas aritméticas de alto nivel están sustentadas en esta competencia adquirida en los

inicios de la inserción del niño en la escuela (Castillo, 2014), existen diferencias en torno a la manera como se adquiere tal competencia.

Es así que las clasificaciones esbozadas anteriormente invocan los significados de la adición *como ligados a la adquisición de conceptos, estructuras, esquemas*, visión que corresponde a una aproximación de tipo cognitivo. Esto es concordante con la *metáfora de la adquisición* que subyace a la psicología cognitiva (Sfard, 1998). Desde esta aproximación el conocimiento se asume como una entidad que se adquiere en una configuración de tareas y se transfiere a otras tareas. Así, los conceptos son unidades de conocimiento que pueden ser acumulados, refinarse gradualmente y combinarse para formar estructuras complejas más ricas. La mente humana se concibe entonces como un depósito que debe llenarse con ciertos conceptos y el aprendiz se define como propietario de dicho conocimiento.

Aplicadas estas nociones a la adquisición de la adición y la sustracción, comúnmente se concibe que los niños alcanzan este logro porque llegan a comprender ciertos conceptos abstractos, relacionados con cambio, combinación, comparación o igualación de cantidades (Nesher, Greeno & Riley, 1982). En consecuencia, la mayoría de los programas de enseñanza están enfocados en promover el desarrollo de la capacidad para concebir las variaciones en las cantidades al adicionar o sustraer (Bonilla et al. 1999).

Debido a que se trata de una forma de conocimiento básico para la comprensión de conceptos aritméticos más complejos, el aprendizaje de la adición y la sustracción suele verse como un *avance intelectual* que sustenta otros saberes puramente formales. De igual modo, como su adquisición está ligada a contextos escolares socialmente asignados en los cuales se efectúan actividades para la enseñanza de algoritmos y otro tipo de información abstracta, suele pensarse que lo que sucede en la mente de los niños cuando aprenden la adición y la sustracción es una revolución puramente conceptual (Maza, 2001).

El modelo psicológico que subyace a este abordaje concibe la mente del niño como un repositorio de reglas y conceptos, que se enriquece por la actividad escolar y que se pone a disposición cada vez que el individuo se enfrenta a una situación en la que debe sumar o restar. Sin embargo, existen varios aspectos problemáticos al interior del modelo intelectualizado que es preciso considerar:

En primer lugar, cuando se asume desde el modelo intelectualizado el hecho que tanto niño como docente poseen *esquemas conceptuales*, se asiste a dos escollos que Davidson (1973)

menciona: (a) el dualismo esquema-contenido; y (b) la imposibilidad misma de la noción de esquema conceptual.

En ese sentido, se han asumido los esquemas conceptuales como sistemas de categorías o conceptos que dan forma u organizan el contenido (dígase mundo o experiencia), que son construidos por los sujetos; es decir, hay un contenido que debe organizarse y unos dispositivos “mentales” o esquemas que contribuyen a la estructuración de dicho contenido empírico. Sostener esta postura implica aceptar que la mente y el mundo son entidades distintas, mutuamente irreductibles (*tesis de la independencia ontológica*) y que el conocimiento consiste en representar el mundo tal y como este es, sin que la manera como se adquieren las representaciones en la mente jueguen un papel importante en la mente misma (*tesis de la independencia epistemológica*) (Duica, 2014). Adicional a lo anterior, Duica (2014) menciona que un esquema conceptual es válido como conocimiento si tal conocimiento se organiza en representaciones, es susceptible de confrontación y requiere una intermediación epistémica entre la mente y el mundo.

Si esto es así, no habría manera en la cual los individuos puedan comunicarse ni traducir sus esquemas en contextos de interacción porque el contenido no puede ser sino subjetivo y privado, ya que son datos para un sujeto (Duica, 2014) y los esquemas a partir de los cuales un individuo estructura sus creencias, pensamientos, deseos y conocimientos son diferentes de los esquemas de otro sujeto: “si los esquemas son diferentes, también lo es el lenguaje” (Davidson, 1973, p.6). Davidson (1973) indica al respecto que

La falla de la intertraducibilidad es una condición necesaria para la diferencia de esquemas conceptuales. La relación común con la experiencia o la evidencia es lo que se supone que nos ayuda a entender la afirmación de que son idiomas o esquemas que están bajo consideración cuando falla la traducción. Es esencial para esta idea que haya algo neutral y común que esté fuera de todos los esquemas (p. 12) (Énfasis agregado).

Sin embargo, se aprecia no sólo en entornos escolares sino en contextos de socialización que tanto el niño como el adulto son capaces de comunicarse entre sí y de comprenderse mutuamente. Así, la idea de comparabilidad entre esquemas y de relativismo conceptual no pueden sostenerse, ya que la interacción y diálogo entre individuos se da bajo un trasfondo común, lo que iría en contra del supuesto esencial de esquemas internos sin posibilidades de traducción. Antes bien, los individuos se comunican y desarrollan sus actividades en el marco

de un *trasfondo común* en el cual convergen y desde el cual socializan. Davidson (1973) expresa este trasfondo como un *sistema de coordenadas común*, mientras que autores como Rietveld y Kiverstein (2014) y Wittgenstein (1953) lo definen empleando el término *formas de vida*, que alude a patrones regulares de comportamiento que se manifiestan en las conductas normativas y costumbres de las comunidades.

Un segundo problema asociado al modelo intelectualizado del aprendizaje consiste en el asunto de las diferencias entre saberes escolares formales y saberes informales. Para el caso de la adición y la sustracción, este problema resulta particularmente importante en la descripción de los desempeños de los niños de primeros grados de educación básica primaria donde al parecer se presenta una escisión entre sus desempeños en escenarios formales e informales de aprendizaje matemático.

Desde un modelo intelectualizado del aprendizaje de la matemática inicial, si la adquisición de la capacidad para resolver operaciones de adición y sustracción es un asunto relacionado únicamente con la obtención y aplicación de ciertas reglas y conceptos, no debería existir tal brecha entre el saber cotidiano y el escolar, puesto que los individuos podrían enfrentar cualquier tipo de problema sin importar su contenido, presentación o estructura formal recurriendo a esos saberes adquiridos en la escuela (Masingila, Davidenko, & Prus-Wisniowska, 1996; Saxe, 1985). En ese orden de ideas, se recurre al concepto *de transferencia de los aprendizajes* entre contextos intra y extraescolares. Al respecto Saxe (1989) indica que

...la transferencia es usualmente definida como un proceso de generalizar los aprendizajes previos o la alineación de formas cognitivas previas a nuevos problemas (...) La transferencia en el contexto de la resolución de problemas cotidianos puede ocurrir como un proceso prolongado en el cual los individuos se apropian de formas de conocimiento de un contexto y se especializan en otro (p. 328).

Por su parte, autores como Carraher y Schliemann (2002) y Nunes y Bryant (2003) indican que hay una brecha entre las capacidades que los niños despliegan en el contexto escolar y sus habilidades para resolver problemas aritméticos en su entorno cotidiano. Lo interesante es que, por oposición a lo previsto por el modelo intelectualizado del aprendizaje, entre los patrones de comportamiento más recurrentes se encuentra el de los niños que exhiben ciertas dificultades para aprender en el entorno escolarizado, pero son plenamente capaces de resolver problemas aritméticos si se les coloca en una situación cotidiana a la que ya están habituados (Carraher et al., 2000).

Frente a este panorama planteado, surgen los siguientes interrogantes: ¿cómo trascender la aparente brecha entre aprendizajes formales e informales de las operaciones aritméticas? Si se tiene en cuenta que uno de los significados predominantes asociados a la adición y la sustracción es la realización de acciones sobre el mundo, ¿esto no implicaría trascender la visión cognitiva tradicional y optar por la posibilidad de considerar al estudiante y a las operaciones aritméticas en el marco de *prácticas* culturales de carácter *situado*? A continuación se dará respuesta a estas cuestiones:

Hacia un modelo situado de la adición y la sustracción

Para hablar de un enfoque situado, es preciso recurrir a la metáfora de la participación (Cobb & Bowers, 1999; Sfard, 1998). De acuerdo con esta metáfora, el conocimiento se asume como una actividad situada con respecto a la posición de un individuo en el mundo de los asuntos sociales, en ese orden de ideas el conocimiento es acción y las actividades de aprendizaje no se consideran aisladamente del contexto en el que toman lugar. Así, el niño es visto como una persona interesada en *participar en prácticas sociales* antes que en una acumulación privada de saberes (Rogoff, 1993).

Si se considera desde un enfoque situado, la adición y la sustracción aparecen desde las etapas iniciales de la interacción de los niños con los objetos físicos, en donde partiendo de la realización de actividades básicas de conteo, en las que hace uso de partes de su cuerpo (Puig & Cerdán, 1988) y posteriormente de la manipulación de objetos físicos en situaciones culturalmente significativas para ellos (ej. juegos, situaciones de compra y venta de objetos, medidas del tiempo, de volumen, de peso, entre otras) reconocen en su accionar, inicialmente de manera implícita, requerimientos inherentes a las situaciones de adición y sustracción. En consecuencia las situaciones problema de adición y sustracción permiten la conexión entre los saberes informales que los niños han acumulado como depósito de la tradición cultural en los primeros años de vida y los requerimientos planteados en los escenarios formales de escolarización, donde predomina el uso de notación simbólica o gráfica para denotar las relaciones y transformaciones de diversos elementos (Caballero, 2005).

Para circunscribir el sentido en el que se emplea el término “escolarización”, D’Amore (2000) define la escolarización del saber como

...el acto en larga medida inconsciente, a través del cual el alumno, en un cierto punto de su vida social y escolar (pero casi siempre en el curso de la Escuela Primaria), delega a la Escuela (como institución) y al maestro de la escuela (como representante de la institución) la tarea de seleccionar para él los saberes significativos (aquellos que lo son socialmente, por status reconocido y legitimado por la noosfera), renunciando a hacerse cargo directamente de su elección en base a cualquier forma de criterio personal (gusto, interés, motivación,...) (p. 323)

Sin embargo, en el diseño y desarrollo del currículo de educación básica primaria se ha tendido a reducir o a equiparar la enseñanza de las operaciones de adición y sustracción con la ejercitación de los estudiantes en los algoritmos que sustentan estas operaciones (López de los Mozos, 2001). Vergnaud (1991) define el algoritmo como “una regla (o un conjunto de reglas), que permite, para todo problema de una clase dada con anterioridad, conducir a una solución, si existe una, o, dado el caso, mostrar que no hay solución” (p. 258). Todo algoritmo cumple una serie de propiedades (López de los Mozos, 2001): La realización de un algoritmo es un proceso mecánico (*nitidez*), que conduce a los resultados deseados mediante un número finito de pasos, suficientemente simples (*eficacia*)-que pueden ser aritméticos o no- (Fandiño, 2010), y que es aplicable a todos los problemas de una cierta clase (*universalidad*).

Teniendo en cuenta lo anterior, si hay una fundamentación de la adición y la sustracción en los primeros años de educación básica primaria, que considere a las matemáticas como *una actividad definida social y culturalmente*, los cambios de actitud social del grupo social “clase” (Bagni & D’Amore, 2005; D’Amore, 2005) y se aborde el aprendizaje de las operaciones aritméticas desde las prácticas conceptuales, algorítmicas, estratégicas, comunicativas y de gestión de representaciones semióticas (Fandiño, 2010), esto contribuirá no sólo a buenos desempeños en estas áreas de contenido sino también redundará en una mayor apropiación de la matemática en los niños y niñas, así como en la mejora de los aspectos cognitivos y afectivos asociados al aprendizaje de la matemática.

En ese orden de ideas, un modelo psicológico alternativo de la adición y la sustracción, llamémoslo *situado* (Lave & Wenger, 1991; Robbins & Aydede, 2009), concibe al infante como un individuo que *participa en prácticas* tanto dentro como fuera del entorno escolar transformando continuamente su comportamiento, cognición y afectividad de una manera que se ajusta a cada situación. Las experiencias de la vida cotidiana se conciben como integradas en *prácticas socio-culturales*, en las que los participantes tienen unos roles implícitos

asignados por la tradición y disponen de medios afines al aprendizaje proveídos por la comunidad. Al respecto, Cole y Cagigas (2009) indican que las prácticas culturales son “maneras habituales de llevar a cabo actividades socialmente valiosas mediante la participación en algún grupo o unidad social circunscrito proximalmente al individuo” (p. 127).

En el entorno escolar, “la clase puede ser vista como una sociedad específica de individuos cuya unidad social se debe a la necesidad sancionada por ley de la realización de “prácticas” definidas y en gran medida compartidas” (D’Amore, 2017, p. 31). El niño, al pertenecer a la micro-sociedad “clase”, interactúa con compañeros que también pertenecen a ese escenario común en un entorno físico socialmente definido, donde los intercambios comunicativos de naturaleza cognitiva, afectiva y actitudinal con sus pares propician y fomentan su aprendizaje de las operaciones aritméticas en el aula, para el caso que aquí se aborda. No obstante, como sugiere D’Amore (2017) la escuela como sistema sociológico no puede desligarse de las expectativas y requerimientos del grupo social familia ni del contexto “sociedad”.

En una propuesta de tipo situado no existe una brecha entre dos tipos de saberes independientes (el académico y el de la vida cotidiana), sino una adaptación progresivamente más competente a situaciones que están interconectadas por los requerimientos intelectuales que se establecen en virtud de la participación del individuo en diferentes grupos sociales (ej. clase, familia, sociedad, cultura). En esta aproximación, el patrón en el que se presentan diversos perfiles de acierto según el contenido, presentación, estructura formal o tipo de actividad desarrollada para adicionar o sustraer es fácilmente explicable con base en la diversidad y complejidad de las situaciones a las que ha estado expuesto el individuo.

Bajo el modelo situado, dar cuenta del aprendizaje de la adición y la sustracción consiste en comprender el *ajuste* de las acciones del niño en el seno de prácticas habituales en su entorno cultural (Lave & Wenger, 1991; Robbins & Aydede, 2009). Desde esta perspectiva, Rogoff (1993) alude al concepto de *participación guiada* para definir “los procesos en donde cuidadores y niños colaboran en formas de organización e interacciones que apoyan al niño, mientras aprende a servirse de las destrezas y valores propios de los miembros maduros de su grupo social” (p. 97). De acuerdo con Radford (2017) en las teorías socioculturales que acuden

a la participación para explicar el aprendizaje, se define el aprendizaje como “ la adaptación por medio de mecanismos sociales a un mundo de prácticas culturales” (p. 116) (Énfasis agregado).

Si se analizan estas ideas a la luz del aprendizaje de las operaciones aritméticas, la concordancia de las respuestas del niño con los requerimientos de la situación no sólo está relacionada con su capacidad para aplicar ciertos algoritmos sino además con la adaptación de su sensibilidad y sus despliegues comportamentales hacia los objetos, personas o entorno de la actividad conjunta en la que participa.

Un estudio orientado por el modelo situado debería considerar tres aspectos: (a) la interacción que se da entre el niño y otras personas que comparten la práctica con él o se la enseñan activamente; (b) las normatividades que gobiernan cada situación aun cuando no sean enunciadas explícitamente por los participantes; son especialmente interesantes los patrones de actividad que se aprenden como ligados a una infraestructura, es decir, a ciertos objetos que comúnmente hacen parte de cada práctica cultural; y (c) los estados mentales del infante *suscitados por aquello* que esté presente durante su participación en cada práctica. En esa medida, tanto las respuestas del niño como sus reacciones afectivas constituyen información sobre su aprendizaje porque hacen posible evaluar si su orientación concuerda con los estándares aceptados para dicha práctica.

Triangulación asimétrica.

Con relación a la naturaleza de la interacción que se da entre el niño y otras personas que comparten la práctica con él o se la enseñan activamente, se han esbozado diversas conceptualizaciones desde enfoques socioculturales y desde la didáctica de la matemática, que son precursoras del concepto de triangulación asimétrica, el cual se desarrollará en esta sección.

En el marco de las teorías socioculturales, Lave y Wenger (1991) postulan como proceso central del aprendizaje situado la noción de *participación legítima periférica*, para caracterizar el hecho según el cual

los aprendices participan inevitablemente en comunidades de práctica y que el dominio del conocimiento y la destreza les exige a los novatos acercarse a la participación plena en las prácticas socioculturales de una comunidad. La participación periférica legítima permite hablar de las

relaciones entre novatos y veteranos y de las actividades, identidades, artefactos y comunidades de conocimiento y práctica. Trata del proceso por el que los nuevos participantes se convierten en parte de una comunidad de práctica (p. 29) (Énfasis agregado).

Rogoff (1993) en su concepto de participación guiada resalta que tanto la guía como la participación en actividades culturalmente significativas son fundamentales para considerar a los niños como aprendices del pensamiento

“activos en sus intentos de aprender a partir de la observación y de las relaciones con sus pares y con miembros más hábiles de su grupo social. De este modo, los niños adquieren destrezas que les permiten abordar problemas culturalmente definidos, con la ayuda de instrumentos a los que fácilmente pueden acceder, y construyen, a partir de lo que han recibido, nuevas soluciones en el contexto de la actividad sociocultural” (p. 30) (Énfasis agregado).

Hasta aquí cabe mencionar algunas comunalidades entre estas dos aproximaciones: En primer lugar, la existencia de relaciones simétricas (niños con sus pares), o asimétricas (ej. novatos y veteranos, o entre niños y miembros más hábiles de su grupo social) en función de niveles de conocimiento y experticia. En segundo lugar la convergencia en espacios comunes de interacción donde a partir de procesos comunicativos y del empleo de artefactos o instrumentos con significados asignados culturalmente es posible la adquisición paulatina de aprendizajes, en el marco de adaptación a prácticas sociales.

La didáctica de la matemática en sus formulaciones ha considerado también una tríada de componentes (estudiante-maestro-saber) que conforman el sistema didáctico (Chevallard, 1982) y ha formulado teorizaciones acerca de la manera como estos elementos se relacionan y cómo se da el saber en el marco de ese triángulo de la didáctica.

En ese sentido, una de las aproximaciones más estudiadas en didáctica de la matemática es la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1986, 1997) en la cual se da una relación entre: (a) estudiante (individuo, grupo o clase); (b) maestro; y (c) medio didáctico (milieu). El milieu o ambiente se define como “todos los recursos materiales o no, utilizados en el curso de un proceso de enseñanza y de aprendizaje de un determinado objeto del saber” (D’Amore & Fandiño, 2002, p. 4). En términos de Godino (1991):

una situación didáctica es un conjunto de relaciones explícitamente y/o implícitamente establecidas entre un estudiante o un grupo de estudiantes, algún elemento del entorno (incluyendo instrumentos

o materiales) y el maestro con el fin de permitir a los estudiantes de aprender-es decir: reconstruir-algún conocimiento. Las situaciones son específicas de tales conocimientos (p. 21).

Bajo esta aproximación el docente planifica situaciones didácticas cuyo objetivo consiste en propiciar que el alumno aprenda un conocimiento determinado.

Otra teorización de gran relevancia en didáctica de la matemática consiste en el enfoque de Chevallard (1982), quien propuso el concepto de *transposición didáctica* como un intento de responder a la pregunta ¿Cómo se da el conocimiento o saber en el marco del sistema didáctico?. Además de esta pregunta inicial, el autor se planteó la pregunta acerca de las condiciones que permiten la existencia de dicho conocimiento, que explican las modalidades de aparición, funcionamiento, de cambio y desaparición de tal conocimiento. A estas condiciones las denominó la *ecología del conocimiento enseñado* (Chevallard, 1994). Así, la transposición didáctica pretende ir más allá de la tradicional relación alumno-maestro, poniendo en el escenario el conocimiento, como parte del interjuego en el sistema didáctico y por ende en la relación didáctica. En palabras de Chevallard (1982):

La transposición didáctica designa pues el paso del saber sabio al saber enseñado. Pero la especificidad del tratamiento didáctico del saber puede comprenderse mejor a través de la confrontación de los dos términos, de la distancia que los separa, más allá de lo que los acerca e impone confrontarlos. En verdad, el “olvido” del saber sabio no oscurece en absoluto el desarrollo atento del análisis del saber enseñado: no es más que el primer tiempo de la sustitución, en el análisis del saber enseñado, de análisis del saber sabio, en la ilusión reencontrada de una identidad feliz entre ambos. (...)es precisamente el concepto de transposición didáctica lo que permite la articulación del análisis epistemológico con el análisis didáctico, y se convierte entonces en guía del buen uso de la epistemología para la didáctica (p. 6).

La transposición didáctica pretende responder a la pregunta de cómo se relaciona el saber enseñado con el saber matemático (o sabio) de los matemáticos, siendo un concepto que busca tender un puente entre estos dos tipos de saber. En ese orden de ideas, D’Amore y Fandiño (2017) indican que

En el clásico triángulo de la didáctica de la matemática, el Saber es el saber matemático resultado de la investigación, de los procesos históricos, en el curso de milenios. De éste el docente toma referencia en su formación, se supone que lo hizo o que sepa y quiera hacerlo; pero después, con una oportuna transposición didáctica, elige el saber de enseñar al estudiante, y lo enseña con el fin de que los estudiantes lo aprendan (p. 45).

Para pasar de este saber sabio al saber enseñado se asume que el saber sabio o académico debe sufrir una serie de deformaciones que lo hacen apto para ser enseñado. De ese modo, el saber enseñado es necesariamente distinto del saber a enseñar (Chevallard, 1982, 1998).

Adicional al paso del saber sabio o matemático al saber enseñado que caracteriza a la transposición didáctica, Fandiño (2002) indica que el proceso es más complejo porque no sólo hay que considerar el tránsito del saber sabio al saber por enseñar sino también el tránsito del saber por enseñar al saber enseñado.

Una vez expuestas algunas de las principales nociones que sustentan la transposición didáctica, puede advertirse que esta noción presenta una serie de problemas importantes si se quiere asumir una posición situada respecto de la enseñanza y el aprendizaje de las operaciones numéricas.

En primer lugar, la transposición didáctica sostiene el dualismo esquema-contenido, en tanto menciona que existen dos saberes diferentes (saber sabio y saber enseñado), que operan bajo esquemas distintos y se postula un mecanismo (transposición didáctica) para que se dé el tránsito entre estos dos tipos de saberes

Para ilustrar este argumento, Duica (2014) menciona que

En la medida en que se ha planteado la relación entre mente y mundo como una relación entre dos cosas separadas por un abismo insondable (...), la estrategia del dualismo esquema-contenido para dar cuenta del conocimiento del mundo exterior es introducir algún intermediario epistémico entre la mente y el mundo. Así, el tercer rasgo distintivo del dualismo esquema-contenido es la idea de que *el conocimiento requiere una intermediación epistémica entre la mente y el mundo*. Con esta salida, el dualismo esquema-contenido intenta dar cuenta de cómo son posibles las visiones de mundo (Duica, 2014, p. 36).

Así, en el caso de la transposición didáctica se aprecia que se cumplen las características de un dualismo, como lo es la postulación de dos términos aparentemente diferentes e irreconciliables entre sí, que colapsan en la comunicación si se busca establecer un diálogo directo entre ellos, por tanto hay un límite insalvable que sólo sería posible sortear mediante la invocación de la transposición didáctica como proceso que permite la transición del saber académico al saber enseñado. El mismo Chevallard (1982) en su definición de transposición didáctica expone los elementos que preservan el dualismo-contenido (se hará énfasis en los elementos del dualismo esquema-contenido):

La transposición didáctica designa pues el paso del saber sabio al saber enseñado. Pero la especificidad del tratamiento didáctico del saber puede comprenderse mejor a través de la confrontación de los dos términos, de la distancia que los separa, más allá de lo que los acerca e impone confrontarlos es precisamente el concepto de transposición didáctica lo que permite la articulación del análisis epistemológico con el análisis didáctico, y se convierte entonces en guía del buen uso de la epistemología para la didáctica (p. 6) (Énfasis agregado).

En segundo lugar, la aplicación de la transposición didáctica del saber sabio genera un saber enseñado que es “exiliado de sus orígenes y separado de su producción histórica en la esfera del saber sabio, legitimándose, en tanto saber enseñado, como algo que no es de ningún tiempo ni de ningún lugar” (Chevallard, 1982, p. 4).

Al respecto, cabe mencionar que desde la perspectiva situada que se va a abordar en esta investigación, no hay una diferencia insalvable entre estos dos saberes. Si bien se pueden hablar de distinciones entre aprendizajes formales e informales, o entre saber sabio y enseñado, las cuales son legítimas, esto no restringe la transacción que puede darse entre los tipos de saberes, antes bien, las transacciones comunicativas fluyen entre el saber sabio y el enseñado, precisamente porque transcurren en el trasfondo de un escenario común, de *formas de vida* (Wittgenstein, 1953; Rietveld & Kiverstein, 2014).

En ese orden de ideas, la noción de *triangulación asimétrica* bajo la cual se busca caracterizar en esta investigación a la interacción entre niños y las personas con las que participan en la práctica o se la enseñan, se nutre de elementos de la filosofía, la psicología sociocultural y la didáctica de la matemática, específicamente algunos elementos de D’Amore (2006), así como aspectos de la teoría de la objetivación (Radford, 2006, 2014, 2017).

La estructura de las situaciones de aprendizaje de la adición-sustracción implica actividades en las que interactúan dos individuos que coinciden sobre un estímulo que corresponde a alguna configuración física del entorno inmediato a los participantes, este esquema coincide con lo que se conoce como *triangulación* (Davidson, 2001).

La enculturación, de acuerdo con Kirshner (2004) es un proceso mediante el cual se adquieren disposiciones culturales- esto es- tendencia a comprometerse con personas, problemas, artefactos o consigo mismo- a través de la participación en formas particulares. En el proceso de enculturación matemática formal, que tiene como objetivo “iniciar a los niños en las simbolizaciones, las conceptualizaciones y los valores de la cultura matemática” (Bishop,

1999, p. 120) la triangulación que se da entre el docente o una persona que posee conocimiento y el aprendiz, es *asimétrica* (Duica, 2014; Lopes, 2014). Esto está relacionado con que uno de los participantes (el docente), posee un saber y un repositorio de conceptos heredados de una tradición cultural (McDowell, 2003) en la que ha participado, se apropia de ella y recurre a ese depósito común para introducir al niño en la resolución de problemas matemáticos. A fin de caracterizar el saber, resulta pertinente la noción de saber, propuesta por Radford (2017) como

“un sistema codificado de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente, En el caso de la aritmética estos procesos podrían ser de reflexión, de expresión, y de acción que emergieron en Mesopotamia de actividades humanas específicas, tales como contar ganado o granos, o medir los campos” (p. 101).

D’Amore (2006) había enunciado un indicio de la idea de asimetría en la relación maestro-estudiante al mencionar que en el triángulo de la didáctica, el lado maestro-estudiante debía sintetizarse con la dicción *relación pedagógica* (asimétrica). El triángulo enriquecido, propuesto por D’Amore (2006) se presenta en la Figura 2.

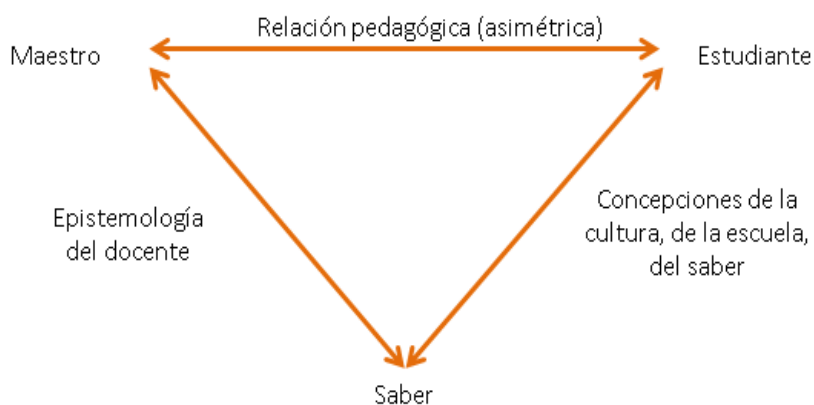


Figura 2. Triángulo de la didáctica. (Tomado de D’Amore, 2006, p. 242)

El esquema trídico que sustenta esta investigación se asienta desde la perspectiva filosófica, específicamente desde lo que se conoce como triangulación lingüística-condicionada (Duica, 2014), esto es, una *situación asimétrica de triangulación* en donde uno de los participantes (el niño) carece del sistema de conceptos formales, en este caso, los conceptos escolares de la adición y la sustracción. Al respecto, Duica (2014) indica que:

A diferencia de los contextos en los cuales los agentes no tienen la potencialidad de las capacidades lingüísticas y cognitivas, en este nivel los condicionamientos de la conducta a estímulos distales (mediados por la conducta del agente lingüístico) logran hacer que el agente prelingüístico vaya incorporando conductas lingüísticas que puede utilizar progresivamente, esperando respuestas intencionales lingüísticas del otro (p. 211).

En la psicología del desarrollo y en la psicología sociocultural, existen posturas que son acordes con la naturaleza de la triangulación asimétrica. Un ejemplo de ello es el planteamiento de Emler y Glachan (1988), según el cual

El pensamiento sólo se socializa a través del contacto con el pensamiento socializado. Dicho de otro modo, una condición necesaria para que ocurra el desarrollo intelectual es que el niño se confronte a niveles de pensamiento más elevados que el suyo Para que se dé un desarrollo intelectual es necesario pertenecer y participar en una comunidad humana; pero se tiene que tratar de una comunidad heterogénea desde el punto de vista cognitivo, en la que estén representados diferentes niveles del desarrollo cognitivo (p. 105) (Énfasis agregado).

En la triangulación asimétrica se supera el individualismo epistemológico reflejado en una visión sujeto-objeto, asumiendo una tríada sujeto-otro-objeto, que busca aportar a las conceptualizaciones sobre el triángulo de la didáctica en el sentido que los sujetos no son vistos como poseedores de esquemas en un sentido piagetiano, los tres elementos del triángulo no están separados de la sociedad, no existen fracturas en la comunicación y la emergencia de los objetos matemáticos es posible en virtud de los intercambios que tienen lugar en el marco de las prácticas sociales. En ese orden de ideas, la triangulación asimétrica no es equiparable con la transposición didáctica, puesto que en la triangulación asimétrica si bien hay diferencias en el estatus y los roles que desempeñan los participantes del triángulo (el maestro desde criterios conceptuales y el estudiante desde parámetros de actividad), es una perspectiva en la que no hay dualismo esquema-contenido, dada la posibilidad de intercambios comunicativos entre los participantes de las prácticas matemáticas. Al respecto, es pertinente la noción de *intersubjetividad* (Rogoff, 1993) que consiste en la comprensión compartida que logran las personas que se comunican sobre la base de la determinación de *coordenadas comunes* de la actividad conjunta.

En el marco del aprendizaje matemático, el niño que hasta ahora ingresa al sistema escolar está en proceso de adquirir los conceptos matemáticos relacionados con las operaciones

aritméticas y basa sus interacciones iniciales no en conceptos sino en parámetros de actividad relacionados con situaciones cotidianas.

En términos de D'Amore (2000):

Dado que esta escolarización comporta el reconocimiento del maestro como depositario de los saberes que cuentan socialmente, es también obvio que existe, más o menos contemporáneamente, una escolarización de las relaciones interpersonales (entre estudiante y maestro y entre estudiante y compañeros) y de la relación entre el estudiante y el saber: es lo que se llama “escolarización de las relaciones” (p. 323).

Teniendo en cuenta lo anterior, es posible postular dos tipos de enculturación: formalizada y no formalizada. En la enculturación formalizada el docente actúa reflexivamente orientando sus acciones de acuerdo con criterios conceptuales de la disciplina académica que enseña, mientras que el estudiante, que aún no cuenta con tal acceso al saber heredado, actúa (por lo menos al principio) irreflexivamente tratando de ajustar su comportamiento a los rastros de la actividad del docente. Al respecto, Taylor (2008) indica que el niño paulatinamente aumenta su participación competente en los procesos discursivos de enculturación reflexiva

Por oposición, en las situaciones de enculturación no formalizada, no hay una asimetría sustentada en la posesión de conocimientos académicos, pero sí una relacionada con el *dominio en la práctica* de formas de actuación para adicionar y sustraer cantidades. Lo interesante es que, *en ambos casos el aprendiz procede siguiendo irreflexivamente el rastro de actividad de aquel que sabe* actuar en este tipo de situaciones.

La gran diferencia entre los dos escenarios de aprendizaje reside en que en uno de ellos (el formalizado) el niño es impelido a mostrar reflexiva, explícita y conscientemente que su respuesta es consistente con los saberes académicos que se le han transmitido. Esto puede dar cuenta de la dificultad experimentada por los niños para aprender saberes formalizados y abstractos.

Existe evidencia empírica que sustenta la triangulación asimétrica, en el marco de procesos de enculturación. Rogoff (1993) realizó estudios acerca de los procesos de participación guiada en tareas de memoria y de planificación. Bunck, Terlien, van Groenestijn, Toll y Van Luit (2017) ilustran los dos tipos de enculturación cuando mencionan que los niños pequeños adquieren habilidades aritméticas tempranas de forma lúdica así como a través de la comunicación con adultos y compañeros, aspectos que no se han enseñado explícitamente. A

partir del grado primero en adelante, los niños comienzan a aprender matemáticas elementales de una manera más estructurada, conformándose a un plan de estudios de la escuela. Asimismo Powell y Driver (2015) sugieren los dos tipos de enculturación en el marco de la adquisición del vocabulario matemático, el primero de una manera directa (formal) cuando los docentes destacan una palabra y facilitan al estudiante la comprensión del significado de la palabra. El segundo se da de una manera indirecta (no formalizada) cuando el estudiante desarrolla una comprensión de la terminología en el tiempo a través de su uso en diferentes contextos. Así, la triangulación asimétrica constituye una aproximación que permite caracterizar los procesos iniciales de enculturación matemática formal en la adquisición inicial de los conceptos escolares relacionados con la adición y sustracción.

Por consiguiente, la adición y la sustracción constituyen prácticas culturales en las cuales el niño se involucra y participa interactuando con diferentes objetos (Cobb & Bowers, 1999; Kozulin, 2000; Montealegre, 2005, 2007; Vygotsky, 1979; Wertsch, 1985), que lo hace en situaciones cotidianas conjuntas de triangulación asimétrica con personas que conocen bien esas prácticas (generalmente los docentes). Esto es concordante con lo reportado con Radford (2006):

Una de las fuentes de adquisición del saber resulta de nuestro contacto con el mundo material, el mundo de artefactos culturales de nuestro entorno (objetos, instrumentos, etc.) y en el que se encuentra depositada la sabiduría histórica de la actividad cognitiva de las generaciones pasadas. (p. 113) (...) Vemos, pues, que hay dos elementos que desempeñan un papel básico en la adquisición del saber que son el mundo material y la dimensión social (p. 117) (Énfasis agregado).

Hasta aquí se ha asumido que cuando el niño aprende la adición y la sustracción lo hace porque participa en una *práctica matemática*; es preciso definir entonces lo que cabe dentro de esa noción. Lave (1991) define como “actividades cotidianas en entornos organizados culturalmente” (p. 29). Henning (2004) define el término práctica como las actividades cotidianas, rutinarias, de un grupo de personas quienes comparten una interpretación común.

En el contexto de la didáctica de la matemática se han propuesto definiciones de prácticas matemáticas, así como planteamientos del surgimiento de elementos matemáticos en el marco de prácticas. Aquí algunas definiciones:

Bishop (1988) indica que las matemáticas son un producto cultural, que se ha desarrollado como resultado de la participación en seis actividades de carácter universal: Contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar.

Chevallard (1991) define un objeto matemático como

“emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito" (pag. 8) (Énfasis agregado)

Por su parte, Godino (1999) define las prácticas como “acciones para resolver un problema matemático, para comunicar la solución a otras personas, para validar y generalizar la solución a otros contextos y problemas” (p. 199).

En cuanto a la naturaleza de estas prácticas, Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017) indican que éstas pueden ser de tipo discursivo-declarativo, indicando la posesión de conocimientos, o de tipo operatorio-procedimental, donde se enfatiza la posesión de una capacidad o competencia.

Ahora bien, el escenario normal de aprendizaje en los entornos escolarizados es la actividad en el aula de clase; entre los especialistas se ha señalado que debe ser pensada como una comunidad de prácticas compartidas, en donde se construye el conocimiento matemático (D’Amore, 2017; D’Amore et al., 2010).

Esta aproximación exige responder la siguiente pregunta: Dado que una práctica matemática es una situación cotidiana estructurada de cierta manera ¿Cómo es que se organiza?

Normatividad situada, descontento dirigido e infraestructura normativa.

Para responder esta pregunta, el enfoque de la *normatividad situada* (Cussins, 2002; Rietveld, 2008) constituye una propuesta que puede dar cuenta de la organización de la actividad en diversos escenarios de aprendizaje. Hay un antecedente de educación matemática en el trabajo de Yackel y Cobb (1996) que habla de normas sociomatemáticas como “aquellos aspectos normativos de la actividad del estudiante que son específicos a la matemática” (p. 458). Sin embargo ellos abordan la norma desde un enfoque reflexivo, en tanto una norma

sociomatemática es aquello que cuenta como una explicación y justificación matemáticamente aceptable.

El enfoque normativo situado que se asumirá a lo largo de este trabajo postula la existencia de una *normatividad implícita* en los procesos de aprendizaje socialmente mediados (Rietveld, 2008). Ese aspecto normativo tiene que ver con que los comportamientos, concepciones y respuestas del aprendiz son susceptibles de corrección por parte de otros que dominan ampliamente las actividades en las que está siendo introducido. Los mayores, padres, maestros o hermanos en grados de escolaridad más avanzada corrigen activamente los despliegues de los aprendices, no sólo a través de indicaciones sobre el acierto o desacierto del individuo cuando trata de solucionar un problema, sino a través de la intervención directa en las actividades que éste despliega al realizar tareas académicas y también mediante la enseñanza de patrones de actividad y de respuesta frente a los cuales el novato debe aprender a responder (Rietveld & Kiverstein, 2014).

La información normativa que orienta al aprendiz sobre cómo debe seguir puede expresarse explícitamente, como es claramente el caso de la enseñanza formal que realizan los maestros, o bien puede permanecer implícita en la forma de patrones de acción regulares en la cotidianidad que implican normalmente la interacción con ciertos objetos comunes (ej. monedas, canicas, entre otros). Al respecto, Rogoff (1993) indica que en la participación guiada, la guía puede estar *explícita e implícita*.

Todas estas actividades de los cuidadores, junto con los esfuerzos del niño (intencionales o no), tienen como objetivo captar información- a través de medios tales como la referencia social o las claves verbales y no verbales-sobre la naturaleza de las situaciones, el modo en que las interpretan los cuidadores y la forma más adecuada de enfrentarse a ellas (p. 99).

El carácter implícito de los parámetros que rigen las prácticas de aprendizaje está conectado con el reconocimiento afectivo más que intelectual de esas regularidades que gobiernan el quehacer correcto cuando se realizan adiciones o sustracciones. El asunto entonces tiene que ver con la inserción del niño recién escolarizado en un nicho que implica contenidos ligados a una tradición cultural de las personas de su sociedad (Rietveld & Kiverstein, 2014).

El bosquejo básico del proceso de formación *situado* parece constar de cuatro momentos:

1. Al ingresar a una institución educativa un individuo accede a un nicho que incluye elementos socialmente arreglados, acciones socialmente sancionadas como correctas o

incorrectas y patrones afectivos regulados para las prácticas compartidas. Al respecto, Gabora (2008) indica que “los elementos de la cultura comienzan a crear *nichos* (...) ellos comienzan a ser más complejos con el tiempo, de tal manera que se podría pensar que constituyen linajes culturales” (p. 104)

2. El individuo atiende a las configuraciones de su entorno socialmente enriquecido desplegando sus actividades de exploración mientras se nutre de la actividad instruida de sus mayores. Las situaciones así estructuradas configuran triángulos asimétricos (Duica, 2014) en el que los individuos A y B y los objetos de aprendizaje son los vértices mientras que las aristas corresponden a sus *actividades comunicativas*, la de *carácter exploratorio* del aprendiz (individuo A) y la *instruida* del experto (individuo B) (ver Figura 3).

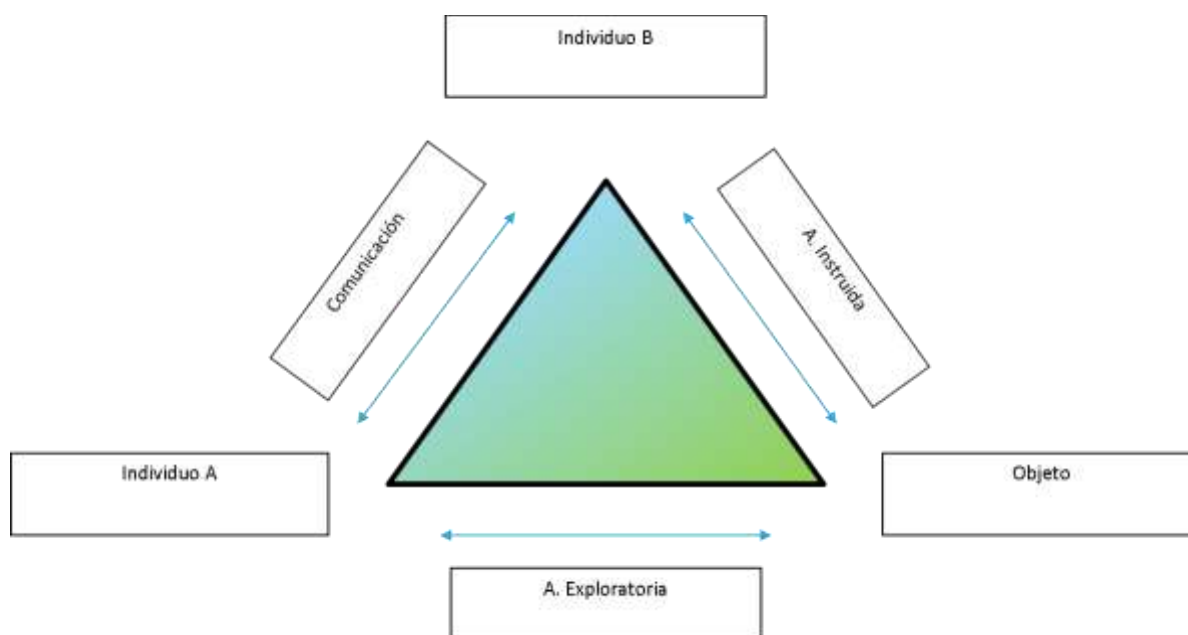


Figura 3. Triangulación asimétrica y actividades situadas

Cabe anotar que en la triangulación asimétrica se asume una distinción postural entre alumno y maestro en función de su rol, sin embargo esto no excluye el carácter intersubjetivo de la comunicación porque interactúan bajo un sistema de coordenadas común, en términos de formas de vida y juegos del lenguaje (Wittgenstein, 1953); por ello en la Figura 3 se aprecian relaciones de doble vía en la cual docente y estudiante se *afectan* mutuamente. En ese sentido: “este es un elemento fundamental de la cognición humana– al contrario de los animales, el ser humano es *afectado* profundamente por el artefacto” (Radford, 2006, p. 113).

3. La interacción continua conduce a la estabilización de **facilitaciones** o *affordances* (Kiverstein, 2015) que el individuo puede reconocer en los elementos que hacen parte de la tarea cuando está en presencia de las configuraciones normativas de las tareas o situaciones que posibilitan la expresión de los despliegues aprendidos. Al respecto, los mayores apoyan a los infantes a detectar el emparejamiento entre facilitaciones y habilidades corporales, dirigiéndolos a notar elementos específicos, relaciones o eventos sobre otras posibilidades disponibles (Zukow-Goldring, 2012). Es así que los *affordances* constituyen posibilidades de acción, es decir, relaciones entre los aspectos de un ambiente material y las habilidades disponibles en una forma de vida, esto es, las maneras en las que regularmente hacemos las cosas, patrones que a su vez se manifiestan en conductas normativas y costumbres de las comunidades (Rietveld & Kiverstein, 2014). Asimismo, las habilidades que se adquieren al participar en prácticas especializadas son habilidades para actuar adecuadamente de acuerdo con las normas de la práctica.

Aplicado al contexto de investigación del presente trabajo, son relevantes las ideas de Mugny y Pérez (1988):

si bien razones heurísticas y metodológicas a menudo obligan al investigador a disociar los diversos elementos constitutivos del desarrollo del niño, no obstante la comprensión total del niño exige que se le estudie de forma sistémica, teniendo en cuenta la totalidad de las dimensiones relacionadas con su desarrollo: inteligencia, afectividad, movimiento relaciones sociales. El niño constituye claramente un sistema de conjunto. El medio humano, cultural y social le son consustanciales (p. 28) (Énfasis agregado).

Teniendo en cuenta la anterior cita, el enfoque de triangulación asimétrica no desconoce el hecho que el individuo esté en un medio social; precisamente al hablar de nicho sociocultural se hace énfasis en el carácter social de la triangulación asimétrica.

4. Las reacciones afectivas del individuo se ajustan progresivamente a las facilitaciones reconocidas en el entorno configurando así una forma de *sensibilidad normativa situada* (Rietveld, 2008), mediante la cual el individuo es *afectado* por la manera como se configura normativamente una situación. Al respecto, Duica (2014) sugiere:

En este contexto el agente pre-cognitivo y prelingüístico es sensible a los condicionamientos de sus congéneres y del entorno, lo que incrementa su sensibilidad al error y con ello a la distinción entre las representaciones y los objetos (p. 211) (Énfasis agregado)

Es así que se puede hablar de una normatividad a nivel de prácticas socioculturales, que corresponde al *compromiso* que un individuo tiene con una o más posibilidades de acción en una situación particular. Al mencionar el término “compromiso” se usa en la acepción normativa invocada por Rietveld y Kiverstein (2014).

La noción de normatividad que nosotros adoptamos y que es aplicable a una persona hábil comprometida con ciertas facilitaciones, proviene de la capacidad del individuo para distinguir lo correcto de lo incorrecto, lo mejor de lo peor, o actividades adecuadas frente a actividades inadecuadas en un escenario material concreto y específico. Nosotros llamamos a este tipo de normatividad “normatividad situada” (Rietveld, 2008), porque es la situación concreta, ampliamente entendida, que hace la actividad de un individuo adecuada o no (p. 33) (Énfasis agregado).

Este proceso de inserción socio-cultural puede ser arduo para el individuo, en algunos casos los niños experimentan muchas dificultades para responder a las exigencias de sus mayores. Dado que la reacción afectiva del infante es moldeada por su vida en el entorno escolar, se pueden evaluar las expresiones del niño en esta faceta para dar cuenta de las dificultades que experimenta en el proceso de aprendizaje.

Una explicación a la noción de dificultad de aprendizaje, en consonancia con una visión triádica del aprendizaje matemático, podría ser aquella que sitúe su énfasis en el grado de accesibilidad y dominio de los estudiantes de los saberes matemáticos que la cultura y la tradición ofrecen, es decir, las dificultades que un estudiante presenta en el aprendizaje de las operaciones aritméticas podrían tener su origen en los problemas para *reconocer la naturaleza espacio-temporal de las situaciones matemáticas, los objetos involucrados en dichas situaciones y la normatividad situada de las mismas*.

Así pues, la idea central que aquí nos ocupa es que cuando los comportamientos y actividades del niño **no se ajustan normativamente** a los requerimientos de la situación, el niño experimenta las situaciones de aprendizaje como difíciles, y despliega una reacción afectiva dirigida a esa situación en particular, reacción que recibe el nombre de **descontento dirigido** (Rietveld, 2008). Rietveld (2008) definió el descontento dirigido como “conducta afectiva” porque: “...muestra que el curso de acción que estaba en curso es afectado ahora como un resultado del estado percibido del objeto” (p. 976). Esta aproximación es pertinente para analizar cualquier concepto matemático.

En el caso de las operaciones aritméticas, por mencionar un ejemplo, el descontento del niño en las tareas de adición o sustracción es una muestra de su nivel de *afectación* que está enlazado al desarrollo de las competencias propias para la resolución de dicho tipo de tareas. Se trata de una reacción afectiva de la apreciación en la acción, en que el individuo reconoce aspectos particulares o globales de una tarea y encausa sus despliegues orientando sus movimientos, mientras reduce la insatisfacción que experimenta en dicha situación. Así pues, el descontento dirigido surge cuando en las interacciones cotidianas de enseñanza/aprendizaje de la adición y la sustracción el niño no se ajusta normativamente a los objetos y parámetros de actividad que se encuentran en una práctica que se desarrolla en un marco espacio-temporal delimitado. Esta sensibilidad a la corrección se adquiere gradualmente en el marco de interacciones cotidianas, permitiéndole al niño apreciar posibilidades en cada situación.

La noción de descontento dirigido es cercana a conceptualizaciones que se han abordado desde didáctica de la matemática y la psicología. En la primera vertiente, un ejemplo de ello se puede encontrar en D'Amore (2006), al hablar de conflicto cognitivo en el plano social:

Yo describo las cosas como si el estudiante tuviese consciencia de lo que sucede, pero no es así. Muchas veces no es así. El estudiante advierte incomodidad, siente que existe algo que está mal, pero no siempre (es más: casi nunca) sabe darse cuenta de cuál es la causa de su malestar (p. 154).

Así, este malestar o insatisfacción no siempre es negativo, antes bien, puede fungir como motor para el aprendizaje porque propicia la búsqueda de *affordances*, de posibilidades en la acción.

En psicología, Mandler y Watson (1966) indican que el individuo puede emitir respuestas emocionales frente a interrupciones, es decir, cuando no se puede finalizar algo que ya ha iniciado, debido a discrepancias entre lo esperado y lo percibido en un determinado contexto de práctica.

Por su parte, Carugaty y Mugny (1988) indican que

La fuente de esos conflictos generalmente es situada en las diversas propiedades de los estímulos, tales como su novedad, su ambigüedad, etc., propiedades que efectivamente pueden configurar un conflicto entre respuestas simbólicas incompatibles y, dada la alerta y la activación emocional de una especie de “curiosidad epistémica”, puede desencadenar un comportamiento exploratorio orientado a resolver tal “conflicto conceptual” (p. 79) (Énfasis agregado).

En el marco de la triangulación asimétrica, de acuerdo con la Figura 4, el descontento dirigido puede surgir en la interacción del aprendiz con los objetos de aprendizaje (descontento dirigido exploratorio), así como en la interacción del docente con los objetos de aprendizaje (descontento dirigido instituido). En los procesos comunicativos mediador-aprendiz emergen proto-construcciones inexpertas, que son aquellas verbalizaciones incipientes que formulan los niños cuando ingresan en procesos de enculturación formal. Un ejemplo son los esquemas protocuantitativos (cambios de cantidad, como incremento-decremento) (Resnick, 1992).

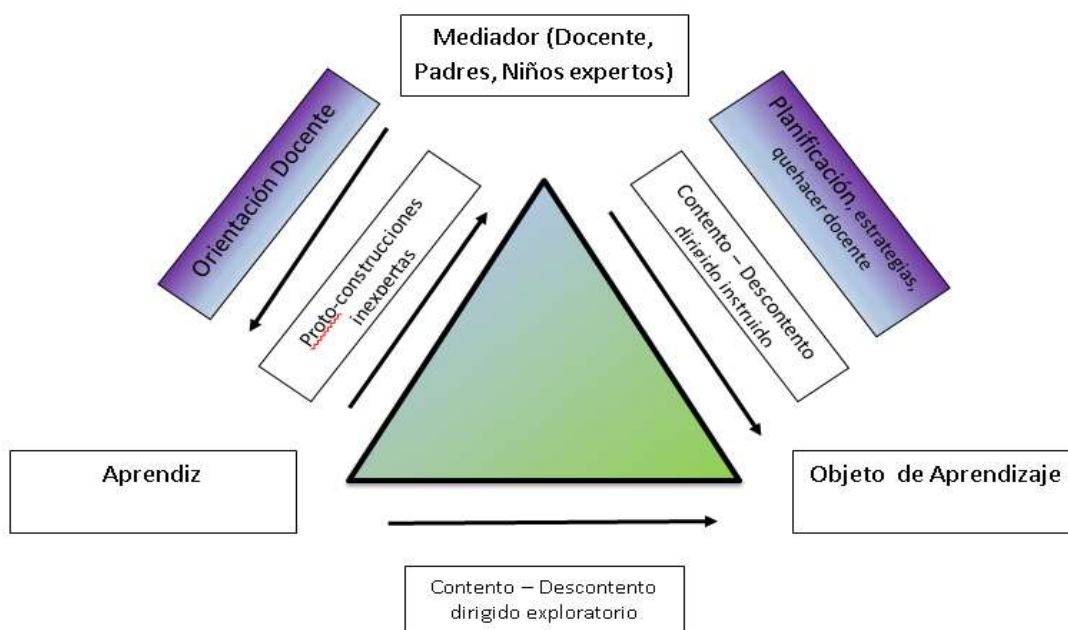


Figura 4. Triangulación asimétrica y descontento dirigido

En ese sentido, Rietveld y Kiverstein (2014) mencionan que lo importante para la coordinación exitosa con las actividades de los demás es que uno puede actuar de una manera confiable que se *ajusta* con una práctica sociocultural, y con los detalles específicos de la situación particular en que la actividad tiene lugar.

Esta afirmación es consistente con lo que Radford (2006) enunció acerca del pensamiento: El pensamiento es una *praxis cogitans* esto es, una práctica social (Wartofsky, 1979). De manera más precisa, el pensamiento es considerado una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos (p. 107) (...) El pensamiento es una re-flexión, es decir, un movimiento dialéctico entre una realidad constituida histórica y culturalmente y un

individuo que la refracta (y la modifica) según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios (p. 108) (Énfasis agregado).

Al analizar la actividad conjunta y los detalles específicos de las situaciones, Okuyama et al. (2011) introdujeron la noción de **infraestructura normativa** para describir los elementos de la configuración física del entorno que suelen servir como depósitos de información sobre esas situaciones. Los autores mencionan que la infraestructura normativa está conformada por tres componentes:

Objetos: Se trata de cuerpos del ambiente físico que pueden ser manipulados durante los despliegues que cada individuo realiza, por lo cual sirven para quienes los usan como depósitos de información normativa. Desde el aprendizaje de las matemáticas, Hughes (1987) ilustra la idea de los dedos como objeto normativo: “Los dedos pueden desempeñar, por lo tanto, un papel decisivo en la conexión entre lo abstracto y lo concreto porque son representaciones de objetos y, al mismo tiempo, objetos por derecho propio” (p. 73-74) (Énfasis agregado).

Lugares: Es un área del entorno circundante en la que se lleva a cabo la práctica y en la que están presentes los objetos “normativos”. El ambiente material es modelado por las prácticas socioculturales que se desarrollan en un ambiente sociomaterial.

Momentos: Son los segmentos temporales donde se desarrolla la actividad, para la cual se encuentran disponibles los objetos “normativos” (Fajardo, 2016). Así, “las actividades concretas en las que nos comprometemos como participantes en una práctica se adaptan a los detalles cambiantes de las situaciones materiales particulares” (Rietveld & Kiverstein, 2014, p. 340).

Un ejemplo del momento y lugar normativo se encuentra en la educación matemática realista de Hans Freudenthal (Bressan, Gallego, Pérez, & Zolkower, 2016; Treffers, 1993). Entre los escenarios que se plantean para el aprendizaje de la adición y la sustracción en los primeros grados de escolaridad está la situación paradigmática del bus, creada por Van den Brink (1984) y comentada por Van den Heuvel-Panhuizen (2001), en el que la enseñanza comienza inicialmente con una situación de la vida real en la cual el estudiante debe actuar como un conductor de bus. Durante el recorrido del bus los pasajeros ingresan y salen del mismo, y en cada parada los estudiantes deben establecer el número de pasajeros en el bus. Posteriormente el ejercicio se dibuja mediante lápiz y papel. Cuando el niño participa en la

actividad, no sólo asume un rol específico, sino que en la práctica misma va dotando de sentido las acciones que suceden en el vehículo (cuando suben pasajeros *hay más personas en el bus*, mientras que cuando se bajan pasajeros *tengo menos personas en el bus*), lo que progresivamente va habilitando al niño a una comprensión gradual de un modelo intuitivo (entre varios posibles) de la adición y sustracción. En cuanto a la dimensión temporal, las acciones suceden en una configuración temporal concreta compartida y conjunta, y es dentro de ese escenario espacio-temporal que cobran sentido para el niño las situaciones aditivas.

En el aprendizaje de la adición y la sustracción cada situación práctica tiene una normatividad situada implícita; esto es, cuando participan en situaciones que exigen adicionar o sustraer, los niños reconocen los elementos de la infraestructura normativa, involucrándose en la actividad de resolución a través de la interacción con ciertos objetos y alguien más; los diversos cursos de acción que emprenden son corregidos por sus interlocutores, tanto implícitamente (por sus muestras de descontento dirigido a su despliegue) como explícitamente (en la forma de explicaciones sobre la corrección de sus respuestas). Entonces, el aprendizaje se consolida cuando el niño despliega un comportamiento que se ajusta a los patrones situados para esa actividad y a los criterios conceptuales que otro, generalmente el maestro, trata de comunicarle (Fajardo, 2016).

Ahora, teniendo en cuenta que existen prácticas compartidas por una comunidad ¿Cómo se pueden caracterizar y cuáles son sus rasgos decisivos cuando nos enfocamos en el aprendizaje de la adición y la sustracción?

Prácticas de aprendizaje matemático.

En este contexto normativo situado se puede decir que una práctica de aprendizaje matemático es una actividad conjunta que se desarrolla en un nicho sociocultural, la cual tiene posibilidades de acción en el marco de unos requerimientos normativos y de una infraestructura específica a la situación.

Así, para responder a la anterior pregunta, las prácticas de aprendizaje matemático se pueden caracterizar de acuerdo con la articulación entre el comportamiento de los participantes y la infraestructura normativa. La clasificación que se propone en la presente investigación considera la transición que se da desde prácticas con objetos concretos y proximales, hacia prácticas culturales donde las exigencias de enculturación matemática

formal (Bishop, 1999) son cada vez mayores (Hughes, 1987; Bunck et. al. 2017). Las prácticas de aprendizaje matemático se pueden clasificar así en tres categorías:

Prácticas corporeizadas: Situaciones en las que el estudiante hace uso de partes de su cuerpo para realizar operaciones relacionadas con la agregación y el retiro de elementos. En este tipo de prácticas los objetos normativos son próximos al niño (son partes de su cuerpo), están presentes en lugares circundantes (lugares cercanos a su cotidianidad) y en el marco de un momento inmediato.

Prácticas de investidura: Son aquellas en las que la tradición cultural ha delineado cierta organización de la actividad, en estos casos el ajuste del individuo tiene que ver con su capacidad para orientarse en la situación con base en el reconocimiento de la infraestructura en la que se ha *invertido* las maneras adecuadas de proceder. En estas prácticas los objetos son *distales* (objetos concretos pero trascienden el cuerpo del niño), los lugares *son adscritos* (los objetos se vinculan con escenarios específicos asignados por la cultura) y el momento *es ocasional*.

Prácticas formalizadas: Tienen lugar en espacios académicos institucionalizados y se caracterizan por la invocación de información transmitida a través de la enseñanza, lo cual incluye criterios conceptuales y reglas que rigen las operaciones. Son las prácticas que se aprenden en el proceso de enculturación matemática formal en los que se involucra el niño cuando ingresa a la escuela, las cuales exigen el reconocimiento y manipulación de objetos simbólicos (números y operadores). Estas prácticas se caracterizan por contar con objetos simbólicos, lugares y momentos abstractos.

Una vez expuestos los principales aspectos que subyacen al modelo normativo situado de la adición y sustracción, el próximo reto consiste en presentar los aspectos evaluativos de dicho modelo y cómo estos se articulan para generar un modelo de evaluación de las dificultades de adición y sustracción, Pero antes de ello es preciso hacer una breve revisión de cómo se aborda la evaluación en matemática desde una aproximación educativa tradicional para luego introducir al lector en los componentes evaluativos del modelo situado que se proponen en esta investigación.

Evaluación de la dificultad en matemáticas

La evaluación en el marco de la Didáctica de la Matemática, es entendida como “el conjunto de las acciones mediante las cuales se reconocen las características del aprendizaje de los estudiantes y se determinan los aspectos en los cuales se debe centrar la ayuda que permite garantizar mejor este aprendizaje” (Fandiño, 2010, p. 20). Si se considera la visión triádica del aprendizaje matemático, la evaluación sirve para tomar decisiones sobre el contenido (transposición didáctica) y sobre la metodología del trabajo en aula (ingeniería didáctica), para medir y dar una calificación, para tomar decisiones sobre el ambiente de clase y para comunicar a los alumnos lo que es importante. Asimismo la evaluación matemática proporciona elementos reflexivos y de aplicabilidad cuando se le mira en relación con los cinco componentes del aprendizaje matemático (Fandiño. 2006, 2010), de modo que se propende no sólo por una integralidad en el aprendizaje matemático sino también por la integralidad de la evaluación en matemática.

Un recorrido histórico por la evaluación en matemáticas (Tabla 1), muestra que el concepto de dificultades de aprendizaje en matemáticas es concomitante con el desarrollo de la evaluación en matemáticas, en donde el *qué se evalúa* va desde las habilidades cognitivas hasta el proceso de enseñanza- aprendizaje. En cuanto a la *finalidad de la evaluación*, en el siglo XXI la tendencia se dirige a comprender y cualificar el proceso de enseñanza y de aprendizaje, así como a diagnosticar las dificultades en el marco de un proceso triádico, donde estudiante, docente y objetos de enseñanza son el centro del análisis. Sin embargo, lejos de que una perspectiva remplace a otra, en la actualidad coexisten todas las aproximaciones evaluativas en el amplio abanico de la comprensión de la dificultad en matemáticas, lo que muestra la multiplicidad de enfoques, según se quiera abordar uno u otro aspecto del aprendizaje matemático y sus dificultades asociadas.

En cuanto a la *finalidad de la evaluación* de la dificultad en matemática, según Blanco (2009) “La coyuntura actual no sólo gira en torno a la definición de la dificultad, sino que se extiende a los procedimientos de detección y evaluación. Pues, aun empleando la misma definición, se observan diferencias en el porcentaje de niños y niñas detectado por los diversos estados” (p. 25) (Énfasis agregado).

El énfasis agregado obedece a que la diversidad de instrumentos de medida que pueden ser empleados para la detección de dificultad- tests normativos, tests de criterio y procedimientos observacionales o experimentos de enseñanza (Dockrell & McShane, 1997) - plantean no sólo concepciones diferenciales desde el punto de vista médico, educativo o psicológico, sino que el establecimiento de puntos de corte tiene implicaciones en la manera como se rotula la dificultad en matemáticas en función de desempeños frente a un grupo normativo o en relación con estándares curriculares.

Tabla 1.

Reflexión histórica sobre la evaluación y algunas de sus preguntas

Períodos	Inicios del siglo XX	1940-1970	La década de los ochenta	Hacia el siglo XXI
Las matemáticas son una materia...	Ciencia de aplicación Reguladora social Básicamente deductiva	Ciencia teórica y de aplicación	Ciencia positivista Con potencial inductivo	Abierta al descubrimiento Base de la modelización Inductiva-deductiva Potencial heurístico
Lo que se evalúa prioritariamente es...	Habilidades cognitivas	Habilidades mentales Categoría de objetivos Afectivo-cognitivos	Jerarquías de conducta. Estilo-resultados	El propio proceso de enseñanza-aprendizaje
Se evalúa para...	Ejercer un control social Fomentar competitividad	Mejorar personalmente	Identificar errores Modelos cognitivos Identificar lagunas Reconocer conocimiento	Mejora del proceso enseñanza-aprendizaje Diagnosticar Regular el proceso
Quién evalúa y se evalúa es...	El profesor evalúa al alumno	El profesor y el alumno son objetos de evaluación	Apoyar una política Tomar decisiones Profesor, alumno y proceso son importantes	Profesor, alumno y proceso global son valorados globalmente
Los formatos usados son...	Similares a los que se usan en técnicas psicométricas	Tests y valoraciones sobre el alumno	Análisis diagnóstico sobre errores y concepciones	Prácticas en el aula Análisis del contrato Procesos de planificación

(Adaptado de Giménez et al., 1997, p. 17)

Uno de los criterios más empleados es la identificación de estudiantes con dificultad en matemáticas cuando su puntuación cae por debajo de un rango determinado en pruebas normativas o de competencia curricular. Blanco (2009) menciona que en muchos casos se

utiliza la puntuación 90 para pruebas con media igual a 100, el percentil 25-30 (Badian, 1999); o el percentil 15 o 20 (Siegel, 1999). Algunos otros estudios tienen como punto de corte el percentil 14 (Ostad, 1997), o el percentil 11 (Powell & Driver, 2015). El CIE-10 (Organización Mundial de la Salud, 2000) establece como criterio dos o más desviaciones típicas de la media del grupo, mientras que Kavale y Forness (1995) sitúan una baja competencia curricular aquella que se sitúe a 1.5 desviaciones típicas por debajo de la media de su grupo de edad.

Una vez se catalogan las dificultades de aprendizaje en adición u sustracción, una tendencia consiste en realizar intervenciones dirigidas a comprender la naturaleza de tal dificultad, por ejemplo, el análisis de los errores en sustracción (Baxter & Dole, 1990; Watson, Lopes, Oliveira, & Judge, 2018), adquisición de habilidades de cómputo (Uprichard & Collura, 1977), comprensión conceptual y procedimental (Burns et. al., 2015; Greene, Tiernan, & Holloway, 2018), o instrucción en vocabulario aritmético (Powell & Driver, 2015).

En cuanto a *aproximaciones metodológicas contemporáneas* para la evaluación de dificultad, se han empleado diseños de investigación de métodos mixtos, donde se utilizan pruebas, cuestionarios, observaciones, entrevistas, pruebas proyectivas y se analizan los datos de manera cualitativa y cuantitativa (Mundia, 2012). Otras aproximaciones consisten en estudios longitudinales (Blanco, 2009; Ostad, 1997), y postulación de trayectorias de desarrollo y aprendizaje (Cobb & Bowers, 1999; Clements, Sarama, & Liu, 2008; Vanbinst, Ceulemans, Peters, Ghesquière, & De Smedt, 2018).

Con relación a los *instrumentos de evaluación* de la dificultad en matemáticas, se observan dos tendencias: (a) el uso de instrumentos o baterías ya construidas; o (b) la elaboración de instrumentos desde perspectivas cognitivas o socioculturales. Dentro de la primera categoría se documenta el uso de instrumentos como medidas de fluidez en adición y sustracción (Fuchs, Hamlett, & Powell, 2003) y las subescalas de aritmética de pruebas como el Wechsler Individual Achievement Test– 3rd Edition (Wechsler, 2009), el Woodcock–Johnson Tests of Academic Achievement–III (WJ-III) (Woodcock, McGrew, & Mather, 2001), y el Kaufman Test of Educational Achievement–2nd Edition (Kaufman & Kaufman, 2004).

En la segunda categoría, desde un enfoque cognitivo se encuentran, a modo de ejemplos, el Research - Based Early Maths Assessment (Clements et al., 2008) que mide conocimiento

matemático y habilidades en preescolares, la prueba evolutivo-curricular de Tordesillas (PRECUMAT) (Blanco, 2009), que es una escala de producción escolar con diferentes ítems que miden la variable Competencia Curricular en matemáticas en niños de primer y segundo ciclo de educación primaria en España. Desde un enfoque sociocultural cabe señalar el Instrument for Observing and Analyzing children's Mathematical Development (OAMD) (Bunck et. al., 2017) que busca analizar las fortalezas y debilidades de los conocimientos básicos de los niños en aulas regulares desde jardín hasta 3° grado. Para ello postulan 4 niveles de la teoría de la acción de Van Groenestijn (2002). El primer nivel alude a la matemática informal y los procedimientos informales, el segundo consiste en la representación de acciones y situaciones matemáticas de la vida real, el tercer nivel corresponde a la representación de modelos y diagramas y el cuarto nivel alude a las operaciones matemáticas formales.

Teniendo en cuenta este breve panorama, se aprecia a nivel de evaluación de la dificultad el uso de definiciones ambiguas, la falta de consenso sobre los criterios diagnósticos y que en ocasiones no existe una articulación entre los procesos de evaluación e intervención.

Cabe preguntarse cómo se está efectuando la identificación de estudiantes con dificultades en matemáticas en nuestro país, a fin de tener una panorámica local que permita caracterizar el fenómeno, considerando que los instrumentos de medición derivados del modelo de evaluación que se planteará más adelante se aplicaron en el contexto nacional.

Evaluación matemática en Colombia.

En Colombia, de acuerdo con el Documento 11 que estructura la implementación del Decreto 1290 de 2009 (Ministerio de Educación Nacional, 2009) existen tres modalidades de evaluación de los estudiantes: Una evaluación de carácter *institucional o de aula*, que es la que realizan los establecimientos educativos para valorar el nivel de desempeño de los estudiantes; una evaluación *internacional*, en la cual los estudiantes participan en pruebas que dan cuenta de la calidad de la educación frente a estándares internacionales y una evaluación *nacional* que emplea pruebas censales para monitorear la calidad de los establecimientos educativos con fundamento en los estándares básicos de competencias. En el caso de las evaluaciones de aula, el mismo Documento reconoce la diversidad del alumnado en cuanto a su capacidad de aprendizaje, en su motivación para aprender y en las estrategias para llegar al conocimiento.

Debe ser claro que nadie va a la escuela con el propósito de no “aprender nada”, ser excluido o “perder el año”; por el contrario, se llega a ella, con diferentes ritmos y desarrollos de aprendizaje, intereses y disposiciones, los cuales deben ser capturados, canalizados y enfocados por los maestros y los establecimientos educativos, para conducirlos a su objetivo principal: lograr que todos aprendan; que todos sean competentes en el mundo actual y en la sociedad en que se desempeñan (Ministerio de Educación Nacional, 2009, p. 21-22).

En ese orden de ideas, y en aras a impactar los procesos de evaluación en el aula, el Ministerio de Educación Nacional ha formulado dos estrategias, basadas en una evaluación de tipo criterial: Las Evaluaciones Diagnósticas en el marco del Programa Todos a Aprender y la formulación de los Derechos Básicos de Aprendizaje.

Las Evaluaciones Diagnósticas diseñadas bajo la estrategia Todos a Aprender son instrumentos que permiten identificar el desarrollo de los procesos de aprendizaje de los estudiantes de segundo a quinto grado en las áreas de Matemáticas y Lenguaje. El objetivo de estas evaluaciones consiste en “identificar los diferentes niveles de desempeño que tiene los estudiantes en cada grado, generar hipótesis de dificultades en la comprensión de algunos saberes y proporcionar un material educativo para el aula y la formación de los docentes” (“Evaluación Diagnóstica,” 2009). Para ello se evalúan los aprendizajes que se espera que los niños desarrollen en cada área y grado, de acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias.

Los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) consisten en un conjunto de aprendizajes estructurantes que han de aprender los estudiantes en cada uno de los grados de educación escolar desde transición hasta once, en las áreas de lenguaje, matemática, ciencias naturales, ciencias sociales y transición. Para ello se seleccionan unos saberes claves que indican lo que los estudiantes deben aprender en cada grado escolar. La estructura para la enunciación de los DBA está compuesta por tres elementos centrales: El enunciado, las evidencias de aprendizaje y el ejemplo (Ministerio de Educación Nacional, 2016). Un modelo de un DBA se aprecia en la Figura 5.

A partir de lo anterior se puede observar que desde las entidades gubernamentales se prioriza el discurso de la evaluación matemática centrada en los pensamientos y procesos generales en cada grado de escolaridad, donde hay un marcado énfasis en lo conceptual y procedimental; si bien se habla de situaciones contextualizadas, el carácter “contextual” de los

enunciados remite usualmente a la recuperación de hechos conceptuales más que al análisis de prácticas de aprendizaje matemático o a la consideración de componentes afectivos y comunicativos en la enseñanza de la aritmética.

Por ello, considerando el escenario actual nacional y la importancia de los elementos normativos situados en la comprensión no sólo de la adquisición progresiva de los conceptos formales de la adición y la sustracción sino también de las dificultades que surgen en el aprendizaje de dichas operaciones en los primeros años de educación básica primaria, se pone a consideración esta tesis doctoral, que tiene como objetivo *proponer un modelo de evaluación de las dificultades de aprendizaje de la adición y la sustracción, que considere los aspectos normativo-situados que no han sido abordados por los modelos de evaluación tradicional, a partir de diferentes fuentes de evidencia de validez.*

A continuación se procederá a esbozar la estructura del modelo evaluativo situado aplicado a las dificultades en adición y sustracción.

2. Utiliza diferentes estrategias para contar, realizar operaciones (suma y resta) y resolver problemas aditivos.

Evidencias de aprendizaje

- Realiza conteos (de uno en uno, de dos en dos, etc.) iniciando en cualquier número.
- Determina la cantidad de elementos de una colección agrupándolos de 1 en 1, de 2 en 2, de 5 en 5.
- Describe y resuelve situaciones variadas con las operaciones de suma y resta en problemas cuya estructura puede ser $a + b = ?$, $a + ? = c$, o $? + b = c$.
- Establece y argumenta conjeturas de los posibles resultados en una secuencia numérica.
- Utiliza las características del sistema decimal de numeración para crear estrategias de cálculo y estimación de sumas y restas.

Ejemplo

Emplea una calculadora simple (o alguna aplicación que la simule) y explora el efecto que tiene el signo = (igual) a medida que se presiona varias veces después de digitar una suma o una resta.

Figura 5. Ejemplo de Derecho Básico de Aprendizaje de Matemáticas Grado 1° (Tomado de Ministerio de Educación Nacional, 2016, p. 8).

Modelo de evaluación de la dificultad en matemáticas, desde un enfoque situado del aprendizaje

Una de las ventajas más importantes de la triangulación asimétrica, la normatividad situada, el descontento dirigido y la infraestructura normativa de las situaciones de adición y sustracción, es que proveen herramientas nuevas para abordar el problema de las dificultades de aprendizaje, lo que hace posible proponer una visión alternativa de la dificultad, así como otras posibilidades de analizarla.

En ese orden de ideas la dificultad en matemáticas se asume aquí como fallos en el acceso y reconocimiento de la naturaleza espacio-temporal de las situaciones matemáticas, los objetos involucrados en dichas situaciones y la normatividad que subyace a las mismas. La unidad de análisis es *la situación de enseñanza y de aprendizaje como una sola y misma actividad, entendida como una interacción entre individuos que realizan actividades en un entorno común*. Esta visión es afín con la conceptualización de *labor conjunta* de Radford (2014):

Lo que decimos en la teoría de la objetivación es que, desde el punto de vista de lo que ocurre en la escuela, enseñanza y aprendizaje no son dos actividades separadas, una llevada a cabo por un profesor que guía al alumno, la otra por un alumno que hace las cosas por sí y para sí mismo, sino como una sola e inseparable actividad—una para la cual Vygotsky utilizaba el término ruso *obuchenie*. En este contexto, la enseñanza-aprendizaje es la expresión de una forma de vida: una labor conjunta que ocurre en un espacio socio-político al interior del cual tienen lugar el conociendo (“knowing”) y el volviéndose (“becoming”), esto es, volviéndose sujeto en tanto que proyecto histórico-social siempre inconcluso, siempre en movimiento (p. 138) (Énfasis agregado).

Esto conduce a postular una propuesta teórica a la evaluación de la dificultad, que considera el carácter relacional de la triangulación, la cual se presenta en la Figura 6. Dicha propuesta, además de considerar las situaciones de aprendizaje y las normas que subyacen a las mismas, reconoce diferentes tipos de dificultad en matemática (Brousseau, 1983; D’Amore et al., 2010), diferentes prácticas matemáticas de naturaleza conceptual, algorítmica, estratégica, comunicativa o semiótica (Fandiño, 2010), la existencia de intersubjetividad (Rogoff, 1993) y la noción de aprendizaje de Radford (2006, 2014, 2017), que se define como la transformación del saber “en sí”-entendido como formas de hacer, pensar y reflexionar codificadas culturalmente- a un saber “para sí”, todo ello en el marco de un trasfondo común de actividades conjuntas donde se da un proceso dialéctico de actualización y materialización

del saber. Esto no sólo tendrá implicaciones importantes a nivel de las operaciones aritméticas sino también en el diseño de instrumentos de evaluación de estas dificultades.

Así, las situaciones de enseñanza-aprendizaje pueden abordarse desde tres perspectivas que implican a su vez tres tipos de dificultad: (a) El desempeño del estudiante frente a un objeto matemático que en su cotidianidad prescribe ciertas acciones (relación estudiante – objeto matemático), que se puede denominar *dificultad experimentada*; (b) la relevancia de un ítem como objeto de aprendizaje pertinente para las situaciones matemáticas cotidianas que enfrenta el estudiante (relación docente – objeto matemático), que se puede denominar *dificultad instituida*; y (c) la comprensión del estudiante de los esfuerzos adultos por introducirlo en el uso de un objeto matemático (relación docente – estudiante), que se puede denominar *dificultad atribuida*. Ya que estas dimensiones están *integradas* en el proceso de aprendizaje infantil es posible estimarlas sobre el vértice del estudiante, del objeto o del docente.

La *dificultad experimentada* (d1) consiste en la dificultad que experimenta el niño cuando se enfrenta con objetos matemáticos en situaciones de triangulación. Cuando el niño percibe el objeto como incompleto e inacabado interpreta los criterios conceptuales del docente en términos de parámetros de actividad, *experimentando descontento-contento dirigido*. En este tipo de dificultad puede darse una relación estrecha con el saber “en sí” (Radford, 2006, 2014 2017), en la medida que se da el conocimiento como una continua materialización y actualización del saber. En la dificultad experimentada es relevante analizar las *prácticas semióticas, algorítmicas y estratégicas o de resolución* (Fandiño, 2010). En las prácticas semióticas se buscaría establecer la habilidad del niño para dominar las representaciones de los objetos matemáticos en varios registros semióticos, así como el tratamiento y conversión entre registros (Duval, 1993). En las prácticas algorítmicas el interés se centra en el estudio de habilidades de cálculo, dominio de procedimientos y estrategias de memorización. En las prácticas estratégicas o resolutivas el énfasis se sitúa en las estrategias que emplea el niño para la resolución de situaciones problemáticas que poseen requerimientos normativos específicos.

La *dificultad instituida* (d2) se define como la manera en que el docente organiza y planifica los elementos que configuran las situaciones de enseñanza y de aprendizaje, así como la gradación de dificultad de los contenidos, tareas, procedimientos y estrategias asociadas al aprendizaje de los contenidos matemáticos.

En la dificultad instituida resultaría de interés el estudio de las *prácticas conceptuales* (Fandiño, 2010), entendidas como aquellas actividades de enseñanza-aprendizaje que estructura el docente para fomentar la elaboración de conceptos matemáticos en su aula de clase. La dificultad instituida también guarda relación con la noción de saber “en sí” de Radford (2017) en tanto hay un saber codificado de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente” (p. 102).

La *dificultad atribuida* (d3) consiste en las atribuciones, explicaciones e interpretaciones de la actividad comunicativa que tanto estudiante como docente efectúan en escenarios de resolución de problemas relacionados con el aprendizaje de conceptos matemáticos. Este tipo de dificultad guarda relación con las *prácticas comunicativas* (Fandiño, 2010), en tanto se asume como una práctica colectiva en la que el estudiante puede exponer sus ideas sobre aspectos matemáticos al docente y a sus compañeros de clase, responder a preguntas o requerimientos del docente y defender sus propias elaboraciones en torno a la resolución de problemas específicos. En la dificultad atribuida también es pertinente considerar la intersubjetividad como comprensión compartida que tiene lugar en escenarios de actividad o labor conjunta.

Cabe anotar que en este encuadre teórico propuesto, la triangulación asimétrica se mantiene como eje organizador, en la medida que se asumen las distinciones posturales entre el rol del docente y el estudiante, no obstante, la comunicación y retroalimentación es posible entre todos los elementos del triángulo, por ello las flechas son bidireccionales en la Figura 6.



Figura 6. Propuesta de encuadre teórico para la evaluación de dificultad en matemáticas

Teniendo en cuenta que el objetivo de esta investigación es proponer un modelo de evaluación de las dificultades de aprendizaje de la adición y la sustracción, que considere los aspectos normativo-situados que no han sido abordados por los modelos de evaluación tradicional, a partir de diferentes fuentes de evidencia de validez, se ha elaborado un modelo de evaluación de las dificultades de la adición y sustracción (Figura 7), que amplía y despliega los elementos teóricos esbozados en la Figura 6, considerando como ejes organizadores la triangulación asimétrica, la normatividad situada, el descontento dirigido y las prácticas de aprendizaje matemático.

Las líneas punteadas que aparecen en la Figura 7 muestran la distinción postural entre el conocimiento del docente vs el estudiante; el conocimiento del docente es construido a partir de los saberes de la tradición y de sus experiencias pedagógicas, metodológicas y didácticas, mientras que el conocimiento del estudiante tiene lugar en el marco de objetos, lugares y momentos concretos caracterizados por normatividades situadas específicas e inherentes a la organización de la práctica en la que el estudiante participa con su docente.

En conclusión, un modelo de evaluación de las dificultades de aprendizaje de la adición y la sustracción, que considere los aspectos normativo-situados permite asumir una perspectiva trídica de las dificultades de aprendizaje, donde las dificultades en matemáticas han de analizarse desde el estudiante, el docente y el saber, en tanto fallos en el acceso y reconocimiento de la naturaleza espacio-temporal de las situaciones matemáticas, los objetos involucrados en dichas situaciones y la normatividad que subyace a las mismas. Pensar la dificultad de aprendizaje en términos normativos situados y trádicos enriquece de manera importante la estimación de la dificultad desde las tres vertientes, generando con ello estrategias alternativas de evaluación que comportan a su vez el desarrollo de diferentes instrumentos de medición.

A continuación se presentará la evaluación y estimación de los tres tipos de dificultad (tres primeras fases de la tesis), en forma de estudios empíricos que fundamentan teóricamente cada tipo de dificultad y conducen al diseño, elaboración y aplicación de los instrumentos de dificultad experimentada (DESAS), de dificultad instituida (DISAS), y de dificultad atribuida (DASAS), siguiendo la estrategia metodológica esbozada por la AERA et al. (2014) y en concordancia con los objetivos específicos de la investigación.

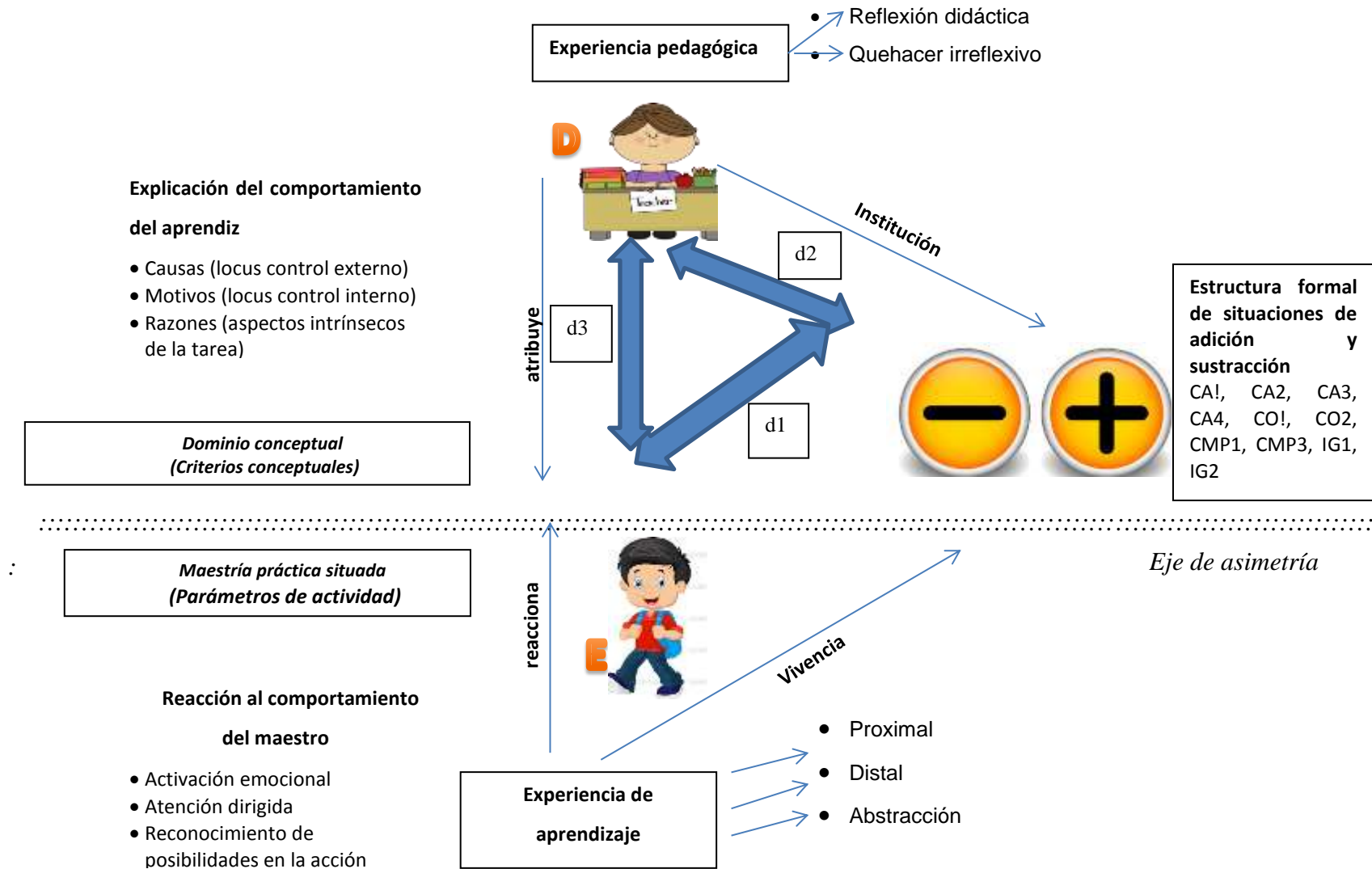


Figura 7. Modelo de evaluación de la dificultad en matemáticas, desde un enfoque situado del aprendizaje d1: dificultad experimentada; d2: dificultad instituida; y d3: dificultad atribuida

EVALUACIÓN DE LA DIFICULTAD EXPERIMENTADA

Introducción.

Desde el modelo situado del aprendizaje propuesto en la Figura 7, se puede concebir la *dificultad experimentada* como aquella dificultad que percibe el niño cuando se encuentra ante una situación de adición y sustracción que posee una configuración de objetos, lugar y momento específica, la cual tiene unos requerimientos normativos inherentes a dicha situación. Esta dificultad se traduce en falta de *ajuste* a la normatividad subyacente a la tarea en juego, desencadenando con ello insatisfacción y el posterior despliegue de reacciones afectivas *dirigidas* a resolver la situación problema y a aumentar la satisfacción del niño.

La dificultad experimentada por el niño ante situaciones matemáticas planteadas en escenarios de triangulación asimétrica trasciende la mera falta de concordancia de sus respuestas con el estándar aritmético. La interacción con maestros y objetos de aprendizaje propicios es crucial no sólo porque la escuela delimita las posibilidades mismas en la transmisión del conocimiento sino además porque determina la inclusión del individuo en una matriz de intercambios *sociales cotidianos regulares* que dan forma a la *sensibilidad* que desarrolla el aprendiz *habilitándolo* para reconocer las actividades y los elementos que cuentan para la resolución satisfactoria de problemas de adición y sustracción (Sagástegui, 2004).

Así, cuando al niño le cuesta *ajustarse a* la situación, despliega una reacción afectiva dirigida al objeto o aspecto insatisfactorio. Este estado psicológico que es a la vez apreciativo y reactivo, es el *descontento dirigido* (Rietveld, 2008). Recuérdese aquí que el descontento dirigido es “conducta afectiva” porque: “...muestra que el curso de acción que estaba en curso es afectado ahora como un resultado del estado percibido del objeto” (p. 976), en este caso, la percepción *irreflexiva* del problema como difícil en relación con sus competencias y patrones de actividad desplegados en la resolución de problemas aritméticos. Es así que el descontento dirigido surge cuando en las situaciones de enseñanza/aprendizaje de la adición y la sustracción el niño no se ajusta normativamente a los objetos y parámetros de actividad que se encuentran en una práctica que se desarrolla en un marco espacio-temporal delimitado.

La noción propuesta por Rietveld resulta útil porque al incorporarla hace posible: (a) caracterizar la conducta afectiva de los aprendices en el marco de los procesos de enculturación formal de las operaciones aritméticas; (b) comprender las diferencias en el desempeño en diversos tipos de situaciones de aprendizaje, atendiendo al desajuste normativo experimentado por el aprendiz; y (c) dar cuenta tanto en el plano teórico como metodológico de aquellos casos en los que el individuo presenta dificultad para aprender la adición y la sustracción, atendiendo no solo a la diferencia de su respuesta con respecto al estándar, sino también a la discrepancia de su afectividad con respecto al perfil de descontento-contento que exhiben habitualmente los aprendices de su propio grupo de referencia.

En ese sentido, se derivan dos ideas importantes: (a) la adquisición progresiva de la adición y sustracción viene dada por el grado de ajuste de los infantes a la naturaleza de las prácticas matemáticas en las que participan, en términos de corrección práctica; y (b) se puede evaluar el ajuste del niño a la situación con base en su expresión afectiva dirigida al problema.

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones, se diseñó, elaboró y aplicó el Instrumento para Evaluación de Dificultad Experimentada en Situaciones de Adición y Sustracción (DESAS), que tiene como objetivo evaluar la dificultad que los niños de primer a tercer grado de educación básica primaria experimentan para ajustarse a las prácticas sociales en las que se realizan operaciones de adición y sustracción, expresada en el descontento-contento de los niños dirigido a los aspectos de las situaciones aditivas y sustractivas en las que se ven involucrados. Consecuentemente, el instrumento DESAS se diseñó alrededor de dos ejes: Los elementos de la infraestructura normativa-expresado en prácticas de aprendizaje matemático-y la organización formal de las situaciones de adición y sustracción.

Las *prácticas de aprendizaje matemático* se clasifican en función de la articulación que se da entre objetos, lugares y momentos normativos, en tres categorías: *corporeizadas*, *de investidura* y *formalizadas*. Estas prácticas no son estrategias posibles que el niño usa a la hora de resolver problemas matemáticos sino son prácticas que en sí mismas cuentan con normas que obligan al aprendiz a desempeñarse correctamente de cierta manera. Para efectos del instrumento DESAS, se seleccionaron como prácticas corporeizadas las de dedos, rondas y huellas. Como prácticas de investidura se seleccionaron las prácticas de moneda, ábaco y bus. En cuanto a prácticas corporeizadas se seleccionaron las prácticas de adición de números naturales, estados de cuenta y recta numérica. (Tabla 2).

Tabla 2.

Prácticas de aprendizaje matemático a evaluar mediante el instrumento DESAS

Tipo de Práctica	Práctica usada en DESAS	Dimensión	Estudios y hallazgos
Corporeizadas	Dedos	Objeto proximal	El conteo de dedos puede mirarse desde una perspectiva corporeizada y situada (Wasner, Moeller, Fischer, & Nuerk, 2014). Los calibradores emplean un tipo de comunicación numérica gestual en la que “Se emplean los dedos, brazos, partes del cuerpo o movimiento del mismo, para indicarle a cuánto va con respecto a la otra ruta” (Aroca, 2015, p. 241).
	Pasos	Lugar circundante	Los desplazamientos dan la opción de trabajar en forma colectiva, socializar e incentivar el aspecto competitivo del juego, al adoptar una forma más dinámica de aprendizaje de la adición y sustracción de enteros (Otero, 2015).
	Rondas infantiles	Momento inmediato	Las rondas infantiles, según la dinámica de la canción, permiten que el niño <i>in situ</i> continúe la ronda y dé cuenta de los objetos que se conservan según se hayan añadido o quitado elementos (Muñoz, 2012).
De investidura	Ábaco	Objeto distal	Vasco (1985, 1990) lo sitúa en el marco de sistemas concretos que potencian la construcción del pensamiento numérico, esto es, juegos con colecciones concretas de objetos cotidianos. Para D'Amore y Fandiño (2015) “Se puede utilizar básicamente para mostrar el significado del valor posicional de las cifras que expresan números naturales. Pero debe ser un objeto <i>concreto, posible de tocar y manipular</i> ” (p. 28).
	Bus	Lugar adscrito	El bus permite, desde un contexto familiar para el niño, introducirlo paulatinamente en los conceptos de adición y sustracción, previa dramatización de la dinámica que se da en el <i>lugar</i> : pasajeros que suben, que bajan y que permanecen en el mismo (Van den Brink, 1984).
	Monedas/billetes	Momento ocasional	“Replicando algunas de estas propuestas con niños colombianos, (...) encontré también que en vez de “prestar” y “llevar”, los niños encuentran más natural hablar de “descambiar” y “cambiar”” (Vasco, 1985 p. 50). Carraher et al.(2000) y Nunes y Bryant (2003) reportan el adecuado desempeño de niños y jóvenes no escolarizados en situaciones reales de compra y venta de objetos. Cárdenas (2015) indica que las relaciones sobre las unidades de cada denominación se dan por un acuerdo colectivo que se establece previamente.
Formalizadas	Adición de números naturales	Objeto simbólico	“Los números, la aritmética, es la respuesta social al problema de comunicar el tamaño o numerosidad de los conjuntos, de ordenar una colección de objetos y de analizar procesos iterativos-recurrentes” (Godino, Font, Wilhelmi, & Arreche, 2009 p. 44).
	Adiciones en la recta numérica	Lugar abstracto	Bruno & Cabrera (2006): “La recta en la enseñanza primaria puede utilizarse: 1) como un modelo de enseñanza para ordenar números, 2) como un modelo para las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, y 3) como contenido mismo del currículo de matemática” (p. 126).
	Adiciones de estados de cuenta	Momento abstracto	Se documenta el uso de estados de cuenta en población campesina con bajo nivel de escolaridad (Castrillón, 1990), o desde la antropología, con el trabajo de Lave (1991) sobre la administración del dinero en la práctica.

Tabla 3.

Organización formal de la estructura aditiva a evaluar en DESAS

Categoría semántica	Situación problema seleccionada para DESAS	Ejemplo
CAMBIO: En estos problemas hay una transformación en la cual se da un incremento o disminución de una cantidad inicial para lograr una cantidad final; el valor desconocido puede ser la cantidad inicial, la cantidad final, o el incremento o la disminución.	CA1 (cambio-unión) Se conoce la cantidad inicial del problema, se da una transformación que aumenta la cantidad inicial y se quiere saber el valor de la cantidad final. $a + b = ?$	Camilo tenía 6 tomates. Juan le dio 5 tomates. ¿Cuántos tomates tiene Camilo ahora?
	CA2 (Cambio-separación) Se conoce la cantidad inicial del problema, se da una transformación que disminuye la cantidad inicial y se quiere saber el valor de la cantidad final. $a - b = ?$	Camilo tenía 6 tomates. Le dio a Juan 5 tomates ¿Cuántos tomates tiene Camilo ahora?
	CA3 (Cambio-unión) Se parte de una cantidad inicial y, por una transformación, se llega a una cantidad final conocida y mayor que la inicial. Se pregunta por la transformación. $c - a = ?$	María tiene 3 monedas, ¿Cuántas monedas debe pedirle a Freddy para que ella tenga 10 monedas?
	CA4 (Cambio-separación) Se parte de una cantidad inicial y, por una transformación, se llega a una cantidad final conocida y menor que la inicial. Se pregunta por la transformación. $c - a = ?$	María tiene 15 monedas, ¿cuántas monedas debe darle a Freddy para que ella quede con 10 monedas?
COMBINACIÓN: Dos cantidades separadas que se combinan y dan lugar a una tercera. Es la relación subgrupos entre sí o grupo-subgrupo. Lo desconocido puede aludir a cualquiera de las partes o al todo.	CO1 (combinación 1) Se conocen las dos partes y se pregunta por el todo. $a + b = ?$	Mario tiene 7 pelotas y Carlos tiene 8 pelotas ¿Cuántas pelotas tienen entre los dos?
	CO2 (Combinación 2) Se conoce el todo y una de las partes. Se pregunta por la otra parte. $c - a = ?$	Mario y Carlos tienen 15 pelotas entre los dos Mario tiene 10 pelotas ¿Cuántas pelotas tiene Carlos?
COMPARACIÓN: La relación de comparación (diferencia entre dos cantidades) se da empleando términos como “más que”, “menos que”, y tiene tres cantidades, que son el referente, el referido y la comparación.	CMP1 (Comparación 1) Se conoce la cantidad del primer término y la relación que tiene con el segundo en función de la expresión “más que”. Luego, se pregunta por la cantidad del segundo. $c - a = ?$	Marcos tiene 8 canicas. Raquel tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas más que Raquel tiene Marcos?.
	CMP3 (comparación 3) Se comparan dos cantidades diferentes teniendo en cuenta la expresión ¿cuánto más hay en la segunda, respecto de la primera? $a + b = ?$	Juan tiene 8 fresas. César tiene 9 fresas más que Juan ¿Cuántas fresas tiene César?
IGUALACIÓN: Dos conjuntos dados se comparan y el problema pregunta por qué tanta cantidad debe cambiarse uno de los conjuntos para ser igual al otro.	IG1 (Igualación 1) Se conoce la cantidad a igualar y la referente. Se pregunta cuánto hay que añadir a la primera para llegar a la segunda. $c - a = ?$	Pedro tiene 100 pesos. Luisa tiene 500 pesos. ¿Cuántos pesos le tienen que dar a Pedro para que tenga los mismos que Luisa?
	IG2 (Igualación 2) Se conoce la cantidad a igualar y la referente. Se pregunta cuánto hay que quitar a la primera para llegar a la segunda. $c - a = ?$	Pedro tiene 100 pesos. Luisa tiene 500 pesos. ¿Cuántos pesos tiene que entregar Luisa, para tener los mismos que Pedro?

Adaptado de Cantero et al. (2003) y Carpenter et al. (1981)

Con respecto a la *organización formal de las situaciones de adición y sustracción*, para efectos del instrumento DESAS se seleccionaron 10 tipos de problema de la clasificación semántica propuesta por Carpenter et al. (1981) que están de acuerdo con el nivel educativo de los estudiantes (Cantero et al., 2003) y recogen tanto requerimientos de adición como de sustracción. Los tipos de problema seleccionados se presentan en la Tabla 3.

Así, el objetivo de esta primera fase de la investigación consistió en desarrollar un instrumento para estimar la dificultad experimentada por el niño en la ejecución de situaciones de aprendizaje cotidiano de operaciones aritméticas de adición y sustracción, bajo el enfoque situado.

Para el cumplimiento de este objetivo, se elaboró el Instrumento para la Evaluación de Dificultad Experimentada en Situaciones de Adición y Sustracción (DESAS) desde el modelo situado. Asimismo se adaptaron algunas Evaluaciones Diagnósticas de grado segundo a cuarto, elaboradas por el Ministerio de Educación Nacional ("Evaluación Diagnóstica," 2009) para la evaluación con el modelo tradicional.

Método.

Para el diseño del instrumento DESAS se elaboró una tabla de especificaciones (Tabla 4) producto del cruce de los tipos de prácticas de aprendizaje matemático (Tabla 2) y la clasificación semántica de las situaciones aditivas (Carpenter et al., 1981) (Tabla 3). Con base en dicho diseño, se elaboró un banco de 90 ítems teniendo en cuenta los estándares de la AERA et al. (2014). Los ítems son tareas que se diseñaron a partir de problemas verbales, en combinación con elementos icónicos y gráficos, ya que son escenarios apropiados para introducir al niño en situaciones aditivas y sustractivas. Además, el niño apenas inicia su proceso de enculturación formal no sólo en matemáticas sino en lectoescritura, por lo cual es muy probable que varios niños no lean aún o si lo hacen, eso permite aislar o controlar el posible efecto de la habilidad lectora.

El análisis de los ítems para conformar la prueba y hallar una primera evidencia de validez de la misma, se llevó a cabo utilizando tres estrategias: Una revisión por juicio de expertos del banco de ítems, un estudio piloto y una aplicación de validación del instrumento en una muestra distinta de estudiantes de la población objeto. En esta última etapa se aplicaron

también las Evaluaciones Diagnósticas del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2012, 2013a, 2013b).

Tabla 4.

Matriz de especificaciones iniciales del banco de ítems para conformación de la prueba DESAS

Clasificación semántica de las situaciones aditivas	Prácticas de aprendizaje matemático									Total
	Corporeizadas			De investidura			Formalizadas			
	Dedos	Huellas	Rondas	Ábaco	Bus	Monedas	Adición números naturales	Recta numérica	Estados de cuenta	
Adición										
Cambio 1 CA1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
Combinación1 CO1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
Comparación 3 CMP3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
Sustracción										
Cambio 2 CA2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
Cambio 3 CA3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
Cambio 4 CA4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
Combinación 2 CO2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
Comparación 1 CMP1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
Igualación 1 IG1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
Igualación 2 IG2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	9
TOTAL	10	10	10	10	10	10	10	10	10	90

Juicio de expertos.

El juicio de expertos tuvo como finalidad obtener evidencia de validez de contenido mediante la revisión de los ítems a la luz del objetivo de la evaluación, las dimensiones evaluadas y la fundamentación teórica de la prueba. La validación del instrumento DESAS se realizó mediante juicio de expertos, que consiste en una “opinión informada de personas con trayectoria en el tema, que son reconocidas por otros como expertos cualificados en este, y que pueden dar información, evidencia, juicios y valoraciones” (Escobar & Cuervo, 2008, p. 29).

Participantes.

El equipo de jueces se conformó teniendo en cuenta la formación académica, esto es, estudios en psicología, en psicometría o formación matemática a nivel de pregrado y postgrado, y aspectos profesionales, como la experiencia en educación básica primaria o en construcción de instrumentos de evaluación. Se contó con la participación de 4 jueces expertos, 2 psicólogos y 2 licenciados en matemáticas, todos con experiencia en docencia en básica primaria y los dos últimos, con experiencia en la enseñanza de las matemáticas.

Instrumentos.

Para la validación del instrumento se adaptó el formato de Escobar y Cuervo (2008), en el que cada experto evaluó las definiciones de los constructos y cada uno de los ítems, en cuatro dimensiones: Coherencia, claridad, relevancia y suficiencia. Las dimensiones se calificaron en una escala de 1 a 4, donde 1 significa que no cumple con el criterio, 2 significa un nivel bajo, 3 corresponde a un nivel medio y 4 es nivel alto. Asimismo se les indicó a los jueces que si su calificación correspondía al nivel 1, 2 o 3 en cualquiera de los cuatro aspectos, podían diligenciar una casilla de observaciones.

El análisis de contenido aglutina dos tipos de estudios complementarios (Elosúa, 2003), que se dirigen a: (a) evaluar las relaciones entre el constructo y el contenido del test-, a fin de garantizar que la muestra de ítems que componen la prueba es relevante y representativa del constructo; y (b) valorar los factores contextuales internos y externos que puedan añadir varianza no deseada, por ejemplo, el formato de los ítems, el tipo de tareas exigidas y la evaluación de la propia situación de test. Estos dos tipos de estudios se tuvieron en cuenta en el formato de validación del instrumento.

Procedimiento.

El juicio de expertos se obtuvo mediante *agregados individuales* (Corral, 2009), donde se le pidió a cada juez que diera una calificación de los ítems del instrumento, en las 4 dimensiones. El juicio de expertos se desarrolló durante el II semestre de 2016.

Se obtuvieron dos estimaciones: Los porcentajes de acuerdo interevaluadores y el índice de concordancia W de Kendall. El porcentaje de acuerdo se calculó a partir de la frecuencia relativa de cada opción de acuerdo para cada pregunta evaluada por los jueces. El coeficiente W de Kendall se utilizó como índice de concordancia entre evaluadores, discriminando por prácticas matemáticas y por tipo semántico de problema. Asimismo se registraron las

observaciones de los expertos para cada ítem de DESAS y para la subescala gráfica de descontento-contento dirigido (Figura 8). Los análisis estadísticos se realizaron en SPSS 24.0.

Estudio piloto.

La segunda estrategia consistió en una aplicación de la prueba a un grupo de niños de la población objeto y el correspondiente análisis de datos, para obtener evidencia del funcionamiento de cada una de las tareas y de la prueba completa.

Participantes.

La versión preliminar de la prueba fue aplicada a 50 estudiantes, 10 niños y 5 niñas de grado primero con edades entre 6 y 8 años, 8 niños y 9 niñas de grado segundo con edades entre 7 y 9 años, y 9 niños y 9 niñas de tercer grado con edades entre 8 y 11 años. Los estudiantes pertenecían a dos instituciones educativas oficiales de la ciudad de Bogotá ($n=27$) y del municipio de Mosquera (Cundinamarca) ($n= 23$) y fueron seleccionados mediante muestreo por conveniencia, previa autorización de los rectores de las instituciones educativas para llevar a cabo el estudio piloto y firma de consentimiento informado por los padres de familia.

Instrumento.

Una vez obtenidos los resultados de la etapa de juicio de expertos se procedió a realizar el armado de la prueba a aplicar, siguiendo la estructura que se presenta en la tabla 5.

Tabla 5.

Tabla de especificaciones de prueba para DESAS

Clasificación semántica de las situaciones aditivas	Prácticas de aprendizaje matemático			
	Corporeizadas	De investidura	Formalizadas	Total
Cambio 1 CA1	Dedos	Monedas	Estados de cuenta	3
Combinación 1 CO1	Dedos	Monedas	Estados de cuenta	3
Comparación 3 CMP3	Dedos	Monedas	Estados de cuenta	3
Cambio 2 CA2	Dedos	Monedas	Recta numérica	3
Cambio 3 CA3	Rondas	Cuentas	Recta numérica	3
Cambio 4 CA4	Rondas	Cuentas	Recta numérica	3
Combinación 2 CO2	Rondas	Cuentas	Recta numérica	3
Comparación 1 CMP1	Huellas	Bus	Números naturales	3
Igualación 1 IG1	Huellas	Bus	Números naturales	3
Igualación 2 IG2	Huellas	Bus	Números naturales	3
TOTAL	10	10	10	30

Cada tarea de la prueba se debía realizar utilizando los objetos requeridos en las prácticas, esto es, partes del cuerpo del niño y del aplicador para recrear la situación problema en las prácticas corporeizadas; uso de canicas de colores, bus a escala con pasajeros que suben y bajan y monedas/billetes en las prácticas de investidura; así como representación numérica y simbólica en las prácticas formalizadas. En las prácticas corporeizadas las cantidades empleadas fueron menores a 15, en los ejercicios con monedas/billetes se usaron denominaciones entre 50 y 2000 pesos colombianos y en las prácticas formalizadas los números usados iban del 1 al 18 y la suma entre ellos no excedió 20.

Las tareas tenían un enunciado y cinco opciones de respuesta, cuatro de ellas icónicas, gráficas o simbólicas, según la naturaleza de la práctica. La quinta opción de no respuesta (NR), sólo se seleccionó cuando después de dos intentos el niño no respondió a la tarea.

Adicionalmente, cada tarea fue calificada por el niño en términos del gusto o agrado a la hora de resolverla. Tal valoración se hizo mediante una subescala gráfica de descontento-contento dirigido, esto es, una tarjeta de 5 caras con las opciones a, b, c, d y e, como se muestra en la Figura 8.



Figura 8. Subescala gráfica de descontento-contento dirigido

Procedimiento.

Se elaboró un manual de aplicación y se puso a prueba en una primera aplicación con una estudiante, ésta aplicación tuvo como único objetivo refinar el manual con instrucciones detalladas. Antes de iniciar la aplicación de la prueba se recolectó mediante autoinforme información sociodemográfica relacionada con prácticas matemáticas previas de los estudiantes, en términos de mediadores familiares y escolares para el aprendizaje de las matemáticas, agrado por las matemáticas y repitencia escolar.

La aplicación del instrumento se llevó a cabo de manera individual durante el I semestre de 2017, por dos evaluadores: Un evaluador principal y un observador no participante. El evaluador principal leía en voz alta el enunciado al niño, le presentaba las opciones de

respuesta y le solicitaba que seleccionara la opción correcta. Durante la resolución de la tarea el estudiante podía hacer uso de los objetos disponibles para llegar a la respuesta. El evaluador registraba la respuesta del niño. Tanto el evaluador principal como el observador no participante calificaron en una escala de 1 a 5 (donde 1 es Muy Descontento y 5 Muy contento) el descontento o contento dirigido *observado en el niño* en cada tarea y debían consignar *su primera impresión* sobre la conducta emocional del niño en cada situación. Posteriormente se le presentó al niño la subescala gráfica de descontento (Figura 8) para que indicara qué tanto le gustó cada tarea presentada.

Al finalizar la aplicación, los evaluadores consignaron las observaciones que tenían respecto al comportamiento emocional del niño, características de las tareas o las condiciones de aplicación del instrumento.

Además, con el propósito de enriquecer la medida del descontento dirigido (Klaassen et al., 2010), se elaboró una versión de la prueba en el programa *The Psychology Experiment Building Language* PEBL-2 (Mueller & Piper, 2014) y se registró el tiempo de reacción que tomaba el niño en dar una respuesta a la tarea. Esta versión de la prueba se aplicó a 22 de los 50 estudiantes: 2 de grado primero, 2 de grado segundo y 18 de grado tercero.

Los análisis estadísticos se realizaron en SPSS 24.0 y en Winsteps 3.73, e incluyeron tres tipos de análisis:

1. Estadísticos descriptivos para las variables sociodemográficas del estudiante.
2. Análisis psicométricos que incluyeron las correlaciones ítem-test y las estimaciones de la confiabilidad mediante alpha de Cronbach para las tareas de la prueba, las valoraciones de descontento y los tiempos de reacción, así como obtención de dificultad y discriminación para los 30 ítems de la subescala de acierto a los ítems desde la Teoría Clásica de los Test. Se calcularon dos estimaciones de la dificultad: Proporción de aciertos y dificultad del ítem corregida por el azar. Para discriminación se calcularon también dos estimaciones: Correlación ítem-prueba mediante coeficiente biserial puntual y discriminación corregida, esta última para eliminar el aporte del ítem dentro del puntaje total. En cuanto a la subescala de descontento-contento dirigido en cada ítem (Figura 8) se estimó el nivel de agrado de los estudiantes con cada tarea presentada mediante el promedio de las respuestas. La discriminación se obtuvo mediante el coeficiente de correlación de Spearman entre el descontento-contento en cada ítem y el puntaje total en la subescala de descontento, eliminando el aporte de descontento-contento

del ítem dentro del puntaje total. Posteriormente, desde Teoría de Respuesta al Ítem se ajustó un modelo dicotómico de Rasch para la subescala de acierto en los ítems de DESAS y se ajustó un modelo Rasch de crédito parcial para la subescala de descontento-contenido dirigido. Previo a los análisis de Rasch se verificó el supuesto de unidimensionalidad a través de análisis factorial de total de aciertos y descontento dirigido mediante componentes principales (ACP) y rotación Varimax en SPSS, así como ACP basado en los residuos en Winsteps.

3. Estadísticos descriptivos para el tiempo de reacción de los ítems, así como coeficiente de correlación biserial puntual entre los aciertos a los ítems y la valoración de descontento dirigido dada por los niños; correlación Spearman entre el descontento-contenido dirigido reportado por el niño y el registrado por los observadores, así como correlación de Spearman entre los tiempos de reacción y el descontento dirigido.

Aplicación de validación.

La tercera estrategia consistió en la aplicación de la prueba a un grupo de niños de la población objeto y el correspondiente análisis de datos, para obtener evidencia del funcionamiento de cada una de las tareas y de la prueba completa, en consonancia con el propósito de la primera fase del estudio, que es desarrollar un instrumento para estimar la dificultad experimentada por el niño en la ejecución de situaciones de aprendizaje cotidiano de operaciones aritméticas de adición y sustracción, bajo el enfoque situado.

Participantes.

El esquema de aplicación del instrumento DESAS se planificó teniendo en cuenta las variables que se presentan en la Tabla 6. Se configuró un diseño factorial de 2 X 3 X 2 X 3, donde se analiza el desempeño en la prueba según **género**, esto es, niños y niñas de tres **grados** (segundo, tercero y cuarto de primaria), provenientes de **instituciones educativas** (oficiales y no oficiales), ubicadas en tres **zonas** (urbano, zona periférica y rural). Cabe señalar que la elección de los grados segundo a cuarto para la aplicación de validación obedece a que estos estudiantes completaron el año anterior su formación en primer, segundo y tercero de primaria, respectivamente, por ello es precisamente en estos primeros grados donde interesa observar el desempeño de los niños en situaciones de adición y sustracción.

Tabla 6.

Esquema muestral aplicación masiva DESAS

Institución	Zona	Grado						Total
		Segundo		Tercero		Cuarto		
		Niños	Niñas	Niños	Niñas	Niños	Niñas	
Oficial	Urbano	5	5	5	5	5	5	30
	Zona periférica	5	5	5	5	5	5	30
	Rural	5	5	5	5	5	5	30
No oficial	Urbano	5	5	5	5	5	5	30
	Zona periférica	5	5	5	5	5	5	30
	Rural	5	5	5	5	5	5	30
Total		30	30	30	30	30	30	180

Se hizo un muestreo intencional en seis instituciones educativas (IE): una oficial y una no oficial de la ciudad de Bogotá (zona urbana); una oficial y una no oficial del municipio de Mosquera, Cundinamarca (zona periférica); y una oficial y una no oficial del municipio de Ubaté, Cundinamarca (zona rural), previa autorización de los rectores de las instituciones educativas para llevar a cabo la aplicación definitiva. Al interior de cada institución educativa se escogió aleatoriamente un grupo por grado.

Una vez seleccionado cada curso en cada IE se habló con el/la docente de matemáticas a cargo de ese curso para que indicase previamente si en ese curso se encontraban estudiantes que reunieran alguno de estos criterios: (a) estudiantes con repitencia igual o superior a dos años; (b) estudiantes reportados por el docente como poseedor de dificultades importantes en el aprendizaje de la adición y la sustracción, de acuerdo con el desempeño del estudiante en actividades de aula; o (c) estudiantes con diagnóstico de dificultad de aprendizaje, que actualmente adelanten un proceso psicopedagógico de intervención educativa o interdisciplinar.

Con los estudiantes que cumplieron alguno de estos criterios se procedió a formar un *grupo de comparación* de dificultades en adición y sustracción. Se identificaron un total de 36 estudiantes, distribuidos así: 14 estudiantes de grado segundo (7 niños y 7 niñas, rango de edad: 6-10 años), 13 de grado tercero (6 niños y 7 niñas, rango de edad: 8-10 años) y 9 de grado cuarto (3 niños y 6 niñas, rango de edad: 8-10 años). De los 36 estudiantes, 2 fueron seleccionados con el primer criterio, 27 niños fueron escogidos mediante el segundo criterio,

aun cuando 7 de estos 27 niños han repetido solamente un grado escolar, el reporte del docente de matemáticas sugiere al parecer dificultades persistentes en el aprendizaje de la adición y la sustracción. Con el tercer criterio se seleccionaron 7 estudiantes.

Posterior a la conformación del grupo de comparación, se seleccionaron 5 niños y 5 niñas de cada grupo para participar en el estudio. A todos los participantes se les dio un formato de consentimiento informado en el que se especificaba el objetivo de la investigación, los instrumentos a utilizar y el tratamiento de la información, consentimiento que fue firmado por los padres de familia (Anexo 1). Luego de recibir los formatos debidamente diligenciados, se conformó el *grupo de participantes*, con 180 estudiantes igualmente distribuidos según grado y sexo.

Instrumentos.

Se emplearon tres instrumentos: El DESAS, un protocolo de observación del descontento-dirigido y las Evaluaciones Diagnósticas del Ministerio de Educación Nacional (2012, 2013a, 2013b).

En cuanto a DESAS, una vez obtenidos los resultados de la segunda etapa se hicieron las correcciones pertinentes para algunos ítems, las cuales se introdujeron en la versión de la prueba en el programa PEBL-2. El armado de la prueba DESAS que se aplicó en esta etapa conserva la estructura presentada en la Tabla 3. Si bien, como se verá en los resultados del estudio piloto, 5 ítems no cumplieron con los criterios de dificultad y discriminación en cuanto a aciertos, y 8 ítems presentaron desajustes cercanos o lejanos al modelo de crédito parcial, se hicieron correcciones en la redacción de los enunciados, la diagramación de las imágenes en las opciones de respuesta y el tamaño del texto. En ese orden de ideas, se decidió conservar los 30 ítems de acierto y descontento-contento dirigido para ser aplicados en esta etapa, ya que se dispone de una muestra mayor de estudiantes ($n = 180$), así como de un grupo de comparación ($n = 36$), lo que permitirá un análisis más exhaustivo tanto de las características psicométricas del instrumento como del acierto, tiempos de reacción y descontento- contenido dirigido de los estudiantes en cada uno de los ítems de la prueba.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el estudio piloto en cuanto al funcionamiento de las categorías de descontento-contento dirigido se decidió recategorizar la subescala de descontento-contento de cinco a tres caritas, que representan Descontento, Ni descontento ni contenido y Contenido, a fin de describir de manera más precisa la reacción

afectiva de los estudiantes dirigida a situaciones de aprendizaje matemático. Así, las caritas a y b se agrupan en la categoría descontento, las caritas c y d se agrupan en la categoría ni contento ni descontento, y la carita e corresponde a la opción contento. La subescala de descontento-contento dirigido recategorizada se observa en la Figura 9.



Figura 9. Subescala recategorizada de descontento-contento dirigido

Adicionalmente, se elaboró en PEBL-2 un protocolo de observación del descontento-contento dirigido, instrumento diseñado para recolectar la información proveniente de la observación del comportamiento del niño durante la aplicación del instrumento DESAS, de modo que permita una gradación más fina del contento o descontento del niño en cada tarea. Este instrumento fue diligenciado por la investigadora y por un observador independiente, una vez culminadas las aplicaciones de DESAS en esta etapa, a fin de garantizar la confiabilidad interobservadores del descontento-contento dirigido. Para cada ítem de la prueba se evaluó el descontento-contento dirigido, mediante cuatro indicadores: (a) *uso de mediatizadores*: ¿Manipuló el niño el material de apoyo que estaba sobre la mesa en la tarea respectiva?; (b) *direccionalidad*: ¿Durante la tarea el niño estaba atento a la situación que se le planteaba o parecía disperso?; (c) *activación emocional*: Mientras respondía la tarea ¿Qué tan alegre parecía estar el niño?; y (d) *affordances*: ¿Mientras realizaba la tarea el niño realizó algún tipo de gesto?

Como parte del enfoque tradicional, se seleccionaron las Evaluaciones Diagnósticas de Matemáticas de 2º a 4º grado de primaria del Ministerio de Educación Nacional (2012, 2013a, 2013b), que tienen como objetivo “Identificar los diferentes niveles de desempeño que tienen los estudiantes en cada grado, generar hipótesis de dificultades en la comprensión de algunos saberes y proporcionar un material educativo para el aula y la formación de los docentes” (“Evaluación Diagnóstica”, 2009). La Evaluación Diagnóstica según grado se aplicó a la muestra de estudiantes del grupo de participantes y grupo de comparación.

Para el armado de los instrumentos de evaluación tradicional en primer lugar se hizo una revisión de las Evaluaciones Diagnósticas disponibles en la página web del Ministerio de Educación Nacional, de los años 2012 y I y II semestre de 2013, posteriormente se seleccionaron aquellos problemas que conservaran el mismo tipo de estructura semántica que los empleados en DESAS, a fin de contrastar el desempeño de los grupos de comparación y de participantes con el instrumento tradicional y con el instrumento situado.

En cuanto a la Evaluación Diagnóstica de 2º grado, se adaptó la prueba correspondiente al II semestre de 2013 (Ministerio de Educación Nacional, 2013a) y se escogieron 4 ítems que tienen la siguiente tipología: Comparación 1, Cambio 3, Igualación 1 y Combinación 1 (ver Anexo 2).

Para la Evaluación Diagnóstica de 3º grado, se adaptó la prueba correspondiente al II semestre de 2013 (Ministerio de Educación Nacional, 2013b) y se escogieron 4 ítems que tienen la siguiente tipología: Combinación 1, Comparación 3, Cambio 2 e Igualación 1 (ver Anexo 3).

Finalmente, para la Evaluación Diagnóstica de 4º grado, se adaptó la prueba correspondiente a 2012 (Ministerio de Educación Nacional, 2012), se seleccionaron 2 ítems, uno de Combinación 2 y otro de Cambio 3. Para conservar la misma longitud de prueba en los tres instrumentos se seleccionó un ítem de Comparación 1, tomado de la Evaluación Diagnóstica de 3º 2013-2 (Ministerio de Educación Nacional, 2013b) y 1 ítem de Igualación 1, tomado de la prueba Saber 5º 2014 (Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES), 2015), respectivamente (ver Anexo 4).

Procedimiento.

En primer lugar se estructuró un manual de aplicación del DESAS que incluye tanto los aspectos conceptuales de la prueba como el protocolo de aplicación en PEBL-2.

En cada IE se acondicionó un salón o espacio que contó con estos requerimientos mínimos: Un computador con el programa PEBL-2 para que el niño observe las tareas que componen DESAS; una mesa en la que se colocaron los materiales de DESAS, y dos sillas (una para el aplicador y una para el niño). Cada sitio dispuesto por cada IE contó con adecuadas condiciones de iluminación y ventilación, para controlar así el efecto de fatiga ocasionada por causas ambientales.

La disposición espacial de los elementos en la aplicación fue así: El computador donde se presentan las tareas que forman parte de DESAS se situó en el centro de la mesa; el aplicador se ubicó frente al computador, hacia la parte derecha de la pantalla. El niño se ubicó frente al computador, al lado izquierdo del aplicador. El niño tuvo a su mano izquierda, encima de la mesa, los objetos físicos que componen DESAS, como lo muestra la Fotografía 1 (esto es, las canicas, monedas, billetes, buses a escala, figuras de pasajeros, hojas de papel, lápiz y borrador). Los objetos físicos estuvieron disponibles durante toda la aplicación, de manera que el estudiante podía emplear cualquier elemento cada vez que quisiera.



Fotografía 1. Material de trabajo de DESAS

Es importante anotar que el niño *siempre* tuvo el computador frente a sí, de manera que pudiera observar en todo momento las diferentes tareas que componen DESAS, a fin de garantizar que durante toda la aplicación el niño y el aplicador principal *triangularan* en torno a un objeto común: El computador. Esta organización espacial se presenta en la Fotografía 2.

La aplicación del instrumento se llevó a cabo de manera individual en las seis IE al grupo de comparación y al grupo de participantes durante el primer semestre de 2018 por un aplicador principal, que se encargó de la mediación en las situaciones problema, el registro de la información sociodemográfica y de las respuestas del niño a las tareas de DESAS, así como del registro de la reacción afectiva observada en el niño, todo ello en el programa PEBL-2.



Fotografía 2. Disposición espacial de los aplicadores, del examinado y de los materiales de DESAS

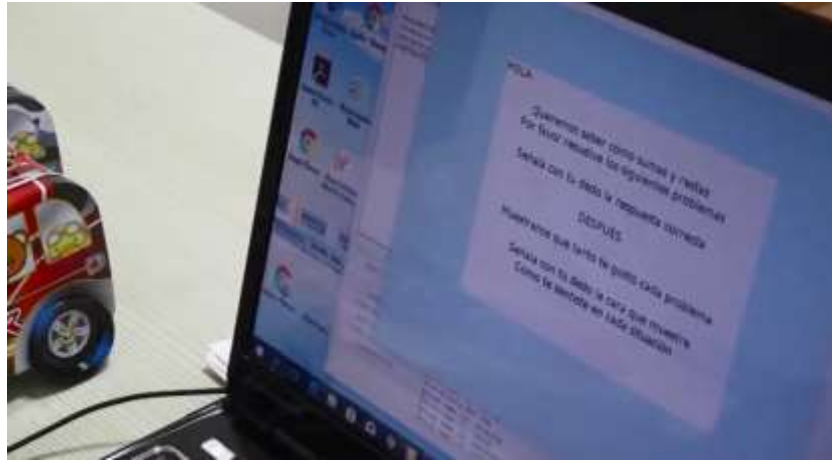
Nota: Se utiliza con autorización de los padres de familia de la estudiante

El orden de la aplicación fue así: En primer lugar se recolectó mediante autoinforme información sociodemográfica relacionada con prácticas matemáticas previas de los estudiantes, en términos de mediadores familiares y escolares para el aprendizaje de las matemáticas, agrado por las matemáticas y repitencia escolar.

Posteriormente se le leyó a cada estudiante las instrucciones de aplicación que se presentan en la Fotografía 3, en donde además de resolver unos problemas de adición y sustracción (aciertos) se quiere ver qué tanto le gustó cada problema (descontento-contento dirigido). Todas las aplicaciones fueron grabadas con cámaras de video.

El aplicador leía en voz alta el enunciado al niño, haciendo uso de los diferentes objetos físicos, icónicos, gráficos y simbólicos que se requieren para la práctica matemática concreta a evaluar; posteriormente le presentaba las opciones de respuesta y le solicitaba que seleccionara la opción correcta (ver Figura 10). Durante la resolución de la tarea el estudiante podía hacer uso de los objetos disponibles para llegar a la respuesta. Para cada uno de los ítems se tomó en PEBL-2 el tiempo que tomó el niño en dar una respuesta a la situación problema. El tiempo de

reacción abarca desde el momento en que se lee el enunciado al estudiante hasta que el aplicador marca en el computador la opción de respuesta dada por el estudiante.



Fotografía 3. Pantalla de instrucciones de aplicación en DESAS



Figura 10. Visualización en PEBL-2 de las tareas de DESAS y opciones de respuesta

Una vez que el niño indica la opción de respuesta seleccionada, el aplicador la registra en el computador y a continuación aparece la escala gráfica de descontento-contento dirigido, que se observa en la Figura 11. El aplicador pregunta al estudiante “- ¿Qué tanto te gustó la tarea que acabaste de hacer?”; ahí el estudiante indica al aplicador la cara que refleje el gusto que tuvo en cada tarea.



Figura 11. Visualización en PEBL-2 de escala gráfica de descontento-contento dirigido

Se aplicaron las evaluaciones diagnósticas a los estudiantes del grupo de comparación y de participantes, de acuerdo con el grado. Esta aplicación se hizo en formato de lápiz y papel; tuvo lugar una vez que cada estudiante terminaba con la aplicación del instrumento DESAS, de manera que cada estudiante tuvo una única sesión de evaluación que incluía el instrumento DESAS y la evaluación diagnóstica según grado.

Una vez culminadas las aplicaciones de DESAS a los 180 estudiantes del grupo de participantes y a los 36 estudiantes del grupo de comparación, la investigadora y un observador independiente procedieron a calificar el descontento-contento dirigido observado en el video de la aplicación de cada estudiante, empleando los 4 indicadores que componen el protocolo de observación del descontento-contento dirigido, diseñado en PEBL-2.

Se realizaron los mismos análisis estadísticos descritos en el estudio piloto, en SPSS 24.0 y en Winsteps 3.73. Posterior a ello, se hizo la depuración de ítems de las subescalas de acierto y de descontento-contento dirigido que dan lugar a una reconfiguración de la prueba, en función de los análisis del estudio y de la aplicación de validación. Además, a partir de la prueba consolidada (tabla 18) se generaron desde Winsteps los mapas de ítems-personas para cada una de las subescalas de acierto (Anexo 9), de descontento-contento dirigido (Anexo 10), y el mapa de categorías de la subescala de descontento (Figura 14).

Finalmente se hizo análisis de estructura interna de la prueba y se sometió a prueba la significancia de los efectos de las variables de interés, antes mencionadas. La primera se llevó a cabo mediante análisis factorial de 10 tipos de problema y total de aciertos y descontento-

contenido dirigido por *tipo de problema* y *tipo de práctica* mediante componentes principales (ACP) y rotación Varimax en SPSS. El efecto de las variables zona y curso se evaluó mediante un ANOVA paramétrico de 1 factor para muestras independientes con variable respuesta el número de aciertos y la calificación en descontento dirigido por tipo de problema y tipo de práctica. Para las diferencias en sector y género se calculó prueba *t* para muestras independientes.

Una vez completados los diferentes análisis estadísticos y psicométricos de la Fase 1, se seleccionó a partir del grupo de participantes el o la estudiante de cada curso con mayor dificultad experimentada, esto es, menor cantidad de aciertos a los ítems de DESAS. Esto da un grupo de *dificultad experimentada* de 18 estudiantes- 1 estudiante por curso, de acuerdo con el diseño muestral de la Tabla 6- en donde se seleccionaron 10 niños y 8 niñas, que se distribuyen por curso y edad, así: 4 niños y 2 niñas de grado segundo, con un rango de edad entre 6 a 8 años; 2 niños y 4 niñas de grado tercero, con un rango de edad entre 8 y 9 años; y 4 niños y 2 niñas de grado cuarto, con un rango de edad entre 8 y 10 años. *Los 18 estudiantes identificados constituyen así el eje central sobre el cual se fundamentan los aspectos metodológicos y los resultados de las fases posteriores.*

Resultados

Juicio de expertos.

En cuanto al *tipo de práctica*, hubo porcentajes de acuerdo interobservadores superiores al 70% en la coherencia y suficiencia de los ítems de prácticas corporeizadas, mientras que el menor acuerdo (22.5%) se observó en claridad de la tarea para los ítems de pisadas. Con relación al *tipo de problema*, los problemas de cambio y combinación presentaron porcentajes de coherencia, relevancia y suficiencia superiores al 80%, mientras que los problemas de igualación presentan índices de coherencia y claridad entre 38% y 40%.

La tabla 7 muestra el coeficiente W de Kendall según tipo de práctica. Dentro de las prácticas corporeizadas, las prácticas de pisadas registran una concordancia entre .69 a 1 en claridad, relevancia y suficiencia. En coherencia y suficiencia para la práctica de dedos, así como en la coherencia de la práctica de pisadas, todos los jueces dieron la calificación máxima (concordancia perfecta), en consecuencia no se reporta resultado para el estadístico. En

inversión, las prácticas de monedas obtuvieron una concordancia entre .70 a .81 en las cuatro dimensiones. Por su parte, para las prácticas formalizadas, la adición de números naturales registra una concordancia entre .65 y .84 para claridad y coherencia, respectivamente.

Con relación al *tipo de problema*, el coeficiente W de Kendall sólo fue superior a .30 y significativo a un nivel de $\alpha = 0.05$ en relevancia para problemas de Combinación 2, y en claridad para problemas de Comparación 1 y Comparación 3.

Tabla 7.

Coefficiente de concordancia W de Kendall en coherencia, claridad, relevancia y suficiencia, por prácticas matemáticas (N= 10, gl=3)

Prácticas	Concordancia	Características de los ítems			
		Coherencia	Claridad	Relevancia	Suficiencia
Dedos	W de Kendall ^a	**	.48	.30	**
	Chi-cuadrado		14.37	9.00	
	Sig asintot.		.00	.03	
Pisadas	W de Kendall ^a	**	.69	1.00	.90
	Chi-cuadrado		20.74	30.00	27.00
	Sig asintot.		.00	.00	.00
Rondas	W de Kendall ^a	.25	.50	.15	.32
	Chi-cuadrado	7.34	14.90	4.36	9.57
	Sig asintot.	.06	.00	.23	.02
Ábaco	W de Kendall ^a	.37	.37	.10	.37
	Chi-cuadrado	11.00	11.00	3.00	11.00
	Sig asintot.	.01	.01	.39	.01
Bus	W de Kendall ^a	.10	.04	.07	.10
	Chi-cuadrado	3.00	1.29	2.00	3.00
	Sig asintot.	.39	.73	.57	.39
Monedas	W de Kendall ^a	.81	.75	.78	.70
	Chi-cuadrado	24.43	22.58	23.29	21.00
	Sig asintot.	.00	.00	.00	.00
Adición naturales	W de Kendall ^a	.84	.65	.20	.30
	Chi-cuadrado	25.29	19.59	6.00	9.00
	Sig asintot.	.00	.00	.11	.03
Adición recta numérica	W de Kendall ^a	.16	.38	.56	.20
	Chi-cuadrado	4.71	11.41	16.67	6.00
	Sig asintot.	.19	.01	.00	.11
Adición estados de cuenta	W de Kendall ^a	.80	.33	.02	.13
	Chi-cuadrado	23.96	9.90	.48	3.80
	Sig asintot.	.00	.02	.92	.28

a. Coeficiente de concordancia de Kendall. Los valores resaltados corresponden a valores $W > .40$.

** Todos los jueces dieron la calificación máxima (concordancia perfecta), la desviación típica es 0 y en consecuencia no se puede obtener resultado para el estadístico.

Las principales recomendaciones de los jueces consistieron en mejorar la calidad de las imágenes de la subescala de descontento-contento dirigido y modificar la diagramación de las imágenes de prácticas de dedos y pisadas tanto en enunciados como en las opciones de respuesta, revisar tiempos verbales de algunas preguntas, hacer explícito lo que se quiere adicionar o sustraer. Además sugirieron modificar la práctica de ábaco por el uso de canicas, puesto que el ábaco podría requerir conocimientos acerca del valor posicional, mientras que las canicas forman parte de los juegos infantiles. Asimismo se sugirió que es más adecuado hablar de “huellas” que de “pisadas”, ya que son unidades discretas más comprensibles para los niños.

Como resultado del juicio de expertos se hicieron las modificaciones para la versión preliminar de la prueba que se utilizó en la fase posterior del estudio, de manera que a partir del banco de 90 ítems se diseñó una forma de prueba, con los 30 ítems que recibieron las valoraciones más altas en los 4 criterios evaluados, teniendo en cuenta las especificaciones de prueba de la Tabla 5.

Estudio piloto.

De los 50 estudiantes que participaron en el estudio piloto, el 80% no ha reprobado ningún curso, 9 estudiantes reprobaron un curso y solo 1 estudiante reprobó dos cursos. El 90% de los estudiantes reportó gusto por las matemáticas, el 44% estudian con la mamá, un 34% indica que ambos padres enseñan matemáticas y un 40% mencionó otras personas de su entorno familiar.

El Alpha de Cronbach para la subescala de aciertos en los ítems de DESAS fue de .77; .87 para el descontento dirigido y .90 para los tiempos de reacción de los ítems (Anexo 5). Las estimaciones de confiabilidad obtenidas reflejan altos valores de precisión en la medida, principalmente en cuanto al descontento dirigido y los tiempos de reacción de los ítems.

La dificultad de la subescala de acierto en los ítems oscila entre .16 y .88, que corresponde a un rango de .00 y .85 cuando se corrige por azar; 12 de los 30 ítems presentan un índice de dificultad corregida igual o menor a .20 (Tabla 8). Con relación al tipo de problema, revisten mayor dificultad aquellos que requieren para su resolución una estrategia de sustraer elementos, aun cuando los problemas sean de sentencia canónica y no canónica. En cuanto a la práctica se observa que estados de cuenta, bus y canicas presentan una mayor proporción de

aciertos, en comparación con rondas y huellas; es decir, las prácticas de investidura y formalizadas registran mayor acierto que las prácticas corporeizadas, con excepción de la práctica de Dedos Cambio 1.

Tabla 8.

Índices de dificultad y discriminación de DESAS-Estudio piloto

Ítem	Nombre	Dificultad	Dificultad corregida	Discriminación (Correlación biserial puntual)	Correlación biserial puntual corregida
1	Dedos Cambio 1 ^{a, c}	0.88	0.85	0.18	0.12
2	Dedos Combinación 1 ^{a, c}	0.48	0.35	0.45	0.36
3	Dedos Comparación 3 ^{a, c}	0.30	0.13	0.14	0.05
4	Dedos Cambio 2 ^{a, d}	0.20	0.00	0.41	0.34
5	Rondas Cambio 3 ^{b, d}	0.20	0.00	0.63	0.58
6	Rondas Cambio 4 ^{b, d}	0.40	0.25	0.37	0.28
7	Rondas Combinación 2 ^{b, d}	0.42	0.28	0.46	0.38
8	Huellas Comparación 1 ^{b, d}	0.24	0.05	0.50	0.44
9	Huellas Igualación 1 ^{b, d}	0.44	0.30	0.48	0.40
10	Huellas Igualación 2 ^{b, d}	0.24	0.05	-0.18	-0.26
11	Monedas Cambio 1 ^{a, c}	0.60	0.50	0.42	0.33
12	Monedas Combinación 1 ^{a, c}	0.28	0.10	0.47	0.39
13	Monedas Comparación 3 ^{a, c}	0.28	0.10	0.50	0.43
14	Monedas Cambio 2 ^{a, d}	0.44	0.30	0.44	0.35
15	Canicas Cambio 3 ^{b, d}	0.20	0.00	0.19	0.11
16	Canicas Cambio 4 ^{b, d}	0.52	0.40	0.23	0.13
17	Canicas Combinación 2 ^{b, d}	0.88	0.85	0.09	0.03
18	Bus Comparación 1 ^{b, d}	0.84	0.80	0.31	0.24
19	Bus Igualación 1 ^{b, d}	0.22	0.03	0.31	0.23
20	Bus Igualación 2 ^{b, d}	0.68	0.60	0.22	0.12
21	Estados de cuenta Cambio 1 ^{a, c}	0.72	0.65	0.49	0.42
22	Estados de cuenta Combinación 1 ^{a, c}	0.82	0.78	0.32	0.25
23	Estados de cuenta Comparación 3 ^{a, c}	0.68	0.60	0.35	0.27
24	Rectas Cambio 2 ^{a, d}	0.68	0.60	0.23	0.14
25	Rectas Cambio 3 ^{b, d}	0.34	0.18	0.52	0.44
26	Rectas Cambio 4 ^{b, d}	0.30	0.13	0.52	0.45
27	Rectas Combinación 2 ^{b, d}	0.46	0.33	0.30	0.20
28	Adición naturales Comparación 1 ^{b, d}	0.16	-0.05	0.51	0.45
29	Adición naturales Igualación 1 ^{b, d}	0.44	0.30	0.41	0.32
30	Adición naturales Igualación 2 ^{b, d}	0.40	0.25	0.44	0.35

- a. ítems de sentencia canónica.
- b. ítems de sentencia no canónica
- c. Ítems que requieren adición de elementos
- d. Ítems que requieren sustracción de elementos

La discriminación corregida de la subescala de acierto en los ítems de DESAS osciló entre - .26 y .58. Dieciséis de los 30 ítems muestran índices de discriminación superiores a .30, siendo

el problema de cambio en la práctica de rondas el que reporta mayor poder discriminativo. En este grupo se encuentran también dos problemas de comparación en las prácticas de adición de números naturales y huellas. El ítem 10 (problema de igualación en la práctica de huellas) es el que menos discrimina y presenta un alto grado de dificultad. Si bien el ítem 28 (problema de comparación en adición de números naturales) presenta una alta dificultad, es una de las tareas más discriminativas.

Tabla 9.

Valoración promedio del descontento-contento y correlaciones de Spearman para la subescala de descontento-contento dirigido –Estudio piloto

Ítem	Nombre	Promedio de las respuestas	Correlación de Spearman	Correlación Spearman corregida
1	Dedos Cambio 1 ^{a, c}	4.70	0.25	0.22
2	Dedos Combinación 1 ^{a, c}	4.32	0.36	0.33
3	Dedos Comparación 3 ^{a, c}	4.10	0.43	0.36
4	Dedos Cambio 2 ^{a, d}	4.14	0.51	0.47
5	Rondas Cambio 3 ^{b, d}	4.26	0.33	0.28
6	Rondas Cambio 4 ^{b, d}	4.28	0.44	0.38
7	Rondas Combinación 2 ^{b, d}	4.48	0.48	0.44
8	Huellas Comparación 1 ^{b, d}	4.18	0.36	0.29
9	Huellas Igualación 1 ^{b, d}	4.02	0.34	0.27
10	Huellas Igualación 2 ^{b, d}	4.30	0.41	0.36
11	Monedas Cambio1 ^{a, c}	4.16	0.73	0.68
12	Monedas Combinación 1 ^{a, c}	4.02	0.51	0.46
13	Monedas Comparación 3 ^{a, c}	4.00	0.45	0.39
14	Monedas Cambio 2 ^{a, d}	4.18	0.58	0.54
15	Canicas Cambio 3 ^{b, d}	4.20	0.32	0.25
16	Canicas Cambio 4 ^{b, d}	4.60	0.13	0.08
17	Canicas Combinación 2 ^{b, d}	4.20	0.40	0.37
18	Bus Comparación 1 ^{b, d}	4.54	0.31	0.27
19	Bus Igualación 1 ^{b, d}	4.50	0.48	0.44
20	Bus Igualación 2 ^{b, d}	4.50	0.38	0.33
21	Estados de cuenta Cambio 1 ^{a, c}	4.72	0.28	0.18
22	Estados de cuenta Combinación 1 ^{a, c}	4.54	0.46	0.42
23	Estados de cuenta Comparación 3 ^{a, c}	4.44	0.35	0.30
24	Rectas Cambio 2 ^{a, d}	4.28	0.48	0.43
25	Rectas Cambio 3 ^{b, d}	4.30	0.40	0.33
26	Rectas Cambio 4 ^{b, d}	4.28	0.59	0.53
27	Rectas Combinación 2 ^{b, d}	4.02	0.64	0.59
28	Adición naturales Comparación 1 ^{b, d}	3.86	0.71	0.63
29	Adición naturales Igualación 1 ^{b, d}	4.34	0.25	0.18
30	Adición naturales Igualación 2 ^{b, d}	4.18	0.38	0.31

- a. ítems de sentencia canónica.
- b. ítems de sentencia no canónica
- c. Ítems que requieren adición de elementos
- d. Ítems que requieren sustracción de elementos

Con respecto a la subescala de descontento-contento dirigido (Tabla 9), el promedio de las valoraciones en cada ítem es superior a 4 con excepción del ítem 28 que también tiene la mayor dificultad. En general, hay una tendencia promedio a mostrar contento hacia las tareas, siendo el ítem 21 el que presenta mayor valoración promedio (4.72). Además del ítem 28, la valoración de contento es menor en los ítems 9, 12, 13 y 27, cuyo valor de dificultad corregida en los ítems de acierto oscila entre 0.10 y 0.30. En general, el descontento dirigido parece tener lugar ante situaciones experimentadas por el niño como difíciles.

La correlación corregida de Spearman entre el contenido en el ítem y la puntuación de la escala total estuvo entre 0.08 y 0.63. Veintiún de los 30 ítems muestran índices superiores a .30, siendo el ítem 28 el más discriminativo. Los ítems de cambio en la práctica de canicas y estados de cuenta, así como el ítem de igualación en la práctica de adición de números naturales registran menor capacidad discriminativa.

El análisis factorial exploratorio por componentes principales de la subescala de aciertos arrojó una razón de varianzas entre el primero y segundo factor de 1.99 en SPSS y un porcentaje de varianza explicada de 30.7% en Winsteps. Para la subescala de descontento-contento dirigido, estos valores fueron 2.57 y 22.3%, respectivamente.

Aunque estos valores no son los más adecuados para soportar el supuesto de unidimensionalidad, no son desalentadores, y considerando que el estudio piloto contó con una muestra muy pequeña se procedió a ajustar el modelo de un parámetro para la subescala de acierto y el modelo Rasch de crédito parcial para la subescala de descontento-contento.

Al ajustar el modelo de Rasch en los aciertos en DESAS, se encontró un índice de confiabilidad de .75 para los estudiantes y .91 para los ítems. La dificultad de los ítems osciló entre -2.44 y 1.74, siendo el ítem más fácil el ítem de combinación 2 en la práctica de canicas, mientras que el ítem más difícil fue el de comparación 1 en la práctica de adición de números naturales (Tabla 10).

Solamente el ítem 10 (problema de igualación 2 en la práctica de huellas) presentó índices de ajuste cercano y lejano que exceden los umbrales de 1.3 en la media cuadrática y de 2 en los valores estandarizados, lo que sugiere desajuste del ítem al modelo. El ítem 17 (problema de combinación 2 en la práctica de canicas) es el ítem más fácil, presentando una media cuadrática de ajuste lejano mayor a 1.3, pero su valor estandarizado se encuentra en la región de -2 a +2. Los demás ítems presentan ajuste adecuado y se distribuyen en el continuo de

habilidad (Anexo 6). La Curva Característica de la Prueba y su Función de Información se observan en la Figura 12. La prueba aporta información máxima para los valores de θ entre 0 y 0.2 aproximadamente.

Tabla 10.

Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para los ítems de DESAS - Estudio piloto

Ítem	Dificultad	Error estándar	Ajuste cercano (INFIT)		Ajuste lejano (OUTFIT)		Correlación punto-biserial
			Media cuadrática	Valores estandarizados	Media cuadrática	_Valores estandarizados	
28	1.74	.41	.83	-.6	.68	-.8	.51
4	1.43	.38	.94	-.2	.95	.0	.41
5	1.43	.38	.72	-1.3	.62	-1.3	.64
15	1.43	.38	1.18	.8	1.23	.8	.19
19	1.29	.37	1.06	.3	1.07	.3	.31
8	1.16	.36	.88	-.6	.80	-.7	.51
10	1.16	.36	1.50	2.3	1.90	2.7	-.18
12	.91	.34	.92	-.4	.87	-.5	.47
13	.91	.34	.90	-.6	.82	-.7	.50
3	.80	.34	1.27	1.6	1.25	1.2	.14
26	.80	.34	.89	-.6	.78	-1.0	.52
25	.58	.33	.89	-.7	.83	-.9	.52
6	.27	.32	1.03	.2	1.00	.1	.38
30	.27	.32	.96	-.2	.92	-.5	.45
7	.17	.31	.93	-.5	.93	-.4	.46
9	.08	.31	.92	-.7	.88	-.8	.49
14	.08	.31	.96	-.3	.95	-.3	.44
29	.08	.31	.99	.0	.99	.0	.41
27	-.02	.31	1.10	.9	1.05	.4	.31
2	-.11	.31	.95	-.4	.90	-.7	.46
16	-.30	.31	1.15	1.4	1.16	1.1	.23
11	-.68	.31	.96	-.3	.88	-.7	.43
20	-1.08	.32	1.10	.9	1.21	1.0	.22
23	-1.08	.32	1.01	.1	.92	-.3	.35
24	-1.08	.32	1.10	.8	1.18	.9	.23
21	-1.30	.33	.84	-1.1	.72	-1.1	.50
22	-1.93	.38	.97	-.1	.78	-.5	.33
18	-2.08	.40	1.00	.1	.76	-.5	.30
1	-2.44	.45	1.02	.2	1.17	.5	.18
17	-2.44	.45	.99	.1	2.03	1.7	.11

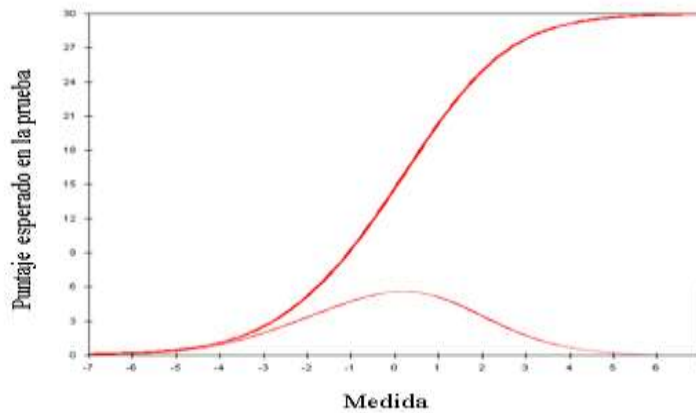


Figura 12. Curva Característica del Test y Función de información de la prueba de la subescala de aciertos en los ítems de DESAS- Estudio piloto

Tabla 11.

Estimación de dificultad y ajuste al modelo de crédito parcial, de la valoración de descontento-contento de los ítems del DESAS- Estudio piloto

Ítem	Dificultad	Error estándar	Ajuste cercano (INFIT)		Ajuste lejano (OUTFIT)		Correlación punto-biserial
			Media cuadrática	Valores estandarizados	Media cuadrática	_Valores estandarizados	
28 ^a	.47	.13	.88	-.6	.78	-.9	.50
13	.34	.14	.98	.0	.88	-.4	.42
9 ^a	.33	.14	1.17	.9	1.16	.6	.37
12	.33	.14	1.03	.2	.91	-.2	.42
27 ^a	.33	.14	.84	-.7	.76	-.8	.47
3	.25	.14	.90	-.4	1.42	1.4	.37
4 ^a	.21	.14	.65	-1.7	.60	-1.5	.46
11	.18	.15	.77	-1.1	.64	-1.3	.48
8 ^a	.16	.15	1.07	.4	.93	-.1	.38
14 ^a	.16	.15	.64	-1.8	1.21	-1.5	.47
30 ^a	.16	.15	1.43	1.8	1.21	.8	.33
15 ^a	.14	.15	1.17	.8	1.01	.8	.33
17 ^a	.14	.15	1.13	.6	1.00	.1	.38
5 ^a	.07	.15	1.07	.4	1.42	1.3	.33
6 ^a	.05	.16	.88	-.4	.77	-.7	.39
24 ^a	.05	.16	1.17	.8	1.00	.1	.37
26 ^a	.05	.16	1.09	.4	.87	-.3	.40
10 ^a	.02	.16	1.11	.5	.89	-.2	.36
25 ^a	.02	.16	.94	-.2	.85	-.4	.37
2	.00	.16	.65	-1.5	1.31	1.0	.36
29 ^a	-.03	.16	1.24	1.0	1.76	2.0	.26
23	-.16	.17	1.13	.5	.95	.0	.31
7 ^a	-.23	.18	.88	-.3	.70	-.8	.36
19 ^a	-.23	.18	.71	-1.0	.81	-.4	.36
20 ^a	-.26	.18	1.35	1.2	1.07	.3	.32
18 ^a	-.33	.19	.97	.0	.86	-.2	.31
22	-.33	.19	1.27	.9	1.10	.4	.31
16 ^a	-.45	.20	1.32	1.0	1.33	.9	.37
1	-.69	.24	.70	-.8	.69	-.6	.20
21	-.74	.25	.90	-.1	.93	.0	.23

a. Ítems que requieren sustracción de elementos

En el análisis de Rasch de crédito parcial para el descontento-contenido dirigido se encontró un índice de confiabilidad de .77 para los estudiantes y de .65 para los ítems. La dificultad de los ítems osciló entre -.74 y .47. En esta escala presentaron desajuste 6 ítems: uno de cambio (el ítem 16) tres de igualación (ítems 20, 29 y 30), uno de combinación (ítem 2) y uno de comparación (ítem 3) (Tabla 11). Los demás ítems se ajustan al modelo de crédito parcial. Los desajustes en los ítems de descontento se dan principalmente en problemas de sentencia canónica y no canónica que requieren sustraer elementos.

En el mapa de los ítems de la subescala de descontento (Anexo 7) se observa que 27 de los 30 ítems se ubican en el intervalo de θ entre -0.5 y 0.5 de dificultad para expresar contenido dirigido, mientras que la gran mayoría de los estudiantes quedaron situados por encima de la media 0 de contenido.

El mapa de categorías de los ítems de la subescala de descontento-contenido dirigido (Figura 13) muestra que la valoración del ítem 28 reporta mayores niveles de contenido dirigido en niveles altos de atributo, así como valoraciones de descontento en niveles de θ entre 0 y 1, mientras que el ítem 21 (Cambio 1 en práctica de Estados de Cuenta) es el que reporta valoraciones neutras y altas de contenido dirigido.

El análisis de las categorías indica dos tendencias de interés: (a) una agrupación en dos grandes bloques, uno de ellos conformado por las categorías 1 a 4, y el otro por la opción 5 (Muy contenido); y (b) la gradación de las categorías al interior de varios de los ítems no sigue la escala ordinal ascendente, lo cual muestra que para ciertas situaciones de adición y sustracción la valoración de contenido-descontento dirigido no se da en un continuo de menor a mayor contenido sino pueden encontrarse altos niveles de contenido en niveles medios o bajos de habilidad. Así mismo se aprecian amplias distancias entre las categorías, y en algunos ítems los estudiantes no emitieron respuestas en las categorías 1 y 2 (muy descontento y descontento, respectivamente). Sólo el ítem 26 conserva la gradación ascendente de las categorías. Esto sugiere que podría reconfigurarse la escala en una gradación de dos o tres categorías, de manera que se pueda capturar de manera más precisa la reacción afectiva de los estudiantes frente a las situaciones de aprendizaje.

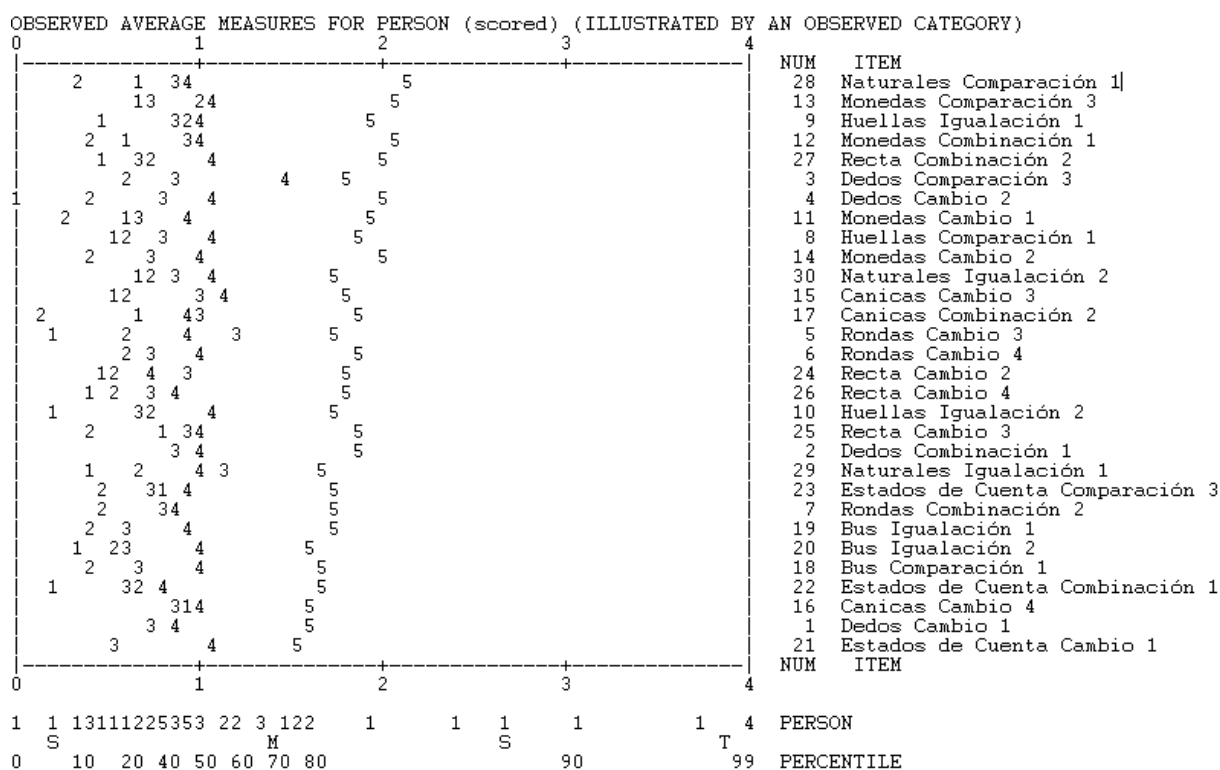


Figura 13. Mapa de categorías de la subescala de descontento-contento para los ítems del DESAS-Estudio piloto

Los resultados de las correlaciones entre variables medidas con el DESAS se muestran en la Tabla 12. Se obtuvieron correlaciones significativas entre los aciertos y la valoración de descontento-contento dada por los niños para cuatro ítems, 3 de combinación y 1 de cambio. 3 de estos 4 ítems implican una relación de partes a todo. La correlación entre la valoración del descontento-contento dada por el aplicador principal y el observador no participante fue significativa a nivel de .01 para todos los ítems, con valores *rho* entre .40 y .90. Finalmente se encontraron correlaciones significativas con valores superiores a 0.4 entre la valoración que los niños daban de su descontento-contento y la valoración dada por los observadores, para 4 ítems. En general, la valoración de descontento dirigido entre observadores y niños converge primordialmente en algunos ítems de investidura con correlaciones igual o superiores a .30 y otros ítems formalizados con valores igual o superiores a .40

Tabla 12.

Correlaciones entre puntuaciones en la subescala de aciertos, de descontento-contenido dirigido y los tiempos de reacción para los ítems de DESAS-Estudio piloto

Ítem	Acuerdo- descontento	Contenido observadores	estudiante- aplicador principal	estudiante- observador 2	tiempos reacción y descontento
	Rpbis	rho	rho	Rho	rho
Dedos Cambio 1 ^{a, c}	-.22	.73	-.19	-.14	-.10
Dedos Combinación 1 ^{a, c}	.07	.58	.10	.06	-.18
Dedos Comparación 3 ^{a, c}	-.06	.73	.13	.09	-.37
Dedos Cambio 2 ^{a, d}	.13	.54	.19	.09	-.29
Rondas Cambio 3 ^{b, d}	.16	.70	-.01	.02	-.11
Rondas Cambio 4 ^{b, d}	.01	.74	-.01	.09	-.32
Rondas Combinación 2 ^{b, d}	.04	.73	.07	.16	.32
Huellas Comparación 1 ^{b, d}	-.00	.40	.06	.18	-.41
Huellas Igualación 1 ^{b, d}	.05	.63	.23	.01	-.21
Huellas Igualación 2 ^{b, d}	-.12	.63	-.15	.00	-.27
Monedas Cambio1 ^{a, c}	.11	.78	.34*	.26	-.31
Monedas Combinación 1 ^{a, c}	.28*	.73	.28	.37*	-.20
Monedas Comparación 3 ^{a, c}	.16	.65	.32	.22	-.37
Monedas Cambio 2 ^{a, d}	.04	.63	.12	.05	.30
Canicas Cambio 3 ^{b, d}	-.09	.68	.36*	.16	-.39
Canicas Cambio 4 ^{b, d}	.07	.75	.20	.23	-.16
Canicas Combinación 2 ^{b, d}	.33*	.71	.27	.21	-.49**
Bus Comparación 1 ^{b, d}	.22	.66	.35*	.15	-.24
Bus Igualación 1 ^{b, d}	-.03	.60	.15	.22	-.00
Bus Igualación 2 ^{b, d}	-.13	.90	-.00	.02	-.10
Estados de cuenta Cambio 1 ^{a, c}	.16	.77	.18	.10	-.26
Estados de cuenta Combinación1 ^{a, c}	.21	.78	.20	.18	.26
Estados de cuenta Comparación3 ^{a, c}	.19	.83	.13	.27	-.34
Rectas Cambio 2 ^{a, d}	.37*	.82	.42**	.41**	-.11
Rectas Cambio 3 ^{b, d}	.04	.71	.10	.09	.24
Rectas Cambio 4 ^{b, d}	.21	.71	.53**	.50**	.01
Rectas Combinación 2 ^{b, d}	.35*	.84	.39*	.30*	-.04
Adición naturales Comparación1 ^{b, d}	.21	.71	.20	.05	-.27
Adición naturales Igualación 1 ^{b, d}	.22	.85	.33*	.32*	-.02
Adición naturales Igualación 2 ^{b, d}	.05	.83	.06	.12	-.40

- a. ítems de sentencia canónica.
- b. ítems de sentencia no canónica
- c. Ítems que requieren adición de elementos
- d. Ítems que requieren sustracción de elementos

*Los valores sombreados en verde corresponden a correlaciones significativas inferiores a .40

**Los valores sombreados en azul corresponden a correlaciones mayores a .40

Una descripción de los *tiempos de reacción* expresado en segundos muestra tendencias interesantes en cuanto al tipo de problema y práctica (Tabla 13).

Los problemas en los que hubo menor tiempo promedio (tiempo inferior a 30 seg) y menor desviación estándar son los ítems 7, 8, 14, 21, 26, es decir, en cuanto a prácticas hay dos corporeizadas, dos formalizadas y una de investidura. Con relación al tipo de problema, con excepción de Cambio 1 en la práctica de estados de cuenta, son problemas en los que su resolución implica realizar sustracción. Por su parte, los ítems 15 y 18 reportan tiempos promedios mayores a 45 seg y amplia variabilidad.

Tabla 13.

Descriptivos de los tiempos de reacción de los ítems de DESAS-Estudio piloto (valores en segundos)

Ítem	Descripción	Mínimo	Máximo	Media	Desviación estándar
1	Dedos Cambio 1	5.03	107.10	40.28	18.77
2	Dedos Combinación 1	4.83	82.32	38.71	20.60
3	Dedos Comparación 3	13.48	72.46	27.91	17.39
4	Dedos Cambio 2	10.54	88.42	31.86	17.78
5	Rondas Cambio 3	15.34	69.54	30.87	14.26
6	Rondas Cambio 4	16.69	81.80	31.26	16.03
7	Rondas Combinación 2	16.13	56.64	26.97	10.31
8	Huellas Comparación 1	18.44	45.63	28.70	8.78
9	Huellas Igualación 1	19.21	94.78	36.49	19.10
10	Huellas Igualación 2	21.28	93.18	35.74	19.99
11	Monedas Cambio 1	17.21	127.95	37.32	24.69
12	Monedas Combinación 1	16.16	116.78	44.48	26.80
13	Monedas Comparación 3	12.82	112.28	35.57	20.92
14	Monedas Cambio 2	13.82	59.76	27.31	12.15
15	Canicas Cambio 3	14.03	205.98	48.11	49.22
16	Canicas Cambio 4	12.58	108.66	41.58	25.74
17	Canicas Combinación 2	15.21	77.81	34.26	15.39
18	Bus Comparación 1	16.86	288.02	53.84	63.42
19	Bus Igualación 1	14.69	196.68	44.20	44.44
20	Bus Igualación 2	16.00	126.76	40.13	27.74
21	Estados de cuenta Cambio 1	12.07	66.41	23.05	11.64
22	Estados de cuenta Combinación 1	7.71	105.24	24.09	22.23
23	Estados de cuenta Comparación 3	7.02	161.31	32.14	32.76
24	Rectas Cambio 2	9.78	180.76	34.56	37.30
25	Rectas Cambio 3	11.21	89.24	27.91	22.42
26	Rectas Cambio 4	9.26	54.16	19.78	12.12
27	Rectas Combinación 2	10.07	96.86	25.88	18.70
28	Adición naturales Comparación 1	14.84	163.23	35.99	33.40
29	Adición naturales Igualación 1	11.09	88.69	34.89	22.32
30	Adición naturales Igualación 2	11.94	179.71	39.86	40.06

Los resultados del estudio piloto permitieron tomar decisiones relacionadas con el instrumento. En primer lugar, si bien en el análisis de la subescala de acierto los ítems 28, 10, 3, 15 y 20 no presentaron valores ideales de dificultad o discriminación; y en el análisis de la subescala de descontento los ítems 16, 30, 29, 20, 2 y 3 presentaron desajustes leves, se decidió aplicar los 30 ítems de la prueba DESAS y los 30 ítems de la subescala de descontento-contenido en la siguiente etapa con una muestra mayor de examinados. En segundo lugar, teniendo en cuenta el comportamiento de las categorías de los ítems de descontento-contenido, se decidió recategorizar la subescala de descontento-contenido en tres categorías: Descontento, Ni descontento ni contenido y Contenido para la aplicación de validación (Figura 9). Finalmente, dados los resultados en las correlaciones entre variables, se decidió mantener el registro de las mismas para la siguiente etapa de validación del instrumento.

Aplicación de validación.

Como se describió en el capítulo de Método, en este estudio se recolectó información de 216 estudiantes, 36 de ellos identificados con alguna dificultad en adición o sustracción y 180 participantes sin este antecedente. Para el grupo de comparación, de los 36 estudiantes, 8 manifestaron reprobación de un curso y 2 estudiantes, de 2 cursos. De los 180 estudiantes, 158 (87.8%) manifestaron que no habían reprobado ningún curso, no obstante 17 estudiantes (9.4%) repitieron un curso, 3 estudiantes repitieron 2 cursos y 2 estudiantes repitieron curso en 3 o más ocasiones.

La distribución de las respuestas relacionada con el apoyo para estudiar matemáticas es similar para el grupo de participantes y el de comparación: el 55% del primer grupo y el 61% del segundo reportaron que estudian con los padres, 16.7% del primer grupo y 11.1% del grupo de comparación estudian solos y los porcentajes restantes de ambos grupos mencionaron que estudian con otros familiares. Con relación al gusto por la matemática, el 68.9% del primer grupo y el 61.1% del segundo manifestaron que les gustan mucho las matemáticas; los porcentajes de quienes mencionaron que les gusta poco fueron 26.7% y 30.6% y los porcentajes restantes de ambos grupos reconocieron que no les gustan las matemáticas.

Análisis psicométricos.

El Alpha de Cronbach para los aciertos en los ítems fue de .84; .92 para la valoración del descontento dirigido y .91 para los tiempos de reacción a los ítems de DESAS. La dificultad de los ítems de DESAS osciló entre .19 y .86, que corresponde a un rango de -.01 y .82 cuando se corrige por azar (Tabla 14). Se aprecia que 9 de los 30 ítems presentan un índice de dificultad igual o menor a .20.

Tabla 14.

Índices de dificultad y discriminación de los ítems de DESAS-Aplicación de validación

Ítem	Nombre	Dificultad	Dificultad corregida	Discriminación (Correlación biserial puntual)	Correlación biserial puntual corregida
1	Dedos Cambio 1 ^{a, c}	0.86	0.82	0.33	0.28
2	Dedos Combinación 1 ^{a, c}	0.39	0.24	0.57	0.51
3	Dedos Comparación 3 ^{a, c}	0.31	0.13	0.21	0.14
4	Dedos Cambio 2 ^{a, d}	0.24	0.05	0.50	0.44
5	Rondas Cambio 3 ^{b, d}	0.38	0.22	0.38	0.30
6	Rondas Cambio 4 ^{b, d}	0.55	0.44	0.48	0.41
7	Rondas Combinación 2 ^{b, d}	0.46	0.33	0.46	0.39
8	Huellas Comparación 1 ^{b, d}	0.30	0.12	0.53	0.47
9	Huellas Igualación 1 ^{b, d}	0.47	0.34	0.31	0.23
10	Huellas Igualación 2 ^{b, d}	0.34	0.18	0.45	0.38
11	Monedas Cambio1 ^{a, c}	0.48	0.35	0.46	0.39
12	Monedas Combinación 1 ^{a, c}	0.49	0.36	0.44	0.37
13	Monedas Comparación 3 ^{a, c}	0.40	0.25	0.49	0.42
14	Monedas Cambio 2 ^{a, d}	0.56	0.46	0.49	0.43
15	Canicas Cambio 3 ^{b, d}	0.19	-0.01	0.46	0.40
16	Canicas Cambio 4 ^{b, d}	0.36	0.20	0.61	0.55
17	Canicas Combinación 2 ^{b, d}	0.79	0.74	0.25	0.18
18	Bus Comparación 1 ^{b, d}	0.83	0.79	-0.02	-0.08
19	Bus Igualación 1 ^{b, d}	0.38	0.23	0.44	0.37
20	Bus Igualación 2 ^{b, d}	0.60	0.50	0.28	0.20
21	Estados de cuenta Cambio 1 ^{a, c}	0.78	0.73	0.46	0.40
22	Estados de cuenta Combinación1 ^{a, c}	0.82	0.78	0.40	0.35
23	Estados de cuenta Comparación3 ^{a, c}	0.70	0.63	0.42	0.36
24	Rectas Cambio 2 ^{a, d}	0.80	0.75	0.29	0.22
25	Rectas Cambio 3 ^{b, d}	0.43	0.28	0.51	0.44
26	Rectas Cambio 4 ^{b, d}	0.36	0.20	0.40	0.33
27	Rectas Combinación 2 ^{b, d}	0.54	0.43	0.50	0.44
28	Adición naturales Comparación 1 ^{b, d}	0.23	0.03	0.59	0.54
29	Adición naturales Igualación 1 ^{b, d}	0.60	0.50	0.43	0.36
30	Adición naturales Igualación 2 ^{b, d}	0.33	0.17	0.52	0.45

- e. a. ítems de sentencia canónica.
- f. b. ítems de sentencia no canónica
- g. c. Ítems que requieren adición de elementos
- h. d. Ítems que requieren sustracción de elementos

Con relación al tipo de problema se observa que revisten mayor dificultad aquellos que requieren para su resolución una estrategia que consiste en sustraer elementos, aun cuando los problemas sean de sentencia canónica y no canónica, tendencia similar a la encontrada en el estudio piloto. En cuanto a la práctica se mantiene lo encontrado en el estudio piloto en el sentido que las prácticas de investidura y formalizadas registran mayor acierto que las prácticas corporeizadas, con excepción del ítem 1. La discriminación corregida osciló entre .08 y .55. Veintitrés de los 30 ítems poseen índices de discriminación superiores a .30. Sin embargo dos ítems presentaron baja discriminación, uno de ellos (ítem 3) presentó alta dificultad y el otro baja dificultad (ítem 18).

Tabla 15.

Valoración promedio del descontento-contento y correlaciones de Spearman para la subescala de descontento-contento dirigido- Aplicación de validación

Ítem	Nombre	Promedio de las respuestas	Correlación Spearman	Correlación Spearman corregida
1	Dedos Cambio 1 ^{a, c}	2.72	.40	.36
2	Dedos Combinación 1 ^{a, c}	2.44	.51	.47
3	Dedos Comparación 3 ^{a, c}	2.61	.49	.44
4	Dedos Cambio 2 ^{a, d}	2.51	.50	.45
5	Rondas Cambio 3 ^{b, d}	2.63	.49	.44
6	Rondas Cambio 4 ^{b, d}	2.58	.54	.49
7	Rondas Combinación 2 ^{b, d}	2.60	.53	.49
8	Huellas Comparación 1 ^{b, d}	2.55	.57	.53
9	Huellas Igualación 1 ^{b, d}	2.54	.65	.62
10	Huellas Igualación 2 ^{b, d}	2.58	.53	.49
11	Monedas Cambio1 ^{a, c}	2.64	.53	.50
12	Monedas Combinación 1 ^{a, c}	2.51	.60	.55
13	Monedas Comparación 3 ^{a, c}	2.46	.68	.64
14	Monedas Cambio 2 ^{a, d}	2.58	.53	.49
15	Canicas Cambio 3 ^{b, d}	2.60	.52	.48
16	Canicas Cambio 4 ^{b, d}	2.62	.58	.55
17	Canicas Combinación 2 ^{b, d}	2.63	.50	.45
18	Bus Comparación 1 ^{b, d}	2.54	.56	.52
19	Bus Igualación 1 ^{b, d}	2.58	.55	.51
20	Bus Igualación 2 ^{b, d}	2.60	.54	.49
21	Estados de cuenta Cambio 1 ^{a, c}	2.70	.49	.45
22	Estados de cuenta Combinación 1 ^{a, c}	2.74	.43	.39
23	Estados de cuenta Comparación 3 ^{a, c}	2.63	.58	.54
24	Rectas Cambio 2 ^{a, d}	2.58	.54	.50
25	Rectas Cambio 3 ^{b, d}	2.66	.56	.52
26	Rectas Cambio 4 ^{b, d}	2.66	.56	.53
27	Rectas Combinación 2 ^{b, d}	2.53	.56	.51
28	Adición naturales Comparación 1 ^{b, d}	2.51	.63	.59
29	Adición naturales Igualación 1 ^{b, d}	2.55	.62	.58
30	Adición naturales Igualación 2 ^{b, d}	2.61	.50	.46

- a. ítems de sentencia canónica.
- b. ítems de sentencia no canónica
- c. Ítems que requieren adición de elementos
- d. Ítems que requieren sustracción de elementos

El promedio de las valoraciones de descontento-contento osciló entre 2.44 y 2.74 (Tabla 15). Al parecer, los ítems con menor promedio son problemas que implican el uso de estrategia de sustracción, mientras que las estructuras semánticas de los problemas con mayor promedio son aquellos más recurrentes en los libros de texto de educación básica primaria (Arias, Barboza, Bertel, & Garrido, 2013; Godino, Font, & Wilhelmi, 2006).

Por su parte, la correlación corregida de Spearman entre la valoración de cada ítem y la escala total de descontento oscila entre 0.36 y 0.64. Todos los ítems muestran índices de discriminación superiores a .30, siendo el ítem 28 el más discriminativo.

El *análisis factorial exploratorio por componentes principales* de los aciertos arrojó una razón de varianzas entre el primero y segundo factor de 3.67 en SPSS y un porcentaje de varianza explicada de 32% en el Winsteps. Para la subescala de descontento-contento dirigido, estos valores fueron 5.20 y 26.5%, respectivamente.

Los valores obtenidos en los análisis factoriales de aciertos como en descontento-contento dirigido constituyen evidencia para soportar el supuesto de unidimensionalidad, por ende permiten ajustar el modelo de un parámetro para la subescala de acierto y el modelo Rasch de crédito parcial para la subescala de descontento-contento dirigido.

Al ajustar el modelo de Rasch en los aciertos en los ítems del DESAS se encontró una confiabilidad de .83 para los estudiantes y de .98 para los ítems. La dificultad de los ítems osciló entre -2.12 y 1.84, siendo el ítem más fácil el ítem 1 y el más difícil el ítem 15 (Tabla 16). Tres ítems de comparación (3, 18 y 28), 2 de cambio (16 y 24) y dos de igualación (el 9 y el 29) presentaron algún desajuste. Los demás ítems presentan adecuados índices de ajuste al modelo de Rasch.

Tabla 16.

Estimación de dificultad y ajuste de los ítems de DESAS- Validación.

Ítem	Dificultad	Error estándar	Ajuste cercano (INFIT)		Ajuste lejano (OUTFIT)		Correlación punto biserial
			Media cuadrática	Valores estandarizados	Media cuadrática	_Valores estandarizados	
15	1.84	.19	.90	-.8	.98	.0	.47
28	1.56	.18	.79	-2.2	.79	-1.3	.59
4	1.47	.18	.90	-1.1	.88	-.7	.51
8	1.11	.17	.90	-1.2	.86	-1.1	.53
3	1.05	.17	1.28	3.2	1.51	3.6	.21
30	.89	.16	.92	-1.0	.88	-1.0	.52
10	.84	.16	1.00	.0	1.08	.7	.45
16	.76	.16	.82	-2.6	.77	-2.3	.60
26	.73	.16	1.06	.9	1.06	.6	.41
5	.63	.16	1.01	1.1	1.14	1.4	.39
19	.61	.16	1.03	.4	1.03	.3	.44
2	.56	.16	.87	-1.9	.83	-1.9	.56
13	.51	.16	.97	-.4	.93	-.7	.49
25	.39	.16	.94	-.9	.91	-.9	.51
7	.20	.15	1.00	.0	1.01	.1	.46
9	.15	.15	1.17	2.7	1.30	3.1	.30
11	.10	.15	.98	-.2	1.06	.7	.45
12	.06	.15	1.02	.3	.99	-.1	.44
27	-.20	.15	.93	-1.1	.86	-1.5	.50
6	-.25	.15	.96	-.6	.95	-.5	.47
14	-.32	.15	.94	-1.0	.88	-1.2	.49
20	-.48	.15	1.16	2.6	1.25	2.2	.29
29	-.50	.15	1.00	.0	.99	-.1	.43
23	-1.05	.16	.96	-.6	.93	-.4	.42
21	-1.54	.18	.87	-1.5	.78	-1.1	.45
17	-1.60	.18	1.10	1.0	1.20	1.0	.25
24	-1.64	.18	1.05	.5	1.60	2.5	.27
22	-1.84	.19	.91	-.8	.76	-1.0	.40
18	-1.92	.19	1.27	2.2	2.67	4.8	-.01
1	-2.12	.20	1.00	.0	0.75	-.9	.32

En el análisis de Rasch de crédito parcial para el descontento-contento dirigido se encontró un índice de confiabilidad de .81 para los estudiantes y de .78 para los ítems. La dificultad de los ítems osciló entre -.74 y 64.

De los ítems de la subescala de descontento, el ítem 3 (Comparación 3 en la práctica de dedos), el ítem 1 (Cambio 1 en la práctica de dedos) y el ítem 9 (Igualación 1 en la práctica de huellas) presentan desajuste al modelo y corresponden a prácticas corporeizadas. Los demás ítems se ajustan al modelo (Tabla 17).

Tabla 17.

Estimación de dificultad y ajuste de ítems de descontento-contento dirigido al modelo de crédito parcial-Aplicación de validación

Ítem	Dificultad	Error Estándar	Ajuste cercano (INFIT)		Ajuste lejano (OUTFIT)		Correlación Punto-biserial
			Media cuadrática	Valores estandarizados	Media cuadrática	_Valores estandarizados	
2	.64	.14	.90	-1.0	.91	-.7	.54
13	.57	.14	.86	-1.5	.82	-1.6	.61
4	.36	.14	.97	-.3	1.16	1.3	.49
12	.36	.14	1.05	.5	.93	-.5	.55
28	.36	.14	.97	-.3	1.05	.4	.55
27	.26	.14	1.00	.1	1.13	1.0	.52
18	.24	.14	1.06	.7	.98	-.1	.52
9	.22	.14	.77	-2.6	.70	-2.5	.59
8	.20	.14	.95	-.5	.92	-.5	.53
29	.20	.14	1.03	.3	.97	-.2	.54
6	.06	.14	.98	-.2	1.02	.2	.50
10	.06	.14	.93	-.7	.83	-1.2	.51
14	.06	.14	1.12	1.2	1.02	.2	.48
19	.06	.14	.85	-1.5	1.01	.1	.53
24	.04	.14	1.00	.1	1.01	.1	.51
20	-.02	.15	.96	.4	.89	-.7	.50
7	-.05	.15	1.00	.1	1.12	.8	.49
15	-.05	.15	.98	-.1	1.07	.5	.49
30	-.07	.15	1.06	.7	1.10	.7	.46
3	-.09	.15	1.02	.2	1.38	2.3	.45
16	-.13	.15	1.08	.9	.95	-.3	.51
5	-.15	.15	1.03	.4	.97	-.1	.47
23	-.15	.15	.98	-.1	.87	-.8	.52
17	-.20	.15	1.05	.5	1.15	1.0	.45
11	-.22	.15	1.08	.8	.93	-.4	.49
25	-.31	.15	1.05	.5	.95	-.3	.49
26	-.33	.15	1.05	.5	.90	-.5	.50
21	-.55	.16	1.07	.7	.90	-.5	.45
1	-.63	.16	1.09	.8	1.49	2.3	.37
22	-.74	.16	1.14	1.3	.96	-.1	.41

Teniendo en cuenta los hallazgos en las aplicaciones piloto y de validación, se adoptaron los siguientes criterios para la eliminación de ítems: (a) ítems con dificultad por encima de .80 y discriminación por debajo de .20 en ambas etapas, o cuyos valores en estos parámetros sean muy extremos en una de las fases; (b) presencia de desajuste cercano y lejano superiores a los valores estandarizados tanto en acierto como en descontento-contento dirigido. Una vez aplicados estos criterios se suprimieron de la prueba 3 ítems: el 3, el 9 y el 18. Así, la prueba

DESAS quedó conformada por 27 ítems, cuya composición se presenta en la Tabla 18. Con esta reconfiguración el Alpha de Cronbach para los aciertos en los ítems de DESAS es de .85; .91 para el descontento dirigido y .89 para los tiempos de reacción de los ítems de DESAS (Anexo 8).

Tabla 18.

Estructura final de la prueba DESAS

Clasificación semántica de las situaciones aditivas	Prácticas de aprendizaje matemático			
	Corporeizadas	De investidura	Formalizadas	Total
Adición				
Cambio 1 CA1	Dedos	Monedas	Estados de cuenta	3
Combinación 1 CO1	Dedos	Monedas	Estados de cuenta	3
Comparación 3 CMP3		Monedas	Estados de cuenta	2
Sustracción				
Cambio 2 CA2	Dedos	Monedas	Recta numérica	3
Cambio 3 CA3	Rondas	Cuentas	Recta numérica	3
Cambio 4 CA4	Rondas	Cuentas	Recta numérica	3
Combinación 2 CO2	Rondas	Cuentas	Recta numérica	3
Comparación 1 CMP1	Huellas		Números naturales	2
Igualación 1 IG1		Bus	Números naturales	2
Igualación 2 IG2	Huellas	Bus	Números naturales	3
TOTAL	8	9	10	27

El análisis factorial exploratorio por componentes principales de la subescala de aciertos con la prueba de 27 ítems, arrojó una razón de varianzas entre el primero y segundo factor de 3.65 y un porcentaje de varianza explicada de 33.5% en el Winsteps. Para la subescala de descontento-contenido dirigido, estos valores fueron 4.70 y 26.2%, respectivamente. Los valores obtenidos en los análisis factoriales de aciertos como en descontento-contenido dirigido constituyen evidencia para mantener el supuesto de unidimensionalidad de ambas escalas.

Con esta reconfiguración del instrumento, los ítems de la subescala de acierto se distribuyen a lo largo del continuo de habilidad, siendo los problemas más difíciles aquellos que requieren estrategia de sustracción (Ver Anexo 9).

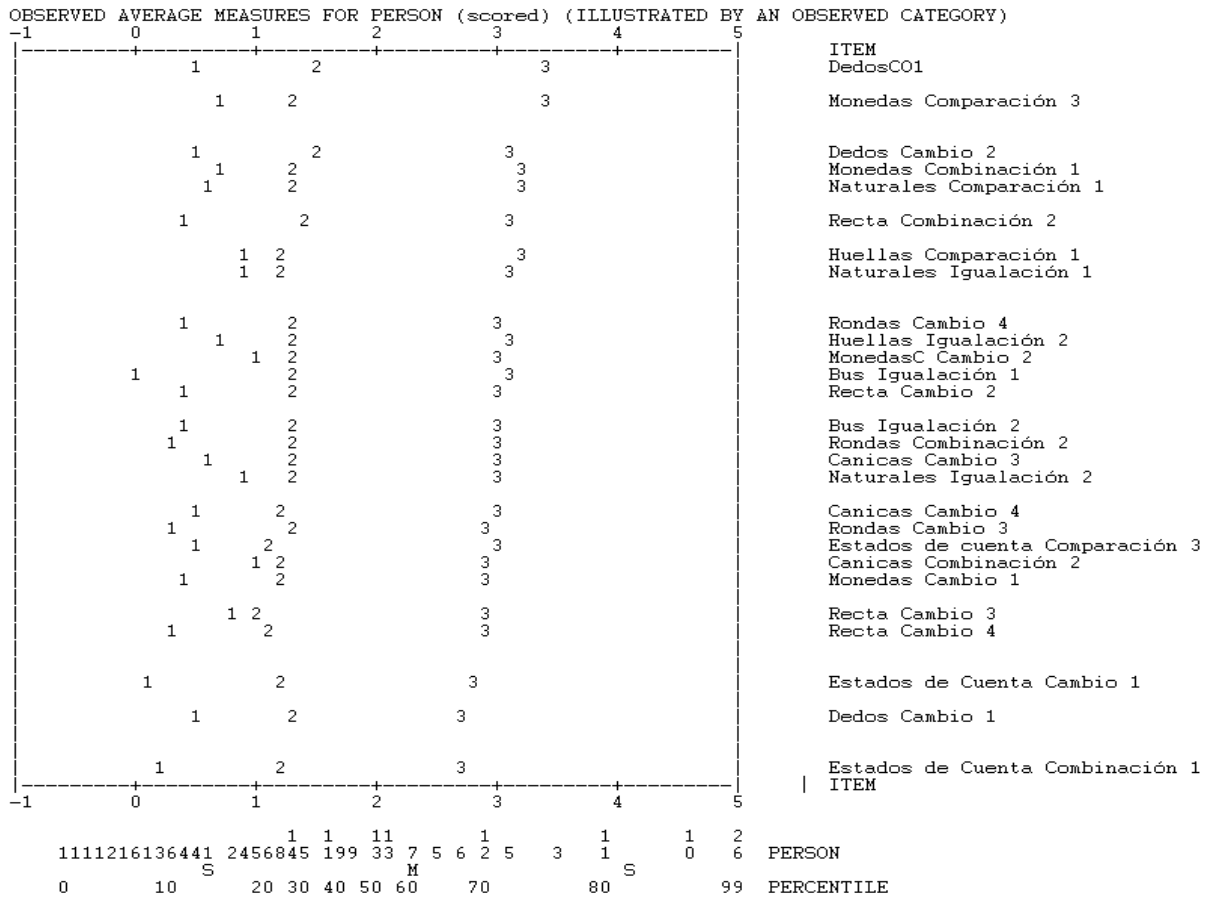


Figura 14. Mapa categorías escala de descontento-contento dirigido DESAS-27 ítems

El mapa de categorías de los ítems de la subescala de descontento-contento (Figura 14) muestra que todos los ítems presentan una adecuada gradación ascendente del descontento-contento dirigido. Para la subescala de descontento-contento las valoraciones se concentran en el intervalo de θ entre -0.5 y 0.5 de dificultad, mientras que la gran mayoría de los estudiantes quedaron situados por encima de la media. Así, Estados de Cuenta Cambio 1 y Combinación 1, y Dedos Cambio 1 son ítems que tienden a ser valorados con alto contenido en estudiantes con nivel de θ cercano a -1, por su parte los ítems Dedos Combinación 1 y Monedas Comparación 3 son valorados con alto contenido en estudiantes con nivel de θ cercano a 1 (Anexo 10).

Así, tanto la subescala de acierto como la de descontento-contento dirigido configuran un instrumento que brinda información importante no sólo sobre el éxito o fracaso en la resolución de la tarea, sino también acerca de la reacción afectiva cuando el niño experimenta una tarea como difícil, en función de un interjuego estructura semántica-práctica matemática al

que en ocasiones no se puede ajustar con facilidad. Los análisis ulteriores sobre estructura interna de la prueba y relación con otras variables se reportan sobre la base del instrumento DESAS con 27 ítems (Tabla 18).

Estructura interna de la prueba.

En el análisis factorial de totales de acierto y descontento-contenido por tipo de problema, se obtuvo un índice KMO de .823 y una prueba de esfericidad de Bartlett de χ^2 (28, N= 216 = 987.406, p =.000), valores que indican que los datos permiten realizar el análisis factorial. Se seleccionaron los factores mayores a 1.35 en valor propio y se obtuvieron dos factores que explican el 74.33% de varianza (tabla 19). El primer factor explica el 40.93% de la varianza y el segundo factor 33.40%.

Tabla 19.

Estructura factorial totales de acierto y descontento-contenido dirigido, por tipo de problema

	Componente	
	1	2
Aciertos Cambio	*	.84
Aciertos Combinación	*	.84
Aciertos Comparación	*	.81
Aciertos Igualación	*	.77
Contento Cambio	.93	*
Contento Combinación	.90	*
Contento Comparación	.88	*
Contento Igualación	.88	*

* Sólo se reportan cargas factoriales mayores a .40

Un análisis factorial tomando como variables las puntuaciones en los 10 tipos de problema (4 de cambio, 2 de combinación, 2 de comparación y 2 de igualación), respalda la anterior evidencia. El análisis factorial de aciertos y descontento-contenido obtuvo un KMO de .901 y una prueba de esfericidad de Bartlett de χ^2 (190, N= 216 = 1798.247, p =.000), valores que indican que los datos permiten realizar el análisis factorial. Se seleccionaron los factores mayores a 1.35 en valor propio y se obtuvieron dos factores que explican el 50.20% de varianza. El primer factor explica el 28.59% de la varianza y el segundo factor 21.61%.

De acuerdo con la estructura factorial por los 10 tipos de problema (Tabla 20), en el primer factor de descontento-contenido dirigido, las mayores cargas están en Combinación 1, Comparación 3 y Cambio 4. En el factor de acierto las cargas más altas están en Cambio 4, Combinación 1 y Cambio 3. Cabe mencionar que con excepción de Combinación 1 y

Comparación 3, estos problemas que reportan mayor carga en cada factor son aquellos de sentencia no canónica y que pueden requerir para su solución una estrategia basada en la sustracción.

Tabla 20.

Estructura factorial de totales de acierto y descontento-contento dirigido, por 10 tipos de problema

	Componente	
	1	2
Aciertos Cambio 1	*	.65
Aciertos Combinación 1	*	.71
Aciertos Comparación 3	*	.58
Aciertos Cambio 2	*	.65
Aciertos Cambio 3	*	.68
Aciertos Cambio 4	*	.72
Aciertos Combinación 2	*	.64
Aciertos Comparación 1	*	.66
Aciertos Igualación 1	*	.59
Aciertos Igualación 2	*	.64
Contento Cambio 1	.68	*
Contento Combinación 1	.77	*
Contento Comparación 3	.77	*
Contento Cambio 2	.75	*
Contento Cambio 3	.74	*
Contento Cambio 4	.78	*
Contento Combinación 2	.75	*
Contento Comparación 1	.75	*
Contento Igualación 1	.76	*
Contento Igualación 2	.76	*

* Sólo se reportan cargas factoriales mayores a .40

En el análisis factorial de totales de acierto y descontento-contento, por tipo de práctica, se obtuvo un índice KMO de .715 y una prueba de esfericidad de Bartlett de χ^2 (15, N= 216= = 600.014 p =.000). Los dos primeros factores explicaron el 77.52% de varianza. El primer factor explica el 40.79% de la varianza y el segundo factor 36.73% (Tabla 21).

En relación al tipo de práctica, las prácticas de investidura tienen la mayor carga tanto de descontento-contento dirigido (Factor 1); las prácticas formalizadas y de investidura en reportan la mayor carga en cuanto a acierto (factor 2). Las estructuras factoriales de las Tablas 19 a 21 son apoyo contundente a la existencia de dos factores: en el primer factor se agrupan

las valoraciones del descontento-contento y el segundo factor recoge el componente de aciertos.

Tabla 21.

Estructura factorial de totales de acierto y descontento-contento dirigido, por tipo de práctica

	Componente	
	1	2
Contento Corporeizadas	.89	*
Contento Investidura	.92	*
Contento Formalizadas	.90	*
Aciertos Corporeizadas	*	,81
Aciertos Investidura	*	,87
Aciertos Formalizadas	*	,87

* Sólo se reportan cargas factoriales mayores a .40

Relación con otras variables.

Una descripción de los **tiempos de reacción** expresado en segundos, muestra tendencias interesantes en cuanto al tipo de problema y práctica (Tabla 22).

Tabla 22.

Descriptivos de los tiempos de reacción de los ítems de DESAS (27 ítems)

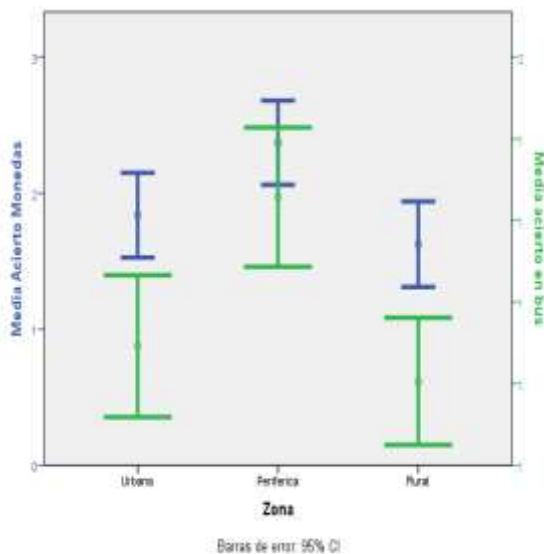
Ítem	Descripción	Mínimo	Máximo	Media	Desviación estándar
1	Dedos Cambio 1	14.92	1079.95	88.74	82.14
2	Dedos Combinación 1	10.53	224.72	37.92	26.48
3	Dedos Cambio 2	9.78	147.32	27.99	18.87
4	Rondas Cambio 3	15.42	171.59	28.67	18.53
5	Rondas Cambio 4	14.45	120.57	32.76	20.69
6	Rondas Combinación 2	13.36	114.29	27.77	16.12
7	Huellas Comparación 1	18.12	166.51	31.66	17.09
8	Huellas Igualación 2	16.96	202.93	37.76	23.81
9	Monedas Cambio1	9.95	261.62	34.28	25.39
10	Monedas Combinación 1	10.41	202.00	37.75	25.40
11	Monedas Comparación 3	10.95	273.06	37.67	30.89
12	Monedas Cambio 2	11.84	134.22	30.14	19.18
13	Canicas Cambio 3	10.70	269.09	38.88	34.38
14	Canicas Cambio 4	8.58	150.26	35.76	25.38
15	Canicas Combinación 2	10.42	96.53	27.05	16.21
16	Bus Igualación 1	10.42	438.68	45.92	48.36
17	Bus Igualación 2	9.51	220.81	38.71	33.97
18	Estados de cuenta Cambio 1	7.24	111.21	21.68	15.51
19	Estados de cuenta Combinación 1	5.63	105.24	15.94	10.25
20	Estados de cuenta Comparación 3	6.65	195.72	25.22	22.30
21	Rectas Cambio 2	8.84	203.86	25.79	23.80
22	Rectas Cambio 3	8.86	177.37	22.11	17.59
23	Rectas Cambio 4	6.98	128.69	18.67	14.28
24	Rectas Combinación 2	10.43	169.44	23.66	17.07
25	Adición naturales Comparación 1	8.86	278.08	31.49	28.77
26	Adición naturales Igualación 1	5.53	214.65	25.31	24.49
27	Adición naturales Igualación 2	6.92	207.20	30.50	28.98

En ese sentido, 13 de los 27 problemas de DESAS tuvieron tiempos de reacción promedio inferiores a 30 segundos, de ellos, los ítems en los que hubo menor tiempo promedio y menor desviación estándar son el 6, 15, 18, 19, 23 y 24.

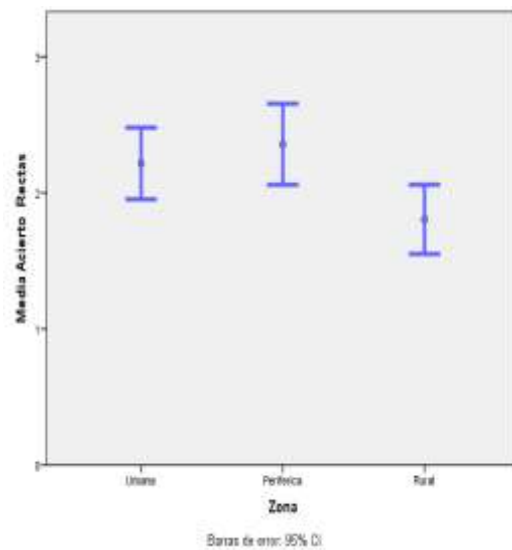
Tres de estos seis problemas (6, 18 y 23) siguen la misma tendencia encontrada en el estudio piloto, al respecto cabe mencionar que el problema de Combinación 2 en los tres tipos de práctica reporta los menores tiempos de resolución y menor variabilidad. Por su parte, los ítems 1 y 16 reportan tiempos promedios mayores a 45 seg y amplia variabilidad. Para el caso del ítem 1, los tiempos de reacción no son confiables porque el sistema calcula el tiempo desde que inicia el programa, y existe una amplia variabilidad debido al tiempo que puede transcurrir entre dar las instrucciones de resolución de los problemas y el inicio de la tarea.

El *análisis de varianza* de aciertos y descontento dirigido por tipo de problema y práctica, de acuerdo con la **zona** (urbana, periférica o rural, ver Anexo 11), muestra aspectos de interés.

Con relación al acierto por tipos de práctica, se encontraron diferencias en rondas, huellas, monedas, bus y rectas (Figura 15). En las comparaciones post hoc de HSD Tukey en la práctica de monedas, las diferencias son significativas entre los estudiantes de la zona periférica en comparación con los de la zona urbana y la zona rural, mientras que en las demás prácticas el desempeño en la zona periférica es mayor y significativo en contraste con la zona rural.



15a.

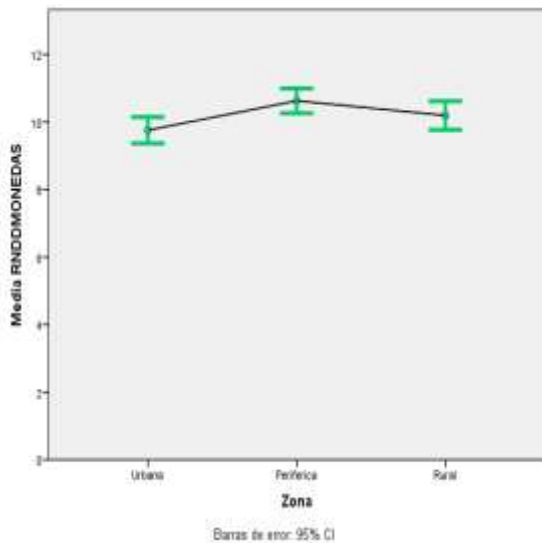


15b.

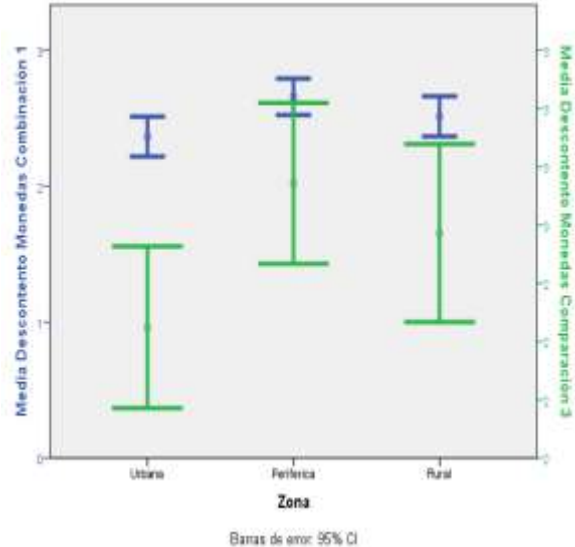
Figura 15. Medias por acierto en prácticas, por zona (15a) Monedas y bus (15b) Recta

Con relación al acierto por tipos de problema, se encontraron diferencias en Cambio 1 y 2, Combinación 1 y 2, Comparación 3 e Igualación 2. En las comparaciones post hoc de HSD Tukey en Cambio 2, las diferencias son significativas entre los estudiantes de la zona periférica, en comparación con los de la zona urbana y la zona rural. En Combinación 2 los estudiantes de la zona urbana y zona periférica presentan diferencias significativas en relación con la zona rural, mientras que en las demás prácticas el desempeño en la zona periférica es mayor y significativo en contraste con la zona rural.

En el descontento dirigido, sólo se encontraron diferencias en la práctica de Monedas y específicamente en los ítems de Combinación 1 y Comparación 3 para esta práctica. Las comparaciones post hoc indican que hay diferencia significativa de medias entre los estudiantes de la zona periférica en contraste con los de la zona urbana, lo que sugiere que posiblemente en los estudiantes de la zona urbana se da un mayor descontento dirigido hacia este tipo de tareas, ya que incluso los estudiantes de la zona rural muestran un mayor nivel de contenido en comparación con los de la zona urbana (Figura 16).



16a.



16b.

Figura 16. Medias de descontento-contenido dirigido en la práctica de monedas, por zona (16a) Nivel general (16b) Monedas en Combinación 1 y Comparación 3

El análisis de varianza de aciertos y descontento dirigido por tipo de problema y práctica, de acuerdo con el **curso**, revela tendencias importantes (Anexo 12). Con relación al acierto por tipos de práctica, se encontraron diferencias en monedas, dedos y bus. En la comparación post hoc de HSD Tukey en la práctica de monedas y dedos, las diferencias son significativas entre los estudiantes de grado cuarto, en comparación con los de grado segundo y tercero. En la práctica de bus las diferencias son significativas entre los estudiantes de grado cuarto y grado segundo. Aquí se aprecia el proceso de enculturación formal, de modo que en los grados superiores, las diversas experiencias con el manejo del dinero en conjunción con otro tipo de saberes sobre valor posicional contribuyen a altos desempeños en esta práctica (Figura 17), asimismo el desempeño en las prácticas de bus y dedos aumenta conforme el estudiante avanza en escolaridad.

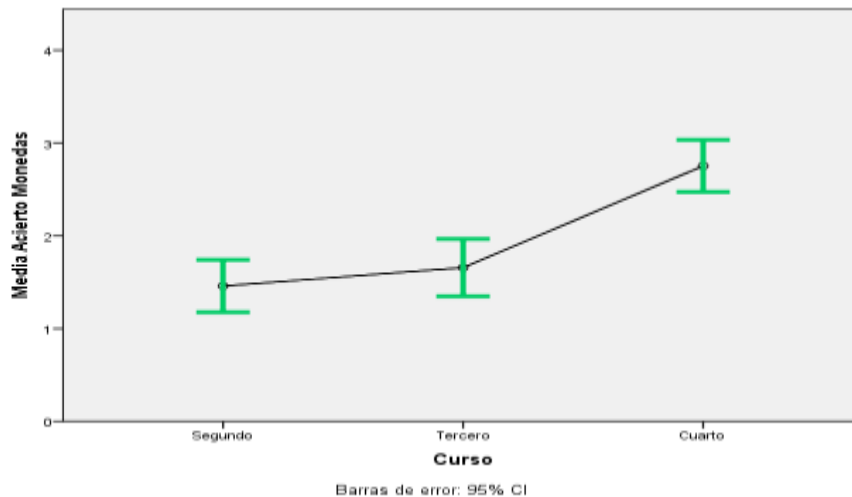


Figura 17. Medias de acierto en la práctica de monedas, por curso

En el descontento por tipo de práctica se encontraron diferencias en dedos, huellas y estados de cuenta. Aquí, en las comparaciones post hoc de HSD Tukey para la práctica de huellas existen diferencias significativas entre grado tercero y cuarto. En la práctica de estados de cuenta, la valoración de contenido es mayor en estudiantes de grado cuarto en comparación con los estudiantes de los grados segundo y cuarto.

Con relación al acierto por tipos de problema, se encontraron diferencias en Combinación 1 y 2, Comparación 3, Cambio 2 e Igualación 1. En las comparaciones post hoc de HSD Tukey en los problemas de Cambio 2 e Igualación 1, las medias son mayores y significativas en grado cuarto en comparación con grado segundo y tercero. En Comparación 3 el desempeño

en grado cuarto es superior al de grado segundo. En los demás problemas el desempeño de los estudiantes de grado cuarto y tercero es mayor y significativo que el de segundo. En cuanto al descontento-contento dirigido, no existen diferencias en tipos de problemas.

Con respecto al **género**, no se encontraron diferencias significativas en aciertos ni en descontento-contento dirigido por tipo de problema y práctica. La prueba *t* para muestras independientes para aciertos y descontento dirigido por tipo de problema y práctica, de acuerdo con el **sector** (oficial y no oficial) indica tendencias de interés. Con relación al acierto por tipos de práctica, se encontraron diferencias en Rondas ($t_{(214)} = -2.438$, $p = .016$), Dedos ($t_{(214)} = -1.997$, $p = .047$) y Huellas ($t_{(214)} = -2.592$, $p = .010$). Aquí, los estudiantes del sector no oficial presentan mayor promedio de acierto que los del sector oficial.

Se encontraron diferencias por acierto según tipo de problema en Cambio 4 ($t_{(214)} = -2.783$, $p = .006$). y Combinación 2 ($t_{(214)} = -2.633$, $p = .009$). Al igual que por tipo de práctica, los estudiantes del sector no oficial presentan mejores desempeños que los del sector oficial.

Se observan diferencias en cuanto a descontento dirigido para Igualación 2 ($t_{(214)} = 2.411$, $p = .017$). Aquí cabe anotar que en ambos tipos de problema los estudiantes del sector no oficial expresan mayor descontento hacia este tipo de problemas, en comparación con los estudiantes del sector oficial. Una tendencia similar se encuentra en el ítem Cambio 2 , en la práctica de dedos ($t_{(214)} = 2.731$, $p = .007$) (Figura 18).

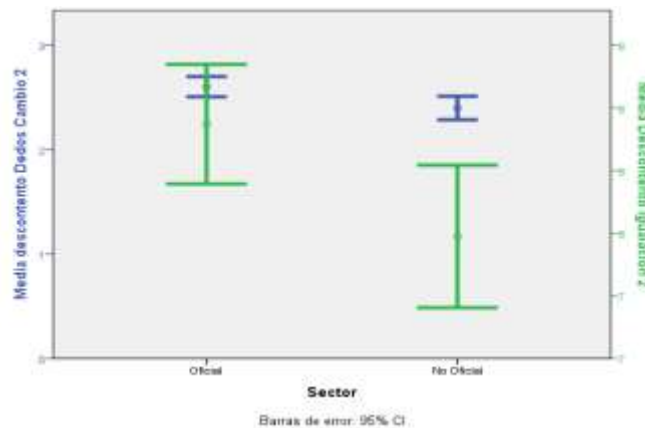


Figura 18. Medias de descontento en Igualación 2 y en ítem Dedos Cambio 2, por sector

Teniendo en cuenta los resultados de las etapas precedentes, posteriormente del *grupo de participantes* se seleccionaron 6 estudiantes por grado (uno por salón) que tuvieran el menor desempeño en la prueba de 27 ítems.

El grupo de grado segundo estuvo conformado por 4 niños y 2 niñas, con rango de edad entre 6 a 8 años, y rango de aciertos entre 5 y 14 ítems. De este grupo, hay 2 estudiantes que reportan puntaje máximo de contenido dirigido, los demás estudiantes puntuaron en esta escala en un rango de puntuaciones de 61 a 81.

En grado tercero se seleccionaron 2 niños y 4 niñas, con rango de edad entre 8 y 9 años y rango de aciertos entre 6 y 20 ítems. De este grupo, sólo un estudiante tiene puntuación de descontento inferior a 53, los demás estudiantes puntuaron en la subescala de descontento en un rango de 61 a 79.

Para grado cuarto se escogieron 4 niños y 2 niñas, con un rango de edad entre 8 y 10 años y rango de aciertos entre 6 y 19 ítems. De este grupo, sólo un estudiante tiene puntuación máxima en contenido dirigido, los demás estudiantes puntuaron en esta escala en un rango de 59 a 81.

Los 18 estudiantes identificados con dificultad experimentada en esta fase 1 constituyen así el eje central sobre el cual se fundamentan los aspectos metodológicos y los resultados de las fases posteriores de la investigación, de manera que sobre ese eje los docentes pueden analizar la manera como organizan las situaciones de aprendizaje y cómo gradúan la dificultad de las tareas; asimismo teniendo este grupo de dificultad experimentada como objeto de análisis, brinda la posibilidad a docentes y estudiantes de comunicar mutuamente la manera como perciben la situación de enseñanza-aprendizaje matemático, todo esto en el marco de la triangulación asimétrica que caracteriza el proceso de enculturación formal.

Conclusiones

Los resultados obtenidos en las diferentes etapas-juicio de expertos, aplicación piloto y aplicación de validación constituyen diferentes fuentes de evidencia de validez que sustentan el uso de DESAS como instrumento para identificar la dificultad experimentada en situaciones de adición y sustracción, que tienen una *infraestructura normativa* representada en los objetos, lugares y momentos que configuran las prácticas matemáticas, así como una *estructura semántica* que implica diferentes significados de la adición y diversas estrategias de resolución de problemas.

En segundo lugar, la dificultad de los ítems es consistente con lo reportado por autores como Nesher et al. (1982) y Carpenter et al. (1981) en el sentido que los problemas de cambio son los problemas más resueltos y los de igualación los menos resueltos.

La evidencia proporcionada por los análisis factoriales y los modelos de Rasch del acierto y del descontento dirigido muestran tres aspectos interesantes: En primer lugar, la unidimensionalidad del instrumento en tanto evalúa situaciones de adición y sustracción que poseen unos requerimientos normativos en cuanto a estructura semántica en el marco de prácticas que cuentan con una infraestructura normativa concreta. En segunda instancia el descontento y el acierto son facetas importantes a la hora de comprender el desempeño de un estudiante en tareas de adición y sustracción. En tercer lugar, el hecho que el descontento sea el primer componente propuesto para explicar el desempeño en los tipos de problema sugiere que hay un aspecto de reacciones afectivas irreflexivas que debe ser analizado más a profundidad y que puede aportar elementos para la comprensión de las dificultades de aprendizaje de adición y sustracción en los primeros grados de educación básica primaria.

En ese orden de ideas, una hipótesis tentativa a analizar en la cuarta fase de la investigación consiste en establecer perfiles de acierto y descontento dirigido que permitan la identificación de estudiantes con dificultad no sólo en ciertos problemas que comportan una estructura semántica particular sino que pueden tener como trasfondo prácticas corporeizadas, de investidura o formalizadas específicas.

Asimismo los datos obtenidos en dificultad y discriminación para el estudio piloto (Tabla 9) y la aplicación de validación (Tabla 15) respaldan la hipótesis según la cual aquellos problemas en los que el estudiante percibe un desajuste normativo son aquellos donde el estudiante exhibe mayor descontento dirigido. Esto sugiere que el descontento es un aspecto irreflexivo crucial que *modula* e interviene en la manera como el niño se aproxima al abordaje de situaciones de adición y sustracción, *orientando* y *dirigiendo* sus despliegues en orden a *ajustarse a la situación*.

Pensar la dificultad experimentada en términos de contenido-descontento dirigido amplía las posibilidades de evaluación del estudiante en las situaciones aditivas y sustractivas, porque evaluar el contenido-descontento dirigido implica analizar el comportamiento integrado *in situ*, es decir, la apreciación y reacción afectiva *en la práctica misma* es el foco de interés, lo que enriquece la comprensión de las dificultades que puede experimentar el estudiante y la manera como reacciona cuando se encuentra en prácticas cotidianas que involucran agregar y retirar elementos.

EVALUACIÓN DE LA DIFICULTAD INSTITUIDA

Introducción.

La dificultad instituida se define como la manera en que el docente organiza y planifica los elementos que configuran las situaciones de enseñanza-aprendizaje de adición y sustracción, así como la gradación de dificultad de los contenidos, tareas, procedimientos y estrategias asociadas al aprendizaje de estas operaciones en los primeros años de educación básica. En este sentido, hace referencia a un aspecto de la dificultad en las situaciones de aprendizaje matemático cotidiano, en donde se parte de los criterios conceptuales, metodológicos, pedagógicos y didácticos de la adición y sustracción, que son instituidos por el docente en los escenarios de triangulación asimétrica.

Bajo la perspectiva de la dificultad instituida, se asume que el conocimiento del docente es construido a partir de los saberes de la tradición y de la formación en didáctica de la matemática. Por su parte, el conocimiento del estudiante tiene lugar en el marco de objetos, lugares y momentos concretos caracterizados por normatividades situadas específicas e inherentes a la organización de la práctica en la que el estudiante participa con su docente.

Al respecto, Bonilla et al. (1999) mencionan que

desde nuestra posición de formadores entendemos que toda práctica educativa es una consecuencia de la forma en que cada profesor interpreta el hecho educativo y de las concepciones que guían su acción. Así mismo, toda actividad de formación se orienta por unos principios teóricos particulares principalmente en unas concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de un contenido específico (p. 13-14) (Énfasis agregado).

El énfasis agregado obedece a que en la dificultad instituida es necesario considerar dos aspectos: *El conocimiento profesional del docente y las situaciones en las cuales ese conocimiento se instituye*.

Con respecto al conocimiento profesional del docente de matemáticas, Bonilla et al. (1999) indican que las definiciones del conocimiento profesional son susceptibles de agruparse en tres perspectivas principales: La primera desde el *aprender a enseñar*, donde se abordan cuestiones en torno al conocimiento -qué, dónde, cuándo, por qué y condiciones de uso. La segunda incluye abordar el conocimiento dirigido a la *organización* de los conocimientos a

nivel cognitivo, práctico y profesional. La tercera, desde un punto de vista *cognitivo*, considera la enseñanza como una destreza cognitiva compleja. Recientemente, se asiste a un escenario en el que hay una importante demanda oficial de cursos de didáctica de la matemática, proveniente en su mayoría de las universidades y las instituciones educativas (D'Amore y Fandiño, 2017).

En cuanto a las situaciones donde tiene lugar la institución de saberes matemáticos, la teoría de las situaciones didácticas y la noción de contrato didáctico de Brousseau (1980; 1986) ayudan a ilustrar este punto.

Mugny y Pérez (1988) sugieren que el aprendizaje se desarrolla en situación escolar; el alumno no está aislado sino dentro de una clase, en presencia del profesor y de otros alumnos. Así, en didáctica de las matemáticas los procesos de adquisición se refieren al alumno, es decir, al niño implicado en una situación social concreta: Una situación didáctica.

En el marco de la teoría de las situaciones didácticas, el alumno tiene como finalidad aprender un cierto saber o dominio de contenido, para ello el docente ha de configurar las condiciones que hacen posible la adquisición de saberes por parte del alumno, teniendo en cuenta los elementos, objetos, artefactos e instrumentos que forman parte del milieu, de manera que el estudiante reconozca dichos elementos como parte del proceso de saber, adquiriendo así un mayor nivel de conocimiento y experticia. Al respecto, es posible establecer una tipología de situaciones didácticas: situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización (D'Amore, 2006).

En consonancia con la noción de situación didáctica, Brousseau desarrolló la noción de contrato didáctico (1990):

En una situación de enseñanza, preparada y realizada por un docente, el estudiante tiene como tarea resolver el problema (matemático) que se le presenta, pero el acceso a esta tarea se hace por medio de una interpretación de las preguntas dadas, de las informaciones dadas y de las obligaciones impuestas que son constantes en el modo de enseñar del maestro. Estos hábitos (específicos) del maestro esperados por los estudiantes y los comportamientos del estudiante esperados por el docente constituyen el contrato didáctico (Brousseau, 1980, p. 128).

Chevallard (1988) también hace unos vínculos entre contrato didáctico y transposición didáctica (citado en D'Amore, 2006):

Concretamente, profesor y estudiantes se hallan juntos (al inicio del año) alrededor de un saber precisamente establecido (por el programa anual). Contrato de enseñanza (que obliga al maestro), contrato de aprendizaje (que obliga al estudiante), se sabe que el contrato didáctico “obliga” también al saber: está aquí todo el tema de la transposición didáctica del saber” (p. 129).

Teniendo en cuenta los anteriores planteamientos, es preciso señalar los puntos de acuerdo y divergencias con estas posiciones reconocidas en didáctica de la matemática, a partir de las cuales es posible asumir una posición alternativa en el marco de la dificultad instituida, que repercute a su vez en la construcción del instrumento encaminado a medir tal dificultad.

Entre los aspectos que comparte la noción de dificultad instituida que se da en contextos de triangulación asimétrica, con las aproximaciones de Brousseau (1980) y Chevallard (1982, 1988), se encuentran

1. El reconocimiento del carácter triádico de las situaciones didácticas
2. Las distinciones posturales, esto es, roles diferenciados entre docente y estudiante
3. La configuración de elementos en el entorno por parte del docente, que tiene como objetivo propiciar en el estudiante la adquisición de conocimiento.

La diferencia esencial entre la dificultad instituida como parte de un proceso más amplio de triangulación asimétrica, en comparación con los enfoques anteriormente presentados reside en el *carácter de los compromisos y el trasfondo en el que se da la actividad docente-saber*.

En ese sentido, la definición que Chevallard (1988) presenta del contrato didáctico en relación con la transposición didáctica, asume que el compromiso entre los participantes e incluso entre el docente y el saber se da en términos explícitos, es decir, de asentimiento u obligación, palabra última empleada por Chevallard. Cuando él menciona que el contrato didáctico “obliga” también al saber, lo hace aludiendo al proceso de transposición didáctica, del cual ya se ha comentado previamente sus limitaciones en tanto preserva el dualismo esquema-contenido, invocando un intermediario epistémico a través del cual sólo es posible salvar la brecha entre un saber sabio y enseñado. Si los compromisos fueran sólo de obligación o asentimiento, eso pondría en cierto sentido una barrera entre el individuo y su entorno, porque implicaría asumir que el individuo está “fuera” de una realidad o entorno social y necesita incorporarse a él desde su asentimiento, habría por ende también un dualismo entre el individuo y la realidad exterior que sólo sería reductible si da su consentimiento o participa voluntariamente de tales prácticas.

Brandom (2005) presenta unas ideas que son acordes con el *compromiso implícito en términos de normatividad situada* (Rietved, 2008; Rietveld & Kiverstein, 2014), compromiso que estudiantes y docentes efectúan en el trasfondo de labores conjuntas en contextos de triangulación asimétrica.

Las normas que determinan la corrección de la elección con respecto a qué prácticas discursivas y qué normas conceptuales implícitas tengamos que atribuir a aquellos que consideramos como hablantes no están disponibles de antemano como un conjunto de principios explícitos. Están implícitos en las prácticas en particular por medio de las cuales nos entendemos mutuamente en la conversación ordinaria (p. 904)

En cuanto a la noción de contrato didáctico de Brousseau (1980), si bien hay cierta alusión a que hay *hábitos* esperados en la actuación tanto del docente como del estudiante, no hay una ampliación de ese carácter habitual de las situaciones didácticas. Una noción muy a lugar precisamente consiste en el concepto de hábito, propuesto por Bourdieu (2007), que se define como una *estructura estructurante* que organiza prácticas y representaciones “sin suponer el propósito consciente de ciertos fines ni el dominio expreso de las operaciones necesarias para alcanzarlos” (Bourdieu, 2007, p. 86).

Con respecto al trasfondo en el que ocurre la relación del maestro con el saber, la dificultad instituida transcurre bajo un trasfondo común de carácter *normativo implícito* de la configuración del saber.

Wittgenstein (1953) propone las nociones de *juego de lenguaje* y *forma de vida*. Un juego de lenguaje puede entenderse como un microcosmos discursivo, su característica principal es que se encuentra indisolublemente ligado a una actividad o un conjunto de acciones, de modo que el juego de lenguaje y la forma de vida dentro de la cual éste tiene sentido forman un todo integrado.

Wittgenstein sostiene que para cada juego de lenguaje subyace alguna forma de vida, no existe una forma de vida que abarque todas las actividades y relaciones con el contexto que sostienen los seres humanos. En lugar de esto es necesario pensar en una gama enorme de actividades, usos, costumbres e instituciones en las que las personas participan. Las personas realizan diferentes actos de habla en el marco de sus actividades, estos actos de habla configuran un juego de lenguaje; cada juego de lenguaje tiene sus propias reglas y su propia dinámica interna.

Dado que los juegos del lenguaje tienen una cierta estructura reglada, Wittgenstein (1953) menciona que la regularidad con la cual usamos las reglas de un determinado juego de lenguaje proviene de nuestro dominio de la práctica ligada a ese juego de lenguaje:

No puede haber sólo una única vez en que un hombre siga una regla. No puede haber sólo una única vez en que se haga un informe, se dé una orden, o se la entienda, etc. – seguir una regla, hacer un informe, dar una orden, jugar una partida de ajedrez son **costumbres** (usos, instituciones).(p. 199)

En el marco de la dificultad instituida, por tanto, hay un trasfondo común que son las formas de vida en las que discurre la enseñanza-aprendizaje de la matemática, en las que se desarrollan “labores conjuntas” (Radford, 2014). En consecuencia, la dificultad instituida en situaciones aditivas podría caracterizarse también en términos del saber en sí al saber para sí (Radford, 2006, 2014, 2017), teniendo como eje central el estudiante que reporta dificultad en el aprendizaje de la adición y sustracción, en el marco de escenarios de triangulación asimétrica donde la actividad o labor conjunta tiene lugar.

En otras palabras, la dificultad instituida privilegia el proceso de organización de las situaciones de enseñanza y de aprendizaje partiendo no desde una abstracción ni desde una transposición del saber sino teniendo como referente los desempeños de un estudiante específico que presenta dificultad en el aprendizaje de las operaciones aritméticas cuando participa en formas de vida y juegos del lenguaje vinculados a la matemática. Brandon (2005) aporta una precisión importante en este punto:

Pues nuestras propias prácticas nos vienen dadas con las normas ya incluidas; no emitimos simplemente ruidos sino que asumimos compromisos, adoptamos estatus normativos, hacemos movimientos pragmáticamente significativos en el juego del dar y pedir razones. (...) Habitamos un espacio normativo, y desde el interior de estas prácticas implícitamente normativas formulamos nuestras preguntas, nos interpretamos mutuamente y juzgamos la corrección del empleo de conceptos (p. 906- 907) (Énfasis agregado).

Evaluar la dificultad instituida implica entonces *analizar la manera como el docente, desde su rol social, acerca el conocimiento al estudiante con dificultad de aprendizaje de la adición y la sustracción.*

En ese orden de ideas se diseñó, elaboró y aplicó el Instrumento para Evaluación de Dificultad Instituida en Situaciones de Adición y Sustracción (DISAS) que tiene como

objetivo evaluar la organización y gradación de la dificultad que los docentes de primer a tercer grado de educación básica primaria confieren a los elementos que forman parte del diseño de situaciones de enseñanza y de aprendizaje de la adición y la sustracción. Estos grados constituyen el momento de incursionar de manera formal en el uso de algoritmos de adición y sustracción con números naturales y es en estos grados donde se reportan importantes dificultades de aprendizaje en la adquisición de estas operaciones. En DISAS resulta fundamental la manera como el docente instituye los conocimientos frente al estudiante que tiene dificultad de aprendizaje.

El instrumento DISAS parte de la articulación de dos ejes centrales: *La organización formal de las situaciones aditivas y la reflexión didáctica.*

En cuanto a la *organización de las situaciones aditivas*, se seleccionaron los 10 tipos de problema de la clasificación de Carpenter et al. (1981), que se encuentran en la Tabla 3.

La *reflexión didáctica* alude al análisis que el docente hace de su práctica matemática cuando interactúa con un estudiante que presenta dificultades de adición y sustracción. Parada y Pluvinaje (2014) mencionan que la reflexión “es un proceso de resolución de conflictos y de dudas a la vez que provee una oportunidad para revisar su actuación” (p. 85). Citando a Paulo Freire, estos autores indican que “enseñar exige reflexión crítica sobre la práctica y que ésta encierra el movimiento dialéctico entre hacer y pensar sobre lo que se hace” (p. 86).

Estos autores caracterizan los procesos de reflexión enfatizando la dimensión temporal (lo que sucede antes, durante y después de la matemática). La *reflexión para la acción* tiene lugar cuando el docente analiza la actividad a realizar en el aula, posteriormente a partir de ello planea la clase, diseña la temática a abordar y selecciona los recursos a emplear. La *reflexión en la acción* opera en la interacción docente-estudiante, en términos del desarrollo de la clase y la labor mediadora del docente. La *reflexión sobre la acción* se enfoca en la manera como el docente evalúa la interacción entre el conocimiento escolar y el estudiante, desde la óptica de la consecución de los objetivos de aprendizaje previstos.

La aproximación que se asume en DISAS en torno a la reflexión didáctica es concordante con los planteamientos de la competencia *mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños* (Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010). Los autores conceptualizan esta experticia como “un conjunto de tres habilidades interrelacionadas: atender a las estrategias de los niños,

interpretar las comprensiones de los niños y decidir cómo responder sobre la base de dichas comprensiones” (p. 72). Al respecto, Llinares (2016) indica que

reconocer y dar sentido a los hechos que suceden en la clase de matemáticas desde la perspectiva de poder explicar e informar el aprendizaje de las matemáticas, permite generar información contextual para apoyar las decisiones de acción que debe tomar el profesor con el objetivo de favorecer el aprendizaje de sus alumnos (...) Algunos de estos ámbitos son reconocer la legitimidad de las respuestas de sus alumnos a algunas tareas matemáticas cuando los procedimientos usados no reflejan un procedimiento estándar, o cuando se tiene que reconocer la progresión en la comprensión de los estudiantes (p. 58).

En DISAS la reflexión didáctica no se ocupa de la secuencia temporal en su totalidad, sino dicho análisis considera dos elementos fundamentales, que se asemejan a los componentes de la competencia *mirar profesionalmente* (Jacobs et. al. ,2010; Llinares, 2016) y a los propuestos por Parada y Pluinage (2014) en su categoría *reflexión para la acción: La estructura e infraestructura de las situaciones de enseñanza y de aprendizaje*, teniendo como referente el estudiante que reporta dificultades en situaciones aditivas y sustractivas propuestas en el aula de clase.

La *estructura* refiere al marco general que es transversal a todas las situaciones de enseñanza y de aprendizaje, el cual el docente debe considerar para la planeación y diseño de situaciones propicias para la adquisición de conceptos matemáticos. En la construcción de DISAS se tienen en cuenta tres elementos de carácter estructural:

1. *Intención pedagógica*: Trata de establecer el proceso o función psicológica que el docente preferiría fomentar en el estudiante, a partir de la enseñanza de tipos específicos de problemas aditivos. Esta variable es nominal y se ofrecen 5 opciones con las etiquetas: (a) recordar o retener información; (b) atender a la situación y sus objetos; (c). comunicar, solicitar o dar información; (d). registrar y representar problemas; y (e) inferir o razonar con cantidades.

La elección de estas categorías pedagógicas es afín a conceptualizaciones como *práctica social* de Chevallard, en la que toda actividad humana se considera una práctica social (Gómez, 2005) y la definición de la clase como comunidad de prácticas compartidas (D' Amore et al., 2010, D' Amore, 2017), que se clasifican en cinco tipos de prácticas (Fandiño,

2010): Conceptuales, algorítmicas o ejecutivas, estratégicas o resolutivas, semióticas, y comunicativas.

2. *Dificultad percibida*: Evalúa la capacidad del maestro para apreciar la dificultad que puede experimentar el estudiante al enfrentar una situación. La variable es ordinal en una escala de 1 a 5 en donde el valor 1 es “Muy fácil”, 2 es “Fácil”, 3 es “Ni fácil ni difícil”, 4 es “Difícil” y 5 es “Muy difícil”.

3. *Dificultad instituida*: Examina la disposición del maestro a proponer situaciones de diferente complejidad y diferentes niveles de esfuerzo al estudiante. La variable es ordinal en una escala de 1 a 5 en donde el valor 1 es “poco esfuerzo”, 2 es “algún esfuerzo”, 3 es “un esfuerzo considerable”, 4 es “mucho esfuerzo”, 5 es “un esfuerzo inmenso”.

En cuanto a la *infraestructura normativa*, de acuerdo con Okuyama, Bordini y Da Rocha, (2007) y Okuyama et al. (2011), en la construcción de DISAS se consideraron tres elementos:

1. *Material didáctico*: Examina el tipo de material y los objetos de los que el maestro se serviría para enseñar a resolver problemas relacionados con la situación en cuestión. La variable es nominal y se ofrecen 5 alternativas con las etiquetas: (a) el que se encuentra en el aula; (b) informativo; (c) audiovisual; (d) experimental-práctico; y (e) tecnológico. Esta clasificación está de acuerdo con la categorización del material didáctico realizada por Nerici (1973), y recoge algunos elementos de la clasificación de recursos didácticos propuesta por Godino, Batanero y Font (2003). De acuerdo con estos últimos autores, los recursos didácticos pueden categorizarse en ayudas al estudio, y materiales manipulativos que apoyan y potencian el razonamiento matemático; éstos últimos pueden ser manipulativos tangibles o manipulativos gráfico-textuales-verbales.

2. *Eje atencional*: Estima el tipo de objeto al que el maestro pretende dirigir la atención del estudiante. La variable es nominal y se ofrecerán 4 opciones con las siguientes etiquetas: 1. “Su propio cuerpo”, 2. “Objetos concretos presentes en el entorno inmediato”, 3 “Objetos concretos no disponibles, representados, relatados o relatados” 4. “Números, segmentos de recta y otras entidades abstractas”. Esta clasificación considera asimismo la transición que tiene el niño de prácticas sociales con objetos concretos y proximales con los que opera agregando y retirando elementos desde su cotidianidad hacia prácticas culturales donde las exigencias de enculturación matemática formal son cada vez mayores.

Una vez se definió la estructura de la prueba del instrumento DISAS se procedió a la construcción de los ítems, ensamblando la prueba DISAS mediante el programa PEBL-2 (Mueller & Piper, 2014).

El análisis de los ítems para conformar la prueba se llevó a cabo utilizando tres estrategias: Una revisión por juicio de expertos tanto de las dimensiones evaluadas como de los ítems, un estudio piloto y una aplicación de validación del instrumento DISAS a los docentes de matemáticas de los estudiantes identificados con dificultad experimentada en la Fase 1.

Juicio de expertos.

Participantes.

Se conformaron dos equipos de expertos: El equipo de jueces encargado de hacer la revisión de definiciones de las dimensiones de prueba contó con la participación de 4 expertos colombianos. El equipo de jueces encargados de la revisión de ítems se conformó con la participación de 5 expertos, 2 de ellos colombianos y 3 peruanos, con formación académica en psicología, en psicometría o formación matemática a nivel de pregrado y postgrado, así como experiencia en educación básica primaria o en construcción de instrumentos de evaluación. Asimismo se contó con la experiencia, aportes en sesiones de trabajo y sugerencias del docente Uldarico Malaspina, de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), en el marco de la Pasantía de Investigación.

Instrumento.

Para la validación del instrumento DISAS se elaboró un formato de validación en el que se presentaba la definición del constructo de dificultad instituida y de los componentes de la estructura de prueba. Posteriormente se presentaba una serie de preguntas dirigidas a evaluar la coherencia, claridad, relevancia y suficiencia de tales definiciones en términos de SI o NO. Finalmente, se incluyó una sección en la cual el juez podía consignar sus observaciones en torno a constructos adicionales que podrían ser incluidos en la estructura teórica del instrumento, así como sugerir referencias bibliográficas que considerara pertinentes.

Para la validación de ítems del instrumento se utilizó la adaptación del formato de Escobar y Cuervo (2008), elaborada en la fase anterior. Cada experto evaluó las definiciones de los constructos y los 60 ítems, en cuanto a coherencia, claridad, relevancia y suficiencia. Nuevamente, siguiendo a Elosúa (2003), en el formato se tuvieron en cuenta las relaciones

entre el constructo y el contenido del test- y los factores contextuales internos y externos que puedan añadir varianza no deseada.

Procedimiento.

Para el juicio de expertos centrado en la estructura teórica se hizo un análisis descriptivo y de contenido acerca de las observaciones dadas por los jueces en cada uno de los constructos que componen el instrumento. Para el juicio de expertos enfocado en los ítems se obtuvieron estas estimaciones: Los porcentajes de acuerdo interevaluadores en los ítems de la sección sociodemográfica y en los ítems de dificultad instituida, así como el índice de concordancia W de Kendall, discriminando por reflexión didáctica y por clasificación semántica de la situación aditiva.

Estudio piloto.

La segunda estrategia consistió en una aplicación de la prueba a un grupo de docentes de la población objeto y el correspondiente análisis de datos para obtener evidencia del funcionamiento de cada uno de los ítems y de la prueba completa.

Participantes.

La versión preliminar de la prueba DISAS fue aplicada a un total de 40 docentes, 20 peruanos y 20 colombianos. Participaron 20 mujeres peruanas de la ciudad de Lima con edades entre 30 y 59 años y tiempo de enseñanza entre 9 y 35 años; 6 de ellas trabajan en grado primero, 8 en grado segundo y 6 en grado tercero. El grupo colombiano estuvo conformado por 6 hombres y 14 mujeres de Bogotá o Mosquera con edades entre 24 y 56 años, con tiempo de docencia entre 4 y 35 años; 3 de ellos trabajan en grado primero, 2 en grado segundo, 9 en tercero, 3 en cuarto y 3 en quinto.

Se solicitó autorización a los rectores de las instituciones educativas para llevar a cabo el estudio piloto. Los docentes participantes fueron seleccionados mediante muestreo por conveniencia, previo diálogo individual con cada uno de ellos donde se informó acerca del objetivo de la investigación, el instrumento a aplicar y el manejo de los resultados obtenidos. Una vez el docente accedió participar en la investigación, se incluyó dentro de la muestra del estudio piloto.

Instrumento.

Se realizaron las correcciones de forma y contenido sugeridas por los jueces de la actividad anterior y se ensambló la prueba a aplicar en PEBL-2, siguiendo la estructura presentada en la tabla 5. El instrumento DISAS no evalúa la competencia general del docente, sino las estrategias del mismo en relación con el estudiante que presenta dificultad para aprender. Éste quedó conformado por dos secciones: (a) Información Sociodemográfica, y (b) Ítems de dificultad instituida.

La información sociodemográfica tiene como objetivo recolectar evidencia de la formación, experiencia docente, agrado por la enseñanza de la matemática, estilos de enseñanza y rol docente. Esta sección demográfica se compone de una pantalla de instrucciones donde se explicita el objetivo de la información a recolectar, posteriormente aparecen 10 preguntas, cinco de respuesta abierta y 5 de selección múltiple con única respuesta:

1. Nombres y apellidos del estudiante con dificultad en adición y sustracción: El docente identifica el o la estudiante que presente mayor dificultad en el aprendizaje de estas operaciones en su grupo, y debe responder la totalidad del instrumento sobre ese estudiante.

2. Nombres y apellidos del docente

3. Género del docente

4. Edad del docente

5. Años de experiencia docente

6. Nivel de formación docente

7. Agrado por la enseñanza de las matemáticas

8. Estilo de enseñanza: Se hizo una adaptación de la clasificación de estilos de enseñanza propuesta por Oviedo et. al., (2010), presentándola en cuatro categorías: Centrado en el contenido, centrado en el procedimiento, centrado en el ejemplo y centrado en la resolución de problemas.

9. Rol del docente: Se hizo una adaptación de los componentes del rol del docente, propuesta por Clarke (1997), presentándola en seis categorías: diseñador, organizador, teórico, colaborador, facilitador y comunicador.

10. Observaciones o comentarios adicionales, formulados por el docente

La segunda parte de la prueba está conformada por los 10 problemas tipo de cambio, combinación, comparación e igualación, cada una de ellos con una definición conceptual de la

estructura del problema específico, junto con una representación gráfica que complementa y ayuda a la comprensión de la definición. Un ejemplo de los problemas tipo presentados se observa en la Figura 19. Para cada uno de los ítems se elaboraron seis preguntas de Reflexión Didáctica, cinco de ellas de selección múltiple con única respuesta (Intención Pedagógica, Dificultad percibida, Dificultad instituida, Material Didáctico y Eje atencional) y una pregunta de respuesta abierta (Estrategias). Esta parte del instrumento quedó conformada por 60 ítems.

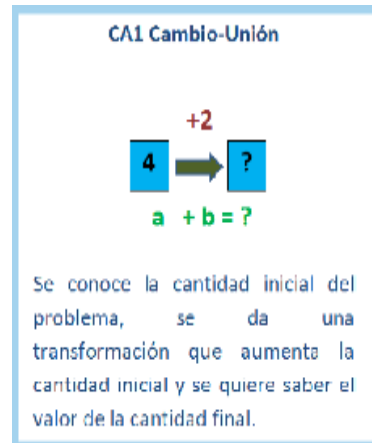


Figura 19. Ejemplo de problema de Cambio 1 CA1

La sección de ítems de dificultad instituida consta de dos pantallas de instrucciones. En la primera se le enfatiza al docente que el interés consiste en indagar la forma habitual de enseñar algunas situaciones de adición o sustracción, en el marco de la interacción con el o la estudiante que presenta dificultad, el cual identificó en la primera sección de la prueba. También se le recuerda al docente la importancia de consignar la información con sinceridad y sin temor a ser evaluado en términos de respuestas correctas o incorrectas. Asimismo se le informa sobre el carácter confidencial de la investigación.

La segunda pantalla orienta al docente sobre la manera en la que va a visualizar cada ítem y sobre los formatos de pregunta e instrucciones para responder. En el lado izquierdo de la pantalla se presenta el problema de adición o sustracción; en el lado derecho aparece la pregunta de reflexión didáctica sobre la manera como el docente plantearía dicha situación al estudiante. Después de las pantallas de instrucciones, aparece cada ítem como se muestra en la Figura 20.

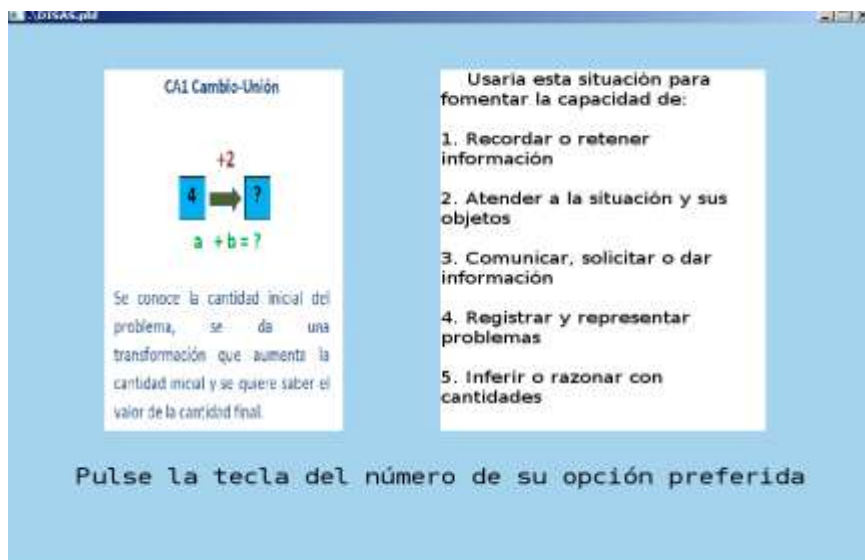


Figura 20. Ejemplo de ítem que evalúa intención pedagógica en el problema de Cambio 1 CA1

Procedimiento.

En primer lugar se elaboró un manual de aplicación y se puso a prueba en una primera aplicación con un docente, ésta aplicación tuvo como único objetivo refinar el manual con instrucciones detalladas. La aplicación del instrumento se llevó a cabo de manera individual durante el II semestre de 2017 en Perú y el I semestre de 2018 en Colombia. El evaluador programó con cada docente la aplicación de DISAS en una franja horaria de 1 sesión que no interfiriera con sus actividades de docencia. La duración promedio de la aplicación de DISAS fue de 35-40 minutos.

En cada IE se acondicionó un salón o espacio con adecuadas condiciones de iluminación y ventilación, el cual contó con un computador, una mesa y dos sillas. El computador se situó en el centro de la mesa, el evaluador principal se ubicó en la parte derecha de la pantalla y el docente se ubica al frente de la pantalla. Esta disposición se conservó durante toda la aplicación, a fin de que tanto el evaluador como el docente triangulen en torno a un objeto común- la prueba DISAS.

El plan de análisis y obtención de evidencias de validez se adelantó en dos momentos: En primer lugar se obtuvieron los estadísticos descriptivos para las variables sociodemográficas del docente, discriminando por país. En segundo lugar se realizaron los análisis psicométricos.

Los análisis psicométricos llevados a cabo fueron: (a) correlación ítem-test y estimación de la confiabilidad mediante alpha de Cronbach para la prueba total y para las subescalas de dificultad percibida e dificultad instituida, separadamente; (b) estimación de dificultad y discriminación: el nivel de dificultad con que el niño percibe la tarea y el grado de esfuerzo que el docente asignaría a la misma se estimó mediante el promedio de las respuestas; además, la discriminación se estimó mediante coeficiente de correlación de Spearman entre la dificultad percibida y la dificultad instituida de cada tipo de problema con el total de cada escala, eliminando el aporte de cada ítem dentro del puntaje de cada escala; (c) flujo de opciones para las preguntas sobre intención pedagógica, material didáctico y eje atencional, por tipo de problema; (d) Categorización de respuestas y análisis de frecuencias del ítem de respuesta abierta para los cuatro tipos de problemas macro: Cambio, combinación, comparación e igualación, de acuerdo con el país de procedencia de los docentes. Para el análisis de frecuencia de palabras se empleó como criterio de depuración la selección de las 50 palabras más frecuentes, con una longitud mínima de 4 caracteres, agrupadas con sinónimos; y (e) ajuste de modelo Rasch de crédito parcial para las escalas de dificultad percibida y dificultad instituida, previa comprobación del supuesto de unidimensionalidad a través de análisis factorial por componentes principales (ACP) en SPSS 24.0; así como ACP basado en los residuos en Winsteps 3.73.

Los análisis estadísticos y de teoría clásica de tests se realizaron en SPSS 24.0, el ajuste a modelos de crédito parcial en Winsteps 3.73 y el análisis de frecuencias del ítem “Estrategias” se hizo en NVIVO 11.

Teniendo en cuenta que la dificultad puede analizarse desde un continuo de situaciones muy difíciles, donde el niño recién inicia su proceso de enculturación formal hasta situaciones muy fáciles en donde la progresiva participación y ajuste en prácticas matemáticas con su normatividad asociada se traduce en mayor dominio de las operaciones aritméticas, se procedió a la recodificación en la base de datos de la Variable *dificultad percibida*, donde 1 es “Muy difícil”, 2 es “Difícil”, 3 es “Ni fácil ni difícil”, 4 es “Fácil” y 5 Muy fácil”. Para la variable de dificultad instituida la codificación se mantuvo igual, ya que para la enseñanza de un problema específico, la asignación de una tarea que requiera poco esfuerzo (nivel 1) se da en los casos donde el estudiante presenta mucha dificultad o hasta ahora inicia su proceso de enculturación formal, mientras que si el docente asigna una tarea que requiera mucho esfuerzo

(nivel 5) dirige tal tarea a estudiantes con un dominio alto en la estructura semántica específica que caracteriza a un problema concreto.

Aplicación de validación.

Esta etapa consistió en la aplicación de la prueba DISAS a los docentes de matemáticas de los estudiantes identificados con dificultad experimentada en la Fase 1, para obtener evidencia del funcionamiento de cada uno de las ítems y de la prueba completa.

Participantes.

Se planeó la participación de 18 docentes de matemáticas de los estudiantes identificados con dificultad experimentada en la Fase 1, como se aprecia en la Tabla 24. La elección del número de docentes obedece a que ese es el número de cursos seleccionados en la Fase 1; esto es, tres instituciones oficiales y tres no oficiales; en cada una de ellas se escogió un grado segundo, un grado tercero y un grado cuarto. De cada uno de estos cursos se seleccionó al estudiante con mayor dificultad experimentada, teniendo en cuenta su desempeño en DESAS.

Tabla 24.

Esquema muestral de aplicación masiva de DISAS

Institución	Zona	Grado			Total
		Segundo Docente	Tercero Docente	Cuarto Docente	
Oficial	Urbano	1	1	1	3
	Zona periférica	1	1	1	3
	Rural	1	1	1	3
No oficial	Urbano	1	1	1	3
	Zona periférica	1	1	1	3
	Rural	1	1	1	3
Total		6	6	6	18

A los docentes de matemáticas de cada curso se les informó sobre el objetivo de la investigación, el instrumento a emplear y el manejo de los resultados obtenidos. Sin embargo, en una de las IE la docente de matemáticas está a cargo de los cursos 2°, 3° y 4°; en otra IE la docente de matemáticas dicta en tercer y cuarto grado. Por ello, aunque en esta etapa hay 15 docentes (14 mujeres y 1 hombre), las docentes que tenían a su cargo más de un curso diligenciaron el instrumento para cada uno de los niños de los cursos en que dictan

matemáticas, de manera que hay 18 registros de dificultad instituida de los 18 estudiantes identificados con dificultad experimentada.

Instrumento.

Una vez obtenidos los resultados del estudio piloto se hicieron las correcciones pertinentes en cuanto a diagramación de las imágenes de los tipos de problema, precisión en las definiciones de comparación e igualación, asimismo se mejoró la redacción de los ítems de dificultad percibida, dificultad instituida y material didáctico, las cuales se introdujeron en la versión de la prueba en el programa PEBL-2.

De acuerdo con las observaciones formuladas en el juicio de expertos y las sugerencias de los docentes participantes en el estudio piloto se incorporó en la sección de información sociodemográfica estas preguntas: (a) ¿Hace cuánto tiempo enseña matemáticas en primaria?; y (b) ¿Tiene usted estudios complementarios en matemáticas para educación primaria?

Procedimiento.

Se complementó el manual de aplicación que incluye tanto los aspectos conceptuales de la prueba DISAS como el protocolo de aplicación en PEBL-2. La aplicación del instrumento se llevó a cabo de manera individual durante el I semestre de 2018. Previo a la aplicación de las situaciones que conforman DISAS, el evaluador debía recolectar la información de carácter sociodemográfico del docente.

La programación de cada sesión de aplicación con los docentes de cada IE se hizo de común acuerdo, siguiendo el protocolo de aplicación descrito en el estudio piloto. En el caso de las docentes de matemáticas que tenían a cargo más de un curso, se programaron con cada docente sesiones independientes de aplicación de DISAS por cada niño, de manera que se controlara efecto de fatiga y las respuestas que da la docente acerca de la dificultad instituida de un estudiante fuesen independientes de las de otro estudiante.

El plan de análisis y obtención de evidencias de validez se adelantó en tres momentos. En primer lugar se obtuvieron los estadísticos descriptivos para las variables sociodemográficas de los docentes, en segundo lugar se adelantaron los análisis psicométricos y finalmente se analizaron las relaciones entre las puntuaciones del instrumento con las otras variables disponibles. Los dos primeros análisis fueron los mismos descritos en el estudio piloto y se realizaron en SPSS 24.0 y Winsteps 3.73. El análisis del ítem de respuesta abierta se hizo en NVIVO 11.

Dentro de los análisis psicométricos se hizo análisis de estructura interna de la prueba mediante análisis factorial de la escala de dificultad percibida y de dificultad instituida, a través de componentes principales (ACP) y rotación Varimax en SPSS, empleando los datos de los 20 estudiantes colombianos del estudio piloto, y los 18 de la aplicación de validación. El análisis de las relaciones entre variables se realizó mediante Análisis de Correspondencias Múltiples (ACM) con los 18 estudiantes de la aplicación de validación, mediante el método de normalización simétrico, tomando como variables activas el material didáctico, el eje atencional y la intención pedagógica de los 10 tipos de problema; como variable suplementaria se tomó el tiempo que el docente lleva enseñando matemáticas en primaria. El ACM arroja como resultado el número de iteraciones, el resumen del modelo, las dimensiones junto con sus medidas discriminantes y las cuantificaciones en cada dimensión.

Resultados

Juicio de expertos.

En esta etapa se documenta la validación por los equipos de jueces tanto de los ítems como de las definiciones de las dimensiones subyacentes al instrumento. Para los ítems de información sociodemográfica hubo valoración alta por parte de los jueces en coherencia, con excepción de la pregunta “género del docente”. Para el 40% de los jueces la variable género proporcionaría poca o nula información sobre la dificultad que instituye el docente. En estilo de enseñanza, rol del docente y agrado por la enseñanza de las matemáticas se aprecian niveles altos de acuerdo entre el 60% y el 80%, respectivamente. Los datos de identificación de docente, el agrado por la enseñanza de las matemáticas, el estilo de enseñanza y el rol docente fueron valorados con alto acuerdo por todos los jueces en el criterio de relevancia.

El coeficiente de concordancia W de Kendall arrojó concordancias significativas en Claridad ($W(4,9) = .357$ $\chi^2 = 12.852$ $p = .021$), no así para Coherencia ($W(4,9) = .222$ $\chi^2 = 8.000$ $p = .092$) y Relevancia ($W(4,9) = .123$ $\chi^2 = 4.444$ $p = .349$). Los jueces consideraron hacer precisiones de forma y de contenido que permitan mejorar los ítems en cuanto a claridad; por ejemplo, graduar progresivamente el agrado hacia las matemáticas y eliminar términos en los estilos de enseñanza que podrían sesgar las respuestas del docente.

Asimismo los jueces aportaron sugerencias en torno a la posibilidad de incluir información sobre los años de experiencia en enseñanza de la matemática en educación primaria y si el docente posee formación complementaria en esta asignatura. Las instrucciones de la información sociodemográfica que el docente va a visualizar en PEBL-2 fueron valoradas como altamente coherentes, relevantes, claras y suficientes.

Para los ítems de dificultad instituida se aprecian calificaciones máximas en los de reflexión didáctica, en coherencia y relevancia (Tabla 25). En los ítems de estructura se observan niveles medios de claridad en los de intención pedagógica y dificultad instituida, este último ítem tuvo una valoración en nivel medio superior a 20%. En los ítems de infraestructura solamente el de material didáctico presentó valoraciones medias en claridad.

Tabla 25.

Porcentaje de acuerdo de jueces en coherencia, claridad y relevancia, por ítems y categorías de reflexión didáctica DISAS (60 ítems)*

Categoría de reflexión didáctica	Ítem (*)		Coherencia	Claridad	Relevancia
Estructura	Intención Pedagógica	No Cumple			
		Bajo		2%	
		Medio	100%	98%	100%
Estructura	Asignación de Dificultad	No Cumple			
		Bajo			
		Medio	100%	100%	100%
Estructura	Dificultad instituida	No Cumple			
		Bajo		22%	
		Medio	100%	78%	100%
Infraestructura	Material didáctico	No Cumple			
		Bajo		2%	
		Medio	100%	98%	100%
Infraestructura	Estrategias	No Cumple			
		Bajo			
		Medio	100%	100%	100%
Infraestructura	Eje atencional	No Cumple			
		Bajo			
		Medio	100%	100%	100%

* Cada uno de los ítems se muestra en diez ocasiones, dado que las seis preguntas se replican en los 10 problemas de situación aditiva

El cálculo del coeficiente W de Kendall se obtuvo para Claridad, mostrando índices de concordancia significativos ($W(4,6) = .119$ $\chi^2 = 28.480$ $p = .000$), ya que en coherencia y relevancia total de DISAS todos los jueces dieron la calificación máxima (concordancia perfecta), en consecuencia no se obtiene el coeficiente W de Kendall.

En cuanto al tipo de problema aditivo, se aprecian calificaciones máximas en todas las situaciones, para las dimensiones de coherencia y relevancia (Tabla 26). En la dimensión de claridad se observa que el problema de Cambio 1 presenta niveles medios superiores al 10%, en los demás ítems hay un nivel alto de acuerdo del 97%. Las instrucciones de los ítems de DISAS que el docente va a visualizar en PEBL-2 fueron valoradas como altamente coherentes, relevantes, claras y suficientes.

La suficiencia calculada para los ítems en su conjunto, agrupando por tipo de problema aditivo, refleja valoraciones altas en un 67% de los jueces en los ítems de Igualación 1 y 2, Cambio, Combinación y Comparación 1. En suficiencia de los 10 tipos de problema aditivos, que dieron valoración en este aspecto, se obtuvo una concordancia significativa ($W(2,10) = .500$ $\chi^2 = 10.000$ $p = .007$). El cálculo del coeficiente W de Kendall se obtuvo para Claridad, mostrando índices de concordancia no significativos ($W(4,6) = .167$ $\chi^2 = 4.000$ $p = .406$). En coherencia y relevancia de los ítems según tipo de situación aditiva todos los jueces dieron la calificación máxima.

En los ítems de *estructura*, los jueces hicieron sugerencias tendientes a mejorar la redacción del ítem “Dificultad instituida”, en tanto que se quiere enfatizar en el esfuerzo que el docente cree que requeriría por parte del estudiante la tarea que le propondría para que éste aprendiera la situación aditiva presentada

En los ítems de *infraestructura* los jueces plantearon sugerencias en torno a complementar las opciones del ítem de material didáctico, a través de la inclusión de recursos didácticos como reglas de Cuissenaire, textos de trabajo y material presente en el aula. En el ítem de eje atencional las sugerencias se dirigieron a resaltar el carácter cotidiano de los objetos concretos e incluir elementos como la recta numérica en la categorización de entidades abstractas.

Tabla 26.

Porcentaje de acuerdo de jueces en coherencia, claridad, relevancia y suficiencia, por tipo de problema aditivo DISAS

Problema aditivo	Características de los ítems			
	COHERENCIA	CLARIDAD	RELEVANCIA	SUFICIENCIA (*)
Cambio 1	No Cumple			
	Bajo			
	Medio		13%	33%
Combinación 1	Alto	100%	87%	66%
	No Cumple			
	Bajo			
Comparación 3	Medio		3%	
	Alto	100%	97%	100%
	No Cumple			
Cambio 2	Bajo			
	Medio		3%	
	Alto	100%	97%	100%
Cambio 3	No Cumple			
	Bajo			
	Medio		3%	
Cambio 4	Alto	100%	97%	100%
	No Cumple			
	Bajo			
Combinación 1	Medio		3%	33%
	Alto	100%	97%	67%
	No Cumple			
Comparación 1	Bajo			
	Medio		3%	33%
	Alto	100%	97%	67%
Igualación 1	No Cumple			
	Bajo			
	Medio		3%	33%
Igualación 2	Alto	100%	97%	67%
	No Cumple			
	Bajo			
Igualación 2	Medio		3%	33%
	Alto	100%	97%	67%
	No Cumple			

(*) Calculada sobre 3 jueces, ya que 2 jueces no proporcionaron valoración de suficiencia

En cuanto a los tipos de problemas aditivos, los jueces propusieron modificaciones con relación a la construcción de los enunciados y representación gráfica de los ítems de igualación y de comparación, de manera que el docente tenga una mayor comprensión de la naturaleza de la situación aditiva en juego.

Los 4 jueces participantes en el proceso de validez de las definiciones coincidieron en que la dificultad instituida y los componentes de la estructura de prueba son coherentes, relevantes y suficientes.

Las observaciones de los jueces giraron principalmente en torno a mejorar la claridad de la definición de dificultad instituida, de manera que teóricamente se articulen los dos componentes de esta definición: La selección de tareas y la gradación de la dificultad.

Otras sugerencias giran en torno a que en el marco de la relación docente-saber, no todos los docentes tienen el mismo conocimiento del saber, y pueden tener una visión filosófica distinta de las matemáticas. Por ello se aconseja profundizar en el saber como entendimiento del objeto matemático y no solo de las estrategias metodológicas y didácticas para presentar la mediación del saber, así como indagar acerca de la relación de la filosofía matemática que tiene el docente con el objeto matemático y el contrato didáctico.

En cuanto a aspectos formales del instrumento, los jueces indican que debe fomentarse en los docentes claridad en las definiciones sobre las categorías de la variable Intención Pedagógica, de manera que haya unicidad en las conceptualizaciones de tales categorías. Asimismo se sugiere que en el ítem de Estrategias para cada uno de los 10 problemas, se puedan ampliar las fuentes de recolección de evidencias, ya que en concepto de ellos, consideran que la respuesta a esta pregunta no arroja la suficiente información.

Estudio piloto.

En cuanto al *nivel de formación* de las docentes peruanas, el 15% son profesoras (equivalente al nivel de normalista en Colombia), el 65% son licenciadas, el 10% son profesionales no licenciadas en educación y el 10% tienen nivel de Maestría. En el caso de los docentes colombianos, el 5% es normalista, el 5% tecnólogo, 5% profesional no licenciado en educación, 40% licenciado, el 20% es especialista y el 25% tienen nivel de Maestría.

En la variable *agrado por la enseñanza de las matemáticas*, el 55% de las docentes peruanas indican que les gusta enseñar matemáticas más que otras asignaturas, el 40% de las

docentes indicó que les gustaba igual que otras asignaturas, y un 5% reporta menor agrado por la enseñanza de las matemáticas. En los docentes colombianos, los porcentajes fueron de 45%, 35% y 20%, respectivamente.

Con respecto al *estilo de enseñanza*, el 75% de las docentes peruanas se enfoca en resolución de problemas, un 20% en el procedimiento y un 5% en el ejemplo. Por su parte, el 45% de los docentes colombianos se centran en la resolución de problemas, un 35% en el procedimiento, un 10% en el ejemplo y un 10% en el contenido. Es así que resolución de problemas y procedimiento son los estilos de enseñanza predilectos en los docentes peruanos y colombianos participantes en esta etapa.

En el *rol docente* el 65% de las docentes peruanas y el 55% de los docentes colombianos prefieren actuar como facilitadores en el aula de clase, un 20% de docentes peruanas y un 10% de los docentes colombianos como organizadores, un 5% de docentes peruanas y un 15% de docentes colombianos prefieren ser diseñadores. Asimismo un 10% de las docentes prefieren ser comunicadores y el 20% de los docentes colombianos prefieren actuar como colaboradores. Ninguno de los docentes seleccionó el rol de teórico en el aula de clase. Entre las docentes peruanas los roles predominantes fueron de facilitación y organización, mientras que en las aulas de los docentes colombianos participantes los roles más usuales son de facilitación y colaboración.

Análisis psicométricos.

El *Alpha de Cronbach* para la prueba total, tomando los 10 ítems de dificultad percibida y los 10 ítems de dificultad instituida es de .88. La confiabilidad por subescalas arroja un $\alpha = .86$ para la escala de dificultad percibida y un $\alpha = .91$ para la dificultad instituida. Las estimaciones de confiabilidad obtenidas reflejan altos valores de precisión en la medida a nivel general y por subescalas, principalmente en la de dificultad instituida.

Con respecto a la *escala de dificultad percibida* (Tabla 27) el promedio de las valoraciones en cada ítem oscila entre 2.43 y 3.23. Los docentes indican que los problemas de Cambio 1 y 2 y Combinación 1 tienden a ser percibidos por los estudiantes como ni muy fáciles ni muy difíciles, mientras que los problemas de Cambio 4, Igualación 2 y Comparación 1 en opinión de los docentes, son percibidos por los estudiantes como difíciles. Estos 3 problemas tienen como característica común que son sentencias no canónicas que requieren para su solución estrategias de sustracción. La correlación *corregida de Spearman* oscila entre 0.40 y 0.65,

siendo la dificultad percibida de Combinación 1 el ítem menos discriminativo, mientras que los ítems de dificultad percibida de Igualación 1 y 2 son más discriminativos.

Tabla 27.

Valoración promedio y correlaciones Spearman para la escala de dificultad percibida-DISAS-Estudio piloto

Ítem	Nombre	Promedio de las respuestas	Correlación Spearman	Correlación Spearman corregida
1	Cambio 1	3.03	.72	.60
2	Combinación 1	3.23	.54	.40
3	Comparación 3	2.50	.56	.45
4	Cambio 2	3.10	.55	.42
5	Cambio 3	2.55	.64	.52
6	Cambio 4	2.43	.71	.62
7	Combinación 2	2.58	.54	.42
8	Comparación 1	2.48	.69	.61
9	Igualación 1	2.58	.74	.65
10	Igualación 2	2.43	.73	.65

Con respecto a la *escala de dificultad instituida* (Tabla 28), el promedio de las valoraciones en cada ítem oscila entre 2.55 y 2.75, lo que supone asignar a las tareas entre algún esfuerzo y un esfuerzo considerable.

Los docentes indican que en el problema de Cambio 1 asignan tareas que implican algún esfuerzo y se aprecia la progresión de esfuerzo que asignan los docentes en función de la complejización de la estructura semántica, de manera que de las tareas de cambio se pasa a combinación, comparación y posteriormente a igualación.

La correlación corregida de Spearman oscila entre 0.40 y 0.83, siendo la dificultad instituida de Combinación 1 el ítem menos discriminativo, mientras que los ítems de Combinación 2 y Comparación 1 son más discriminativos.

Tabla 28.

Valoración promedio y correlaciones Spearman para la escala de dificultad instituida-DISAS-Estudio piloto

Ítem	Nombre	Promedio de las respuestas	Correlación Spearman	Correlación Spearman corregida
1	Cambio 1	2.55	.51	.41
2	Combinación 1	2.58	.50	.40
3	Comparación 3	2.73	.60	.53
4	Cambio 2	2.65	.73	.65
5	Cambio 3	2.65	.78	.72
6	Cambio 4	2.68	.80	.73
7	Combinación 2	2.60	.86	.83
8	Comparación 1	2.70	.83	.76
9	Igualación 1	2.65	.79	.73
10	Igualación 2	2.75	.80	.72

El flujo de opciones para la *intención pedagógica* por tipo de problema indica que el fomento de la inferencia y el razonamiento con cantidades es la intención principal en situaciones de Cambio 1 y 4 (45% y 42.5%), Comparación 3 (42.5%) e Igualación 2 (42.5%). Por su parte el registro y la representación de problemas se da principalmente en situaciones de Cambio 2 y 3 (40% de docentes en ambos problemas), Combinación 1 y 2 (52.5% y 42.5%), Comparación 1 (45%) e Igualación 1 (37.5%).

Con relación al *material didáctico*, entre el 75% y el 90% de los docentes consideran que para todos los tipos de problema es más propicio enseñar a sus estudiantes con dificultad mediante material de *carácter práctico*, como juegos y regletas, seguido de *materiales que se encuentran en el aula* como el marcador y el tablero. A medida que aumenta la complejidad de problemas de cambio disminuye levemente el uso de material de carácter práctico, mientras aumenta el uso de material presente en el aula.

En cuanto al *eje atencional*, en todos los problemas de cambio los docentes consideran que es mejor dirigir la atención de estos estudiantes hacia objetos concretos presentes en el entorno inmediato. En Cambio 1 el segundo eje atencional que privilegian los docentes es el propio cuerpo del estudiante (12.5%). En ambos problemas de Combinación el 70% de los docentes indica como eje atencional los objetos concretos presentes en el entorno y un 15% se enfoca hacia objetos representados, relatados o dibujados.

Para los problemas de Comparación se aprecia tendencia similar en cuanto al eje atencional primario. El segundo lugar para ambos tipos de problema lo comparten objetos concretos representados, seguido de números, puntos, segmentos de recta y otras entidades abstractas

En problemas de Igualación, el eje atencional primordial es de objetos concretos disponibles en el entorno. En Igualación 1 el segundo lugar en eje atencional lo comparten objetos concretos representados y el uso del propio cuerpo (15% en cada opción). En Igualación 2 el segundo eje atencional radica en objetos concretos representados (22.5%).

El análisis de frecuencias del ítem de respuesta abierta “Estrategias” para los cuatro tipos de problemas macro, discriminado por el país de procedencia de los docentes muestra tendencias de interés.

Para los problemas de cambio (Anexo 13), las docentes peruanas mencionan como información frecuente material concreto, la representación de problemas, situaciones y cantidades, así como el hacer preguntas a los estudiantes, indagando por el *cómo*. En la parte periférica del diagrama aparecen los *materiales didácticos* empleados por las docentes para abordar estas situaciones: Regletas, Caja McKínder, caja de liro, chapas, colores, cuerpo y casos. En la periferia también aparecen relacionados términos que denotan *acciones* en el aula de clase: encontrar, saber, manipular. Cabe resaltar que aparecen palabras que denotan un *componente normativo* (debe, notar) a nivel temporal (primero, final) y espacial (aula, entorno, estructurado), así como palabras que indican operación: diferencia, queda, quitar, cambio, igual, parte.

Los docentes colombianos emplean material concreto, uso de problemas, ejemplos, ejercicios, dibujos y elementos, fomento de preguntas cotidianas. Como estrategias los docentes colombianos reportan el uso del conteo, de los dedos, regletas, tablero, cuaderno, uso de representaciones, juegos y escritos. Algunos verbos que expresan los docentes en términos de *acciones* son: comprender, relacionar, hacer, así como palabras asociadas con *adición* (suma, agrupa), *sustracción* (restar, quitando, sustraer) y *estructura del problema* (operación, respuesta, cantidades). Aparecen también palabras que aluden a *requerimientos correctivos* y *normativos*, como debe y bien.

Para los problemas de Combinación (Anexo 14), las docentes peruanas emplean material concreto como regletas principalmente, situaciones estructuradas, manejo de cantidades, juego, dibujo, cantidades hasta 10 y problemas. También se trabaja representación de

preguntas, asimismo se aprecia el uso de términos que denotan *temporalidad en el proceso* de enseñanza: primero, final. En la parte periférica del diagrama aparecen los *materiales didácticos* empleados por las docentes para abordar estas situaciones: semillas, palitos. También se observan palabras que sugieren *interacción*: dándole, comunicando, planteando; así como términos que indican aspectos *situados*: vivencia, vida, entorno, aula, y términos que indican aspectos *normativos*: notar, reconocimiento.

Los docentes colombianos emplean en problemas de Combinación material concreto, uso de problemas, regletas, ejercicios, tablero, objetos y dedos. Aparecen palabras asociados *al significado de la combinación*: Conjuntos, conocido, agrupación, unión, además de otras palabras asociadas con *estructuras semánticas diferentes*: comparar, alcanzar. Otros recursos didácticos empleados para la enseñanza de estos problemas son audiovisuales, dibujos y problemas con uso de centímetros. Además emergen palabras relacionadas con la *interacción con el estudiante* (plantar), así como palabras que sugieren *temporalidad* en el proceso de resolución de problemas: después, anterior.

Para los problemas de Comparación (Anexo 15), las docentes peruanas emplean material concreto como regletas, así como uso de problemas del entorno. También se abordan los procesos de representación, uso de preguntas y manejo de cantidades. Entre las acciones que tienen lugar en este tipo de problemas se encuentran: Representar, observar, obtener, resolver, razonar, llegar. También surgen palabras relacionadas con la *estructura semántica* de estos problemas: menor, menos y mayor, así como otras más relacionadas con la adición en general: parte, falta, igualdad.

Los docentes colombianos emplean en situaciones de Comparación problemas y material didáctico, en donde se relacionan elementos, números y gráficas, es decir, para estos problemas se emplea material abstracto y pictórico. Aparecen palabras asociados al significado de la comparación: Cantidad, cuánto, menos, menor y mayor; así como palabras asociadas a *procesos de resolución de problemas*: comprensión, relacionando, intentar y explica, así como palabras que denotan *interacción* como contándole y dialogando.

En los problemas de Igualación (Anexo 16), todos los docentes se enfocan en el material, sin embargo las docentes peruanas se centran en problemas con elementos concretos, situaciones de formulación de preguntas y material como regletas, caja de liro, chapas, botones y barras. Algunos términos reportados que se relacionan con la *estructura semántica de*

igualación, que a su vez implica transformaciones y comparaciones son: Igualando, falta, cantidad, alcanzar, cuánto. Aparecen en este mapa palabras relacionadas con *trabajo colaborativo*: compañeras, equipo, juego; palabras que indican *contexto* como entorno, cotidiana y alusión a requerimientos de las competencias a desplegar en la actividad: descubrir, representar, leer, contar, saber, buscar.

Los docentes colombianos emplean en problemas de Igualación material como gráficas, conteo, regletas, plastilina, representaciones, pictográficos y situaciones cercanas a los niños. Aparecen palabras asociados al significado de la *igualación*: ascendente, igualación, mismos, comparar, quitar; así como otros vocablos asociados a *estructuras semánticas diferentes*: trozos, combinar y partes.

De otra parte, el análisis factorial exploratorio de componentes principales de la escala de dificultad percibida arrojó una razón de varianzas entre el primero y segundo factor de 2.73 en SPSS y un porcentaje de varianza explicada de 50.2% en el Winsteps. Para la escala de dificultad instituida, estos valores fueron 3.13 y 50.9%, respectivamente. Aunque la razón de varianzas no son los más adecuados para soportar el supuesto de unidimensionalidad, no son desalentadores y el porcentaje de varianza explicado en ambas escalas es superior al 50%; considerando que se trata de una muestra muy pequeña se procedió a ajustar el modelo de crédito parcial para la escala de dificultad percibida y de dificultad instituida, de manera independiente.

En el análisis de Rasch de crédito parcial para la dificultad percibida se encontró una dificultad de los ítems entre -1.13 y .58 logit (Tabla 29). Con excepción de los ítems de dificultad percibida Cambio 2 y Cambio 1, los demás ítems se ajustan al modelo de crédito parcial. Los desajustes en los ítems de dificultad percibida se dan principalmente en situaciones de sentencia canónica, donde implica conocer el estado final producto de una transformación sobre una cantidad inicial.

Tabla 29.

Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para los ítems de la escala de dificultad percibida. DISAS - Estudio piloto

Ítem	Dificultad	Error estándar	Ajuste cercano (INFIT)		Ajuste lejano (OUTFIT)		Correlación Punto biserial
			Media cuadrática	Valores estandarizados	Media cuadrática	Valores estandarizados	
Cambio 4	.58	.25	.90	-.3	.93	-.2	.74
Igualación 2	.58	.25	.68	-1.4	.70	-1.2	.79
Comparación1	.46	.25	.63	-1.7	.66	-1.5	.74
Comparación3	.40	.24	1.06	.3	1.08	.4	.64
Cambio 3	.28	.24	1.00	.1	.98	.0	.71
Combinación2	.22	.24	1.16	.7	1.10	.5	.59
Igualación 1	.22	.24	.62	-1.8	.62	-1.7	.77
Cambio 1	-.73	.22	1.22	1.1	1.37	1.6	.62
Cambio 2	-.88	.22	1.34	1.6	1.33	1.5	.56
Combinación1	-1.13	.22	1.22	1.1	1.22	1.0	.57

Si bien los docentes responden el instrumento DISAS sobre la base del estudiante que presenta mayor dificultad en su curso, no obstante se aprecia en el mapa de ítems de la escala de dificultad percibida que los docentes ubican a sus estudiantes a lo largo del continuo de habilidad (Anexo 17). En cuanto a dificultad percibida hay dos agrupaciones: La primera de Combinación 1, Cambio 1 y 2, donde los docentes informan que los estudiantes los perciben como fáciles, y la segunda donde están los demás problemas, siendo Cambio 4, Comparación 1 e Igualación 2 los que en concepto de los docentes son percibidos como más difíciles por los estudiantes.

El mapa de categorías de los ítems de dificultad percibida, categorías que van de Muy difícil a Muy fácil, indica que con excepción de Combinación 2 y Cambio 1, los demás ítems presentan un adecuado ordenamiento en las categorías (Figura 21). Cabe anotar que los ítems de Cambio 1, 2 y 3 y Combinación 2 aparece la opción 5, que alude a que estos problemas son percibidos como muy fáciles por los estudiantes. En los demás ítems se da la gradación hasta 4 (Fácil); para Combinación 1 la gradación va desde difícil a muy fácil.

Con excepción de los ítems de dificultad instituida Combinación 1 y Combinación 2, los demás ítems se ajustan al modelo de crédito parcial. Lo anterior sugiere que los desajustes en los ítems se dan principalmente en situaciones donde la adición se aborda como la unión de conjuntos disjuntos y se dan relaciones de parte-todo.

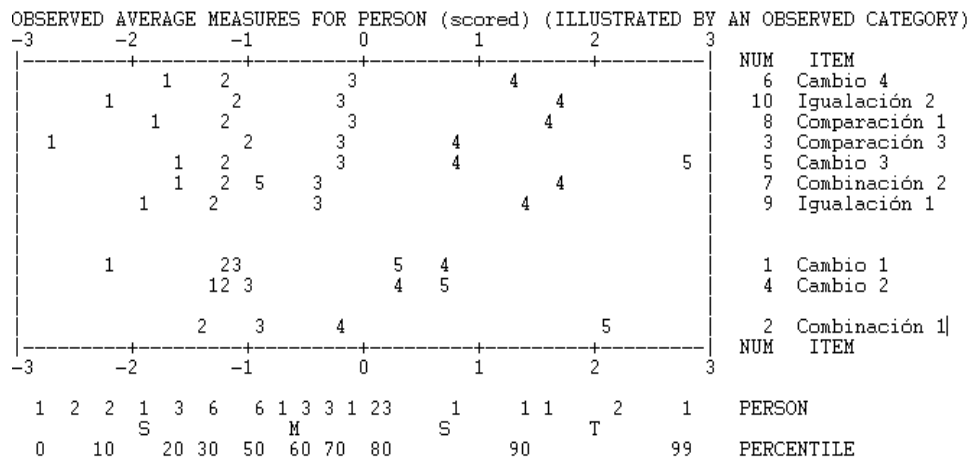


Figura 21. Mapa de categorías escala de dificultad percibida. DISAS Estudio piloto

En el análisis de Rasch de crédito parcial para la dificultad instituida, la dificultad de los ítems osciló entre -.27 y .28 (Tabla 30).

Tabla 30.

Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para los ítems de la escala de dificultad instituida. DISAS - Estudio piloto

ITEM	Dificultad	Error estándar	Ajuste cercano (INFIT)		Ajuste lejano (OUTFIT)		Correlación Punto-biserial
			Media cuadrática	Valores estandarizados	Media cuadrática	Valores estandarizados	
Cambio 1	.28	.26	1.27	1.2	1.23	1.0	.62
Combinación 1	.21	.26	1.37	1.6	1.49	2.0	.56
Combinación 2	.14	.26	.59	-2.0	.58	-2.1	.85
Cambio 2	.01	.26	1.03	.2	1.01	.1	.72
Cambio 3	.01	.26	.86	-.6	.83	-.7	.78
Igualación 1	.01	.26	.96	-.1	.94	-.2	.78
Cambio 4	-.06	.26	.70	-1.4	.68	-1.5	.81
Comparación 1	-.13	.26	.84	-.7	.83	-.7	.79
Comparación 3	-.20	.26	1.08	.4	1.27	1.2	.63
Igualación 2	-.27	.26	1.26	1.1	1.24	1.0	.77

En el mapa de ítems de la escala de dificultad instituida, los docentes ubican a sus estudiantes a lo largo del continuo de habilidad (intervalo de θ entre -6 y 3) (Anexo 18) y todos los ítems se agruparon en niveles de θ entre -0.5 y 0.5 aproximadamente. Cambio 1, Combinación 1 y Combinación 2 son los ítems a los que los docentes confieren tareas con un nivel mayor de esfuerzo, en tanto los estudiantes tienen mayor dominio de estos problemas,

que son los más trabajados en la escuela (Arias et al. 2013; Godino et al. 2006). Por su parte, en los problemas de Comparación 1, Comparación 3 e Igualación 2 los docentes asignan tareas que requieren un menor esfuerzo, posiblemente por el proceso de enculturación formal, donde a partir de tareas sencillas introducen gradualmente al estudiante en la adquisición y dominio de estructuras semánticas complejas.

El mapa de categorías de los ítems de dificultad instituida (Figura 22), categorías que van de poco esfuerzo a un esfuerzo inmenso, indica que con excepción de Comparación 1, Igualación 1 e Igualación 2, los demás ítems presentan un adecuado ordenamiento en las categorías. Cabe anotar que sólo en estos tres últimos problemas aparece la opción 5, que representa la asignación de tareas que requieran un esfuerzo inmenso; esa gradación de esfuerzo inmenso se ubica junto a la opción 3 (un esfuerzo considerable) en niveles de θ entre 0 y -0.5. Los demás ítems oscilan de 1 a 4, donde 4 representa Mucho esfuerzo.

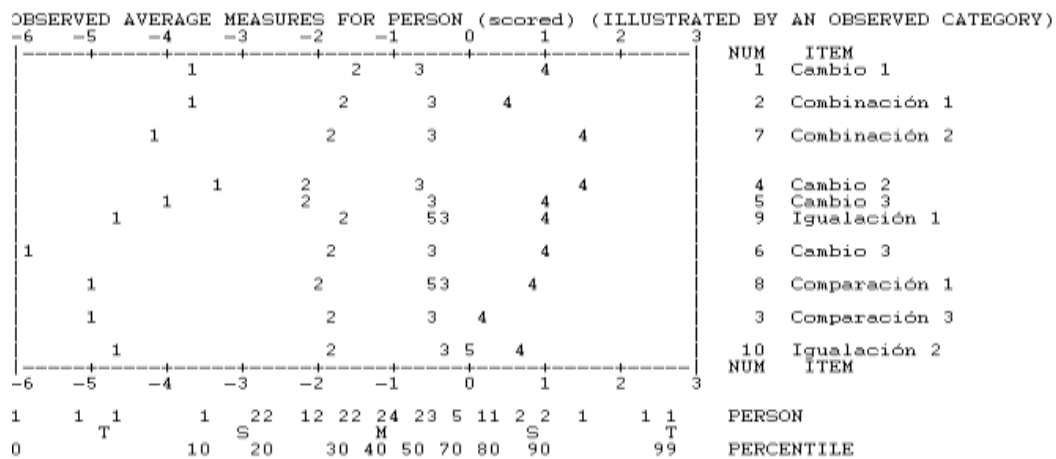


Figura 22. Mapa de categorías escala de dificultad instituida. DISAS -Estudio piloto

En conclusión, la validez de contenido, la confiabilidad total de DISAS, de las escalas de dificultad percibida e dificultad instituida, el ajuste de estas escalas a modelos de crédito parcial y la gradación de las categorías de dichas escalas respaldan la precisión de las medidas para comprender la manera como los docentes instituyen las situaciones de aprendizaje y gradúan la dificultad de las mismas. También aportan información de interés el eje atencional, el material didáctico y la intención pedagógica para caracterizar la manera como el docente planea diferentes tipos de problemas aditivos en función de su estructura semántica.

Si bien en el modelo de crédito parcial de dificultad percibida se encontraron desajustes en ítems de Cambio 1, Cambio 2, asimismo en el modelo de crédito parcial de dificultad

instituida hubo desajustes en los ítems de Combinación, se decidió para la etapa de aplicación de validación aplicar la prueba en su totalidad, ya que en consonancia con el modelo de aprendizaje situado (Figura 7) y considerando que en DESAS se evaluaron 10 tipos de problemas aditivos, se requiere coleccionar información acerca de la manera como los docentes planifican su actividad en estas situaciones específicas de enseñanza-aprendizaje de la adición y la sustracción.

Teniendo en cuenta los resultados de las etapas de juicio de expertos y estudio piloto se hicieron las correcciones pertinentes en cuanto a diagramación de los ítems, mejora en la claridad de los enunciados y opciones de respuesta del instrumento.

Aplicación de validación.

La información sociodemográfica se reportará para 15 docentes (14 mujeres y 1 hombre), ya que en una de las IE la docente de matemáticas está a cargo de los cursos 2º, 3º y 4º y en otra IE la docente de matemáticas dicta en tercer y cuarto grado. Los demás resultados de esta etapa se reportan sobre la base de los *18 registros* de dificultad instituida de los *18 estudiantes* identificados con dificultad experimentada en la fase 1, puesto que las docentes que tenían a su cargo más de un curso diligenciaron el instrumento para cada uno de los niños de los cursos en que dictan matemáticas.

Los docentes participantes en esta etapa tienen edades comprendidas entre 26 y 58 años, con experiencia docente entre 4 y 38 años y de 2 a 36 años de experiencia en enseñanza de matemáticas en primaria. En la variable de estudios complementarios en matemáticas para primaria (ej. cursos, diplomados, capacitaciones), el 46.6% de los docentes indican la realización de algún tipo de estudios complementarios en esta área. En cuanto al nivel de formación, el 33.3% es normalista, el 20% técnico o tecnólogo, el 20% especialista, el 13.3% licenciado y el 13.3% es profesional no licenciado en educación.

En la variable *agrado por la enseñanza de las matemáticas*, el 53.3% de los docentes indican que les gusta enseñar matemáticas más que otras asignaturas, el 40% de los docentes indicó que les gustaba igual que otras asignaturas y un 6.6% reporta menor agrado por la enseñanza de las matemáticas.

Con respecto al *estilo de enseñanza*, el 33.% de los docentes se enfoca en el procedimiento, un 13.3% en el ejemplo, un 46.6% en resolución de problemas y un 6.6% en el contenido.

Resolución de problemas y procedimiento son los estilos de enseñanza predilectos en los docentes participantes en esta etapa.

En el *rol docente* el 40% de los docentes prefieren actuar como facilitadores en el aula de clase, un 33.3% como colaboradores, un 20% organizador y un 6.6% es comunicador. Ninguno de los docentes seleccionó el rol de teórico en el aula de clase, sino se aprecia que en el contexto de los docentes participantes los roles predominantes son de facilitación y colaboración, hallazgo similar al reportado en el estudio piloto.

Análisis psicométricos.

El Alpha de Cronbach para la prueba total, tomando los 10 ítems de dificultad percibida y los 10 ítems de dificultad instituida fue de .73. La confiabilidad por subescalas arroja un alpha de .95 para la escala de dificultad percibida y de .92 para la dificultad instituida. Las estimaciones de confiabilidad obtenidas reflejan altos valores de precisión en la medida a nivel general y por subescalas, principalmente en la de dificultad percibida.

Con respecto a la *escala de dificultad percibida* (Tabla 31), el promedio de las valoraciones en cada ítem oscila entre 2.44 y 3.33. Los docentes indican que los problemas de Cambio, Combinación e Igualación 1 tienden a ser percibidos por los estudiantes como ni muy fáciles ni muy difíciles, mientras que los problemas de Cambio 4, Combinación 2 y Comparación 3 en opinión de los docentes, son percibidos por los estudiantes como difíciles. Los problemas de Cambio 4 y Combinación 2 tienen como característica común que son sentencias no canónicas que requieren para su solución estrategias de sustracción.

Tabla 31.

*Valoración promedio y correlaciones Spearman para la escala de dificultad percibida-
DISAS-Aplicación de validación*

Ítem	Nombre	Promedio de las respuestas	Correlación Spearman	Correlación Spearman corregida
1	Cambio 1	3.33	.80	.75
2	Combinación 1	3.22	.82	.80
3	Comparación 3	2.61	.81	.75
4	Cambio 2	2.89	.86	.81
5	Cambio 3	2.67	.83	.79
6	Cambio 4	2.44	.87	.83
7	Combinación 2	2.56	.86	.81
8	Comparación 1	2.89	.65	.59
9	Igualación 1	3.00	.76	.71
10	Igualación 2	2.72	.78	.73

La correlación corregida de Spearman oscila entre 0.59 y 0.83, índices superiores a los obtenidos en el estudio piloto, siendo la dificultad percibida de Comparación 1 el que tiene menor discriminación mientras que el ítem de dificultad percibida de Cambio 4 es el más discriminativo.

En la *escala de dificultad instituida* (Tabla 32), el promedio de las valoraciones en cada ítem oscila entre 2.67 y 3.00, lo que supone asignar a las tareas entre algún esfuerzo y un esfuerzo considerable. Los docentes indican que en el problema de Igualación 2 asignan tareas que implican algún esfuerzo y se aprecia una progresión de esfuerzo que asignan los docentes así: Igualación, comparación, combinación y cambio. Cabe anotar que en las tareas de cambio la progresión va de problemas de sentencia canónica y no canónica donde se da un incremento en la cantidad final (Cambio 1 y 3) hasta problemas de sentencia canónica y no canónica con decremento en la cantidad final (Cambio 2 y 4).

La correlación corregida de Spearman oscila entre 0.30 y 0.90, índices superiores a los obtenidos en el estudio piloto, siendo la dificultad instituida de Comparación 3 el menos discriminativo, mientras que los ítems de dificultad percibida de Cambio 3 y Cambio 4 son más discriminativos.

Tabla 32.

Valoraciones promedio y correlaciones Spearman para la escala de dificultad instituida-DISAS- Aplicación de validación

Ítem	Nombre	Promedio de las respuestas	Correlación Spearman	Correlación Spearman corregida
1	Cambio1	2.83	.44	.37
2	Combinación 1	2.83	.48	.45
3	Comparación 3	2.83	.44	.30
4	Cambio 2	2.94	.62	.56
5	Cambio 3	2.83	.87	.86
6	Cambio 4	3.00	.94	.90
7	Combinación 2	2.78	.81	.76
8	Comparación 1	2.72	.83	.80
9	Igualación 1	2.72	.87	.83
10	Igualación 2	2.67	.86	.84

El flujo de opciones para la *intención pedagógica* por tipo de problema indica que el fomento de la inferencia y el razonamiento con cantidades es la intención principal en situaciones de Cambio 1 (77.7%), Cambio 4 % (55.5%), Comparación 1, Cambio 2 e

Igualación 1 (50% cada una), Igualación 2 (61.1%) y Combinación 1 (44.4%). Por su parte el registro y la representación de problemas se da principalmente en situaciones de Comparación 3 y Cambio 3 (38.8% cada una). En Combinación 2 el registro y representación de problemas y el razonamiento con cantidades reúnen el 61.1% de las opiniones de los docentes (Tabla 33).

Tabla 33.

*Flujo de opciones para intención pedagógica, material didáctico y eje atencional DISAS-
Aplicación de validación*

Intención pedagógica	CA1	CO1	CMP3	CA2	CA3	CA4	CO2	CMP1	IG1	IG2
Recordar o retener información		2	2		2		3		1	
Atender a la situación y sus objetos	1	1	1	1	3	1	3	1	2	3
Comunicar, solicitar o dar información	1		3	3	2	4	2	2	1	1
Registrar y representar problemas	2	7	7	5	7	3	5	6	5	3
Inferir o razonar con cantidades	14	8	5	9	4	10	5	9	9	11
Material didáctico										
El que se encuentra en el aula como pizarrón, marcador, etc	3	4	3	4	2	3			4	3
El de carácter informativo como libros, revistas etc.	2		2				7	4	1	
El material audiovisual como videos, gráficos, etc.	1	4	3	3	2	1	3	5	2	1
El que tiene carácter práctico como juegos, regletas, etc.	10	8	8	10	10	11	8	8	10	12
El que usa recursos tecnológicos como videojuegos, aplicaciones, etc.	2	2	2	1	2	3		1	1	2
Eje atencional										
Su propio cuerpo								1		1
Objetos concretos presentes en el entorno inmediato.	14	9	8	11	9	11	11	9	10	8
Objetos concretos no disponibles, que están representados, relatados o dibujados.	3	7	8	6	4	4	5	5	5	7
Números, segmentos de recta y otras entidades abstractas.	1	2	2	1	5	3	2	3	3	2

Con relación al *material didáctico*, entre el 45% y 66% de los docentes consideran que es más propicio enseñar a sus estudiantes con dificultad a través de material que tiene *carácter*

práctico, como juegos, regletas, para todos los problemas evaluados, seguido de materiales que se encuentran en el aula como el marcador y el tablero, así como material audiovisual, ej. videos, presentaciones y gráficos.

En cuanto al *eje atencional*, entre el 45% y el 80% de los docentes consideran que es mejor dirigir la atención de estos estudiantes hacia objetos concretos presentes en el entorno inmediato, seguido de objetos concretos no disponibles, que están representados, relatados o dibujados. En Comparación 3 e Igualación 2 además de estos focos de atención también se trabaja con el cuerpo.

El análisis de frecuencias del ítem de respuesta abierta “Estrategias” para los cuatro tipos de problemas macro, muestra tendencias de interés. Para los problemas de cambio (Anexo 19), los docentes mencionan como información frecuente el empleo de problemas, situaciones y el componente del *hacer*. Destacan también el uso de materiales como gráficos, dibujos, números, juego, ejercicios, fichas, palitos, representaciones, ejemplo, todo ello en relación con palabras cercanas a *componentes situacionales*: contexto, medio, cotidianas. Cabe anotar que aparecen palabras relacionadas con elementos de *motivación y autoeficacia*: poder, así como palabras vinculadas con la *interacción*: enfocaría, pediría, dirigirle, darle, entendió, enseñaría. Otras palabras surgen vinculadas con la *resolución de problemas*: formular, encontrar, cómo, manipular, desarrollar, procesos, relación. Entre los términos vinculados con la significación de la operación aritmética, que denotan *transformación*, se encuentran: falta, colocar, resta, lleva, cuánto, miembro, resultado.

Para los problemas de Combinación (Anexo 19), los docentes *utilizarían material concreto y representación de problemas*. Entre el material didáctico se encuentra juegos, graficar, actividades, hacer ejercicios, uso de barras, fichas, regletas, pictóricos, estadística, datos, imágenes, cantidades, números, diagramas, lo que muestra que no sólo se emplean elementos concretos sino también recursos abstractos y simbólicos. Cabe anotar que una de las palabras más frecuentes tiene que ver con el significado de la combinación: *parte*, además de otras palabras que se asocian con el *significado de la operación*: adición, suma, resta. En el marco de *resolución de problemas* se trabaja también con situaciones, explicaciones, pregunta, búsqueda de soluciones, manipulación de objetos, formule, similar y anteriores. Hay una palabra de gusto con la tarea: agrade.

Para los problemas de Comparación (Anexo 20), los docentes se enfocan en problemas, ejemplos, situaciones y material del entorno. Emergen palabras relacionadas con el *proceso de resolución de problemas*: Indagar, resolverlo, análisis, evidenciar, recordar, procesos, cómo. El principal término vinculado con el significado del problema es la palabra *comparación*. Otros términos asociados con el *significado de la operación* son: cuántos, términos, cantidades, adición, alternativas, resta, diferencia. Algunos de los recursos didácticos que los docentes sugieren para trabajar con sus estudiantes con dificultad están: Juegos, estadísticas, plataformas, dibujos, diagramas, ejercicios con edades, estaturas, fechas, eventos y cantidades importantes para los estudiantes.

En los problemas de Igualación (Anexo 20), los docentes enfatizan el uso de material concreto, manipulable, en la generación de situaciones y problemas donde se indaga la respuesta empleando diferentes objetos y recursos como el juego, talleres, ejercicios, herramientas, diagramas, fichas. Los conceptos asociados con *igualación* son: comparación, igual, menor, quitarle. Entre las palabras relacionadas con *interacción docente-estudiante* son: fomentar, enseñarle, y se le indican ciertos *requerimientos normativos* relacionados con la situación: explique, encontrar, realizar, analizar, atención, pensar, hallar y crear. Hay términos relacionados con *aspectos contextuales*: cotidianidad, entorno, contexto, así como con aspectos de dominio: capaz, afianzar, poder.

Con el análisis factorial exploratorio de componentes principales de la escala de dificultad percibida se obtiene un único factor que explica el 68,48% de varianza en SPSS y un porcentaje de varianza explicada de 70.4% en el Winsteps. Para la escala de dificultad instituida, estos valores fueron 3.96 y 58.7%, respectivamente. Los valores obtenidos en los análisis factoriales constituyen evidencia para soportar el supuesto de unidimensionalidad, por ende permiten ajustar el modelo Rasch de crédito parcial para las escalas de dificultad percibida, y de dificultad instituida, de manera independiente.

En el análisis de Rasch de crédito parcial para la dificultad percibida se encontró una dificultad de los ítems entre -1.54 y 1.28 (Tabla 34). Con excepción de los ítems de dificultad percibida Comparación 1 y Cambio 1, los demás ítems se ajustan al modelo de crédito parcial.

Tabla 34.

Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para los ítems de la escala de dificultad percibida. DISAS – Aplicación de validación

Ítem	Dificultad	Error estándar	Ajuste cercano (INFIT)		Ajuste lejano (OUTFIT)		Correlación punto-biserial
			Media cuadrática	Valores estandarizados	Media cuadrática	Valores estandarizados	
Cambio 4	1.28	.46	.63	-1.0	.55	-.9	.90
Combinación2	.88	.44	.88	-.2	.73	-.5	.87
Comparación3	.69	.43	.79	-.5	.61	-.8	.87
Cambio 3	.50	.43	.83	-.4	.69	-.6	.85
Igualación 2	.32	.42	.86	-.3	.70	-.6	.83
Cambio 2	-.20	.41	.99	.1	.89	-.2	.81
Comparación1	-.20	.41	1.52	1.5	1.56	1.4	.66
Igualación 1	-.53	.41	1.03	.2	.87	-.3	.77
Combinación1	-1.20	.41	.83	-.5	.85	-.4	.80
Cambio 1	-1.54	.42	1.54	1.6	1.44	1.3	.93

En el mapa de ítems de la escala de dificultad percibida los docentes ubican a sus estudiantes a lo largo del continuo de habilidad, principalmente en θ entre -2.5 y 0.5 (Anexo 21). En cuanto a dificultad percibida hay tres agrupaciones: La primera de Combinación 1 y Cambio 1, donde los docentes informan que los estudiantes los perciben como fáciles; la segunda conformada por Cambio 2, Comparación 1 e Igualación 1 que se ubican aproximadamente en $\theta = 0.5$. La tercera agrupación viene dada por Igualación 2, Cambio 3, Comparación 2, Combinación 2 y Cambio 4, siendo estos dos últimos los que en concepto de los docentes son percibidos como más difíciles por los estudiantes. El ítem de Cambio 4 es, de acuerdo con los docentes, percibido como de mayor dificultad para los estudiantes tanto en el estudio piloto como en la aplicación de validación.

El mapa de categorías de los ítems de dificultad percibida (Figura 23), categorías que van de Muy difícil a Muy fácil, indica que todos los ítems presentan un adecuado ordenamiento en las categorías. Cabe anotar que los ítems de Cambio 1 y Combinación 1 aparece la opción 5, que alude a que estos problemas son percibidos como muy fáciles por los estudiantes. En los demás ítems se da la gradación hasta 4 (Muy fácil). En Comparación 1 y Combinación 1 la gradación inicia en la categoría 2 (Difícil).

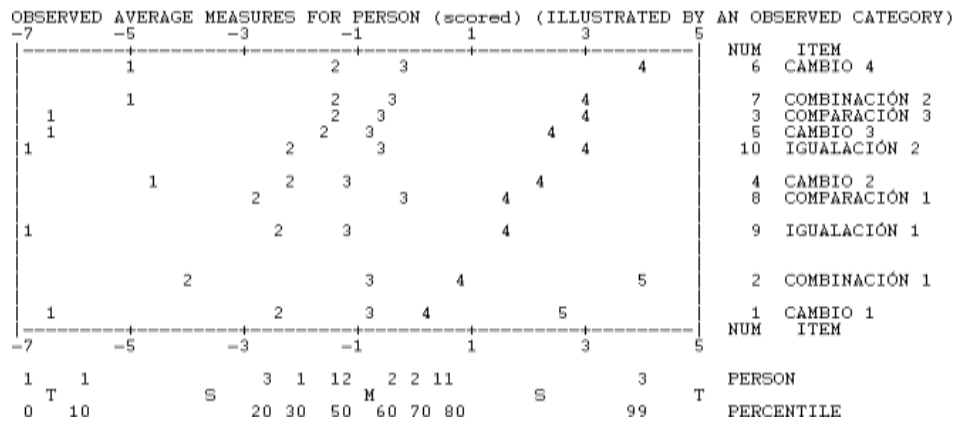


Figura 23. Mapa de categorías escala de dificultad percibida. DISAS- validación

En el análisis de Rasch de crédito parcial para la dificultad instituida, la dificultad de los ítems osciló entre -1.10 y .95 (Tabla 35).

Con excepción de los ítems de dificultad instituida Comparación 1 y Cambio 1, los demás ítems se ajustan al modelo de crédito parcial.

Tabla 35.

Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para los ítems de la escala de dificultad instituida. DISAS – Aplicación de validación

Ítem	Dificultad	Error estándar	Ajuste cercano (INFIT)		Ajuste lejano (OUTFIT)		Correlación punto-biserial
			Media cuadrática	Valores estandarizados	Media cuadrática	Valores estandarizados	
Igualación 2	.95	.60	.67	-.7	.56	-.9	.88
Comparación1	.59	.60	.66	-.7	.54	-.9	.86
Igualación 1	.59	.60	1.00	.2	.95	.1	.87
Combinación2	.23	.60	.94	.0	.91	.0	.81
Cambio 1	-.12	.59	1.52	1.3	1.27	.7	.47
Combinación1	-.12	.59	1.17	.5	.78	-.3	.56
Comparación3	-.12	.59	2.02	2.1	1.88	1.5	.46
Cambio 3	-.12	.59	.41	-1.8	.29	-1.8	.90
Cambio 2	-.78	.57	.70	-.8	.57	-.9	.64
Cambio 4	-1.10	.56	.72	-.8	.59	-1.0	.93

En el mapa de ítems de la escala de dificultad instituida los docentes ubican a sus estudiantes a lo largo del continuo de habilidad (intervalo de θ entre -3 y 5, aproximadamente (Anexo 22) y todos los ítems se agrupan en niveles de θ entre -1 y 1; los ítems de igualación y comparación 1 son los que los docentes confieren un nivel mayor de esfuerzo. Por su parte, en los problemas de cambio los docentes asignan tareas que requieren un menor esfuerzo. Este patrón podría explicarse en términos hipotéticos por lo siguiente: Aun cuando los problemas

de comparación e igualación se encuentran entre los más difíciles para los estudiantes, algunos docentes los consideran no tan difíciles y para la enseñanza de estos problemas asignarían tareas que requieren un esfuerzo considerable, mientras que en Cambio 4 consideran que el estudiante percibe este problema como difícil y las tareas asignadas implican un menor esfuerzo.

El mapa de categorías de los ítems de dificultad instituida indica que todos los ítems presentan un adecuado ordenamiento de las categorías (Figura 24). En opinión de los docentes, ninguna de las tareas que asignarían a los estudiantes requeriría un esfuerzo inmenso (opción 5). Se aprecian dos grandes bloques en función del nivel de habilidad: Las opciones 1 y 2 se agrupan en nivel de habilidad de θ entre -3 y 0, es decir, en esos niveles de atributo los docentes asignan tareas que requieren poco y algún esfuerzo. El segundo bloque, conformado por las respuestas de 3 a 4, se da en niveles de habilidad entre 2 y 5 aproximadamente, es decir, estudiantes que tengan mayor nivel de habilidad o dominio les asignan tareas que requieran entre un esfuerzo considerable y mucho esfuerzo.

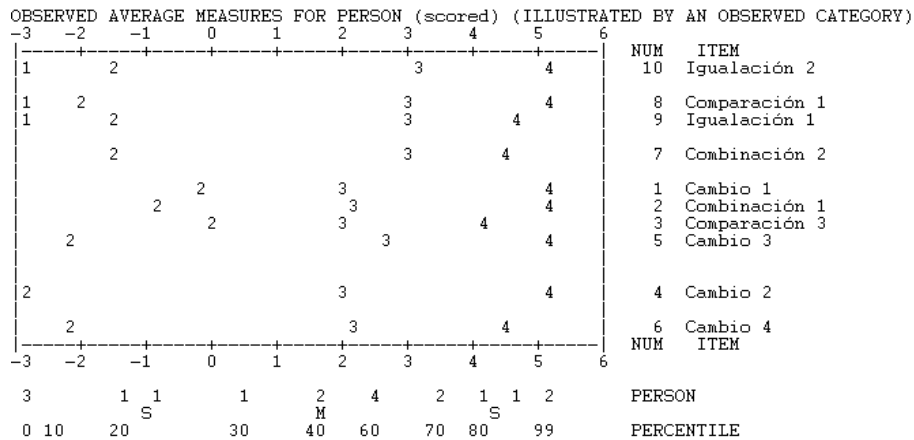


Figura 24. Mapa de categorías escala de dificultad instituida. DISAS- validación

Estructura interna de la prueba.

En el análisis factorial de la dificultad percibida se obtuvo un índice KMO de .843 y una prueba de esfericidad de Bartlett de χ^2 (45, N= 38 = 229.879, p =.000), valores que indican que los datos permiten realizar el análisis factorial. Se seleccionaron los factores mayores a 1.0 en valor propio y se obtuvieron dos factores que explican el 68.60% de varianza. El primer factor explica el 58.18% de la varianza y el segundo factor 10.42% (Tabla 36).

Tabla 36.

Estructura factorial de dificultad percibida DISAS

	Componente	
	1	2
Cambio 1		.83
Combinación 1		.90
Comparación 3	.69	
Cambio 2		.64
Cambio 3	.68	.48
Cambio 4	.83	
Combinación 2	.79	
Comparación 1	.78	
Igualación 1	.44	.69
Igualación 2	.61	.51

* Sólo se reportan cargas factoriales mayores a .40

En el primer factor, con excepción de comparación 3, se encuentran problemas de sentencia no canónica que hacen uso de estrategias de sustracción. En el segundo factor se encuentran los problemas de sentencia canónica donde se emplean estrategias de adición y sustracción.

En el análisis factorial de la dificultad instituida se obtuvo un índice KMO de .840 y una prueba de esfericidad de Bartlett de χ^2 (45, N= 38 = 390.031, p =.000), valores que indican que los datos permiten realizar el análisis factorial. Se seleccionaron los factores mayores a 1.0 en valor propio y se obtuvieron dos factores que explican el 79.08% de varianza. El primer factor explica el 68.38% de la varianza y el segundo factor 10.70% (Tabla 37).

Tabla 37.

Estructura factorial de dificultad instituida DISAS

	Componente	
	1	2
Cambio 1		.90
Combinación 1		.87
Comparación 3		.54
Cambio 2	.44	.80
Cambio 3	.74	.48
Cambio 4	.78	.43
Combinación 2	.69	.56
Comparación 1	.91	
Igualación 1	.89	
Igualación 2	.88	

* Sólo se reportan cargas factoriales mayores a .40

En el primer factor se encuentran problemas de sentencia no canónica que hacen uso de estrategias de sustracción. En el segundo factor se encuentran los problemas de sentencia canónica donde se emplean estrategias de adición y sustracción.

Relación con otras variables.

El análisis de correspondencias múltiples tomando como variables de análisis las que son categóricas nominales de los 10 tipos de problema y como variable suplementaria el tiempo de enseñanza en básica primaria, arrojó dos dimensiones: En la primera dimensión se obtuvo un Alpha de Cronbach de .948 y explica cerca del 40% de la varianza. En esta dimensión aportan las mayores cargas las variables de material didáctico Cambio 1, Cambio 4 e Igualación 1, eje atencional Igualación 2 e intención pedagógica Combinación 1 e Igualación 1 (Tabla 38).

Las cargas por categoría para cada una de las variables se detallan así: Para los problemas de cambio se privilegia el material audiovisual como videos y gráficos, para los problemas de igualación 1 el material informativo como libros y revistas, mientras que para igualación 2 la opción de mayor carga es enfocarse en su propio cuerpo. En cuanto a la intención pedagógica en Combinación 1 carga la opción atender a la situación y sus objetos, y en el ítem intención pedagógica Igualación 1 es la opción recordar y retener información. Estas categorías obtuvieron un valor de coordenada para la primera dimensión de 6.253.

Esta primera dimensión se puede caracterizar como el esfuerzo activo del docente para calibrar la situación para el estudiante. Así, en problemas de baja complejidad como los de cambio, el docente busca emplear recursos audiovisuales y gráficos para aumentar así el nivel de complejidad de los problemas, mientras que en Igualación 1 se pueden emplear material de tipo informativo como una manera inicial de acercar al estudiante con este tipo de problemas. Las intenciones pedagógicas en esta dimensión son diferenciales en función del problema. Así, en Combinación 1, atender a la situación y sus objetos puede ayudar a complejizar estos problemas, y en Igualación 1 recordar o retener información puede ser el punto de entrada para conocer los requerimientos normativos del problema, y el eje atencional en el cuerpo del niño para este problema contribuye a ese proceso de enculturación inicial.

En la segunda dimensión se obtuvo un Alpha de Cronbach de .924 y explica cerca del 31% de la varianza. En esta dimensión aportan las mayores cargas las variables de eje atencional Combinación 1, Comparación 1 e Igualación 1, e Intención Pedagógica de Comparación 1 y 3 y Combinación 2 (Tabla 38).

Tabla 38.

Medidas discriminantes de análisis de correspondencias múltiples DISAS-Aplicación de validación

	Medidas discriminantes		
	Dimensión		Media
	1	2	
Material didáctico Cambio 1	.92	.26	.59
Eje atencional Cambio 1	.33	.41	.37
Material didáctico Combinación 1	.20	.32	.26
Eje atencional Combinación 1	.44	.65	.55
Material didáctico Comparación 3	.53	.37	.45
Eje atencional Comparación 3	.13	.20	.16
Material didáctico Cambio 2	.30	.25	.28
Eje atencional Cambio 2	.23	.14	.19
Material didáctico Cambio 3	.46	.15	.31
Eje atencional Cambio 3	.09	.09	.09
Material didáctico Cambio 4	.94	.18	.56
Eje atencional Cambio 4	.22	.37	.30
Material didáctico Combinación2	.05	.11	.08
Eje atencional Combinación2	.53	.25	.39
Material didáctico Comparación 1	.26	.18	.22
Eje atencional Comparación 1	.06	.57	.32
Material didáctico Igualación1	.93	.17	.55
Eje atencional Igualación1	.07	.54	.30
Material didáctico Igualación 2	.37	.00	.19
Eje atencional Igualación 2	.93	.36	.65
Intención Pedagógica Cambio 1	.03	.38	.20
Intención Pedagógica Combinación 1	.94	.07	.50
Intención Pedagógica Comparación 3	.47	.50	.49
Intención Pedagógica Cambio 2	.13	.33	.23
Intención Pedagógica Cambio 3	.62	.38	.50
Intención Pedagógica Cambio 4	.32	.36	.34
Intención Pedagógica Combinación2	.35	.55	.45
Intención Pedagógica Comparación 1	.13	.64	.39
Intención Pedagógica Igualación1	.93	.24	.59
Intención Pedagógica Igualación 2	.12	.36	.23
Tiempo matemática primaria ^a	.56	.88	.72
Total activo	11.99	9.37	10.68
% de varianza	39.99	31.23	35.61

a. Variable complementaria.

Las cargas por categoría para cada una de las variables se detallan así: En eje atencional Combinación 1 aporta la opción “objetos concretos presentes en el entorno inmediato” (1.341), en el eje atencional Comparación 1 la opción “su propio cuerpo” (2.038) y en el eje atencional de Igualación 1 “objetos concretos no disponibles, representados” (-2.100). En intención pedagógica los ítems de comparación 1 y 3 tiene mayor coordenada en la dimensión

la opción “Atender a la situación y sus objetos” (2.564 en ambos ítems) y en intención pedagógica Combinación 2 la opción “comunicar, solicitar o dar información” (-3.406).

Esta segunda dimensión se enfoca en eje atencional e intención pedagógica de problemas de combinación, comparación e igualación, que tienen un nivel mayor de complejidad. Así, en problemas de complejidad media como Combinación 1, el eje atencional radica en proporcionar elementos concretos presentes en el contexto. En problemas que revisten mayor dificultad como comparación e igualación, el énfasis podría estar en uso de focos atencionales como el cuerpo para introducir al estudiante en estos problemas. También la intención pedagógica varía en función del problema y su complejidad, de manera que en Combinación 2 el docente busca aumentar el nivel de exigencia del estudiante. En los problemas de comparación es importante que el estudiante atienda a la normatividad situada y objetos circunscritos a dicha situación, de modo que pueda ajustarse gradualmente a estas situaciones.

La variable de tiempo de enseñanza de matemáticas en primaria carga en ambas dimensiones. Para la primera dimensión la mayor carga la da la opción “20 años” (3.149), lo que sugeriría tentativamente que la experiencia acumulada en este nivel educativo, que configura al maestro como depositario de la tradición (McDowell, 2003) podría contribuir en la manera como el docente calibra y gradúa las situaciones para el estudiante en función de la dificultad que presenta el estudiante y de las situaciones matemáticas en juego. Para la segunda dimensión la opción con mayor carga es “15 años” (2.564)

Conclusiones

Los resultados obtenidos en las etapas de esta fase 2 constituyen diferentes fuentes de evidencia de validez que sustentan el uso de DISAS como instrumento para identificar la manera como el docente configura las situaciones de enseñanza y de aprendizaje de adición y sustracción a los estudiantes con dificultad experimentada en función del tipo de problema y las variadas alternativas que emplea el docente para graduar la dificultad de las tareas a dichos estudiantes.

Los análisis de concordancia, los descriptivos para información sociodemográfica, ítems de reflexión didáctica y situación aditiva muestran en términos generales altas valoraciones en coherencia y relevancia, con calificaciones máximas en estas dimensiones para los ítems de reflexión didáctica y estructura de problemas aditivos .

Como una tendencia hipotética se puede decir que se da una interrelación entre dificultad percibida e dificultad instituida, en tanto a medida que los problemas son percibidos por los estudiantes como fáciles, el docente inviste las situaciones y tareas con niveles de esfuerzo creciente, mientras que en problemas difíciles se parte de tareas que requieren en principio poco esfuerzo de modo que vayan introduciendo paulatinamente al estudiante en los aspectos normativos que caracterizan a estas operaciones aritméticas. Las intencionalidades pedagógicas, el eje atencional y el material didáctico son aspectos que contribuyen a comprender la configuración concreta que da el docente a un problema tipo, en función de su estructura semántica.

EVALUACIÓN DE LA DIFICULTAD ATRIBUIDA

Introducción

La dificultad atribuida consiste en las atribuciones, explicaciones e interpretaciones de la actividad comunicativa que tanto estudiante como docente efectúan en escenarios de resolución de problemas relacionados con situaciones de adición y sustracción.

Autores como Heider (1958), Manassero y Vázquez (1995), Shehni Yailagh, Lloyd y Walsh (1999) mencionan que la teoría de la atribución causal aborda los procesos inferenciales que emplean las personas para responderse a la preguntas de ¿por qué?, a fin de obtener las causas de una conducta o un resultado, que bien pueden ser propios o de otras personas. Ellos caracterizan el proceso atribucional como una observación inicial de la conducta, seguido de un análisis de la información que proporcionan los elementos de la situación y la postulación final de la causa o causas posibles del comportamiento propio o de otras personas.

Lalljee (1982) por su parte indica que los procesos atributivos deben considerarse desde dos nociones esenciales: (a) las explicaciones en términos de causalidad; y (b) la distinción entre atribuciones a causas internas (estado de ánimo, estados fisiológicos, rasgos de personalidad, conducta pasada y roles sociales) y externas (explicaciones situacionales enfocadas al ambiente físico o a otras personas).

En educación matemática, se ha utilizado el modelo de teoría de atribución de Weiner de la década de los ochenta (Weiner, 1986), el cual recoge elementos de la conceptualización de Heider (1958), en donde la conducta social de las personas se afecta por las atribuciones de causalidad que ellas realizan, y establece una clasificación de la causalidad percibida en términos del origen del poder de la acción (interna o externa), de la estabilidad (estable vs inestable) y de la posibilidad de control o no.

Teniendo en cuenta que en el escenario escolar característico de los primeros años de escolaridad se da una triangulación asimétrica, las actividades comunicativas y la naturaleza de las atribuciones dadas por docente y estudiante son diferentes. En ese orden de ideas, el docente en principio le atribuye creencias, errores y deseos al estudiante desde su bagaje conceptual, considerando el nivel de habilidad del estudiante y las interacciones comunicativas

que tienen lugar en el diálogo docente-estudiante. Lo que el docente dice y lo que le comunica al estudiante conceptualmente no se aparta (no hay brecha) de lo que transmite su comportamiento afectivo en la interacción cotidiana. Por su parte, el estudiante se comunica con el docente no desde conceptos sino a partir del descontento-contento dirigido (Rietveld, 2008), en el marco de parámetros de actividad asociados a la situación aditiva o sustractiva en juego.

En consecuencia, la noción de dificultad atribuida no cae bajo la forma del contrato didáctico en el sentido de Brousseau (1980, 1986), sino se estaría asistiendo a la emergencia de un tipo de relación entre docente y estudiante donde los compromisos se dan desde el reconocimiento de objetos, lugares y objetos normativos, en el marco de parámetros de actividad.

Pensar la actividad comunicativa del docente y estudiante, que emerge en el aula de clase, implica considerarla como un conjunto integrado de creencias, actitudes y comportamientos, visión integrada que permite comprender la manera como el dominio afectiva juega un papel esencial en la comprensión de la dificultad en la resolución de problemas relacionados con situaciones de adición y sustracción.

En educación matemática, el dominio afectivo tiene como punto de referencia esencial el trabajo de dos psicólogos: George Mandler y Douglas McLeod.

Mandler construye su modelo teniendo en cuenta los aspectos psicológicos de la emoción (Gómez, 1997) y define la experiencia emocional como el resultado de dos factores: La activación del sistema nervioso autónomo y la evaluación cognitiva que determinará la cualidad de la emoción. El sistema autónomo se activa cuando hay una interrupción, esto es, cuando una secuencia organizada que ha sido iniciada no puede ser completada o cuando hay desconfirmación de las expectativas (Mandler & Watson, 1966), lo que suscita la emergencia de la emoción. En consonancia, las emociones se asociarían con reorganizaciones posteriores del sistema cognitivo a partir de estos conflictos (Gómez, 1997). Este proceso de “interrupción” es semejante en algunos aspectos a la reacción afectiva integrada característica del descontento-contento dirigido.

McLeod en la década de los ochenta recoge elementos de Mandler y elabora su modelo de dominio afectivo y define este dominio como estados de ánimo que son diferentes de la cognición (McLeod, 1989, 1992, 1993). Señala como componentes del dominio afectivo las

creencias, actitudes y emociones, que interpretó en orden creciente de estabilidad temporal, orden decreciente de intensidad y en orden creciente de implicación cognitiva (Gómez, 1997). Así, las creencias son las más estables, con baja intensidad de respuesta y con gran implicación cognitiva; las emociones son las más inestables, con alta intensidad de respuesta y con poca implicación cognitiva. McLeod sitúa a las actitudes en un nivel intermedio entre las emociones y las creencias.

Gil, Blanco y Guerrero (2005) mencionan que se da una relación cíclica entre los afectos y el aprendizaje: La experiencia que tiene el estudiante al aprender genera en él reacciones emocionales y formación de creencias, las cuales influyen directamente en su comportamiento en situaciones de aprendizaje y en su capacidad para aprender. Posteriormente la exposición permanente a estímulos relacionados con la situación matemática (docente, contenidos, situaciones problema, estrategias de solución, evaluación de los aprendizajes) pueden generar actitudes positivas o negativas que contribuyen a la formación y mantenimiento de creencias relacionadas con aspectos generales o específicos de la matemática.

Gómez (1997) recoge elementos de McLeod que ayudan a entender la manera como define las creencias, las actitudes y las emociones. Las creencias se definen en términos de las experiencias subjetivas y conocimientos subjetivos del estudiante y del profesor. Para McLeod (1992) las creencias del estudiante se categorizan en términos del objeto de creencia: creencias acerca de la matemática (el objeto); acerca de uno mismo; acerca de la enseñanza de la matemática; y creencias acerca del contexto en el cual la educación matemática acontece (contexto social) (McLeod, 1992). Zan, Brown, Evans y Hannula (2006) mencionan que la investigación actual sobre creencias ha ampliado su campo de acción e incluye creencias sobre la autoeficacia.

Las actitudes se definen como respuestas afectivas que involucran sentimientos positivos o negativos de una intensidad moderada y de una estabilidad razonable. Las revisiones sobre el constructo de actitud en matemática (García & Juárez, 2011; Di Martino & Zan, 2015) muestran tendencias promisorias de investigación para este constructo, principalmente en lo concerniente a “su significado en educación matemática, la comparación de diferentes definiciones y las sugerencias de cómo integrar metodologías cualitativas y cuantitativas para evaluarla” (Zan et al., 2006, p. 116).

Las emociones son una clase de afecto más visceral, donde las respuestas son bastante intensas pero de relativa corta duración. Las investigaciones actuales sobre emoción en educación matemática apuntan a no considerar solamente las reacciones fisiológicas, sino el rol de la emoción en el afrontamiento y adaptación ante situaciones del entorno, donde el componente de procesamiento cognitivo es fundamental (Zan et al., 2006).

En la evaluación de la dificultad atribuida, el componente emocional del estudiante se aborda en términos de descontento-contento dirigido, en donde interesa particularmente la reacción afectiva como un todo dirigido a una situación concreta de aprendizaje de la adición y la sustracción, más que activaciones globales y estables de rechazo, gusto o curiosidad a la matemática.

A diferencia del modelo tradicional de dominio afectivo de McLeod (1989), la dificultad atribuida contempla un componente volitivo o de comportamientos, el cual alude a la realización o no de actividades discursivas, manipulativas, de carácter reflexivo o irreflexivo que pueden estar circunscritas al sistema didáctico (docente-estudiante-conocimiento) o fuera de dicho sistema.

En consecuencia, la dificultad atribuida en situaciones aditivas que se busca evaluar mediante el diseño, elaboración y aplicación del Instrumento de Dificultad Instituida en Situaciones de Adición y Sustracción-DASAS alude a la relación diádica docente-estudiante que implica analizar la actividad comunicativa (creencias, actitudes y comportamientos) que emergen en la resolución de problemas relacionados con situaciones de adición y sustracción.

DASAS está integrado dentro del modelo general de evaluación de la dificultad del que también hacen parte los instrumentos DISAS y DESAS. Como DASAS está diseñado para examinar una relación diádica hay que tener en cuenta que tiene dos orientaciones complementarias, a saber:

1. DASAS está dirigido a evaluar la dificultad que el docente atribuye al estudiante en situaciones de adición o sustracción. En lo fundamental esto tiene que ver con cómo el docente explica la actividad que el estudiante despliega cuando resuelve problemas relacionados con situaciones de adición y sustracción.

2. DASAS pretende evaluar las dificultades del estudiante para comprender al docente, lo que tiene que ver con cómo el estudiante se hace un panorama de la actividad desplegada por

el docente, ajustando su pensamiento y su conducta afectiva dentro de las situaciones de aprendizaje propuestas por el docente.

Nótese que estas dos orientaciones son complementarias porque los esfuerzos comunicativos del docente pretenden orientar la actividad desarrollada por el estudiante cuando aprende y los del estudiante están dirigidos a orientarse en el flujo de actividad que despliega el docente cuando enseña. Dichos aspectos de la actividad son las variables que examina DASAS. Así pues, los ítems del instrumento presentan aspectos de las creencias, actitudes y comportamientos que los participantes idealmente podrían mostrar en la resolución de problemas relacionados con situaciones de adición y sustracción.

El instrumento DASAS parte de la articulación de dos ejes centrales: Las explicaciones que da el docente acerca de la dificultad del estudiante, y el panorama que se hace el estudiante de la actividad desplegada por el (la) docente en la resolución de problemas vinculados con situaciones de adición y sustracción. En específico, DASAS pregunta al docente sobre sus apreciaciones acerca del pensamiento, las motivaciones y el comportamiento del estudiante que presenta dificultad y de manera complementaria, examina las dificultades del estudiante para comprender las ideas, las motivaciones o el comportamiento del docente.

Lo anterior configura dos subpruebas de DASAS. Una subprueba para el docente (DASAS-D), y una subprueba para el estudiante (DASAS-E). Ambos instrumentos se aplican de manera individual e independiente tanto al estudiante como al docente.

En el caso del docente (DASAS-D) se examina el tipo de explicación del docente con la intención de delinear su estilo de atribución y seleccionar los aspectos de su reflexión que podrían dar indicios sobre la dificultad del estudiante.

Las explicaciones del docente pueden ser internas o externas. Es necesario precisar que en este caso interno y externo se predicen con respecto a la situación de enseñanza – aprendizaje de la adición y la sustracción, por lo tanto las explicaciones centradas en el niño o en el maestro son ambas internas a esa situación, mientras que aquello que está fuera de la situación de enseñanza o aprendizaje constituyen explicaciones de carácter externo. Dentro de las explicaciones externas pueden distinguirse a su vez dos tipos: Una que identifica una causa o motivante específico preciso y una que señala un origen difuso o ambiguo.

En el caso del estudiante (DASAS-E) se examina su panorama (visión), en tanto su comprensión explícita o reflexiva de la actividad del docente (haciendo alusión a atribuciones

externas o internas), así como su habituación irreflexiva en el plano de la conducta afectiva a las actividades de resolución de problemas de adición y sustracción planteadas por el docente.

Así, la tercera fase de la investigación tuvo como objetivo desarrollar un instrumento de evaluación de la dificultad atribuida por los docentes y estudiantes en relación con su quehacer en situaciones cotidianas de aprendizaje de las operaciones aritméticas de adición y sustracción. En esta fase se desarrolló el Instrumento para la Evaluación de Dificultad Atribuida en Situaciones de Adición y Sustracción (DASAS), compuesto por dos subpruebas: DASAS-D para docente y DASAS-E para estudiantes.

Método

El instrumento DASAS parte de la articulación de dos ejes: Las explicaciones que da el docente acerca de la dificultad del estudiante (Lalljee, 1982) y el panorama que se hace el estudiante de la actividad del (la) docente en la resolución de problemas vinculados con situaciones de adición y sustracción, teniendo como eje el modelo de McLeod (1992) sobre creencias, actitudes y comportamientos que los participantes idealmente podrían mostrar en la resolución de problemas relacionados con situaciones de adición y sustracción. En consecuencia, DASAS pregunta al docente sobre sus apreciaciones acerca del pensamiento, las motivaciones y el comportamiento del estudiante que presenta dificultad y de manera complementaria, examina las dificultades del estudiante para comprender las ideas, las motivaciones o el comportamiento del docente. Cada subprueba consta de 12 ítems como se muestra en las tablas 39 y 40.

Tabla 39.

Especificaciones de prueba para el Instrumento de Dificultad Atribuida del docente en Situaciones de Adición y Sustracción- DASAS-D

			Actividad del infante			Total
			Creencias	Actitudes	Comportamientos	
Interpretaciones o explicaciones del docente	Externas	Difusa	1	1	1	3
		Precisa	1	1	1	3
	Internas	Centrada en el niño	1	1	1	3
		Centrada en el docente	1	1	1	3
Total			4	4	4	12

Tabla 40.

Especificaciones de prueba para el Instrumento de Dificultad Atribuida del estudiante en Situaciones de Adición y Sustracción- DASAS-E

			Actividad del docente			Total
			Creencias	Actitudes	Comportamientos	
Panorama de la situación de aprendizaje	Reflexivo	Externo	1	1	1	3
	(saber que sabe)	Interno	1	1	1	3
	Irreflexivo	Difuso	1	1	1	3
	(sentir que sabe)	Preciso	1	1	1	3
Total			4	4	4	12

Una vez se definió la estructura del prueba del instrumento DASAS se procedió a la construcción de los ítems, ensamblando la prueba DASAS en las subpruebas de Docente y Estudiante, mediante el programa PEBL-2 (Mueller & Piper, 2014).

El análisis de los ítems para conformar la prueba se llevó a cabo en tres etapas: Revisión por juicio de expertos tanto de las dimensiones evaluadas como de los ítems, estudio piloto de la forma preliminar del instrumento en sus dos subpruebas y aplicación de validación de las dos subpruebas del instrumento.

Juicio de expertos.

Participantes.

Los ítems de DASAS fueron evaluados por el mismo equipo que participó en el proceso de validación de DISAS; tanto a nivel de ítems como de definiciones de las dimensiones. La revisión por jueces se hizo en las mismas fechas descritas en la fase 2.

Instrumento.

La validación de los ítems se realizó siguiendo el mismo formato (Escobar & Cuervo, 2008) y procedimiento descrito en las fases anteriores, para los 24 ítems del instrumento completo.

Procedimiento.

El juicio de expertos para la revisión de las definiciones de las dimensiones evaluadas se llevó a cabo mediante agregados individuales. Se hizo un análisis descriptivo y de contenido acerca de las observaciones dadas por los jueces en cada uno de los constructos que componen

el instrumento. El juicio de expertos para los ítems se obtuvo mediante agregados individuales, siguiendo el mismo procedimiento descrito en las fases anteriores visualizando cada ítem en el programa PEBL-2.

Se obtuvieron los porcentajes de acuerdo interevaluadores en los ítems de las subpruebas DASAS-D y DASAS-E separadamente mediante el porcentaje de acuerdo y el coeficiente W de Kendall como índice de concordancia entre evaluadores. En ambos casos, estos se calcularon para cada una de las dimensiones y subdimensiones de cada subprueba (Tablas 39 y 40). Así mismo se registraron las observaciones de cada uno de los expertos para cada ítem. Los análisis estadísticos se realizaron en SPSS 24.0.

Estudio piloto.

El estudio piloto se basó en la aplicación de la forma preliminar de DASAS-D a un grupo de docentes de la población objeto y de la forma preliminar de DASAS-E a una muestra de estudiantes de la población objeto, para obtener evidencia preliminar del funcionamiento de cada uno de los ítems y de la prueba completa.

Participantes.

La versión preliminar de la prueba DASAS-D se aplicó al mismo grupo de docentes que participaron en la aplicación piloto de DISAS, esto es, 40 docentes de los cuales 20 son peruanos y 20 colombianos. Para conformar la muestra del estudio piloto de DASAS-E se le solicitó a cada uno de los 40 docentes que seleccionaran en su curso al estudiante que actualmente presenta mayores dificultades en el aprendizaje de la adición y sustracción; así, se conformó una muestra de 20 estudiantes peruanos y 20 colombianos.

Participaron 3 niños y 17 niñas peruanas de la ciudad de Lima con edades entre 6 y 10 años: 5 niñas de grado primero entre 6 y 7 años de edad, 8 niñas y 1 niño de segundo entre 7 y 8 años, y 4 niñas y 2 niños de grado tercero entre 8 y 10 años. Con respecto a los estudiantes colombianos, participaron 11 niños y 9 niñas de Bogotá o Mosquera con edades entre 6 y 12 años: 1 niño y 2 niñas de grado primero con edades entre 6 y 7 años, 2 niños y una niña de grado segundo entre 6 y 8 años de edad, 6 niños y 2 niñas de tercero entre 8 y 9 años, 1 niño y 2 niñas de cuarto entre 9 y 10 años, y 1 niño y 2 niñas de quinto entre 10 y 12 años de edad.

Se solicitó autorización a los rectores de las instituciones educativas para llevar a cabo el estudio piloto. Una vez obtenida dicha autorización, los estudiantes participantes en esta fase

fueron seleccionados por sus docentes, en función de su desempeño en problemas de adición y sustracción, Posteriormente se entabló diálogo individual con cada estudiante en donde se informó acerca del objetivo de la investigación, el instrumento a aplicar y el manejo de los resultados obtenidos y se le entregó un formato de consentimiento informado para que fuese diligenciado por los padres de familia. Luego que el estudiante entregó su formato de consentimiento informado debidamente diligenciado, se incluyó dentro de la muestra del estudio piloto.

Instrumento.

Una vez obtenidos los resultados de la etapa de juicio de expertos, se realizaron las correcciones de forma y contenido sugeridas por los jueces y se ensambló la prueba a aplicar en PEBL-2, siguiendo la estructura presentada en las tablas 39 y 40.

La subprueba de DASAS para el docente (DASAS-D) consta de dos pantallas de instrucciones de manera similar a las que se presentaron en la aplicación piloto de la fase anterior. Además, los datos sociodemográficos del docente ya se habían recolectaron en la aplicación de DISAS. Al iniciar la aplicación se le pide al docente que identifique al estudiante que presenta mayor dificultad en adición y sustracción y responda las preguntas haciendo referencia a ese estudiante. Los ítems de DASAS-D tienen la forma de un reporte de las ideas, actitudes o comportamientos del otro, en clase. Los ítems se evalúan a través de una escala tipo Likert que examina el acuerdo del docente con cada afirmación, en una escala de 1 a 5 en donde el valor 1 es “Totalmente en desacuerdo” y 5 es “Totalmente de acuerdo”. En el lado izquierdo de la pantalla aparece el texto del ítem y en el lado derecho de la pantalla se encuentran las opciones de respuesta, como se muestra en la Figura 25.

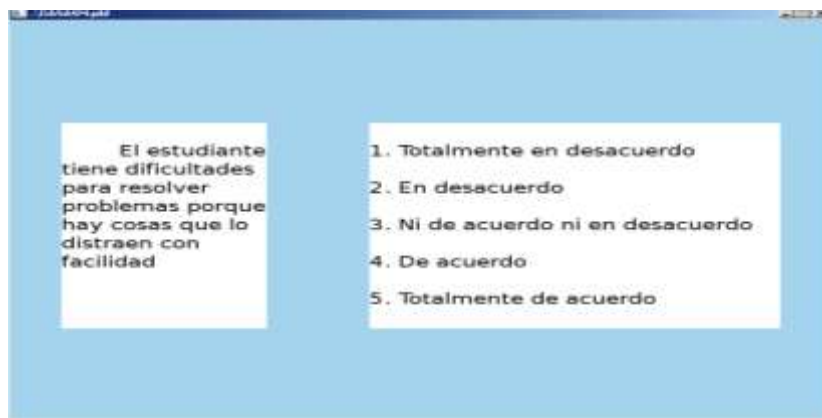


Figura 25. Ejemplo de ítem en DASAS-D

El DASAS-E consta también de dos pantallas de instrucciones. La primera contiene indicaciones para responder los ítems de panorama reflexivo y la segunda recoge indicaciones para los ítems de panorama irreflexivo. Previamente se recogió la información sociodemográfica de género, edad, curso, antecedentes de repitencia de grado (SI-NO); en caso de ser afirmativa esta última pregunta, se pregunta qué grado o grados había reprobado el estudiante anteriormente.

Al estudiante se le leen las instrucciones para responder los ítems del panorama reflexivo y a continuación se presentan los 6 ítems correspondientes, que constan de una afirmación y una escala tipo Likert de 1 a 5 donde el valor 1 es “Casi nunca” 2 es “A veces”, 3 es “Normalmente”, 4 es “Casi siempre” y 5 es “Siempre” (Figura 26). El estudiante indica su respuesta y el aplicador la escribe en el programa PEBL-2.

Luego que el estudiante conteste el último ítem de panorama reflexivo, aparece una pantalla de instrucciones para los seis ítems de panorama irreflexivo. A continuación aparecen los ítems del panorama irreflexivo, que constan de una frase y la subescala de descontento-contento dirigido (ver Figura 27). El aplicador registra la respuesta del estudiante en PEBL-2.

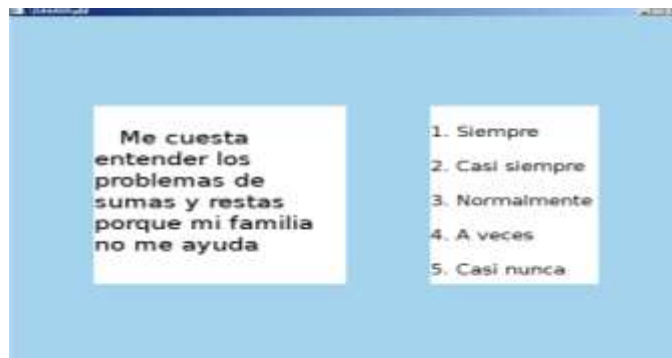


Figura 26. Ejemplo de ítem de panorama reflexivo en DASAS-E

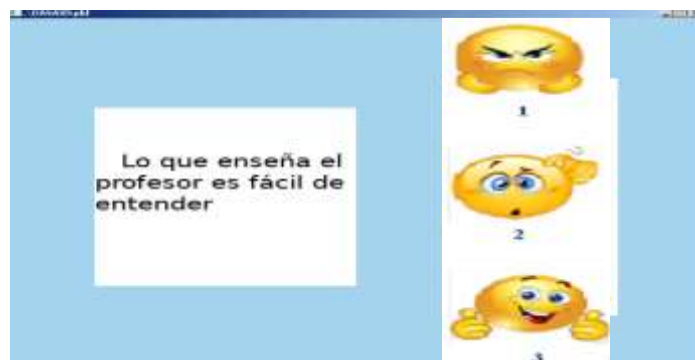


Figura 27. Ejemplo de ítem de panorama irreflexivo en DASAS-E

Procedimiento.

Se elaboró un manual de aplicación y se puso a prueba en una primera aplicación con un docente y un estudiante, ésta aplicación tuvo como único objetivo refinar el manual con instrucciones detalladas. La aplicación de DASAS-D y DASAS-E se llevó a cabo de manera individual durante el II semestre de 2017 en Perú y el I semestre de 2018 en Colombia, por un evaluador principal. La aplicación de DASAS-D se llevó a cabo en una única sesión junto con la de DISAS. Las condiciones físicas del espacio, así como la disposición triangular de los participantes y de los elementos de la aplicación se conservaron para la administración de DASAS-D a los docentes. La duración promedio de la aplicación fue de 3 a 5 minutos.

En el caso de los estudiantes, se solicitaron los permisos necesarios y se realizó en un salón independiente del aula de clase sin presencia del docente. Los espacios físicos para la aplicación contaron con adecuadas condiciones de iluminación y ventilación; así mismo, se conservó la disposición espacial del evaluador y el estudiante en torno a DASAS-E en el programa PEBL-2, de manera que evaluador y docente triangulen en torno a un objeto común (DASAS-E). La duración promedio de la aplicación de DASAS-D fue de 3 a 5 minutos.

El plan de análisis y obtención de evidencias de validez para DASAS se adelantó en dos momentos: En primer lugar se obtuvieron los estadísticos descriptivos para las variables sociodemográficas de los estudiantes participantes en esta etapa (repitencia y grados reprobados por el estudiante). Los datos sociodemográficos de los docentes en esta etapa ya se reportaron anteriormente en DISAS.

En segunda instancia se realizaron estos análisis psicométricos: (a) Correlación ítem-test y estimación de la confiabilidad mediante alpha de Cronbach para la prueba total, para las subpruebas de DASAS y para el panorama reflexivo e irreflexivo en DASAS-E, de manera separada; (b) Para la valoración de DASAS-D y DASAS-E se estimó la dificultad mediante el promedio de las respuestas; la discriminación se estimó mediante coeficiente de correlación de Spearman entre cada ítem con el total de cada escala, eliminando el aporte de cada ítem dentro del puntaje de cada escala. En DASAS-E las estimaciones se obtuvieron de manera independiente para panorama reflexivo e irreflexivo, dado que la primera consiste en escala de frecuencia y la segunda está en términos de la subescala de descontento-contento dirigido recategorizada (Figura 9); y c) Ajuste de modelo Rasch de crédito parcial para DASAS-D y los componentes reflexivo e irreflexivo de DASAS-E. Previo a los análisis de Rasch se

verificó el supuesto de unidimensionalidad a través de análisis factorial de total de DASAS-D y las subpruebas de DASAS-E mediante componentes principales (ACP) y rotación Varimax en SPSS; así como ACP basado en los residuos en Winsteps.

Teniendo en cuenta que, en consonancia con los instrumentos anteriores, el sentido de la dificultad va de situaciones muy difíciles hasta la obtención de mayor dominio en operaciones aritméticas, asimismo las explicaciones que proporciona el docente acerca de la dificultad del estudiante deben ir en un continuo de aceptación de las posibles factores que inciden en la dificultad hasta un desacuerdo con tales razones. Por lo anterior, se procedió a la recodificación en la base de datos de la subprueba DASAS-D *dificultad percibida*, donde 1 es “Totalmente de acuerdo”, 2 es “De acuerdo”, 3 es “Ni de acuerdo ni en desacuerdo”, 4 es “En desacuerdo” y 5 “Totalmente en desacuerdo”. Para DASAS-E en sus componentes reflexivo e irreflexivo el sentido de codificación de las variables se mantuvo igual.

Aplicación de validación.

La validación se basó en la aplicación de las dos subpruebas del DASAS a los estudiantes identificados con dificultad experimentada en la Fase 1, de manera que a los estudiantes se les aplicó DASAS-E, y se aplicó DASAS-D a los docentes de matemáticas de cada estudiante para obtener evidencia del funcionamiento de cada una de las subpruebas y de la prueba completa.

Participantes.

Los docentes de matemáticas para esta fase son los mismos que en la aplicación de validación del DISAS, ya que la información de DISAS y DASAS se recolectó sobre el mismo estudiante identificado con dificultad experimentada en la Fase 1. Es decir, participaron 15 docentes que proporcionaron 18 registros de estudiantes. La aplicación de DASAS-E se hizo con los estudiantes del grupo de participantes identificados con mayor dificultad experimentada en la fase 1 de la tesis, teniendo en cuenta su desempeño en DESAS. Participaron en total 18 estudiantes (10 niños y 8 niñas).

Instrumento.

Una vez obtenidos los resultados del estudio piloto se hicieron las correcciones pertinentes en cuanto a redacción de algunas preguntas en DASAS-E y DASAS-D, así como precisión en las instrucciones tanto para estudiantes como para docentes. El armado de la prueba DASAS

que se aplicó en esta etapa conserva la estructura presentada en las tablas 39 y 40, en cuanto a subpruebas y número de ítems.

Procedimiento.

Se complementó el manual de aplicación que incluye tanto los aspectos conceptuales de la prueba DASAS en sus secciones DASAS-D y DASAS-E, así como el protocolo de aplicación en PEBL-2. La aplicación del instrumento se llevó a cabo de manera individual durante el I semestre de 2018 por un evaluador principal. Los docentes respondieron la versión definitiva del DASAS en la misma sesión del DISAS. La duración promedio de la aplicación de DASAS-D y DASAS-E fue similar a la del estudio piloto. El protocolo de aplicación y los análisis estadísticos fueron los mismos empleados en el estudio piloto.

Posteriormente se hizo análisis de estructura interna de DASAS-D y el componente reflexivo e irreflexivo de DASAS-E mediante análisis factorial por componentes principales (ACP) y rotación Varimax en SPSS, con cargas factoriales mayores a .40, empleando los datos de los 20 estudiantes colombianos del estudio piloto, y los 18 de la aplicación de validación.

Además, para analizar las relaciones entre variables se obtuvieron las correlación Spearman entre la puntuación en el DASAS-D con los componentes reflexivo e irreflexivo de DASAS-E, correlación entre los componentes de DASAS-E, así como correlación entre el total del componente irreflexivo de DASAS-E y el puntaje del descontento dirigido en DESAS. Asimismo se calculó la prueba t para muestras independientes a fin de examinar la distribución de los puntajes del total de cada una de las subpruebas del instrumento por sector, género; y se calculó ANOVA paramétrico de 1 factor para muestras independientes, a fin de examinar las posibles diferencias por curso y sector.

Resultados

Juicio de expertos.

En esta etapa se documenta la validación por los equipos de jueces tanto de los ítems como de las definiciones de las dimensiones subyacentes al instrumento.

Para la subprueba DASAS-D se aprecian calificaciones máximas en los doce ítems, para las dimensiones de coherencia y relevancia, disgregados en sus diferentes categorías (Tabla 41). Para la dimensión de claridad, con relación al tipo de actividad, las actitudes y los

comportamientos recibieron valoraciones de nivel alto igual o superiores al 70%, mientras que creencias presentó una valoración de 35% en nivel medio.

Tabla 41.

Porcentaje de acuerdo de jueces en coherencia, claridad y relevancia, por categorías de tipo de actividad, explicaciones de la dificultad del estudiante, y explicaciones externas e internas

Categorías	Ítem		Coherencia*	Claridad	Relevancia*	
Tipo de actividad	Creencias	NCumple				
		Bajo				
		Medio		35%		
		Alto	100%	65%	100%	
	Actitudes	NCumple				
		Bajo				
		Medio			15%	
		Alto	100%	85%	100%	
	Comportamientos	NCumple				
Bajo						
Medio				30%		
	Alto	100%	70%	100%		
Explicaciones de la dificultad del estudiante	Externa	NCumple				
		Bajo				
		Medio		20%		
		Alto	100%	80%	100%	
	Interna	NCumple				
		Bajo				
Medio				33%		
	Alto	100%	67%	100%		
Explicación Externa	Difusa	NCumple				
		Bajo				
		Medio		20%		
		Alto	100%	80%	100%	
	Precisa	NCumple				
		Bajo				
Medio				20%		
	Alto	100%	80%	100%		
Explicación Interna	Centrada en el estudiante	NCumple				
		Bajo				
		Medio		33%		
		Alto	100%	67%	100%	
	Centrada docente	NCumple				
		Bajo				
Medio				33%		
	Alto	100%	67%	100%		

* En coherencia y relevancia total de DASAS-D todos los jueces dieron la calificación máxima (concordancia perfecta), la desviación típica es 0, en consecuencia no se obtiene el coeficiente W de Kendall

En cuanto a explicaciones de la dificultad del estudiante, las externas tuvieron una valoración alta del 80% por parte de los jueces, y al interior de esa categoría las explicaciones externas difusas y precisas presentaron el mismo porcentaje de valoración. Las explicaciones internas centradas en el estudiante y centradas en el docente presentaron un nivel de claridad alto del 67%.

El cálculo del coeficiente W de Kendall se obtuvo para Claridad, mostrando índices de concordancia no significativos ($W(4,12) = .181$ $\chi^2 = 8.867$ $p = .070$). En suficiencia no se encontraron índices de acuerdo significativos ($W(2,2) = .750$ $\chi^2 = 3.000$ $p = .223$). En coherencia y relevancia total de DASAS-D todos los jueces dieron la calificación máxima y en consecuencia no se obtiene el coeficiente W de Kendall.

La suficiencia calculada para los ítems en su conjunto, agrupando por explicaciones externas o internas de la dificultad del estudiante, fue calificada por 3 de los 5 jueces. De ellos el 67% valoraron las explicaciones externas en nivel medio y 33% en nivel alto, mientras que en las explicaciones internas se observó la tendencia inversa.

Las observaciones de los jueces se centraron principalmente en la claridad de los ítems, en diferentes aspectos: Circunscribir el ámbito de las matemáticas específicamente a la resolución de problemas relacionados con situaciones de adición y sustracción, así como hacer cambios de redacción en algunos ítems de la categoría “precisos” que carecían de tal precisión y en ciertos ítems que aludían a explicaciones externas.

En cuanto a sugerencias para explicaciones externas, los jueces coincidieron en la importancia de agregar algunos ítems relacionados con si la adición y sustracción eran útiles para el estudiante en situaciones externas a la escuela; y la carencia de apoyo familiar en las actividades escolares como un aspecto a tener en cuenta en la comprensión de tales dificultades.

Con relación a sugerencias para explicaciones internas, las sugerencias giraron en torno a considerar que el estudiante no entiende las matemáticas porque no persevera ante las dificultades y que el estudiante piensa que las matemáticas son muy difíciles o inaccesibles para él.

Tabla 42.

Porcentaje de acuerdo de jueces en las dimensiones, por categorías de actividad, panorama de la situación de aprendizaje, y panorama reflexivo e irreflexivo

Categorías	Ítem	Características de los ítems				
		Coherencia	Claridad	Relevancia		
Tipo de actividad	Creencias	NCumple				
		Bajo	5%	5%		
		Medio	10%	25%		
		Alto	85%	70%	100%	
		Actitudes	NCumple	5%	5%	5%
			Bajo	5%	10%	5%
	Medio		15%	25%	5%	
		Alto	75%	60%	85%	
		Comportamientos	NCumple			
Bajo				5%	10%	
Medio	11%		21%			
	Alto	89%	74%	90%		
	Panorama de la situación de aprendizaje	NCumple				
		Bajo	6%	10%	10%	
Medio		17%	37%	3%		
	Alto	77%	53%	87%		
	Irreflexiva	NCumple		3%	4%	
		Bajo	3%	3%		
Medio		7%	11%			
	Alto	90%	83%	96%		
	Panorama reflexivo	NCumple				
		Bajo	7%	13%	7%	
Medio		20%	40%	7%		
	Alto	73%	47%	86%		
	Interno	NCumple				
		Bajo	7%	7%	14%	
Medio		13%	33%			
	Alto	80%	60%	86%		
	Panorama irreflexivo	NCumple		6%	7%	
		Bajo	7%	7%		
Medio		7%	7%			
	Alto	86%	80%	93%		
	Preciso	NCumple				
		Bajo				
Medio		7%	14%			
	Alto	93%	86%	100%		

Para la subprueba DASAS-E, con relación a la dimensión de *coherencia*, las creencias y comportamientos tienen valoraciones altas superiores al 80%, mientras que en actitudes un 25% de los jueces concedió valoraciones entre el rango no cumple a nivel medio. El panorama irreflexivo posee valoraciones en la opción alta mayores al 85% en comparación con el panorama reflexivo. Al interior del panorama reflexivo el componente externo es el que presenta una valoración en la categoría alta del 73%, que es menor a la obtenida en el componente interno (80%) (Tabla 42).

En *claridad*, las creencias y comportamientos muestran valoraciones en el nivel alto del 70%, mientras que en actitudes un 40% de los jueces concedió valoraciones entre el rango no cumple a nivel medio. El panorama irreflexivo posee valoraciones en nivel alto del 85% en comparación con el panorama reflexivo. Al interior del panorama reflexivo el componente externo es el que presenta una valoración en la categoría alta del 47%, que es menor a la obtenida en el componente interno (60%).

En *relevancia* las creencias tuvieron índices de acuerdo alto por parte de todos los jueces y las actitudes presentan una valoración en nivel alto del 85%. El panorama irreflexivo posee valoraciones en nivel alto del 96% (donde la categoría preciso alcanzó el nivel máximo de acuerdo) en comparación con el panorama reflexivo.

El cálculo del coeficiente W de Kendall para la subprueba DASAS-E mostró índices de concordancia significativos en coherencia ($W(4,11)^1 = .697 \chi^2 = 30.667 p = .000$), claridad ($W(4,11) = .530 \chi^2 = 23.299 p = .000$), y relevancia ($W(4,11) = .455 \chi^2 = 20.000 p = .000$).

El cálculo del coeficiente W de Kendall según *tipo de actividad* y coherencia mostró índices de concordancia significativos en creencias ($W(4,4) = .750 \chi^2 = 12.000 p = .017$), actitudes ($W(4,4) = .739 \chi^2 = 11.826 p = .019$), pero no significativos en comportamientos ($W(4,3) = .667 \chi^2 = 8.000 p = .092$). Las dimensiones de claridad y relevancia sólo fueron significativa en actitudes ($W(4,4) = .750 \chi^2 = 12.000 p = .017$).

Con relación al *tipo de panorama de la situación de aprendizaje (externo-interno y difuso-preciso)* se observan índices de concordancia significativos en la dimensión de coherencia para el panorama interno ($W(4,3) = 1.000 \chi^2 = 12.000 p = .017$). En claridad se observaron

¹ Aquí el N aparece de 11 ítems porque uno de los jueces no dio su calificación en el último ítem de la prueba (*comportamiento-irreflexivo-preciso*)

índices de concordancia significativos en panorama interno ($W(4,3) = .798$ $\chi^2 = 9.581$ $p = .048$). y difuso ($W(4,3) = 1.000$ $\chi^2 = 12.000$ $p = .017$).

La *suficiencia* calculada para los ítems en su conjunto, agrupando por panorama irreflexivo y reflexivo, fue calificada por 4 de los 5 jueces para el panorama irreflexivo. En el panorama reflexivo 3 de los 5 jueces dieron su valoración de suficiencia. A nivel irreflexivo, el 50% considera que los ítems son altamente suficientes, un 25% de nivel medio y un 25% de nivel bajo. En el nivel reflexivo el 67% de los jueces lo valoró en nivel alto y un 33% en nivel medio.

Las observaciones de los jueces se centraron principalmente en la claridad de los ítems, en diferentes aspectos: Circunscribir el ámbito de las matemáticas específicamente a la resolución de problemas relacionados con situaciones de adición y sustracción, emplear términos neutrales cercanos al lenguaje del estudiante, hacer distinciones precisas entre comportamientos y actitudes, así como fortalecer el componente externo del panorama reflexivo y el componente difuso del panorama irreflexivo.

En cuanto a sugerencias para panorama reflexivo, los jueces sugirieron indagar si el estudiante siente que entiende lo que explica el profesor pero no lo logra cuando le corresponde hacerlo a él solo, o si se le dificulta hacer problemas de sumas y restas porque le han dicho que es malo en matemáticas. Para la dimensión de panorama irreflexivo, los jueces coincidieron en la importancia de agregar algunos ítems relacionados con expresiones como “Aprendo matemáticas porque me han dicho que son útiles para la vida”, “La clase de matemáticas es la más importante” o “Aprendo matemáticas para hacerme inteligente”.

Aunque estas sugerencias de inclusión de ítems constituyen aportes de interés para la comprensión de elementos de DASAS- D y DASAS-E, se decidió mantener el número de ítems propuesto en la estructura de prueba, por dos razones: La primera, en términos de conservar el balanceo y la proporción de las diferentes categorías con respecto a la prueba total; la segunda, porque el llenado de algunos de los ítems plausibles y su respuesta podría conllevar implicaciones de tipo social o legal para el estudiante y para el docente, aspectos que trascienden los objetivos de la prueba DASAS.

Los 4 jueces participantes en el proceso de validez de las definiciones de las dimensiones de prueba coincidieron en que la dificultad atribuida y los componentes de la estructura de prueba son coherentes, relevantes, claros y suficientes. Destacan del concepto de dificultad

atribuida que en la relación estudiante docente-saber siempre están involucrados aspectos sociales y afectivos inherentes al ser humano. Asimismo, hablar de la naturaleza diádica de la atribución, esto es, cómo el docente proporciona explicaciones y a su vez cómo el estudiante se hace un panorama de la situación de enseñanza - aprendizaje de la adición y sustracción permite ver de forma coherente los tipos de atribución según el sujeto en el esquema triangular, así como los alcances y límites de dichos tipos de atribución.

Estudio piloto.

De las 20 estudiantes peruanas, solamente 1 de ellas reporta *repitencia* en grado segundo. De los 20 estudiantes colombianos, el 30% de estudiantes indica haber repetido algún grado. Los cursos que han reprobado los estudiantes se distribuyen así: Grado primero y segundo, con 5% cada uno, y grado tercero 10%. Un estudiante manifestó haber reprobado 2° y 3° grado, y otro estudiante indicó la reprobación de 2° y 5° grado.

Análisis psicométricos.

El Alpha de Cronbach para la prueba DASAS total, tomando en conjunto las dos subpruebas de DASAS-D y DASAS-E es de .74. La confiabilidad para DASAS-D fue de .75 y para DASAS-E fue de .64. El componente de panorama reflexivo en DASAS-E alcanzó una confiabilidad de .59 y para el panorama irreflexivo fue de .74. Las estimaciones de confiabilidad obtenidas reflejan altos valores de precisión en la medida a nivel general y por subescalas, principalmente en la de DASAS-D y en el componente de panorama irreflexivo de DASAS-E.

Con respecto a DASAS-D (Tabla 43), el promedio de las valoraciones en cada ítem oscila entre 2.25 y 3.65. Los docentes mencionan que las principales dificultades que los estudiantes presentan en el aprendizaje de la adición y sustracción tienen su origen en características del desarrollo psicológico (67.5% de docentes mencionan estar entre de acuerdo y muy de acuerdo), distracción (72.5% de acuerdo y muy de acuerdo) y abandono de tareas por causas externas al entorno escolar, con un 45% de acuerdo. Hay también un 40% de los docentes que están de acuerdo en cuanto a la posibilidad de cambiar la didáctica que han desarrollado hasta el momento en el aula a fin que el estudiante pueda mejorar su aprendizaje y desempeño en las operaciones aritméticas, y un 30% que está ni de acuerdo ni en desacuerdo con el ítem. Aquí se aprecia que con excepción del abandono de tareas por causas externas, las explicaciones del

docente se centran principalmente en creencias externas e internas más enfocadas en el estudiante. Entre los ítems con los que los docentes más están ni en acuerdo ni en desacuerdo consisten en que los problemas de adición o sustracción no corresponden al contexto y en que el docente no explica los conceptos y procedimientos con suficiente claridad.

La correlación corregida de Spearman oscila entre 0.04 y 0.65, siendo el ítem 5 el menos discriminativo y el ítem 4 el más discriminativo. En este último ítem, el 52.5% de los docentes muestra desacuerdo con el enunciado.

Tabla 43.

Valoraciones promedio y correlaciones Spearman para la supruueba DASAS-D- Estudio piloto

Ítem	Nombre	Promedio de las respuestas	Correlación Spearman	Correlación Spearman corregida
1	El estudiante tiene dificultades para resolver problemas porque hay cosas que lo distraen con facilidad	2.38	.64	.52
2	Las ideas del estudiante sobre adición y sustracción son confusas porque recibe información inadecuada fuera del aula	3.40	.44	.30
3	El estudiante rechaza la enseñanza por la influencia de personas fuera del entorno escolar	3.40	.70	.61
4	El estudiante muestra desagrado al resolver problemas relacionados con situaciones de adición y sustracción porque los problemas no corresponden a su contexto	3.53	.72	.65
5	El estudiante abandona las tareas por causas externas al entorno escolar	2.55	.17	.04
6	Cuando trabajo en clase de matemáticas la resolución de problemas vinculados con situaciones de adición y sustracción, el estudiante realiza actividades que no se relacionan con el tema actual	3.03	.64	.50
7	El estudiante tiene dificultad para aprender a resolver problemas por las características de su desarrollo psicológico	2.25	.40	.29
8	El estudiante se confunde porque no le explico los conceptos y procedimientos con suficiente claridad	3.65	.25	.14
9	Al estudiante no le interesa aprender a resolver problemas de adición o sustracción	3.30	.56	.45
10	Tengo dificultades para motivar al estudiante a involucrarse en las actividades escolares	3.48	.69	.58
11.	El estudiante no puede controlar su comportamiento y eso le impide aprender a sumar y restar	3.18	.53	.39
12.	Debo cambiar la didáctica que he desarrollado hasta el momento en el aula para que el estudiante mejore su desempeño al sumar y restar	2.78	.23	.11

Con respecto a la *sección de panorama reflexivo de DASAS-E* (Tabla 44), el promedio de las valoraciones en cada ítem oscila entre 3.08 a 3.83. Para el ítem 3 el 45% de los estudiantes indicó que no le sucedía casi nunca, es decir, su reacción afectiva ante dichos problemas no está vinculada con la dificultad que puedan presentar sus compañeros con tales situaciones. El 40% de los estudiantes reporta que a veces les disgusta resolver problemas de adición y sustracción porque los temas no son interesantes (ítem 4) y un 35% menciona que a veces les cuesta entender dichos problemas porque la familia no les ayuda (ítem 1). De estas tres explicaciones, las dos primeras corresponden al componente de actitud, y la última a creencia externa.

La correlación corregida de Spearman oscila entre 0.25 y 0.52, siendo el ítem 2 el menos discriminativo y el ítem 4 el más discriminativo.

Tabla 44.

Valoraciones promedio y correlaciones Spearman para panorama reflexivo DASAS-E- Estudio piloto

Ítem	Nombre	Promedio de las respuestas	Correlación Spearman	Correlación Spearman corregida
1	Me cuesta entender los problemas de sumas y restas porque mi familia no me ayuda	3.55	.57	.38
2	Para mí es difícil resolver problemas de sumas y restas porque me confundo cuando me explican	3.15	.49	.25
3	Me molesta resolver problemas de sumas y restas porque pienso que para otros también son difíciles	3.83	.54	.29
4	Me disgusta resolver problemas de sumas y restas porque esos temas no son interesantes	3.75	.68	.52
5	Me pierdo al resolver problemas de sumas y restas porque otras personas me distraen	3.08	.59	.31
6	Sé sumar y restar pero tengo dificultades para resolver problemas sobre sumas y restas	3.13	.61	.38

En cuanto al *panorama irreflexivo* en *DASAS-E* (Tabla 45), el promedio de las valoraciones en cada ítem oscila entre 2.23 y 2.45, en donde para el ítem “asistir al colegio es divertido” el 55% de los estudiantes indican estar contentos. El otro ítem con alto promedio en esta

subescala es el ítem 4, donde un 47.5% de los estudiantes menciona estar contento. Para los demás ítems, la valoración de contento está entre el 40% y el 50%. La correlación corregida de Spearman oscila entre 0.27 y 0.63, siendo el ítem 4 el menos discriminativo y el ítem 2 el más discriminativo”.

Tabla 45.

Valoraciones promedio y correlaciones Spearman para el panorama irreflexivo- DASAS-E- Estudio piloto

Ítem	Nombre	Promedio de las respuestas	Correlación Spearman	Correlación Spearman corregida
1	Lo que enseña el profesor es fácil de entender	2.33	.54	.30
2	Aprender a sumar y restar es fácil	2.23	.82	.63
3	Asistir al colegio es divertido	2.45	.58	.37
4	Me gusta escuchar al profesor cuando me enseña a resolver problemas de sumas y restas	2.40	.47	.27
5	Realizo las tareas que el profesor me deja para hacer en casa	2.28	.68	.43
6	Hago las sumas y las restas que me enseñan en la escuela	2.35	.70	.52

El análisis factorial exploratorio de componentes principales de DASAS-D arrojó una razón de varianzas entre el primero y segundo factor de 1.70 y un porcentaje de varianza explicada de 36.3% en el Winsteps. Para la escala de panorama reflexivo en DASAS-E, estos valores fueron 1.58 y 35.2%. Para la escala de panorama irreflexivo de DASAS-E se encontró un factor que explica el 43.80% de la varianza; en Winsteps el porcentaje de varianza es 34.2%. Aunque estos valores no son los más adecuados para soportar el supuesto de unidimensionalidad, no son desalentadores, y considerando que se trata de una muestra muy pequeña se procedió a ajustar modelos independientes de crédito parcial para DASAS-D y para los componentes de panorama reflexivo e irreflexivo de DASAS-E.

Al ajustar el modelo de Rasch en los ítems de DASAS-D se encontró un índice de confiabilidad Alpha de Cronbach de .70 para los estudiantes y de .86 para los ítems. La dificultad de los ítems osciló entre -.59 y .84 (Tabla 46).

Tabla 46.

Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para DASAS-D – Estudio piloto

Ítem	Dificultad	Error estándar	Ajuste cercano (INFIT)		Ajuste lejano (OUTFIT)		Correlación biserial puntual
			Media cuadrática	Valores estandarizados	Media cuadrática	Valores estandarizados	
7	.84	.17	1.11	.6	1.05	.3	.46
1	.70	.17	1.50	2.1	1.43	1.8	.57
5	.52	.16	1.50	2.3	1.69	2.8	.17
12	.29	.16	1.14	.8	1.36	1.7	.28
6	.05	.16	1.12	.7	1.08	.5	.65
11	-.10	.16	1.08	.5	1.10	.6	.56
9	-.22	.16	.78	-1.2	.73	-1.4	.57
2	-.32	.16	.93	-.3	.91	-.4	.48
3	-.32	.16	.50	-3.1	.47	-3.1	.70
10	-.40	.16	.78	-1.1	.71	-1.4	.72
4	-.45	.16	.60	-2.2	.57	-2.3	.70
8	-.59	.17	1.13	.7	1.27	1.2	.21

El ítem 1 “El estudiante tiene dificultades para resolver problemas porque hay cosas que lo distraen con facilidad” y el ítem 5 “El estudiante abandona las tareas por causas externas al entorno escolar” presentan desajuste cercano y lejano al modelo tanto en los valores de la media cuadrática como en los valores estandarizados. El ítem 12 (Debo cambiar la didáctica que he desarrollado hasta el momento en el aula para que el estudiante mejore su desempeño al sumar y restar) presenta desajuste lejano en la media cuadrática.

Por su parte, los ítems 3 (El estudiante rechaza la enseñanza por la influencia de personas fuera del entorno escolar) y 4 (El estudiante muestra desagrado al resolver problemas relacionados con situaciones de adición y sustracción porque los problemas no corresponden a su contexto) tienen desajuste cercano y lejano en su valor estandarizado.

De acuerdo con el mapa de ítems de DASAS-D (Anexo 23), éstos se distribuyen en niveles de θ entre $-.8$ y $.8$, aproximadamente, donde los ítems “El estudiante tiene dificultades para aprender a resolver problemas por las características de su desarrollo psicológico” y “el estudiante tiene dificultades para resolver problemas porque hay cosas que lo distraen con facilidad” son las explicaciones más recurrentes que los docentes proporcionan frente a estudiantes con dificultad. Por su parte, los ítems “El estudiante se confunde porque no le explico los conceptos y procedimientos con suficiente claridad” y “El estudiante muestra desagrado al resolver problemas relacionados con situaciones de adición y sustracción porque

los problemas no corresponden a su contexto” se encuentran como explicaciones con las cuales los docentes no están de acuerdo.

El mapa de categorías de los ítems de DASAS-D (Figura 28) indica que las categorías de las explicaciones de los docentes acerca de la dificultad que experimentan los estudiantes de la Fase 1 se distribuyen en un nivel de θ entre -1.5 y 1. Los ítems 2, 5, 7, 8 y 12 no se ordenan adecuadamente de manera ascendente, en tanto que los docentes primordialmente no están ni de acuerdo ni en desacuerdo con que explican los conceptos de manera poco clara o que los niños abandonan las tareas por causas externas (ítems 8 y 5, respectivamente). Se aprecia también para el ítem 8 que no se encuentra la categoría Totalmente de acuerdo.

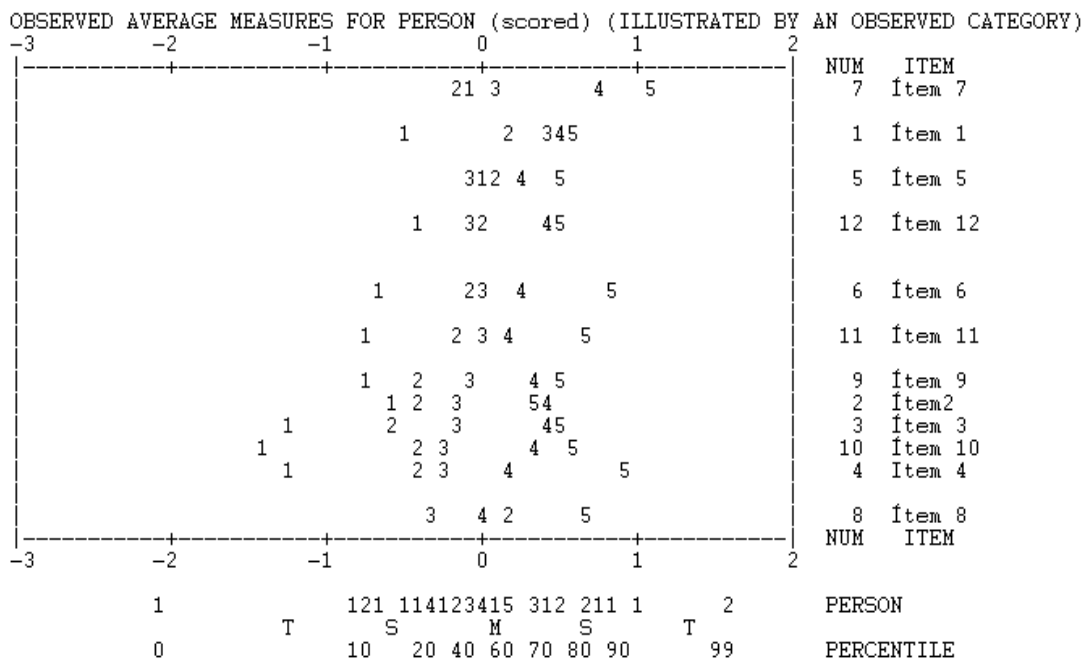


Figura 28. Mapa de categorías DASAS-D-Estudio piloto

Al ajustar el modelo de Rasch en los ítems de panorama reflexivo de DASAS-E se encontró un Alpha de Cronbach de .59 para los estudiantes y de .61 para los ítems. La dificultad de los ítems osciló entre -.31 y .25. Todos los ítems se ajustan adecuadamente al modelo (Tabla 47).

Tabla 47.

Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para ítems de panorama reflexivo

DASAS-E -Estudio piloto

Ítem	Dificultad	Error estándar	Ajuste cercano (INFIT)		Ajuste lejano (OUTFIT)		Correlación biserial puntual
			Media cuadrática	Valores estandarizados	Media cuadrática	Valores estandarizados	
5	.25	.13	1.12	.7	1.04	.2	.55
6	.21	.13	.96	-.2	.86	-.5	.62
2	.19	.13	.97	-.1	.93	-.2	.51
1	-.09	.14	1.20	1.0	1.04	.2	.52
4	-.25	.14	.75	-1.2	.74	-.9	.57
3	-.31	.15	1.14	.7	1.17	.7	.50

De acuerdo con el mapa de ítems para panorama reflexivo (Anexo 24), éstos se distribuyen en niveles de θ entre $-.3$ y $.3$ aproximadamente, donde los ítems “Me pierdo al resolver problemas de sumas y restas porque otras personas me distraen” y “Sé sumar y restar pero tengo dificultades para resolver problemas sobre sumas y restas” son los enunciados que se ubicaron en los niveles más altos de la escala de dificultad, en donde los estudiantes reportan que hay distracción por parte de otros y reconocen las posibles dificultades con las operaciones aun cuando conocen los algoritmos. Por su parte, el ítem “Me molesta resolver problemas de sumas y restas porque pienso que para otros son también difíciles” se encuentra en la parte inferior de la escala de dificultad.

El mapa de categorías de los ítems del panorama reflexivo de DASAS-E (Figura 29) indica que las categorías de los enunciados reflexivos de los estudiantes acerca de la situación de enseñanza y de aprendizaje de la adición y sustracción se ordenan adecuadamente de manera ascendente, con excepción del ítem 1 (Me cuesta entender los problemas de sumas y restas porque mi familia no me ayuda), e ítem 5 (Me pierdo al resolver problemas de sumas y restas porque otras personas me distraen).

Al ajustar el modelo de Rasch en los ítems de panorama irreflexivo de DASAS-E, la dificultad de los ítems osciló entre $-.31$ y $.25$. El ítem 1 (Lo que enseña el profesor es fácil de entender) presenta desajuste cercano y lejano en la media cuadrática. Los demás ítems se ajustan adecuadamente al modelo (Tabla 48).

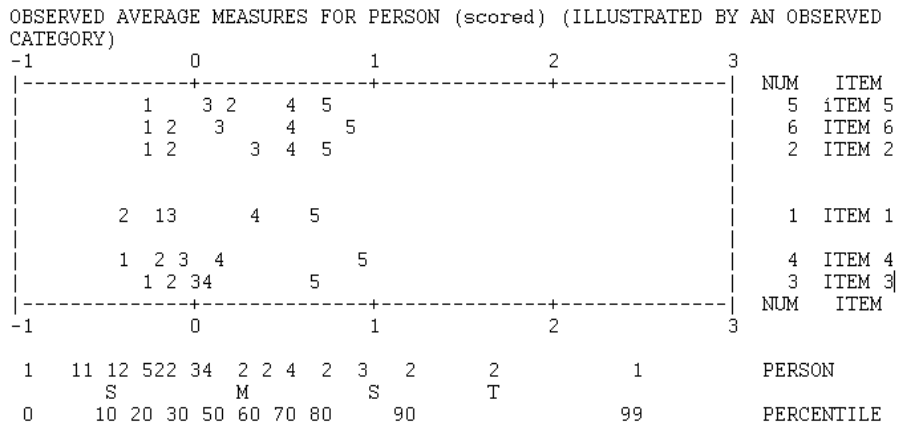


Figura 29. Mapa de categorías panorámico reflexivo DASAS-E -Estudio piloto

Tabla 48.

Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para ítems de panorama reflexivo

DASAS-E- Estudio piloto

Ítem	Dificultad	Error estándar	Ajuste cercano (INFIT)		Ajuste lejano (OUTFIT)		Correlación biserial puntual
			Media cuadrática	Valores estandarizados	Media cuadrática	Valores estandarizados	
2	.39	.29	.92	-.3	1.01	.1	.71
5	.22	.29	.83	-.8	.86	-.6	.67
1	.05	.30	1.30	1.4	1.31	1.3	.58
6	-.04	.30	.78	-1.0	.75	-1.1	.72
4	-.22	.31	1.04	.2	1.02	.2	.58
3	-.41	.31	1.09	.5	1.00	.1	.62

De acuerdo con el mapa de ítems de panorama irreflexivo (Anexo 25), éstos se distribuyen en niveles de θ entre $-.4$ y $.3$ aproximadamente, donde el ítem “Aprender a sumar y restar es fácil” es el enunciado que se ubica en los niveles más altos de la escala de dificultad. Por otra parte, el ítem “Asistir al colegio es divertido” se encuentra en la parte inferior de la escala de dificultad.

El mapa de categorías de los ítems del panorama irreflexivo de DASAS-E (Figura 30) indica que las categorías de los enunciados irreflexivos de los estudiantes acerca de la situación de enseñanza y de aprendizaje de la adición y sustracción tienen una adecuada gradación ascendente.

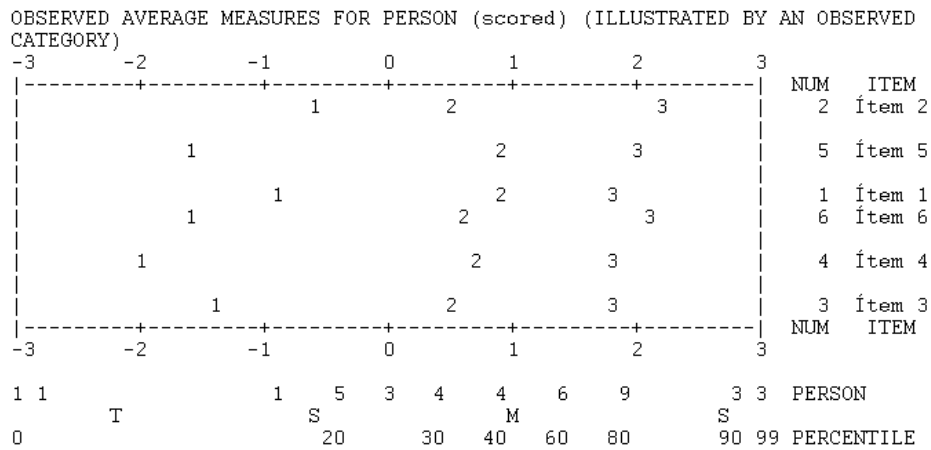


Figura 30. Mapa de categorías panorama irreflexivo DASAS-E- Estudio piloto

Con los hallazgos de esta etapa se hicieron las correcciones pertinentes en cuanto a diagramación de los ítems, mejora en la claridad de los enunciados y opciones de respuesta del instrumento.

Aplicación de validación

La información sociodemográfica de los participantes en DASAS-E (18 estudiantes con dificultad experimentada en la fase 1) y DASAS-D (18 registros de docentes que están a cargo de estos estudiantes), se presentó con anterioridad en la Fase 1 y Fase 2, respectivamente.

Análisis psicométricos.

El Alpha de Cronbach para la prueba DASAS total, tomando en conjunto las dos secciones de DASAS-D y DASAS-E es de .56. La confiabilidad para DASAS-D fue de .73 y para DASAS-E, de .60. El componente de panorama reflexivo en DASAS-E alcanzó una confiabilidad de .37 y el panorama irreflexivo un valor de .59. Las estimaciones de confiabilidad varían del estudio piloto a ésta, más teniendo en cuenta que el número de estudiantes en esta etapa es menor.

Tabla 49.

Valoraciones promedio y correlaciones Spearman para DASAS-D- Aplicación de validación

Ítem	Nombre	Promedio de las respuestas	Correlación Spearman	Correlación Spearman corregida
1	El estudiante tiene dificultades para resolver problemas porque hay cosas que lo distraen con facilidad	2.00	.42	.25
2	Las ideas del estudiante sobre adición y sustracción son confusas porque recibe información inadecuada fuera del aula	3.44	.55	.31
3	El estudiante rechaza la enseñanza por la influencia de personas fuera del entorno escolar	3.61	.76	.66
4	El estudiante muestra desagrado al resolver problemas relacionados con situaciones de adición y sustracción porque los problemas no corresponden a su contexto	3.50	.27	.07
5	El estudiante abandona las tareas por causas externas al entorno escolar	2.89	.79	.64
6	Cuando trabajo en clase de matemáticas la resolución de problemas vinculados con situaciones de adición y sustracción, el estudiante realiza actividades que no se relacionan con el tema actual	2.83	.42	.22
7	El estudiante tiene dificultad para aprender a resolver problemas por las características de su desarrollo psicológico	2.67	.40	.26
8	El estudiante se confunde porque no le explico los conceptos y procedimientos con suficiente claridad	3.83	.15	.02
9	Al estudiante no le interesa aprender a resolver problemas de adición o sustracción	3.33	.42	.27
10	Tengo dificultades para motivar al estudiante a involucrarse en las actividades escolares	3.44	.64	.62
11.	El estudiante no puede controlar su comportamiento y eso le impide aprender a sumar y restar	2.83	.67	.48
12.	Debo cambiar la didáctica que he desarrollado hasta el momento en el aula para que el estudiante mejore su desempeño al sumar y restar	2.50	.13	.04

Con respecto a DASAS-D el promedio de las valoraciones en cada ítem oscila entre 2.00 y 3.83 (Tabla 49). Los docentes mencionan que las principales dificultades que los estudiantes presentan en el aprendizaje de la adición y sustracción tienen su origen en que se distrae con facilidad (83.3% mencionan estar entre de acuerdo y muy de acuerdo), en características del desarrollo psicológico (16.7% de docentes están totalmente de acuerdo y 38.9% de acuerdo). Es importante anotar que el 61.1% de los docentes están en un alto grado de acuerdo con el enunciado “Debo cambiar la didáctica que he desarrollado hasta el momento en el aula para que el estudiante mejore su desempeño al sumar y restar”. Se conserva la misma tendencia encontrada en el estudio piloto en el sentido que las explicaciones del docente se centran principalmente en creencias externas e internas más enfocadas en el estudiante, y se aprecia un incremento del 21.1% en cuanto al grado de acuerdo que manifiesta el docente acerca de la posibilidad de modificar la didáctica desarrollada a la fecha a fin que el estudiante con dificultad mejore su desempeño en la adición y la sustracción.

Entre los ítems con los que los docentes más están en desacuerdo son: “El estudiante se confunde porque no le explico los conceptos y procedimientos con suficiente claridad” y “El estudiante rechaza la enseñanza por la influencia de personas fuera del entorno escolar” ambos con un 61.1% de desacuerdo, así como el ítem “El estudiante muestra desagrado al resolver problemas relacionados con situaciones de adición y sustracción porque los problemas no corresponden a su contexto”, con un 72.2% de desacuerdo. La correlación corregida de Spearman oscila entre .02 y .67, siendo el ítem 8” el menos discriminativo, siendo el ítem 3 el que reporta una mayor discriminación. Cinco de los 12 ítems mejoraron su poder discriminativo.

Con respecto al *panorama reflexivo de DASAS-E* (Tabla 50), el promedio de las valoraciones en cada ítem oscila entre 2.83 a 4.67. Con excepción del ítem 5, los promedios de los demás ítems aumentaron con respecto al del estudio piloto. En cuanto a los enunciados reflexivos que proporcionan los estudiantes en torno al panorama de enseñanza y de aprendizaje, el 50% de los estudiantes menciona que siempre y casi siempre se pierden al resolver problemas de sumas y restas porque otras personas los distraen.

Para el ítem “Sé sumar y restar pero tengo dificultades para resolver problemas sobre sumas y restas” el 27.8% de los estudiantes mencionan que les sucede casi siempre, y un 33.3%

indica que les sucede a veces. Aquí se aprecia un reconocimiento reflexivo del estudiante y su dificultad en cuanto a atribuciones de comportamiento externo e interno.

Por su parte, en el ítem “Me cuesta entender los problemas de sumas y restas porque mi familia no me ayuda” el 66.7% de los estudiantes manifiestan que casi nunca les sucede eso, es decir, reciben el apoyo familiar, mientras que el 72.2% indica que casi nunca se disgustan al resolver problemas de sumas y restas porque esos temas no son interesantes, es decir, no hay al parecer desagrado al resolver tales problemas. La correlación corregida de Spearman oscila entre -.10 y 0.34, siendo los ítems “1 y 4 los que menos discriminan, y el ítem 5 es el más discriminativo.

Tabla 50.

Valoración promedio y correlaciones Spearman para panorama reflexivo DASAS-E- Aplicación de validación

Ítem	Nombre	Promedio de las respuestas	Correlación Spearman	Correlación Spearman corregida
1	Me cuesta entender los problemas de sumas y restas porque mi familia no me ayuda	4.39	.23	-.10
2	Para mí es difícil resolver problemas de sumas y restas porque me confundo cuando me explican	3.28	.67	.31
3	Me molesta resolver problemas de sumas y restas porque pienso que para otros también son difíciles	4.28	.33	.10
4	Me disgusta resolver problemas de sumas y restas porque esos temas no son interesantes	4.67	.15	-.02
5	Me pierdo al resolver problemas de sumas y restas porque otras personas me distraen	2.83	.65	.34
6	Sé sumar y restar pero tengo dificultades para resolver problemas sobre sumas y restas	3.17	.61	.26

En cuanto al *panorama irreflexivo de DASAS-E* (Tabla 51), el promedio de las valoraciones en cada ítem oscila entre 4.33 y 4.67, en donde para el ítem de “aprender a sumar y restar es fácil,” el 72.2% de los estudiantes indican estar contentos. El otro ítem con alto promedio en esta subescala es “me gusta escuchar al profesor cuando me enseña a resolver problemas de sumas y restas”, donde un 66.7% de los estudiantes menciona estar contento. Por otra parte, en los ítems con menor promedio se aprecia para el caso del ítem “Lo que enseña el profesor es

fácil de entender” hay un 50% de estudiantes que está contento y un 44.4% de los estudiantes reporta ni contento ni descontento, lo que sugiere ahí cierto grado de dificultad para comprender las enseñanzas del docente. En el ítem “realizo las tareas que el profesor me deja para hacer en casa” el 61.1% de los estudiantes menciona estar contento con el enunciado.

La correlación corregida de Spearman oscila entre .16 y .50, siendo el ítem 1 el menos discriminativo y el ítem 6 el más discriminativo.

Tabla 51.

Valoraciones promedio y correlaciones Spearman para el panorama irreflexivo DASAS-E- Aplicación de validación

Ítem	Nombre	Promedio de las respuestas	Correlación Spearman	Correlación Spearman corregida
1	Lo que enseña el profesor es fácil de entender	4.33	.44	.16
2	Aprender a sumar y restar es fácil	4.67	.52	.34
3	Asistir al colegio es divertido	4.56	.60	.37
4	Me gusta escuchar al profesor cuando me enseña a resolver problemas de sumas y restas	4.61	.49	.28
5	Realizo las tareas que el profesor me deja para hacer en casa	4.33	.53	.29
6	Hago las sumas y las restas que me enseñan en la escuela	4.44	.70	.50

El flujo de opciones para los ítems de DASAS en la aplicación muestra aspectos de interés (Tabla 52): En los ítems de la *sección docente* las respuestas se distribuyen en todas las opciones, dando un mayor peso a opciones de acuerdo en afirmaciones relacionadas con características externas e internas del estudiante como fuente de dificultad, mientras que en afirmaciones donde se postulan creencias, actitudes que tienen como origen de la dificultad aspectos de organización de la actividad docente las valoraciones tienden al polo de desacuerdo, con excepción del ítem “Debo cambiar la didáctica que he desarrollado hasta el momento en el aula para que el estudiante mejore su desempeño al sumar y restar”.

En panorama reflexivo de DASAS-D los estudiantes mencionan con alta frecuencia que se confunden cuando les explican; que si bien saben sumar y restar, las dificultades en estas operaciones persisten, es decir, hay una atribución principalmente de tipo interna. En enunciados relacionados con creencias y actitudes externas indican que estas situaciones poco

sucedan en términos de frecuencia. La dificultad que percibe el niño en tanto otras personas los distraen es algo que le sucede de manera frecuente.

Tabla 52.

Flujo de opciones para DASAS-Aplicación de validación

DASAS-D (ítems)	Totalmente acuerdo	de De acuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	En desacuerdo	Totalmente en desacuerdo
1.	7	8		2	1
2.	1	1	8	5	3
3.	1	2	4	7	4
4.		4	1	13	
5.	3	5	2	7	1
6.	3	6	1	7	1
7.	3	7	2	5	1
8.		2	2	11	3
9.		4	4	10	
10.		4	3	10	1
11.	4	5	1	6	2
12.	1	10	4	3	

DASAS-E Panorama reflexivo	Siempre	Casi siempre	Normalmente	A veces	Casi nunca
1.	1		2	3	12
2.	4	1	3	6	4
3.	2		2	3	11
4.			1	4	13
5.	5	4	1	5	3
6.	3	5		6	4

DASAS-E Panorama irreflexivo	Descontento	Ni contento ni descontento	Contento
1.	1	8	9
2.		5	13
3.	1	4	13
4.		6	12
5.	1	6	11
6.	1	5	12

La *unidimensionalidad* mediante análisis de componentes principales basados en los residuos para DASAS-D arrojó un porcentaje de varianza para el primer factor de 39.9% Para la escala de panorama reflexivo en DASAS-E, este valor fue de 49% y para la escala de

panorama irreflexivo de DASAS- E un 21,3%. Aunque estos valores no son los más adecuados para soportar el supuesto de unidimensionalidad, no son desalentadores, y considerando que se trata de una muestra muy pequeña se procedió a ajustar modelos independientes de crédito parcial para DASAS-D y para las escalas de panorama reflexivo e irreflexivo de DASAS-E.

Tabla 53.

Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para DASAS-D- Aplicación de validación

Ítem	Dificultad	Error estándar	Ajuste cercano (INFIT)		Ajuste lejano (OUTFIT)		Correlación biserial puntual
			Media cuadrática	Valores estandarizados	Media cuadrática	Valores estandarizados	
1	1.22	.27	1.42	1.2	1.28	.8	.45
12	.63	.24	.82	-.6	.79	-.7	.26
7	.45	.24	1.19	.8	1.23	.8	.46
6	.28	.24	1.33	1.2	1.33	1.1	.47
11	.28	.24	1.31	1.1	1.37	1.2	.62
5	.22	.24	.90	-.3	.87	-.3	.70
9	-.27	.26	.68	-1.0	.65	-1.1	.46
2	-.40	.26	.92	-.1	1.04	.2	.51
10	-.40	.26	.37	-2.5	.35	-2.3	.78
4	-.67	.26	1.01	.2	.97	.1	.22
3	-.61	.27	.92	-.1	.95	.0	.71
8	-.93	.29	1.01	.1	.95	.0	.28

Al ajustar el modelo de Rasch en los ítems de DASAS-D se encontró un Alpha de Cronbach de .68 para los estudiantes, y de .79 para los ítems. La dificultad de los ítems osciló entre -.93 y 1.22 (Tabla 53).

El ítem 6 “Cuando trabajo en clase de matemáticas la resolución de problemas vinculados con situaciones de adición y sustracción, el estudiante realiza actividades que no se relacionan con el tema actual” y el ítem 11 “El estudiante no puede controlar su comportamiento y eso le impide aprender a sumar y restar” presentan desajuste cercano y lejano al modelo en los valores estandarizados. El ítem 10 (Tengo dificultades para motivar al estudiante a involucrarse en las actividades escolares) y el ítem 1 (El estudiante tiene dificultades para resolver problemas porque hay cosas que lo distraen con facilidad) presentan desajuste cercano en la media cuadrática. Los demás ítems se ajustan al modelo.

De acuerdo con el mapa de ítems de DASAS-D (Anexo 28), éstos se distribuyen en niveles de θ entre -1.3 y 1.3 aproximadamente, donde el ítem 1 “El estudiante tiene dificultades para

resolver problemas porque hay cosas que lo distraen con facilidad” y el ítem 12 “Debo cambiar la didáctica que he desarrollado hasta el momento en el aula para que el estudiante mejore su desempeño al sumar y restar” son las explicaciones más recurrentes que los docentes proporcionan frente a estudiantes con dificultad. Por su parte, el ítem “El estudiante se confunde porque no le explico los conceptos y procedimientos con suficiente claridad” se encuentra como explicación con la que los docentes no están de acuerdo.

El mapa de categorías de los ítems de DASAS-D (Figura 31) apoya los resultados de la Tabla 53. Las categorías de las explicaciones de los docentes acerca de la dificultad que experimentan los estudiantes de la Fase 1 se distribuyen en un nivel de θ entre -1.1 y 0.8.

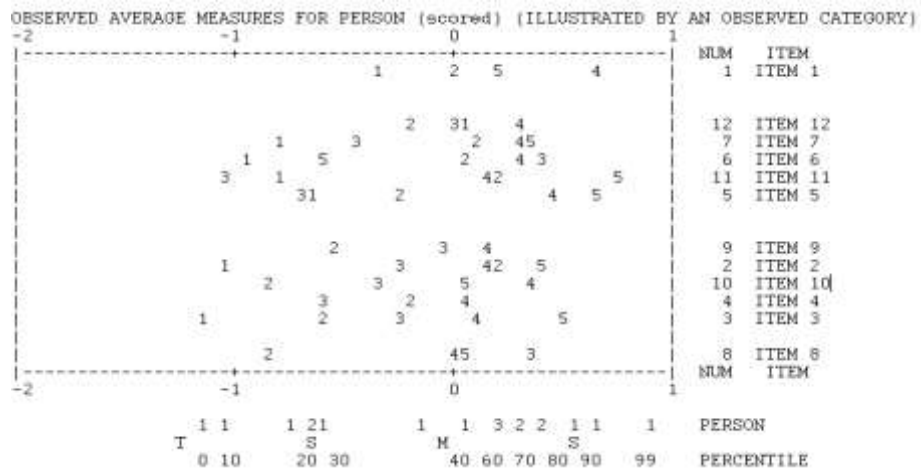


Figura 31. Mapa de categorías escala DASAS-D- Aplicación de validación

Al ajustar el modelo de Rasch en los ítems de panorama reflexivo de DASAS-E se encontró un índice de confiabilidad Alpha de Cronbach de .44 para los estudiantes y de .82 para los ítems. La dificultad de los ítems osciló entre -1.02 y .80. Con excepción del ítem 1, los demás ítems se ajustan al modelo (Tabla 54).

Tabla 54.

Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para panorama reflexivo DASAS-E
-Aplicación de validación

Ítem	Dificultad	Error estándar	Ajuste cercano (INFIT)		Ajuste lejano (OUTFIT)		Correlación biserial puntual
			Media cuadrática	Valores estandarizados	Media cuadrática	Valores estandarizados	
5	.80	.20	.85	-.5	.81	-.4	.65
6	.57	.19	.88	-.4	.80	-.5	.63
2	.49	.20	.78	-.8	.72	-.8	.62
3	-.34	.26	1.11	.4	1.08	.3	.38
1	-.49	.28	1.69	1.4	1.64	1.2	.19
4	-1.02	.39	.90	.1	1.15	.4	.16

De acuerdo con el mapa de ítems de panorama reflexivo (Anexo 27), éstos se distribuyen en niveles de θ entre $-.1$ y $.8$ aproximadamente, donde los ítems “Me pierdo al resolver problemas de sumas y restas porque otras personas me distraen” y “Sé sumar y restar pero tengo dificultades para resolver problemas sobre sumas y restas” son los enunciados que se ubicaron en los niveles más altos de la escala de dificultad, en donde los estudiantes reportan que hay distracción por parte de otros y reconocen las posibles dificultades con las operaciones aun cuando conocen los algoritmos. Por su parte, el ítem “Me disgusta resolver problemas de sumas y restas porque esos temas no son interesantes” se encuentra en la parte inferior de la escala de dificultad.

El mapa de categorías de los ítems del panorama reflexivo de DASAS-E (Figura 32) indica que las categorías de los enunciados reflexivos de los estudiantes acerca de la situación de enseñanza y de aprendizaje de adición y sustracción no se ordenan adecuadamente de modo ascendente, con excepción del ítem 2.

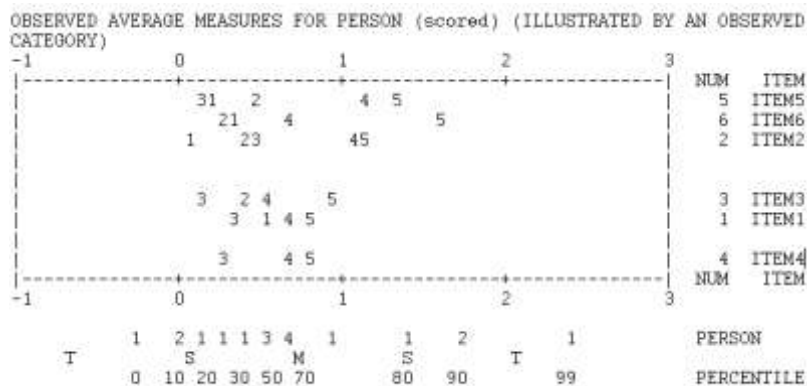


Figura 32. Mapa de categorías panorama reflexivo DASAS-E- validación

Al ajustar el modelo de Rasch en los ítems de panorama irreflexivo de DASAS-E, la dificultad de los ítems osciló entre $-.55$ y $.75$. Todos los ítems se ajustan adecuadamente al modelo (Tabla 55).

Tabla 55.

Estimaciones de dificultad y ajuste al modelo de Rasch para panorama irreflexivo DASAS-E- Aplicación de validación

Ítem	Dificultad	Error estándar	Ajuste cercano (INFIT)		Ajuste lejano (OUTFIT)		Correlación biserial puntual
			Media cuadrática	Valores estandarizados	Media cuadrática	Valores estandarizados	
1	.75	.47	1.14	.5	1.18	.6	.50
5	.28	.50	1.06	.3	1.00	.1	.56
6	.02	.51	.88	-.2	.81	-.4	.65
3	-.25	.53	1.15	.5	1.01	.2	.54
4	-.25	.53	.94	.0	.90	-.1	.48
2	-.55	.56	.88	-.2	.81	-.3	.50

De acuerdo con el mapa de ítems de panorama irreflexivo (Anexo 28), éstos se distribuyen en niveles de θ entre $-.5$ y $.9$ aproximadamente, donde el ítem “Aprender a sumar y restar es fácil” es el enunciado que se ubica en el nivel más bajo de la escala de dificultad. Por otra parte, el ítem “Lo que enseña el profesor es fácil de entender” se encuentra en la parte superior de la escala de dificultad.

El mapa de categorías de los ítems del panorama irreflexivo de DASAS-E (Figura 33) indica que las categorías de los enunciados irreflexivos de los estudiantes acerca de la situación de enseñanza - aprendizaje de adición y sustracción se distribuyen en niveles de θ entre 0 y 3 , presentando una adecuada gradación ascendente, con excepción del ítem 3. “Asistir al colegio es divertido”.

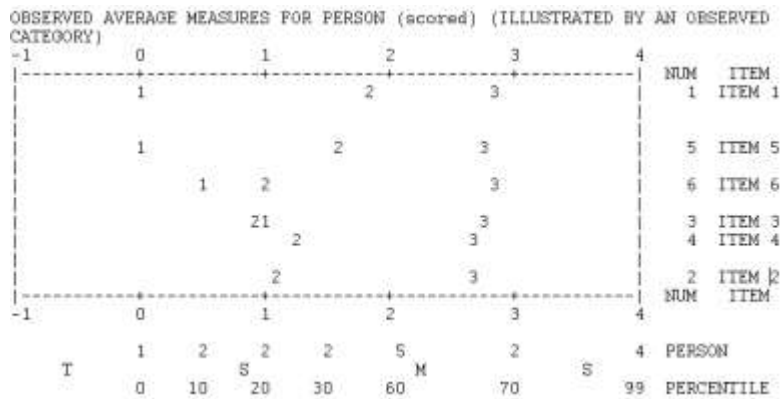


Figura 33. Mapa de categorías panorama irreflexivo DASAS-E Aplicación de validación

Estructura interna de la prueba.

En el análisis factorial de DASAS- D se obtuvo un índice KMO de .559 y una prueba de esfericidad de Bartlett de χ^2 (66, N= 38 = 179.352, p =.000). Se seleccionaron los factores mayores a 1.3 en valor propio y se obtuvieron dos factores que explican el 49.02% de varianza. El primer factor explica el 35.23% de la varianza y el segundo factor 13.79% (Tabla 56).

Tabla 56.

Estructura factorial de DASAS-D

	Componente	
	1	2
1. El estudiante tiene dificultades para resolver problemas porque hay cosas que lo distraen con facilidad	.57	
2. Las ideas del estudiante sobre adición y sustracción son confusas porque recibe información inadecuada fuera del aula	.59	
3. El estudiante rechaza la enseñanza por la influencia de personas fuera del entorno escolar	.83	
4. El estudiante muestra desagrado al resolver problemas relacionados con situaciones de adición y sustracción porque los problemas no corresponden a su contexto	.52	
5.El estudiante abandona las tareas por causas externas al entorno escolar	.64	
6. .Cuando trabajo en clase de matemáticas la resolución de problemas vinculados con situaciones de adición y sustracción, el estudiante realiza actividades que no se relacionan con el tema actual	.58	
7. El estudiante tiene dificultad para aprender a resolver problemas por las características de su desarrollo psicológico	.45	
8. El estudiante se confunde porque no le explico los conceptos y procedimientos con suficiente claridad		.70
9. Al estudiante no le interesa aprender a resolver problemas de adición o sustracción	.66	
10. Tengo dificultades para motivar al estudiante a involucrarse en las actividades escolares	.83	
11.El estudiante no puede controlar su comportamiento y eso le impide aprender a sumar y restar	.68	
12. Debo cambiar la didáctica que he desarrollado hasta el momento en el aula para que el estudiante mejore su desempeño al sumar y restar		.83

* Sólo se reportan cargas factoriales mayores a .40

En el primer factor si bien coexisten las explicaciones externas que proporciona el docente acerca de la dificultad del estudiante (ítems 1 a 6) y las explicaciones internas (ítems, 7, 9, 10 y 11), las mayores cargas para el factor están en las explicaciones internas y externas que indagan acerca de actitudes. En el segundo factor se encuentran explicaciones internas de creencias y comportamientos centrados en el docente.

En el análisis factorial del componente reflexivo de DASAS-E se obtuvo un índice KMO de .483 y una prueba de esfericidad de Bartlett de χ^2 (15, N= 38 = 37.791, p =.001). Se seleccionaron los factores mayores a 1.0 en valor propio y se obtuvieron tres factores que explican el 75.41% de varianza. El primer factor explica el 32.46% de la varianza, el segundo factor 24.05% y el tercer factor 18.89% de la varianza (Tabla 57).

Tabla 57.

Estructura factorial de panorama reflexivo DASAS-E

	Componente		
	1	2	3
1. Me cuesta entender los problemas de sumas y restas porque mi familia no me ayuda		.77	
2. Para mí es difícil resolver problemas de sumas y restas porque me confundo cuando me explican	.43		.67
3. Me molesta resolver problemas de sumas y restas porque pienso que para otros también son difíciles	.67	-.49	
4. Me disgusta resolver problemas de sumas y restas porque esos temas no son interesantes	.68		-.48
5. Me pierdo al resolver problemas de sumas y restas porque otras personas me distraen	.52	.45	.55
6. Sé sumar y restar pero tengo dificultades para resolver problemas sobre sumas y restas	.67	-.45	

* Sólo se reportan cargas factoriales mayores a .40

En el primer factor las mayores cargas se aprecian en el componente actitudinal interno y externo que emite el niño acerca de la situación de aprendizaje, en donde también invoca dificultades en sí mismo como posible factor de dificultad.

En el segundo factor se aprecia un predominio de atribuciones externas de su desempeño, en donde la familia y otras personas juegan un papel importante.

En el tercer factor la mayor saturación se da en creencias cognitivas relacionadas con la confusión en la adquisición de conceptos.

En el análisis factorial del componente irreflexivo de DASAS-E se obtuvo un índice KMO de .722 y una prueba de esfericidad de Bartlett de χ^2 (15, N= 38 = 53.535, p =.000). Se seleccionaron los factores mayores a 1.0 en valor propio y se obtuvo un factor que explica el 45.57% de varianza (Tabla 58).

Tabla 58.

Estructura factorial de panorama irreflexivo DASAS-E

	Componente 1
1.Lo que enseña el profesor es fácil de entender	.59
2.Aprender a sumar y restar es fácil	.74
3.Asistir al colegio es divertido	.60
4. Me gusta escuchar al profesor cuando me enseña a resolver problemas de sumas y restas	.64
5. Realizo las tareas que el profesor me deja para hacer en casa	.66
6. <u>Hago las sumas y las restas que me enseñan en la escuela</u>	.80

* Sólo se reportan cargas factoriales mayores a .40

(a) Sólo se ha extraído un componente. La solución no se puede rotar

El factor obtenido muestra que el panorama irreflexivo se comporta como una dimensión unitaria que recoge el componente afectivo percibido por el niño cuando se enfrenta a situaciones de adición y sustracción.

Relación con otras variables.

Se obtuvo una correlación Spearman significativa entre el puntaje de la escala reflexiva e irreflexiva de DASAS-E $\rho(18) = .59, p = .009$, pero no hubo asociación significativa entre el total de la escala DASAS-D con alguno de los componentes de DASAS-E.

En la prueba *t* de muestras independientes para totales de DASAS-D y los componentes de DASAS-E, de acuerdo con el **sector** (oficial y no oficial) se encontraron diferencias en el puntaje del componente irreflexivo de DASAS-E ($t_{(16)} = 2.230, p = .040$) Aquí, los estudiantes del sector oficial presentan mayor promedio que los del sector no oficial, es decir, los del sector oficial tienden a reportar mayores valoraciones de contenido con respecto a los estudiantes del sector no oficial. No se encuentran diferencias significativas por curso, zona o género.

Cabe anotar que se da una asociación positiva entre el puntaje de la subescala de descontento-contento dirigido de DESAS y el puntaje del componente irreflexivo de DASAS-D ($\rho(18) = .54, p = .020$, es decir, se da una asociación entre la reacción afectiva que el estudiante despliega frente a situaciones de adición y sustracción y el componente irreflexivo que el estudiante hace de la situación de enseñanza-aprendizaje de la adición y sustracción, que se da *in situ* y en la que el estudiante se deja *afectar*, desde un punto de vista cognitivo, afectivo y conductual.

Conclusiones

La validez de contenido, la confiabilidad total de DASAS, de las secciones DASAS-D y el panorama reflexivo e irreflexivo de DASAS-E, el ajuste de estas escalas a modelos de crédito parcial y la gradación de las categorías de dichas escalas respaldan la precisión de las medidas para comprender en el caso de DASAS-D el estilo de atribución docente y seleccionar los aspectos de su reflexión que podrían dar indicios sobre la dificultad del estudiante. En el caso de DASAS-E permite conocer la comprensión explícita o reflexiva del estudiante acerca de la actividad del docente, así como su habituación irreflexiva en el plano de la conducta afectiva a las actividades de resolución de problemas de adición y sustracción planteadas por el docente.

A nivel general de la prueba, los jueces reconocieron la importancia de las interpretaciones del docente y del panorama del estudiante para la comprensión de las dificultades en la resolución de problemas relacionados con situaciones de adición y sustracción. En la sección docente, la coherencia y relevancia fueron altamente valoradas por los jueces; la claridad se dirigió en torno a especificar el papel de las creencias docentes, circunscribir el dominio de las matemáticas a la adición y la sustracción en particular, así como fortalecer las explicaciones de carácter externo.

En la subprueba de estudiante se suscitaron aportes para todas las dimensiones, particularmente en el panorama irreflexivo y en el componente actitudinal. Cabe anotar que el panorama irreflexivo presentó mayores niveles de coherencia, claridad y relevancia, en comparación con el panorama reflexivo. Es interesante este dato porque muestra la necesidad de considerar y valorar los procesos irreflexivos y afectivos que puede efectuar el estudiante en el marco de parámetros de actividad, dado que está en proceso de aprehender las nociones conceptuales de adición y sustracción.

DASAS se constituye en un instrumento bidireccional en la comprensión de las atribuciones que docente y estudiante hacen de la situación de triangulación en la que convergen, para este caso, situaciones de adición y sustracción. Los hallazgos obtenidos muestran para el caso de los docentes la tendencia a atribuir principalmente la dificultad en los estudiantes, aduciendo razones externas o internas. No obstante, hay un esfuerzo consciente de la necesidad de modificar la didáctica de manera que permita la mejora de los desempeños de los estudiantes con dificultad.

En el aspecto reflexivo de los estudiantes, reconocen que existen personas que los distraen y manifiestan la persistencia de las dificultades, aun cuando puedan tener cierto dominio de los algoritmos y procedimientos de adición y sustracción. Para el aspecto irreflexivo hay una cierta *sensibilidad* a que lo que enseña el profesor es fácil de entender, y realizo las tareas que el profesor me deja para hacer en casa.

El análisis factorial obtenido en la aplicación de validación para DASAS-D sugiere que si bien en el primer factor coexisten explicaciones externas e internas, en la atribución del docente tiene mayor peso las explicaciones internas, bien sea centradas en el estudiante o en el mismo docente, es decir, hay un reconocimiento *situado* en cuanto a la naturaleza atribucional del desempeño del estudiante. Para el componente reflexivo de DASAS-E aunque surgieron tres factores, en el primer factor el componente actitudinal tuvo mayor ponderación. En cuanto al componente irreflexivo de DASAS-E esta sección se agrupó como un bloque sólido que brinda apoyo a la consideración de factores afectivos de naturaleza irreflexiva que tienen una gran incidencia en la adquisición de conceptos formales de adición y sustracción, así como de sus dificultades asociadas.

Si bien es cierto que del estudio piloto a la aplicación de validación hay disminuciones de discriminación en algunos ítems, problemas en el ordenamiento de categorías y falta de ajuste de algunos ítems al modelo Rasch, esto puede explicarse por dos razones: La primera, el menor número de estudiantes en la aplicación de validación seleccionados de acuerdo con los criterios de selección estipulados en la Fase 1, lo que necesariamente incide en la calidad de las estimaciones. La segunda explicación consiste en que dado el carácter *situado* de todos los instrumentos empleados en la tesis, DASAS no es la excepción, puesto que la dificultad del estudiante se da en un escenario triangular asimétrico, en una dinámica que varía de institución a institución y de estudiante a otro, de modo que no necesariamente las categorías siguen un orden ascendente en estricto sentido. Esto evidencia la importancia de lo *situado* en términos comunicativos en el marco de la comprensión de la dificultad que un estudiante experimenta cuando se enfrenta a situaciones de adición y sustracción.

Por consiguiente, DASAS posibilita abordar la actividad comunicativa que gira en torno a la resolución de problemas relacionados con situaciones de adición y sustracción en una doble vía (docente-estudiante) teniendo en cuenta las características y roles de los participantes en el escenario de la triangulación asimétrica, de modo que las atribuciones del docente sobre la

actividad del estudiante y el panorama reflexivo e irreflexivo que el niño se hace de la actividad desplegada por el docente proporcionan una mirada coherente acerca de la manera como cada uno de los participantes de la triangulación da cuenta de las dificultades en adición y sustracción. Esto proporcionará información a futuro que permita reorientar continuamente los procesos pedagógicos, metodológicos y didácticos enfocados a fortalecer las creencias, actitudes y comportamientos de los estudiantes cuando se enfrentan con situaciones aditivas y sustractivas en contextos de escolarización formal.

EVIDENCIA DE VALIDEZ DEL MODELO NORMATIVO SITUADO

Introducción

El modelo de evaluación de dificultad de aprendizaje de la adición y la sustracción que se propone en este trabajo incluye como elementos esenciales una relación triangular asimétrica entre docente y estudiante que convergen en torno a objetos comunes, así como la interrelación entre los diferentes elementos del triángulo mediante la conceptualización de tres tipos de dificultad-experimentada, instituida y atribuida-, que a su vez tienen variables asociadas.

Así, la dificultad que experimenta el niño cuando está ante situaciones de adición y sustracción es susceptible de analizarse no solo desde el acierto sino también desde el descontento dirigido ante prácticas de aprendizaje matemático que cuentan con requerimientos normativos específicos y se configura alrededor de objetos, lugares y momentos inherentes a estas prácticas.

En segundo lugar, en la dificultad que el docente instituye en la planificación de las situaciones de enseñanza-aprendizaje juegan un rol importante la manera como considera el docente que el niño percibe problemas específicos de adición y sustracción, así como el nivel de dificultad que el docente le otorga a dichas tareas, que se expresa a su vez en el grado de esfuerzo que le implica al niño la resolución de las actividades.

En tercer lugar, la dificultad atribuida teniendo como trasfondo las situaciones de adición y sustracción es un proceso comunicativo de doble vía, en donde es preciso considerar tanto las explicaciones que proporciona el docente sobre la situación de enseñanza-aprendizaje de las operaciones aritméticas, como la manera en que el estudiante se hace un panorama de dicha situación, mostrando reacciones de carácter reflexivo e irreflexivo.

En ese orden de ideas, y a fin de analizar la interrelación de estas variables en la comprensión de la dificultad es importante elaborar un *mapa de la situación* en donde se esbozan las variables que subyacen a los tres tipos de dificultad y las relaciones hipotéticas entre tales variables. Esto a su vez conducirá a plantear unos perfiles hipotéticos de la normatividad asociada al aprendizaje de la adición y sustracción en los primeros años de escolaridad. Este mapa se presenta en la Figura 34.

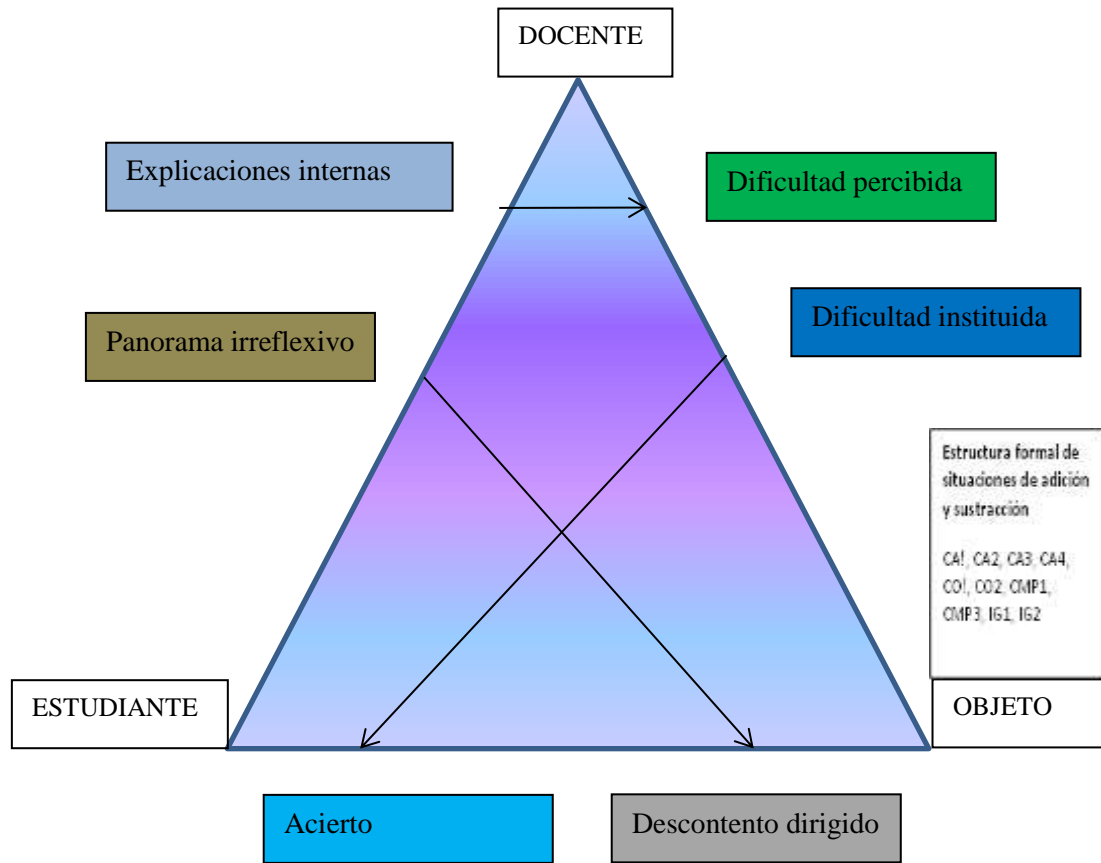


Figura 34. Mapa de la situación

En este mapa de la situación se aprecian dos variables por cada instrumento y sus relaciones hipotéticas. Así se postula una primera relación entre el panorama irreflexivo y el descontento dirigido, en donde se plantea que los niños que experimentan alto descontento hacia las situaciones de adición y sustracción tienen una disposición general a reaccionar negativamente en la interacción con el docente.

Sfard (2001, 2012) menciona que el aprendizaje matemático es una *iniciación* en el discurso matemático, es decir, iniciación en una forma especial de comunicación conocida como matemática, que significa "llegar a dominar un discurso que sea reconocido como matemático por interlocutores expertos" (Kieran, Forman & Sfard, 2001, p. 5). Tal discurso matemático tiene como características el uso de palabras clave (ej, tres, resta, resultado), mediadores visuales (números y gráficas) y reglas distintivas de operación. En ese sentido, en el marco de la triangulación asimétrica, en donde el niño inicia su proceso de enculturación,

cuando experimenta desajuste (descontento dirigido) ante prácticas matemáticas con una estructura normativa y unos requerimientos que no reconoce o no había enfrentado con anterioridad, puede desplegar en principio una reacción afectiva de apreciación en la acción (Rietveld, 2008) en la que inicialmente el niño puede desplegar perplejidad o desconcierto en la interacción con el docente, y posteriormente puede encauzar sus esfuerzos a disminuir el nivel de insatisfacción y aumentar su ajuste a los requerimientos e infraestructura normativa de la tarea.

En la segunda relación (dificultad percibida y explicaciones internas), y teniendo en cuenta que en la dificultad percibida el sentido de la variable, en consonancia con el sentido del descontento, va de situaciones que en opinión del docente, el estudiante percibe como muy difíciles (1) a muy fáciles (5), se hipotetiza que a medida que el docente considera que el estudiante percibe la situación como fácil, el docente va a tender a explicar el desempeño del estudiante en función de los actores que convergen en la situación de triangulación (explicación interna), es decir, el estudiante percibirá los problemas como fáciles porque tiene dominio del tema y porque el docente en su quehacer e interacción con el estudiante lo conduce a la adquisición de los conceptos de adición y sustracción.

Esto está vinculado con la teoría atribucional de Weiner (1986) en donde el éxito en las tareas es atribuible a causas como la capacidad y el esfuerzo del individuo, y el fracaso se atribuye principalmente a elementos externos que trascienden el control del individuo (Bertoglia, 2005; del Valle, 2013). En ese sentido Weiner formuló una interpretación atribucional de 8 tipos de emociones (Gómez, 2000, p. 45), que es pertinente para comprender las atribuciones reflexivas que el docente hace del alumno en las situaciones de adición y sustracción: (a) Ira: Resultados negativos y atribución de ausencia de control; (b) Culpabilidad: Resultado negativo, con atribución de causas controlables y falta de esfuerzo propio; (c) Vergüenza: Resultado negativo, con atribución de causas controlables, pero con falta de capacidad; (d) Desesperanza: Resultado negativo y atribución de causas estables; (e) Orgullo y autoestima positiva: Resultado positivo y atribución causal interna; (f) Autoestima negativa: Resultado negativo y atribución causal externa; (g) Compasión: Ausencia de control; y (h) Gratitud cuando se atribuye a la conducta del otro el carácter de volitiva en búsqueda de un beneficio para otro.

En la relación entre dificultad instituida y acierto, se hipotetiza que si el docente propone tareas que requieran alto nivel de complejidad para el estudiante, esto podría redundar en bajos niveles de desempeño en tareas de adición y sustracción sobre todo si el niño presenta fallos en ajustarse a los requerimientos normativos que subyacen a las prácticas de aprendizaje matemático. En ese sentido, autores como Godino et al. (2003) mencionan que “es conveniente elaborar una unidad didáctica para un alumno "promedio", que contemple actividades de refuerzo para los alumnos con más dificultades y también actividades de ampliación” (p. 114). Herrera, Montenegro y Poveda (2012) mencionan que “la matemática escolar se presenta generalmente como algo esencialmente estático, sujeto a pocos cambios”; este pensamiento tradicionalmente promueve la memorización de procesos matemáticos para la solución de problemas, más no su comprensión” (p. 266). Si en la asignación de dificultad en las tareas matemáticas por parte de los docentes se ignora los saberes informales de los alumnos, su participación en prácticas matemáticas y su nivel de apropiación de tales saberes, es muy probable que el estudiante presente bajos desempeños en tareas formales relacionadas con adición y sustracción.

En el marco del modelo normativo situado, resulta esencial conocer el papel de la intención pedagógica, el eje atencional y el material didáctico en la caracterización de la normatividad situada en las prácticas de aprendizaje matemático, porque en primer lugar la manera como se configuran las situaciones, esto es, la infraestructura normativa (Okuyama et al., 2011), incide en el triángulo asimétrico como un todo integrado. En segundo lugar, Godino et al. (2003) ilustran que la planeación de unidades didácticas debe considerar estos elementos: Objetivos y contenidos del currículo de primaria, los tipos de problemas que son el campo de aplicación de los contenidos matemáticos seleccionados, materiales y recursos disponibles para el estudio del tema, el conocimiento de los errores y dificultades en el estudio del tema y los criterios metodológicos y de evaluación.

Teniendo en cuenta los elementos que forman parte del mapa de la situación, una de las preguntas que surge es cómo se da la interrelación entre acierto y descontento dirigido?. Para ello se plantean unos perfiles hipotéticos de la normatividad asociada vinculada con el aprendizaje de la adición y sustracción en los primeros años de escolaridad. Por consiguiente, el interjuego acierto-descontento genera 4 perfiles (Figura 35). En términos normativos, el *ajuste* entre el desempeño cognitivo y la reacción afectiva tienen lugar cuando el estudiante

tiene un adecuado desempeño en pruebas de competencia y expresa contento dirigido hacia dichas situaciones, mientras que cuando hay bajo desempeño suele acompañarse de alto descontento dirigido hacia las tareas.

Por su parte, hay *desajuste* cuando el estudiante aun si tiene altos niveles de acierto manifiesta alto descontento hacia las tareas, lo que ocasiona aburrimiento y desgano en el estudiante. También hay desajuste cuando el estudiante teniendo un bajo nivel de acierto muestra alto contenido dirigido hacia la tarea. Estos dos últimos perfiles pueden proporcionar información a docentes para el diseño de estrategias adaptadas y consistentes con las necesidades cognitivas y afectivas de los estudiantes a su cargo.





	Contento	Descontento
Acierto		
Fallo		

Figura 35. Perfiles hipotéticos interjuego acierto-descontento en DESAS

Por consiguiente, el mapa de la situación y los perfiles de acierto-descontento constituyen un insumo esencial para la obtención de una primera evidencia de validez del modelo normativo situado, en donde se analizan las relaciones hipotéticas que se plantean en el mapa a partir de la integración de información de todas las fases.

Este estudio tiene como objetivo obtener una primera evidencia de validez del modelo normativo situado a través de análisis adicionales que integran la información recogida sobre las estimaciones de la dificultad de las fases anteriores. Las evidencias de validez se examinan en dos sentidos: (a) *Relaciones internas en sentido teórico, mediante prueba de hipótesis acerca de la estructura interna del modelo*, con los datos provenientes de los 20 estudiantes colombianos del estudio piloto y los 18 de la aplicación de validación; y (b) *Capacidad de diferenciación del modelo en la identificación de estudiantes con dificultad en comparación con el modelo tradicional*, contrastando el grupo de participantes y el grupo de comparación de la Fase 1 de la tesis.

Procedimiento

Una vez esbozado el mapa de la situación y los perfiles de acierto-descontento, se procedió a examinar las interrelaciones planteadas en dicho mapa a partir de los datos provenientes de los 20 estudiantes colombianos del estudio piloto y los 18 de la aplicación de validación de DESAS. Esta muestra tiene en común que todos son estudiantes con dificultad: Los del estudio piloto fueron seleccionados por los docentes y los 18 restantes identificados con DESAS.

Luego de recolectar la información de las aplicaciones de los instrumentos tanto a estudiantes como a docentes, se procedió a sintetizar la información en una base de datos global que recogiera las evidencias obtenidas en todos los instrumentos y permita así analizar el modelo situado en el conjunto total de datos.

Para las variables material didáctico, eje atencional e intención pedagógica del instrumento DISAS se procedió a hacer una recategorización en términos de preferencia, de manera que de los 10 problemas de cambio, combinación, comparación e igualación evaluados en DISAS, si el docente seleccionaba en 6 o más ocasiones una misma opción, se codificaba esa opción como la preferida por los docentes, con independencia de la estructura semántica del problema. Por su parte, si una opción es seleccionada en menos de 6 ocasiones, lo anterior sugiere que los docentes escogen el material didáctico, el eje atencional o intención pedagógica en función de la situación de enseñanza-aprendizaje.

El plan de análisis se adelantó en dos etapas:

1. Para el *análisis de la estructura interna del modelo* se realizaron correlaciones Spearman entre las variables hipotetizadas en el modelo. Se calcularon correlaciones Eta entre las variables esbozadas en el modelo y las variables de intención pedagógica, material didáctico y eje atencional. La correlación Eta indica la proporción de la varianza de la variable cuantitativa explicada por la variable cualitativa, y se reportaron las correlaciones mayores a 0.30.

Posteriormente se realizó un análisis de componentes principales categórico con método de normalización simétrico, con rotación Varimax, donde se tomaron como variables de análisis en DESAS el puntaje total de acierto y el puntaje en la subescala de descontento-contento dirigido. De DISAS se tomó el puntaje de dificultad percibida y de dificultad instituida, y de

DASAS las explicaciones internas del docente y del panorama irreflexivo de DASAS-E. Como variables suplementarias se introdujeron las variables material didáctico, eje atencional e intención pedagógica, del instrumento DISAS.

La selección de las variables para realizar el análisis obedece a dos criterios: En primer lugar, considerando el pequeño tamaño de muestra tanto en el estudio piloto del modelo como en la validación del mismo ($n = 20$ y $n = 18$, respectivamente) se escogen de cada instrumento los puntajes totales. En segundo lugar, las variables escogidas y sus interrelaciones tienen como sustento evidencias de validez provenientes de las diferentes fases.

2. Para el análisis de **la capacidad de diferenciación del modelo en la identificación de estudiantes con dificultad**, se hizo diferencias de medias de acierto y de descontento entre tres grupos: (a) Grupo general de participantes vs grupo de comparación conformado por estudiantes seleccionados por el docente como poseedores de dificultad; y (b) Estudiantes con alto desempeño en la prueba diagnóstica del MEN vs. estudiantes con bajo desempeño en la prueba (menos de dos aciertos). Para estos grupos de contraste se hace una breve caracterización en términos de descontento dirigido y acierto.

En cuanto a la estimación de la dificultad mediante las Evaluaciones Diagnósticas, se obtuvieron correlaciones de Pearson entre el puntaje obtenido por el estudiante en su respectiva Evaluación Diagnóstica según grado, y el puntaje obtenido en DESAS.

Posteriormente se hizo un primer ejercicio hipotético de identificación de estudiantes con dificultad, empleando la muestra total ($n = 216$) mediante el uso del criterio del percentil 10, en consonancia con Powell y Driver (2015) y se compararon los porcentajes de identificación obtenidos con la escala de aciertos de los ítems en DESAS, el descontento dirigido y la evaluación diagnóstica del MEN.

Resultados

Análisis de la estructura interna

Se encontraron correlaciones entre el panorama irreflexivo y el descontento dirigido ($r = .488$, $p = .002$), así como entre explicaciones internas y dificultad percibida ($r = .347$, $p = .033$), en concordancia con las relaciones propuestas en la Figura 34. No se encontró asociación entre el acierto y la dificultad instituida y se encontró una correlación negativa entre la dificultad percibida y la dificultad instituida ($r = -.347$, $p = .033$), es decir, a medida que

el docente considera que el niño percibe la situación como muy difícil les asigna tareas que requieran un esfuerzo inmenso.

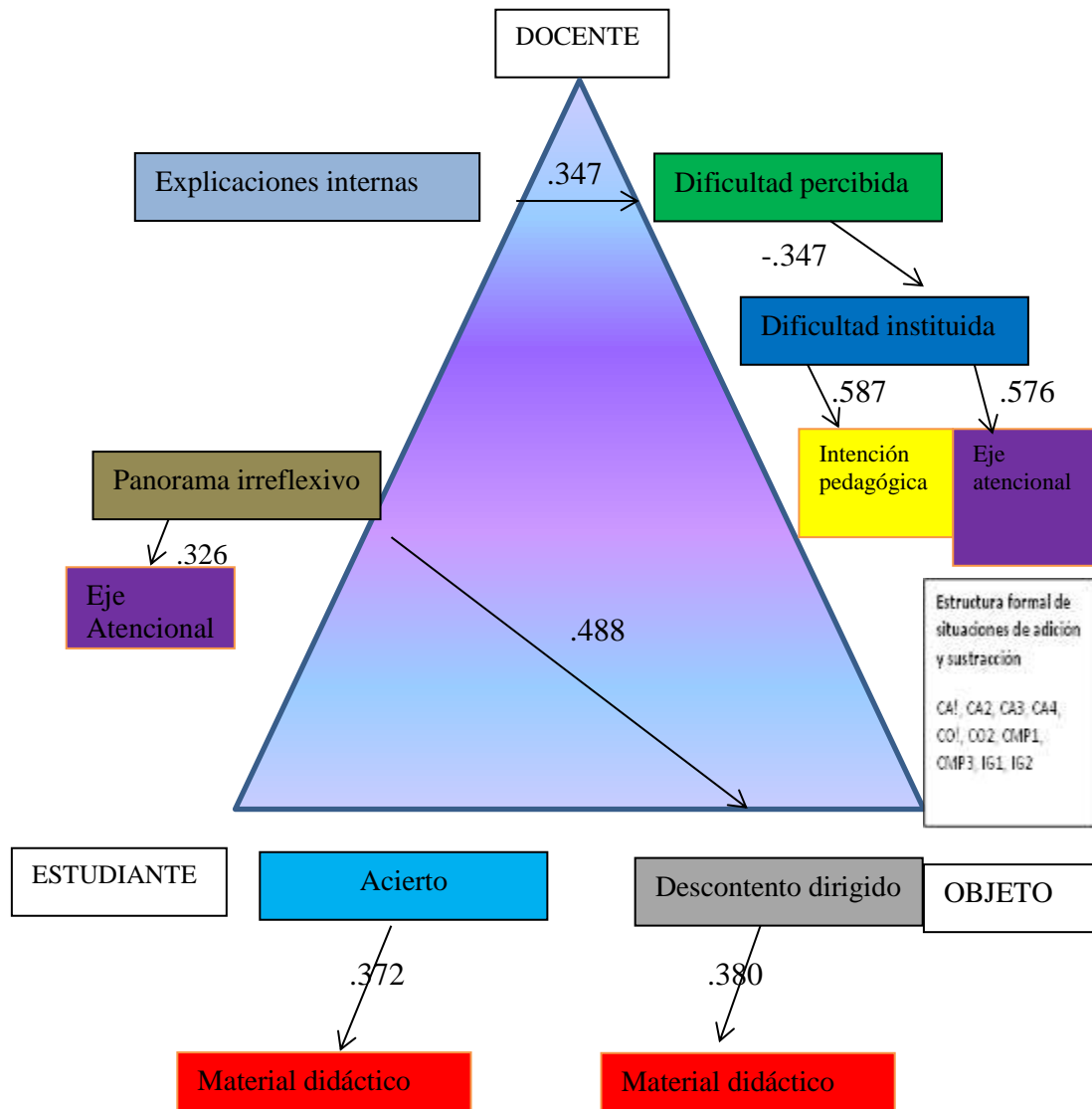


Figura 36. Relaciones y asociaciones encontradas entre las variables

La Figura 36 ilustra las asociaciones encontradas entre las variables a través de las correlaciones. Las variables relacionadas se vinculan con flechas, y en las variables nominales (material didáctico, eje atencional e intención pedagógica) se presentan sus valores de correlación Eta con las variables del modelo.

De acuerdo con los resultados de las correlaciones Eta, la elección de material didáctico de carácter práctico como juegos y regletas explica un porcentaje importante del desempeño en DESAS y del contenido dirigido. En cuanto al eje atencional el enfoque en objetos concretos presentes en el entorno inmediato es la opción predilecta por los docentes en las situaciones de adición y sustracción; cuando los niños se encuentran en situaciones que tienen tales elementos, exhiben una disposición irreflexiva a reaccionar positivamente al interactuar con el docente en dichas situaciones. En la intención pedagógica la opción “sin preferencia específica” es la que más se asocia con la dificultad que instituye el docente. Esto cuenta como un sustento importante en el sentido que la intención pedagógica se da en función del tipo de problema de adición, es decir, es *situada*.

El modelo con el análisis de componentes principales categóricos obtenido con los 38 estudiantes permitió identificar dos dimensiones en el modelo rotado: La primera dimensión, con un Alpha de Cronbach de .839 explica el 17.016% de la varianza. En la segunda dimensión se obtuvo un $\alpha = .830$ y un 15.808% de la varianza. Así, el modelo total tiene un Alpha de Cronbach de .591 y explica el 32.824% de la varianza.

La primera dimensión que puede llamarse *enculturación formal*, se caracteriza por altas saturaciones de la escala de aciertos de DESAS (.742), la dificultad instituida (.682) y el eje atencional de DISAS (.360). Así, en este factor se da una confluencia entre el acierto y la gradación de la dificultad.

Una descripción en detalle de las cuantificaciones de las categorías de cada variable en la dimensión según las coordenadas del centroide revela tendencias importantes.

La enculturación formal puede caracterizarse por puntajes de DESAS que oscilan entre 17 y 18 aciertos índices de dificultad instituida que se acercan a la opción “mucho esfuerzo” (puntajes de 39 puntos en la escala, con un valor de coordenada de 2.345), y en eje atencional la mayor coordenada se ubica en la opción “sin preferencia específica”, lo que sugiere que el eje atencional es escogido por los docentes en función de la estructura semántica y la configuración del problema de adición y sustracción. Cabe anotar que la variable de intención pedagógica tiene una saturación negativa en este factor (-.294) y la opción que carga allí es la de “registro y representación de problemas”.

La segunda dimensión puede caracterizarse de modo general en términos de un continuo de *entusiasmo-apatía por el aprendizaje*. Se caracteriza por altas saturaciones de la escala de

descontento dirigido (.894), el panorama irreflexivo de DASAS-E (.808) y las explicaciones internas de DASAS-D (.515).

Por coordenadas del centroide, el mayor valor se da cuando el descontento dirigido alcanza el valor máximo de 81, el panorama irreflexivo alcanza un valor de 17, tendiente a contento, y las explicaciones internas tienden a un puntaje de 23. Cabe anotar que la variable de material didáctico tiene una saturación negativa en este factor (-.630) y la opción que carga allí es la de “el material que se encuentra en el aula”.

Lo anterior indica que en la dimensión se da altos niveles de contenido dirigido en conjunción con una disposición general a reaccionar irreflexivamente de manera favorable en la interacción con el docente cuando está en situaciones de adición y sustracción. Asimismo, coexiste el predominio de explicaciones internas centradas en el docente y en el estudiante.

En el Anexo 29 se muestran las dimensiones junto con las coordenadas de categorías de las variables en juego. Una visualización de los puntos de objeto etiquetados por curso, permite observar las tendencias de las dimensiones (Figura 37).

Se aprecian varios aspectos que revisten gran interés teórico y que constituyen un apoyo a los perfiles propuestos de acierto-descontento en la Figura 35: En el primer cuadrante se ubican los estudiantes con alto acierto y alto contenido; en el segundo cuadrante están los estudiantes con bajo acierto y alto contenido dirigido; en el tercer cuadrante se ubicarían los estudiantes con bajo acierto y alto descontento dirigido y en el cuarto cuadrante se ubican estudiantes con alto descontento dirigido y alto acierto.

Se observa por consiguiente que la mayor parte de los estudiantes se ubica en los cuadrantes 2 y 3, puesto que son estudiantes que presentan dificultades en adición y sustracción.



Figura 37. Localización de los individuos en las dimensiones de enculturación formal y de entusiasmo-apatía por el aprendizaje

Capacidad de diferenciación del modelo

Si se toma el grupo total de participantes vs grupo de comparación conformado por estudiantes seleccionados por el docente como poseedores de dificultad, la prueba t de muestras independientes para aciertos y descontento dirigido indica diferencias en acierto ($t_{(214)} = 3.305$, $p = .001$), en donde el grupo de participantes tuvo una media mayor que la del grupo de comparación (13.94 y 10.58, respectivamente). Si bien no existen diferencias significativas en descontento, se observa en la Figura 38 que en el grupo de participantes hay una mayor concentración de valoraciones positivas de contenido dirigido, en el grupo de comparación existen valoraciones de contenido que oscilan entre 50 y 80, es decir, son estudiantes que se ubicarían en el cuadrante 2 de la Figura 37.

La prueba t de muestras independientes para aciertos y descontento dirigido para grupos con altos y bajos desempeños en la evaluación diagnóstica del MEN indica diferencias en acierto ($t_{(214)} = -4.761$, $p = .000$), en donde el grupo con alto desempeño en la evaluación del MEN tuvo una media mayor que la del grupo con bajo desempeño (17.52 y 12.63, respectivamente). Si bien no existen diferencias significativas en descontento, se observa en la Figura 39 similar tendencia que en la Figura 38, esto es, una concentración de estudiantes en el

cuadrante 2 de acierto-descontento. Sin embargo, a nivel general el 84,72% de los estudiantes tiene un desempeño bajo en las evaluaciones tradicionales del MEN.

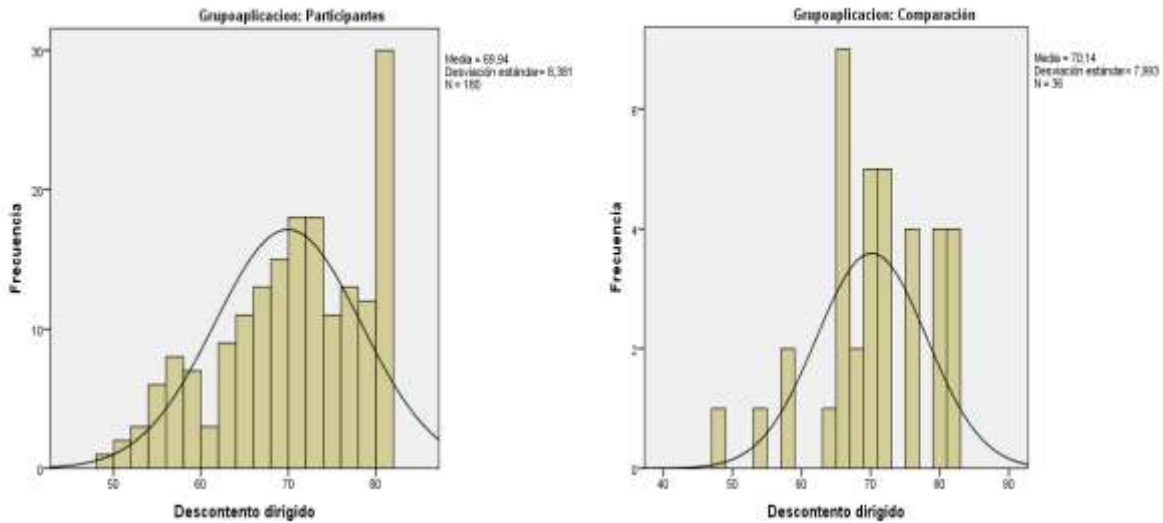


Figura 38. Distribución del descontento dirigido en los grupos de participantes y de comparación

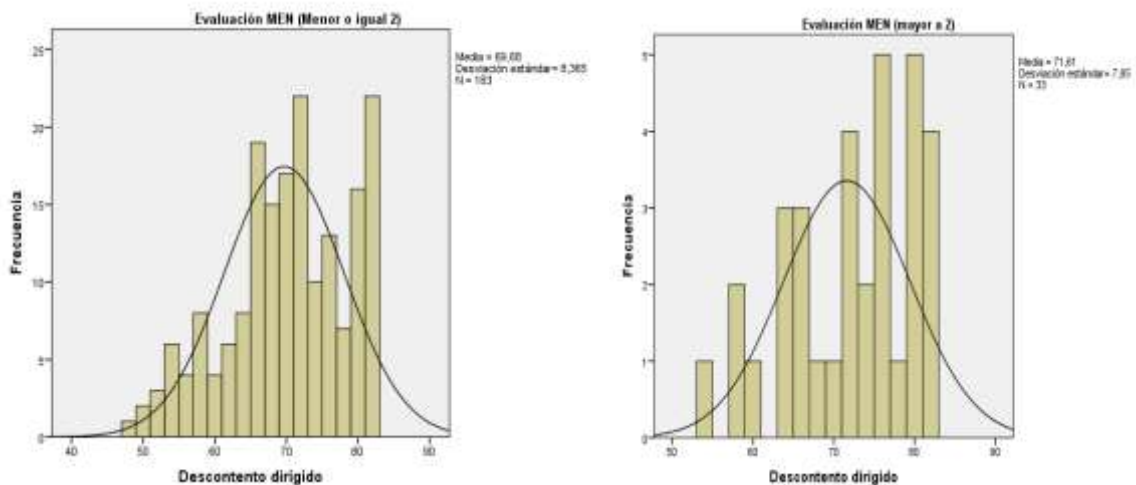


Figura 39. Distribución del descontento dirigido en los grupos conformados por desempeño en MEN

A nivel de asociación, para grado segundo hay una correlación de Pearson de .587 ($p = .000$) entre la evaluación diagnóstica y la prueba DESAS. En grado tercero ésta fue de .252, ($p = .032$) y en grado cuarto hay correlación significativa de .250 ($p = .039$). Aunque

significativas, éstas últimas dos correlaciones son bajas. Además, no existen diferencias de medias entre el grupo de comparación y el de participantes en la prueba diagnóstica para los tres grados.

Se encontró diferencia significativa en la evaluación diagnóstica para grado cuarto entre colegios oficiales y no oficiales ($t_{(67)} = -3.02$, $p = .003$), siendo el sector no oficial el que presenta mejor desempeño en la prueba diagnóstica del MEN.

Si se toma como criterio de identificación el **percentil 10**, en la subescala de acierto de DESAS se obtienen 25 estudiantes (11,57%) con puntajes iguales o inferiores a este percentil. De este grupo, 4 estudiantes tienen puntaje en la subescala de descontento-contento entre 48 y 57, y 2 estudiantes reportan contenido dirigido hacia todos los ítems de la prueba (puntaje 81). Los demás estudiantes presentan valoraciones de descontento-contento en un rango de 61 a 79.

Si se toma la subescala de descontento-contento dirigido de manera independiente, se identifican 23 estudiantes (10,65%) con puntuaciones iguales o inferiores al percentil 10 (57), y 26 estudiantes (12,03%) que registran el máximo contenido dirigido.

En el caso de las Evaluaciones Diagnósticas, se obtienen 42 estudiantes (19,4%) que no acertaron ningún ítem en dicha Evaluación.

Estos resultados conducen a tres resultados importantes:

En primer lugar, si bien las Evaluaciones Diagnósticas dan un alto porcentaje de estudiantes con dificultad, es una evaluación enfocada en logro cognitivo y no proporciona información acerca de la reacción afectiva de los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones de adición y sustracción.

En segundo lugar, la subescala de descontento-contento dirigido, a diferencia de la subescala de acierto, NO es una escala de *competencia* de los sujetos en dominios matemáticos específicos, sino que permite *caracterizar y especificar* la naturaleza de los fallos reportados en la subescala de aciertos, escala que analiza la competencia en la adquisición de operaciones aritméticas de adición y sustracción.

Como tercer aspecto, la subescala de descontento-contento dirigido NO puede analizarse de manera independiente del acierto. Así, la subescala de descontento no debe tomarse como criterio único para la identificación de dificultad sino debe hacerse una previa identificación de dificultad mediante un criterio de competencia, como es el acierto, y una vez

identificados los estudiantes con algún tipo de dificultad, ilustrar el papel del descontento-contenido dirigido en dicha población objetivo.

Teniendo en cuenta los resultados de esta fase se puede afirmar que el modelo normativo situado cuenta con dos importantes evidencias de validez: La primera proveniente de la estructura interna, en la cual se comprobaron las hipótesis sobre relaciones entre panorama irreflexivo-descontento dirigido, explicaciones internas-dificultad percibida y acierto con dificultad instituida.

El análisis de componentes principales categóricos ilustró las variables en el marco de dos dimensiones (enculturación formal y entusiasmo-apatía por el aprendizaje), ejes ortogonales que a su vez constituyen soporte para la formulación de los perfiles de acierto-descontento de la Figura 35.

La segunda evidencia descansa en la capacidad de identificación del modelo normativo situado en su componente de DESAS empleando diferentes criterios de comparación; para los criterios empleados se dan diferencias en el acierto mas no en descontento dirigido, lo que constituye un respaldo a la hipótesis del descontento dirigido como una variable que permite complementar y caracterizar el acierto, de manera que los aspectos afectivos y de ajuste ante las situaciones de adición y sustracción en conjunción con el desempeño en prácticas de aprendizaje matemático, además de contribuir a una mejor identificación de los estudiantes con dificultad, puede dar información a los docentes para cualificar los aspectos pedagógicos, didácticos y de evaluación de los aprendizajes en el marco de triangulaciones asimétricas en las que se da el aprendizaje de conceptos formales de adición y sustracción en los primeros años de educación básica primaria.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Alicia estaba sentada en un banco de piedra del parque, con el libro de matemáticas abierto en el regazo.

-Vaya, creo que me he quedado traspuesta mientras estudiaba-dijo la niña.

El guarda echó una ojeada al libro y comentó: -No me extraña, si estabas estudiando matemáticas, con lo aburridas que son.

-¿Aburridas? ¡Nada de eso, son muy divertidas! – exclamó Alicia-, A ver, piensa un número de tres cifras... (Frabetti, 2007, p. 132)

El objetivo general de esta tesis consistió en proponer un modelo de evaluación de las dificultades de aprendizaje de la adición y la sustracción, que considere los aspectos normativo-situados que no han sido abordados por los modelos de evaluación tradicional, a partir de diferentes fuentes de evidencia de validez.

Este modelo de evaluación descansa en tres supuestos fundamentales: (a) la interacción que se da entre el niño y otras personas que comparten la práctica con él o se la enseñan activamente, la cual implica actividades en las que triangulan asimétricamente dos individuos que coinciden sobre un estímulo que corresponde a alguna configuración física del entorno inmediato a los participantes (Davidson, 2001; Duica 2014); (b) las normatividades que gobiernan cada situación aun cuando no sean enunciadas explícitamente por los participantes; en donde resulta de interés los patrones de actividad que se aprenden como ligados a una infraestructura que comúnmente hace parte de cada práctica cultural; y (c) los estados mentales del infante suscitados por aquello que esté presente durante su participación en cada práctica. En esa medida, tanto las respuestas del niño como sus reacciones afectivas constituyen información sobre su aprendizaje porque hacen posible evaluar si su orientación concuerda con los estándares aceptados para dicha práctica.

El desarrollo de estos elementos en el modelo lleva a conceptualizar la adición y la sustracción como un conjunto de prácticas sociales (Hughes, 1987, Lave, 1991, Kozulin, 2000) en las que el niño y sus pares o figuras de autoridad (padres, docentes, otros familiares) convergen en situaciones cuyos requerimientos normativos exigen *operar* con elementos de diferente complejidad, a fin de satisfacer exigencias personales, culturales o institucionales.

Desde esta perspectiva situada, la dificultad en el aprendizaje de la adición y la sustracción se ha definido como *fallos en el acceso y reconocimiento de la naturaleza espacio-temporal de las situaciones matemáticas, los objetos involucrados en dichas situaciones y la normatividad que subyace a las mismas*. La unidad de análisis es la situación de enseñanza y de aprendizaje en su conjunto, entendida como una interacción entre individuos que realizan actividades en un entorno común.

Esto condujo a postular un modelo **integrado** de evaluación de la dificultad, que considera el carácter relacional de la triangulación. Así, las situaciones de enseñanza y de aprendizaje de la adición y la sustracción pueden abordarse desde tres perspectivas que implican a su vez tres tipos de dificultad: (a) La dificultad experimentada por el estudiante cuando se encuentra en prácticas de aprendizaje matemático, que comportan una infraestructura normativa específica, y que le exigen la solución de problemas aditivos que tienen sus propios requerimientos en cuanto a estructura; (b) La dificultad instituida por el docente cuando diseña pedagógicamente y didácticamente situaciones de enseñanza y aprendizaje dirigidas a estudiantes con dificultad, en función de sus fortalezas y debilidades; (c) La dificultad atribuida por docentes y estudiante cuando convergen en la situación de enseñanza y de aprendizaje de las operaciones aritméticas (Figura 7).

Para lograr el objetivo general de la tesis se recorrió un camino que implicó cuatro fases, en consonancia con los objetivos específicos de la investigación. En las tres primeras fases el diseño, desarrollo y búsqueda de evidencia de validez de instrumentos de evaluación, fueron aspectos cruciales para configurar paulatinamente cada tipo de dificultad y así la propuesta de modelo situado junto con sus evidencias de validez (Fase 4).

Uno de los aspectos más enriquecedores del proceso de construcción de los tres instrumentos y de la validación por jueces de DISAS y DASAS fue el trabajo con los jueces expertos tanto de Colombia como de Perú porque además de intercambiar saberes relacionados con el abordaje de la adición y sustracción permitió obtener una visión interdisciplinaria e intercultural de aproximación a la comprensión de las situaciones de enseñanza y de aprendizaje de estas operaciones y cómo docentes, estudiantes, y saberes matemáticos podrían engranarse en el entramado de la triangulación asimétrica en la que se sustenta el modelo situado.

La primera fase tuvo como objetivo desarrollar un instrumento para estimar la dificultad experimentada por el niño en la ejecución de situaciones de aprendizaje cotidiano de operaciones aritméticas de adición y sustracción, bajo el enfoque situado. En ese sentido el instrumento de dificultad experimentada representa un primer paso para comprender la manera como los niños interactúan con saberes matemáticos, en el marco de prácticas de aprendizaje específicos. Esto conduce a una serie de reflexiones interesantes desde el punto de vista teórico, metodológico, pedagógico y didáctico.

En primer lugar, la estructura semántica de las operaciones aritméticas encierra unos significados en función de cómo se aborde dicha operación, bien sea en términos de unión de conjuntos disjuntos, transformación de estados, comparación o igualación de cantidades, y esa estructura matemática incide de manera importante en el acierto a los ítems de DESAS. Así, la dificultad de los ítems de DESAS es consistente con lo reportado en la literatura en el sentido que los problemas de cambio son los problemas más resueltos y los de igualación los menos resueltos (Carpenter et al., 1981; Nesher et al., 1982), y que los problemas de sentencia no canónica, así como aquellos que aun cuando sean expresados en términos aditivos, requieren para su resolución estrategias de sustracción revisten mayor dificultad que los problemas de sentencia canónica (Maza, 2001). En el estudio piloto como en la aplicación de validación el ítem de Comparación 1 en la práctica de Adición de números naturales es uno de los que presenta mejor capacidad de discriminar entre niveles de dominio.

En segundo lugar, las prácticas matemáticas son un aspecto crucial en el proceso de enculturación formal, en donde las prácticas de investidura y formalizadas son las que presentan un mayor acierto en comparación con las corporeizadas. Una de las prácticas que hizo mayor diferenciación en cuanto a aciertos fue la de monedas, en la que se presentaron diferencias de acierto por curso (desempeño creciente en función de los grados) y zona en la aplicación de validación (Figuras 15 y 17). Incluso aquí se dio un detalle muy interesante, que es el mayor contenido dirigido hacia la práctica de monedas entre estudiantes de la zona periférica y rural en comparación con los estudiantes de la zona urbana (Figura 16).

En ese sentido, podría pensarse que la participación del niño en actividades cotidianas relacionadas con el manejo del dinero desde temprana edad, como la compra y venta de objetos, el conocimiento de la denominación de billetes y monedas, manejo de estados de cuentas, el “debe” y el “haber” pueden contribuir a un adecuado tránsito entre saberes

informales y formales (Carraher & Schliemann, 2002). Díaz de León (2004) en su investigación sobre la suma y resta en contextos rural y urbano indica al respecto que “Las competencias manipulativas y las secuencias de conteo se desarrollan en el medio rural debido, posiblemente, a las interacciones sociales, la regulación social, las situaciones cognitivas cotidianas y las negociaciones culturales” (p. 409) (Énfasis agregado).

En tercer lugar, y como uno de los aportes más esenciales de esta investigación es el papel del descontento dirigido no sólo en la dificultad experimentada sino en la manera como el niño se hace un panorama irreflexivo de la situación. Si bien en un principio se empleó la subescala de descontento-contento dirigido en 5 categorías, las aplicaciones piloto y validación de DESAS mostraron la necesidad de recodificar la escala en tres categorías (Figura 9) para hacer una gradación más fina de la reacción afectiva que se suscita cuando el estudiante se enfrenta a situaciones en las que puede presentar dificultad para ajustarse a los requerimientos normativos de la situación.

El descontento dirigido estuvo muy ligado tanto a la estructura de los problemas, de manera que en los problemas considerados fáciles el niño experimenta mayor contento y en aquellos cuya estructura semántica es más compleja el descontento es mayor. Las estructuras factoriales de las Tablas 19 a 21 constituyen apoyo fundamental a la existencia de dos factores, el primer factor se agrupa las valoraciones del descontento-contento y el segundo factor recoge el componente de aciertos, donde cada uno aporta información diferente e importante para la evaluación de las dificultades de aprendizaje de la adición y la sustracción.

Recuérdese que hablar de descontento no es una reacción emocional difusa de agrado o desagrado de corta duración, es una reacción afectiva que propulsa, que promueve el aprendizaje en tanto insta al estudiante a movilizar sus recursos, bien sea cognitivos, afectivos y comportamentales, en aras a resolver el problema aritmético propuesto por el docente o por alguien experto que ya tiene un mayor dominio de la práctica. Otras evidencias a favor del descontento dirigido se encuentran en los análisis factoriales (Tabla 19 a 21), donde el descontento es el factor que explica el mayor porcentaje de varianza, y asimismo se asocia con el panorama irreflexivo del estudiante frente a la situación de enseñanza y de aprendizaje.

Precisamente hay dos elementos muy llamativos del descontento dirigido en el marco de la comprensión de las dificultades de la adición y la sustracción, y es ese carácter irreflexivo y situado en el que cuando el estudiante percibe un desajuste normativo ante una situación

concreta despliega una reacción afectiva dirigida a tal situación. Esto sugiere que el descontento es un aspecto irreflexivo que *modula* e interviene en la manera como el niño aborda las situaciones de adición y sustracción, orientando y dirigiendo sus despliegues en orden a ajustarse a aquella situación que puede implicar cambio en la forma del problema o en el tipo de práctica cultural en la que tiene lugar.

Lo anterior reviste gran importancia a nivel teórico porque a diferencia de conceptualizaciones previas de la emoción de la década de los ochenta y noventa, donde la emoción en matemáticas se trabajaba como respuestas fisiológicas en términos de activación (Gómez, 2000), pensar en la manera como el descontento dirigido tienen lugar en el aprendizaje de ciertos problemas que comportan una estructura semántica particular y que pueden tener como trasfondo prácticas culturales específicas es un aporte para la educación matemática y la psicología educativa, en la medida que enriquece y complementa el análisis de los aspectos cognitivos asociados al aprendizaje de la adición y sustracción, así como a sus dificultades asociadas.

La segunda fase de la investigación tuvo como objetivo desarrollar un instrumento para establecer la dificultad instituida por los docentes en la configuración de las situaciones didácticas relacionadas con el aprendizaje de la adición y la sustracción dirigidas a los estudiantes identificados con dificultad experimentada en la Fase 1. En esta fase resultaron de gran interés dos aspectos fundamentales:

En primer lugar, un acercamiento preliminar a la manera como algunos docentes suramericanos configuran didácticamente las situaciones de enseñanza y aprendizaje de la adición y la sustracción. Lejos de ser éste un estudio intercultural, las cosmovisiones en torno a los materiales didácticos, a las estrategias, a la intención pedagógica que subyace a la planeación de problemas matemáticos relacionados con adición y sustracción, todo ello proporciona información que puede enriquecer los procesos de praxis y de reflexión didáctica en el aula. Si bien por limitaciones muestrales y de aplicación sólo fue posible recolectar información docente de dos países, una fuente potencial de investigación sería la realización de estudios interculturales donde sea posible analizar la manera como los docentes de diferentes latitudes estructuran y planifican las situaciones de enseñanza de las operaciones aritméticas.

En segundo lugar, coexisten varios hallazgos de interés: (a) la dificultad instituida se da en función de la estructura del problema y de la creencia del docente acerca de la dificultad que percibe el estudiante con un problema específico. Así, en problemas que el docente considera son fáciles para el estudiante, tiende a asignar actividades que requieran un esfuerzo considerable o mayor esfuerzo, mientras que en problemas no tan fáciles o difíciles las actividades asignadas por el docente requieren poco o algún esfuerzo, como parte del proceso paulatino de enseñanza; (b) se emplea como material didáctico predominante el práctico, el eje atencional se centra en objetos concretos disponibles en el entorno; y (c) las intenciones pedagógicas son diferenciales en función de la estructura de los problemas de adición y sustracción.

DISAS ofrece una perspectiva promisoriosa para la evaluación de la dificultad instituida en la medida que enfatiza la relación del docente con el saber, en términos del interjuego reflexión didáctica-situación aditiva no en sentido abstracto sino siempre teniendo como foco central el estudiante particular que reporta dificultades específicas en situaciones aditivas específicas. Incluso el sentido de DISAS más allá de recoger información del docente buscaba generar reflexión y cuestionamiento en el docente acerca de su actividad, y eso fue reportado explícitamente por varios docentes tanto en el estudio piloto como en la aplicación de validación.

Lo anterior permite hacer procesos reflexivos y configuraciones didácticas *dirigidas y direccionadas* a ese estudiante que triangula con el docente en prácticas escolares, de modo que el acceso a los objetos, lugares y momentos de las situaciones enseñanza-aprendizaje se dé apropiadamente, y la enculturación matemática formal sea progresiva y esté en permanente diálogo con los aprendizajes matemáticos del niño que tienen lugar en otros contextos de socialización e interacción (Saxe, 1985).

La tercera fase de la investigación tuvo como objetivo desarrollar un instrumento de evaluación de la dificultad atribuida por los docentes y estudiantes en relación con su quehacer en situaciones cotidianas de aprendizaje de las operaciones aritméticas de adición y sustracción. Aquí en el instrumento DASAS es importante mencionar que aun cuando las subpruebas docente y estudiante cuentan con pocos ítems y se aplicó en muestras pequeñas de estudiantes, brinda información de interés para acercarse a los procesos de atribución y comunicación en la diada docente estudiante.

En primer lugar se da por parte del docente unas atribuciones primordialmente enfocadas en el estudiante a la hora de explicar la dificultad que observa en el aprendizaje de adición y sustracción bien sea de tipo orgánico, psicológico o ambientales. No obstante, es importante señalar dos tendencias: Una en la que los docentes reconocen de modo reflexivo la necesidad de cambiar algunos aspectos de la didáctica a fin que el estudiante mejore su desempeño en adición y sustracción, y otra tendencia en la que los docentes mencionan estar en desacuerdo con frases relacionadas con problemas del docente en la motivación hacia el estudiante o en la explicación de conceptos. En la segunda tendencia se podría pensar que adicional a ese componente reflexivo podría darse un aspecto irreflexivo en su práctica docente, el cual valdría la pena analizar en posteriores estudios.

Para el caso del estudiante, las atribuciones giran a reconocer que con frecuencia tiene dificultades en las operaciones de adición y sustracción, aunque descarta que familia y personas externas al colegio contribuyan en tales falencias, pero sí en la distractibilidad derivada de compañeros en el aula. A nivel irreflexivo en afirmaciones como aprender a sumar y restar es fácil, y lo que enseña el profesor es fácil de entender se da un punto de quiebre en tanto se valora *in situ* mediante la subescala de descontento dirigido que hay un desajuste en el aprendizaje de las operaciones pero también hay dificultad en el reconocimiento de la información normativa que proporciona el docente en situaciones de triangulación.

La fase 4, que corresponde a la obtención de evidencia de validez del modelo normativo situado, sugiere la presencia de dos dimensiones muy relevantes desde el punto de vista situado y de estructura interna del modelo: La primera, una dimensión de enculturación formal, en la que confluyen el acierto (DESAS), la dificultad instituida y el eje atencional (DISAS), en donde si el docente en su proceso de reflexión y planeación didáctica enfoca la atención del estudiante diferencialmente *en función de la naturaleza específica de la situación de adición y sustracción* y estructura las situaciones en términos de complejidad creciente esto se verá reflejado en mejores desempeños por parte del estudiante. Esto respalda la idea según la cual las prácticas de aprendizaje matemático se configuran alrededor de objetos, lugares y momentos normativos que el docente en su proceso de planeación, y como poseedor de una tradición cultural (Mc Dowell, 2003) debe fomentar paulatinamente en la interacción en sus estudiantes esa *sensibilidad* a los requerimientos normativos de las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las operaciones aritméticas.

En la segunda dimensión, denominada de entusiasmo-apatía, convergen el panorama irreflexivo, el descontento dirigido y las explicaciones internas, es decir, esta dimensión se caracteriza por la integración de procesos de atribución reflexiva del docente y reacciones afectivas irreflexivas del estudiante.

En esta dimensión la reacción afectiva y afectada que tiene lugar ante situaciones de enseñanza-aprendizaje bien sea novedosas, o cuya solución no es accesible de manera inmediata con las habilidades y saberes disponibles en ese momento, enriquece en gran medida las aproximaciones tradicionales de la dificultad basadas principalmente en el acierto como indicador estándar. En ese orden de ideas, si el niño experimenta contento dirigido hacia las tareas, su panorama irreflexivo acerca de la interacción con el docente en el marco de situaciones de enseñanza-aprendizaje se verá afectado de manera positiva, y ello contribuirá a que el docente explique los logros del estudiante en término de capacidades del estudiante o de habilidades del docente para incorporar al estudiante en la matemática formal.

El modelo normativo situado sugiere que el descontento dirigido es una *reacción afectiva irreflexiva*, que se da *en* la práctica misma, y como su nombre lo indica, se dirige en función de cada situación. Este carácter situado precisamente contribuye a la independencia de acierto y descontento en términos de correlación, y antes bien, estas dimensiones se ubican en ejes ortogonales que proporcionan un marco conceptual útil no sólo para ubicar a los estudiantes sino para comprender cómo ciertas variables ilustrativas contribuyen a enriquecer el modelo.

En ese sentido, estas dimensiones permiten caracterizar no sólo la manera como el niño aprende, como reacciona afectivamente, ajustándose o no a la situación sino también en el marco de ese proceso de aprendizaje, cómo el docente reflexiona sobre su quehacer mediante la articulación de intenciones pedagógicas, material didáctico, eje atencional, dificultad instituida y dificultad percibida que se traducen a su vez en actividades dirigidas y direccionadas a ese estudiante que experimenta dificultad. Aun cuando las dimensiones derivadas del modelo son una evidencia preliminar de carácter psicométrico, el modelo ha de complementarse y enriquecerse con los saberes provenientes de la educación matemática.

Los tres instrumentos y el modelo situado tienen adecuados indicadores psicométricos de confiabilidad y de funcionamiento tanto desde la Teoría Clásica de los Tests como desde la Teoría de Respuesta al Ítem en sus diferentes fases de construcción y validación, constituyéndose así en insumos de gran utilidad para docentes, psicólogos y profesionales que

trabajan en el campo de la educación matemática. Un primer paso se está dando desde el punto de vista psicológico y de construcción de instrumentos de evaluación, los siguientes pasos consisten en alimentar el modelo desde la educación matemática y desde las interacciones triangulares asimétricas que día a día se dan en las aulas de clase.

Si bien se contó con un tamaño muestral pequeño en la cuarta fase del estudio y las conclusiones que se derivan de las correlaciones de Pearson y del análisis de componentes principales categórico no pueden generalizarse aún a otros contextos o escenarios, es un modelo integrador y provocador al mismo tiempo, integrador en la medida en que es posible analizar a los elementos del triángulo asimétrico a través de distintos instrumentos de evaluación que responden a su vez a tres tipos de dificultad; provocador en tanto a invita a continuar explorando relaciones, puntos de relación entre las variables del modelo; por qué no, provocador para analizar en investigaciones futuras la dificultad de los estudiantes con otros saberes matemáticos desde una perspectiva situada (por ejemplo, el concepto de número, operaciones aritméticas de multiplicación y división, por mencionar sólo algunas).

El modelo de evaluación de dificultades de adición y sustracción propuesto en el marco del enfoque situado, y más específicamente dentro de la normatividad situada es una apuesta por las prácticas, por el descontento, por las atribuciones diádicas y por la institución de los contenidos. A diferencia de lo propuesto por Geary (1993) en el sentido que la competencia matemática de los niños no depende del lenguaje o de la transmisión cultural, sino de que nacen con “un sentido matemático”, este modelo muestra que es precisamente en escenarios de triangulación asimétrica donde el docente, padre o persona experta introducen al estudiante en los aspectos formales de las operaciones aritméticas, pero para que esta inmersión sea adecuada deben considerarse las prácticas cotidianas informales y formales en las que el niño aprende, y la manera como se *ajusta afectivamente* a los requerimientos que plantean las situaciones de enseñanza y aprendizaje.

Cabe anotar que Verschaffel, Greer y De Corte (2000, citados por Vicente & Manchado, 2016) propusieron un modelo según el cual, para poder resolver cualquier tipo de problemas es necesario comprender tanto la *situación* que se describe como la *estructura matemática* subyacente a esa situación. Después, debe inferirse cuál operación aritmética permite resolver el problema y ejecutarla. Por último, debe interpretarse el resultado reactivando la comprensión inicial (situacional y matemática) del problema.

Si bien este modelo es interesante en tanto considera que existen elementos situacionales y estructurales relevantes en la resolución de problemas matemáticos, el modelo normativo situado es diferente de la propuesta de los autores en tres aspectos: (a) la comprensión de la situación y de la estructura matemática NO se da de manera consciente y reflexiva más en el caso del estudiante que recién inicia su proceso de enculturación formal, antes bien, esta comprensión está mediada por la incorporación del estudiante en las prácticas mismas de aprendizaje y se alcanza *in situ*, mediante el ajuste progresivo a las tareas, en términos de descontento dirigido, en el marco de parámetros de actividad; (b) la resolución de problemas aritméticos en escenarios de triangulación asimétrica no sigue la secuencialidad esbozada por los autores, sino que en la práctica misma se da un devenir constante, donde el estudiante interactúa con los objetos, despliega cursos de acción, reacciona de una u otra manera en función de su ajuste a la situación, suscitando contento o descontento dirigido, en un continuo devenir; y (c) en los inicios de la enculturación formal el estudiante NO interpreta el resultado obtenido en función de la evocación conceptual de la tarea, de lo que significa la estructura del problema y los cursos de acción que utilizó para llegar a la solución, antes bien, cuando se le indaga por cómo obtuvo el resultado, da su respuesta en términos de *actividad y no de conceptos*, por ejemplo, recurre a decir que esa situación ya la había vivido con sus padres, o que si *cojo* estas bolitas y las *pongo* con las que están aquí me van a dar este montón de bolitas.

Como una segunda evidencia de validez que forma parte de la estructura interna del modelo, el interjuego acierto-descontento condujo a formular unos perfiles donde estas variables confluyen (Figura 35), perfiles que se replicaron en el análisis de componentes principales categóricos (Figura 37). Así, una hipótesis tentativa a analizar en posteriores estudios consistiría en contrastar esos perfiles de acierto y descontento dirigido *in situ* con una mayor cantidad de individuos, que permitan la identificación de estudiantes con dificultad experimentada, ya que unas ideas derivadas de la investigación son que cuando confluye el binomio acierto-contento y desacierto-descontento, éstos son perfiles de ajuste del estudiante a una tarea que cuenta con una infraestructura y requerimientos normativos específicos, en contraste, cuando se dan los perfiles acierto-descontento y desacierto-contento es posible que haya un desajuste a la tarea, en el primer caso probablemente son estudiantes con buen desempeño en situaciones de adición y sustracción pero que no les agrada la tarea, perfil que

podría denominarse de aburrimiento, falta de motivación con la tarea. Para el segundo caso serían estudiantes que tienen bajo desempeño en las actividades pero manifiestan estar muy contentos con la actividad, es decir, no se da ese reconocimiento *in situ* de los requerimientos de la tarea y eso generaría dificultades a futuro si no se identifica en las fases iniciales de enculturación formal.

Si bien autores como Weiner (1986) desarrollaron una interpretación atribucional de las emociones y Gómez (2000) desarrolló el *Mapa de Humor*, que es un instrumento icónico que establece un código para expresar diferentes reacciones emocionales que experimenta el estudiante en el transcurso de la actividad matemática (reacciones de curiosidad, animado, desesperación, tranquilidad, prisa, aburrimiento, de abuty, desconcierto, come la cabeza, gusto, indiferencia, diversión, confianza y bloqueo), los perfiles de acierto-descontento propuestos en esta investigación son diferentes a estas aproximaciones a la comprensión de aspectos emocionales por varias razones: (a) los perfiles de acierto-descontento no hacen parte de reacciones emocionales difusas sino son reacciones afectivas *dirigidas* a un objeto o situación en la que el individuo tiene dificultad para ajustarse a los requerimientos normativos que tal situación propone; y (b) las atribuciones propuestas por Weiner (1986) y Gómez (2000) son de carácter reflexivo, mientras que los perfiles de acierto-descontento son *procesos irreflexivos* que tienen lugar en prácticas de aprendizaje matemático características de situaciones de triangulación asimétrica donde el docente introduce al niño en procesos de enculturación formal de la adición y la sustracción.

En cuanto a la capacidad del componente DESAS del modelo para identificar las dificultades experimentadas se aprecian ventajas importantes en relación con aproximaciones tradicionales de evaluación: En primera instancia las prácticas evaluadas en DESAS permiten discriminar el desempeño de diversos grupos de contrastación (criterio docente y puntaje prueba MEN) con unas tasas adecuadas de identificación entre el 10% y 11% de los estudiantes, porcentaje que se encuentra dentro de lo postulado por definiciones operativas clásicas de la evaluación del aprendizaje matemático (Blanco, 2009).

Sin embargo, es importante aclarar que la dificultad experimentada NO pretende constituirse en una categoría diagnóstica desde un punto de vista médico sino generar un punto de partida con el cual el docente de matemáticas obtenga información tanto del acierto como del descontento dirigido a problemas matemáticos concretos con estructuras y prácticas

diferentes. Esto no debe conducir tampoco a rotulización ni estigmatización del estudiante en la escuela sino a propiciar en la escuela y en los actores vinculados a ella la necesidad de empoderamiento en torno al trabajo con estudiantes que aun cuando no tienen dificultades biológicas o psicosociales de base que impidan su adecuado desempeño en matemáticas presentan dificultades en el reconocimiento de lugares, objetos, normas asociadas a situaciones y prácticas de aprendizaje matemático que en caso de no identificarse oportunamente, pueden ocasionar problemas en el aprendizaje de conceptos matemáticos de mayor complejidad.

Teniendo en cuenta lo anterior, entre las limitaciones encontradas en el presente trabajo se encuentra la complejidad misma de la evaluación, es decir, aunque se recolectó información de diferentes fuentes, la aplicación individualizada de los instrumentos de estudiantes como docentes hizo difícil la implementación de la evaluación en contextos masivos por la cantidad de estudiantes y la diversidad de compromisos que tiene el docente en su quehacer en el aula, por ello los tamaños de muestra son un poco pequeños, y las conclusiones que se derivan de la presente investigación no son generalidades sino hallazgos susceptibles de ser replicados en otros contextos y escenarios. Para diversificar la investigación a otros contextos es preciso contar con personal capacitado que aplique individualmente los instrumentos de acuerdo con los protocolos de aplicación y apoyo tecnológico para la aplicación en PEBL-2.

Algunas recomendaciones tendientes a fortalecer el modelo situado de evaluación de las dificultades de adición y sustracción, en el marco de ulteriores desarrollos del mismo, serían:

1. Aplicar los tres instrumentos en una amplia muestra de examinados de diferentes instituciones educativas representativas de sector y zona del país, a fin de disponer de mayor información que permita por una parte caracterizar las dificultades de adición y sustracción en diversos escenarios de la geografía nacional, y por otra parte, poder correr modelos más robustos o análisis estadísticos de mayor complejidad como modelos de ecuaciones estructurales o métodos de clasificación y así enriquecer los hallazgos obtenidos en la presente investigación.

2. Ampliar la escala DASAS en su sección docente y estudiante, de manera que se incorporen ítems que posibiliten evaluar no sólo diferentes tipos de atribuciones en los actores involucrados en situaciones de triangulación sino también indagar por componentes irreflexivo

en los docentes, ya que en la sección docente se establecieron primordialmente interpretaciones y atribuciones de corte reflexivo.

3. Adelantar investigaciones enfocadas al análisis del contento-descontento dirigido en situaciones de interacción con el docente como parte del proceso enseñanza-aprendizaje y en contextos de evaluación, para ello puede ser de gran utilidad el protocolo de observación del descontento en sus indicadores gestuales, actitudinales y comportamentales. Tal protocolo requiere contar con evidencias de validez que redunden en el posterior uso de dicha herramienta de evaluación como parte de la indagación de los procesos afectivos en el aula.

4. En el marco del modelo situado, y a la luz del interjuego acierto-descontento dirigido, analizar cuáles son las estrategias que emplean los estudiantes con dificultad experimentada para la resolución de problemas aditivos (Ostad, 1997): Por ejemplo, conteo con los dedos, conteo verbal, estrategias basadas en la recuperación de los hechos, por mencionar sólo algunas. Asimismo sería importante hacer caracterización de la naturaleza de los errores que cometen los estudiantes en este tipo de problema.

REFERENCIAS

- American Educational Research Association., American Psychological Association., & National Council on Measurement in Education (2014). *Standards for Educational and Psychological Testing*. Washington, United States: Author.
- American Psychiatric Association (2014). *Guía de consulta de los criterios diagnósticos del DSM-5*. Arlington, VA, United States: American Psychiatric Publishing.
- Arias, E., Barboza, J., Bertel, J., & Garrido, J. (2013). La adición en los textos del programa “Todos a Aprender. *Revista Científica-(Edición Especial)*, 373- 377. <https://bit.ly/2UJ3XOX>
- Arias, J. (2003). *Problemas de aprendizaje*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Arias, P., Morales, R., & Orjuela, J. (2010). Etnomatemática y la construcción civil. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 3(1). 4-30. <https://bit.ly/2UVcjCh>
- Aroca, A. (2015). ¿Sumar = restar? una perspectiva etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 8(2), 237-255. <https://bit.ly/2IjSZbM>
- Aroca, A., & Cauty, A. (2017). Dificultades metodológicas en la investigación sobre pensamiento indígena y su paradójica educación matemática. *BOLEMA*31(58), 841-860. doi: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a16>
- Badian, N. (1999). Persistent arithmetic, reading, or arithmetic and reading disability. *Annals of Dyslexia*, 49(1), 43–70. doi:10.1007/s11881-999-0019-8
- Bagni G., & D’Amore, B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica*. 1, 73-89. <https://bit.ly/2KDTM9x>
- Baxter, P., & Dole, S. (1990). Working with the brain, not against it: Correction of systematic errors in subtraction. *British Journal of Special Education*, 17(1), 19–22. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8578.1990.tb00337.x>
- Bertoglia, L. (2005). La interacción profesor-alumno. Una visión desde los procesos atribucionales. *Psicoperspectiva*, 4, 57-73. <https://bit.ly/1OOjA9B>
- Bishop, A. (1988). Mathematics education in its cultural context. *Educational Studies in Mathematics*, 19(2), 179-191. Recuperado de <https://www.jstor.org/stable/3482573>

- Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona, España: Paidós Ibérica.
- Blanco, H. (2006). La Etnomatemática en Colombia. Un programa en construcción. *Revista BOLEMA Boletim de Educação Matemática*, 19(26), 49-75. <https://bit.ly/2GmKACK>
- Blanco, H., Higueta, C., & Oliveras, M. (2014). Una mirada a la etnomatemática y la educación matemática en Colombia: caminos recorridos. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 245-269. <https://bit.ly/2UUAWPE>
- Blanco, M. (2009). *Dificultades Específicas del Aprendizaje de las Matemáticas en los primeros años de la escolaridad: detección precoz y características evolutivas* (Tesis doctoral). Madrid, España: Ministerio de Educación Gobierno de España. Secretaría de Estado de Educación y Formación Profesional. <https://bit.ly/2DfJMgy>
- Bonilla, M., Sánchez, N., & Vidal, M. (1999). *Cómo enseñamos la aritmética. Algunos conceptos aritméticos en profesores de primaria*. IDEP. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá: Gráficas Teusaquillo.
- Bourdieu, P. (2007). *El sentido práctico*. Buenos Aires, Argentina: Siglo XXI.
- Brandom, R. (2005). *Hacerlo explícito: Razonamiento, representación y compromiso discursivo*. (A. Ackerman y J. Roselló, trad). Barcelona, España: Herder. (Obra original publicada en 1994).
- Bravo-Valdivieso, L., Milicic, N., Cuadro, A., Mejía, L., & Eslava, J. (2009). Trastornos del aprendizaje: Investigaciones psicológicas y psicopedagógicas en diversos países de Sudamérica. *Ciencias Psicológicas*, 3(2), 209-218. Recuperado de <http://www.scielo.edu.uy/pdf/cp/v3n2/v3n2a09>
- Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S., & Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista. Bases teóricas*. Bariloche, Argentina: GPDM. <https://bit.ly/2TBkCiV>
- Brousseau, G. (1980). L'échec et le contrat. *Recherches en didactique des mathématiques*, 41 177-182. <https://bit.ly/2Iq8wXQ>
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 4(2), 165-198. <https://bit.ly/2UdA5oB>
- Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y Métodos de Didáctica de la Matemática*. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba

- Brousseau, G. (1989a). La tour de Babel. *Études en didactique des mathématiques*. 2. Irem de Bourdeaux.
- Brousseau, G. (1989b). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. En: N. Bednarz & C. Garnier. *Construction des savoirs Obstacles et Conflits* (pp- 41-63). Paris, France: CIRADE Les 'éditions Agence d'Arc Inc. <https://bit.ly/2VnKjO5>
- Brousseau, G. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de las Matemáticas (Primera parte). *Enseñanza de las Ciencias*, 8(3), 259-267. <https://bit.ly/2UnqT0S>
- Brousseau, G. (1997, curso). *La théorie des situations didactiques*. Université de Montréal, 1-56. <https://bit.ly/2GhfzPb>
- Bruno, A., & Cabrera, N. (2006). La recta numérica en los libros de texto de España. *Educación Matemática*, 18(3), 125-149. Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/405/40518306.pdf>
- Bunck, M., Terlien, E., van Groenestijn, M., Toll, S., & Van Luit, J. (2017). Observing and analyzing children's mathematical development, based on action theory. *Educational Studies in Mathematics*, 96(3), 289–304. doi:10.1007/s10649-017-9763-6
- Burns, M., Walick, C., Simonson, G., Domínguez, L., Harelstad, L., Kincard, A., & Nelson, G. (2015). Using a conceptual understanding and procedural fluency heuristic to target math interventions with students in early elementary *Learning Disabilities Research & Practice*, 30(2), 52–60. doi:10.1111/ldrp.12056
- Caballero, S. (2005). *Un estudio transversal y longitudinal sobre los conocimientos informales de las operaciones aritméticas básicas en niños de educación infantil* (Tesis de Doctorado, Universidad Complutense de Madrid. Madrid, España). Recuperado de <https://eprints.ucm.es/7283/1/T28929.pdf>
- Cantero, A., Hidalgo, A., Merayo, B., Riesco, F., Sanz, A., & Vega A. (2003). *Resolución de problemas aritméticos en educación primaria*. <https://bit.ly/2ZfTeKr>
- Cárdenas, C. (2015). *La clase de matemáticas se transforma. Propuesta pedagógica para desarrollar el sentido numérico de los niños y las niñas del curso 101 del Instituto Pedagógico Nacional* (Tesis de Pregrado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia).

- Carpenter, T., Hiebert, J., & Moser, J. (1981). Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12(1), 27-39. doi:10.2307/748656
- Carpenter, T., & Moser, J. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(3), 179-202. doi:10.2307/748348
- Carraher, T., Carraher, D., & Schliemann, A. (2000). *En la vida diez en la escuela cero*. México: Siglo Veintiuno.
- Carraher, D., & Schliemann, A. (2002). Is everyday mathematics truly relevant to mathematics education? In J. Moshkovich & M. Brenner (Eds.), *Everyday and Academic Mathematics in the Classroom. Monographs of the Journal for Research in Mathematics Education* (pp. 131-153). United States: National Council of Teachers of Mathematics. doi:10.2307/749968
- Carrillo, B. (2009). Dificultades en el aprendizaje matemático. *Revista Digital Innovación y Experiencias Educativas*, 16, 1-10. <https://bit.ly/2IvLo6d>
- Carugaty, F., & Mugny, G. (1988). La teoría del conflicto sociocognitivo. En G. & J. Pérez (Eds.), *Psicología social del desarrollo cognitivo* (pp. 79-94). Barcelona: Anthropos.
- Castillo, C. (2014). Aprendizaje de adición y sustracción de números enteros a través de objetos físicos (Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Palmira, Colombia). Recuperado de <http://www.bdigital.unal.edu.co/47573/1/94442425%20Cesar.pdf>
- Castrillón, A. (1990). Experiencia Instituto Mayor Campesino. En: Centro Laubach de Educación Popular Básica de Adultos; Consejo de Educación de Adultos de América Latina y Dimensión Educativa. (Ed.), *La enseñanza de la matemática con los adultos de los sectores populares: experiencias e investigaciones* (pp. 61-75). Bogotá, Colombia: Dimensión Educativa.
- Castro, A. (2016). *Conocimiento matemático fundamental para el Grado de Educación Primaria: Perfiles de conocimiento conceptual aditivo*. (Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España). <https://bit.ly/2UBprxb>
- Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. México: Grupo Editorial Iberoamérica. <https://bit.ly/2PSpAWI>

- Chevallard, Y. (1982). *Pourquoi la transposition didactique ?* Communication au Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques de l'IMAG, Université Scientifique et Médicale de Grenoble. (pp.167-194). <https://bit.ly/28Q9ARb>
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble, France: La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1988). L'univers didactique et ses objets: fonctionnement et dysfonctionnement. *Interactions didactiques*, 9-37.
- Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble. LSD2-IMAG*, Université Joseph-Fourier, Grenoble.
- Chevallard, Y. (1994). Enseignement de l'algebra et transposition didactique. *Rend. Sem. Mat. Univ. Poi. Torino.*, 52(2), 175-234. <https://bit.ly/2GlmGAS>
- Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado* (3ª Ed). Argentina: Aique. <https://bit.ly/2VGBPZe>
- Chevallard, Y., & Johsua, M. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance. *Recherches en didactique des mathématiques*, 3(1), 159-239.
- Cid, E., Godino, J., & Batanero, C. (2004). Sistemas Numéricos: Adición y sustracción. Multiplicación y división. En J. Godino (Coord). *Didáctica para Maestros* (p. 187-219). Proyecto Edumat-Maestros. Granada: Universidad de Granada. <https://bit.ly/2DjWWeD>
- Clarke, D. (1997). The Changing Role of the Mathematics Teacher. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28 (3), 278-308. doi:10.2307/749782
- Clements. D., Sarama, J., & Liu, X. (2008). Development of a measure of early mathematics achievement using the Rasch Model: The research-based early maths assessment. *Educational Psychology*, 28(4), 457-482. doi: 10.1080/01443410701777272
- Cobb, P., & Bowers, J. (1999). Cognitive and situated learning perspectives in theory and practice. *Educational Researcher*, 28(2), 4-15. doi:10.3102/0013189x028002004
- Cobb, P., Stephan, M., McCain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *Journal of the Learning Sciences*, 10(1-2), 113-163. doi: 10.1207/S15327809JLS10-1-2_6

- Cole, M., & Cagigas, X. (2009). Cognition. En M. Bornstein (Eds.), *Handbook of Cultural Developmental Science* (pp. 127-142). New York: Taylor and Francis Group. <https://bit.ly/2KMzkmS>
- Corral, Y. (2009). Validez y confiabilidad de los instrumentos de investigación para la recolección de datos. *Revista Ciencias de la Educación*, 19(33), 228-247. <https://bit.ly/1T1z0ct>
- Cussins, A. (2002). Experience, thought and activity. En Y. Gunther (Ed.), *Essays on Nonconceptual Content* (pp.147-163). Massachusetts, United States: MIT Press.
- D'Amore, B. (2000). Escolarización del saber y de las relaciones: efectos sobre el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(3), 321-338. <https://bit.ly/2IlyJXE>
- D'Amore B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica*. 3, 325-336. <https://bit.ly/2Gndt1e>
- D'Amore B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá, Colombia: Magisterio
- D'Amore, B. (2017). Algunos elementos relevantes de la didáctica de la matemática interpretados en clave sociológica. En: B. D' Amore & L. Radford, L. (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Problemas semióticos, epistemológicos y didácticos* (pp.29-42) Universidad Distrital Francisco José de Caldas: Doctorado Interinstitucional en Educación. <https://bit.ly/2XdYJrk>
- D' Amore, B., & Fandiño, M. (2002). Un acercamiento analítico al “triángulo de la didáctica”. *Educación Matemática*, 14(1), 48-61. <https://bit.ly/2v45YWv>
- D' Amore y Fandiño, M. (2015). Propuestas metodológicas que constituyeron ilusiones en el proceso de enseñanza de la matemática. *Educación Matemática*, 27(3), 7-43. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/405/40544202001.pdf>
- D' Amore, B., & Fandiño, M. (2017). La didáctica de la didáctica de la matemática: Experiencias personales e indicaciones críticas de algunas discusiones e investigaciones. En: B. D' Amore & L. Radford, L. (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Problemas semióticos, epistemológicos y didácticos* (pp. 43-68) Universidad Distrital Francisco José de Caldas: Doctorado Interinstitucional en Educación. <https://bit.ly/2XdYJrk>

- D'Amore, B., Fandiño, M., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2010). *La didáctica y la dificultad en matemática. Análisis de situaciones con falta de aprendizaje*. Bogotá, Colombia: Magisterio.
- Davidson; D. (1973). On the very idea of a conceptual scheme. *Proceedings and Addresses of the American Philosophical Association*, 47, 5-20. Recuperado de <http://www.jstor.org/stable/3129898>
- Davidson, D. (2001). The Emergence of thought. En D. Davidson (Ed.), *Subjective, Intersubjective, Objective* (pp. 123-134). Oxford: Clarendon Press.
- Davidson, D. (2004) A unified theory of thought, meaning and action. En D. Davidson, *Problems of Rationality* (pp. 150 – 166). Oxford: Clarendon Press.
- Del Valle, M. (2013). Atribuciones causales y aprendizaje matemático. *Atenas*, 1(21), 54-69. <https://bit.ly/2IyUUbW>
- Díaz de León, J. (2004). *El grado de abstracción en la resolución de problemas de cambio de suma y resta en contextos rural y urbano*. (Tesis de Doctorado, Universidad Complutense de Madrid. Madrid, España.). Recuperada de <https://eprints.ucm.es/5451/1/T27673.pdf>
- Di Martino, P., & Zan, R. (2015). The Construct of Attitude in Mathematics Education. En B. Pepin & B. Rosken-Winter. (Eds.). *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education: Exploring a mosaic of relationships and interactions*. (pp. 51-72). Springer.
- Dockrell, J., y McShane, J. (1997). *Dificultades de aprendizaje en la infancia. Un enfoque cognitivo*. Barcelona: Paidós.
- Duica, W. (2014). *Conocer sin representar. El realismo epistemológico de Donald Davidson*. Biblioteca Abierta Colección General, serie Filosofía. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Durand, C., & Vergnaud, G. (1976) Structures additives et complexité psychogénétique. En: *Revue française de pédagogie*.36, 28-43. <https://doi.org/10.3406/rfp.1976.1622>
- Duval, R. (1993). Registros de representaciones semióticas et funcionamiento cognitif de la penseé. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65. <https://bit.ly/2KJEv7m>
- Elosúa, P. (2003). Sobre la validez de los tests. *Psicothema*, 15(2), 315-321. Recuperado de <http://www.psicothema.es/pdf/1063.pdf>

- Emler, N., & Glachan, M. (1988). Aprendizaje social y desarrollo cognitivo. En G. Mugny & J. Pérez (Eds.), *Psicología social del desarrollo cognitivo* (95-118). Barcelona: Anthropos.
- Escobar, J., & Cuervo, A. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: Una aproximación a su utilización. *Revista Avances en Medición*, 6(1), 27-36. <https://bit.ly/111533x>
- Evaluación diagnóstica. (29 de julio 2009). Ministerio de Educación Nacional. <https://bit.ly/2HD8FWQ>
- Fajardo, J. (2016). *Triangulación, normatividad y coordinación afectiva en la ontogénesis del pensamiento*. (Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia). Recuperada de <http://bdigital.unal.edu.co/57038/1/80217344.2016.pdf>
- Fandiño, M. (2002). *Curriculo e valutazione in matematica*. Bolonia: Pitagora.
- Fandiño, M. (2006). *Currículo, evaluación y formación docente en matemática*. Bogotá: Magisterio.
- Fandiño, M. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática: Evaluar e intervenir en forma mirada y específica*. Bogotá, Colombia: Magisterio.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3-17. doi:10.2307/748969
- Fischbein, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 9-14. <https://bit.ly/2UAqiOH>
- Frabetti, C. (2007). *Malditas matemáticas. Alicia en el país de los números*. Bogotá, Colombia: Alfaguara.
- Fuchs, L., Hamlett, C., & Powell, S. (2003). *Fact fluency assessment*. Available from L. S. Fuchs, 228 Peabody, Vanderbilt University, Nashville, TN 37203.
- Gabora, L. (2008). The cultural evolution of socially situated cognition. *Cognitive Systems Research*, 9(1-2), 104–114. doi:10.1016/j.cogsys.2007.05.004
- García, M., & Juárez, J. (2011). Revisión del constructo actitud en Educación Matemática: 1959-1979. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 26, 117-125. <https://bit.ly/2Zgmfpj>
- García, S., Fernández, C., & Sánchez, F. (2010). *Deserción y repitencia en los grados primero y segundo de básica primaria: Factores de riesgo y alternativas de política pública*. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes. <https://bit.ly/2GbU7Le>

- García, A., & Jiménez, J. (2000). Resolución de problemas verbales aritméticos en niños con dificultades de aprendizaje. *Cognitiva*, 12(2), 153-170. doi: 10.1174/021435500760373888
- Garnier, H., Stein, J., & Jacobs, J. (1997). The process of dropping out of high school: A 19-year perspective. *American Educational Research Journal*, 34(2), 395-419. doi:10.2307/1163363
- Geary, D. (1993). Mathematical disabilities: cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Psychological Bulletin*, 114(2), 345-362. doi: 10.1037//0033-2909.114.2.345
- Gil, N., Blanco, L., & Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 2, 15-32. <https://bit.ly/2JL0WbQ>
- Giménez, J., Rico, L., Gil, F., Fernández, F., Castro, E., del Olmo, A., Moreno, F., & Segovia, I. (1997). ¿Por qué y para qué evaluar en matemáticas?. En J. Giménez (Ed.), *Evaluación en Matemáticas. Una integración de perspectivas* (pp. 15-35). Madrid, España: Síntesis.
- Ginsburg, H. (1997). Mathematics learning disabilities: A view from developmental psychology. *Journal of Learning Disabilities*, 30(1), 20-33. doi: 10.1177/002221949703000102
- Godino, J. (1991). Hacia una teoría de la didáctica de la matemática. En: A. Gutiérrez (Ed.), *Área de Conocimiento: Didáctica de la Matemática*. (pp. 105-148) Madrid: Síntesis. <https://bit.ly/2UYzUSy>
- Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, 14(3), 325-355. <https://bit.ly/2ZaHDMH>
- Godino, J. (1999). Implicaciones metodológicas de un modelo semiótico-antropológico para la investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Actas del III SEIEM*, (pp. 196-212). <https://bit.ly/2IAIn99>
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática para maestros*. Universidad de Granada: ReproDigital. <https://bit.ly/2C2o3q5>
- Godino, J., Font, V., & Wilhelmi, M. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 131-156. <https://bit.ly/2Graoxm>

- Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M., & Arreche, M. (2009) ¿Alguien sabe qué es el número? *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 19, 34-46. <https://bit.ly/2PflWSj>
- Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas, *BOLEMA, Rio Claro (SP)*, 31(57), 90 – 113. doi: 10.1590/1980-4415v31n57a05
- Gómez, I. (1997). *Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas* (Tesis de Doctorado, Departamento de Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación: Universidad Complutense de Madrid, Madrid: España). Recuperado de <http://eprints.ucm.es/tesis/19972000/S/5/S5013101.pdf>
- Gómez, I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea, S.A de Ediciones
- Gómez, M. (2005). La transposición didáctica: Historia de un concepto. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 1(1), 83-115. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/1341/134116845006.pdf>
- González-Pienda, J., & González-Pumariega, S. (1998). Evaluación e intervención en las dificultades de aprendizaje en matemáticas. En J. González-Pienda y J. Núñez (Eds.), *Dificultades de Aprendizaje Escolar* (pp. 341-366). Madrid, España: Pirámide.
- Greene, I., Tiernan, A., & Holloway, J. (2018). Cross-age peer tutoring and fluency-based instruction to achieve fluency with mathematics computation skills: A randomized controlled trial. *Journal of Behavioral Education*, 27(2), 145–171. doi:10.1007/s10864-018-9291-1
- Heider, F. (1958). *The psychology of interpersonal relations*. New York: Wiley.
- Henning, P. (2004). Everyday cognition and situated learning. In D. Jonassen (Ed.), *Handbook of Research on Educational Communication and Technology* (2 ed., pp. 143-168). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. <https://bit.ly/2IwzSe9>
- Herrera, N., Montenegro, W., & Poveda, S. (2012). Revisión teórica sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 35,254-287. <https://bit.ly/2XkZxKH>

- Hughes, M. (1987). *Los niños y los números: Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona, España: Planeta.
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2015). *Saber 3º, 5º y 9º 2014 Cuadernillo de prueba Ejemplo de Preguntas Saber 5º Matemáticas*. Bogotá: ICFES. <https://bit.ly/2DjvFa2>
- Isaza, L. (2001). Hacia una contextualización de las dificultades en el aprendizaje de la lectura y la escritura. *Revista Educación y Pedagogía*, 13(31), 113-133. <https://bit.ly/2Ghpy6L>
- Jacobs, V., Lamb, L., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202. Recuperado de <https://www.jstor.org/stable/20720130>
- Jerman, M. (1974). Problem length as a structural variables in verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics*, 5(2), 109-123. doi:10.1007/bf01421020
- Jerman, M., & Mirman, S. (1974). Linguistic and computational variables in problem solving in elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 5(3), 317-362. doi:10.1007/bf01424553
- Jerman, M., & Rees, R. (1972). Predicting the relative difficulty of the verbal arithmetics problems. *Educational Studies in Mathematics*, 4(3), 306-323. doi:10.1007/bf00302580
- Kaufman, A., & Kaufman, N. (2004). *Kaufman Test of Educational Achievement administration manual (2nd ed.)*. San Antonio, TX: Psychological Corporation.
- Kavale, K., & Forness, S. (1995). *The nature of learning disabilities: critical elements of diagnosis and classification*. Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kavale, K., & Forness, S. (2000). What definitions of learning disability say and don't say. A critical analysis. *Journal of Learning Disabilities*, 33(3), 239-256. doi: 10.1177/002221940003300303
- Kieran, C., Forman, E., & Sfard, A. (2001). Learning discourse: Sociocultural approaches to research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 46, 1-12. doi: 10.1007/0-306-48085-9
- Kirshner, D. (2004). Enculturation: The neglected learning metaphor in mathematics education. En D. McDougall & J. Ross (Eds.), *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (vol. 2, pp. 765-772), Toronto: OISE/UT. <https://bit.ly/2GbAFOO>

- Kiverstein, J. (2015). Empathy and the responsiveness to social affordances. *Consciousness and Cognition*, 36, 532–542. doi:10.1016/j.concog.2015.05.002
- Klaassen, P., Rietveld, E., & Topal, J. (2010). Inviting complementary perspectives on situated normativity in everyday life. *Phenomenology and the Cognitive Sciences*, 9(1), 53-73. doi: 10.1007/s11097-009-9133-7
- Kozulin, A. (2000). *Instrumentos psicológicos: La educación desde una perspectiva sociocultural*. Barcelona, España: Paidós.
- Lago, M., Rodríguez, P., Zamora, A., & Madroño, L. (1999). Influencia de los modelos intuitivos en la comprensión de la adición y la sustracción. *Anuario de Psicología*, 30(3), 71-89. <https://bit.ly/2ZbIEUx>
- Lalljee, M. (1982). Teoría de la atribución y análisis de las explicaciones. *Estudios de Psicología*, 12, 47-62. <https://bit.ly/2DhcnCr>
- Lave, J. (1991). *La cognición en la práctica*. Barcelona, España: Paidós Ibérica.
- Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Llinares, S. (2016). ¿Cómo dar sentido a las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas? Algunos aspectos de la competencia docente del profesor. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11(15), 57-67. <https://bit.ly/2UHH5nt>
- Lopes, A. (2014). Joint commitment, normativity and situativity in the class. *Educação & Realidade*, 39(3), 887-906. <http://dx.doi.org/10.1590/S2175-62362014000300014>
- López de los Mozos García-Núñez, A. (2001). *Desarrollo de las operaciones de sumar y restar: Comprensión de los problemas verbales* (Tesis de Doctorado, Universidad Complutense de Madrid; Madrid, España). Recuperado de <https://eprints.ucm.es/4854/1/T25308.pdf>
- Manassero, M., & Vásquez, A. (1995). Atribuciones causales de alumnado y profesorado sobre el rendimiento escolar: Consecuencias para la práctica educativa. *Revista Interamericana de Formación del Profesorado*, 24, 125-141. <https://bit.ly/2PdQd8K>
- Mandler, G., & Watson, D. (1966). Anxiety and the interruption of behavior. En: Ch. Spielberger. *Anxiety and behavior* (pp 263–288). New York: Academy Press
- Mariño, G. (1985). *¿Cómo opera matemáticamente el adulto del sector popular?: constataciones y propuestas*. Bogotá, Colombia: Dimensión Educativa.

- Mariño, G. (1990). La resta desde los sectores populares. En: Centro Laubach de Educación Popular Básica de Adultos, Consejo de Educación de Adultos de América Latina y Dimensión Educativa. (Comps.), *La enseñanza de la matemática con los adultos de los sectores populares: Experiencias e investigaciones* (pp. 151-157). Bogotá, Colombia: Dimensión Educativa.
- Masingila, J., Davidenko, S., & Prus-Wisniowska, E. (1996). Mathematics learning and practice in and out of school: A framework for connecting these experiences. *Educational Studies in Mathematics*, 31(1/2), 175-200. doi: 10.1007/BF00143931.
- Maza, C. (1991). *Enseñanza de la suma y la resta*. Madrid: Síntesis.
- Maza, C. (2001). Adición y Sustracción. En C. Maza (Ed). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 1-21). Madrid, España: Síntesis. <https://bit.ly/2IxCI2q>
- McDowell, J. (2003). *Mente y mundo*. Salamanca, España: Ediciones Sígueme.
- McLeod, D. (1989). Beliefs, attitudes, and emotions: new view of affect in mathematics education. En: D. McLeod & V. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective* (pp. 245-258). New York: Springer-Verlang.
- McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D.A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching* (pp. 575-596). New York: Macmillan.
- McLeod, D. (1993). Affective Responses to Problem Solving. *The Mathematics Teacher*, 86(9), 761-763. Recuperado de <http://www.jstor.org/stable/27968657>
- Ministerio de Educación Nacional (2009). *Documento 11: Fundamentaciones y orientaciones para la implementación del Decreto 1290 de 2009*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional. <https://bit.ly/2I9WQEk>
- Ministerio de Educación Nacional (2012). Actividad de Matemáticas. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Actividad Diagnóstica Grado 4º*. (pp. 13-24). Bogotá: Mineducación. <https://bit.ly/2DbB1Er>
- Ministerio de Educación Nacional (2013a). Actividad de Matemáticas. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Actividad Diagnóstica Grado 2º. Todos a Aprender. Programa para la transformación de la calidad educativa* (pp. 13-24). Bogotá: Mineducación. <https://bit.ly/2Diyo3F>

- Ministerio de Educación Nacional (2013b). Actividad de Matemáticas. En: Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Actividad Diagnóstica Luisa y Juan Grado 3º. Todos a Aprender. Programa para la transformación de la calidad educativa* (pp. 17-32). Bogotá: Mineducación. <https://bit.ly/2PferQ2>
- Ministerio de Educación Nacional (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje Matemáticas. DBA. V. 2*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional. <https://bit.ly/2iBZDel>
- Montealegre, R. (2005). La actividad humana en la psicología histórico-cultural. *Avances en Psicología Latinoamericana*, 23, 33-42. <https://bit.ly/2ZhlZWS>
- Montealegre, R. (2007). La solución de problemas cognitivos. Una reflexión cognitiva sociocultural. *Avances en Psicología Latinoamericana*, 25(2), 20-39. <https://bit.ly/2XmadZV>
- Morsanyi, K., van Bers, B., McCormack, T., & McGourty, J. (2018). The prevalence of specific learning disorder in mathematics and comorbidity with other developmental disorders in primary school-age children. *British Journal of Psychology*, 109(4), 917-940 doi: 10.1111/bjop.12322
- Mueller, S., & Piper, B. (2014). The Psychology Experiment Building Language (PEBL) and PEBL Test Battery. *Journal of Neuroscience Methods* 222, 250-259. doi:10.1016 / j.jneumeth.2013.10.024
- Mundia, L. (2012). The assessment of math learning difficulties in a primary grade-4 child with high support needs: Mixed methods approach. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 2012, 4(2), 347-366. Recuperado de <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1070446.pdf>
- Muñoz, D. (2012). *Las rondas infantiles: Una propuesta pedagógica para fortalecer el aprendizaje de los números naturales del 20 al 60 en estudiantes de grado primero del Centro Educativo Salamina sede Salamina del municipio de Curillo Caquetá*. (Tesis de Pregrado, Universidad de la Amazonía, Amazonas, Colombia). <https://bit.ly/2V9F5iQ>
- Myers, P. (2004). *Métodos para educar niños con dificultades en el aprendizaje*. México: Limusa.
- Mugny, G., & Pérez, J. (1988). *Psicología social del desarrollo cognitivo*. Barcelona: Anthropos.
- Nerici, I. (1973). Capítulo 11. Material didáctico. En: I. Nerici (Ed.), *Hacia una didáctica general dinámica* (pp. 282-356). Argentina: Kapelusz.

- Nesher, P., Greeno, J., & Riley, M. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, 13(4), 373-394. doi: 10.1007/BF00366618
- Nunes, T., & Bryant, P. (2003). *Las matemáticas y su aplicación: La perspectiva del niño*. Barcelona, España: Siglo XXI.
- Okuyama, F., Bordini, R., & Da Rocha, A. (2007). Spatially Distributed Normative Objects. En P. Noriega., J. Vázquez-Salceda., G. Boella., V. Dignum., N. Fornara. y E. Matson (Eds.), *Coordination, Organizations, Institutions, and Norms in Agent Systems II*. Volume 4386 of the series Lecture Notes in Computer Science (pp. 133-146). <https://bit.ly/2ZhHmHS>
- Okuyama, F., Da Rocha, A., & Bordini, R. (2011). Situated normative infrastructures: The normative object approach. *Journal of Logic and Computation*, 23(2), 397-424. doi: 10.1093/logcom/exr029
- Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2007). *ColombiaTaller Regional Preparatorio sobre Educación Inclusiva América Latina, Regiones Andina y Cono Sur*. Buenos Aires: Argentina. <https://bit.ly/2V1iFAe>
- Organización Mundial de la Salud (2000). *Guía de bolsillo de la Clasificación CIE - 10 Clasificación de los Trastornos Mentales y del Comportamiento, con glosario y criterios diagnósticos de investigación*. Madrid, España: Editorial Médica Panamericana. <https://bit.ly/2Z7IDBf>
- Orrantia, J. (1997). Dificultades en el aprendizaje del cálculo: Una perspectiva cognitiva. *Siglo Cero*, 28(6), 5-22.
- Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: Una perspectiva evolutiva. *Revista Psicopedagogía*, 23(71), 158-180. <https://bit.ly/2MC7zxe>
- Ostad, S. (1997). Developmental differences in addition strategies: A comparison of mathematically disabled and mathematically normal children. *British Journal of Educational Psychology*, 67(3), 345-357. doi:10.1111/j.2044-8279.1997.tb01249.x
- Ostad, S. (1998). Developmental differences in solving simple arithmetic word problems and simple number-fact problems: A comparison of mathematically normal and mathematically disabled children. *Mathematical Cognition*, 4(1), 1-19. doi 10.1080/135467998387389

- Ostad, S. (1999) Developmental progression of subtraction strategies: A comparison of mathematically normal and mathematically disabled children. *European Journal of Special Needs Education*, 14(1), 21-36. doi: 10.1080/0885625990140103
- Östergren, (2013). *Mathematical learning disability: Cognitive conditions, development and predictions*. (Doctoral thesis, Linköping University, Sweden). <https://bit.ly/2UyTEwJ>
- Otero, C. (2015). *Estrategia didáctica para el aprendizaje significativo de las operaciones suma y resta en el conjunto de los números enteros con los estudiantes del grado 7° de la Institución Educativa Ana de Castrillón* (Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.) Recuperado de <http://bdigital.unal.edu.co/51739/1/43527937.2016.pdf>
- Oviedo, P., Cárdenas, F., Zapata, P., Rendón, M., Rojas, Y., & Figueroa, L. (2010). Estilos de enseñanza y estilos de aprendizaje: Implicaciones para la educación por ciclos. *Revista Actualidades Pedagógicas*, 55, 31-43. <https://bit.ly/2GrJ95C>
- Parada, S., & Pluvinaige, F. (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(1), 83-113. Recuperado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v17n1/v17n1a5.pdf>
- Powell, S., & Driver, M. (2014). The influence of mathematics vocabulary instruction embedded within addition tutoring for first-grade students with mathematics difficulty. *Learning Disability Quarterly*, 38(4), 221–233. doi:10.1177/0731948714564574
- Puig, L., & Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid, España: Síntesis.
- Quiroz, J. (2015). *Construcción de un significado de referencia de la adición de números naturales en el sistema curricular peruano de educación primaria*. (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú). <https://bit.ly/2GI8Pkd>
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación Educativa*, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking, 103-129. <https://bit.ly/2DZCdLZ>
- Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132-150. <https://bit.ly/2UEeKtJ>
- Radford, L. (2017). Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En B. D'Amore & L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas:*

- Problemas semióticos, epistemológicos y didácticos* (pp.97-114) Universidad Distrital Francisco José de Caldas: Doctorado Interinstitucional en Educación.
<https://bit.ly/2XdYJrk>
- Rains, D. (2004). *Principios de neuropsicología humana*. México, D.F: Editorial McGraw-Hill.
- Resnick, L. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. En G. Leinhardt, R. Putnam & R. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 373-429). Hillsdale, Nueva York: LEA.
- Rey, F., & Aroca, A. (2010). Medición y estimación de los albañiles, un aporte a la educación matemática. *Revista U.D.C.A. Actualidad y Divulgación Científica*, 14(1), 137-147.
<https://bit.ly/2UVcopz>
- Rietveld, E. (2008). Situated normativity: The normative aspect of embodied cognition in unreflective action. *Mind*, 117(468). 973-1001. doi:10.1093/mind/fzn050
- Rietveld, E., & Kiverstein, J. (2014). A Rich Landscape of Affordances. *Ecological Psychology*, 26(4), 325-352. <https://doi.org/10.1080/10407413.2014.958035>
- Riley, M., & Greeno, J. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities of solving problems. *Cognition and Instruction*, 5(1), 49-101.
http://dx.doi.org/10.1207/s1532690xci0501_2
- Robbins, P., & Aydede, M. (2009). *The Cambridge Handbook of Situated Cognition*. New York, United States: Cambridge University Press. Recuperado de http://comphacker.org/pdfs/631/situated_cognition.pdf
- Rogoff, B. (1993). *Aprendices del pensamiento. El desarrollo cognitivo en el contexto social*. Barcelona: Paidós.
- Rourke, B., & Conway, J. (1997). Disabilities of arithmetic and mathematical reasoning: Perspectives from neurology and neuropsychology. *Journal of Learning Disabilities*, 30(1), 34-46. doi: 10.1177/002221949703000103
- Sagástegui, D. (2004). Una apuesta por la cultura: el aprendizaje situado. *Revista Electrónica Sinéctica*, (24), 30-39. Recuperado a partir de <http://www.redalyc.org/resumen.oa?id=99815918005>
- Salgado, A., & Espinosa, N. (2009). *Dificultades infantiles de aprendizaje. Manual orientativo para padres y educadores*. Madrid, España: Grupo Cultural.

- Saxe, G. (1985). Effects of schooling on arithmetical understandings: Studies with Oksapmin children in Papua New Guinea. *Journal of Educational Psychology*, 77(5), 503-513. doi: 10.1037//0022-0663.77.5.503
- Saxe, G. (1989). Transfer of learning across cultural practices. *Cognition and Instruction*, 6(4), 4325-330. doi: 10.1207/s1532690xci0604_3
- Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, 27(2), 4-13. doi:10.3102/0013189x027002004
- Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 13-57. doi: 10.1023/A:1014097416157
- Sfard, A. (2012). Developing mathematical discourse - Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, 51 – 52, 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.013>
- Shehni Yailagh, M., Lloyd, J., & Walsh, J. (2009). The causal relationships between attribution styles, mathematics self-efficacy beliefs, gender differences, goal setting, and math achievement of school children. *Journal of Education and Psychology*, 3(2), 95-114. <https://bit.ly/2vh54q1>
- Siegel, L. (1999). Issues in the definition and diagnosis of learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 32(4), 304–319. doi:10.1177/002221949903200405
- Taylor, T. (2008). Where does language come from? The role of reflexive enculturation in language development. *Language Sciences* 32, 14-27. doi: 10.1016/j.langsci.2008.12.014
- Treffers, A. (1993). Wiskobas and Freudenthal Realistic Mathematic Education. *Educational Studies in Mathematics*, 25(1), 89-108. doi: 10.1007/BF01274104
- Uprichard, A., & Collura, C. (1977). The effect of emphasizing mathematical structure in the acquisition of whole number computation skills (addition and subtraction) by seven- and eight-year olds: A clinical investigation. *School Science and Mathematics*, 77(2), 97–104. doi:10.1111/j.1949-8594.1977.tb09218.x
- Vanbinst, K., Ceulemans, E., Peters, L., Ghesquière, P., & De Smedt, B. (2018). Developmental trajectories of children’s symbolic numerical magnitude processing skills and associated

- cognitive competencies. *Journal of Experimental Child Psychology*, 166, 232–250. doi:10.1016/j.jecp.2017.08.008
- Van den Brink, J. (1984). Numbers in contextual frameworks. *Educational Studies in Mathematics*, 15(3), 239-257. DOI:10.1007/BF00312076
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Noviembre de 2001). Realistic Mathematics Education as work in progress. *Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education*, Taipei, Taiwan (pp 1-39). <https://bit.ly/2PdFivS>
- Van Groenestijn, M. J. A. (2002). *A gateway to numeracy. A study of numeracy in adult basic education*. Utrecht, The Netherlands: CD-β Press.
- Vasco, C. (1985). El enfoque de sistemas en el nuevo programa de matemáticas. *Revista de la Universidad Nacional. Segunda Época*, 2, 45-51. <https://bit.ly/2DbsGAD>
- Vasco, C. (1990). El aprendizaje de las matemáticas elementales como proceso condicionado por la cultura. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, 6, 5-25. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/126197.pdf>
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.
- Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, 4(4), 273– 294. doi:10.1016/0959-4752(94)90002-7
- Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse: Swets y Zeitlinger Publishers.
- Vicente, S., & Manchado, E. (2016). Arithmetic word problem solving. Are authentic word problems easier to solve than standard ones? / Resolución de problemas aritméticos verbales. ¿Se resuelven mejor si se presentan como problemas auténticos? *Infancia y Aprendizaje*, 39(2), 349–379. doi:10.1080/02103702.2016.1138717
- Vygotsky, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. (S. Furió, trad). Barcelona: Crítica-Grijalbo.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458- 477. doi:10.2307/749877

- Wartofsky, M. (1979). *Models, Representation and the Scientific Understanding*. Dordrecht: D. Reidel
- Wasner, M., Moeller, K., Fischer, M., & Nuerk, H. (2014). Aspects of situated cognition in embodied numerosity: the case of finger counting. *Cognitive Processing. International Quarterly of Cognitive Science*, 15, 317-328. doi:10.1007/s10339-014-0599-z
- Watson, S., Lopes, J., Oliveira, C., & Judge, S. (2018) Error patterns in Portuguese students' addition and subtraction calculation tasks: Implications for teaching. *Journal for Multicultural Education*, 12(1), pp.67-82. doi: 10.1108/JME-01-2017-0002
- Wechsler, D. (2009). *Wechsler Individual Achievement Test Administration Manual (3rd ed.)*. San Antonio, TX: Psychological Corporation.
- Weiner, B. (1986). *An attributional theory of motivation and emotion*. New York: Springer-Verlag.
- Wertsch, J. (1985). *Vygotsky and the social formation of mind*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical Investigations*. Oxford, UK: Blackwell.
- Woodcock, R., McGrew, K., & Mather, N. (2001). *Woodcock–Johnson III Tests of Achievement*. Itasca, IL: Riverside
- Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. S. (2006). Affect in Mathematics Education: An Introduction. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 113–121. doi:10.1007/s10649-006-9028-2
- Zukow-Goldring, P. (2012). Assisted imitation: first steps in the seed model of language development. *Language Sciences*, 34(5), 569–582. doi:10.1016/j.langsci.2012.03.012

ANEXOS

Anexo 1. Formato de consentimiento informado.



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ

LABORATORIO DE
PSICOMETRÍA
DEPARTAMENTO DE
PSICOLOGÍA

Bogotá, de de 2018

Por medio de la presente, yo _____ (Padre___ Madre___) del /la estudiante _____ del curso _____ del colegio _____ autorizo que mi hijo participe en la aplicación de los siguientes instrumentos, como parte de la investigación coordinada por la psicóloga Ana Cristina Santana Espitia, de la Universidad Nacional de Colombia.

- Batería para Evaluación de Dificultad en Situaciones Aditivas y Sustractivas, que evalúa 3 aspectos: La dificultad que los niños *experimentan* para ajustarse a las prácticas sociales en las que se realizan operaciones aritméticas de adición y sustracción (DESAS); y la dificultad *instituída* (DISAS) y *atribuida* (DASAS) en relación con el desempeño de los estudiantes en situaciones cotidianas de aprendizaje de las operaciones aritméticas de suma y resta.

He sido informado por parte de la psicóloga de los objetivos de cada uno de los instrumentos, que esta investigación está enmarcada dentro de la categoría de riesgo mínimo, que incluye aplicación de pruebas psicológicas que no lesionan la integridad de mi hijo (a) ni generan perjuicio físico, psicológico o emocional en él (ella). La información que aporte la institución educativa será manejada de conformidad con criterios éticos de investigación.

Asimismo se me ha comunicado que la confidencialidad de la información, registros filmicos, reserva de los datos de identificación de los estudiantes, calidad de la investigación y entrega de los reportes de resultados tiene en cuenta los lineamientos del Código Deontológico y Bioético de Psicología y demás normatividad vigente. Por ello, los resultados que mi hijo (a) obtenga en la prueba serán utilizados únicamente con fines académicos y de investigación.

Atentamente,

Nombre del Padre o Madre de Familia:

Escolaridad del padre:

Escolaridad de la madre:

Dirección del hogar y barrio:

Teléfono:

Correo electrónico (opcional)

Anexo 2. Actividad Diagnóstica Grado 2º Todos a Aprender. Programa para la transformación de la calidad educativa. Ministerio de Educación Nacional (Adaptación)

Nombre _____ Curso _____

Marca con una X la respuesta correcta.

1. Camila y Andrés ayudan a su profesora a organizar los útiles escolares de sus compañeros de salón. Después que Camila y Andrés organizaron los lápices y los borradores, la profesora le entregó una cantidad de colores a cada uno, como se muestra en el dibujo.



Si en cada caja hay 10 colores, ¿a quién le dieron más colores?

- A. A Andrés le dieron más colores.
- B. A los dos les dieron la misma cantidad de colores.
- C. A Camila le dieron más colores.
- D. A Camila le dieron menos colores

2. Después de organizar 37 lápices, Camila le entrega a Andrés otros lápices más, y con ellos completa un total de 45. ¿Cuántos lápices más le entregó Camila a Andrés?

- A. 82
- B. 8

- C. 72
- D. 45

3. Camila tiene 24 dulces y Andrés tiene 37. ¿Cuántos dulces debe darle la maestra a Camila para que tenga la misma cantidad que Andrés?

- A. 13 dulces.
- B. 37 dulces.
- C. 3 dulces.
- D. 61 dulces.



4. Camila y Andrés tenían 37 dulces cada uno. Después de comerse algunos, a Camila le quedaron 16 y a Andrés 25. ¿Cuántos dulces tienen ahora entre los dos?

- A. 9 dulces.
- B. 31 dulces.
- C. 36 dulces.
- D. 41 dulces

Anexo 3. Actividad Diagnóstica Grado 3° Todos a Aprender. Programa para la transformación de la calidad educativa. Ministerio de Educación Nacional
(Adaptación)

Nombre _____ Curso _____

Marca con una X la respuesta correcta.

1. El fin de semana los niños salieron al parque a jugar. Allí, Alejandra y Diego se encontraron con sus amigos del colegio y decidieron jugar a recoger piedras de colores. Los amigos de Alejandra recolectaron piedras blancas y los amigos de Diego, piedras grises. Un rato después, los amigos de Alejandra reunieron 78 piedras blancas y los amigos de Diego, 124 piedras grises.

¿Cuántas piedras recogieron entre los dos grupos de niños?



- A. 46 piedras en total.
- B. 102 piedras en total.
- C. 202 piedras en total.
- D. 202 piedras blancas.

2. Cuando llegaron al parque, Diego tenía \$2.500 y Alejandra tenía \$370 más que Diego. ¿Qué operación harías para saber la cantidad de dinero que tenía Alejandra en total?

- A. $2.500 + 370$
- B. 2.500×370
- C. $2.500 - 370$
- D. $2.500 \times 2 + 370$

3. Sebastián revisa lo que se gastó durante su visita al parque. Se da cuenta de que gastó 3.750 pesos. Si Sebastián tenía 5.000 pesos, ¿cuánto dinero le quedó?

- A. 1.350 pesos.
- B. 1.250 pesos.
- C. 250 pesos.
- D. 350 pesos.

4. Mientras juega cartas con sus amigos, Andrés se da cuenta de que además de las 12 cartas que le dieron, él ha ganado otras 23. ¿Cuántas cartas más debe ganar Andrés para completar 64?

- A. 35 cartas.
- B. 29 cartas.
- C. 41 cartas.
- D. 62 cartas.

Anexo 4. Actividad Diagnóstica Grado 4º Todos a Aprender. Programa para la transformación de la calidad educativa. Ministerio de Educación Nacional (Adaptación)

Nombre _____ Curso _____

Marca con una X la respuesta correcta.

1. En la finca de la abuela Tata se producen huevos blancos y rosados. Tata le cuenta a su nieta Sandra que en los últimos 3 meses se han producido 5718 huevos de los cuales 1250 han sido blancos. ¿Cuántos de estos huevos han sido rosados?

- A. 6968
- B. 4468
- C. 4568
- D. 1906

2. En la finca también se recogen frutas. Sandra ayuda a su abuela a recoger fresas. Sandra recoge 356 fresas y su abuela 525. La abuela explica a Sandra que parte de las fresas que recogieron, las dejan para comer en la finca y el resto las llevarán a vender al mercado. Si al mercado van a llevar 756 fresas, ¿cuántas fresas dejaron para comer en la finca?

- A. 125
- B. 881
- C. 231
- D. 400

3. En la competencia de salto largo tres niños han dado su primer salto. El primero saltó 2 metros, el segundo saltó 60 centímetros más que el primero, y el tercero saltó 40 centímetros más que el segundo, como se muestra en la imagen.



Teniendo en cuenta la información anterior, ¿cuántos centímetros saltó el niño que más lejos llegó?

- A. 102 centímetros.
- B. 2 metros y 100 centímetros.
- C. 300 centímetros.
- D. 3 metros.

4. Cinco hermanos que están decorando su casa para una fiesta compraron 2 docenas de globos para colocarlos en el techo y las paredes. Mario colocó 2 globos, Lucía 5, Francisco 1, Verónica 6 y Diana 4. ¿Cuántos globos faltan por colocar?

- A. 2
- B. 6
- C. 20
- D.

Anexo 5. Confiabilidad de subescala de aciertos, descontento dirigido y tiempos de reacción DESAS-Estudio piloto

Estadísticas de fiabilidad		
	Alfa de Cronbach	N de elementos
Aciertos	.774	30
Descontento dirigido	.866	30
Tiempos de reacción	.900	30

Estadísticas de escala				
	Media	Varianza	Desviación estándar	N de elementos
Aciertos	13.74	24.319	4.931	30
Descontento dirigido	128.64	193.500	13.910	30
Tiempos de reacción (miliseg)	1033731.77	170099305200.000	412430.970	30

Estadísticas de total de elemento

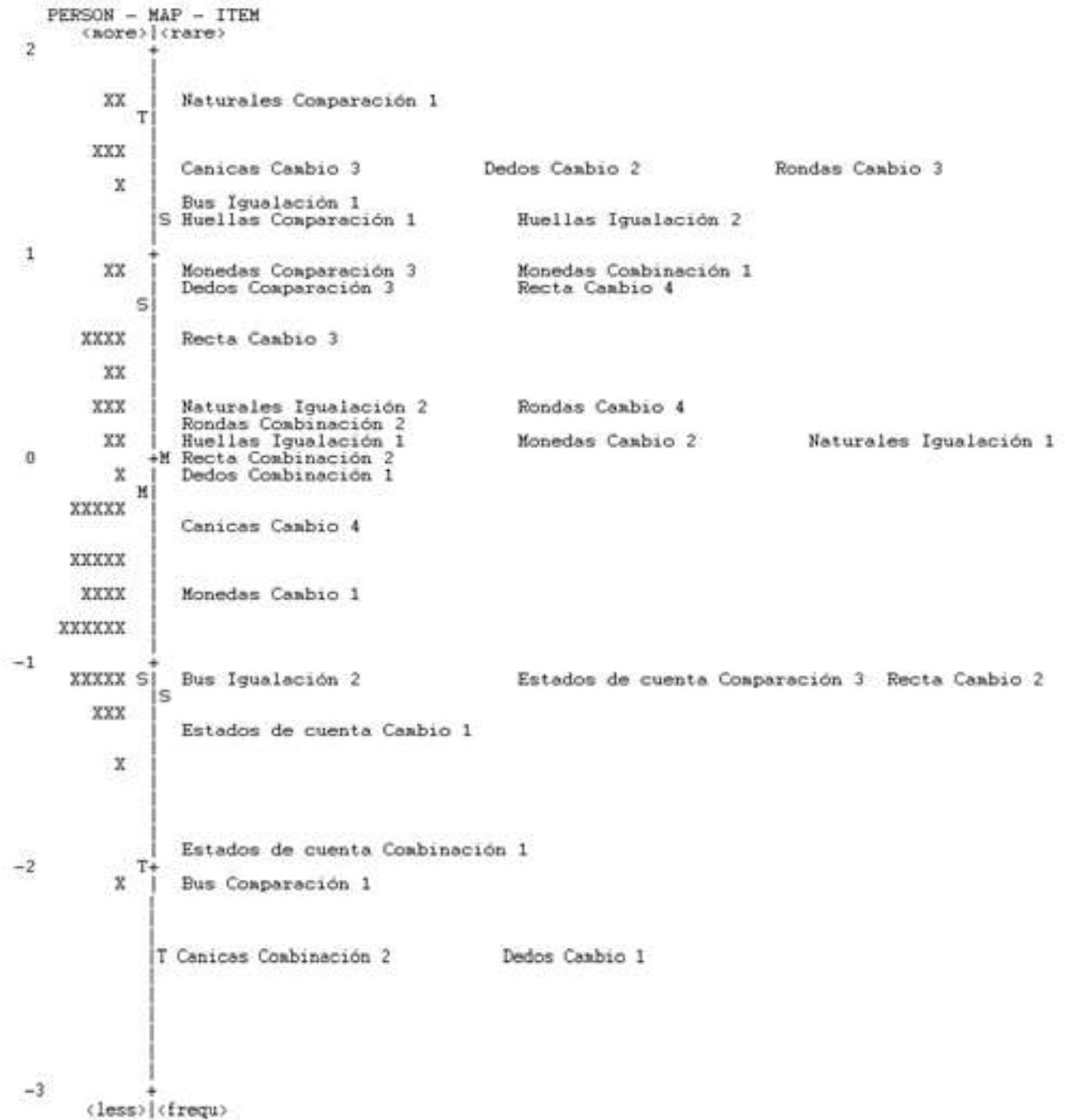
Ítem	Nombre	Acierto				Descontento dirigido				Tiempos de reacción			
		Media	Varianza	Correlación corregida	Alfa de Cronbach	Media	Varianza	Correlación corregida	Alfa de Cronbach	Media	Varianza	Correlación corregida	Alfa de Cronbach
1	Dedos Cambio 1	12.86	23.837	.117	.775	123.94	190.670	.185	.865	993452.64	171432424600.000	-.108	.904
2	Dedos Combinación 1	13.26	22.319	.366	.764	124.32	186.916	.298	.864	995017.82	166345312700.000	.198	.901
3	Dedos Comparación 3	13.44	23.884	.049	.780	124.54	180.621	.406	.861	1005822.14	165292521500.000	.319	.899
4	Dedos Cambio 2	13.54	22.825	.345	.765	124.50	177.071	.573	.857	1001867.46	164044813100.000	.398	.898
5	Rondas Cambio 3	13.54	21.927	.589	.754	124.38	181.914	.364	.862	1002862.36	170395913100.000	-.042	.903
6	Rondas Cambio 4	13.34	22.719	.287	.768	124.36	183.296	.362	.862	1002472.50	166750081800.000	.236	.900
7	Rondas Combinación 2	13.32	22.263	.384	.763	124.16	183.443	.412	.861	1006760.77	166109979800.000	.462	.898
8	Huellas Comparación 1	13.50	22.337	.440	.761	124.46	181.845	.352	.863	1005029.96	168407536600.000	.224	.900
9	Huellas Igualación 1	13.30	22.173	.401	.762	124.62	183.832	.262	.865	997243.05	162571623600.000	.465	.897
10	Huellas Igualación 2	13.50	25.276	-.263	.793	124.34	182.188	.358	.862	997989.50	162870328300.000	.423	.898
11	Monedas Cambio1	13.14	22.490	.337	.765	124.48	171.234	.685	.853	996410.00	161866793200.000	.384	.898
12	Monedas Combinación 1	13.46	22.417	.395	.763	124.62	177.914	.433	.860	989255.82	157700049600.000	.549	.895
13	Monedas Comparación 3	13.46	22.253	.435	.761	124.64	179.990	.391	.862	998159.45	162271659500.000	.438	.897
14	Monedas Cambio 2	13.30	22.378	.356	.764	124.46	177.478	.575	.857	1006417.91	168672834900.000	.128	.901
15	Canicas Cambio 3	13.54	23.723	.110	.776	124.44	183.639	.288	.864	985625.00	142798262100.000	.669	.893
16	Canicas Cambio 4	13.22	23.440	.128	.777	124.04	191.794	.050	.868	992150.86	159945691700.000	.461	.897
17	Canicas Combinación 2	12.86	24.123	.027	.778	124.10	185.071	.351	.863	999474.23	160787476000.000	.735	.895
18	Bus Comparación 1	12.90	23.316	.242	.770	124.14	183.307	.465	.860	979894.00	136917955100.000	.621	.899
19	Bus Igualación 1	13.52	23.193	.236	.770	124.14	180.204	.440	.860	989526.91	142218757100.000	.773	.889
20	Bus Igualación 2	13.06	23.527	.125	.776	123.92	189.381	.240	.865	993606.00	152798348900.000	.762	.891

Modelo de evaluación de dificultades de aprendizaje de la adición y la sustracción 266

Ítem	Nombre	Acierto				Descontento dirigido				Tiempos de reacción			
		Media	Varianza	Correlación corregida	Alfa de Cronbach	Media	Varianza	Correlación corregida	Alfa de Cronbach	Media	Varianza	Correlación corregida	Alfa de Cronbach
21	Estados de cuenta Cambio1	13.02	22.306	.422	.761	124.10	180.459	.462	.860	1010682.05	164574264400.000	.571	.897
22	Estados de cuenta Combinación 1	12.92	23.218	.254	.769	124.20	185.429	.285	.864	1009640.77	156649344000.000	.736	.893
23	Estados de cuenta Comparación 3	13.06	22.874	.271	.769	124.36	179.011	.431	.860	1001588.50	155022411300.000	.543	.895
24	Rectas Cambio 2	13.06	23.445	.143	.775	124.34	182.882	.367	.862	999176.14	150696643400.000	.622	.893
25	Rectas Cambio 3	13.40	22.082	.447	.759	124.36	175.827	.530	.858	1005822.36	159370831500.000	.571	.895
26	Rectas Cambio 4	13.44	22.129	.454	.759	124.62	173.138	.588	.856	1013955.36	168555476700.000	.140	.901
27	Rectas Combinación 2	13.28	23.063	.207	.772	124.78	170.379	.609	.855	1007856.09	159804100800.000	.665	.895
28	Adición naturales Comparación1	13.58	22.575	.457	.761	124.30	187.357	.187	.867	997741.09	149430864000.000	.757	.890
29	Adición naturales Igualación1	13.30	22.541	.321	.766	124.46	183.845	.246	.866	998846.32	156953242000.000	.715	.893
30	Adición naturales Igualación 2	13.34	22.392	.359	.764	124.44	179.476	.408	.861	993874.36	153640907700.000	.473	.897

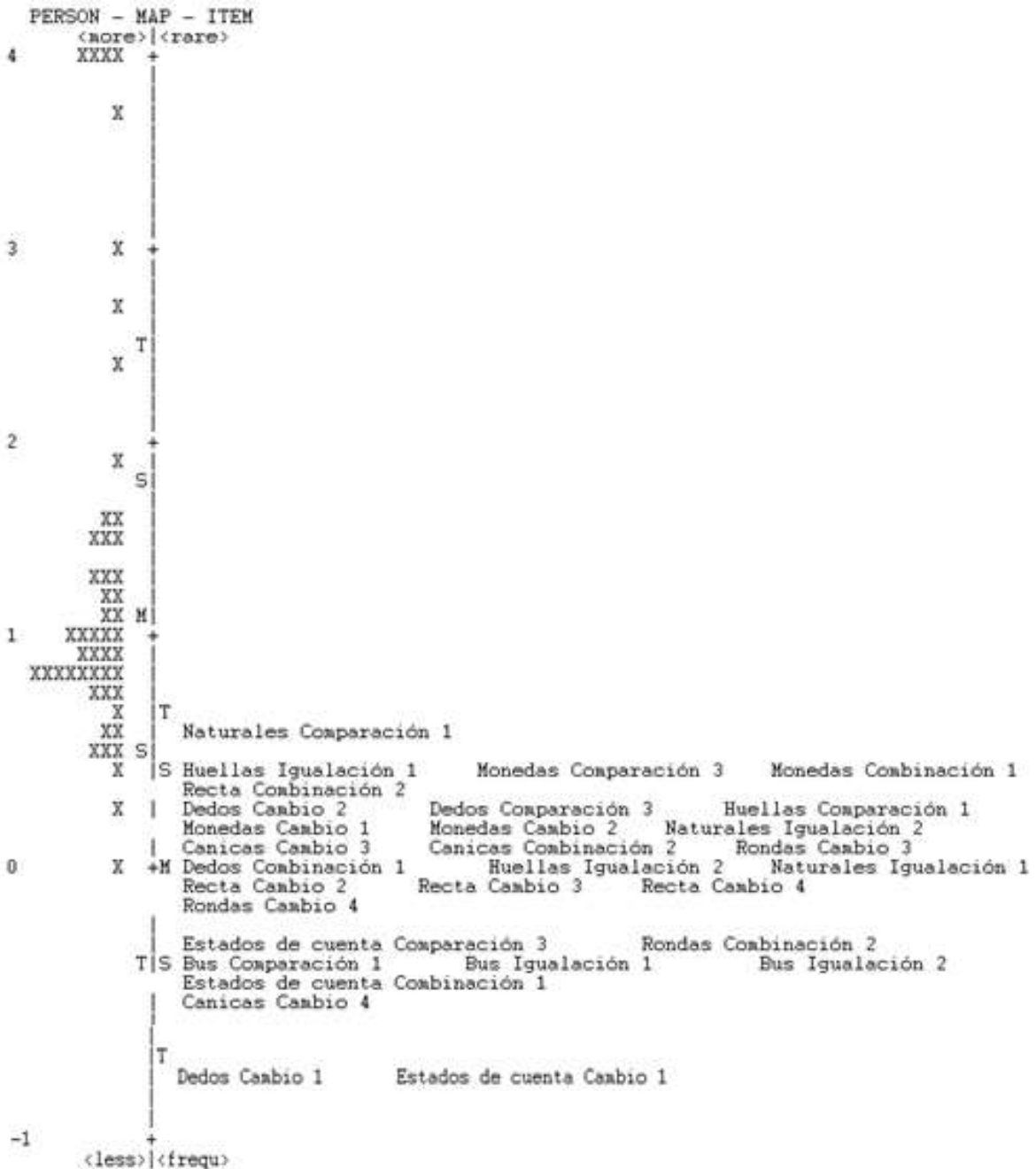
NOTA: La media, varianza y Alfa de Cronbach se calculan si se suprime el ítem de la respectiva subescala

Anexo 6. Mapa de subescala de acierto en los ítems de DESAS-Estudio piloto



El eje representa la escala de habilidad de los examinados y de dificultad de los ítems. Al lado izquierdo aparecen representado los examinados según su nivel de habilidad y al lado derecho se muestra la ubicación de los ítems según su dificultad, identificados por tipo de problema y práctica.

Anexo 7. Mapa de subescala de descontento-contento dirigido DESAS-estudio piloto



El eje representa la escala de habilidad de los examinados y de valoración de descontento-contento de los ítems. Al lado izquierdo aparecen representado los examinados según su nivel de habilidad y al lado derecho se muestra la ubicación de los ítems según su nivel de descontento-contento dirigido, identificado por tipo de problema y práctica.

Anexo 8. Confiabilidad de subescala de aciertos, descontento dirigido y tiempos de reacción DESAS-Versión final

Estadísticas de fiabilidad

	Alfa de Cronbach	N de elementos
Aciertos	.852	27
Descontento dirigido	.910	27
Tiempos de reacción	.886	27

Estadísticas de escala

	Media	Varianza	Desviación estándar	N de elementos
Aciertos	13,38	32.348	5.688	27
Descontento dirigido	69.98	68.888	8.300	27
Tiempos de reacción (miliseg)	879779,68	152814102600.000	390914.444	27

Estadísticas de total de elemento

Ítem	Nombre	Acierto				Descontento dirigido				Tiempos de reacción			
		Media	Varianza	Correlación corregida	Alfa de Cronbach	Media	Varianza	Correlación corregida	Alfa de Cronbach	Media	Varianza	Correlación corregida	Alfa de Cronbach
1	Dedos Cambio 1	12.52	31.181	.266	.851	67.26	66.081	.337	.910	791036.51	143522334300.000	.041	.927
2	Dedos Combinación 1	12.99	29.353	.519	.843	67.54	64.445	.468	.908	841857.60	142520924300.000	.480	.882
3	Dedos Comparación 3	13.14	30.092	.441	.846	67.47	64.613	.446	.908	851792.60	144472129700.000	.557	.882
4	Dedos Cambio 2	13.00	30.409	.317	.850	67.35	64.676	.452	.908	851114.49	148034222200.000	.311	.885
5	Rondas Cambio 3	12.83	29.919	.400	.847	67.40	64.408	.475	.908	847024.32	143686254800.000	.555	.881
6	Rondas Cambio 4	12.92	29.937	.395	.847	67.38	63.845	.518	.907	852012.31	146168481300.000	.518	.883
7	Rondas Combinación 2	13.08	29.788	.470	.845	67.43	63.809	.523	.907	848122.76	144202623500.000	.641	.881
8	Huellas Comparación 1	13.04	30.175	.372	.848	67.40	64.659	.462	.908	842021.63	140354380000.000	.667	.878
9	Huellas Igualación 1	12.90	29.924	.397	.847	67.34	63.899	.512	.907	845496.84	141567185300.000	.555	.880
10	Huellas Igualación 2	12.89	29.969	.388	.848	67.47	63.329	.527	.907	842027.08	141334690400.000	.567	.880
11	Monedas Cambio 1	12.98	29.799	.430	.846	67.52	62.567	.609	.905	842112.94	139312951300.000	.544	.880
12	Monedas Combinación	12.81	29.742	.435	.846	67.40	64.362	.449	.908	849635.12	142479697100.000	.688	.879

Modelo de evaluación de dificultades de aprendizaje de la adición y la sustracción 270

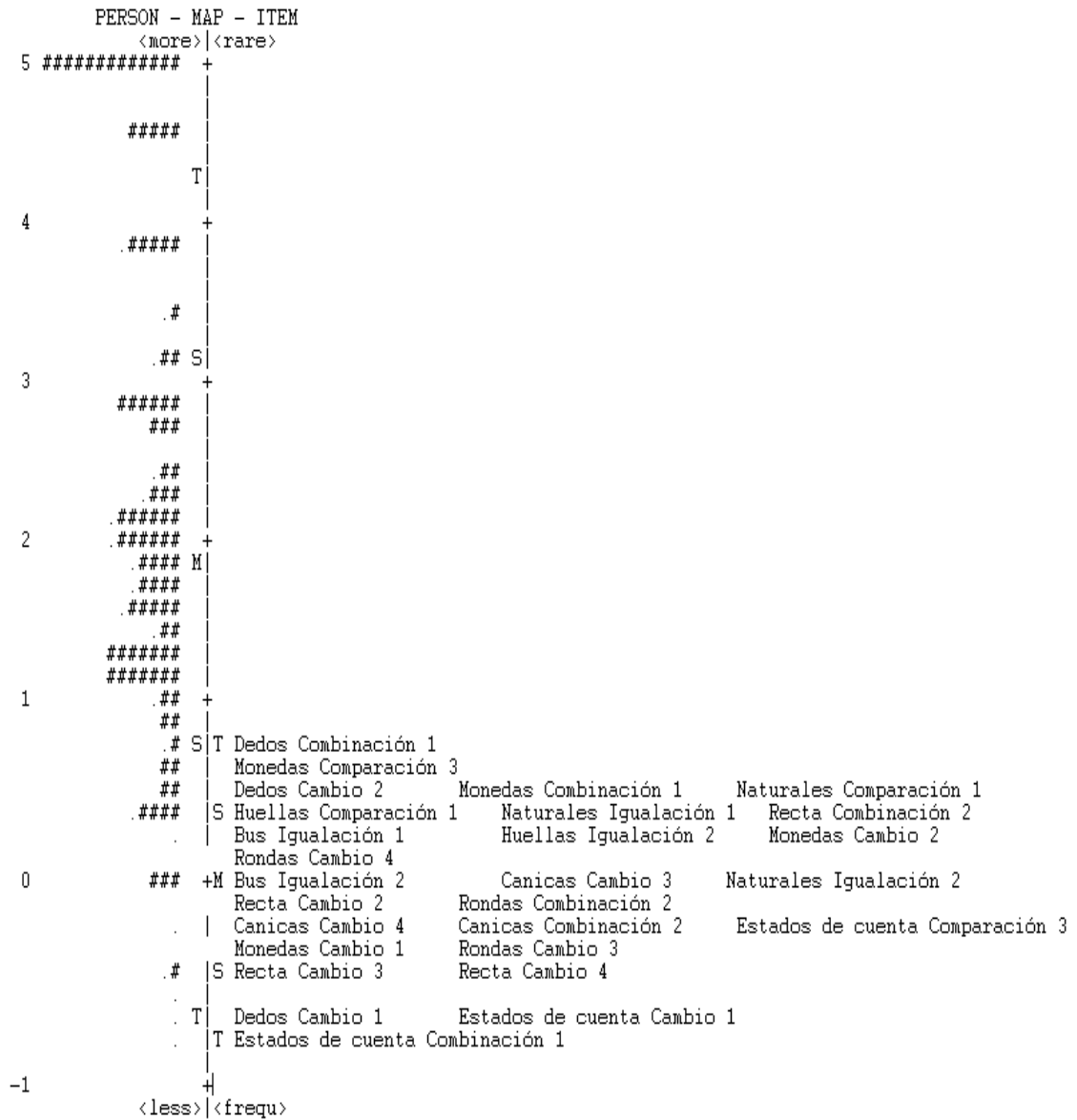
Ítem	Nombre	Acierto				Descontento dirigido				Tiempos de reacción			
		Media	Varianza	Correlación corregida	Alfa de Cronbach	Media	Varianza	Correlación corregida	Alfa de Cronbach	Media	Varianza	Correlación corregida	Alfa de Cronbach
13	1 Monedas Comparación 3	13.19	30.415	.410	.847	67.38	64.440	.475	.908	840896.12	136104964800.000	.612	.878
14	Monedas Cambio 2	13.02	29.176	.567	.842	67.36	63.542	.531	.907	844021.00	138861584700.000	.704	.877
15	Canicas Cambio 3	12.59	31.388	.174	.854	67.34	64.747	.445	.908	852728.35	145796065900.000	.546	.882
16	Canicas Cambio 4	13.00	30.172	.362	.848	67.40	63.990	.533	.907	833861.85	129815109300.000	.593	.880
17	Canicas Combinación 2	12.78	30.962	.209	.853	67.38	64.488	.477	.908	841073.87	136121169800.000	.620	.878
18	Bus Comparación 1	12.60	30.353	.400	.847	67.27	64.590	.478	.908	858100.77	145245498400.000	.620	.882
19	Bus Igualación 1	12.56	30.713	.352	.849	67.24	65.207	.424	.908	863843.32	148102451500.000	.584	.884
20	Bus Igualación 2	12.68	30.332	.358	.849	67.35	63.513	.561	.906	854563.13	141937071500.000	.618	.880
21	Estados de cuenta Cambio1	12.58	31.193	.220	.852	67.39	63.812	.519	.907	853991.78	143828588000.000	.466	.882
22	Estados de cuenta Combinación 1	12.95	29.728	.439	.846	67.32	63.911	.524	.907	857668.59	145646861800.000	.511	.882
23	Estados de cuenta Comparación 3	13.02	30.372	.329	.850	67.31	63.370	.570	.906	861107.26	147816011900.000	.437	.884
24	Rectas Cambio 2	12.84	29.681	.444	.846	67.44	63.569	.525	.907	856121.68	145557186300.000	.535	.882
25	Rectas Cambio 3	13.15	29.749	.529	.844	67.47	63.032	.566	.906	848292.43	139552219000.000	.579	.879
26	Rectas Cambio 4	12.78	30.202	.353	.849	67.43	63.242	.545	.906	854471.77	141569550800.000	.578	.880
27	Rectas Combinación 2	13.05	29.775	.456	.845	67.37	64.551	.454	.908	849275.59	139111104500.000	.595	.879
28	Adición naturales Comparación1	12.52	31.181	.266	.851	67.26	66.081	.337	.910	791036.51	143522334300.000	.041	.927
29	Adición naturales Igualación1	12.99	29.353	.519	.843	67.54	64.445	.468	.908	841857.60	142520924300.000	.480	.882
30	Adición naturales Igualación 2	13.14	30.092	.441	.846	67.47	64.613	.446	.908	851792.60	144472129700.000	.557	.882

NOTA: La media, varianza y Alfa de Cronbach se calculan si se suprime el ítem de la respectiva subescala

Anexo 9. Mapa de subescala de acierto a los ítems de-DESAS (27 ítems)



Anexo 10. Mapa de subescala de descontento-contento dirigido DESAS (27 ítems)



Anexo 11. Análisis de varianza de totales de acierto y descontento de tipos de problemas y prácticas, por zona

	Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
Aciertos Dedos	5.708	2	213	.004
Aciertos Rondas	2.101	2	213	.125
Aciertos Huellas	2.623	2	213	.075
Aciertos Monedas	.238	2	213	.788
Aciertos Canicas	8.368	2	213	.000
Aciertos Bus	.804	2	213	.449
Aciertos Estados de cuenta	6.318	2	213	.002
Aciertos Recta	1.840	2	213	.161
Aciertos adición de naturales	4.829	2	213	.009
Aciertos Cambio 1	.056	2	213	.946
Aciertos Combinación 1	.055	2	213	.947
Aciertos Comparación 3	.329	2	213	.720
Aciertos Cambio2	.147	2	213	.863
Aciertos Cambio 3	7.256	2	213	.001
Aciertos Cambio 4	3.109	2	213	.047
Aciertos Combinación 2	1.039	2	213	.356
Aciertos Comparación 1	7.746	2	213	.001
Aciertos Igualación 1	2.748	2	213	.066
Aciertos Igualación 2	1.006	2	213	.367
Descontento Dedos	1.374	2	213	.255
Descontento Rondas	.085	2	213	.919
Descontento Huellas	2.988	2	213	.053
Descontento Monedas	1.468	2	213	.233
Descontento Canicas	.347	2	213	.707
Descontento Bus	.717	2	213	.489
Descontento Estados de cuenta	.703	2	213	.496
Descontento Rectas	.245	2	213	.783
Descontento Adición de Naturales	1.423	2	213	.243
Descontento Cambio 1	1.371	2	213	.256
Descontento Combinación 1	.546	2	213	.580
Descontento Comparación 3	1.068	2	213	.345
Descontento Cambio2	5.412	2	213	.005
Descontento Cambio 3	1.578	2	213	.209
Descontento Cambio 4	.143	2	213	.867
Descontento Combinación 2	.375	2	213	.688
Descontento Comparación 1	3.184	2	213	.043
Descontento Igualación 1	.345	2	213	.709
Descontento Igualación 2	1.803	2	213	.167

		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Aciertos Dedos	Entre grupos	13.750	2	6.875	9.373	.000
	Dentro de grupos	156.232	213	.733		
	Total	169.981	215			
Aciertos Rondas	Entre grupos	7.904	2	3.952	3.634	.028
	Dentro de grupos	231.646	213	1.088		
	Total	239.551	215			
Aciertos Huellas	Entre grupos	3.546	2	1.773	3.193	.043
	Dentro de grupos	118.287	213	.555		
	Total	121.833	215			
Aciertos Monedas	Entre grupos	20.946	2	10.473	5.944	.003
	Dentro de grupos	375.272	213	1.762		
	Total	396.218	215			
Aciertos Canicas	Entre grupos	12.445	2	6.222	8.843	.000
	Dentro de grupos	149.884	213	.704		
	Total	162.329	215			
Aciertos Bus	Entre grupos	8.142	2	4.071	8.045	.000
	Dentro de grupos	107.784	213	.506		
	Total	115.926	215			

Modelo de evaluación de dificultades de aprendizaje de la adición y la sustracción 274

		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Aciertos Estados de cuenta	Entre grupos	7.568	2	3.784	4.836	.009
	Dentro de grupos	166.650	213	.782		
	Total	174.218	215			
Aciertos Recta	Entre grupos	11.735	2	5.868	4.372	.014
	Dentro de grupos	285.890	213	1.342		
	Total	297.625	215			
Aciertos adición de naturales	Entre grupos	5.144	2	2.572	2.683	.071
	Dentro de grupos	204.185	213	.959		
	Total	209.329	215			
Aciertos Cambio 1	Entre grupos	6.100	2	3.050	4.488	.012
	Dentro de grupos	144.770	213	.680		
	Total	150.870	215			
Aciertos Combinación 1	Entre grupos	6.759	2	3.379	3.873	.022
	Dentro de grupos	185.866	213	.873		
	Total	192.625	215			
Aciertos Comparación 3	Entre grupos	7.855	2	3.927	7.169	.001
	Dentro de grupos	116.696	213	.548		
	Total	124.551	215			
Aciertos Cambio2	Entre grupos	15.099	2	7.550	10.265	.000
	Dentro de grupos	156.660	213	.735		
	Total	171.759	215			
Aciertos Cambio 3	Entre grupos	8.452	2	4.226	5.157	.007
	Dentro de grupos	174.544	213	.819		
	Total	182.995	215			
Aciertos Cambio 4	Entre grupos	11.477	2	5.739	5.964	.003
	Dentro de grupos	204.949	213	.962		
	Total	216.426	215			
Aciertos Combinación 2	Entre grupos	8.015	2	4.007	4.991	.008
	Dentro de grupos	171.022	213	.803		
	Total	179.037	215			
Aciertos Comparación 1	Entre grupos	4.497	2	2.249	4.080	.018
	Dentro de grupos	117.387	213	.551		
	Total	121.884	215			
Aciertos Igualación 1	Entre grupos	2.275	2	1.138	2.189	.115
	Dentro de grupos	110.683	213	.520		
	Total	112.958	215			
Aciertos Igualación 2	Entre grupos	10.047	2	5.023	6.120	.003
	Dentro de grupos	174.837	213	.821		
	Total	184.884	215			
Descontento Dedos	Entre grupos	4.589	2	2.295	2.042	.132
	Dentro de grupos	239.411	213	1.124		
	Total	244.000	215			
Descontento Rondas	Entre grupos	7.502	2	3.751	2.850	.060
	Dentro de grupos	280.331	213	1.316		
	Total	287.833	215			
Descontento Huellas	Entre grupos	.766	2	.383	.461	.631
	Dentro de grupos	176.859	213	.830		
	Total	177.625	215			
Descontento Monedas	Entre grupos	27.350	2	13.675	4.861	.009
	Dentro de grupos	599.242	213	2.813		
	Total	626.593	215			
Descontento Canicas	Entre grupos	.683	2	.341	.225	.799
	Dentro de grupos	323.868	213	1.521		
	Total	324.551	215			
Descontento Bus	Entre grupos	.860	2	.430	.578	.562
	Dentro de grupos	158.455	213	.744		
	Total	159.315	215			
Descontento Estados de cuenta	Entre grupos	2.033	2	1.017	.724	.486
	Dentro de grupos	299.059	213	1.404		
	Total	301.093	215			
Descontento Rectas	Entre grupos	2.192	2	1.096	.395	.674
	Dentro de grupos	590.901	213	2.774		
	Total	593.093	215			
Descontento Adición de Naturales	Entre grupos	9.848	2	4.924	2.992	.052
	Dentro de grupos	350.481	213	1.645		
	Total	360.329	215			
Descontento Cambio 1	Entre grupos	3.185	2	1.592	1.251	.288

Modelo de evaluación de dificultades de aprendizaje de la adición y la sustracción 275

		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
	Dentro de grupos	271.033	213	1.272		
	Total	274.218	215			
Descontento Combinación 1	Entre grupos	6.751	2	3.376	2.588	.078
	Dentro de grupos	277.841	213	1.304		
	Total	284.593	215			
Descontento Comparación 3	Entre grupos	3.725	2	1.863	1.956	.144
	Dentro de grupos	202.775	213	.952		
	Total	206.500	215			
Descontento Cambio2	Entre grupos	10.978	2	5.489	3.994	.020
	Dentro de grupos	292.684	213	1.374		
	Total	303.662	215			
Descontento Cambio 3	Entre grupos	.367	2	.183	.131	.877
	Dentro de grupos	297.740	213	1.398		
	Total	298.106	215			
Descontento Cambio 4	Entre grupos	.421	2	.211	.132	.876
	Dentro de grupos	339.412	213	1.593		
	Total	339.833	215			
Descontento Combinación 2	Entre grupos	5.819	2	2.909	1.921	.149
	Dentro de grupos	322.607	213	1.515		
	Total	328.426	215			
Descontento Comparación 1	Entre grupos	5.561	2	2.781	3.154	.045
	Dentro de grupos	187.772	213	.882		
	Total	193.333	215			
Descontento Igualación 1	Entre grupos	1.470	2	.735	.909	.404
	Dentro de grupos	172.155	213	.808		
	Total	173.625	215			
Descontento Igualación 2	Entre grupos	.667	2	.334	.273	.761
	Dentro de grupos	260.106	213	1.221		
	Total	260.773	215			

Anexo 12. Análisis de varianza de totales de acierto y descontento de tipos de problemas y prácticas, por curso

Prueba de homogeneidad de varianzas

	Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
Aciertos Dedos	2.710	2	213	.069
Aciertos Rondas	3.684	2	213	.027
Aciertos Huellas	5.248	2	213	.006
Aciertos Monedas	1.895	2	213	.153
Aciertos Canicas	13.431	2	213	.000
Aciertos Bus	2.173	2	213	.116
Aciertos Estados de cuenta	6.184	2	213	.002
Aciertos Recta	10.097	2	213	.000
Aciertos adición de naturales	3.294	2	213	.039
Aciertos Cambio 1	7.464	2	213	.001
Aciertos Combinación 1	.192	2	213	.826
Aciertos Comparación 3	.646	2	213	.525
Aciertos Cambio2	.062	2	213	.940
Aciertos Cambio 3	7.117	2	213	.001
Aciertos Cambio 4	5.087	2	213	.007
Aciertos Combinación 2	.732	2	213	.482
Aciertos Comparación 1	23.004	2	213	.000
Aciertos Igualación 1	1.654	2	213	.194
Aciertos Igualación 2	6.635	2	213	.002
Descontento Dedos	.676	2	213	.510
Descontento Rondas	.003	2	213	.997
Descontento Huellas	.766	2	213	.466
Descontento Monedas	1.039	2	213	.356
Descontento Canicas	3.141	2	213	.045
Descontento Bus	1.086	2	213	.339
Descontento Estados de cuenta	2.623	2	213	.075
Descontento Rectas	.154	2	213	.857
Descontento Adición de Naturales	.129	2	213	.879
Descontento Cambio 1	3.838	2	213	.023
Descontento Combinación 1	.667	2	213	.515
Descontento Comparación 3	.238	2	213	.788
Descontento Cambio2	.523	2	213	.593
Descontento Cambio 3	.943	2	213	.391
Descontento Cambio 4	.332	2	213	.718
Descontento Combinación 2	.102	2	213	.903
Descontento Comparación 1	.576	2	213	.563
Descontento Igualación 1	.049	2	213	.953
Descontento Igualación 2	.374	2	213	.688

ANOVA

		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
	Entre grupos	26.841	2	13.420	19.970	.000
Aciertos Dedos	Dentro de grupos	143.141	213	.672		
	Total	169.981	215			
	Entre grupos	16.163	2	8.082	7.706	.001
Aciertos Rondas	Dentro de grupos	223.388	213	1.049		
	Total	239.551	215			
	Entre grupos	10.300	2	5.150	9.835	.000
Aciertos Huellas	Dentro de grupos	111.533	213	.524		
	Total	121.833	215			
	Entre grupos	68.589	2	34.295	22.296	.000
Aciertos Monedas	Dentro de grupos	327.628	213	1.538		
	Total	396.218	215			
	Entre grupos	20.234	2	10.117	15.165	.000
Aciertos Canicas	Dentro de grupos	142.095	213	.667		

Modelo de evaluación de dificultades de aprendizaje de la adición y la sustracción 277

ANOVA		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
	Total	162.329	215			
	Entre grupos	3.384	2	1.692	3.202	.043
Aciertos Bus	Dentro de grupos	112.542	213	.528		
	Total	115.926	215			
	Entre grupos	18.704	2	9.352	12.809	.000
Aciertos Estados de cuenta	Dentro de grupos	155.514	213	.730		
	Total	174.218	215			
	Entre grupos	29.632	2	14.816	11.776	.000
Aciertos Recta	Dentro de grupos	267.993	213	1.258		
	Total	297.625	215			
	Entre grupos	29.394	2	14.697	17.398	.000
Aciertos adición de naturales	Dentro de grupos	179.935	213	.845		
	Total	209.329	215			
	Entre grupos	18.689	2	9.344	15.058	.000
Aciertos Cambio 1	Dentro de grupos	132.181	213	.621		
	Total	150.870	215			
	Entre grupos	27.398	2	13.699	17.660	.000
Aciertos Combinación 1	Dentro de grupos	165.227	213	.776		
	Total	192.625	215			
	Entre grupos	8.375	2	4.187	7.677	.001
Aciertos Comparación 3	Dentro de grupos	116.176	213	.545		
	Total	124.551	215			
	Entre grupos	21.603	2	10.801	15.322	.000
Aciertos Cambio2	Dentro de grupos	150.157	213	.705		
	Total	171.759	215			
	Entre grupos	26.420	2	13.210	17.970	.000
Aciertos Cambio 3	Dentro de grupos	156.575	213	.735		
	Total	182.995	215			
	Entre grupos	34.216	2	17.108	19.999	.000
Aciertos Cambio 4	Dentro de grupos	182.210	213	.855		
	Total	216.426	215			
	Entre grupos	8.482	2	4.241	5.297	.006
Aciertos Combinación 2	Dentro de grupos	170.555	213	.801		
	Total	179.037	215			
	Entre grupos	13.324	2	6.662	13.071	.000
Aciertos Comparación 1	Dentro de grupos	108.560	213	.510		
	Total	121.884	215			
	Entre grupos	9.156	2	4.578	9.394	.000
Aciertos Igualación 1	Dentro de grupos	103.803	213	.487		
	Total	112.958	215			
	Entre grupos	14.188	2	7.094	8.852	.000
Aciertos Igualación 2	Dentro de grupos	170.696	213	.801		
	Total	184.884	215			
	Entre grupos	6.992	2	3.496	3.142	.045
Descontento Dedos	Dentro de grupos	237.008	213	1.113		
	Total	244.000	215			
	Entre grupos	3.158	2	1.579	1.181	.309
Descontento Rondas	Dentro de grupos	284.676	213	1.337		
	Total	287.833	215			
	Entre grupos	5.461	2	2.730	3.378	.036
Descontento Huellas	Dentro de grupos	172.164	213	.808		
	Total	177.625	215			
	Entre grupos	2.505	2	1.252	.427	.653
Descontento Monedas	Dentro de grupos	624.088	213	2.930		
	Total	626.593	215			
	Entre grupos	3.679	2	1.839	1.221	.297
Descontento Canicas	Dentro de grupos	320.872	213	1.506		
	Total	324.551	215			
	Entre grupos	.593	2	.297	.398	.672
Descontento Bus	Dentro de grupos	158.721	213	.745		
	Total	159.315	215			
	Entre grupos	17.398	2	8.699	6.531	.002
Descontento Estados de cuenta	Dentro de grupos	283.695	213	1.332		
	Total	301.093	215			
	Entre grupos	2.594	2	1.297	.468	.627
Descontento Rectas	Dentro de grupos	590.498	213	2.772		

Modelo de evaluación de dificultades de aprendizaje de la adición y la sustracción 278

ANOVA

		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
	Total	593.093	215			
	Entre grupos	3.062	2	1.531	.913	.403
Descontento Adición de Naturales	Dentro de grupos	357.266	213	1.677		
	Total	360.329	215			
	Entre grupos	13.380	2	6.690	5.463	.005
Descontento Cambio 1	Dentro de grupos	260.838	213	1.225		
	Total	274.218	215			
	Entre grupos	6.444	2	3.222	2.467	.087
Descontento Combinación 1	Dentro de grupos	278.149	213	1.306		
	Total	284.593	215			
	Entre grupos	.511	2	.256	.264	.768
Descontento Comparación 3	Dentro de grupos	205.989	213	.967		
	Total	206.500	215			
	Entre grupos	1.930	2	.965	.681	.507
Descontento Cambio2	Dentro de grupos	301.732	213	1.417		
	Total	303.662	215			
	Entre grupos	.193	2	.097	.069	.933
Descontento Cambio 3	Dentro de grupos	297.913	213	1.399		
	Total	298.106	215			
	Entre grupos	4.325	2	2.162	1.373	.256
Descontento Cambio 4	Dentro de grupos	335.508	213	1.575		
	Total	339.833	215			
	Entre grupos	.178	2	.089	.058	.944
Descontento Combinación 2	Dentro de grupos	328.248	213	1.541		
	Total	328.426	215			
	Entre grupos	1.306	2	.653	.724	.486
Descontento Comparación 1	Dentro de grupos	192.027	213	.902		
	Total	193.333	215			
	Entre grupos	.851	2	.425	.525	.593
Descontento Igualación 1	Dentro de grupos	172.774	213	.811		
	Total	173.625	215			
	Entre grupos	4.718	2	2.359	1.962	.143
Descontento Igualación 2	Dentro de grupos	256.055	213	1.202		
	Total	260.773	215			

Anexo 14. Nube de palabras Estrategias para problemas de combinación en Perú y Colombia

Perú



Colombia



Anexo 15. Nube de palabras Estrategias para problemas de comparación en Perú y Colombia

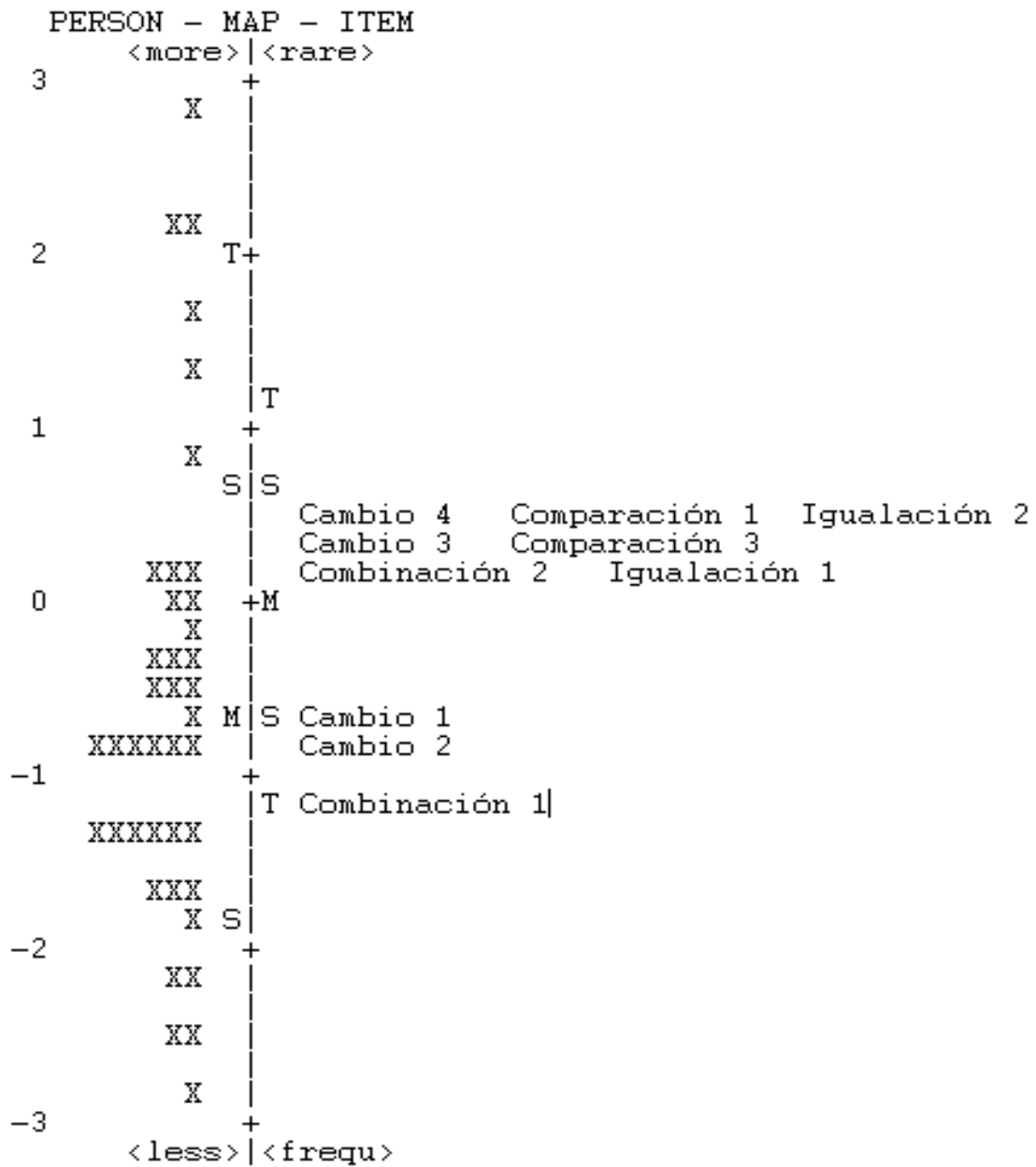
Perú



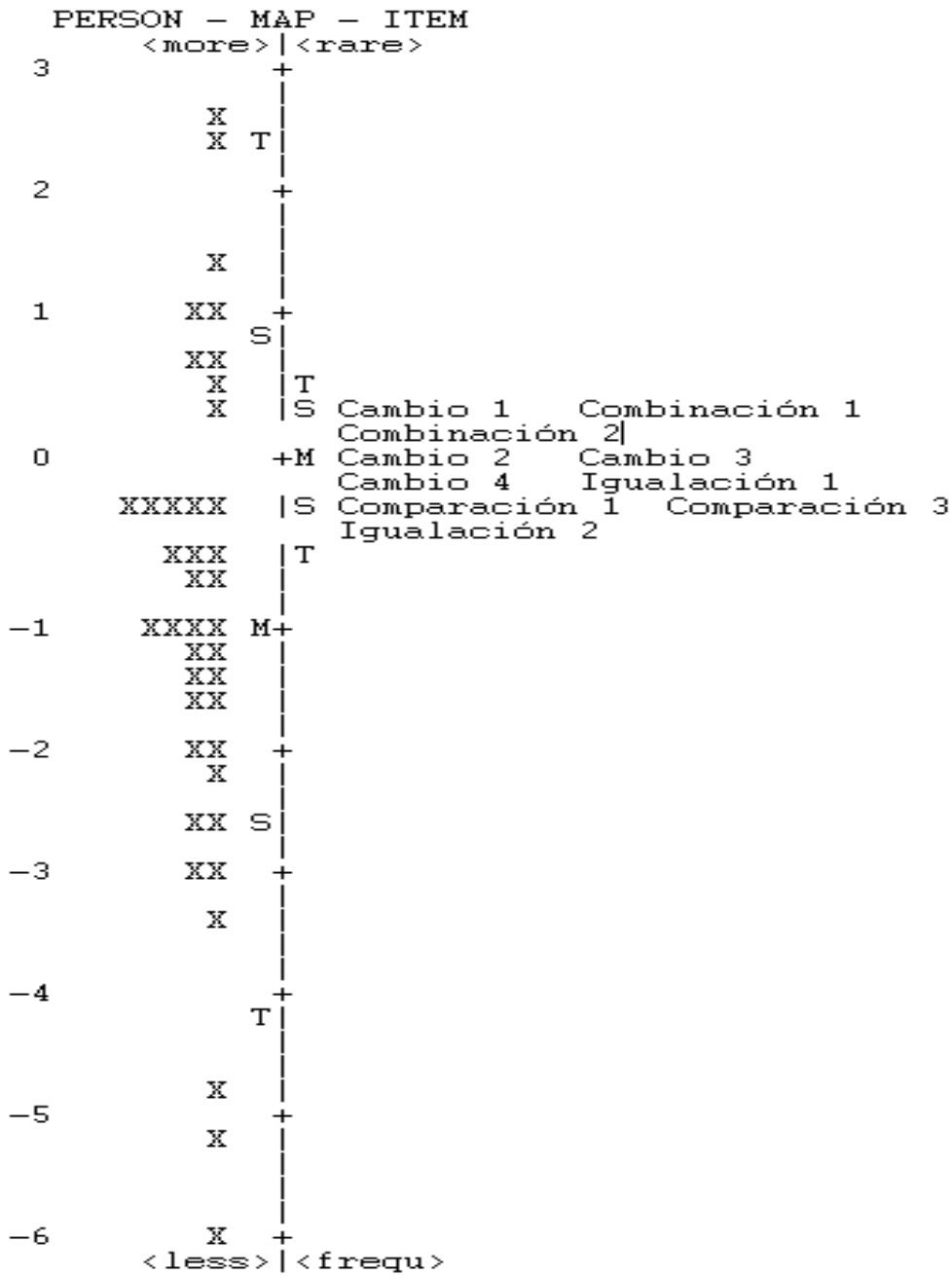
Colombia



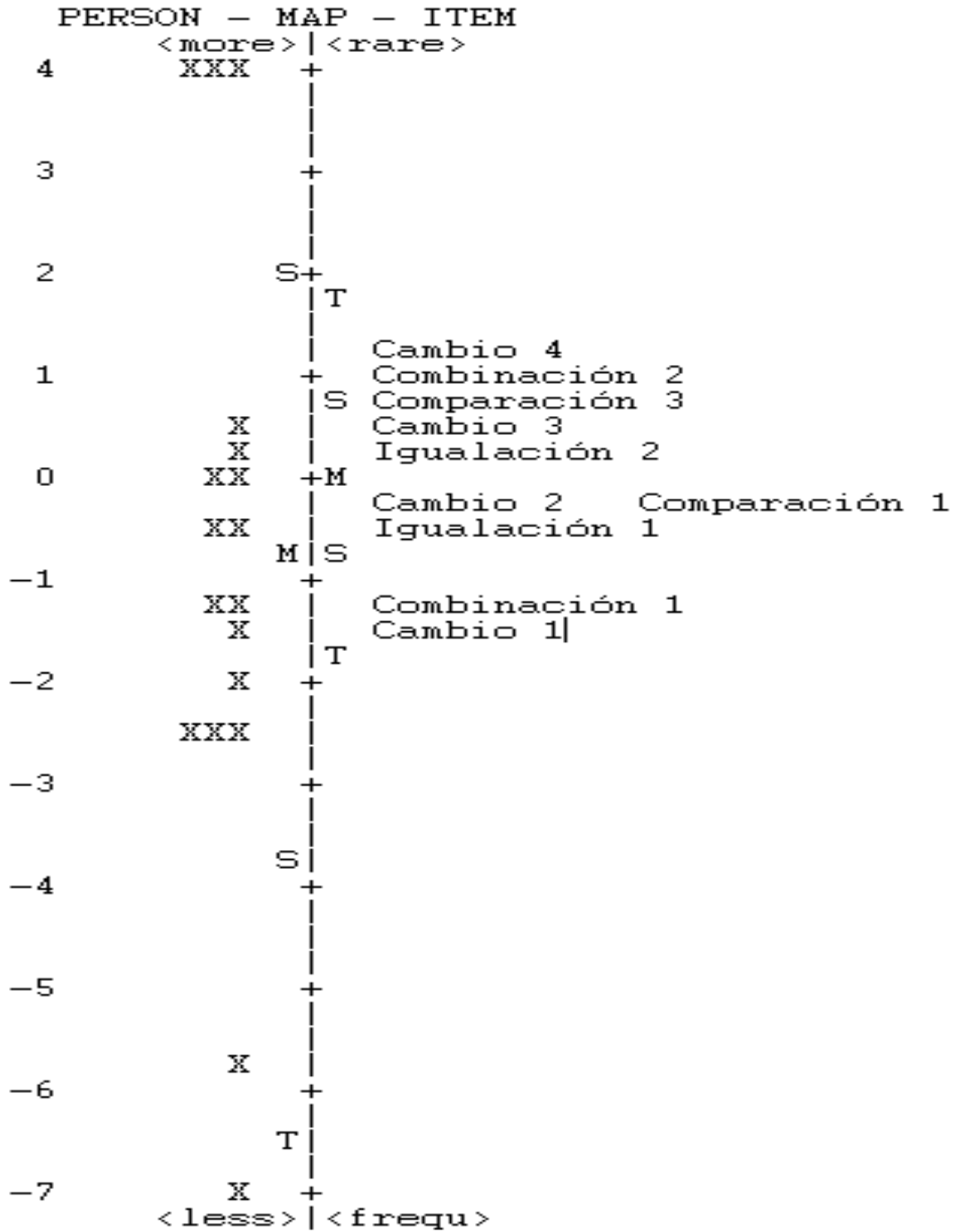
Anexo 17. Mapa de ítems de escala de dificultad percibida (DISAS estudio piloto)



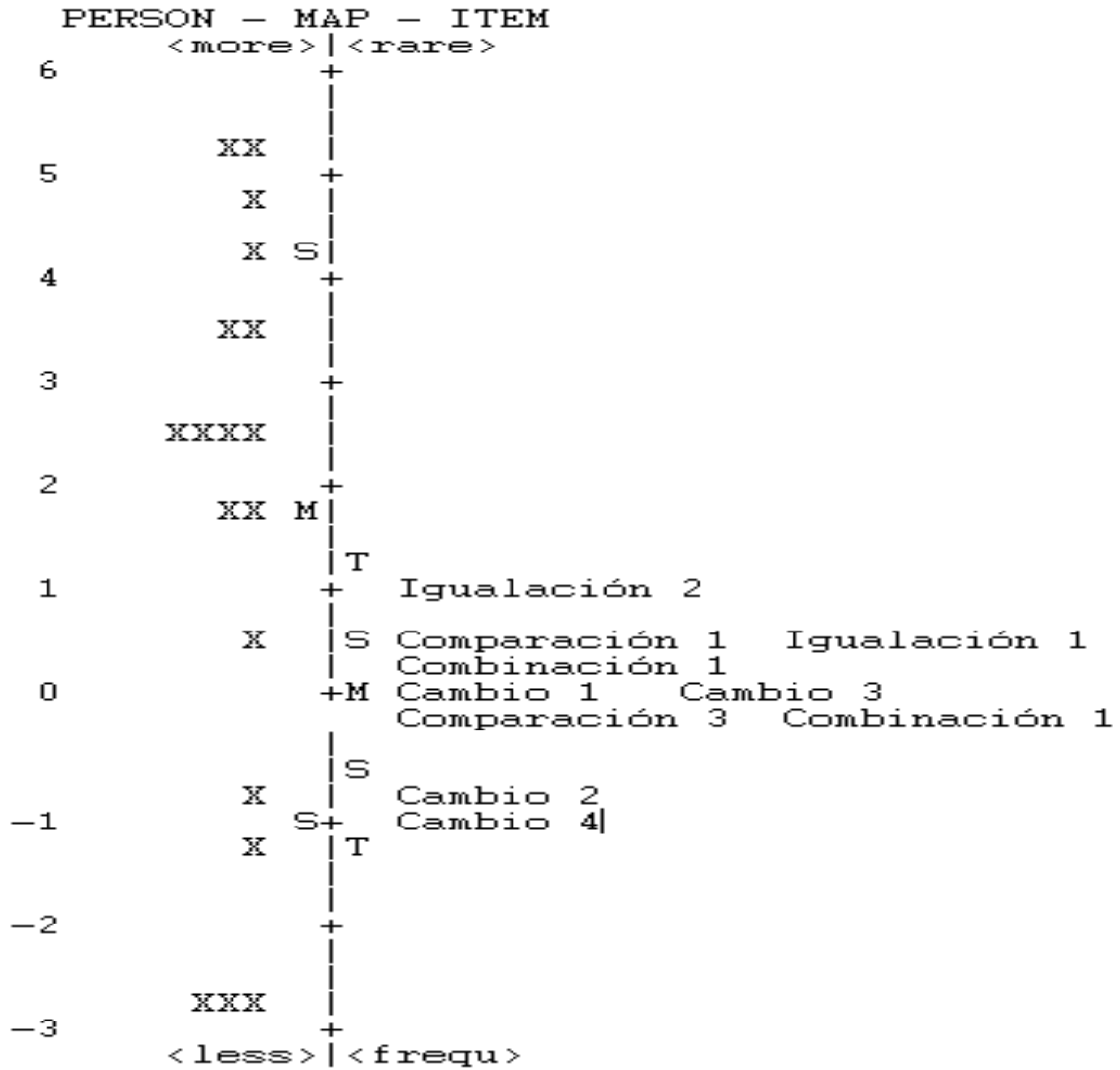
Anexo 18. Mapa de ítems de escala de dificultad instituida (DISAS estudio piloto)



Anexo 21. Mapa de ítems de escala de dificultad percibida (DISAS aplicación de validación)



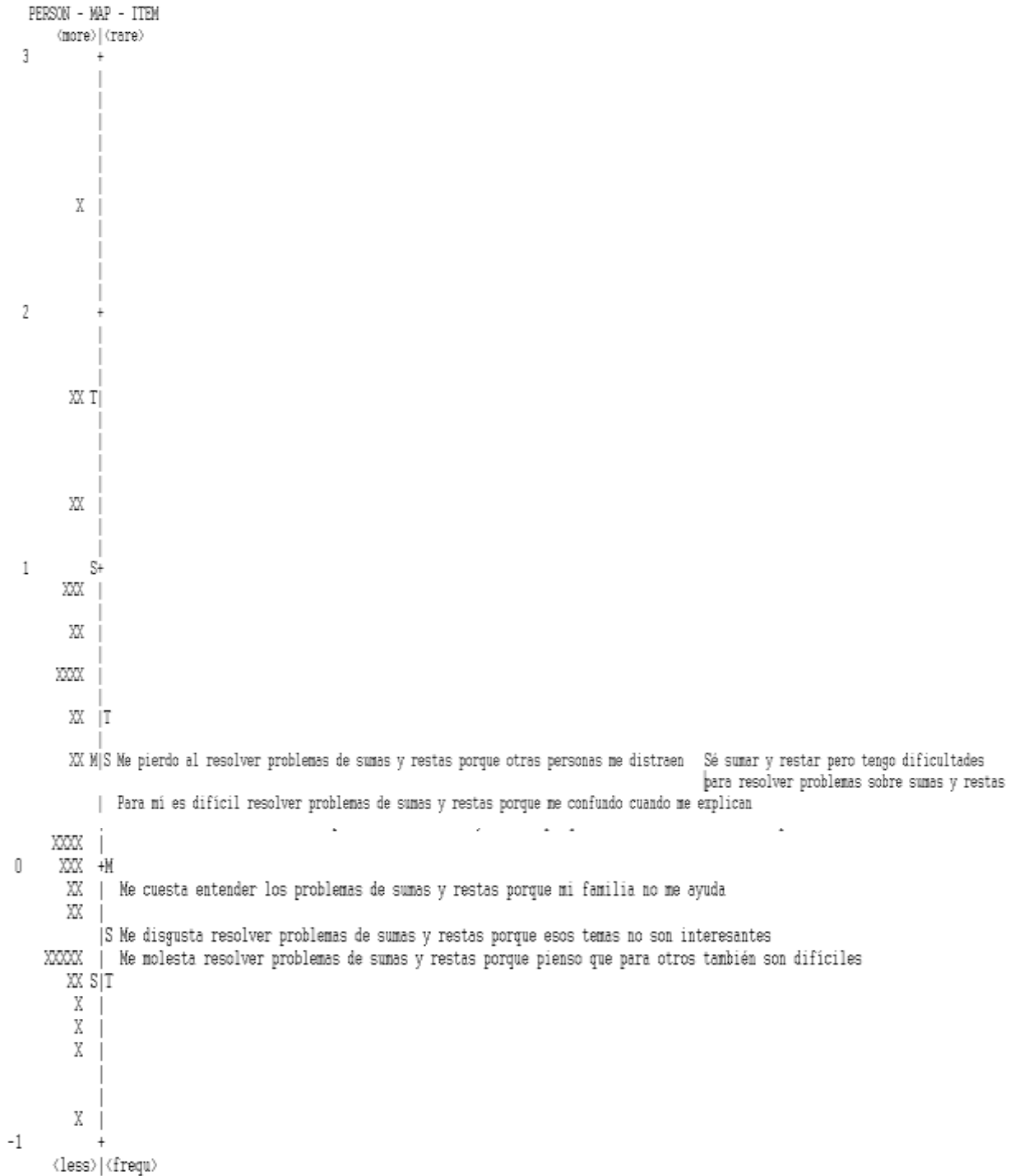
Anexo 22. Mapa de ítems de escala de dificultad instituida (DISAS aplicación de validación)



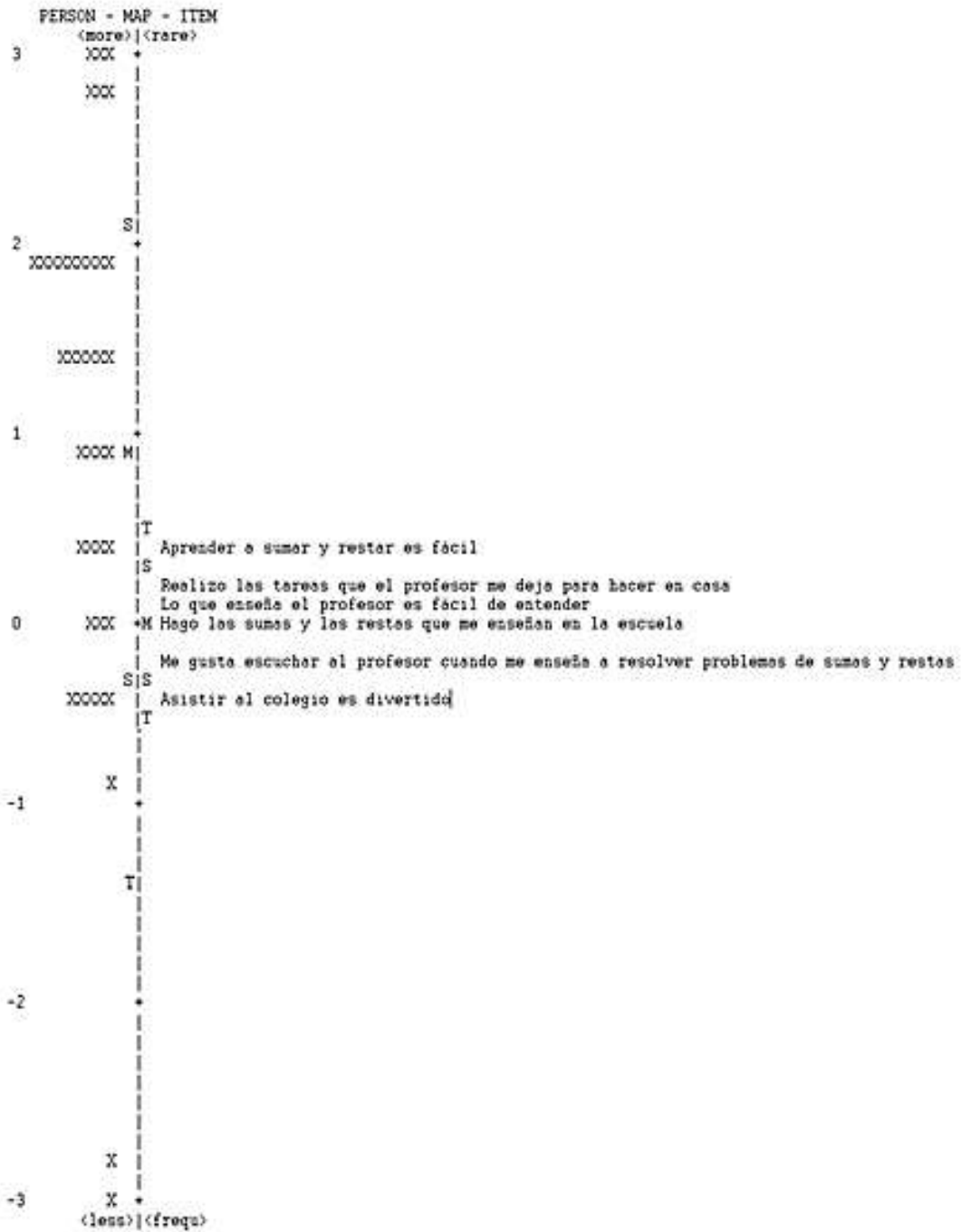
Anexo 23. Mapa de ítems de DASAS-D. Estudio piloto



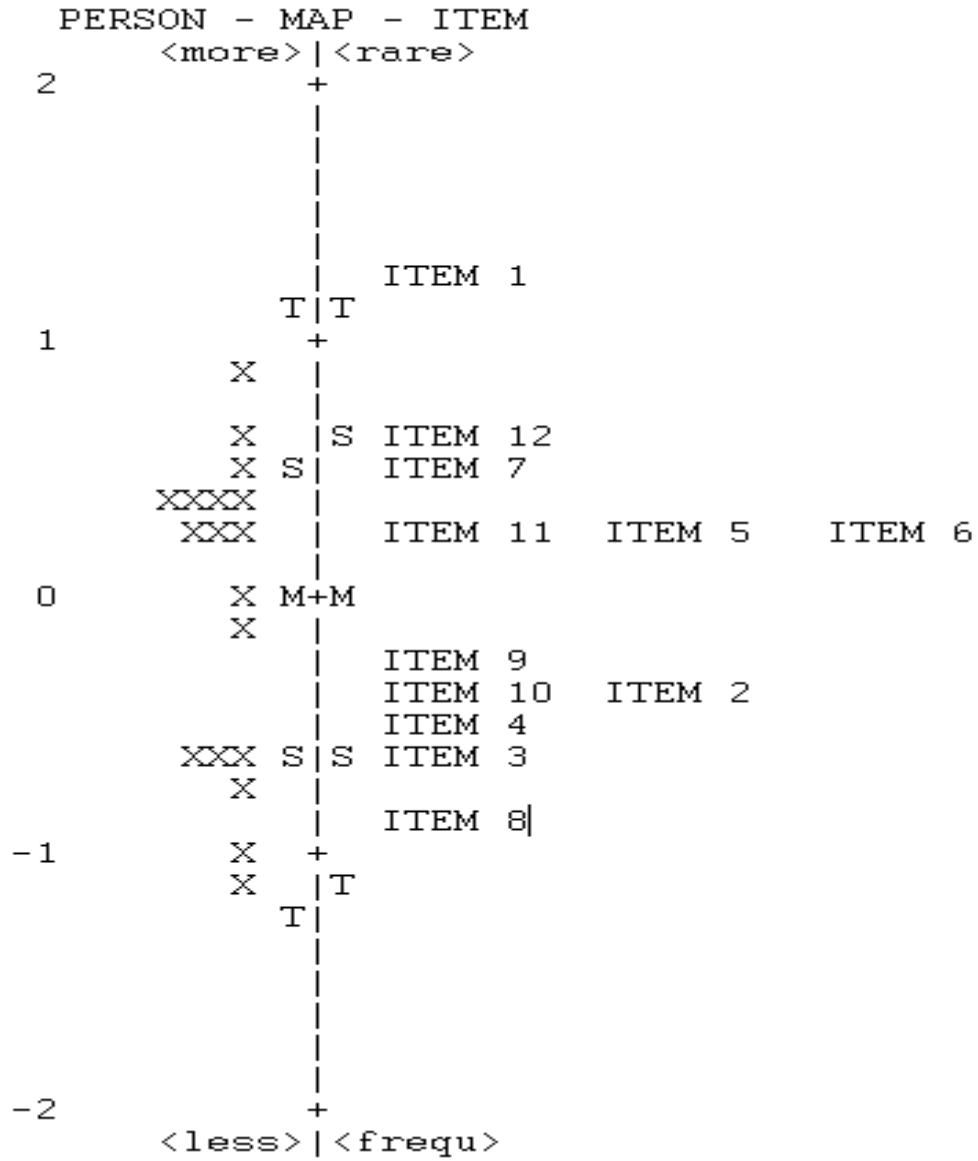
Anexo 24. Mapa de ítems de panorama reflexivo DASAS-E. Estudio piloto



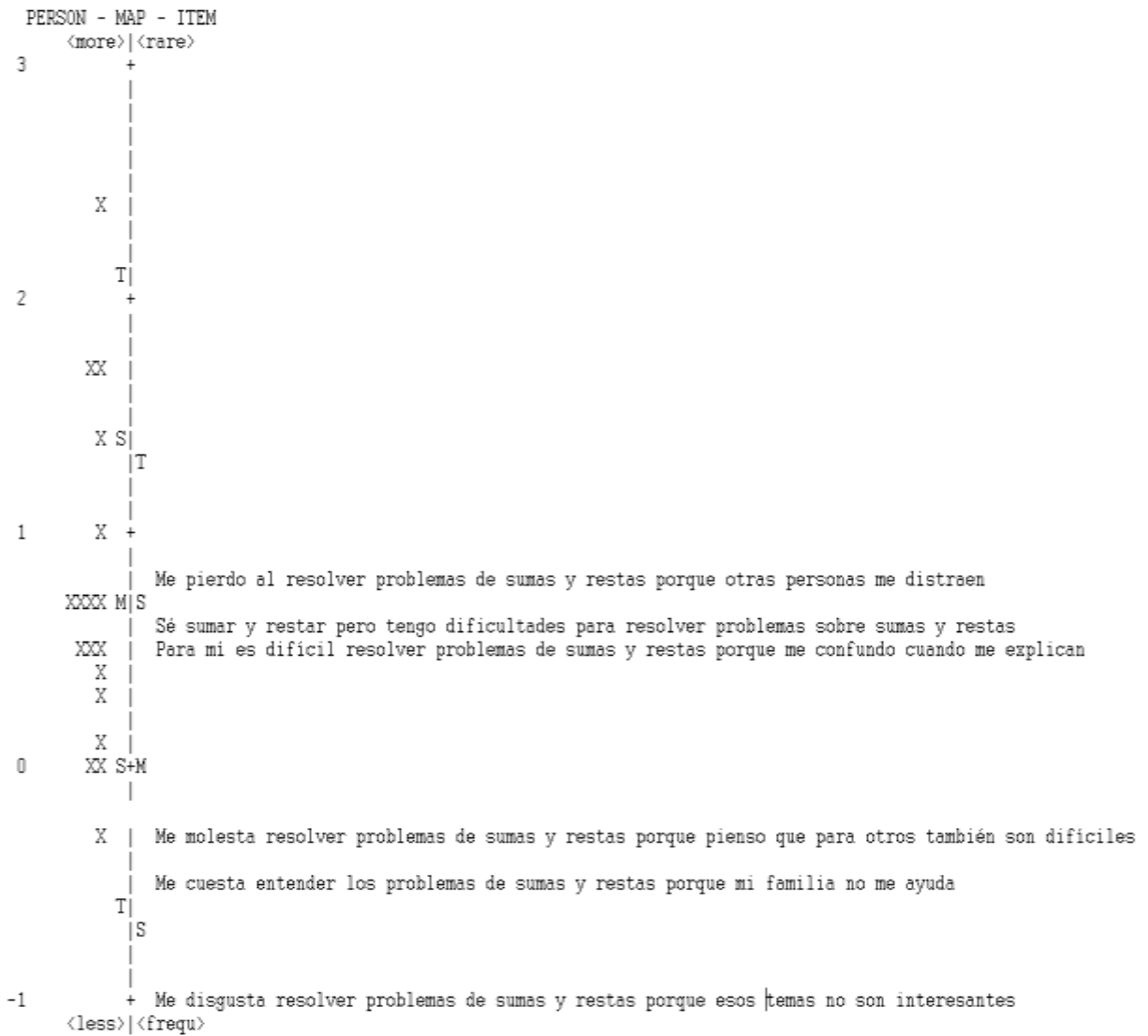
Anexo 25. Mapa de ítems de panorama irreflexivo DASAS-E. Estudio piloto



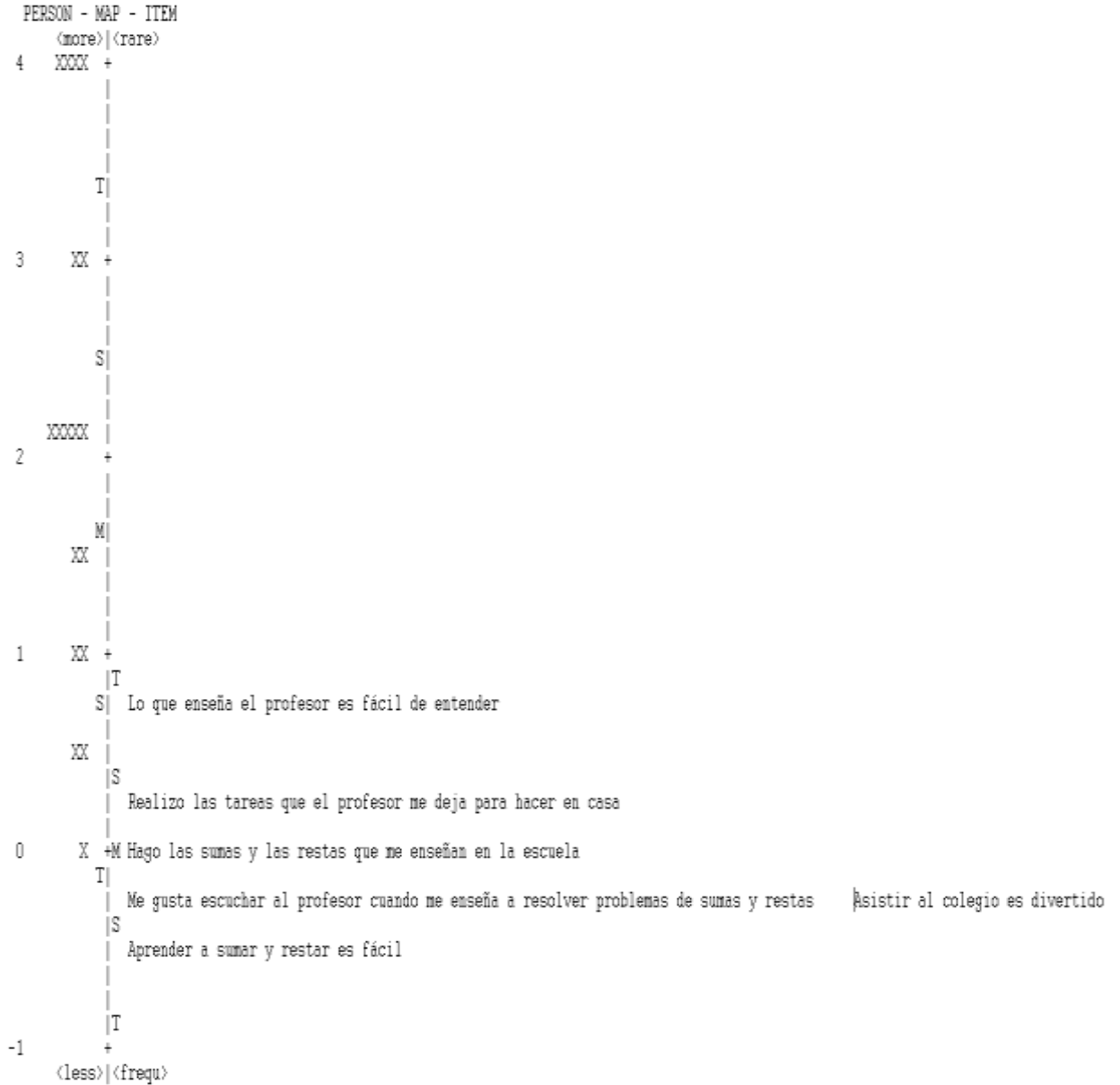
Anexo 26. Mapa de ítems de DASAS-D. Aplicación de validación



Anexo 27. Mapa de ítems de panorama reflexivo DASAS-E (Aplicación de validación)



Anexo 28. Mapa de ítems de panorama irreflexivo DASAS-E (Aplicación de validación)



Anexo 29. Modelo normativo situado con variables activas y suplementarias

