BOGOTÁ BIEN ALIMENTADA COMO UN PROBLEMA LINEAL

por

LUISA PAOLA SALAZAR VIZCAYA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D. C., 2009

BOGOTÁ BIEN ALIMENTADA COMO UN PROBLEMA LINEAL

LUISA PAOLA SALAZAR VIZCAYA

Código 830247

Trabajo de grado presentado para optar al título de Magister en Ciencias - Matemática Aplicada

Dirigido por
Dr. rer. Nat. Hernán Estrada Bustos

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D. C., 2009

"... el hambre es una muerte
que se hace la olvidada
se demora
finge buscar su cita en la libreta
pero al final te toca
y es una brea
inarrancable..."

El hambre ocurre, Ana Istarú

Resumen

Se estudia una de las estrategias más visibles y publicitadas de la Política de seguridad alimentaria en Bogotá: los **comedores comunitarios de Bogotá bien alimentada**. Empezando por un panorama de dicha Política, los alcances que ha tenido en los últimos años, el impacto en términos de población atendida y lo que significa para un usuario la posibilidad de acceder a este beneficio. Luego se hace un sumario de los conceptos fundamentales de programación lineal que sustentan los métodos utilizados en los desarrollos posteriores. Es planteada una visión global de su funcionamiento y propósitos, posteriormente un diagnóstico detallado del desempeño en lo que se refiere a el suministro de nutrientes y una serie de propuestas para mejorar los resultados del programa tal como funciona actualmente. Culminamos con resultados, conclusiones y recomendaciones producto de optimizar un conjunto de sistemas similares a *La dieta de Stigler*, uno que consiste en encontrar el mejor desempeño posible dados los recursos con que se cuenta y por último se selecciona un conjunto de menús que sin modificaciones en las porciones o los costos estaría más cerca de cumplir las metas del programa.

Agradecimientos

Al profesor Hernán Estrada, quien dirigio este trabajo con gran interés, indicando con su vasta experiencia el camino a seguir frente cada uno de los inconvenientes que se fueron presentando. Por la huella importante que ha tenido su asesoría en mi vida académica y laboral.

A mi familia: mi mamá Olga, mi hermano Juan Andrés, mi prima Jessica, mi abuelita Leo y muy especialmente a mis tías: Consuelo, Diva y Amparo, porque han llenado mi vida de respaldo, cariño y generosidad.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Panorama general de la Política de Seguridad Alimentaria y nutricional en Bogotá: Bogotá Bien Alimentada

En Colombia, reveló la UNICEF en mayo de año en curso, 12 de cada 100 niños sufren desnutrición crónica y la misma organización estima además que anualmente fallecen 5000 por desnutrición. El Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE), maneja cifras distintas: unas 700 muertes entre el 2003 y el 2005. Un estudio realizado por la universidad Externado de Colombia, revela que en el país, cada día mueren 3 niños menores de 5 años por razones asociadas a la desnutrición. Las bajas cifras del DANE podrían atribuirse a que este organismo no incluye las muertes causadas por enfermedades asociadas.

El problema del no acceso a la alimentación, no es sólo de la infancia, de hecho en Colombia, y particularmente en Bogotá, acarrea consecuencias relacionadas por ejemplo con la delincuencia y es un factor limitante para las personas en edad laboral. El DANE, en la *Encuesta de calidad de vida, año 2003* [1] muestra que el *porcentaje de hogares donde por falta de dinero, alguna persona dejó de consumir las 3 comidas uno o más días de la semana* es para Bogotá del 8.6 %. Los estratos 1 y 2 son los más afectados sin mencionar que también presentan los índices más altos de natalidad.

Según el DNP (Departamento Nacional de Planeación) la *Seguridad alimentaria y Nutricional* "se refiere a la disponibilidad suficiente y estable de alimentos, el acceso y el consumo oportuno y permanente de los mismos en cantidad, calidad e inocuidad por parte de todas las personas, bajo condiciones que permitan su adecuada utilización biológica, para llevar una vida saludable y activa". Puede decirse que en Bogotá la forma como se administra la política de *Seguridad alimentaria y Nutricional* depende de la alcaldía en curso. Un ejemplo claro de esta situación es el considerado proyecto bandera del anterior alcalde, Luis Eduardo Garzón (2002-2006): **Bogotá sin Hambre** que se transformó con la nueva alcaldía en **Bogotá Bien Alimentada**, un programa diferente en varios sentidos, incluida la administración, pues paso de manos de la alcaldía, en el primer caso, a su nuevo responsable : La *Secretaría distrital para la integración social* (SIDIS).

Garantizar la seguridad alimentaria a la población requiere de varios canales de acción, que van desde el *Plan maestro de abastecimiento para Bogotá*, que consiste en la creación de redes de campesinos y tenderos que negocian directamente, eliminando el costo de intermediación para poder "vender más barato", hasta el servicio de **comedores comunitarios**, que es el objeto de estudio de este trabajo (287 en abril del 2009 sirviendo cerca de 94.100 almuerzos diarios de lunes a sábado), pasando por refrigerios escolares. En medio de las críticas, relacionadas principalmente con el hecho de que, en particular los **comedores comunitarios** son una medida de emergencia no autosostenible, fueron difundidos ampliamente en los medios de comunicación los alcances **Bogotá sin Hambre**, entre los que se destacan:

- Según el registro de infantes atendidos en la red pública de hospitales. El nivel de desnutrición crónica (cuando cuerpo agota las reservas orgánicas que ha ido acumulando por consumo de alimentos, lo que implica que alguna función es sacrificada por otra más necesaria para sobrevivir) que en el 2002 ascendía a 15.4 % disminuyó a 12.8 % en menores de 12 años

- El Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD) destaca que Bogotá cumplió altamente con la meta relacionada con el peso de los niños y que sólo el 1 % de los niños menores de 5 años presentan cuadros de desnutrición crónica.

Por otro lado **Bogotá bien alimentada** ha transcurrido en medio de escándalos: comedores que cierran por largas temporadas y sin previo aviso (grave, si se tiene en cuenta que según el distrito, proporcionan en este almuerzo el 40 % del requerimiento diario de proteínas y nutrientes y que algunas personas en condiciones de extrema pobreza no comen más en todo el día), mala administración de los dineros que aportan los usuarios (el almuerzo tiene un costo simbólico de $300), baja calidad y cantidad de los alimentos servidos e incluso insalubridad. Así lo registro el periódico **EL TIEMPO** el pasado 17 de mayo.

Debido a la importancia y visibilidad de los comedores comunitarios, es fundamental explorar su desempeño desde un punto de vista más técnico y detallado, es por eso que en este trabajo se propone y desarrolla una metodología basada en procesos de optimización por medio de la cual se analizan los comedores comunitarios a nivel micro, observando la calidad individual y colectiva de todos los menús ofrecidos a la población beneficiada según el grupo de edad al que pertenece. Se adelantaron tres procesos de optimización: el primero consiste en calcular las porciones (en Kilogramos) que deben ser servidas para satisfacer el porcentaje de las necesidades diarias de nutrientes que corresponde al almuerzo, minimizando el costo. En contraste con este método, el segundo proceso fija el costo del menú y recalcula las porciones de tal forma que el suministro de nutrientes sea lo más *parecido* al porcentaje ya mencionado (esto significa minimizar la diferencia porcentual entre el requerimiento que se quiere satisfacer y el proporcionado por las porciones calculadas). Por último, se estima un nuevo ciclo de menús que sin modificación alguna son más aptos para el programa en términos de contenido nutricional. Esto se logra maximizando el promedio de suministro de nutrientes a lo largo de un ciclo, sujeto a que cada menú puede servirse máximo dos veces.

También se comparan cuantitativamente los menús óptimos con los que realmente se sirven en los comedores, por medio de *índices de confianza*, de esta forma se estima qué tan diferentes son en términos de nutrientes y costos. A lo largo del documento se presentan además una serie de sencillos análisis de sensibilidad que proporcionan algunos resultados interesantes, entre otros, las consecuencias de incrementos en los precios de algunos alimentos de los que los comedores dependen más significativamente y, por otro lado la variación de los precios óptimos frente a perturbaciones sobre las restricciones.

Los algoritmos de optimización utilizados fueron programados e implementados en **MATLAB**, al igual que el tratamiento de las bases de datos.

Según la (SIDIS), BBA [2] "...está dirigida a familias en condiciones de vulnerabilidad y pobreza, de estratos 1 y 2 o con nivel Sisben 1 y 2, prioritariamente con niños y niñas desescolarizados o escolarizados, mujeres gestantes y madres lactantes, personas mayores, personas con limitaciones físicas, sensoriales y cognitivas, así como para familias en situación de desplazamiento o con jefatura única y habitantes de la calle ...". También de acuerdo con la SIDIS El servicio representa un aporte del 35 % al 40 % de las recomendaciones diarias de calorías y nutrientes. ¿Qué tan cierto es esto?, ¿Qué tan óptima es la utilización de los recursos destinados a cumplir esta meta?.

De acuerdo con la SECRETARÍA DISTRITAL DE PLANEACIÓN (SDP), La población Bogotana se distribuye por estratos así:

- No registra: 1 %
- Estrato 1 : 6.9 %
- Estrato 2 : 36.8 %
- Estrato 3 : 42.7 %
- Estrato 4 : 7.3 %
- Estrato 5 : 3.1 %
- Estrato 6 : 2.1 %

Se calculan entonces, cerca de 3'150 000 candidatos potenciales para los comedores, los cupos alcanzan a ser apenas 3 %, sin embargo no se debe ignorar que no toda la población clasificada en los estratos 1 y 2 requiere necesariamente de asistencia alimentaria.

Consideramos que la forma adecuada de evaluar los alimentos que se ofrecen el los comedores comunitarios, y por lo tanto los beneficios en el largo y corto plazo del programa, es a partir de las recomendaciones para el consumo de calorías y nutrientes del ICBF [6] (se detallan más adelante), sólo así podremos saber si es real el porcentaje aportado que menciona la SIDIS.

1.2. Calorías y Nutrientes. Definiciones básicas

Un nutriente es un elemento o compuesto químico necesario para el metabolismo de un ser vivo [3]. Los requerimientos de cada uno de ellos dependen de diversos factores como la edad, el peso, la talla, el sexo e incluso la ubicación geográfica. Se clasifican según varios criterios:

- Importancia : *No esenciales*: No son vitales y el organismo los puede sintetizar a partir de otras moléculas. *Esenciales*: son vitales, el organismo no los puede sintetizar, por lo tanto deben ser obtenidos. Entre ellos se encuentran algunas vitaminas como: Ácido fólico, Niacina, Riboflavina, Tiamina, Vitamina A, Vitamina C. Minerales: Calcio, fósforo, hierro.

- Cantidad: *Macronutrientes* Son requeridas grandes cantidades diarias son los sustratos de los procesos metabólicos de obtención de energía: proteínas, glúcidos y grasas. *Micronutrientes* Son requeridos en pequeñas cantidades (mg o inferiores) son reguladores en los procesos de generación de energía: vitaminas y minerales.

- Función: *Energéticos* Los que sirven de sustrato para producir la energía necesaria para que el cuerpo pueda cumplir sus funciones: grasas, glúcidos y proteínas. *Estructurales*: Forman la estructura del organismo y permiten su crecimiento, algunos ejemplos son: proteínas, colesterol, calcio y fósforo.

En este trabajo se consideran las recomendaciones del ICBF por edad y sexo para el consumo de Calcio, Calorías, Fósforo, Hierro, Niacina, Proteína, Riboflavina, Tiamina, Vitamina A y Vitamina C. La **tabla 1.1** contiene una síntesis de la funciones en el organismo humano de estos nutrientes y los síntomas derivados del bajo consumo o el exceso de los mismos [4] , [5] , [6]

Nutriente	Principales funciones en el organismo	Algunos síntomas asociados al consumo en cantidades inadecuadas
Fósforo	Estructura de huesos y deintes, metabolismo de la energía	Debilidad muscular. El exceso desajusta el balance Calcio/Fósforo , provocando deficiencia de Calcio en el cuerpo. Pérdida de volumen en los huesos, La hipofosfatemia crónica puede inducir raquitismo en niños y osteomalacia en adultos
Calcio	Construcción y mantenimiento de huesos y dientes, necesario en la transmisión nerviosa y regulación de los latidos cardiacos. El equilibrio con otros nutrientes influye en el control de la irritabilidad nerviosa	A largo plazo y desde etapas tempranas de la vida causa deformidades óseas como el raquitismo y la osteoporosis(fracturas debidas a tensiones mínimas). El raqutismo en niños tiene manifiestaciones como piernas arqueadas y protuberancia frontal en el cráneo
Hierro	Componente esencial de la hemoglobina que es la encargada de transportar oxígeno a las células	Puede producir anemia. Al agotarse la reserva es inhibida la producción de hemoglobina. Los síntomas son: Cansancio, falta de energía, falta de aliento, dolores de cabeza, insonmio y palidez. Reduce la resistencia a infecciones. Se cree también que causa en los niños dificultades de aprendizaje y problemas de comportamiento
Vitamina A	Crecimiento, salud de la piel, cabello, dientes, ojos, resistencia a infecciones, importante para la visión	Heridas en boca y encías, baja resistencia a las enfermedades, problemas en la piel, la visión y caspa
Tiamina (B1)	Crecimiento, funcionamiento del sistema nervioso, obtención de energía y rendimiento de los músculos	Mala memoria, falta de atención, baja capacidad mental. reducida masa muscular, pérdida de apetito
Rivoflavina (B2)	Indispensable para el funcionamiento de los sistemas nervioso y ocular	Fotofobia, lagrimeo, ardor de los ojos, pérdida de agudeza visual y dolor o ardor de labios, boca y lengua. Erupciones grasas de la piel y crecimiento excesivo de capilares alrededor de la córnea del ojo
Niacina (B3)	Funcionamiento del tracto gastrointestinal, la piel y el sistema nervioso	Debilidad muscular, anorexia, indigestión y erupciones cutáneas. La carencia grave origina la pelagra que se caracteriza por dermatitis, demencia, diarrea, temblores y lengua dolorosa. Las anormalidades digestivas causan irritación e inflamación de las mucosas de la boca y el tubo digestivo
Vitamina C	Necesario en la formación de tejido óseo, mayor resistencia a las infecciones, favorece los dientes y ayuda a la absorción del hierro	Deficiencia en la función cerebral, baja resistencia a infecciones y fatiga, languidez, anorexia, dolor muscular. Deficiencias severas causan taquicardia
Proteínas	Construir y conservar tejidos corporales. Formación de enzimas y hormonas, líquidos y secreciones. Como anticuerpos participan en el sistema inmunológico. Energía	Edema, desgaste de los tejidos corporales, disminución de respuestas inmunológicas y debilidad. Esta deficiencia es más común en los niños, pues los requerimientos son más altos con relación al peso y la estatura

Tabla 1.1. Funciones de los nutrientes analizados y consecuencias de su bajo consumo.

Calorías

Es la unidad de medida de energía. Una Caloría equivale a 1000 calorías (la letra mayúscula indica que se habla de Kilocalorías), y una caloría equivale a 4,184 J (Joules). El requerimiento de calorías (Energía) [6] equivale a la cantidad de energía necesaria para balancear el gasto energético y le permite al organismo satisfacer la demanda de del metabolismo basal (producción del mínimo valor de energía necesario para que una célula subsista), del crecimiento y la temperatura corporal. Un consumo adecuado es necesario para el aprovechamiento de las proteínas.

1.3. El problema de Stigler

También llamado *Dieta de Stigler* [3] es un problema de optimización formulado por George Stigler, Premio Nobel de Economía en 1982. En 1939 él estaba interesado en establecer la cantidad de 77 alimentos que debería consumir diariamente un hombre promedio (154 lb y actividad física moderada), para que la ingesta de nutrientes fuera al menos la recomendada por *The National Research Council*, con el mínimo costo posible. Los nutrientes considerados fueron: proteínas, Calcio, Hierro, Vitamina A, Tiamina, Ribloflavina, Niacina y Vitamina C. Stigler Estimó por ensayo y error las cantidades, que daban un costo anual de a US$ 39.93. Los resultados obtenidos carecen de valor práctico. Debido a la falta de variedad, la dieta calculada resultaba rara, y de acuerdo con él mismo, a nadie la recomendaría. A pesar de esto, el planteamiento se considera uno de los pioneros en **Programación Lineal**.

Cerca de 7 años después el matemático George Dantzig considerado el padre de la Programación Lineal, inventa el **método Simplex** (se discute en detalle en el Capítulo 2). La dieta de Stigler se recalculó por medio del ingenioso método obteniendo un costo anual de US$39.69.

El problema de la *Dieta de Stigler* o simplemente el *problema de la dieta* es de gran interés práctico para quienes se encargan del diseño y administración de programas e alimentación, como es el caso de los **comedores comunitarios** de **Bogotá bien alimentada**.

Es deseable diseñar un conjunto de menús con el mínimo costo posible, que además satisfagan las necesidades nutricionales de los usuarios. Formalmente hablando, el problema de la dieta consiste en establecer las cantidades un conjunto de alimentos que deben ingerirse, de forma tal que sea garantizado un consumo establecido de nutrientes y el costo sea mínimo[7]. Definamos:

- m Número de nutrientes
- n Número de alimentos
- a_{ij} Unidades del nutriente i en una unidad del alimento j
- b_i Unidades aconsejadas del nutriente i
- c_j Costo de una unidad del alimento j

Queremos calcular x_j: las unidades de cada alimento que deben comprarse. Este problema cuenta con un conjunto de restricciones dado por:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i;\ i = 1, 2...m \\ x_j \geq 0;\ j = 1, 2, ...n \end{aligned} \tag{1.1}$$

El costo total cumple el papel de *función objetivo*, porque es la que se va a minimizar:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.2}$$

En forma matricial se trata de minimizar $\mathbf{cx}$ sujeto a $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ y $\mathbf{x} \geq 0$.

Capítulo 2

Acercamiento a la programación lineal

La programación lineal está relacionada con la optimización (maximización o minimización) de una función lineal, real multivariada, que debe obedecer un conjunto de restricciones lineales, que pueden ser igualdades o desigualdades. El planteamiento formal del problema de optimización linear se atribuye a George B. Dantzig. Sin embargo se conocen previos reportes de problemas de esta clase como es el caso del matemático soviético Kantorovich, quién planteó y solucionó un problema de este tipo en 1939 y como se discutió en el capítulo 1 George Stigler que se propuso ”calcular” una dieta que cumpliera las recomendaciones de consumo de nutrientes del National Research Council.

En 1947 George B. Dantzig publica un algoritmo numérico que facilita considerablemente la solución de un problema de esta naturaleza: ”El **método Simplex**”. Este capítulo se propone realizar un recorrido por los conceptos fundamentales de optimización lineal, siguiendo principalmente la presentación de [8] y [9]

2.1. Definiciones básicas

Como se mencionó antes, el propósito es optimizar una función lineal, a la que llamaremos *función objetivo*

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{2.1}$$

Queremos encontrar los valores que deben tomar $x_1, x_2....x_n$ (*variables estructurales*), para que z sea mínima dado que se cumple el conjunto de restricciones:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \geq & b_m \\ & & & & & & & x_1, x_2 ... x_n \geq 0 & \end{array} \tag{2.2}$$

Los coeficientes a_{ij} se representan en una matriz A : *matriz de restricciones*, las *variables estructurales* y los c_i o *coeficientes de costos* en el vector columna $\mathbf{x}$ y el vector fila $\mathbf{c}$ respectivamente. Nótese que el sistema 2.2, 2.1, es equivalente a 1.1, 1.2. Se acostumbra plantear el problema matricialmente en dos distintas formas según la conveniencia. Para el caso de minimización:

Estándar:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } \mathbf{cx} \\ \text{Sujeto a } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ x_1, x_2 ... x_n \geq 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Canónica:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } \mathbf{cx} \\ \text{Sujeto a } A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ x_1, x_2 ... x_n \geq 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

El conjunto de todos los puntos que satisfacen todas las restricciones (*soluciones factibles*) conforman la *región* o el *espacio factible.* Entonces el problema de de programación lineal consite en encontrar de entre las soluciones factibles una que haga mínima o máxima la *función objetivo*, según sea el caso.

2.2. Conjuntos convexos y programación lineal

2.2.1. Conjuntos convexos

Definición 2.1 Un conjunto X en R^n se dice *convexo* si dados cualesquiera dos puntos $x_1, x_2 \in X$, entonces $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$ para todo $\lambda \in [0,1]$.

Gráficamente un conjunto X es convexo, si dados dos puntos de X, todos los puntos del segmento de recta que los une pertenecen también a X.
Se denomina combinación convexa de $x_1, x_2, ..., x_m$ a una combinación lineal:

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_m x_m$$
$$\lambda_i \geq 0 \; \forall i, \; \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \tag{2.5}$$

Cuando $0 < \lambda_i < 1$ para todo i la *combinación convexa* es *estricta*. Entonces dado un conjunto convexo X toda combinación convexa de dos puntos de X también está en X. Además la intersección de familias de conjuntos convexos es también convexa, lo que no es en general cierto para uniones. Veamos ejemplos de conjuntos convexos y no convexos:

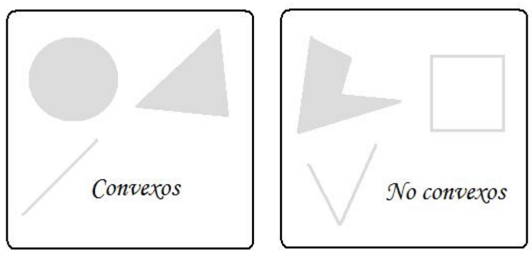

Figura 2.1 Convexos y no convexos. En los primeros, el segmento de recta que une cualquier par de puntos está contenido en el conjunto, en los segundos, no siempre.

Ejemplos de conjuntos convexos

1. $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$
2. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ donde A es una matriz $m \times n$ y $\mathbf{b}$ es un vector columna de m componentes
3. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ donde A es una matriz $m \times n$ y $\mathbf{b}$ es un vector columna de m componentes

Nótese que los dos últimos corresponden a las restricciones de un problema de programación lineal.

2.2.2. Definiciones en conjuntos convexos

En esta sección se presenta un conjunto de definiciones que permiten caracterizar un conjunto convexo y se van a ir articulando a lo largo del capítulo, para explicar la lógica del **Simplex**.

Definición 2.2 Un punto $\mathbf{x}$ de un conjunto convexo X es llamado *punto extremo* de X si **no puede ser representado como una *combinación convexa estricta* de dos puntos distintos en X.**

Definición 2.3 Un *hiperplano* H en R^n es un conjunto de la forma $\{\mathbf{x} : \mathbf{px} = k\}$, donde $\mathbf{p}$ es un vector no nulo de R^n y k es un escalar. Equivalentemente, los puntos $\mathbf{x} = (x_1, x_2 ... x_n)$ con $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = k$

Un *hiperplano* es un conjunto convexo y divide R^n en dos regiones llamados *semi-espacios*: $\{\mathbf{x} : p\mathbf{x} \leq k\}$ y $\{\mathbf{x} : p\mathbf{x} \geq k\}$ también convexos. En un problema de programación lineal las restricciones son, igualdades o desigualdades lo que corresponde a hiperplanos y semiespacios respectivamente.

Definición 2.4 Un rayo es una colección de puntos de la forma $\{\mathbf{x}_0 + \lambda d : \lambda \geq 0\}$ donde $\mathbf{d}$ es un vector no nulo. $\mathbf{x}_0$ es denominado *vértice* y $\mathbf{d}$ la *dirección*.

Dado un conjunto convexo, un vector no nulo $\mathbf{d}$ es llamado **dirección del conjunto**, si para cada $\mathbf{x}_0$ en el conjunto, el rayo $\{\mathbf{x}_0 + \lambda d : \lambda \geq 0\}$ también pertenece al conjunto. Debido a que λ puede ser tan grande como se quiera, un *conjunto acotado* no puede tener direcciones. Las direcciones conforman un conjunto convexo.

De forma similar a la definición de *puntos extremos*, se definen **direcciones extremas**: Una *dirección extrema* de un conjunto convexo, es una que no puede representarse como una combinación positiva de dos direcciones distintas o no equivalentes (es decir que una no sea un múltiplo positivo de la otra) de dicho conjunto.

Se denomina **polítopo** a todo conjunto que pueda escribirse como la intersección de un número finito de *semi-espacios*. Cuando el polítopo es acotado, se denomina **polihedro**. El ejemplo 3 de conjunto convexo es un *polítopo*, ya que el producto entre cada fila de la matriz A y el vector $\mathbf{x}$ (una restricción) representa un *semiespacio*.

Teorema 2.1 (**Teorema de representación**) [8]: Consideremos un conjunto polihedral no vacío $X = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq b, \mathbf{x} \geq 0\}$. Entonces el conjunto de *puntos extremos* es no vacío y tiene un número finito de puntos, digamos $x_1, x_2 ... x_k$. Más aún, el conjunto de *direcciones extremas* es vacío si y solo si X es acotado. Si X no es acotado entonces el conjunto de *direcciones extremas* es no vacío y tiene un número finito de vectores, $d_1, d_2, ... d_l$. Además, $\bar{\mathbf{x}} \in X$ si y sólo si puede ser representado como una combinación convexa de $x_1, x_2, ... x_k$ más una combinación lineal no negativa de sus direcciones $d_1, d_2 ... d_l$,

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d_j \\
\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \\
\lambda_j \geq 0,\ j = 1, 2 ... k \\
\mu_j \geq 0,\ j = 1, 2 ... l
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

2.3. Método Simplex

2.3.1. Puntos extremos y optimalidad

Considerar el problema de programación lineal 2.3:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & \mathbf{cx} \\ \text{Sujeto a } & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & x_1, x_2 ... x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Sean $x_1, x_2, ..., x_k$ los puntos extremos del conjunto de restricciones y $d_1, d_2, ...d_l$ sus direcciones extremas. Se ha dicho que todo punto $\mathbf{x}$ tal que satisface las restricciones puede representarse como en 2.6. Lo que significa que el problema planteado puede trasladarse a las variables $\lambda_1, \lambda_k ... \lambda_k$ y $\mu_1, \mu_2, ... \mu_k$,

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & \sum_{j=1}^{k} (\mathbf{cx}_j)\lambda_j + \sum_{j=1}^{l} (\mathbf{cd}_j)\mu_j \\ \text{Sujeto a } & \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0 \; j = 1, 2...k \\ & \mu_j \geq 0 \; j = 1, 2...l \end{aligned} \tag{2.7}$$

Asumiendo que $k \geq 1$. Ya que las variables $\mu_{i,j}$ pueden ser arbitrariamente grandes, el mínimo es $-\infty$ si $\mathbf{cd}_j < 0$ para algún $j = 1, 2, ..., l$. Si $\mathbf{cd}_j \geq 0$ para algún $j = 1, 2..l$ la correpondiente μ_j puede ser escogida nula. Para minimizar el otro sumando, encontramos el mínimo de $\mathbf{cx}_j$, $\mathbf{cx}_p$, haciendo $\lambda_p = 1$ y los restantes λ_j iguales a cero. Lo anterior permite ver que, *el valor óptimo* de un problema lineal es finito si y sólo si $\mathbf{cd}_j \geq 0$ para todas las direcciones extremas. Si este es el caso podemos encontrar la solución seleccionando de entre los puntos extremos, el que minimiza la función objetivo. Esto muestra que si una solución optima existe, también un punto extremo óptimo.

2.3.2. Solución básica factible

Consideremos el mismo sistema 2.3, con A una matriz $m \times n$ y b un vector de m componentes, tal que $rank(A) = m$. Reorganizamos de manera que $A = [B, N]$ donde B es una matriz invertible de tamaño $m \times m$ y N es una matriz $m \times (n - m)$. La solución $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}$, donde

$$\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} \tag{2.8}$$

$$\text{y} \tag{2.9}$$

$$\mathbf{x}_N = 0$$

Es una *solución básica factible*. B se denomina matriz básica y N matriz no básica, de forma análoga, las componentes de $\mathbf{x}_B$ y $\mathbf{x}_N$ son variables *básicas* y *no básicas* o independientes respectivamente. Cuando $\mathbf{x}_B > 0$ se dice que la *solución básica factible* es *no degenerada*, pero si alguna componente de este vector es nula, se dice que la solución es *degenerada*.

La colección de soluciones básicas factibles y los puntos extremos son equivalentes: Un punto es una solución básica factible si y sólo si es punto extremo.

Los siguientes teoremas recopilan algunos de los anteriores resultados,

Teorema 2.2 La colección de puntos extremos corresponde a la colección de soluciones básicas factibles y los dos no vacíos siempre que la región factible no sea vacía.

Teorema 2.3 Asumamos que la región factible es no vacía. Entonces una solución optima finita existe si y sólo si $\mathbf{c}\mathbf{d}_j \geq 0$ para $j =, 2...l$, donde $d_1, d_2, ...d_l$ son direcciones extremas de la región factible. De lo contrario el valor de la solución óptima no es acotada.

Teorema 2.4 Si una solución optima existe, entonces un punto extremo óptimo (o equivalentemente una solución básica factible óptima) existe.

Ya que los puntos extremos pueden ser enumerados y están acotados por $\binom{n}{m}$, uno puede pensar que el problema se reduce a listar y tomar de entre todos los puntos el que haga mínima la función objetivo. Este procedimiento no es práctico, por varias razones [8]:

1. El número de soluciones factibles está acotado por $\binom{n}{m}$ que es un número 'grande' aún para pequeños m y n
2. Este procedimiento no detecta si el problema tiene valor óptimo no acotado
3. Si la región factible es vacía, sólo nos enteraríamos después de hacer todas las posibles permutaciones de las columnas de A, hasta descubrir que en ningún caso se encuentra una matriz B invertible, tal que la solución básica sea factible, esto es: $(B^{-1}\mathbf{b} \ngeq 0)$

El método simplex es un ingenioso procedimiento que se "desplaza"de un punto extremo a otro, con la seguridad de que cada vez tiene un valor mejor o igual de la función objetivo.

2.3.3. La clave del método simplex

La clave el método reside en el reconocimiento de la optimalidad de un punto extremo dado, a partir de las propiedades del conjunto de restricciones, sin necesidad de tener todos los puntos extremos.

Supongamos que tenemos la solución básica factible $\begin{pmatrix} B^{-1}\mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix}$, el valor correspondiente de la función objetivo es:

$$z_0 = \mathbf{c}\begin{pmatrix} B^{-1}\mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{c}_B, \mathbf{c}_N)\begin{pmatrix} B^{-1}\mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{c}_B B^{-1} b \tag{2.10}$$

Denotemos por $\mathbf{x}_B$ y $\mathbf{x}_N$ el conjunto de variables básicas y no básicas respectivamente. Es necesario que $x_B \geq 0$ y $x_N \geq 0$ y

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = A\mathbf{x} &= B\mathbf{x}_B + N\mathbf{x}_N \\ B^{-1}\mathbf{b} &= \mathbf{x}_B + B^{-1}N\mathbf{x}_N \end{aligned} \tag{2.11}$$

Reordenando,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= B^{-1}\mathbf{b} - B^{-1}N\mathbf{x}_N \\ &= B^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j\in J} B^{-1}a_j x_j \\ &= \bar{\mathbf{b}} - \sum_{j\in J} x_j y_j \end{aligned} \tag{2.12}$$

Dónde J es el conjunto de índices de las variables no básicas. Reemplazando las últimas dos igualdades en el valor de la función objetivo y usando 2.10:

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{c}_B\left(B^{-1} - \sum_{j\in J} B^{-1}a_j x_j\right) + \sum_{j\in J} c_j x_j \\ &= z_0 - \sum_{j\in J}(z_j - c_j)x_j \end{aligned} \tag{2.13}$$

El problema de programación lineal, se ha expresado en términos de las $p = (m - n)$ variables *no básicas*, convirtiéndose en un sistema de p variables independientes o *grados de libertad*:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z = z_0 - \sum_{j\in J}(z_j - c_j)x_j \\ \text{sujeto a } \sum_{j\in J} y_j x_j + \mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}} \\ x_j \geq 0,\ j \in J \end{aligned} \tag{2.14}$$

Los valores de $(c_j - z_j)$ son comúnmente llamados *coeficientes de costos reducidos*. El resultado clave de este procedimiento es que si $(z_j - c_j) \leq 0$ para todo $j \in J$, entonces la solución básica factible en cuestión es óptima. La explicación es que, si esto ocurre $z \geq z_0$ para cualquier solución factible (empeora el valor de la función objetivo), pero para la actual solución básica sabemos que $z = z_0$, por lo tanto $x_j = 0$, para todo $j \in J$.

Ahora, si llega a ocurrir que $(z_j - c_j) > 0$, el *Simplex* mantiene nulas $p - 1$ variables y aumenta el valor de la restante, digamos x_k, obviamente se quiere que $(z_k - c_k) > 0$ (nótese mejora el valor de la función objetivo). Usando esto en 2.14:

$$z = z_0 - (z_k - c_k)x_k \text{ y} \tag{2.15}$$

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k \tag{2.16}$$

El sistema se comporta de la siguiente forma:

- Si $y_{ik} \leq 0$, x_{B_i} aumenta cuando crece x_k
- Si $y_{ik} > 0$, x_{B_i} disminuye cuando crece x_k. El crecimiento de x_k está limitado por la condición de no negatividadad de x_{B_r}.

Es claro que la primera variable básica que se anula es a la que le corresponda el valor más pequeño de $\bar{b}_i/y_{ik}$ para $y_{ik} > 0$. Si la solución básica factible no es degenerada, es cierto en particular que $\bar{b}_r > 0$, donde r representará el índice de la variable donde ocurre este mínimo, por lo tanto $x_k = \bar{b}_r/y_{ik} > 0$ y de 2.15 vemos que $z < z_0$, mejorando estrictamente la función objetivo. Como x_k es positiva, estamos en presencia de una nueva *solución factible*:

$$x_{B_i} = \bar{b}_i - \frac{y_{ik}}{y_{rk}}, \text{ para } i = 1, 2..., m \tag{2.17}$$

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \tag{2.18}$$

$$x_l = 0, \text{ para } l = J - \{k\}$$

Lo anterior describe un proceso iterativo que transforma una base en otra, aumentando el valor de la variable no básica x_k y ajustando las variables básicas. En el camino x_{B_r} cae hasta cero, dejando la base y permitiendo así la entrada de x_k. Si el sistema no es degenerado: el valor de la función objetivo disminuye y como el número de soluciones factibles es finito, este procedimiento terminaría en un número finito de pasos.

Para llegar a este punto hemos ignorado la posibilidad de que $\mathbf{y}_k \leq 0$ es decir que ningún y_{ik} resulte ser positivo. En este caso el valor de la función objetivo es *no acotado*. Supongamos que tenemos una variable x_k tal que $(z_k - c_k) > 0$ y $y_k \leq 0$, esta variable entra a la base, pero dado que bajo ninguna circunstancia se viola la condición de no negatividad de x_{B_i}, 2.15 nos indica que aumentar indefinidamente el valor de x_k reduce el valor de z hasta $-\infty$. Esto se constituye en un criterio para definir si el valor óptimo es o no *acotado*.

Supongamos que $\mathbf{x}'$ es una solución básica factible, con base B, es decir:

$$\mathbf{x'} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

El valor de la correspondiente función objetivo $z' = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b}$

Supongamos también que $(z_j - c_j) \leq 0$ para todas las variables no básicas. Por medio de 2.14 llegamos a que,

$$z' - z = \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j \ , \tag{2.20}$$

$$\text{Entonces, } z' \leq z \tag{2.21}$$

Se concluye que $\mathbf{x}'$ es una solución básica factible óptima.

Veamos que si $z_j - c_j < 0$ para todas las componentes no básicas, entonces la actual solución óptima es única:

Nombremos $\mathbf{x}$ a una solución óptima factible, tal que $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$. Al menos una de las x_j debe ser no nula, por que si todas las variables no básicas son cero, $\mathbf{x}$ no sería distinta de $\mathbf{x}'$. 2.20 indica que en este caso $z > z'$ y por tanto $\mathbf{x}'$ es la única solución óptima.

Consideremos el caso en que al menos para una variable no básica x_k ocurre $z_k - c_k = 0$, entonces existen componentes diferentes entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$ pero un mismo valor de la función objetivo.

Algoritmo simplex [8]
Los resultados que se tienen son suficientes para formular el método. Veamos el caso de minimización,

1. Resolver el sistema $B\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$. Tomar $\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}}$, $\mathbf{x}_N = 0$ y $z = \mathbf{c}_B \mathbf{x}_B$

2. Resolver el sistema $\mathbf{w}B = \mathbf{c}_B$. Calcular $z_j - c_j = \mathbf{w}\mathbf{a}_j - c_j$, para todas la variables no básicas (*pricing operation*) y tomar:

   $$z_k - c_k = \max_{j \in J} \{z_j - c_j\}$$

   Donde J es el conjunto de índices de las variables no básicas. Si $z_k - c_k \leq 0$ Parar: la solución es óptima. Si no es así ir al paso 3, la variable x_k debe entrar a la base.

3. Resolver el sistema $B\mathbf{y}_k = \mathbf{a}_k$, si $y_k \leq 0$ parar, la solución no es acotada. De lo contrario ir al paso 4.

4. Introducir a x_k en la base. El índice r de la variable que abandona la base de determina así:

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{l \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\} \tag{2.22}$$

   Actualizar la base de tal forma que la columna correspondiente a la variable que sale $\mathbf{a}_{B_r}$ sea reemplazada por la columna asociada a la variable que entra $\mathbf{a}_r$, análogamente actualizar J y repetir el paso 1.

Teorema 2.5 (**Convergencia finita**) En ausencia de degeneración, el método simplex se detiene en un número finito de iteraciones, o bien, con una solución básica factible o la conclusión de que la solución no es acotada. En presencia de degeneración, existe la posibilidad de caer en un ciclo infinito.

Pero, y ¿si no es tan fácil empezar?, es decir, y ¿si no es tan fácil tener una solución básica factible de la cual partir? Veamos que el método Simplex siempre puede ser inicializado con la identidad.

Supongamos un conjunto de restricciones de la forma : $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $x \geq 0$, con A matriz $m \times n$ y b un m -vector de componentes no negativas. Para llevar este problema de programación lineal a la presentación estándar 2.3, debo introducir un número de variables igual al número de restricciones, representados en vector x_s, llamado de *holgura*. Las restricciones son ahora

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} + \mathbf{x}_s &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \\ \mathbf{x}_s &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

La matriz de restricciones es ahora $[A, I]$ de dimensión $m \times (m \times n)$. Si escogemos las variables originales como *no básicas* y las de holgura como básicas, obtenemos como base la matriz identidad, lo que permite iniciar la implementación del algoritmo.

Ahora consideremos que en el mismo sistema de restricciones, el vector $\mathbf{b}$ no es no negativo, si siguiéramos el mismo procedimiento, haciendo $\mathbf{x} = 0$, llegaríamos a que alguna de las componentes de $\mathbf{x}_s$ es negativa, es decir, nos salimos de la región factible. Una situación similar se presenta cuando las restricciones son de la forma $A\mathbf{x} \geq b$, $\mathbf{x} \geq 0$ y $b \nleq 0$, pues al introducir las variables de *holgura* queda $A\mathbf{x} - \mathbf{x}_s = b$, $\mathbf{x} \geq 0$, $\mathbf{x}_s \geq 0$, y nuevamente anular las variables originales viola la no negatividad de las de holgura. Estas consideraciones hacen ver que no siempre es inmediata la escogencia de la primera base. En general los problemas de optimización lineal pueden plantearse, por simple manipulación de las variables (cambio de signos) de la forma,

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & \mathbf{cx} \\ \text{Sujeto a } A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Donde $\mathbf{b} \geq 0$. Cuando A contiene una identidad es muy fácil obtener la solución básica factible : $B^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b}$.
Si este no es el caso, debemos introducir **variables artificiales** con el fin de conseguir una solución básica factible de inicio, implementar el método y deshacernos de estas forzándolas a ser cero, si es posible.

2.3.4. El método de las dos fases

Es el utilizado en este trabajo, donde se requiere optimizar conjuntos de sistemas que corresponden a los menús ofrecidos en los comedores comunitarios de ***Bogotá Bien Alimentada***, donde la intención es satisfacer las recomendaciones de consumo de calorías y nutrientes del Instituto Colombiano de Bienestar familiar con el mínimo costo.

Existen diferentes posibles métodos encaminados a eliminar las mencionadas *variables artificiales*, representadas en el vector $\mathbf{x}_\alpha$. Uno de ellos consiste en minimizar la suma de estas, con las restricciones:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} + \mathbf{x}_\alpha &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \\ \mathbf{x}_\alpha &\geq 0 \end{aligned}$$

Si el problema original tiene solución factible, el valor óptimo de esta suma es cero, dada la condición de no negatividad de las variables $\mathbf{x}_\alpha$ significa que *todas la variables artificiales* se anulan, lo que no necesariamente ocurre con las *variables de holgura.* Como estas variables caen a cero, dejan la base dando paso a las del problema original, si este proceso se completa, es decir si todas las artificiales dejan la base, habremos obtenido una solución básica factible para el problema 2.24. Si de otro modo una *variable artificial* es positiva, el problema 2.24 no tiene solución factible. Al procedimiento previamente descrito de denomina *método de las dos fases* :

Fase 1

Resolver con la solución básica factible $\mathbf{x} = 0$ y $\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } \mathbf{x}_0 &\equiv 1\mathbf{x}_\alpha \\ \text{Sujeto a } A\mathbf{x} + \mathbf{x}_\alpha &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \\ \mathbf{x}_\alpha &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Si el óptimo se da para $\mathbf{x}_\alpha \neq 0$ parar, el problema no tiene soluciones factibles. De otro modo, si todas las variables artificiales dejaron la base, ir a la *fase 2*

Fase 2 Siento $\mathbf{x}_B$ y $\mathbf{x}_N$ variables básicas y no básicas respectivamente, resolver con la solución básica factible $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$ y $\mathbf{x}_N = 0$:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N \\ \text{Sujeto a } \mathbf{x}_B + B^{-1}N\mathbf{x}_N &= B^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x}_B &\geq 0 \\ \mathbf{x}_N &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Veamos un breve sumario del proceder si alguna de las variables artificiales permanece en la base con valor cero. Existen dos posibles caminos:

1. Pasar a la *fase 2* directamente: La base está compuesta por variables originales y artificiales. Las artificiales tienen costo nulo en la función objetivo. No volverlas a dejar entrar a la base si es que llegan a salir, esto se puede lograr eliminando las columnas que les corresponden en la matriz no básica.

2. Eliminar la variable artificial y entonces si pasar a la *fase 2*: Eliminarla si no posee más información que su propio valor, o *pivotear* hasta entrar a la base una variable no artificial.

2.3.5. Método simplex en formato de tablas y ciclicidad

En cada una de las iteraciones del método se resuelven los sistemas lineales

$$B\mathbf{x}_B = \mathbf{b} \tag{2.27}$$
$$\mathbf{w}B = \mathbf{c}_B \tag{2.28}$$
$$B\mathbf{y}_k = \mathbf{a}_k \tag{2.29}$$

Uno de los mecanismos más populares para tratar estos sistemas en la implementación del método Simplex, consiste en ordenarlos en tablas. Supongamos que tenemos una solución básica factible de inicio $\mathbf{x}$ con base B. El problema se puede plantear así:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & z \\ \text{Sujeto a } z - \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B - \mathbf{c}_N x_N &= 0 && (2.30) \\ B\mathbf{x}_B + N\mathbf{x}_N &= \mathbf{b} && (2.31) \\ \mathbf{x}_B &\geq 0 \\ \mathbf{x}_N &\geq 0 \end{aligned}$$

Premultiplicando 2.31 por B^{-1}, premultimplicando el resultado por $\mathbf{c}_B$ y sumándole 2.30:

$$z + 0\mathbf{x}_B + (\mathbf{x}_B B^{-1}N - \mathbf{c}_N)x_N = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b} \tag{2.32}$$

La tabla Simplex inicial quedaría :

	z	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	RHS	
z	1	0	$\mathbf{c}_B B^{-1}N - \mathbf{c}_N$	$\mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b}$	Fila 0
$\mathbf{x}_B$	0	$\mathbf{I}$	$B^{-1}N$	$B^{-1}\mathbf{b}$	Filas desde 1 hasta m

Tabla 2.1

- Proporciona el valor de la función objetivo $\mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b}$ y de las variables básicas $B^{-1}\mathbf{b}$
- La información requerida en la implementación del método Simplex $\mathbf{c}_B B^{-1}N - \mathbf{c}_N$ cuyas componentes son $z_j - c_j$, $j \in J$ con J el conjunto de índices para las variables no básicas.
- La fila cero permite saber si estamos en una solución óptima o no (si cada $z_j - c_j \leq 0$). Y cuál variable no básica debe aumentar (entrar a la base)
- Si x_k aumenta, entonces, el vector $\mathbf{y}_k = B^{-1}\mathbf{a}_k$, que están contenidos en las filas de 1 hasta m, determinan qué tanto puede crecer x_k. Si $\mathbf{y}_k \leq 0$ el óptimo no es acotado. Si por el contrario $\mathbf{y}_k \nleq 0$, el crecimiento de x_k se ve truncado por una de las variables básicas, la cual se anula y cuyo índice es determinado por 2.22, también llamado *test de la mínima razón*.

Necesitamos un mecanismo que cumpla las funciones de actualizar:

- Los índices y valores de las variables básicas
- Los costos reducidos y los índices de las variables no básicas
- Los $\mathbf{y}_j$

Esto puede ser realizado por una operación de **Pivoteo**.

Si x_k entra a la base y x_{B_r} sale, el **pivoteo** sobre y_{rk} consiste en:

1. Dividir la fila r entre y_{rk}
2. Para $i = 1, 2, ...m$ y $i \neq r$, actualizar la i-ésima fila sumándole $-y_{ik}$ veces la nueva r-ésima fila
3. Actualizar la fila cero sumándole $(c_k - z_k)$ veces la nueva r-ésima fila.

Así se ven las tablas antes y después de *pivotear*.

	z	x_{B_1}	$\cdots$	x_{B_r}	$\cdots$	x_{B_m}	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_k	$\cdots$	RHS
z	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	$z_j - c_j$	$\cdots$	$z_k - c_k$	$\cdots$	$c_B\bar{\mathbf{b}}$
x_{B_1}	0	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{1j}	$\cdots$	y_{1k}	$\cdots$	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{B_r}	0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{rj}	$\cdots$	y_{rk}	$\cdots$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{B_m}	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	y_{mj}	$\cdots$	y_{mk}	$\cdots$	$\bar{b}_m$

Tabla 2.1 Tabla simplex antes del pivoteo

	z	x_{B_1}	$\cdots$	x_{B_r}	$\cdots$	x_{B_m}	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_k	$\cdots$	RHS
z	1	0	$\cdots$	$\frac{c_k - z_k}{y_{rk}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$(z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} y_{ik}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$c_B\bar{\mathbf{b}} - (z_k - c_k)\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
x_{B_1}	0	1	$\cdots$	$\frac{-y_{1k}}{y_{rk}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$y_{1j} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} y_{1k}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\bar{b}_1 - \frac{y_{1k}}{y_{rk}}\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_k	0	0	$\cdots$	$\frac{1}{y_{rk}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{y_{rj}}{y_{rk}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{B_m}	0	0	$\cdots$	$\frac{-y_{mk}}{y_{rk}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$y_{mj} - \frac{y_{rj}}{rk} y_{mk}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\bar{b}_m - \frac{y_{mk}}{y_{rk}}\bar{b}_r$

Tabla 2.1 Tabla simplex después del pivoteo

Método Simplex en formato de tablas

1. Encontrar una solución básica factible con base B y construir la tabla 2.1

2. Tomar $z_k - c_k = \max z_j - c_j : j \in J$ Si $(z_k - c_k) \leq 0$, parar, la solución es óptima. Si no, revisar $\mathbf{y}_k$: Si $\mathbf{y}_k \leq 0$ parar, el valor óptimo no es acotado, si $\mathbf{y}_k \not\leq 0$ use 2.22 para determinar el índice r.

3. Actualizar la tabla por pivoteo en y_{ik}. Actualizar las variables básicas y no básicas, donde $\mathbf{x}_k$ entra a la base y $\mathbf{x}_{B_r}$ sale y repita el paso 1.

Ciclicidad:

Según el teorema 2.5, en ausencia de soluciones degeneradas, el método Simplex termina con seguridad en un número finito de iteraciones, con la solución óptima o la conclusión de que esta es no acotada. Sin embargo, cuando llegamos a una solución degenerada, lo que puede ocurrir es que vamos de una base a otra sin cambiar de punto extremo. Es fácil verlo en la tabla del Simplex después del pivoteo cuando $b_r = 0$. Al repetirse el proceso puede tomarse otro *pivote* degenerado y estaríamos cambiando de base en el mismo punto no óptimo una y otra vez hasta llegar a la base inicial y así repetir el proceso descrito por siempre.

A pesar de esta incómoda realidad es posible introducir reglas al Simplex que impidan la repetición de bases. Por ejemplo: la *regla lexicografica*, que dado k (índice de la variable no básica elegida para ingresar a la base) proporciona un criterio para la escogencia de la variable que deja la base si varias variables básicas se anulan simultaneamente en 2.16. La *regla de Bland*, en cambio consiste en asignar desde el inicio un orden a las variables de modo que se escoge la de menor índice, ya sea que se busque $\mathbf{x_k}$ o $\mathbf{x}_{B_r}$ (si existe más de una posibilidad).

Capítulo 3

Funcionamiento de los comedores comunitarios de Bogotá Bien Alimentada

3.1. ¿Cómo se clasifican los usuarios? y ¿Cuál es el compromiso con cada grupo ?

El el capítulo 1 se comentó que las necesidades que cada ser humano tiene de determinado nutriente, dependen de varios factores (como se observa en la tabla 3.1 [6]). Por ejemplo una mujer entre 29 y 49 años y un niño de 4 requieren el 50 % y el 75 % respectivamente de las Calorías que debe consumir un hombre entre 29 y 49 años. A pesar de los numerosos criterios existentes para la distribución de la población en los comedores, los usuarios son divididos únicamente en 3 grupos de edad denominados *grupos etáreos*:

- p_1 :: Número de niños entre 1 y 5 años
- p_2 :: Número de niños entre 6 y 12 años
- p_3 :: Número de personas de 13 años en adelante

Nos referimos en adelante como vector de poblaciones a $P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$. Si bien hemos dicho que el programa cuenta con cerca de 94.100 cupos, no se conoce con certeza la distribución de esta cifra en los tres grupos de edad. Sin embargo, de acuerdo con la proyección del DANE para el 2009, el primer grupo representa el 8.3 % de la población Bogotana, el segundo el 12.1 % y el tercero el 79.67 %. Cada uno recibe porciones diferentes de alimentos cuya preparación se describe en la sección 3.2.

Edad y Sexo	Peso (Kg.)	Calorías (Kcal)	Proteína (gr)	Vit. A (ER)	Vit. D (mg)	Vit. E (mg)	Vit. C (mg)	Tiamina (mg)	Riboflavina (mg)	Niacina (mg)	Vit. B6 (mg)	Folato (mg)	Vit. B12 (mg)	Calcio (mg)	Fósforo (mg)	Magnesio (mg)	Hierro (mg)	Zinc (mg)	Yodo (mg)
Meses (ambos sexos)																			
0-2	4.2	490	9	420	10	3	20	0.4	0.3	3.4	0.3	30	0.3	350	230	35	0.5	2	20
3-5	6.4	640	17	420	10	3	20	0.4	0.4	4.5	0.3	30	0.3	350	230	50	0.5	3	30
6-8	8	760	19	300	10	4	20	0.4	0.5	5.3	0.6	50	0.5	400	270	57	5	3	40
9-11	9.2	940	20	300	10	4	20	0.5	0.6	6.6	0.6	60	0.6	400	270	70	7	3	50
Años (ambos sexos)																			
1	10	1040	20	350	10	5	20	0.5	0.6	7.3	0	70	0.7	500	500	80	9	4	50
2	12	1260	21	420	5	5	25	0.6	0.8	8.8	0.9	90	0.8	500	500	100	9	4	60
3	14	1390	24	460	5	5	28	0.7	0.8	9.7	0.9	100	0.9	500	500	105	9	5	70
4	16	1540	27	510	5	6	31	0.8	0.9	10.8	1.3	110	1	600	600	115	9	5	80
5	18	1640	29	550	5	6	33	0.8	1	11.5	1.3	110	1.1	600	600	125	9	6	80
6	20	1730	31	580	5	6	35	0.9	1	12.1	1.3	120	1.2	600	600	130	13	6	90
7	22	1790	34	600	2.5	6	36	0.9	1.1	12.5	1.6	120	1.2	700	700	135	13	6	90
8	25	1830	38	610	2.5	7	37	0.9	1.1	12.8	1.6	130	1.3	700	700	140	13	6	90
9	28	1900	41	630	2.5	7	38	1	1.1	13.3	1.6	140	1.4	700	700	140	13	6	100
Hombres																			
10-12	36	2270	48	760	2.5	8	45	1.1	1.4	15.9	1.8	160	1.5	900	900	170	16	7	110
13-15	51	2670	51	900	2.5	8	55	1.3	1.6	18.7	1.8	190	1.8	1100	1100	200	29	8	130
16-17	66	3000	66	1000	2.5	10	60	1.5	1.8	21	2	200	2	900	900	225	17	9	150
18-24	66	3000	65	1000	2.5	10	60	1.5	1.8	21	2.2	200	2	800	800	225	14	9	150
25-49	65	3000	65	1000	2.5	10	60	1.5	1.8	21	2.2	200	2	800	800	225	14	9	150
50-74	65	2700	65	900	2.5	10	55	1.4	1.6	18.9	2.2	190	1.8	800	800	200	14	9	140
75 +	65	2400	65	800	2.5	10	50	1.2	1.4	16.8	2.2	170	1.6	800	800	180	14	8	120
Mujeres																			
10-12	37	2000	46	670	2.5	8	45	1	1.2	14	1.8	140	1.3	1000	1000	150	20	6	100
13-15	50	2200	50	730	2.5	8	55	1.1	1.3	15.4	1.8	150	1.5	800	800	165	22	7	110
16-17	56	2250	56	750	2.5	8	60	1.1	1.4	15.8	2	160	1.5	800	800	170	19	7	110
18-24	55	2250	55	750	2.5	8	60	1.1	1.4	15.8	2	160	1.5	800	800	170	19	7	110
25-49	55	2250	55	750	2.5	8	60	1.1	1.4	15.8	2	160	1.5	800	800	170	14	7	110
50-74	55	2000	55	670	2.5	8	55	1	1.2	14	2	140	1.3	800	800	150	14	6	200
75 +	55	1800	55	600	2.5	8	50	0.9	1.1	12.6	2	130	1.2	800	800	135	14	5	90

Tabla 3.1 Recomendaciones del ICBF para el consumo de diario de calorías y nutrientes para la población colombiana 1988. Las franjas gris, blanco, gris indican la agrupación que hace BBA

Debido a las limitaciones de las bases de datos -contenido nutricional de los alimentos básicos- con las que se cuenta para el estudio -fundamentalmente provenientes de la Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación (FAO) [10]-, se consideran sólo los nutrientes relacionados en la tabla 3.2. Con el fin de tener un vector de requerimientos nutricionales para cada población, que se adapte al problema, tomamos nutriente a nutriente el máximo de cada franja. Por ejemplo, decimos que un usuario del segundo grupo etáreo, debe consumir al menos $\max\{31, 34, 38, 41, 48, 46\}$ *gramos* de Proteína. De acuerdo con *United States Department of Agriculture* [11], el almuerzo debe representar el 33 % de la ingesta diaria recomendada de nutrientes, lo que hace que el objetivo de los comedores comunitarios sea superior a la exigencia estándar (35 %-40 %), aunque bajo si se tiene en cuenta la condición de inseguridad alimentaria que afronta gran parte de la población Bogotana (ver 1.1).

Nutriente	1 a 5 años	35 %	6 a 12 años	35 %	Mayores de 13 años	35 %
Calcio (mg)	600	210	1000	350	1100	385
Calorías (Kcal)	1640	574	2270	794.5	3000	1050
Fósforo (mg)	600	210	1000	350	1100	385
Hierro (mg)	9	3.15	20	7	29	10.15
Niacina (mg)	11.5	4.03	15.9	5.57	21	7.35
Proteína (gr)	29	10.15	48	16.8	66	23.1
Riboflavina (mg)	1	0.35	1.4	0.49	1.8	0.63
Tiamina (mg)	0.8	0.28	1.1	0.39	1.5	0.53
Vitamina A (ER)	550	192.5	760	266	1000	350
Vitamina C (mg)	33	11.55	45	15.75	60	21

Tabla 3.2 Necesidades nutricionales diarias y 35 % mínimo que se debe suplir con el almuerzo, según los grupos de BBA

Nos referimos en adelante como vector de requerimientos nutricionales diarios de la k-ésima población a

$$\mathbf{b}_k = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{con } k = 1, 2, 3 \tag{3.1}$$

Con $m = 10$ nutrientes. Igual que en la sección 1.3, b_i representa las unidades aconsejadas del nutriente de índice i.

3.2. ¿Qué se sirve actualmente en los comedores?

Cada menú ofrecido se compone de los siguientes items, a menos que un sólo alimento abarque varios, por ejemplo el arroz chino contiene la carne, el cereal y la verdura,

- Sopa o crema
- Carne o leguminosa
- Cereal
- Verdura o ensalada
- Tubérculo o plátano
- Fruta
- Postre
- Lácteo

SOPA O CREMA	CARNE O LEGUMINOSA	CEREAL	VERDURA O ENSALADA
Sopa de lenteja	Lomitos de atún	Arroz con zanahoria	Calabaza con zanahoria guizada
Crema de apio	Pollo dorado	Arroz con verduras	Coliflor guisado
Sopa de coli	Carne de cerdo en el arroz	Arroz chino	Ensalada de espinaca y mango
Sopa de peto dulce	Carne asada	Arroz blanco	Ensalada de pepino, zanahoria y lechuga
Cazuela de fríjol	Carne molida	Aroz verde	Habichuela guisada
Crema de espinaca	Carne en goulash	Arroz con fideos	Lechuga cohombro y zanahoria
Sopa de pasta	Carne desmechada con huevo	Spaguetti	Lechuga y tomate
Ajiaco con pollo	Pollo dorado	Arroz pimentón	Lechuga, tomate y apio
Crema de arracacha	Pollo a la naranja		puré de auyama
Sopa de cebada	Atún en ensalada fría		Raices, apio,arveja, zanahoria en el arroz
Sopa de mute	Albóndigas en salsa		Remolacha y zanahoria
Sopa campesina	Fríjoles con carne		Repollo y manzana
Crema de arracaha	Pollo en trocitos		Repollo, tomate y cebolla
Sopa arroz	Hígado encebollado		Tomate y cebolla
Crema de apio	Bolognesa		Zanahoria con espinaca
Sopa de mute	Carne de cerdo asada		Zanahoria, arveja, apio en la ensalada fría
Crema de verduras	Carne con lentejas		Zanahoria, aveja y habichuela en el goulash
Sopa campesina	Bistec a la criolla		
TUBÉRCULO O PLÁTANO	**FRUTA**	**POSTRE**	**LACTEO**
deditos de yuca	Jugo de lulo	Arequipe	Leche
Papa al vapor con mayonesa	Jugo de mango	Arequipe líquido	Leche incluida en el peto
Papa con mayonesa y perejil	Jugo de mora	Bocadillo	Leche incluida en el sorbete
Papa criolla al vapor	Jugo de piña	Bocadillo combinado	Queso
Papa criolla frita	Jugo de tomate de árbol	cocada	
Papa en chupe	Sorbete de curuba	Dulce de cascos de guayaba	
Papa en el ajiaco	Sorbete de guayaba	Dulce de mora	
Papa francesa	sorbete de mango	Dulce de papayuela	
Papa incluida en ensalada fría	Sorbete de maracuyá	Galleta con mermelada	
Papa salada		Galletas wafer rellenas de bocadillo	
Patacón		Herpo	
Plátano asado		mantecada	
Plátanos en tajadas		Panela rayada en la sopa de peto	
Puré de papa		Panelita de leche	
Tajadas de plátano		Plátano melao	
		Ponqué	
		Rollito de arequipe y bocadillo	

Tabla 3.3 Todos los alimentos ofrecidos en los menús, separados por grupos. A manera de ejemplo, las celdas sombreadas indican los que componen el menú 1

Con estos **alimentos** se conforma un ciclo de 18 menús, servidos de lunes a sábado por tres semanas, a partir de las cuales se empieza a repetir el ciclo. La preparación de cada uno de los alimentos -la cantidad de cada ingrediente crudo que debe ser adicionado- se describe en detalle en tablas llamadas *minutas*, suministradas por la SIDIS. Veamos por ejemplo la parte de la *minuta del menú 1* que corresponde a la sopa de lentejas:

		1 a 5 años	6 a 12 años	Mayores de 13 años
Ingrediente	Factor para el cálculo del peso bruto	Peso neto(gramos)	Peso neto(gramos)	Peso neto(gramos)
Lenteja, grano entero	1	8.64	12	9.18
Papa común, tubérculo sin cáscara	1.2	19.58	27.2	36.72
Zanahoria, pulpa sin cáscara	1.15	4.9	6.8	9.18
Carne de res magra, contenido graso inf 14 %	1	1.44	2	2.7
Cebolla común, tallo	1.6	1.44	2	2.7
Ajo, pulpa del diente	1	0.36	0.5	0.68
Sal de mesa	1	1.08	1.5	2.03
Total		37.44	52	63.19

Tabla 3.4 Minuta para la sopa de lentejas. Según esto existen 3 recetas diferentes para la sopa de lentejas: 1 por cada grupo de edad.

En la columna sombreada se indica el *factor para el cálculo del peso bruto* que sirve para calcular qué cantidad de cada producto debe ser comprado. Este factor es la razón

$$\frac{\text{Cantidad del alimento a comprar}}{\text{Cantidad del alimento que se aprovecha}} \geq 1$$

Por ejemplo, si se requieren 19,58 gramos de papa se deben comprar $1{,}2 \times 19{,}58$ gramos.

A pesar de que en las 3 últimas columnas de la minuta indicada en la tabla 3.4 se distinguen los grupos de edad, en la práctica los alimentos **no se preparan por separado**. Según fuentes de la SDIS, cada una de estas casillas indica la cantidad en gramos del **ingrediente** *crudo* que debe agregarse por cada persona del grupo de edad en cuestión. Así, por ejemplo si a un determinado comedor asisten 30 personas distribuidas de la siguiente forma:

- $p_1 =$10
- $p_2 =$12
- $p_3 = 8$

Según la tabla 3.4, la cantidad de Zanahoria que debe agregarse a la sopa de lentejas es:

$$(10 \times 4{,}9g + 12 \times 6{,}8g + 8 \times 9{,}18g) = 204{,}04g$$

En general, si c_{ijk} -dato contenido en la tabla 3.4- indica la cantidad en gramos que debe adicionarse del *ingrediente* i (Zanahoria) en la preparación del *alimento* j (Sopa de lentejas) por cada integrante de la población k, la cantidad total del ingrediente i usado en la preparación del alimento será

$$\sum_k c_{ijk} p_k$$

Es importante por claridad, hacer la distinción entre

- Alimento seco
- Alimento húmedo

Ya que el peso de la mayoría de los alimentos después de preparados es diferente a la suma de los ingredientes (debido al contenido de agua), la porción que debe servirse a cada persona según el grupo al que pertenece es indicada por la SIDIS a los administradores de los comedores conjuntamente con las minutas. Fácilmente se calcula que las porciones equivalen a servir una cantidad del alimento seco igual a la suma de los ingredientes. Por lo que en adelante sólo nos referimos al *alimento seco.*

Para ilustrar este hecho tomemos por ejemplo la porción de sopa de lentejas servida a cada grupo de edad. Haciendo uso de la última fila de la tabla 3.4 vemos que:

- Niños de 1 a 5 años, porción a servir según las indicaciones de la SIDIS: 145 g, porción seca: 37.44 $g \to 37.44/145 = 0.26$
- Niños de 6 a 12 años, porción a servir según las indicaciones de la SIDIS: $200g$, porción seca: $52g \to 52/200 = 0.26$
- Personas mayores de 13 años, porción a servir según las indicaciones de la SIDIS: $270g$, porción seca: $70.21g$; $70.21/270 = 0.26$

En este caso, se entiende que el peso de la sopa de lentejas después de preparada (alimento húmedo) es:

$$\frac{\text{peso de los ingredientes crudos (i.e, Alimento seco)}}{0{,}26}$$

El conjunto de las minutas para todos los alimentos contiene la composición de cada uno de ellos, además si se conoce el contenido nutricional de los ingredientes, es fácil calcular el contenido nutricional de cada alimento. Si agrupamos los alimentos para conformar los menús, por medio de una simple suma sabremos cuántas unidades de cada nutriente es consumida por los usuarios de los comedores comunitarios y si se cumple o no el objetivo.
En cuanto que los alimentos para todos los grupos de edad se preparen conjuntamente, en el apéndice A se muestra que este hecho es irrelevante para los cálculos, y que es razonable suponer que se preparan por separado -además de práctico, ya que no requiere conocer la distribución de la población, información no registrada-.

3.3. Determinación del contenido nutricional de los alimentos

Para ilustrar este procedimiento, tomaremos el ejemplo particular del menú 1, el cual está conformado por los alimentos señalados en la tabla 3.3:

- Arroz con zanahoria
- Ensalada de espinaca y mango
- Jugo de piña
- Leche
- Lomitos de atún
- Ponqué
- Puré de papa
- Sopa de lentejas

Dado que la pregunta del problema de optimización es: **¿Cuántos gramos de cada alimento debo servir tal que el 35 % los requerimientos nutricionales diarios sean satisfechos?**. Debo saber cuántas unidades de cada nutriente están presentes en un gramo de cada alimento de los que componen el menú. Para construir la matriz que da cuenta de estas cantidades (*matrices de contenido nutricional de los alimentos*), necesitaremos para el menú 1:

- Número de unidades de cada nutriente contenidas en una unidad de cada ingrediente.
- Número de unidades de cada ingrediente contenidas en una unidad del alimento.

Lo primero, es universal, no depende de la población. Le llamaremos en general (ver Apéndice A) *matriz de contenido nutricional de los ingredientes*. En este caso está dada por:

N =

	Calcio (mg)	Calorías (Kcal)	Fósforo (mg)	Hierro (mg)	Niacina (mg)	Proteína (gr)	Riboflavina (mg)	Tiamina (mg)	Vit. A (ER)	Vit. C (mg)
Aceite vegetal(1 gm)	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0
Ajo pulpa del diente(gm)	0.4	1.38	1.35	0.013	0.007	0.047	0.0007	0.0012	0.06	0.09
Arroz blanco pulido(1 gm)	0.09	0.84	1.4	0.052	0.013	0.078	0.0003	0.0007	0	0
Atún (1 gm)	0.08	2.63	2.3	0.012	0.102	0.24	0.0014	0.0004	0.6	0
Azúcar sacarosa de caña(gm)	0	3.97	0	0.001	0	0	0	0	0	0
Carne de res magra contenido grasa inf(gm) 14 %	0.06	0	2.15	0.027	0.051	0.215	0.0023	0.0008	0	0
Cebolla común tallo(1 gm)	0.27	0.32	0.31	0.004	0.004	0.012	0.0004	0.0004	0	0.15
Espinaca, hojas sin vena(1 gm)	1.18	0.34	0.5	0.041	0.007	0.035	0.0023	0.0016	7.5	0.3
Leche entera pasteurizada(1 gm)	1.2	0.52	0.95	0.003	0.001	0.034	0.0004	0.0004	0.36	0.01
Lenteja, grano entero(1 gm)	0.7	3.43	3.7	0.095	0.018	0.235	0.0018	0.005	0	0
Limón jugo sin semillas(1 gm)	0	0	0	0	0	0	0.0002	0.0004	0	0.37
Mango pulpa sin cáscara ni semilla(1 gm)	0.1	0.63	0.13	0.005	0.006	0.006	0.0006	0.0006	3.3	0.45
Margarina enriquecida(1 gm)	0.02	7.33	0.15	0.002	0	0.006	0	0	15.02	0
Miel de abejas(1 gm)	0.25	3.23	0.1	0.008	0.003	0.006	0.0004	0	0	0
Papa común, tubérculo sin cáscara(1 gm)	0.02	0.95	0.28	0.006	0.009	0.019	0.0008	0.0008	0	0.16
Piña pulpa sin corazón(1 gm)	2.21	0.59	0.1	0.004	0.002	0.004	0.0003	0.0009	0	0.12
Ponqué(1 gm)	0.91	3.74	1.12	0.04	0.002	0.053	0.0006	0.0009	0.13	0
Sal de mesa(1 gm)	0.29	0	0.08	0.002	0	0	0	0	0	0
Zanahoria, pulpa sin cáscara(1 gm)	0.33	0.42	0.28	0.006	0.004	0.007	0.0004	0.0004	21.02	0.03

(3.2)

El segundo punto está relacionado con la receta que se usa para preparar cada alimento, que como vimos cambia con la edad. Para obtener esta matriz se debe normalizar cada una de las matrices que contienen las recetas por población -así cada componente indicará cuántos *gramos* de un ingrediente se requieren para preparar un *gramo* de el alimento en cuestión-. Las matrices con las recetas se presentan a continuación.

Para la p_1 tenemos:

	Arroz zanahoria	Ensalada de espinaca y mango	Jugo de piña	Leche	Lomitos de atún	Ponqué	Puré de papa	Sopa de lenteja
Aceite vegetal(gm)	1.8	0	0	0	0	0	0	0
Ajo pulpa del diente(gm)	0.26	0	0	0	0	0	0	0.36
Arroz blanco pulido(gm)	20.97	0	0	0	0	0	0	0
Atún	0	0	0	0	28.8	0	0	0
Azúcar sacarosa de caña(gm)	0	0	10.08	0	0	0	0	0
Carne de res magra contenido grasa inf 14 % (gm)	0	0	0	0	0	0	0	1.44
Cebolla común tallo(gm)	0.74	0	0	0	0	0	0	1.44
Espinaca, hojas sin vena(gm)	0	9.28	0	0	0	0	0	0
Leche entera pasteurizada(mml)	0	0	0	79.2	0	0	3.46	0
Lenteja, grano entero(gm)	0	0	0	0	0	0	0	8.64
Limón jugo sin semillas (gm)	0	1.8	0	0	0	0	0	0
Mango pulpa sin cáscara ni semilla (gm)	0	17.24	0	0	0	0	0	0
Margarina enriquecida (gm)	0	0	0	0	0	0	2.96	0
Miel de abejas (gm)	0	1.35	0	0	0	0	0	0
Papa común, tubérculo sin cáscara(gm)	0	0	0	0	0	0	43.48	19.58
Piña pulpa sin corazón(gm)	0	0	50.4	0	0	0	0	0
Ponqué(gm)	0	0	0	0	0	30	0	0
Sal de mesa(gm)	0.67	0	0	0	0	0	0.49	1.08
Zanahoria, pulpa sin cáscara(gm)	2.25	0	0	0	0	0	0	4.9

(3.3)

Para p_2:

	Arroz zanahoria	Ensalada de espinaca y mango	Jugo de piña	Leche	Lomitos de atún	Ponqué	Pure de papa	Sopa de lenteja
Aceite vegetal(gm)	2.5	0	0	0	0	0	0	0
Ajo pulpa del diente(gm)	0.36	0	0	0	0	0	0	0.5
Arroz blanco pulido(gm)	29.13	0	0	0	0	0	0	0
Atún(gm)	0	0	0	0	40.99	0	0	0
Azúcar sacarosa de caña(gm)	0	0	14	0	0	0	0	0
Carne de res magra contenido grasa inf 14 % (gm)	0	0	0	0	0	0	0	2
Cebolla común tallo (gm)	1.02	0	0	0	0	0	0	2
Espinaca, hojas sin vena (gm)	0	12.89	0	0	0	0	0	0
Leche entera pasteurizada (mml)	0	0	0	110	0	0	5.56	0
Lenteja, grano entero (gm)	0	0	0	0	0	0	0	12
Limón jugo sin semillas (gm)	0	2.5	0	0	0	0	0	0
Mango pulpa sin cáscara ni semilla (gm)	0	23.95	0	0	0	0	0	0
Margarina enriquecida (gm)	0	0	0	0	0	0	4.76	0
Miel de abejas(gm)	0	1.87	0	0	0	0	0	0
Papa común, tubérculo sin cáscara(gm)	0	0	0	0	0	0	69.88	27.2
Piña pulpa sin corazón(gm)	0	0	70	0	0	0	0	0
Ponqué(gm)	0	0	0	0	0	30	0	0
Sal de mesa(gm)	0.94	0	0	0	0	0	0.79	1.5
Zanahoria, pulpa sin cáscara(gm)	3.12	0	0	0	0	0	0	6.8

Para p_3:

	Arroz zanahoria	Ensalada de espinaca y mango	Jugo de piña	Leche	Lomitos de atún	Ponqué	Pure de papa	Sopa de lenteja
Aceite vegetal(gm)	4.47	0	0	0	0	0	0	0
Ajo pulpa del diente(gm)	0.64	0	0	0	0	0	0	0.68
Arroz blanco pulido(gm)	52.17	0	0	0	0	0	0	0
Atún(gm)	0	0	0	0	54	0	0	0
Azúcar sacarosa de caña(gm)	0	0	18.9	0	0	0	0	0
Carne de res magra contenido grasa inf (gm) 14 %	0	0	0	0	0	0	0	2.7
Cebolla común tallo (gm)	1.83	0	0	0	0	0	0	2.7
Espinaca, hojas sin vena (gm)	0	17.41	0	0	0	0	0	0
Leche entera pasteurizada (mml)	0	0	0	149	0	0	6.49	0
Lenteja, grano entero (gm)	0	0	0	0	0	0	0	16.2
Limón jugo sin semillas (gm)	0	3.37	0	0	0	0	0	0
Mango pulpa sin cáscara ni semilla (gm)	0	32.33	0	0	0	0	0	0
Margarina enriquecida (gm)	0	0	0	0	0	0	5.56	0
Miel de abejas (gm)	0	2.53	0	0	0	0	0	0
Papa común, tubérculo sin cáscara (gm)	0	0	0	0	0	0	81.53	35.72
Piña pulpa sin corazón (gm)	0	0	94.5	0	0	0	0	0
Ponqué (gm)	0	0	0	0	0	30	0	0
Sal de mesa (gm)	1.68	0	0	0	0	0	0.93	2.03
Zanahoria, pulpa sin cáscara (gm)	5.59	0	0	0	0	0	0	9.18

Tomemos como ejemplo la población 1, el resultado de normalizar la matriz 3.3 es:

$\bar{\mathbf{A}}_1 =$ (3.4)

	Arroz zanahoria	Ensalada de espinaca y mango	Jugo de piña	Leche	Lomitos de atín	Ponqué	Puré de papa	Sopa de lenteja
Aceite vegetal	0.067	0	0	0	0	0	0	0
Ajo pulpa del diente	0.010	0	0	0	0	0	0	0.010
Arroz blanco pulido	0.786	0	0	0	0	0	0	0
Atún	0	0	0	0	1	0	0	0
Azúcar sacarosa de caña	0	0	0.167	0	0	0	0	0
Carne de res magra contenido grasa inf 14 %	0	0	0	0	0	0	0	0.038
Cebolla común tallo	0.028	0	0	0	0	0	0	0.038
Espinaca, hojas sin vena	0	0.313	0	0	0	0	0	0
Leche entera pasteurizada	0	0	0	1	0	0	0.069	0
Lenteja, grano entero	0	0	0	0	0	0	0	0.231
Limón jugo sin semillas	0	0.061	0	0	0	0	0	0
Mango pulpa sin cáscara ni semilla	0	0.581	0	0	0	0	0	0
Margarina enriquecida	0	0	0	0	0	0	0.059	0
Miel de abejas	0	0.046	0	0	0	0	0	0
Papa común, tubérculo sin cáscara	0	0	0	0	0	0	0.863	0.523
Piña pulpa sin corazón	0	0	0.833	0	0	0	0	0
Ponqué	0	0	0	0	0	1	0	0
Sal de mesa	0.025	0	0	0	0	0	0.010	0.029
Zanahoria, pulpa sin cáscara	0.084	0	0	0	0	0	0	0.131

Al multiplicar la matrix 3.4 por la 3.2 se obtiene la *matriz de contenido nutricional de los alimentos*, que es la misma $\mathbf{A}$ del problema de Stigler. Para el caso que se está considerando $\mathbf{A}_1$ expresada en *Kilogramos* -unidades del nutriente en un *Kilogramo* del alimento- es:

$\mathbf{A}_1 =$

	Arroz zanahoria	Ensalada espinaca y mago	Jugo de piña	Leche	Lomitos de atún	Ponqué	Puré de papa	Sopa de lenteja
Calcio (mg)	117.2	438.6	1841.7	1200.0	80.0	910.0	103.6	240.1
Calorías (Kcal)	1324.7	619.4	1153.3	520.0	2630.0	3740.0	1286.0	1368.9
Fósforo (mg)	1147.3	236.5	83.3	950.0	2300.0	1120.0	316.4	1146.8
Hierro (mg)	41.6	16.1	3.5	3.0	12.0	40.0	5.5	27.2
Niacina (mg)	10.7	5.8	1.7	1.0	102.0	2.0	7.8	11.6
Proteína (gr)	62.7	14.7	3.3	34.0	240.0	53.0	19.1	74.3
Riboflavina (mg)	0.3	1.1	0.3	0.4	1.4	0.6	0.7	1.0
Tiamina (mg)	0.6	0.9	0.8	0.4	0.4	0.9	0.7	1.7
Vitamina A (ER)	1772.6	4263.3	0.0	360.0	600.0	130.0	907.0	2751.6
Vitamina C (mg)	7.6	377.8	100.0	10.0	0.0	0.0	138.7	94.2

(3.5)

extendiendo para todas las poblaciones:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{A}}_1 \tag{3.6}$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{A}}_2 \tag{3.7}$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{A}}_3 \tag{3.8}$$

En el Apéndice A se presenta una deducción más general de la construcción de los nutrientes por alimento preparado, así como un desarrollo que justifica la independencia del vector P que se ha considerado.

Capítulo 4

Optimización de los comedores comunitarios

4.1. Formulación y solución de los sistemas

En este capítulo nos proponemos resumir los resultados obtenidos, calculando las porciones óptimas a servir de cada alimento dada la composición en las minutas. Nos ocupamos principalmente del problema tipo *dieta de Stigler* 1.3, donde las restricciones se basan fundamentalmente en que los requerimientos nutricionales de cada una de las poblaciones sean satisfechos.

Sin embargo, los resultados además de óptimos deben tener sentido práctico, por lo que es necesario establecer hasta dónde pueden disminuir o aumentar las porciones con respecto a unos valores de referencia, y qué tanto pueden aumentar los precios de los almuerzos (¿10 %? ¿30 %?) para que se sigan considerando viables. En el desarrollo de esta pregunta, las conclusiones de los siguientes cálculos cobran un sentido subjetivo, que va de hecho más allá del conocimiento que tenemos del presupuesto y los motores de las decisiones que se toman al respecto de la *Política de seguridad alimentaria* de Bogotá.

4.1.1. Cálculo de porciones que minimizan el costo: requerimientos satisfechos

El problema de Stigler debe ser resuelto para los tres grupos de edad y cada uno de los 18 menús independientemente (es claro que los resultados para una población no deben afectar los otros). Tenemos entonces un conjunto de $18 \times 3 = 54$ problemas de optimización lineal, con un conjunto de restricciones compuestos inicialmente por los requerimientos nutricionales mínimos, más adelante se agregan nuevas restricciones por cuenta de los límites superior e inferior aceptados para las porciones de cada uno de los alimentos.

Un ejemplo sencillo:

Se debe resolver para cada menú el problema de programación lineal 1.3

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & c\mathbf{x} \\ \text{suejeto a } & A\mathbf{x} \geq b \end{aligned} \tag{4.1}$$

Nuevamente ejemplifiquemos el procedimiento por medio del menú 1 y el primer grupo de edad. El costo por unidad de alimento (Kg-Lt) se calcula a partir de los costos de cada ingrediente - tomados en general de [12], [13]- y la matriz $\bar{\mathbf{A}}_1$. En este caso:

Arroz zanahoria	Ensalada espinaca y mago	Jugo de piña	Leche	Lomitos de atún	Ponqué	Puré de papa	Sopa de lenteja
\$2.639	\$1.357	\$891	\$810	\$10.000	\$6.000	\$1.404	\$1.789

Con esta tabla y los resultados del capítulo 3 - donde se obtuvieron la matriz $\mathbf{A}_1$ 3.5 y el vector de requerimientos nutricionales $\mathbf{b}_1$ de la tabla 3.2 - queda definido el programa lineal:

$$\text{Minimizar } \begin{bmatrix} 2639 & 1357 & 891 & 810 & 10000 & 6000 & 1404 & 1789 \end{bmatrix}^T \mathbf{x}_1 \tag{4.2}$$

Sujeto a

$$\begin{bmatrix} 117,2 & 438,6 & 1841,7 & 1200,0 & 80,0 & 910,0 & 103,6 & 240,1 \\ 1324,7 & 619,4 & 1153,3 & 520,0 & 2630,0 & 3740,0 & 1286,0 & 1368,9 \\ 1147,3 & 236,5 & 83,3 & 950,0 & 2300,0 & 1120,0 & 316,4 & 1146,8 \\ 41,6 & 16,1 & 3,5 & 3,0 & 12,0 & 40,0 & 5,5 & 27,2 \\ 10,7 & 5,8 & 1,7 & 1,0 & 102,0 & 2,0 & 7,8 & 11,6 \\ 62,7 & 14,7 & 3,3 & 34,0 & 240,0 & 53,0 & 19,1 & 74,3 \\ 0,3 & 1,1 & 0,3 & 0,4 & 1,4 & 0,6 & 0,7 & 1,0 \\ 0,6 & 0,9 & 0,8 & 0,4 & 0,4 & 0,9 & 0,7 & 1,7 \\ 1772,6 & 4263,3 & 0,0 & 360,0 & 600,0 & 130,0 & 907,0 & 2751,6 \\ 7,6 & 377,8 & 100,0 & 10,0 & 0,0 & 0,0 & 138,7 & 94,2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 \geq \begin{bmatrix} 210 \\ 574 \\ 210 \\ 3,15 \\ 4,02 \\ 10,15 \\ 0,35 \\ 0,28 \\ 192,50 \\ 11,55 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

El vector $\mathbf{x}_1$ contiene las unidades (Kg-Lt) de cada alimento que minimizan el costo y satisfacen las restricciones para la población entre 1 y 5 años.

Veamos el resultado -en gramos para mayor claridad- obtenido por medio de un **Método Simplex de dos fases** 2.3.4 implementado para este trabajo en **MATLAB**, en comparación con las porciones que se sirven realmente:

Alimento	**x**(g)	Real(g)
Arroz zanahoria	0	26.69
Ensalada de espinaca y mango	0	29.67
Jugo de piña	74.85	60.48
Leche	0	79.20
Lomitos de atún	1.26	28.80
Ponque	0	30.00
Puré de papa	105.84	50.39
Sopa de lenteja	254.40	37.44

El costo de este menú optimizado es de \$683, el costo antes de optimizar -el menú que realmente se sirve en los comedores- es de \$835, lo que implica una reducción del 18.2 %. Observamos también que el algoritmo elimina algunos de los alimentos: según el resultados bastará jugo, una diminuta cantidad de atún, una porción de puré de papa que equivale al doble de la real y una porción gigantesca de sopa, para suplir la ingesta de nutrientes asociadas al almuerzo.

Si realizamos el mismo procedimiento para el segundo grupo de edad, encontramos:

Alimento	**x**(g)	Real(g)
Arroz zanahoria	0	37.07
Ensalada de espinaca y mango	0	41.21
Jugo de piña	132.13	84
Leche	0	110
Lomitos de atun	0.75	40.99
Ponque	0	30
Pure de papa	46.49	80.99
Sopa de lenteja	423.95	52

El resultado es consistente con el de la anterior población: se eliminan los mismos alimentos y el menú se ve orientado hacia las lentejas y la papa. Esto es fácil de comprender debido al bajo precio de estos alimentos y su alto contenido nutricional. La diminuta cantidad de atún se debe a su alto costo y parece estar compensando un pequeño excedente que no pueden suplir los demás alimentos. El costo del menú optimizado es de \$949 y el costo real \$1.114, para una disminución del 14.8 %. Por último, para la población de 13 años o más:

Alimento	$\mathbf{x}$(g)	Real(g)
Arroz zanahoria	0	66.38
Ensalada de espinaca y mango	0	55.64
Jugo de piña	140.33	113.4
Leche	0	149
Lomitos de atun	3.79	54
Ponque	0	30
Pure de papa	227.79	94.51
Sopa de lenteja	427.53	69.21

Como era de esperar, los resultados son similares, el precio mejora al optimizar -disminuye- en un 13.7 % (pasando de \$1.449 a \$1250). En general, analizando los resultados para los 18 menús se encuentra que las porciones de arroz y ensalada tienden a anularse, las de papa y leguminosa a tornarse exageradas, y las carnes muy pequeñas. Este comportamiento en los resultados no es de extrañar, el algoritmo tenderá a anular las cantidades de algunos alimentos mientras incrementa indiscriminadamente las de otros. Esto nos lleva a reconocer que el problema no está completamente definido, existen resultados, que aunque hagan mínimo el costo y contengan el 35 % o más del requerimiento diario, no son admisibles. Por ejemplo, no podemos aceptar soluciones que anulen alguno de los alimentos o cuyas porciones sean ínfimas o demasiado grandes, así como no se puede servir un almuerzo sin jugo o menos de un gramo de atún. Es necesario establecer un conjunto adicional de restricciones o cotas superiores e inferiores que nos permitan soluciones aplicables en la práctica.

Se ha establecido un conjunto de límites razonables -comunes- para cada uno de los alimentos en la tabla 3.3, que indican hasta dónde puede aumentar y disminuir la porción. Por ejemplo, para los alimentos del menú 1 se consideran los siguientes límites inferiores:

Alimento	inf_1	inf_2	inf_3
Arroz zanahoria	25.25	35.06	62.82
Ensalada de espinaca y mango	26.81	37.22	37.16
Jugo de piña	43.20	60.00	81.00
Leche	79.20	79.20	79.20
Lomitos de atun	28.80	40.99	54.00
Ponque	30.00	30.00	30.00
Sopa de lenteja	50.39	71.51	94.51
Pure de papa	37.44	52.00	69.21

y superiores:

Alimento	sup_1	sup_2	sup_3
Arroz zanahoria	31.52	41.60	70.08
Ensalada de espinaca y mango	37.76	56.01	70.81
Jugo de piña	126.72	176.00	229.50
Leche	149.00	149.00	149.00
Lomitos de atun	28.80	40.99	54.00
Ponque	30.00	30.00	30.00
Pure de papa	79.86	128.35	149.75
Sopa de lenteja	111.60	155.00	209.15

Entonces cada **A** y **b** debe ser modificado por cuenta de las nuevas restricciones e introducidas al sistema *variables de holgura* - lo último también fue necesario en el cálculo previo - para que quede en la forma 2.3, y así ser el *input* adecuado de nuestro algoritmo para el **Método Simplex de dos fases** 2.3.4.

Como resultado obtenemos $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ (presentadas en gramos):

Alimento	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$
Arroz zanahoria	25.25	35.06
Ensalada de espinaca y mango	37.76	56.01
Jugo de piña	59.20	147.24
Leche	149	149
Lomitos de atun	28.8	40.99
Ponque	30	30
Pure de papa	79.866	128.35
Sopa de lenteja	111.6	155

Para la tercera población no se encontró solución óptima. Analicemos los costos de la optimización con límites para las porciones Vs sin límites :

Costo real	\$835	\$1.114	\$1.449
Costo óptimo sin límites	\$683	\$949	\$1.250
Costo óptimo con límites	\$1.071	\$1.468	-
Incremento % real-lím	28 %	32 %	-
Incremento % no lím-lím	57 %	55 %	-

No sólo en el caso del menú 1 -ocurre con casi todos- es notorio el incremento en los costos al introducir los límites: cuanto más restrictivo el problema, peor -mayor- es el valor de la función objetivo. Esto manifiesta la importancia de la escogencia de las cotas y hace interesante un análisis de sensibilidad en esta dirección 4.1.3.

4.1.2. Índice de confianza para los menús

Con el objetivo de determinar qué tanto *distan* los menús reales de los óptimos, definimos las siguientes cantidades, que se calculan independientemente para cada menú y población, y a las que nos referimos en adelante como ***índices de confianza***:

Si $x_1, x_2, ...x_8$ son las componentes del vector $\mathbf{x}$ de porciones óptimas, y $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ...\bar{x}_8$ las componentes del vector $\bar{\mathbf{x}}$ de porciones reales, el *índice de confianza sobre porciones* η_1 está dado por:

$$\eta_1 = \sqrt{\left(\frac{x_1 - \bar{x}_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \bar{x}_2}{x_2}\right)^2 + ... + \left(\frac{x_8 - \bar{x}_8}{x_8}\right)^2} \tag{4.4}$$

Ya que no consideramos admisibles las soluciones sin cotas, estudiaremos el comportamiento de este índice sobre las soluciones que si poseen límite. Nuevamente, para el menú 1 y la primera población el índice es de 92 % y para la segunda de 95 %, lo que sugiere que al optimizar cambiaron radicalmente.

Otra opción es definir este índice sobre el contenido nutricional: *índice de confianza sobre nutrientes* η_2, es decir, calculamos qué tanto *dista* un menú de otro en nutrientes, lo que resulta razonable ya que el objetivo es alcanzar un cierto porcentaje del requerimiento diario, sin importar cómo se distribuyan los alimentos, esto es:

Si $n_1, n_2, ...n_{10}$ son las unidades de cada nutriente presentes en el menú de porciones óptimas, y $\bar{n}_1, \bar{n}_2, ...\bar{n}_{10}$ las presentes en el menú de porciones reales, el *índice de confianza sobre nutrientes* está dado por:

$$\eta_2 = \sqrt{y_i^2 + y_2^2 + ...y_{10}^2} \tag{4.5}$$

$$\text{Donde}$$

$$y_i = \left(\frac{n_i - \bar{n}_i}{n_i}\right) \text{ si } n_i - \bar{n}_i > 0 \text{ y,}$$

$$y_i = 0 \text{ de otro modo}$$

La condición sobre los y_i pretende eliminar el *ruido* que aparece cuando el suministro de algún nutriente es muy elevado en un menú real. Por ejemplo, el menú 12 proporciona el 100 % del requerimiento diario de Vitamina C, lo que dispararía el índice, enviando un mensaje equivocado. Así definido es deseable que su valor sea pequeño. En este caso que se está considerando el índice es de 62 % y 76 % para las poblaciones 1 y 2 respectivamente.

Un *índice de confianza* muy alto indica que las porciones optimizadas y reales difieren demasiado o que el contenido nutricional antes de optimizar está muy lejos del optimizado -según el índice que se elija-. Por otro lado, si esto ocurre y la diferencia de precios es *relativamente baja*, podremos decir que el menú es ineficiente: con un gasto adicional bajo se llegaría a un desempeño óptimo y sin embargo, tal como está planteado está muy lejos de esta posibilidad.

Como se vio en el ejemplo, los límites que se consideraron en este ejemplo resultaron ser muy restrictivos y dispararon la función objetivo. Como se ilustra en 4.1.3 *relajar* estas restricciones implica un aumento en la probabilidad de que las soluciones existan, e incrementos más moderados en los costos. A continuación se presentan los índices calculados menú a menú relajando los límites por un factor del 50 %, es decir, que por ejemplo la porción de sopa de lentejas para la población 3 puede disminuir hasta 47.26 g y aumentar hasta 224.63 g.

Para η_1 se calculó:

	Población 1	Población 2	Población 3
MENÚ 1	2.31	2.73	3.46
MENÚ 2	1.98	1.41	1.51
MENÚ 3	1.28	1.3	0.77
MENÚ 4	1.35	1.32	1.32
MENÚ 5	2.08	–	–
MENÚ 6	1.94	2.56	3.21
MENÚ 7	–	–	–
MENÚ 8	1.89	1.66	1.51
MENÚ 9	2.6	3.96	4.81
MENÚ 10	2.56	2.22	2.22
MENÚ 11	–	–	–
MENÚ 12	1.73	–	1.65
MENÚ 13	22.4	2.2	2.75
MENÚ 14	1.29	–	–
MENÚ 15	1.21	–	–
MENÚ 16	–	–	–
MENÚ 17	1.88	2.2	2.76
MENÚ 18	4.68	3.76	3.92

Las celdas marcadas con – indican que no se encontró solución. Es claro que este estimador es muy alto, en la mayoría de los casos superior al 200 %. Esto ilustra el hecho de que la optimización modifica considerablemente la estructura del menú, pero no es un buen referente para compararlo con el cambio porcentual en los precios. Veamos ahora el segundo índice η_2:

	Población 1	Población 2	Población 3
MENÚ 1	60 %	73 %	69 %
MENÚ 2	75 %	91 %	83 %
MENÚ 3	38 %	66 %	45 %
MENÚ 4	69 %	64 %	61 %
MENÚ 5	102 %	–	–
MENÚ 6	17 %	30 %	17 %
MENÚ 7	–	–	–
MENÚ 8	82 %	77 %	67 %
MENÚ 9	64 %	80 %	77 %
MENÚ 10	57 %	66 %	68 %
MENÚ 11	–	–	–
MENÚ 12	90 %	–	154 %
MENÚ 13	85 %	105 %	96 %
MENÚ 14	73 %	–	–
MENÚ 15	108 %	–	–
MENÚ 16	–	–	–
MENÚ 17	28 %	40 %	49 %
MENÚ 18	44 %	44 %	33 %

Encontramos que es más fácil de interpretar, sin embargo nuevamente el índice permanece por encima del 50 %, alcanzando niveles particularmente para los menús 5, 12 y 15. Ahora veamos la diferencia porcentual entre el precio del menú real y el menú optimizado:

	Población 1	Población 2	Población 3
MENÚ 1	1 %	4 %	4 %
MENÚ 2	22 %	31 %	30 %
MENÚ 3	18 %	31 %	22 %
MENÚ 4	41 %	35 %	31 %
MENÚ 5	20 %	–	–
MENÚ 6	-7 %	-8 %	-11 %
MENÚ 7	–	–	–
MENÚ 8	23 %	36 %	33 %
MENÚ 9	-3 %	3 %	0 %
MENÚ 10	4 %	19 %	23 %
MENÚ 11	–	–	–
MENÚ 12	43 %	–	100 %
MENÚ 13	27 %	35 %	26 %
MENÚ 14	73 %	–	–
MENÚ 15	71 %	–	–
MENÚ 16	–	–	–
MENÚ 17	5 %	9 %	14 %
MENÚ 18	-24 %	-21 %	-24 %

Los resultado consignados en las dos últimas tablas evidencian una característica sobresaliente: a pesar de que los menús ordinarios están relativamente cerca en precio a los menús óptimos, el aporte nutricional difiere considerablemente de forma negativa - por la forma de definir el índice - en casi todos los casos, lo que los hace ineficientes. Por ejemplo se ve que el menú 1 sólo necesita un gasto adicional del 1 % para ser óptimo, y sin embargo tiene una *deficiencia estimada* del 60 %. El caso del menú 18 es peor: se pueden suplir las necesidades propuestas con el 25 % menos del costo real, y sin embargo estimamos una deficiencia de más del 40 % en promedio.

Si bien, los índices η_1 y η_2 permiten entender deficiencias de los comedores comunitarios, sería aventurado decidir sobre estos valores cuáles menús son mejores que otros y cuáles deberían ser eliminados. Es necesario elegir un criterio relacionado explícitamente con los precios, esta idea se desarrolla más adelante.

4.1.3. Sensibilidad de las soluciones a los límites para las porciones

Es muy importante resaltar el carácter subjetivo que podrían reflejar los resultados de una optimización de esta clase. Son evidentes los efectos que sobre ellos tienen los parámetros por medio de los cuales se definen los límites superior e inferior para las porciones. Como es obvio, las consecuencias de la "libertad" que posean las porciones para crecer o disminuir, influye en la calidad de las soluciones, en términos de la misma existencia o el valor de función objetivo (costo del menú). Sin embargo, establecer valores que permitan una solución aplicable, está más relacionado con las costumbres y los gustos de los usuarios. Por ejemplo, doblar la porción de sopa para un niño podría ser desmotivador.

Los límites superior e inferior para las porciones optimizadas se calculan a partir de los límites usados en la sección 4.1.1 según los parámetros α y β que determinan qué tan por encima del máximo o qué tan por debajo del mínimo respectivamente puede llegar a estar la porción. Veamos el número de soluciones obtenidas (de 18 posibles) para diferentes valores de α:

α	0 %	10 %	20 %	30 %	40 %	50 %	60 %	70 %
Niños 1 a 5 años	4	7	10	12	13	15	15	15
Niños 6 a 12 años	1	4	6	8	11	11	13	13
Mayores de 13 años	2	4	7	11	12	12	14	15

A manera de ejemplo, veamos cómo se comportan las soluciones del el menú 1, para la población 1. Si bien, el valor de α es importante para definir si la solución existe o no (es obvio, pues permite que las variables aumenten su valor), β tiene implicaciones sobre el precio, pues el programa queda el libertad de deshacerse del costo de un alimento si esto significa disminuir el valor de la función objetivo sin violar la restricción,

α/β	0 %	10 %	20 %	30 %	40 %	50 %	60 %	70 %
0 %	\$1071	\$ 1059	\$1053	\$1048	\$1045	\$1043	\$1040	\$1038
10 %	\$1041	\$1017	\$1011	\$1006	\$1001	\$ 998	\$995	\$993
20 %	\$1011	\$975	\$969	\$963	\$958	\$954	\$952	\$951
30 %	\$991	\$ 933	\$927	\$921	\$916	\$915	\$914	\$913
40 %	\$984	\$ 903	\$889	\$883	\$879	\$878	\$ 877	\$877
50 %	\$978	\$ 873	\$855	\$849	\$844	\$843	\$842	\$841
60 %	\$971	\$ 844	\$821	\$815	\$808	\$808	\$807	\$806
70 %	\$966	\$ 829	\$801	\$784	\$775	\$772	\$771	\$770

En general, el costo de un menú es sensible a α y β, como es claro, amplían y reducen la región factible, permitiendo en el primer caso mejores soluciones. Puede apreciarse en la tabla como el costo óptimo va disminuyendo al tiempo que aumentan ambos parámetros.

Analicemos la situación $\alpha = \beta = 50\,\%$. ¿Cuales menús tienen solución óptima? ¿Cuáles no? y una pregunta fundamental ¿Qué tanto aceptamos que incremente el precio de un menú?. En las figuras 4.1, 4.3 y 4.5 se encuentran por poblaciones los costos de los menús antes y después de optimizar, el eje horizontal indica el número del menú, para los que faltan no se encontró solución. Un criterio a la hora de decidir si el menú optimizado es aceptable o no, puede estar basado en que sólo se admitan menús que luego de optimizar no superen el costo del promedio real por población -sobre todo ciclo- más un treinta por ciento de este valor. Porque si bien, por definición los menús optimizados satisfacen los requerimientos nutricionales, ante un costo excesivo es preferible reemplazarlo. Para el ejemplo en curso los precios serían de \$1.012, \$1.348 y \$1.783 para los tres grupos respectivamente.

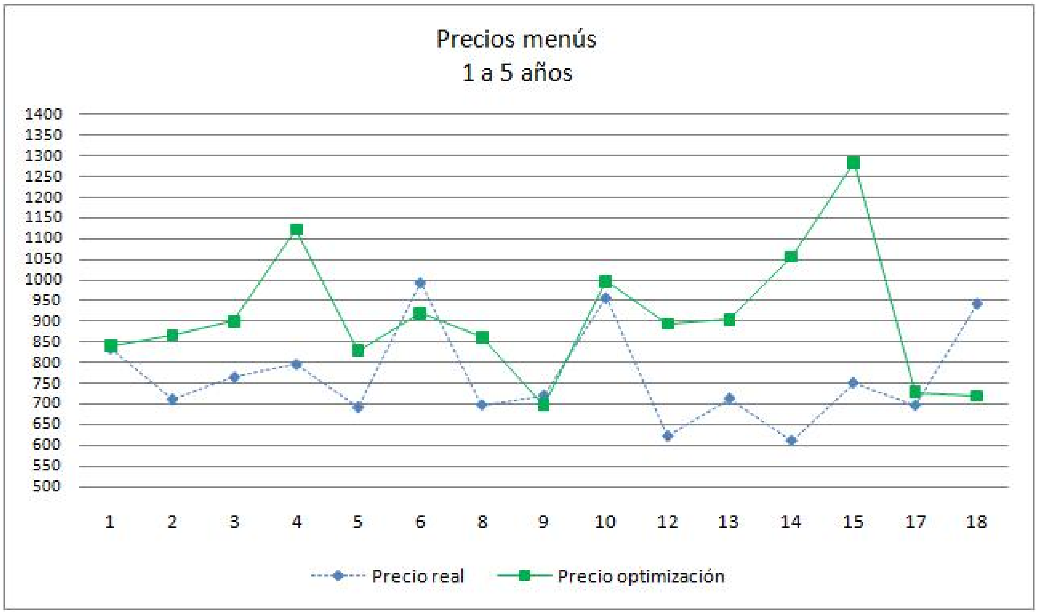

Figura 4.1 Precios de los menús antes y después de optimizar población de 1 a 5 años

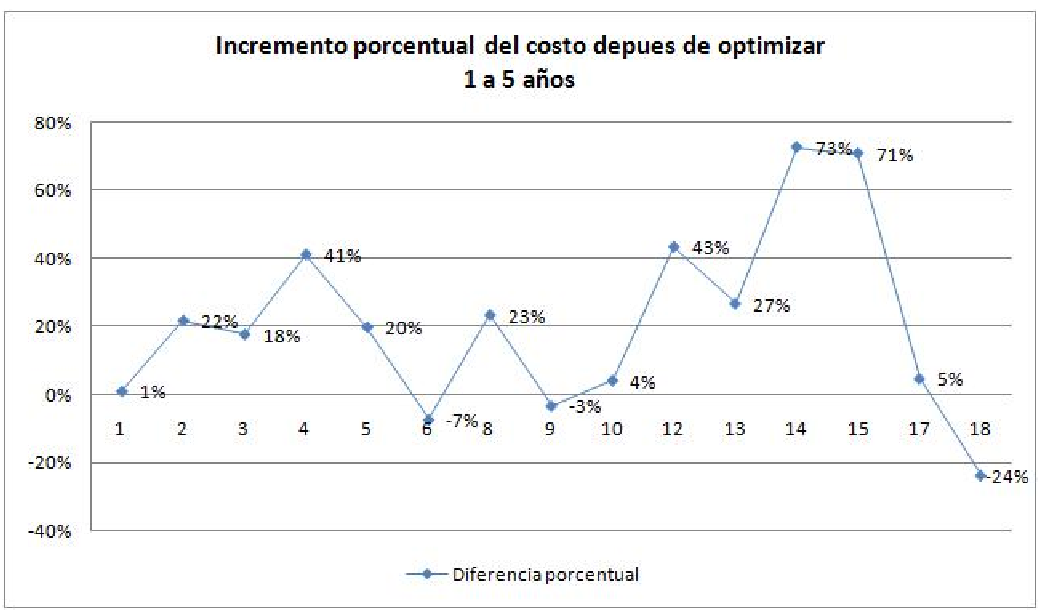

Figura 4.4 Incremento porcentual en el precio de los menús después de optimizar población de 1 a 5 años.

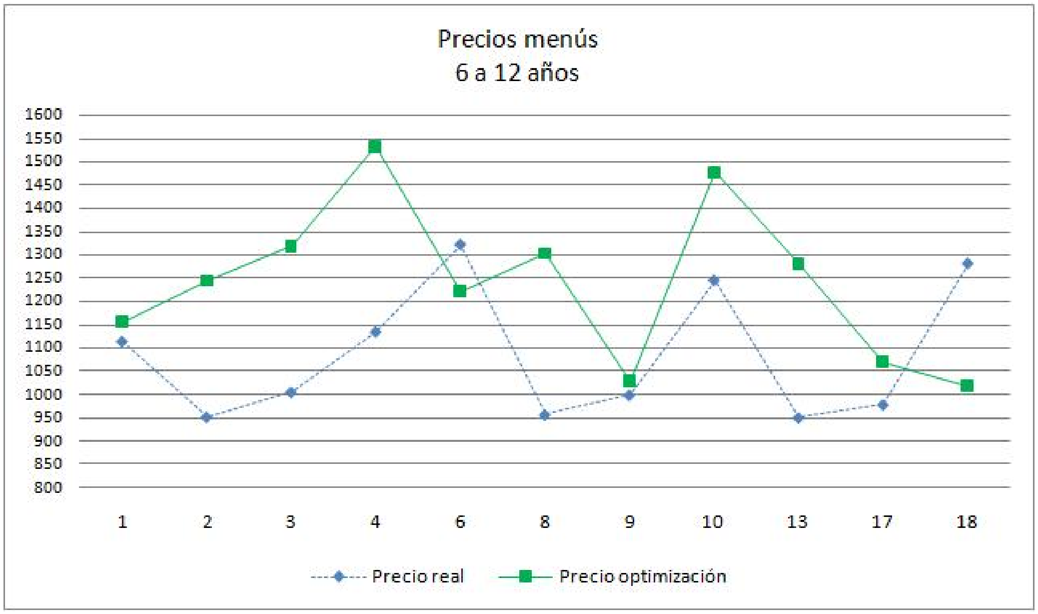

Figura 4.2 Precios de los menús antes y depués de optimizar población de 6 a 12 años

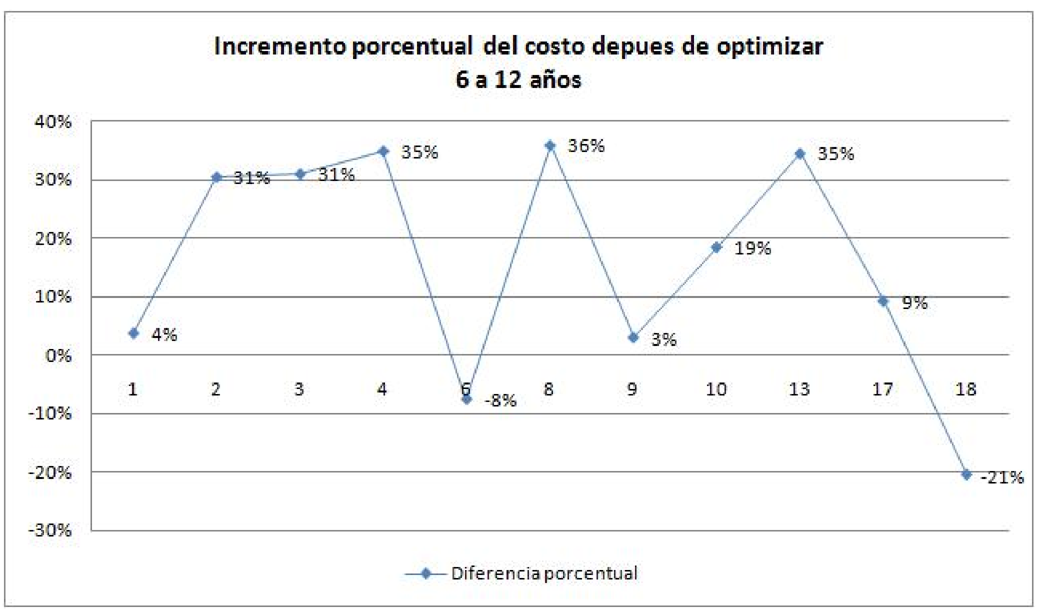

Figura 4.5 Incremento porcentual en el precio de los menús después de optimizar población de 6 a 12 años.

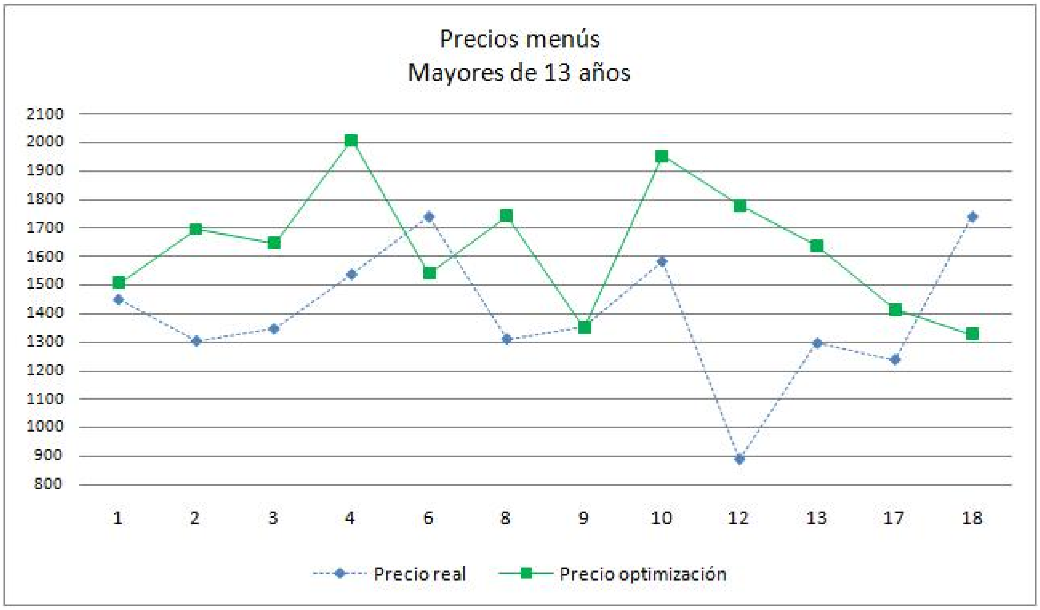

Figura 4.3 Precios de los menús antes y depués de optimizar población de 13 años o más

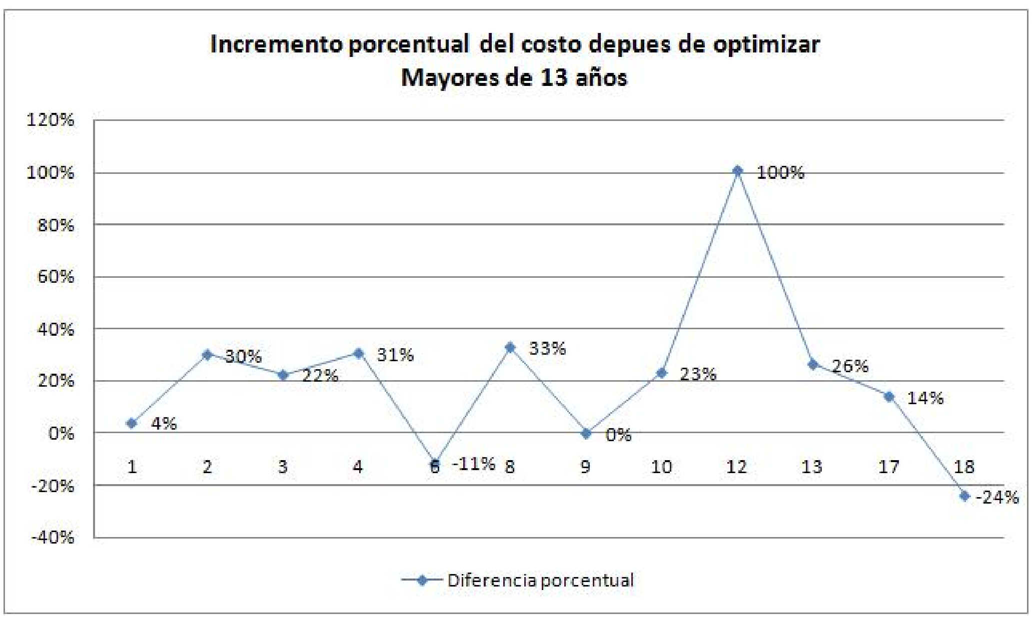

Figura 4.6 Incremento porcentual en el precio de los menús después de optimizar población de 13 años o más.

Por ejemplo, aunque el menú 4 tiene solución óptima, el nuevo costo es superior al costo del menú promedio por más del 30 % para todas las poblaciones, igual que ocurre con el menú 10. Basados en este hecho, tendríamos que descartar los menús 4 y 10 por costo y 5, 7, 11, 12, 14, 15 y 16 por no tener solución para todos los grupos de edad. El nuevo ciclo quedaría entonces conformado únicamente por los menús 1, 2, 3, 6, 8, 9, 13, 17, 18, reduciendo el ciclo a 9 días. Los costos por población cada 18 días serían:

Población	Real	Óptimo	Inc. porcentual
1 a 5 años	\$14.011	\$14.903	6 %
6 a 12 años	\$18.660	\$21.286	14 %
Mayores de 13 años	\$24.696	\$27.717	12 %

Es más claro lo que ocurre después de optimizar los menús observando el incremento porcentual en el precio en las gráficas 4.2, 4.4 y 4.6. El incremento porcentual en el costo se interpreta como el mínimo aumento porcentual -con respecto al gasto actual- en que debería incurrir la administración distrital para cumplir el propósito de suministrar al menos el 35 % de los requerimientos nutricionales diarios. Por otro lado si esta cantidad es calculada con respecto al costo optimizado, la diferencia porcentual indicará el porcentaje que la administración distrital deja de subsidiar del mínimo requerido para proporcionar un almuerzo satisfactorio.

Estos resultados permiten también, por ejemplo, descartar menús para los que el precio aumentó hasta superar un eventual límite preestablecido y tomar medidas como eliminar uno o varios menús que resultan muy costosos y reemplazarlos con otros más baratos, sin desmejorar el suministro de nutrientes, ya que todos los menús satisfacen el requerimiento mínimo.

4.2. Cálculo de porciones que maximizan la ración de nutrientes y proteínas

Hemos visto que por medio de la resolución de un problema del tipo *Stigler* logramos, nó sólo estimar las cantidades que deben servirse del alimento, además descartamos algunos menús que pueden considerarse de diseño errado, es decir que ni optimizando logran alcanzar el 35 % deseado. Vimos también que los resultados están fuertemente ligados al criterio de quién administre los comedores. Ahora consideremos que el costo de cada menú es un valor asignado fijo por persona, entonces, ¿Qué sería lo mejor que se puede hacer?, es decir, si calculamos las porciones, que con ese presupuesto fijo, mejor **nutren** a los usuarios ¿Cuál será la mejoría con respecto a lo que ocurre en la actualidad?

Lo fundamental ahora es plantear un problema, en el marco de la programación lineal, para cada menú y cada población que mejor refleje nuestro propósito. Es claro que las restricciones son: el conjunto de cotas superiores e inferiores para las porciones (que impiden soluciones sin sentido práctico), el precio del menú y la no negatividad de las variables. La función objetivo en cambio es más difícil de definir. Lo que queremos es, básicamente calcular las porciones x_j, $j = 1, 2, ...$*número de alimentos del menú*, tales que el suministro de proteínas y nutrientes sea lo más cercano posible a los requerimientos que ya han sido discutidos. Sin embargo para conservar la estructura debemos definir un escalar que refleje este hecho.

Sea $\mathbf{A_k}$ la matriz de composición nutricional en 4.1, b_{ik} con $i = 1, 2, ..., 10$ el 35 % del requerimiento diario del nutriente i para la población k y $\bar{b}_{ik}$ la cantidad que proporciona el menú en cuestión. Lo deseable es que $\frac{b_{ik}-\bar{b}_{ik}}{b_{ik}}$ sea mínimo nutriente a nutriente. En este caso, definimos la función objetivo a minimizar como

$$z = \sum_i \frac{(b_{ik} - \bar{b}_{ik})}{b_{ik}}$$

Donde, siendo a_{ijk} las componentes de $\mathbf{A}$, con j indicando el alimento, $\bar{b}_{ik}$ se define como:

$$\bar{b}_{ik} = \sum_j a_{ijk} x_j \tag{4.6}$$

Este problema se resuelve menú a menú. Para hacernos una idea del resultado, veamos qué ocurre con el contenido nutricional del menú 1. En la tabla a continuación se presenta el porcentaje del requerimiento diario de cada nutriente por cuenta de las porciones estimadas,

	1 a 5 años	6 a 12 años	Mayores de 13 años
Calcio	64 %	49 %	55 %
Calorías	36 %	34 %	33 %
Fósforo	54 %	43 %	52 %
Hierro	83 %	51 %	47 %
Niacina	38 %	38 %	39 %
Proteína	71 %	58 %	56 %
Riboflavina	33 %	32 %	33 %
Tiamina	62 %	61 %	59 %
Vitamina A	140 %	143 %	145 %
Vitamina C	167 %	172 %	166 %

En contraste con el excelente resultado de esta optimización, el menú 11,

	1 a 5 años	6 a 12 años	Mayores de 13 años
Calcio	10.3 %	7.8 %	7.8 %
Calorías	37.0 %	35.3 %	30.0 %
Fósforo	42.0 %	29.5 %	29.2 %
Hierro	64.9 %	36.3 %	25.0 %
Niacina	39.2 %	31.5 %	27.8 %
Proteína	69.5 %	47.0 %	39.2 %
Riboflavina	24 %	20 %	19 %
Tiamina	47 %	45 %	40 %
Vitamina A	118 %	119 %	117 %
Vitamina C	109 %	108 %	96 %

Sin ir más allá, veamos la eficiencia de este procedimiento para el resultado del ciclo completo: el promedio de cada nutriente a lo largo de los 18 días -sólo aplica para un usuario que asiste diariamente-,

	1 a 5 años		6 a 12 años		Mayores de 13 años	
	Dif. porcentual	Porcentaje	Dif. porcentual	Porcentaje	Dif. porcentual	Porcentaje
Calcio			12 %	31 %		
Calorías						
Fósforo						
Hierro						
Niacina						
Proteína						
Riboflavina						
Tiamina						
Vitamina A						
Vitamina C						

El porcentaje se calcula sobre el 100 % del requerimiento diario y la diferencia porcentual sobre el 35 %, esta última haciendo referencia a lo que se deja de dar de lo prometido.

El promedio para las tres semanas sólo presenta una deficiencia de calcio del 12 %, las casillas vacías indican que se satisface el 35 % o superior. Es interesante notar que aunque observando menú a menú, los resultados de esta optimización tienen fuertes altibajos, el resultado promedio es muy satisfactorio y obviamente no representa aumento en los costos.

Capítulo 5

Aporte nutricional real de BBA

Las definiciones en el capítulo 3 nos permiten analizar la eficiencia de los comedores en términos del aporte nutricional que hace a los usuarios. Para empezar, veamos como de costumbre el análisis del menú 1. El porcentaje aportado por este menú al requerimiento nutricional diario de cada población es -el ideal es de 35 % a 40 %-:

	1 a 5 años	6 a 12 años	Mayores de 13 años
Calcio	44 %	36 %	44 %
Calorías	29 %	27 %	27 %
Fósforo	46 %	38 %	46 %
Hierro	54 %	32 %	30 %
Niacina	39 %	40 %	40 %
Proteína	59 %	50 %	48 %
Riboflavina	22 %	22 %	22 %
Tiamina	32 %	32 %	31 %
Vitamina A	68 %	69 %	72 %
Vitamina C	87 %	92 %	90 %

Tabla 5.1 Porcentaje del requerimiento diario que satisface el menú 1.

En este caso el suministro de Calorías es inferior al 30 % para todas las poblaciones, lo que representa una diferencia porcentual del 14 % con respecto al 35 % que debe darse. El suministro de Riboflavina, que es indispensable para el correcto funcionamiento de los sistemas nervioso y ocular (ver la sección 1.2), no supera en ningún grupo de edad el 22 %, es decir se deja de dar el 37 % del mínimo prometido por BBA. A pesar de esto, es de notar que, por ejemplo este almuerzo tiene un alto contenido de Vitamina C, prácticamente suficiente para todo el día. Veamos ahora el menú 12,

	1 a 5 años	6 a 12 años	Mayores de 13 años
Calcio	23 %	15 %	15 %
Calorías	20 %	18 %	18 %
Fósforo	36 %	25 %	28 %
Hierro	39 %	21 %	21 %
Niacina	27 %	23 %	22 %
Proteínas	46 %	31 %	27 %
Riboflavina	21 %	17 %	15 %
Tiamina	23 %	20 %	18 %
Vitamina A	46 %	39 %	36 %
Vitamina C	111 %	100 %	93 %

Tabla 5.2 Porcentaje del requerimiento diario que satisface el menú 12.

Aunque nuevamente observamos un alto suministro de Vitamina C y el margen del 35 % es superado ampliamente en Vitamina A, la población mayor de 13 años se ve desfavorecida en casi todos los demás nutrientes, donde nunca se llega al 30 % y se observa un caso crítico en el Calcio, si recordamos que tiene consecuencias como la osteoporosis en adultos mayores.

Pero este tipo de análisis, aunque útil, no es concluyente, por eso se hace necesario establecer criterios que nos permitan calificar cada uno de los menús y establecer en promedio qué ocurre en los comedores a lo largo de las tres semanas. Con ese objetivo estableceremos 3 etapas de diagnóstico

1. Menú a menú

2. Promedios por ciclo

3. Altenativas de mejora de promedios sustituyendo un algunos menús por otros

5.1. Diagnóstico para cada menú

En general, ninguno de los 18 menús ofrecidos llega a satisfacer el umbral del 35 % de la necesidad de cada nutriente para ninguna de las poblaciones. Para evaluar los menús recurrimos al *índice de confianza sobre nutrientes* definido en 4.5, esta vez evaluando el contenido del menú real con respecto al vector de requerimientos. Los resultados ordenados de mejor a peor por población se presentan a continuación:

Población 1	η_2
MENÚ 6	17 %
MENÚ 18	17 %
MENÚ 17	28 %
MENÚ 3	37 %
MENÚ 9	38 %
MENÚ 10	39 %
MENÚ 1	43 %
MENÚ 14	44 %
MENÚ 13	52 %
MENÚ 4	57 %
MENÚ 8	58 %
MENÚ 2	63 %
MENÚ 16	75 %
MENÚ 15	76 %
MENÚ 5	79 %
MENÚ 12	79 %
MENÚ 11	85 %
MENÚ 7	86 %

Población 2	η_2
MENÚ 6	29 %
MENÚ 18	31 %
MENÚ 17	40 %
MENÚ 1	45 %
MENÚ 10	49 %
MENÚ 9	50 %
MENÚ 3	53 %
MENÚ 14	55 %
MENÚ 4	57 %
MENÚ 8	69 %
MENÚ 13	69 %
MENÚ 2	78 %
MENÚ 5	86 %
MENÚ 16	87 %
MENÚ 15	91 %
MENÚ 7	97 %
MENÚ 11	116 %
MENÚ 12	116 %

Población 3	η_2
MENÚ 6	17 %
MENÚ 18	17 %
MENÚ 14	44 %
MENÚ 3	45 %
MENÚ 9	46 %
MENÚ 1	47 %
MENÚ 17	49 %
MENÚ 4	51 %
MENÚ 10	52 %
MENÚ 8	62 %
MENÚ 13	62 %
MENÚ 2	69 %
MENÚ 5	78 %
MENÚ 16	78 %
MENÚ 15	87 %
MENÚ 7	88 %
MENÚ 12	122 %
MENÚ 11	130 %

Una medida de mejoramiento del servicio, basada en esta información podría ser reducir el ciclo a 9 días utilizando los menús que mejor desempeño tengan -primeros en la lista-, esto no daría garantía de satisfacer los requerimientos pero si de eliminar los menús cuyas deficiencias son más graves. El ciclo quedaría conformado por los menús 1, 3, 4, 6, 9, 10, 14, 17 y 18.

5.2. Análisis del ciclo

Ahora estamos interesados en observar lo que ocurre a lo largo del ciclo completo. Calculamos el promedio por nutriente en las 3 semanas para cada grupo:

	1 a 5 años		6 a 12 años		Mayores de 13 años	
	Dif. porcentual	Porcentaje	Dif. porcentual	Porcentaje	Dif. porcentual	Porcentaje
Calcio	23.3 %	26.8 %	38.4 %	21.5 %	28.3 %	25.1 %
Calorías	19.4 %	28.2 %	22.0 %	27.3 %	23.0 %	26.9 %
Fósforo		44.4 %		36.2 %		44.5 %
Hierro		51.6 %	10.4 %	31.4 %	13.2 %	30.4 %
Niacina		43.8 %		43.5 %		44.4 %
Proteína		59.1 %		48.4 %		47.7 %
Riboflavina	0.9 %	34.7 %	3.5 %	33.8 %	0.8 %	34.7 %
Tiamina	7.8 %	32.3 %	7.5 %	32.4 %	8.8 %	31.9 %
Vitamina A		128.7 %		130.7 %		131.2 %
Vitamina C		134.4 %		133.9 %		126.1 %

Tabla 5.3 Promedio de porcentaje alcanzado del requerimiento nutricional diario a lo largo del ciclo y diferencia porcentual -entre el contenido nutricional real y lo que debería ser-.

Nuevamente, la conclusión depende de un nivel de tolerancia. Por ejemplo si se define este nivel sobre la diferencia porcentual, y es del 10 %, la fila verde desaparecería. Por otro lado la deficiencia e Calcio y Calorías es más dramática. Podemos observar que:

1. El suministro real de Calorías para niños entre 1 y 5 años es inferior al requerido por niños de 3 años, y el de Calcio inferior al de niños de 2 años.
2. El suministro real de Calorías para niños entre 6 y 12 años es inferior al requerido por niños de 8 años, y el de Calcio inferior al de niños de 5 años
3. El suministro real de Calorías para personas mayores de 13 años es suficiente para mujeres pero insuficiente para los hombres, y el de Calcio es insuficiente para hombres entre 13 y 17 años.

5.2.1. Mejorar el ciclo, elección de menús: Programación entera

Como se vió en la sección anterior, algunos menús tienen mejor desempeño que otros. Sin embargo es generalizada la abundancia de Proteínas, Vitamina A y Vitamina C. Una forma de mejorar los resultados del programa consiste en determinar cuáles de ellos afectan más negativamente el promedio y cuales cumplen el papel contrario. Supongamos que queremos encontrar un vector $\mathbf{y}$, de componentes y_q, donde $q = 1, 2, ..., 18$ que indique, cuántas veces debe servirse el menú q, con el fin de **maximizar el promedio en el suministro de todos los nutrientes** -a lo largo del ciclo-, exceptuando Proteínas, Vitamina A y Vitamina C, que no son un problema. Pero para tener un solo resultado por todas las poblaciones (no es práctico servir menús diferentes), usaremos dos criterios:

- Que sea máximo el promedio entre las poblaciones, o
- Que sea máximo el mínimo sobre las poblaciones

Las restricciones de este problema son: que la suma de las componentes de **y** debe ser igual a 18 y un menú puede servirse máximo dos veces. El sistema se resuelve fácilmente usando el **algoritmo de planos cortantes de Gomory** [8], [14], los resultados se resumen a continuación.

	Maximo promedio	Máximo menor valor
MENU 1	2	2
MENU 2	0	0
MENU 3	2	2
MENU 4	0	0
MENU 5	0	0
MENU 6	2	2
MENU 7	0	0
MENU 8	2	0
MENU 9	2	2
MENU 10	2	2
MENU 11	0	0
MENU 12	0	0
MENU 13	0	0
MENU 14	2	2
MENU 15	0	0
MENU 16	2	2
MENU 17	0	2
MENU 18	2	2

Tabla 5.4 Resultado de la optimización, el ciclo se reduce a 9 días

Como resultado de esta modificación se elimina de deficiencia de Riboflavina y Tiamina y se mejora la de Calorías y Calcio. El costo del ciclo se incrementa en 3 %, 4 %, 5 % para cada población. Nótese que el segundo criterio difiere de la sección anterior sólo en que allí se incluye el menú 4 en lugar del 16.

	1 a 5 años		6 a 12 años		Mayores de 13 años	
	Dif. porcentual	Porcentaje	Dif. porcentual	Porcentaje	Dif. porcentual	Porcentaje
Calcio	12.8 %	30.5 %	29.3 %	24.8 %	16.3 %	29.3 %
Calorías	17 %	29.1 %	19.9 %	28.0 %	20 %	28.0 %
Fósforo						
Hierro						
Niacina						
Proteína						
Riboflavina						
Tiamina						
Vitamina A						
Vitamina C						

Tabla 5.5 Promedio de porcentaje de nutrientes satisfechos en el ciclo de la primera colmna de 4.6

La optimización correspondiente al segundo criterio mejora el resultado levemente con respecto al primero. Sin embargo, el contenido de Calcio para el segundo grupo de edad sigue siendo muy bajo teniendo en cuenta que en este periodo, la necesidad de este nutriente es la más alta de toda la vida. El costo del ciclo aumenta en 3 %, 4 % y 4 % para cada población.

	1 a 5 años		6 a 12 años		Mayores de 13 años	
	Dif. porcentual	Porcentaje	Dif. porcentual	Porcentaje	Dif. porcentual	Porcentaje
Calcio	10.8 %	31.2 %	27.9 %	25.2 %	16.4 %	29.3 %
Calorías	16.2 %	29.3 %	18.9 %	28.4 %	19.8 %	28.1 %
Fósforo						
Hierro						
Niacina						
Proteína						
Riboflavina						
Tiamina						
Vitamina A						
Vitamina C						

Tabla 5.6 Promedio de porcentaje de nutrientes satisfechos en el ciclo de la segunda columna de 4.6

5.3. Sensibilidad a los costos de los ingredientes

Un ejercicio simple de análisis de sensibilidad consiste en evaluar a qué productos es más sensible el costo de los comedores y las implicaciones directas de eventuales incrementos en los precios. Actualmente, calculamos que el costo de un ciclo por persona se distribuye así:

- Entre 1 y 5 años: \$14.011
- Entre 6 y 12 años: \$18.659
- Mayor de 13 años: \$24.696

Definimos $\Delta_{p_k c} = \frac{\Delta\text{Cambio porcentual del costo ciclo población } k}{\Delta\text{Cambio porcentual del costo del producto c}}$ Claramente la dependencia es lineal. De los 82 productos, las sensibilidad es más alta con respecto a,

Producto	Δ_{p_1}	Δ_{p_2}	Δ_{p_3}
Carne de res magra contenido grasa inf 14 %	0.12	0.11	0.11
Arroz blanco pulido	0.07	0.07	0.09
Carne pollo entero	0.07	0.07	0.07
Carne de res semigorda contenido 14-20 %	0.07	0.07	0.07
Aceite vegetal	0.06	0.06	0.07
Papa comun, tuberculo sin cascara	0.06	0.06	0.06
Leche entera pasteurizada	0.05	0.05	0.05

Tabla 5.7

Se estima que la volatilidad mensual del precio de la carne de res es aproximadamente 9 % la del arroz, del 4.15 %, siendo dos de los productos con precio más volátil del mercado agropecuario -calculadas a partir de los históricos desde diciembre de 1993 hasta abril de 2009 [13]-, siendo dos de los productos con precio más volátil del mercado agropecuario. La implementación de estrategias de cobertura podría proteger los comedores comunitarios del vaivén del precio de estos productos. Una forma interesante de analizar la sensibilidad del problema es en términos de cupos: ¿Cuántos cupos representa el aumento en los precios?. Debido a que es desconocida la distribución de la población por grupos de edad, para ilustrar un ejemplo del sentido de este análisis asumimos que los 94.100 beneficiarios tienen 13 años o más -lo que nos ubica en un escenario pesimista-. Si suponemos un presupuesto constante, los valores consignados en la tabla significarían el número de cupos a reducir (claro está, despreciando los costos de operación),

CARNE/ARROZ	0 %	2.5 %	5 %	7.5 %	10 %
0 %	-	268	535	800	1.064
2.5 %	210	477	743	1.007	1.270
5 %	420	685	950	1.213	1.474
7.5 %	628	893	1.156	1.418	1.678
10 %	835	1.099	1.361	1.622	1.881

Tabla 5.8 Disminución en el número de cupos en términos del incremento en el precio de un tipo de carne y el arroz

Nótese que un incremento de sólo 2.5 % en el precio de un tipo de carne, aumenta el costo en una cantidad equivalente al servicio para 268 personas, el tamaño del comedor de Manzanares en Bosa.

Conocer la distribución de los beneficiarios por grupo de edad y modelar su dinámica en el tiempo, sería de gran utilidad para una estimación más precisa de este indicador, así como en el estudio y diseño de la estrategia de cobertura mencionada anteriormente. Un conocimiento detallado de esta información junto a bases de datos que contengan los precios históricos de los productos de mayor sensibilidad -del algoritmo de optimización o simplemente el programa tal como opera-, permitiría implementar una simulación Monte Carlo para modelar los mismos, una vez realizado esto es inmediato el establecimiento de medidas de riesgo como el *VaR* -Value at Risk- [15], que consiste en un valor que con un cierto grado de confianza (suele fijarse en 95 %) no excederán los costos adicionales del servicio de comedores por cuenta de variaciones en los precios de los ingredientes.

Capítulo 6

Consecuencias Cosmológicas de Nueva Física de los Neutrinos

Las consecuencias de física más allá del modelos estándar

6.1. Efectos en Nucleosíntesis

bla

6.2. Generación de Asimetría Bariónica via Leptogénesis

bla

6.3. Consecuencias en la Estructura a Gran Escala del Universo

bla

Capítulo 7

Conclusiones

El hecho de que el contenido Calórico de los menús sea bajo con respecto al requerimiento representa un posible revés en los tan publicitados alcances de la lucha contra la desnutrición crónica de la política de seguridad alimentaria en la anterior administración. Para las tres poblaciones la deficiencia de Calorías proporcionadas respecto al nivel deseado está alrededor del 20 %.

Los bajos niveles de Calcio especialmente en la segunda población, donde la deficiencia respecto al nivel deseado es superior al 38 %, son preocupantes teniendo en cuenta que según literatura de dominio general, en esta edad el requerimiento es más alto que en cualquier otro momento de la vida. Las enfermedades asociadas al déficit en el consumo de este nutriente tienen consecuencias irreversibles en los niños pequeños y dados los bajos ingresos que se supone poseen los padres de los usuarios, es imporante fortalecer su suministro en el espacio de los comedores.

Si bien, el costo por usuario en los comedores es relativamente bajo, la sensibilidad a los precios de algunos productos como la carne y el arroz es alta. Un ejemplo de ello es que un incremento porcentual del 2.5 % en el precio de un tipo de carne significaría un aumento en el costo total que equivale a atender más de 260 personas, una población similar a la que asiste a algunos de los comedores en Bosa. Por lo que podría resultar útil la implementación de estrategias de cobertura, que impidan incrementos que limiten la capacidad de atención de los comedores y reduzcan aún más su impacto en la población (en la introducción se mencionó que los cupos equivalen al 3 % de los potenciales usuarios).

Se hicieron estimaciones que sugieren ineficiencia en la distribución de recursos en los comedores, que indican que puede lograrse una mejora considerable con una inversión relativamente baja. Al calcular la diferencia entre los menús producto de optimización y los reales se establecieron diferencias pequeñas e incluso negativas en costos, pero muy grandes en contenido nutricional. Por ejemplo los menús 6 y 18, podrían ser satisfactorios con un costo inferior (en un 9 % y 24 % respectivamente) al actual, y el menú 1 con un sobre costo de menos del 4 %. A este resultado se suman los menús mal diseñados, esto es, que ni por medio de optimización llegan al contenido nutricional deseado. La recomendación es eliminarlos del ciclo. Como se resume a continuación, los resultados obtenidos en este trabajo proporcionan alternativas para la sustitución de dichos menús.

Existen varios caminos para mejorar el desempeño de los comedores:

- Eliminar algunos de los menús, sustituyéndolos con otros cuyo desempeño sea superior, para tener el mejor resultado posible sin modificar las porciones ni la composición actuales de los alimentos. De acuerdo con los resultados los menús a eliminar son los número 2 ,4 ,5, 7, 11, 12, 13, 15 y el 7 o 17 según uno de dos criterios que se sugieren en el documento, el incremento en los costos está alrededor del 4 % por individuo.

- Optimizar las porciones servidas en cada almuerzo, manteniendo la composición actual, hasta alcanzar el 35 % mínimo en todos los nutrientes, para obtener un conjunto de menús que satisfacen día a día como mínimo el requerimiento prometido por la alcaldía. El incremento en los costos es alrededor del 10 % por individuo y hace necesario renunciar a los menús 5, 7, 11, 14, 15, 16 pues no se encuentra solución para los tres grupos de edad.

- Optimizar las porciones manteniendo todos los menús, de modo que el suministro de nutrientes sea lo más cercano posible al deseado y el costo igual al actual. Se vio que esta opción tiene además un muy buen desempeño promedio en el ciclo de tres semanas, pues presenta solamente deficiencia en Calcio para la población entre 6 y 12 años del 12 %. Sin embargo se observan fuertes irregularidades día a día, entre otras, el menú 11 es muy deficiente en Calcio puesto que en promedio sobre los tres grupos proporciona menos del 9 % del requerimiento diario.

Sería interesante conocer el número de personas de cada grupo de edad para estimar de manera precisa el efecto que sobre los costos tienen las anteriores alternativas. Sin embargo, la imposibilidad de conocer este dato se debe a que la administración no los tiene registrados. Por lo tanto, para este propósito es indispensable realizar una encuesta a lo largo de toda la red de comedores.

Apéndice A

Detalles del la determinación del contenido nutricional de los alimentos

Haciendo uso de las minutas se construye una Matriz de composición de alimentos preparados para cada p_k :

$$C = \begin{bmatrix} c_{11k} & \cdots & c_{1jk} & \cdots & c_{1nk} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1k} & \cdots & c_{ijk} & \cdots & c_{ink} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{I1k} & \cdots & c_{Ijk} & \cdots & c_{Ink} \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

$$\tag{A.2}$$

$$i = 1, 2...I \tag{A.3}$$

$$j = 1, 2...n$$

$$k = 1, 2.,3$$

Donde c_{ijk} indica las unidades del ingrediente i que debe agregarse en la preparación del j -ésimo alimento por integrante de la k-ésima población.

El proceso que se ha descrito, donde se mezclan los ingredientes, dependiendo del *número de personas de cada grupo*, podría resultar claro al principio. Sin embargo si suponemos que cada alimento preparado es una mezcla homogénea, *las unidades de cada ingrediente contenidas en un alimento* varían con el vector P. Para generalizar la forma como se preparan los alimentos, consideremos el j-ésimo alimento:

$$C_j = \begin{bmatrix} c_{1j1} & c_{1j2} & c_{1j3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{ij1} & c_{ij2} & c_{ij3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{Ij1} & c_{Ij2} & c_{Ij3} \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

- como se dijo en la sección 3.2 a la k-esima población le son servidas $\sum_i c_{ijk}$ unidades
- Las unidades del ingrediente m agregadas en total son las componentes del producto $C_j \cdot P$ $(\sum_k c_{mjk} p_k)$
- Las unidades preparadas son en total $\sum_i \sum_k c_{ijk} p_k$
- Las unidades del m-ésimo ingrediente contenidas en una unidad: $\bar{c}_{mj} = \frac{\sum_k c_{mjk} p_k}{\sum_i \sum_k c_{ijk} p_k}$

Luego, la matriz $\bar{C}$ de componentes $\bar{c}_{mj}$, es la matriz de composición de los alimentos normalizada. Debido a que el porcentaje de un ingrediente contenido en el alimento depende del vector de poblaciones P, también dependerán las unidades de cada nutriente presentes por unidad del alimento. Para estimar si esta dependencia juega o no un papel relevante en nuestros cálculos, expandamos $\bar{c}_{mj}$:

$$\bar{c}_{mj} = \frac{c_{mj1} p_1 + c_{mj2} p_2 + c_{mj3} p_3}{\sum_i (c_{mi1} p_1 + c_{mi2} p_2 + c_{mi3} p_3)} \tag{A.5}$$

Dividiedo numerador y denominador por $\sum_i c_{ij1}$

$$\bar{c}_{mj} = \frac{p_1 c_{mj1}/\sum_i c_{ij1} + p_2 c_{mj2}/\sum_i c_{ij1} + p_3 c_{mj3}/\sum_i c_{ij1}}{p_1 + p_2 \sum_i c_{ij2}/\sum_i c_{ij1} + p3 \sum_i c_{ij3}/\sum_i c_{ij1}}$$
$$= \frac{p_1 c_{mj1}/\sum_i c_{ij1} + p_2 c_{mj2}/\sum_i c_{ij2} \times \sum_i c_{ij2}/\sum_i c_{ij1} + p_3 c_{mj3}/\sum_i c_{ij3} \times \sum_i c_{ij3}/\sum_i c_{ij1}}{p_1 + p_2 \sum_i c_{ij2}/\sum_i c_{ij1} + p_3 \sum_i c_{ij3}/\sum_i c_{ij1}} \tag{A.6}$$

Las razones $R_{mjk} = c_{mjk}/\sum_i c_{ijk}$, $k = 1, 2, 3$ representan las unidades del ingrediente m presentes en una unidad del alimento j . En nuestro es caso muy acertado decir que $R_{mj1} \approx R_{mj2} \approx R_{mj3}$. Denotemos esa razón casi constante como R_{mj}, entonces

$$\bar{c}_{mj} = \frac{p_1 R_1 + p_2 R_2 \times \sum_i c_{ij2}/\sum_i c_{ij1} + p_3 R_3 \times \sum_i c_{ij3}/\sum_i c_{ij1}}{p_1 + p_2 \sum_i c_{ij2}/\sum_i c_{ij1} + p_3 \sum_i c_{ij3}/\sum_i c_{ij1}} \approx R_{mj} \tag{A.7}$$

En el peor de los casos observados, el cambio en el suministro de nutrientes no alcanza un punto porcentual, por lo que por comodidad y sin pérdida de generalidad, en un principio despreciamos la dependencia de P.

Sean $\bar{n}_{il}$, $i = 1, 2 ... I$,con $l = 1, 2, ...m$ las componentes de $\bar{N}$: matriz de contenido nutricional de los ingredientes. Indicando las unidades del nutriente l presentes por unidad del ingrediente i, entonces N la matriz de nutrientes de los alimentos está determinada por:

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} \tilde{n}_{11} & \cdots & \tilde{n}_{1j} & \cdots & \tilde{n}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{n}_{k1} & \cdots & \tilde{n}_{kj} & \cdots & \tilde{n}_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{n}_{m1} & \cdots & \tilde{n}_{mj} & \cdots & \tilde{n}_{mn} \end{bmatrix} = \bar{N}^T \bar{C} \tag{A.8}$$

Donde n_{kj} representa las unidades del k-ésimo nutriente, contenidas en una unidad del j-ésimo alimento. Entonces la cantidad del l-ésimo nutriente, contenida en una unidad del j-ésimo alimento está dada por:

$$\tilde{n}_{lj} = \frac{\sum_i \sum_k \bar{n}_{li} c_{ijk} p_k}{\sum_i \sum_k c_{ijk} p_k} \tag{A.9}$$

Sin embargo, gracias a que A.7 nos permite ignorar la dependencia de P, usamos,

$$n_{ljk} = \sum_i \bar{n}_{li} \bar{c}_{ijk} \tag{A.10}$$

Lo que equivale a decir que en cálculos posteriores supondremos que los alimentos se preparan por separado. Como ya conocemos las unidades de cada nutriente en todos los alimentos, podemos construir la matriz A de la sección 1.3 para cada menú.

Bibliografía

[1] DANE, *Departamento administrativo nacional de estadística, encuesta nacional de calidad de vida 2003* (2003).

[2] SIDIS, *Secretaría distrital para la integración social*, URL http://www.integracionsocial.gov.co/modulos/contenido/default.asp?idmodulo=544.

[3] URL http://en.wikipedia.org.

[4] *Vegetarian society uk*, URL http://www.vegsoc.org/.

[5] G. Tomassi (2008), URL http://www.ppi-far.org/ppiweb/iaecu.nsf/$webindex/8F8A81C8E455D68F05256BE3002B04F0/$file/F%C3%B3sforo-Un+nutriente+esencial+en+la+dieta+humana.pdf.

[6] *Instituto Colombiano de Bienestar Familiar, Guía alimentarias para la población colomiana mayore de 2 años* (Ministerio de salud, 1999).

[7] E. Castillo, A. Conejo, P. Pedregal, R. García, and N. Alguacil, *Formulación y Resolución de Modelos de Programación Matemática en Ingeniería y Ciencia* (2002).

[8] M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, and H. D. Sherali, *Linear Programing and Network flows* (Wiley Interscience, 2004).

[9] H. M. Mora, *Programación Lineal* (Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia, 2004).

[10] FAO, *Organización de las naciones unidas para la agricultura y la alimentación*, URL http://www.rlc.fao.org/es/bases/alimento/busca.asp.

[11] USDA, *United states department of agriculture,*, URL http://www.usda.gov/wps/portal/usdahome.

[12] URL http://www.lamayorista.com.co/mayorista2008/esp/lista_sipsa.php?id_pagina=34.

[13] BNA, *Bolsa nacional agropecuaria*, URL http://www.bna.com.co/.

[14] E. Neuman, *Linear Programming with MATLAB* (2000).

[15] *Risk metrics, Tecnical Document* (MORGAN/REUTERS, J.P, 1996).