

El Grupo Fundamental de un Enlace

por

Edgar Andrés Villabón Aldana

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al Título de

Magister en Matemáticas

Directora: Margarita María Toro Villegas

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

2010

Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por COLCIENCIAS,
Contrato No. 436-2007 y por DIME.

Resumen

En este trabajo se estudia el grupo de un enlace L , es decir, el grupo fundamental del espacio $S^3 \setminus L$, el cual es una generalización del grupo de un nudo. Esta herramienta ha sido de gran importancia a lo largo de la teoría de enlaces. En el trabajo presentaremos inicialmente tres técnicas para computar una presentación para estos grupos, también hablaremos sobre el sistema periferal, el cual diferencia completamente los nudos y está directamente relacionado con los grupos de enlaces. Se estudia la matriz de Alexander y la forma de calcularla a partir de una presentación para el grupo de un enlace, presentamos algunos resultados importantes sobre el polinomio de Alexander. Finalmente estudiamos representaciones de grupos de enlaces y conceptos propios de la teoría de representaciones, tales como reducibilidad y caracteres. Pero en este caso para grupos infinitos, en especial para grupos de enlaces de 2 puentes. En los apéndices se dan algunos conceptos fundamentales para la realización de este trabajo y también una aplicación del quandle.

Contenido

Introducción	vii
1 El grupo y el quandle de un enlace	1
1.1 El grupo de un enlace	1
1.2 Sistema periferal	5
1.3 Complejo de fractura	9
1.3.1 Cálculo del grupo de un enlace	9
1.3.2 Espacio recubridor del grupo de un enlace	17
1.4 Quandles	20
2 Matriz de Alexander	24
2.1 Cálculo libre	24
2.2 Matriz de Alexander y polinomio de Alexander	26
3 Representaciones de grupos de enlaces	32
3.1 Representaciones Metabelianas	32
3.1.1 Representaciones metacíclicas	36
3.2 Caracteres de Representaciones en $SL_2(\mathbb{C})$	37
3.2.1 Curvas de representaciones	39
3.3 Enlaces de 2-puentes	43
3.4 Polinomios asociados a nab-rep	48
3.4.1 Algunos resultados de las curvas nab-rep	49
3.5 Propiedades de los polinomios nab-rep	51
Conclusión	55
Tabla de Símbolos	56
Bibliografía	57

Apéndices	58
A El Grupo Fundamental	59
B Presentación de Grupos	61
B.1 Grupos Libres	61
B.2 Transformaciones de Tietze	63
B.3 Subgrupos de palabras	64
B.4 Producto libre de grupos	65
B.5 Teorema de Van-Kampen	66
C Aplicación de los Quandles	69
D Anillo Grupo	74
E Geometría Algebraica Básica	77
F Grupos Discretos	81

Agradecimientos

Expreso mis sinceros agradecimientos:

A Margarita María Toro Villegas, profesora de la Universidad Nacional por su especial colaboración y apoyo como directora de este trabajo.

A los profesores Débora María Tejada y José Gregorio Rodríguez por sus observaciones y correcciones como jurados.

Introducción

Un nudo es un embebimiento de un círculo en S^3 , $S^1 \hookrightarrow S^3$, podemos ver esto de forma intuitiva como una cuerda enredada y atada a sus extremos. El estudio de estos objetos se llama teoría de nudos y como una generalización de la teoría de nudos podemos pensar en embebimientos de varios círculos en S^3 , por ejemplo tomar varios nudos y entrelazarlos, estos pueden estar sueltos unos de otros o no. A estos embebimientos los llamamos enlaces y naturalmente su estudio se llama teoría de enlaces.

Uno de los problemas centrales en la teoría de enlaces es encontrar invariantes que nos permitan clasificar en su totalidad los enlaces, es decir, aplicar algún tipo de algoritmo que nos diga si cualquier par de enlaces que en apariencia se ven distintos los podemos manipular de tal forma que podamos decidir si en realidad son iguales o no. Uno de estos invariantes es el grupo de un enlace, el cual es la generalización del grupo de un nudo que empezó a utilizarse a finales del siglo XIX. Esta herramienta se ha convertido en una de las más estudiadas en la teoría de nudos, dada su importancia como invariante. Lastimosamente el grupo de un enlace no clasifica en su totalidad los enlaces, esto es, el grupo de un enlace no es un invariante completo, pero en el caso de los nudos primos, Gordon y Luecke mostraron que el grupo los clasifica casi completamente, ver [10].

Entonces es de gran utilidad poder calcular una presentación para estos grupos, y las técnicas para conseguir estas presentaciones que estudiaremos en el primer capítulo son tres, la primera la conseguimos con el teorema de Van Kampen, la segunda forma de encontrar una presentación para este grupo es a partir del complejo de fractura para la variedad $S^3 \setminus L$, el cual también tiene como una segunda aplicación la construcción de un espacio recubridor que se corresponde con un subgrupo normal de grupo del enlace, este es su subgrupo conmutador. Para terminar los cálculos la tercera forma depende de un concepto que es más contemporáneo, este se introdujo en 1982 y es el quandle, aunque no es un grupo, de él podemos derivar el grupo de un nudo clásico.

Aunque el grupo de un enlace no es un invariante completo, complementando con más información, por ejemplo, si pensamos en un sistema de grupos formado por él y algunos subgrupos especiales podríamos tener un invariante más efectivo, este recibe el nombre de sistema periferal, este en efecto, es un invariante completo para nudos, claramente depende del concepto del grupo de un nudo. En la práctica es muy difícil de aplicar este invariante, pues depende de la existencia de un isomorfismo el cual muchas veces es complicado de encontrar, pero es muy útil en el caso de imágenes espejo e inversos.

Un invariante importante el cual puede verse como una aplicación del grupo de un enlace, es el n -ésimo polinomio de Alexander, que se calcula a partir de la matriz de Alexander, que se obtiene de una presentación del grupo del enlace, y utiliza las derivadas libres de Fox. El

polinomio de Alexander también puede calcularse a partir de las superficies de Seifert, pero en este trabajo no estudiaremos este método.

Recordemos que una representación de un grupo es un homomorfismo de grupos y aquí estamos interesados en el caso donde el codominio son grupos metabelianos y las matrices $M_n(K)$, con K un campo, ya que en el primer caso estas representaciones nos permite computar la Matriz de Alexander y en el segundo podemos hacer uso de las herramientas del álgebra lineal. Las representaciones de grupos ayudaron en la clasificación de los grupos finitos, por tanto resulta razonable pensar en extender estos conceptos a grupos infinitos, pero nos restringiremos a un caso más particular que son los grupos de enlaces, los cuales estamos interesados en clasificar. Un concepto que se utiliza para la extensión de representaciones a grupos infinitos es la relación entre los caracteres de representaciones con curvas algebraicas afines y grupos discretos. Finalmente nos enfocaremos en una familia de nudos en particular, estos son los nudos de 2-puentes, ya que su presentación tiene solo dos generadores y una relación. Podemos generalizar esta familia de grupos de una forma natural, esta generalización recibe el nombre de *grupo kmot de 2-puentes*. En este grupo consideraremos las representaciones en $SL_2(\mathbb{C})$ y encontraremos una relación casi 1-1 con polinomios cuyos coeficientes están en \mathbb{Z} , es decir, con curvas algebraicas.

Puesto que calcular presentaciones de grupos de nudos implica encontrarnos con el problema del isomorfismo, es decir, ¿cómo saber si dos presentaciones diferentes en realidad pertenecen al mismo grupo? Necesitamos métodos para diferenciar presentaciones de grupos, así vale la pena conocer condiciones necesarias para tal isomorfismo o cómo manipular los generadores o las relaciones para pasar de una presentación a otra. Además, como en el segundo capítulo se hace uso del grupo anillo y el abelianizador también se hace necesario conocer resultados importantes de esta materia. Daremos entonces un recuento de estos conceptos en el Apéndice, donde damos a conocer conceptos básicos de teoría de grupos, topología y geometría, indispensables para nuestro estudio, citaremos importantes resultados en cada caso, pero la mayoría de ellos no los probaremos, sino que daremos referencias adecuadas.

Capítulo 1

El grupo y el quandle de un enlace

A un enlace se le pueden asociar varias estructuras algebraicas, como son los quandles, grupos de espacios topológicos, espacios recubridores, entre otros. En esta sección estudiaremos el grupo de un enlace y veremos dos formas clásicas para calcular presentaciones de estos grupos, otra mas reciente que tiene que ver con el concepto de quandle, cuyas operaciones binarias se asemejan a los movimientos de Reidemeister.

Los conceptos básicos de la teoría de enlaces pueden encontrarse en [9] ó [13].

1.1 El grupo de un enlace

Comencemos con algunas definiciones sobre nudos y enlaces. Un enlace L es un embebimiento de uniones disjuntas de S^1 en la 3-esfera $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. A cada una de las imágenes de S^1 se le llama componente del enlace, y si solo hay una, entonces diremos que este embebimiento es un nudo. Decimos que dos enlaces L_1 y L_2 son equivalentes si existe un homeomorfismo de S^3 que envíe uno en el otro. Si para un enlace L de r -componentes, existen 3-bolas $D_i \subset S^3, i = 1, \dots, r$ tales que, $D_i \cap L$ contiene solo una componente de L para $i = 1, \dots, r$ y $D_i \cap D_j \neq \emptyset, i \neq j$, diremos que L es *separable*. Algunas veces consideraremos los enlaces orientados, es decir, cada componente tendrá una orientación asociada a ella.

Cuando nos referimos al diagrama de un enlace, estamos hablando de la proyección regular del enlace sobre un plano contenido en S^3 , esta proyección cumple lo siguiente:

1. Es 1-1, excepto en finitos puntos.
2. El cardinal de la preimagen de estos puntos donde no es 1-1 es dos. Nos referimos a ellos como puntos dobles.
3. Ningún punto doble es un vértice de S^1 . Es decir, no se pueden dar puntos como se muestra en la Figura 1-1.

A cada enlace se le puede asociar un grupo. Sea L un enlace, tomamos una vecindad toroidal V de L , es decir, toros sólidos disjuntos cada uno conteniendo una componete diferente del enlace en su interior. Se define *el grupo del enlace* como $G = \pi_1(L) = \pi_1(S^3 \setminus V) \simeq \pi_1(S^3 \setminus L)$; omitimos el punto base ya que $S^3 \setminus V$ es conexo. Veremos en las siguientes

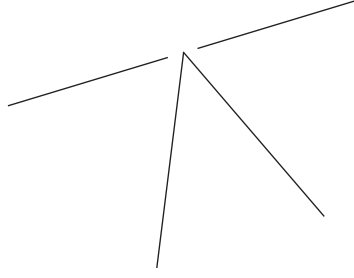


Figura 1-1:

secciones cómo calcular una presentación para estos grupos. En el Apéndice A hacemos un breve recuento sobre el grupo fundamental de un espacio y varios conceptos que se requieren para el estudio de este grupo. Para facilidad del lector, en el Apéndice B se hace un breve recuento de los conceptos de teoría de grupos que se requieren para estudiar presentaciones de grupos. También mencionamos varios resultados conocidos como el Teorema de Van Kampen, que es una herramienta fundamental para el cálculo de presentaciones de grupos de enlaces.

Ahora, para estudiar en concreto el grupo fundamental de un enlace L , es importante describirlo explícitamente. Veamos entonces cómo calcular una presentación para el grupo de un enlace. Esto lo haremos de forma inductiva y usaremos la notación del Apéndice A.

Sean L un enlace. Proyectemos a L en un plano P y sean v_i los cruces de L , con $i = 1, \dots, n$, es decir, $p : S^3 \rightarrow P$ una proyección regular de L y $v_i, i = 1, \dots, n$ son los puntos dobles. Supongamos que L está contenido en P excepto por una vecindad de cada cruce, más específicamente, supongamos que un segmento abierto de L que contiene un cruce superior de $p^{-1}(v_i)$ está por encima del plano.

Sea $X = S^3 \setminus L$ y construimos X_1 y X_2 como sigue:

Tomemos un punto $v \in S^3$ que esté debajo de P , agregamos rectas l_i desde v hasta cada cruce, luego cada punto doble queda conectado, es decir, cada una de estas rectas conecta el par de puntos que están uno sobre el cruce de arriba y el otro sobre el cruce debajo.

Ahora, sean $X_1 = S^3 \setminus cl(L \cup \{l_i \mid l_i \text{ es una recta de } v \text{ hasta } p^{-1}(v_i)\})$. Tomemos el cono $L \star v$ (ver Figura 1-2) y definimos $X_2 = (S^3 \setminus (L \star v)) \cup v \cup \mathring{l}_1$, donde \mathring{l}_1 denota el interior de l_1 , explícitamente, a S^3 le quitamos el cono $L \star v$, pero le agregamos el vértice v y el segmento abierto l_1 . Claramente $X_1 \cap X_2 = S^3 \setminus L \star v$ es simplemente conexo y $G_1 = \pi_1(X_1) = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ donde los generadores corresponden a cada componente conexa de $(L \star v) \setminus cl(L \cup \{l_i \mid l_i \text{ es una recta de } v \text{ hasta } p^{-1}(v_i)\})$ como se muestra en la Figura 1-2.

Ahora, $G_2 = \pi_1(X_2) = \langle x_1, x_2, x_k, x_s \mid r_2, r_1 \rangle$ donde $r_2 = x_1 x_2^{-1}$, $r_1 = x_1 x_k^{-\varepsilon} x_2^{-1} x_s^\varepsilon$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ como se muestra en la Figura 1-3 y la Figura 1-4. Luego para $X^1 = X_1 \cup X_2$ se tiene por el Teorema B.5.4, $G^1 = \pi_1(X^1) = \langle x_1, \dots, x_m \mid r_1 \rangle$. Así, agregando sucesivamente las

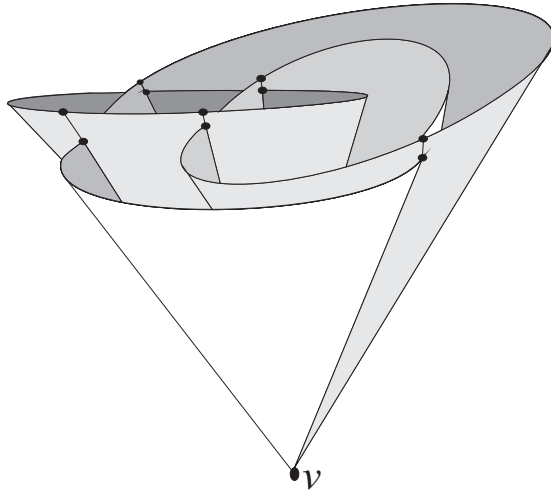


Figura 1-2: Cono $L \star v$

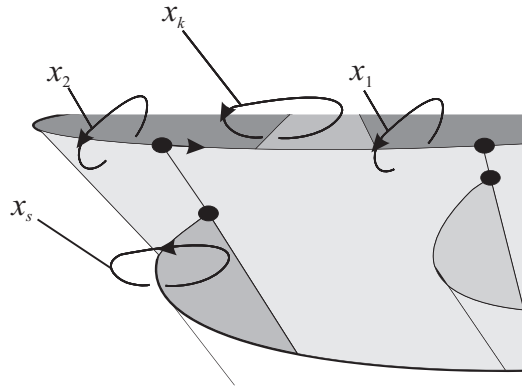


Figura 1-3: r_1, r_2

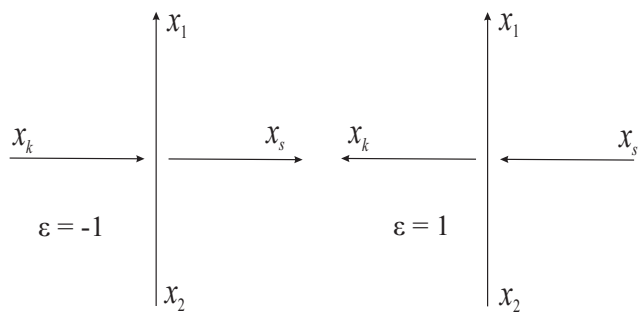


Figura 1-4:

rectas l_i , una a la vez, se tiene la presentación

$$\pi_1(L) = \langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_s \rangle.$$

Notemos que cada cruce superior determina solo un generador pues viene acompañado de la relación $x_j x_{j+1}^{-1} = 1$, entonces se tiene un generador por cada arco y una relación por cada cruce, pero como el número de cruces es igual al número de arcos, se tiene que el número de relaciones es igual al de generadores. Ahora bien, Si consideramos el lazo x que intersecta las componentes conexas que tienen como frontera los cruces inferiores y l_i, l_{i+1}, L , entonces al agregar como antes todas las rectas se tiene $x = r_1 \cdots r_n = 1$, es decir, $r_1 \cdots r_{n-1} = r_n^{-1}$. Por tanto se tiene la siguiente presentación del grupo llamada la presentación de Wirtinger

$$\pi_1(L) = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_{n-1} \rangle$$

Esta presentación se llama la presentación por encima. Una construcción análoga se hace proyectando L en el plano y suponiendo que los cruces inferiores quedan abajo del plano, la representación resultante se llama presentación por debajo, por la forma de la construcción queda claro que estas dos presentaciones son isomorfas.

A partir de esta construcción se sigue la siguiente proposición.

Proposición 1.1.1 *Para un diagrama conexo de un enlace L , con al menos un doble punto, hay una presentación del grupo*

$$\pi_1(L) = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_{n-1} \rangle$$

donde cada relación está dada por $r_i = x_i x_k^{-\varepsilon} x_i^{-1} x_s^\varepsilon$, para $i = 1, \dots, n-1$ con $k, s \in \{1, \dots, n\}$.

Ejemplo 1.1.1 *Sea L en enlace de la Figura 1-5. Se tiene que*

$$\pi_1(L) = \langle x_1, \dots, x_5 \mid x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_3, x_4 x_2 x_4^{-1} x_1^{-1}, x_4 x_1 x_4^{-1} x_3^{-1}, x_1 x_4 x_1^{-1} x_5^{-1} \rangle.$$

Recordemos que si G_1 y G_2 son grupos, $G_1 \star G_2$ corresponde al producto libre, ver el Apéndice B para un poco mas de detalle.

Proposición 1.1.2 *Sea L un enlace en S^3 . Si L es el enlace trivial de n componentes, entonces $\pi_1(L) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z} \star \cdots \star \mathbb{Z}$, el producto libre de n copias de \mathbb{Z} .*

Prueba. Por inducción sobre el número de copias.

Si $n = 1$, entonces L es el nudo trivial, y claramente $\pi_1(L) = \pi_1(S^3 \setminus L) = \langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}$.

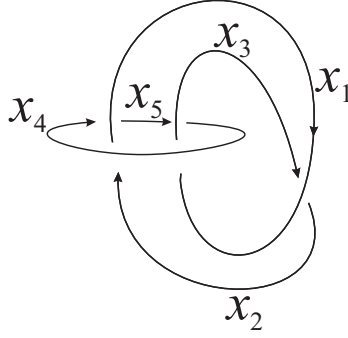


Figura 1-5: L

Supongamos que la afirmación se cumple para un número de componentes $k < n$. Sea $X = S^3 \setminus L$ y sean L_1 el enlace que corresponde a las $n - 1$ -componentes de L , y L_2 la n -ésima componente de L . Escojamos una 3-bola B que contenga a L_2 y no intersekte ninguna componente de L_1 (tal B existe, pues L es separable). Si tomamos como $X_1 = (S^3 \setminus \mathring{B}) \setminus L_1$ y $X_2 = B \setminus L_2$ entonces $X_1 \cup X_2 = X$ y $X_1 \cap X_2 = \partial B$. Luego por el Teorema B.1, $G = \pi_1(X) = G_1 \star G_2 = \pi_1(X_1) \star \pi_1(X_2)$ pues $G_0 = \pi_1(X_1 \cap X_2) = \{0\}$ y por la hipótesis inductiva $G_1 = \pi_1(X_1) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z} \star \cdots \star \mathbb{Z}$ el producto libre de $n - 1$ -copias de \mathbb{Z} . Por tanto $\pi_1(L) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z} \star \cdots \star \mathbb{Z}$. ■

El recíproco también es cierto, para una prueba ver [13].

Como un corolario inmediato de esto se tiene.

Corolario 1.1.3 *Sea L un enlace en S^3 . Si L es separable, entonces $\pi_1(L) = \pi_1(L_1) \star \pi_1(L_2) \star \cdots \star \pi_1(L_n)$ donde $L_i, i = 1, 2, \dots, n$ son los subenlaces de L que no son separables.*

Diremos que el grupo de un enlace *no se puede descomponer* si no es un producto libre de grupos.

1.2 Sistema periferal

Sean $K_i, i = 1, \dots, r$ las componentes de un enlace L y V_i una vecindad de cada K_i (toro sólido que contiene a K_i). Sea $T_i = \partial V_i$ y sean $m_i, l_i \subset T_i$ el meridiano y la longitud de la superficie del toro. Definimos el par (m_i, l_i) como el *meridiano y la longitud de K_i* en S^3 , la orientación de m_i y l_i está determinada por S^3 y K_i . Podemos considerar a m_i y l_i como elementos de $\pi_1(L)$ escogiendo un camino ω_i en $S^3 \setminus L$ del punto base al punto $m_i \cap l_i$, para cada i ; este camino es único salvo homotopías. Llamamos a $\langle m_i, l_i \rangle^\pi = \langle m_i, l_i \rangle \leq \pi_1(L)$ el subgrupo *meridiano-longitud*, generado por m_i y l_i .

Definición 1.2.1 *El sistema periferal de un enlace L de r -componentes es el sistema de grupos $(\pi_1(L); \langle m_i, l_i \rangle^\pi \mid i = 1, \dots, r)$.*

Un isomorfismo de sistemas periferales de dos enlaces L y L' de r -componentes,

$$(\pi_1(L); \langle m_i, l_i \rangle^\pi \mid i = 1, \dots, r), (\pi_1(L'); \langle m'_i, l'_i \rangle^\pi \mid i = 1, \dots, r)$$

respectivamente, es un isomorfismo $\varphi : \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(L')$ tal que $\varphi(m_i) = m'_i$ y $\varphi(l_i) = l'_i$ para todo i . El siguiente teorema nos muestra que el sistema periferal es un invariante de enlaces.

Teorema 1.2.1 *Dos enlaces L, L' de r -componentes en S^3 son equivalentes si y sólo si existe un isomorfismo de sistemas periferales.*

Prueba. Claramente si los enlaces son equivalentes los sistemas periferales son isomorfos.

Sean $(\pi_1(L); \langle m_i, l_i \rangle^\pi \mid i = 1, \dots, r)$ y $(\pi_1(L'); \langle m'_i, l'_i \rangle^\pi \mid i = 1, \dots, r)$ los sistemas periferales de L y L' , respectivamente y supongamos que existe un isomorfismo $\varphi : \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(L')$ tal que $\varphi(m_i) = m'_i$ y $\varphi(l_i) = l'_i$ para todo i . Sea $L_j, j = 1, \dots, u$ y $L'_k, k = 1, \dots, v$ los subenlaces de L y L' respectivamente, cuyas componentes no se pueden separar. Entonces $\pi_1(L) = \pi_1(L_1) \star \dots \star \pi_1(L_u)$ y $\pi_1(L') = \pi_1(L'_1) \star \dots \star \pi_1(L'_v)$ y $\pi_1(L_j), \pi_1(L'_k)$ no se pueden descomponer para todo k, j . Si algún L_j es el nudo trivial, entonces la componente de L'_k correspondiente a L_j bajo φ es un nudo trivial que puede separarse de L'_k , con esto, podemos suponer que ninguna componente de L_j y L'_k es trivial y por tanto $\pi_1(L_j), \pi_1(L'_k) \not\cong \mathbb{Z}$. Entonces por el teorema de subgrupos de Kurosh ([15], [16]), se sigue que $u = v$ y $\varphi(\pi_1(L_j)), \pi_1(L'_k)$ son conjugados en $\pi_1(L')$, reordenando los índices de las componentes de L' , podemos suponer que $\varphi(\pi_1(L_j))$ y $\pi_1(L'_j)$ son conjugados, es decir, $g_j \varphi(\pi_1(L_j)) g_j^{-1} = \pi_1(L'_j)$ para algún $g_j \in \pi_1(L')$, para todo $j = 1, \dots, v$. Entonces el homomorfismo $\varphi_j : \pi_1(L_j) \rightarrow \pi_1(L'_j)$ definido como $\varphi_j(\alpha) = g_j(\varphi(\alpha))g_j^{-1}$, para todo $\alpha \in \pi_1(L_j)$, es un isomorfismo de sistemas de grupos de $(\pi_1(L_j); \langle m_{j_i}, l_{j_i} \rangle^\pi \mid i = 1, \dots, r)$ a $(\pi_1(L'_j); \langle m'_{j_i}, l'_{j_i} \rangle^\pi \mid i = 1, \dots, r)$ para todo j . Luego, por el teorema de Waldhausen [26], existe $h : S^3 \setminus L \rightarrow S^3 \setminus L'$ un homeomorfismo que preserva la orientación del par (m_i, l_i) y (m'_i, l'_i) de meridianos y longitudes de L_j y L'_j , para todo j . Pero S^3 es compacto, luego h se puede extender a un homeomorfismo $\tilde{h} : S^3 \rightarrow S^3$ tal que $h(L_j) = L'_j$ para todo j . Por tanto L_j y L'_j son enlaces equivalentes para todo j . ■

Con este teorema hemos encontrado un invariante para enlaces, aunque encontrar estos isomorfismos en general resulta muy complicado. El siguiente corolario, es mas sencillo de aplicar, pues tenemos el mismo enlace pero con orientaciones contrarias o un enlace y su imagen en el espejo. Diremos que un enlace L es *invertible* si es equivalente a $-L$, donde $-L$ es el mismo enlace L , pero con la orientación de todas sus componentes invertidas, L es *+amfiqueiral* si L es equivalente a su imagen espejo, L^* , con la orientación inducida por L , o L es *-amfiqueiral* si L es equivalente a su imagen espejo con la orientación contraria, $-L^*$, a la inducida por L .

Corolario 1.2.2 Sea L un enlace, se cumple lo siguiente

1. L es invertible si y sólo si

$$(\pi_1(L); \langle m_i, l_i \rangle^\pi \mid i = 1, \dots, r) \simeq (\pi_1(L); \langle m_i^{-1}, l_i^{-1} \rangle^\pi \mid i = 1, \dots, r).$$

2. L +anfiqueiral si y sólo si

$$(\pi_1(L); \langle m_i, l_i \rangle^\pi \mid i = 1, \dots, r) \simeq (\pi_1(L); \langle m_i^{-1}, l_i \rangle^\pi \mid i = 1, \dots, r).$$

3. L -anfiqueiral si y sólo si

$$(\pi_1(L); \langle m_i, l_i \rangle^\pi \mid i = 1, \dots, r) \simeq (\pi_1(L); \langle m_i, l_i^{-1} \rangle^\pi \mid i = 1, \dots, r).$$

Prueba. Se sigue directamente del Teorema 1.2.1. ■

Dados dos nudos, podemos construir uno nuevo a partir de su suma conexa, pero al hacer esto el nuevo nudo puede que en realidad sea uno que ya conocemos o por el contrario uno que no hallamos visto antes. Si conocemos los sistemas periferales de ambos nudos ¿Qué podemos decir acerca del nuevo nudo construido? Uno esperaría que los grupos de los nudos originales nos ayudaran a calcular el grupo de este nuevo nudo. El siguiente resultado nos contesta esta pregunta. Aclaremos que éste solo se cumple para nudos, pues la suma conexa no está bien definida para enlaces de más de dos componentes.

Teorema 1.2.3 Para cualquier sistema periferal $(\pi_1(K_i); \langle m_i, l_i \rangle^\pi \mid i = 1, \dots, r)$ de nudos K_i con $i = 1, 2$ y cualquier sistema periferal $(\pi_1(K); \langle m, l \rangle^\pi)$ de la suma conexa $K = K_1 \# K_2$, el grupo $\pi_1(K)$ es isomorfo al grupo obtenido de $\pi_1(K_1) \star \pi_1(K_2)$ agregando la relación $m_1 = m_2$.

Prueba. Sean K_1, K_2 nudos en S^3 , $p_1 \in K_1$, $p_2 \in K_2$ y $B(p_1), B(p_2) \subset S^3$ bolas abiertas centradas en p_1, p_2 . Sean $I_1 = K_1 \cap B(p_1)$, $I_2 = K_2 \cap B(p_2)$. Entonces K es el nudo que se obtiene de la unión disjunta de $(S^3 \setminus B(p_1)) \cup (S^3 \setminus B(p_2))$ y $(K_1 \setminus \dot{I}_1) \cup (K_2 \setminus \dot{I}_2)$ mediante la identificación de las fronteras $\partial B(p_1) \leftrightarrow \partial B(p_2)$ y $\partial I_1 \leftrightarrow \partial I_2$.

Usemos la notación del Apéndice B.

Sea X esta unión disjunta menos el nudo K y $X_1 = S^3 \setminus (K_1 \cup B(p_1))$, $X_2 = S^3 \setminus (K_2 \cup B(p_2))$, entonces $X_1 \cap X_2 \simeq S^2 \setminus I$ es la intersección de las fronteras de $B(p_1), B(p_2)$ e I es la intersección de I_1, I_2 y $X_1 \cup X_2 = X$. Luego $G_0 = \pi_1(X_1 \cap X_2) \simeq \mathbb{Z}$ y $\theta_1(t) = m_1, \theta_2(t) = m_2$. Notemos que $G_1 \simeq \pi_1(K_1), G_2 \simeq \pi_1(K_2)$ (ver Figura 1-6).

Por el Teorema B.5.4, $G = \pi_1(K)$ es el producto libre $\pi_1(K_1) \star \pi_1(K_2)$ amalgamado por $\pi_1(X_1 \cap X_2)$. ■

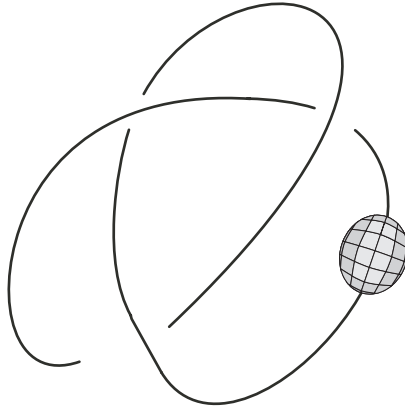


Figura 1-6: $X_i = S^3 \setminus (K_i \cup B(p_i))$

Como un corolario inmediato de este teorema se tiene el siguiente resultado, cuya aplicación nos da un isomorfismo entre el grupo de la suma conexa de dos tréboles y el grupo de la suma conexa del trébol con su imagen en el espejo.

Corolario 1.2.4 Sean K_1, K_2 nudos. Entonces $\pi_1(K_1 \# K_2) \simeq \pi_1(K_1 \# -K_2^*)$

Este corolario tiene una gran importancia pues implica que el grupo de un enlace no es un invariante completo, ya que el nudo obtenido de la suma conexa de dos tréboles no es equivalente al nudo obtenido de la suma conexa del trébol con su imagen en el espejo.

Un nudo no trivial se llama *primo* si no es la suma conexa de dos nudos no triviales. El siguiente teorema probado por Gordon y Luecke en 1989, ver [10], es de gran importancia ya que clasifica los nudos primos casi completamente (si cambiamos la orientación o todos los cruces de un enlace sigue existiendo un homeomorfismo entre sus complementos y por tanto un isomorfismo en sus grupos fundamentales). Así, el grupo del nudo es un invariante completo para nudos primos, salvo imágenes espejo e inversos.

Teorema 1.2.5 (Gordon-Luecke) Dos nudos primos K_1, K_2 en S^3 son equivalentes si y sólo si $\pi(K_1) \simeq \pi(K_2)$.

Este teorema no funciona para enlaces, en efecto, sean L_1, L_2 los enlaces de la Figura 1-7. Ellos no son equivalentes pues los twisting numbers $t(L_1) = 1$ y $t(L_2) = 3$ son diferentes, pero del Ejemplo 1.1.1 se tiene $\pi_1(L_1) \simeq \pi_1(L_2)$

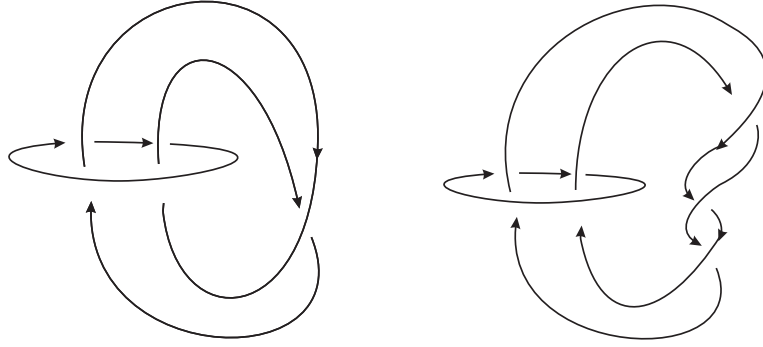


Figura 1-7:

1.3 Complejo de fractura

Usaremos el concepto de complejo de fractura para construir un cubrimiento para el complemento de un nudo, más aún, podemos construirlo de tal manera que este cubrimiento se corresponda con el subgrupo conmutador del grupo del nudo. Primero veamos un algoritmo para computar el grupo fundamental de una 3-variedad conexa a partir de un complejo de fractura, esto es, el algoritmo que nos permitirá calcular una presentación para el grupo de un enlace. De este algoritmo se deriva la forma en la cual podemos construir un recubridor para el grupo de un nudo.

1.3.1 Cálculo del grupo de un enlace

Dado un complejo simplicial M , denotaremos por $|M|$ el politopo de M , es decir, $|M| = \cup M^{(k)}$, donde el k -esqueleto $M^{(k)}$ de M , es el conjunto de todos los k -simplejos de M . Denotamos por $\overset{\circ}{M}$ al interior de M .

Sea M_0 una 3-variedad conexa y sea M un 3-complejo conexo, tal que existe un homeomorfismo $f : |M| \rightarrow M_0$, es decir, M es una triangulación de M_0 . Sea $\sigma_0 \in M$ un 3-simplejo. Como M es conexo, existe un 3-simplejo $\sigma_1 \in M$ tal que $\sigma_1 \cap \sigma_0 = S_1$, con S_1 un 2-simplejo. Denotemos por $N_1 = \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_0, \overset{\circ}{\sigma}_1, \overset{\circ}{S}_1 \right\}$ la yuxtaposición de los 3-simplejos abiertos sobre su 2-cara abierta común. De nuevo por la conexidad de M existe un 3-simplejo $\sigma_2 \in M \setminus \{\sigma_0, \sigma_1\}$ tal que $\sigma_1 \cap \sigma_2 = S_2$, con S_2 un 2-simplejo. Denotamos por $N_2 = \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_2, \overset{\circ}{S}_2 \right\}$ la yuxtaposición del 3-simplejo abierto y su 2-cara abierta, así $N_1 \cup N_2$ es yuxtaponer a N_1 un 3-simplejo abierto distinto de $\overset{\circ}{\sigma}_0$ y $\overset{\circ}{\sigma}_1$ sobre su 2-cara abierta común. Continuando de la misma forma, existe un 3-simplejo $\sigma_i \in M \setminus \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}\}$ tal que $\sigma_{i-1} \cap \sigma_i = S_i$. Denotamos por $N_i = \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_i, \overset{\circ}{S}_i \right\}$ y paramos este proceso cuando hayamos obtenido el conjunto de todos los 3-simplejos $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ de M .

Definimos la unión disjunta $N' = \bigcup_{i=1}^m N_i$ que es la yuxtaposición de todos los 3-simplejos abiertos de M sobre sus correspondientes 2-caras comunes. N' es llamado *cueva máxima* de M .

Es fácil ver por inducción que N' es simplemente conexo. Para $m = 1$, es inmediato de la construcción. Para $m = 2$, tomemos $Y = N_1$ y $Y_1 = \overset{\circ}{\sigma}_0 \cup \overset{\circ}{S}_1, Y_2 = \overset{\circ}{\sigma}_1 \cup \overset{\circ}{S}_1$ entonces $Y_1 \cap Y_2 = \overset{\circ}{S}_1 \neq \phi$ y así por el Teorema Van-Kampen B.5.4, Y es simplemente conexo si Y_j lo es, para $j = 1, 2$. Luego basta probar que Y_j es simplemente conexo, para $j = 1, 2$. Denotemos por $v_{1,j}, v_{2,j}, v_{3,j}, v_{4,j}$ los vértices de Y_j , para $j = 1, 2$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $v_{1,j}, v_{2,j}, v_{3,j}$ son los vértices comunes que también corresponden a S_1 , entonces podemos omitir el subíndice j , para $j = 1, 2, 3$. Sabemos que

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\sigma}_j &= \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^4 t_i v_{i,j}, \sum_{i=1}^4 t_i = 1, t_i \neq 0 \right\}, \\ \overset{\circ}{S}_1 &= \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^3 t_i v_i, \sum_{i=1}^3 t_i = 1, t_i \neq 0 \right\}.\end{aligned}$$

Luego

$$Y_j = \overset{\circ}{\sigma}_j \cup \overset{\circ}{S}_1 = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^4 t_i v_{i,j}, \sum_{i=1}^4 t_i = 1 \text{ con } t_1, t_2, t_3 \neq 0, \right\}.$$

Definimos ahora, para cada $s \in [0, 1]$ la función $h_s : Y_j \rightarrow Y_j$, dada por

$$h_s(x) = h_s \left(\sum_{i=1}^4 t_i v_{i,j} \right) = \sum_{i=1}^2 t_i v_i + (st_4 + t_3) v_3 + (1-s)t_4 v_{4,j}, x \in Y_j.$$

Como $t_0 + t_2 + st_4 + t_3 + t_4 - st_4 = t_0 + t_2 + t_3 + t_4 = 1$, entonces $h(x) \in Y_j$, además h_s es continua en las dos variables. Entonces $\overset{\circ}{S}_1$ es retracto de deformación de Y_j , por tanto $\pi_1(Y_j) = \pi_1(\overset{\circ}{S}_1) = 0$. El paso inductivo es análogo al paso $m = 2$, pues al agregar el $n + 1$ 2-simplejo el nuevo generador es el único que pasa por éste, es decir, no hay relaciones entre los n anteriores generadores.

Ahora bien, consideremos el conjunto de los 2-simplejos abiertos

$$\left\{ \overset{\circ}{X}_l \mid l = 1, 2, \dots, k \right\}$$

restantes, es decir, los 2-simplejos abiertos $\overset{\circ}{X}_l \notin \{S_i \mid i = 1, 2, \dots, m\}$. Si agregamos estos 2-simplejos abiertos, uno a la vez, a N' , obtenemos el complemento del 1-esqueleto de M ,

$$N = \left(M^{(1)} \right)^c = N' \cup \left\{ \overset{\circ}{X}_l \mid l = 1, 2, \dots, k \right\}.$$

Veamos por inducción que $\pi_1(N)$ es un grupo libre.

Por inducción sobre k . Para X_1 sabemos que existen 3-simplejos $\sigma_j, \sigma_k \in M$ tales que $\sigma_j \cap \sigma_k = X_1$, además existen 3-simplejos abiertos $\hat{\sigma}_{j+1}, \hat{\sigma}_{k+1} \in N'$ tales que $\sigma_{j+1} \cap \sigma_j = S_{j+1}$ y $\sigma_{k+1} \cap \sigma_k = S_{k+1}$. Tomemos α_1 un camino cerrado que empiece en $\hat{\sigma}_j$ y pase a $\hat{\sigma}_k$ a través de \hat{X}_1 , siga por $\hat{\sigma}_{k+1}$ a través de \hat{S}_{k+1} y finalmente regrese a $\hat{\sigma}_j$. Este camino estaría rodeando una de las 1-caras de X_1 , luego $\alpha_1 \neq 0$. En el paso inductivo la construcción del generador α_i agregando X_i es análogo. Además, notemos que el generador α_i es el único que cruza a X_i , por tanto este no puede obtenerse mediante alguna relación de los demás generadores.

De lo anterior se sigue que cada generador en $\pi_1(N)$ corresponde a un 2-simplejo agregado. Estos generadores los enumeramos por el orden que hemos fijado para los 3-simplejos.

Ahora tomemos una vecindad tubular de cada 1-simplejo abierto y la agregamos a N , una a la vez, entonces por el Teorema B.5.4, estaríamos agregando una relación por cada 1-simplejo correspondiente a un camino que rodee este 1-simplejo, hablaremos de estas relaciones mas adelante. Finalmente agregamos una vecindad de cada vértice, pero como estas vecindades son homeomorfas a una 3-bola menos un punto, las cuales son simplemente conexas, entonces ninguna relación es agregada cuando adjuntamos estas vecindades de vértices.

Regresemos a las relaciones que aparecen cuando agregamos las vecindades toroidales de los 1-simplejos. Consideremos un 1-simplejo $L \in M$. Para cada uno de estos existe un conjunto de 2-simplejos que tienen a L como una de sus 1-caras, entonces la relación está dada por el orden en el que el lazo atraviesa los 2-simplejos para rodear a L . Y puesto que $M \setminus K = N'$ es simplemente conexo, las relaciones que vienen de L son palabras en los generadores correspondientes a los 2-simplejos que atraviesa este lazo.

Definición 1.3.1 *Sea M una 3-variedad, y sea L un 1-subcomplejo de M . Un complejo K es llamado un complejo de fractura para (M, L) si cumple*

1. $M \setminus K$ es conexo.
2. $M \setminus K$ es simplemente conexo.
3. $L \subset K$.

De este algoritmo se sigue la prueba del siguiente teorema.

Teorema 1.3.1 *Si K es un complejo de fractura para una 3-variedad M entonces*

$$\pi_1(M \setminus L) = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle$$

donde cada x_i corresponde a un único 2-simplejo de K y los r_i están unívocamente determinados por los 1-simplejos de $K \setminus L$.

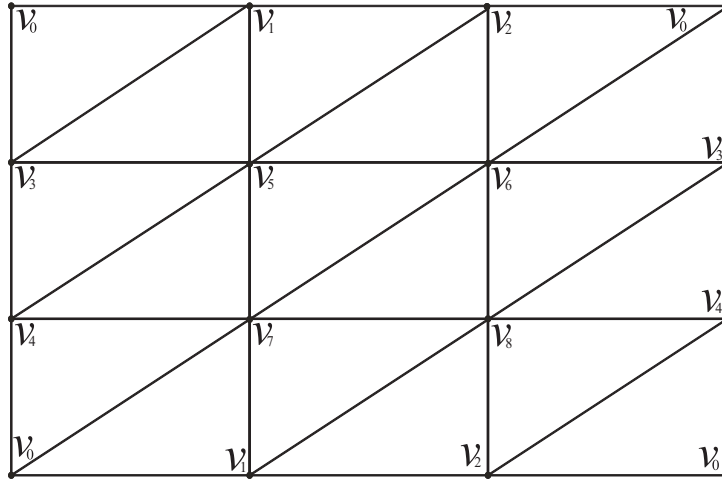


Figura 1-8: Triangulación del Toro

Para ilustrar lo anterior tomaremos una situación análoga en el caso 2-dimensional.

Ejemplo 1.3.1 Sea T el toro y denotemos también por T su triangulación, Figura 1-8. Sea $L = v_5$ y usemos el algoritmo para calcular $\pi_1(T \setminus v_5)$. El complejo de fractura depende del camino que escojamos para construir N' . Tomemos todos los 2-simplejos abiertos como se muestra en la Figura 1-9 y escojamos como primer 2-simplejo a $\sigma_0 = \langle v_8, v_6, v_7 \rangle$. Ahora empecemos a recorrer los 2-simplejos. Partimos de $\hat{\sigma}_0$ y agregamos un nuevo 2-simplejo abierto, $\hat{\sigma}_1$ y el 1-simplejo abierto por el que cruzamos, \hat{S}_1 como se muestra en la Figura 1-10. Continuamos este proceso hasta que hallamos recorrido todos los 2-simplejos de T , es decir, solo pasamos a un 2-simplejo si no habíamos estado en él antes, y así vamos enumerando los 2-simplejos y los 1-simplejos de acuerdo a la dirección del recorrido, ver Figura 1-11. Finalmente obtenemos N' . Luego $\sigma_0 = \langle v_8, v_6, v_7 \rangle, \sigma_1 = \langle v_5, v_6, v_7 \rangle, \sigma_2 = \langle v_5, v_6, v_2 \rangle, \sigma_3 = \langle v_5, v_2, v_1 \rangle, \sigma_4 = \langle v_1, v_2, v_8 \rangle, \dots$ y $S_1 = \langle v_7, v_6 \rangle, S_2 = \langle v_5, v_6 \rangle, S_3 = \langle v_5, v_2 \rangle, S_4 = \langle v_1, v_2 \rangle, \dots$. Se ve fácilmente que N' es simplemente conexo. Ahora empezamos a agregar los 1-simplejos abiertos restantes, uno a la vez, empezando en el 2-simplejo σ_0 , y los vamos enumerando. Así $X_1 = \langle v_7, v_8 \rangle$ como en la Figura 1-12. El generador está dado por una curva que empieza en un punto base O recorre a N' hasta cruzar una sola vez a X_1 en la dirección σ_1 a σ_5 como se muestra en la Figura 1-13, es decir, de subíndice menor a mayor. Seguimos agregando estos 1-simplejos y así vamos agregando estos generadores descritos como antes. Esto se puede ver en la figura 1-14. Notemos que estos generadores no tienen relaciones, pues los vértices no están. Ahora agreguemos pequeños discos centrados en los vértices, uno a la vez, excepto para v_5 , en la Figura 1-15 se muestra que la relación obtenida al agregar el vértice v_7 es $x_1 x_2^1$. Estos son vecindades de cada vértice, y así

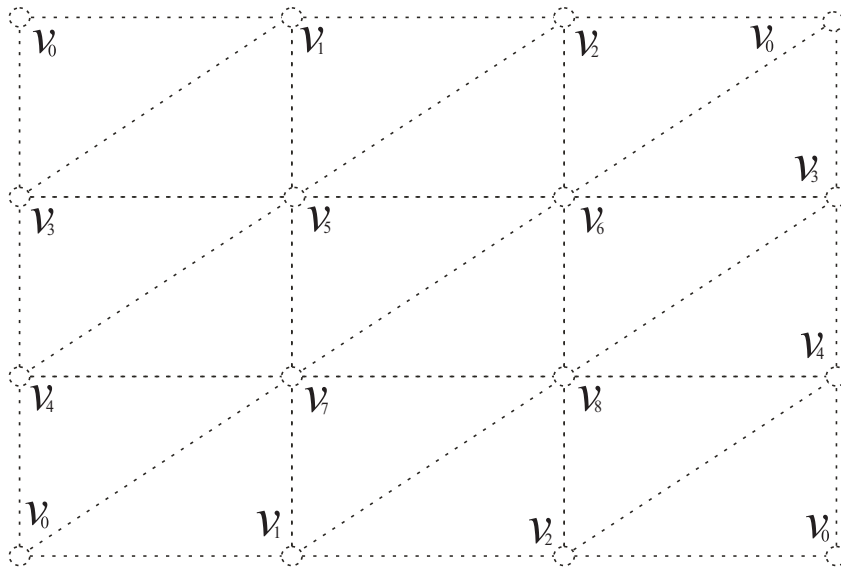


Figura 1-9: Toro con sus simplejos abiertos

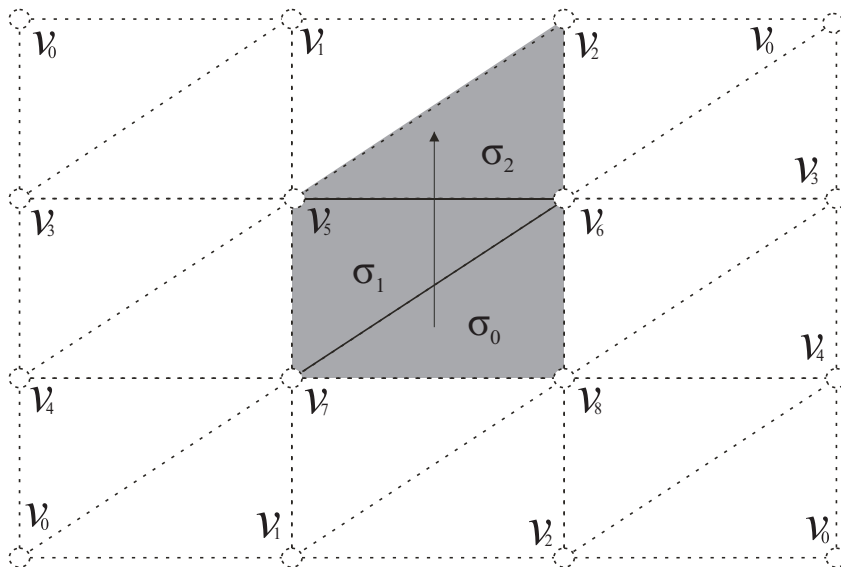


Figura 1-10:

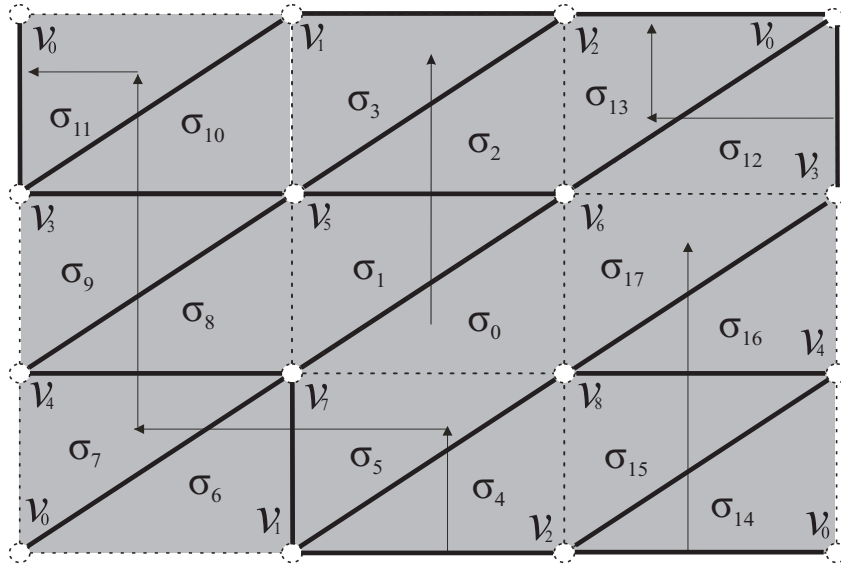


Figura 1-11:

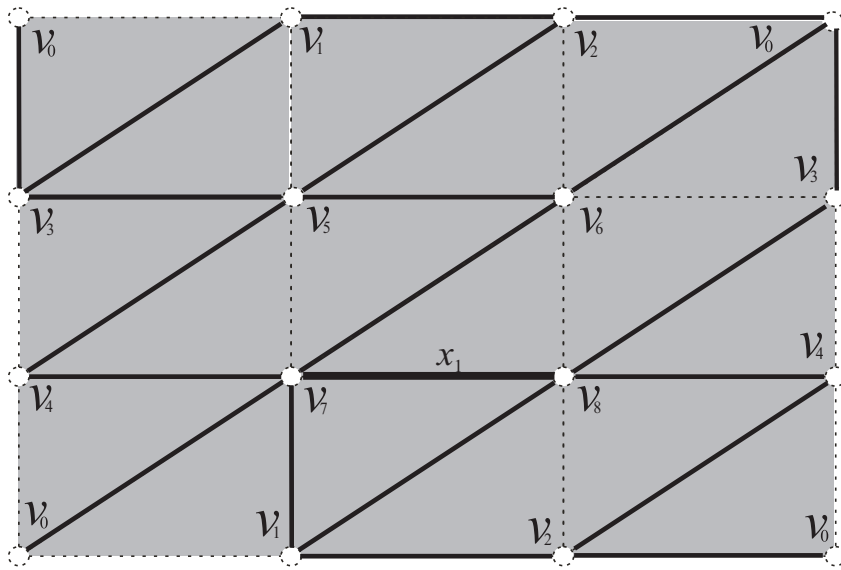


Figura 1-12:

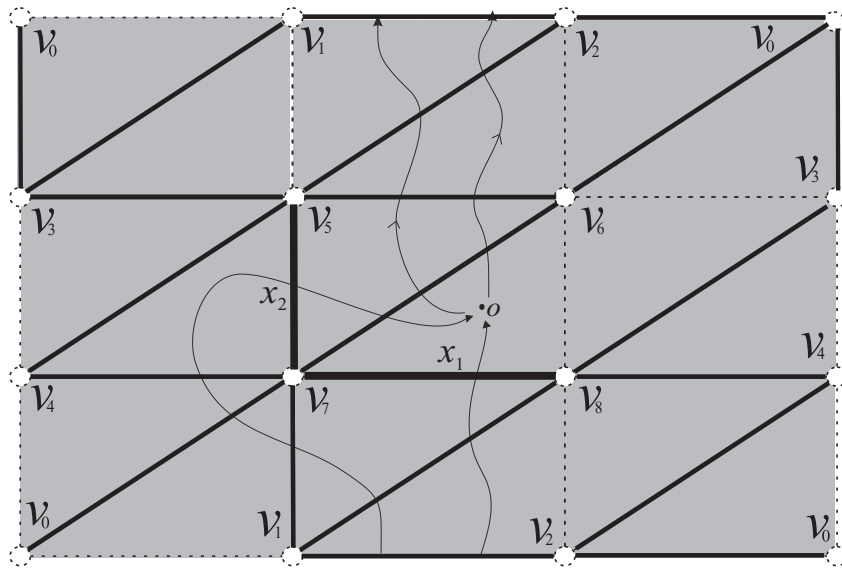


Figura 1-13: Generadores x_1, x_2

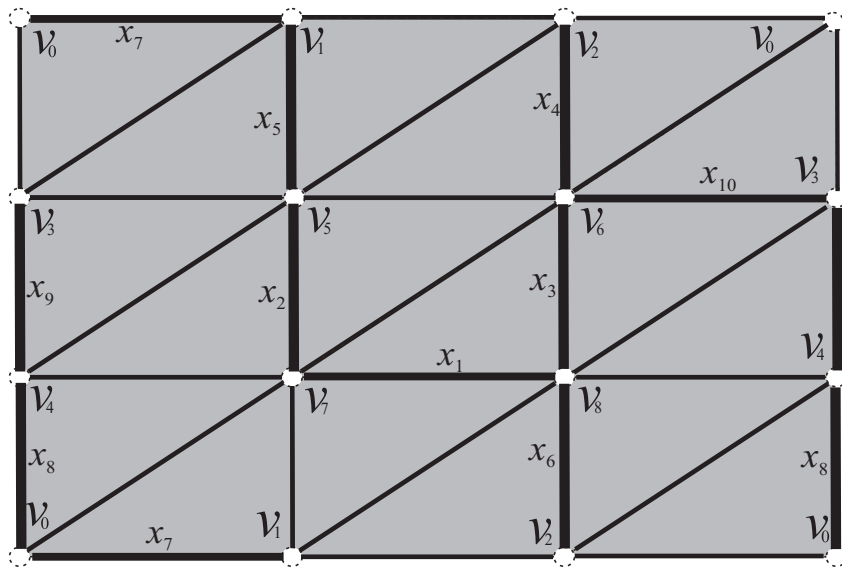


Figura 1-14:

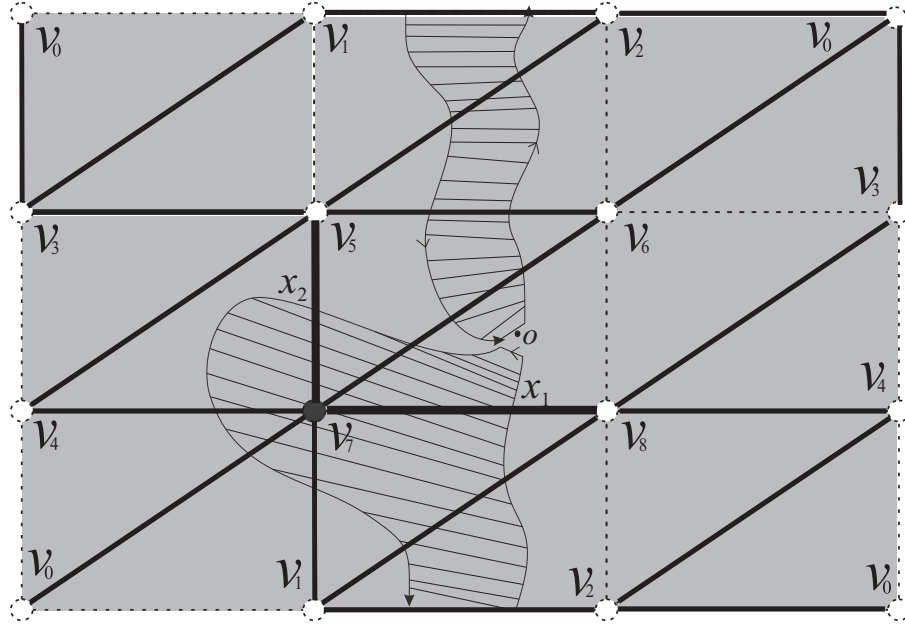


Figura 1-15:

obtenemos una relación por cada uno de ellos, esto se ve en la Figura 1-16. Hemos encontrado entonces una presentación para el grupo fundamental del toro agujereado,

$$\begin{aligned}
 & \pi_1(T \setminus v_5) \\
 &= \langle X_1, X_2, \dots, X_{10} \mid X_1 X_2^{-1}, X_5 X_7^{-1}, X_1^{-1} X_6 X_3, X_3 X_{10} X_4, X_4 X_6^{-1}, X_9 X_{10}^{-1}, X_9 X_8^{-1}, X_7 X_8^{-1} \rangle \\
 &\simeq \langle X, Y \rangle.
 \end{aligned}$$

Utilicemos ahora el algoritmo para calcular una presentación del grupo de un enlace.

Consideremos un enlace L no separable, en posición general en S^3 y proyectémoslo sobre una esfera S en el interior de S^3 , notemos que tenemos dos tipos de regiones en la esfera, las cuales tienen como frontera común el enlace y en cada cruce se encuentran dos regiones del mismo tipo como en el dibujo superior de la Figura 1-17. Ahora supongamos que L está sobre la esfera excepto por una vecindad B de cada punto doble. Podemos tomar esta vecindad como una bola en S^3 , notemos que la intersección de esta vecindad con la esfera, $B \cap S = D$, nos da un disco contenido en la esfera. Tomemos la frontera de este disco $C = \partial D$, la cual es un círculo que conecta los extremos de cada cruce del nudo. Cada cruce genera dos superficies, estas son una banda con un twist que conecta las regiones del mismo tipo. Ahora bien, si unimos estas superficies a la superficie $S' = S \setminus \hat{D}$, obtenemos un complejo de fractura K donde el 1-complejo corresponde a L y cada cruce es como se muestra en la parte inferior de la

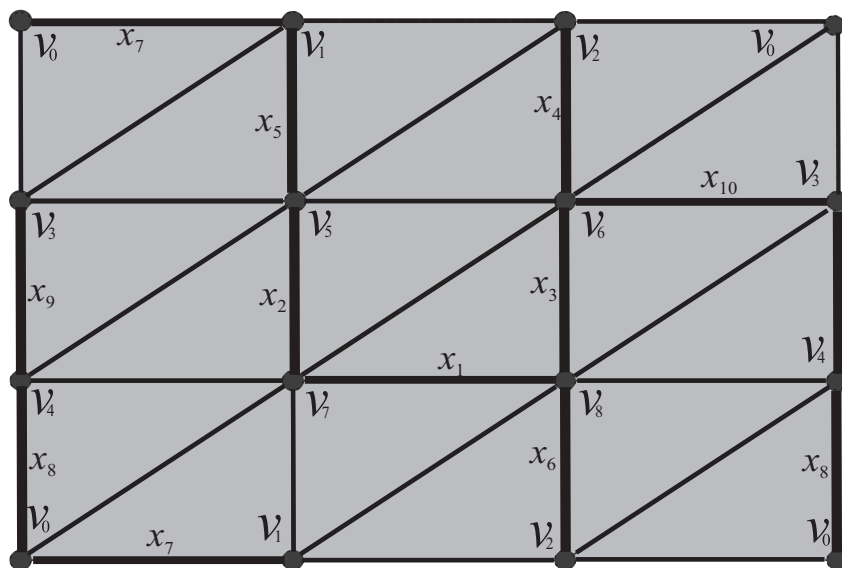


Figura 1-16:

Figura 1-17.

Aplicando el algoritmo anterior obtenemos una relación por cada cruce. Cada generador está dado por un 2-simplejo, pero estos a su vez están dados por cada arco del nudo, es decir, hemos obtenido una presentación para $\pi_1(L)$, encontramos entonces, una forma totalmente diferente de calcular una presentación para el grupo de un enlace, pues claramente esta difiere del método utilizado en la sección anterior.

1.3.2 Espacio recubridor del grupo de un enlace

Construyamos un complejo de fractura para un enlace, pero primero empecemos con la siguiente definición.

Definición 1.3.2 Una superficie de Seifert para un enlace L en S^3 es una 2-variedad S orientada y compacta embebida en S^3 tal que $\partial S = L$ como un enlace orientado y S no tiene componentes que sean 2-subvariedades cerradas.

Las superficies de Seifert de un enlace tienen género minimal y son incompresibles, para más detalles sobre estas superficies ver [13].

Consideremos ahora un enlace no separable L embebido en S^3 y sea $S \subset S^3$ una superficie de Seifert para L , escojamos una triangulación (la cual la denotaremos con el mismo nombre) para S , notemos que la triangulación de L es un subcomplejo de S . Tenemos entonces un complejo

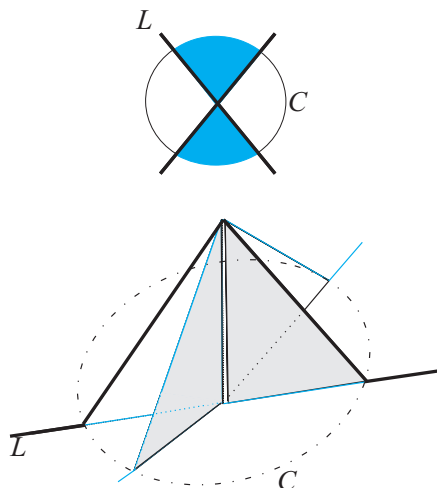


Figura 1-17:

de fractura S de (S^3, L) . Sea

$$\begin{aligned} \{\sigma_i, \text{3-simplejos} \mid \sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset, i \neq j \text{ y } (\forall i) (\exists! \sigma \in S^3, \text{3-simplejo}) (\varphi_i : \sigma_i \rightarrow \sigma \text{ es biyección})\} &= \\ &= M_0. \end{aligned}$$

Cortamos a S^3 a lo largo de S como sigue: Unimos dos 3-simplejos de M_0 sobre una cara si los 3-simplejos (de la triangulación) de S^3 correspondientes a estos tienen una cara común y si tal cara no está en S . Hacemos este proceso hasta pegar todos los 3-simplejos de M_0 , con esto hemos obtenido un complejo

$$\begin{aligned} \{\sigma_i, s, l \mid \sigma_i \in M_0, s, l \text{ son subsimplejos de } \sigma_i \text{ de dimensiones 2 y 1, respectivamente}\} &= \\ &= \hat{M}. \end{aligned}$$

Notemos que hay 2-caras de 3-simplejos que no se unen pues estas correspondían a elementos de S . Como S^3 es una variedad conexa un 2-simplejo es cara de solo dos 3-simplejos entonces se tiene la función $\varphi : \left| \hat{M} \right| \rightarrow S^3$ tal que $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ si $x \in \sigma_i$. Ahora bien, φ cumple que para cada 2-simplejo $s_0 \in S$ existen $s, s' \in \hat{M}$ tales que $\varphi(s) = \varphi(s') = s_0 \in S$.

Por otro lado, a cada 2-simplejo s de S^3 con cofrontera σ_i, σ_j le definimos un orden como $\delta(s) = (\sigma_i, \sigma_j)$ y $-\delta(s) = (\sigma_j, \sigma_i)$, δ obviamente ordena la cofrontera de los 1-simplejos, es decir, si l es un 1-simplejo de S^3 cuya cofrontera es s_1, \dots, s_n , y $\delta(s_1) = (\sigma_1, \sigma_2), \delta(s_2) = (\sigma_3, \sigma_4), \dots, \delta(s_n) = (\sigma_{n-1}, \sigma_n)$ entonces $\delta(l) = (s_1, \dots, s_n)$. Ahora asignamos la permutación $(n \ n+1)$ a cada pareja $(s, \delta(s))$, es decir, consideramos la función $P : \{(s, \delta(s)) \mid s \in S^3\} \rightarrow S_{\mathbb{Z}}$

definida como

$$P(x) = \begin{cases} (n \ n + 1), & \text{si } x = (s, \delta(s)), \\ (n \ n + 1)^{-1}, & \text{si } x = (s, -\delta(s)), \end{cases}$$

tal que, si $\delta(l) = (s_1, \dots, s_n)$ para un 1-simplejo en $K \setminus L$ y un meridiano alrededor de l pasa a través de s_i desde el 3-simplejo σ_{2i-1} hasta el 3-simplejo σ_{2i} entonces

$$\begin{aligned} P(s_1, \delta(s_1)) P(s_2, \delta(s_2)) \cdots P(s_n, \delta(s_n)) &= \\ &= P(s_1, (\sigma_1, \sigma_2)) P(s_2, (\sigma_3, \sigma_4)) \cdots P(s_n, (\sigma_{n-1}, \sigma_n)) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Claramente si una cofrontera en particular cumple esto, entonces las demás también.

Tomemos copias homeomorfas \hat{M}_j a \hat{M} , $j \in \mathbb{Z}$ con homeomorfismos $h_j : \hat{M}_j \rightarrow \hat{M}$, llamaremos a estas copias *hojas*. Sea $\hat{M}_{\mathbb{Z}}$ el espacio topológico obtenido de la unión disjunta $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \hat{M}_j$ identificando un 2-simplejos, s_j de \hat{M}_j con un 2-simplejos s_{j+1} de \hat{M}_{j+1} solo cuando

1. $h_j(s_j)$ y $h_{j+1}(s_{j+1})$ son el mismo 2-simplejo s en S .
2. $\delta(s) = (\sigma, \beta) = (h_j(\delta(s_j)), h_{j+1}(\delta(s_{j+1})))$.
3. $P(s, (h_j(\delta(s_j)), h_{j+1}(\delta(s_{j+1})))) = P(s, \delta(s)) = (j, j + 1)$.

Es decir, como cada hoja tiene dos copias de S , denotémoslas por $+S_k, -S_k$, donde el signo corresponde a la regla de la mano derecha. Las condiciones anteriores pueden pensarse como pegar la copia M_j con la copia M_{j+1} a lo largo de $+S_j$ y $-S_{j+1}$. Esta regla de pegamento nos dice en cual copia de \hat{M} entramos cuando cruzamos un 2-simplejo de S desde otra copia de \hat{M} . Así, podemos levantar un camino en \hat{M} asociado a \hat{M}_j , a un camino en $\hat{M}_{\mathbb{Z}}$ de la siguiente forma, vamos copiando el camino que empieza en \hat{M}_j y este entra en diferentes hojas cuando nuestra asignación lo dice.

Ahora removemos de $\hat{M}_{\mathbb{Z}}$ todos los 1-simplejos l tales que $h_j(l) \in L$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, esto quiere decir, removemos las copias de L en cada hoja. Obtenemos un espacio $C_{\infty} = M_{\mathbb{Z}}$ y definimos $p_{\infty}(x) = h_j(x)$ si $x \in \hat{M}_j$.

El siguiente teorema garantiza que la construcción anterior, es en efecto un espacio recubridor, ya que el algoritmo anterior solo nos dice como construir este espacio. Para una prueba ver [20]. Antes de enunciarlo daremos algunas definiciones que clasifican los espacios recubridores.

Si (\tilde{X}, p, X) es un espacio recubridor conexo sobre un espacio conexo X , un homeomorfismo $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ tal que $p \circ f = p$ se llama una *transformación de cubierta*, además, el conjunto de todas la transformaciones es un grupo llamado el *grupo de transformaciones*, diremos que (\tilde{X}, p, X) es *cíclico*, si el grupo de transformaciones es cíclico. Si la imagen, $p_* \left(\pi_1 \left(\tilde{X}, \tilde{x} \right) \right)$,

del homomorfismo inducido $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, x)$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, x)$, diremos que (\tilde{X}, p, X) es un *espacio recubridor regular*.

Notemos que si $\alpha \in [\pi_1(L), \pi_1(L)]$, tiene número de enlazamiento 0 con L (número intersecciones), luego α tiene número de enlazamiento 0 con S y por tanto la permutación inducida por α es la identidad. Recíprocamente, por la regla de pegamento si $\alpha \in p_*\left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})\right)$, se sigue que α tiene número de enlazamiento 0 con L y así es una palabra formada por elementos de la forma $aba^{-1}b^{-1}$. Por tanto $C_\infty = M_{\mathbb{Z}}$ es un cubrimiento de $S^3 \setminus L$ correspondiente al subgrupo conmutador de $\pi_1(L)$.

Teorema 1.3.2 $(M_{\mathbb{Z}}, p_\infty)$ es un espacio recubridor cíclico regular infinito de M .

Si cambiamos $S_{\mathbb{Z}}$, por $S_{\mathbb{Z}_n}$, es decir, si cambiamos el conjunto sobre el cual hacemos las permutaciones por el conjunto finito \mathbb{Z}_n , entonces $M_{\mathbb{Z}_n} = C_n$ se llama el espacio recubridor cíclico regular finito.

1.4 Quandles

Una manera alternativa de ver el grupo de un enlace es usar el concepto de quandles, el cual es otro invariante de enlaces, daremos la definición y algunas propiedades importantes. Este concepto fue introducido de manera independiente por S. V. Matveev [18] y D. Joyce [12] en 1982, en el trabajo de Matveev se llamaba grupoide asociativo y fue publicado originalmente en ruso, la traducción al inglés salió a la luz en 1984. Aunque el quandle no es un grupo, a partir de él podemos construir el grupo de un enlace y también el álgebra de Conway.

Definición 1.4.1 Un quandle es un conjunto $Q \neq \emptyset$ dotado de una operación binaria

$$\circ : Q \times Q \rightarrow Q$$

que satisface las siguientes propiedades

1. $x \circ x = x$, para todo $x \in Q$.
2. Existe un único $z \in Q$ tal que $z \circ y = x$, para todo $x, y \in Q$.
3. Para todo $x, y, z \in Q$, $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z)$.

Si (Q, \circ) satisface sólo las dos primeras propiedades, pero no necesariamente la última diremos, que (Q, \circ) es un rack. Del segundo axioma podemos definir una segunda operación $/$ que sería la operación inversa a \circ . Es decir, definimos el elemento b/a como la única solución de la ecuación $x \circ a = b$.

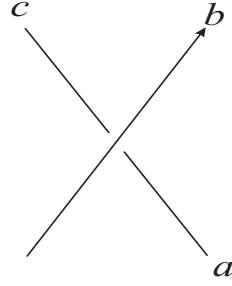


Figura 1-18:

Ahora, a un quandle Q , podemos asociarle un grupo. Consideremos el grupo $F(Q)$ libre sobre Q y el conjunto $R = \{y^{-1}xy(x \circ y)^{-1} \mid x, y \in Q\} \subset F(Q)$ de todas las palabras de la forma $y^{-1}xy(x \circ y)^{-1}$ en $F(Q)$, entonces el grupo formado por el cociente de $F(Q)$ y la clausura normal \bar{R} se puede ver como un grupo cuya presentación es

$$\frac{F(Q)}{\bar{R}} \simeq \langle Q \mid R \rangle = G.$$

Podemos construir un quandle tomando como elementos los arcos de un diagrama de un enlace. Veamos esto mediante una descripción enteramente combinatoria:

Sea L un enlace y D el diagrama de L . Definimos el conjunto $A_D = \{x_1, \dots, x_n\}$ de todos los arcos del diagrama D . En cada cruce r del diagrama convergen tres arcos, como se muestra en la Figura 1-18. b es el arco que contiene el cruce superior, a es el arco que se encuentra a la derecha del arco b y c el arco que se encuentra a la izquierda de b . Definimos la operación \circ mediante $a \circ b = c$.

Entonces los tres axiomas del quandle van a coincidir con los tres movimientos de Reidemeister. En efecto, en el primer movimiento de Reidemeister solo interactúa un arco x , así operándolo con él se obtiene el mismo arco.

$$x \circ x = x$$

En el movimiento de Reidemeister de tipo II, dados dos arcos x, y siempre existe un arco z tal que $z \circ x = y$, como se muestra en la Figura 1-20.

Finalmente en el movimiento de Reidemeister de tipo III corresponde a la tercera propiedad. En la Figura 1-21, se muestra el arco que se obtiene al efectuar $(y \circ z) \circ x$, y el resultado de efectuar $(y \circ x) \circ (z \circ x)$, cuando z tiene una orientación, en el segundo caso, es decir, z con orientación contraria, se debe tener en cuenta que el tercer axioma es equivalente a $(x/y) \circ z = (x \circ z) / (y \circ z)$.

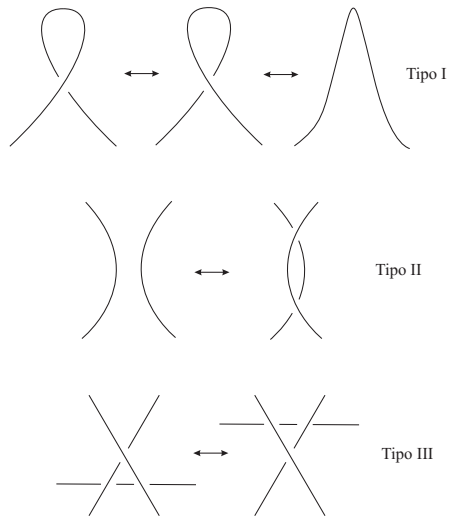


Figura 1-19: Movimientos de Reidemeister

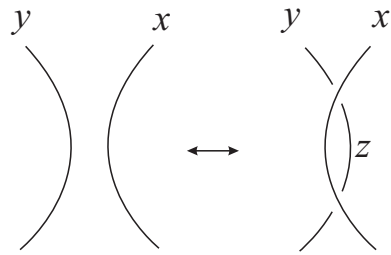


Figura 1-20:

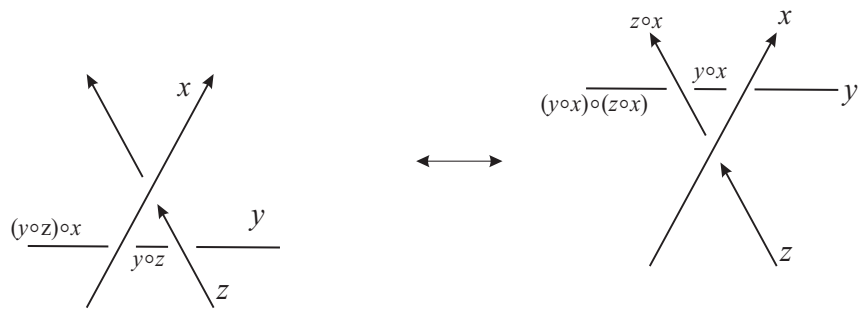


Figura 1-21:

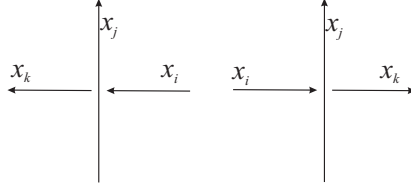


Figura 1-22: $x_i \circ x_j = x_k, x_k \circ x_j = x_i$

Sea $Q(L) = \langle x_1, \dots, x_n \mid x_i \circ x_j = x_k \rangle$ donde cada generador x_i corresponde a una arco del enlace y cada relación a un cruce. A $Q(L)$ se le conoce como el *quandle fundamental*. Veamos que $Q(L)$ es en efecto un quandle, claramente $Q(L) \neq \emptyset$, y cada relación corresponde a los cruces como se muestra en la Figura 1-22, respectivamente. Por tanto de los movimiento de Reidemeister se siguen los tres axiomas.

Entonces el grupo asociado a $Q(L)$ es precisamente el grupo del enlace $\pi_1(S^3 \setminus L)$. En efecto

$$\begin{aligned} \frac{F(Q(L))}{\bar{R}} &\simeq \langle x_1, \dots, x_n \mid x_i^\varepsilon x_j x_i^{-\varepsilon} x_k^{-1} \rangle \\ &\simeq \langle x_1, \dots, x_n \mid x_k^{-1} x_i^\varepsilon x_j x_i^{-\varepsilon} \rangle. \end{aligned}$$

El cual resulta ser la presentación de Wirtinger para el grupo de un enlace.

Capítulo 2

Matriz de Alexander

El polinomio de Alexander es uno de los invariantes más importantes de la teoría de nudos, este se puede calcular a partir de la Matriz de Alexander y una manera de computar esta matriz es a partir del grupo de un enlace, veremos en este capítulo otra propiedad importante del grupo de un enlace.

2.1 Cálculo libre

En esta sección nos restringiremos al caso $R = \mathbb{Z}$ para la extensión de grupos a anillo grupo. Para mas información sobre el anillo grupo $\mathbb{Z}G$ ver Apéndice D.

El homomorfismo de grupos $a : G \rightarrow H$ donde $H = G/G'$ lo llamamos el abelianizador, como en el Ejemplo B.3.1. Por el Teorema D.0.9, existe una única extensión $\bar{\varphi} : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}H$. Definimos el trivializador $\tau : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}$ como la única extensión del homomorfismo de grupos $\tau : G \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\tau(g) = 1$, para todo $g \in G$.

Definición 2.1.1 Una función $D : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}G$ se llama una derivada si para todo $v_1, v_2 \in \mathbb{Z}G$

$$D(v_1 + v_2) = D(v_1) + D(v_2), \quad (2.1)$$

$$D(v_1 v_2) = D(v_1) \tau(v_2) + v_1 D(v_2), \quad (2.2)$$

donde τ es el trivializador.

Consideramos $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}G$ y $G \subset \mathbb{Z}G$ de forma natural, $g = 1_{\mathbb{Z}} \cdot g$ y $n = n \cdot 1_G$. Para simplificar notación denotaremos por $1 = 1_G, 1_{\mathbb{Z}}$ el neutro multiplicativo. Notemos que $D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) \tau(1) + 1 \cdot D(1)$, pero $\tau(1) = 1$, luego $D(1) = 0$ y así $D(n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Con esto, $0 = D(g^{-1}g) = D(g^{-1}) \tau(g) + g^{-1} D(g) = D(g^{-1}) + g^{-1} D(g)$ y así

$$D(g^{-1}) = -g^{-1} D(g), \quad (2.3)$$

para todo $g \in G$.

Para todo $g \in G$ y $n \in \mathbb{Z}$ definimos el elemento de $\mathbb{Z}G$.

$$\frac{g^n - 1}{g - 1} = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0, \\ \sum_{i=0}^{n-1} g^i, & \text{si } n > 0, \\ -\sum_{i=n}^{-1} g^i, & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Note que $\frac{g^n - 1}{g - 1}$ es solo una notación, es decir, no tiene sentido de cociente. Se prueba fácilmente por inducción que $D(g^n) = \frac{g^n - 1}{g - 1} D(g)$.

Proposición 2.1.1 *Sea F un grupo libre sobre $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Para cada x_i existe una única derivada $\frac{\partial}{\partial x_i}$ en $\mathbb{Z}F$ tal que*

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ji} \text{ (Delta de Kronecker).}$$

Prueba. Definamos la función $\frac{\partial}{\partial x_j} : F \rightarrow \mathbb{Z}F$, tal que para todo $x_i \in F$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} 1 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_j} x_i^n &= \frac{x_i^n - 1}{x_i - 1} \delta_{ij}, \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (x_i^n w) &= \frac{\partial}{\partial x_j} x_i^n + x_i^n \frac{\partial}{\partial x_j} w, w \in F. \end{aligned}$$

Es claro que está bien definida. Sean $w, v \in F$ y veamos por inducción sobre la longitud de w que $\frac{\partial}{\partial x_j}$ satisface (2.2).

Si la longitud de w es cero, entonces $w = 1$ es la palabra vacía, y la afirmación se cumple trivialmente. Ahora supongamos que la función cumple (2.1) y (2.2) para palabras de longitud n . Supongamos que $w = x_{i_1}^{m_1} \cdots x_{i_{n+1}}^{m_{n+1}}$ donde $m_1, \dots, m_{n+1} \in \mathbb{Z}$. Tenemos que, si escribimos $w = x_{i_1}^{m_1} w_0$ y v es cualquier palabra

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (wv) = \frac{\partial}{\partial x_j} (x_{i_1}^{m_1} \cdots x_{i_{n+1}}^{m_{n+1}} v) = \frac{\partial}{\partial x_j} (x_{i_1}^{m_1} w_0 v) = \frac{\partial}{\partial x_j} x_{i_1}^{m_1} + x_{i_1}^{m_1} \frac{\partial}{\partial x_j} w_0 v,$$

por la hipótesis inductiva la última igualdad queda

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_j} x_{i_1}^{m_1} + x_{i_1}^{m_1} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j} w_0 \right) \tau(v) + w_0 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} v \right) \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_j} x_{i_1}^{m_1} + x_{i_1}^{m_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} w_0 \right) \right) + x_{i_1}^{m_1} w_0 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} v \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} x_{i_1}^{m_1} w_0 + x_{i_1}^{m_1} w_0 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} v \right). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (wv) = \frac{\partial}{\partial x_j} w + w \frac{\partial}{\partial x_j} v.$$

Como $\mathbb{Z}F$ es un F -módulo libre, con F como base, entonces existe una única extensión a un \mathbb{Z} -homomorfismo

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathbb{Z}F \rightarrow \mathbb{Z}F.$$

Ahora veamos que esta extensión es una derivada en $\mathbb{Z}F$, para ello basta verificarlo para los elementos de la base, pero esto es claro, pues $\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathbb{Z}F \rightarrow \mathbb{Z}F$ es una extensión de $\frac{\partial}{\partial x_j} : F \rightarrow \mathbb{Z}F$.

■

2.2 Matriz de Alexander y polinomio de Alexander

Usando el cálculo libre daremos la definición clásica de matriz de Alexander y veremos una forma alternativa de calcular la matriz de Alexander usando la presentación de la abelianización del grupo de un enlace.

Sea $G = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_{n-1} \rangle$ la presentación de Wirtinger de un enlace no separable. Sea F un grupo libre en $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ y R la clausura normal de $\{r_1, \dots, r_{n-1}\} \subset F$. Consideremos el homomorfismo canónico y el abelianizador

$$\begin{aligned} \gamma : F &\rightarrow F/R \simeq G, \\ a : G &\rightarrow G/G' = H. \end{aligned}$$

Entonces existen extensiones únicas tales que se tiene la siguiente composición

$$\mathbb{Z}F \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_j}} \mathbb{Z}F \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}G \xrightarrow{a} \mathbb{Z}H.$$

La matriz de Alexander de G se define como $[a_{ij}]$ donde cada $a_{ij} = a \circ \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x_j} r_i \right)$.

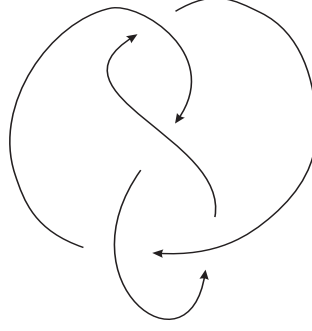


Figura 2-1:

Ejemplo 2.2.1 Consideremos el nudo del ocho K , de la Figura 2-1. Se tiene que

$$\pi_1(K) = \langle x, y \mid yx^{-1}yxy^{-1} = x^{-1}yxy^{-1}x \rangle.$$

Entonces la matriz de Alexander tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$$

Note que la relación $rs^{-1} = 1$ equivale a $r = s$ así, por (2.3) $\frac{\partial}{\partial x_j}(rs^{-1}) = \frac{\partial r}{\partial x_j} - rs^{-1}\frac{\partial s}{\partial x_j} = 0$, pero $\gamma(rs^{-1}) = 1$, entonces $(a \circ \gamma \circ \frac{\partial}{\partial x})(rs^{-1}) = (a \circ \gamma \circ \frac{\partial}{\partial x})(r) - (a \circ \gamma \circ \frac{\partial}{\partial x})(s)$. Escribimos $(a \circ \gamma)(x) = (a \circ \gamma)(y) = t$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left(a \circ \gamma \circ \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(yx^{-1}yxy^{-1} (x^{-1}yxy^{-1}x)^{-1} \right) \\ &= (a \circ \gamma) \left(\frac{\partial}{\partial x} yx^{-1}yxy^{-1} \right) - (a \circ \gamma) \left(\frac{\partial}{\partial x} x^{-1}yxy^{-1}x \right) \\ &= (a \circ \gamma) (-yx^{-1} + yx^{-1}y) - (a \circ \gamma) (-x^{-1} + x^{-1}y + x^{-1}yxy^{-1}) \\ &= 1 + t + t^{-1} - 1 - 1 = t + t^{-1} - 3, \\ a_{12} &= \left(a \circ \gamma \circ \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(yx^{-1}yxy^{-1} (x^{-1}yxy^{-1}x)^{-1} \right) \\ &= (a \circ \gamma) \left(\frac{\partial}{\partial y} yx^{-1}yxy^{-1} \right) - (a \circ \gamma) \left(\frac{\partial}{\partial y} x^{-1}yxy^{-1}x \right) \\ &= (a \circ \gamma) (1 + yx^{-1} - yx^{-1}yxy^{-1}) - (a \circ \gamma) (x^{-1} - x^{-1}yxy^{-1}) \\ &= 1 + 1 - t - t^{-1} + 1 = 3 - t - t^{-1}. \end{aligned}$$

Obtenemos que

$$A = \begin{bmatrix} t + t^{-1} - 3 & 3 - t - t^{-1} \end{bmatrix}.$$

En [9] se prueba que diferente ordenamiento de las relaciones nos da matrices equivalentes, pues estas pueden diferir por permutaciones de columnas o filas, o una de ellas tenga una fila de más y ésta sea de ceros, o que tenga alguna fila (columna) que es combinación lineal de las otras filas (columnas) o una de ellas es una matriz diagonal por bloques, donde el primer bloque es la otra matriz y el otro bloque es la matriz identidad.

Una manera diferente de calcular la matriz de Alexander es encontrar una presentación para G'/G'' , visto como $\mathbb{Z}H$ -módulo, donde $H = G/G'$. Sea K un enlace no separable y consideremos a $G = \langle t, y_2, \dots, y_n \mid s_1, \dots, s_{n-1} \rangle$, con $y_2, \dots, y_n \in G'$ y t un meridiano del grupo de K . Como $G/G' \simeq \mathbb{Z}$, podemos ver a $a : G \rightarrow \mathbb{Z}$ como el homomorfismo canónico, entonces $\ker a = G'$. Sea $S^3 \setminus K$ el complemento del nudo K y sea $p_\infty : C_\infty \rightarrow S^3 \setminus K$ el cubrimiento regular, cíclico infinito de $S^3 \setminus K$. Este cumple $(p_\infty)_*(\pi C_\infty) = G'$ y por la conexidad, podemos tomar como punto base algún vértice de C_∞ . Notemos que $G'/G'' \simeq H_1(C_\infty)$. En efecto, como G'/G'' es abeliano, podemos dotarlo de estructura de $\mathbb{Z}H$ -módulo mediante

$$\nu \cdot a = \left(\sum \nu_\alpha t^\alpha \right) \cdot a = \sum \nu_\alpha t^\alpha a t^{-\alpha},$$

para todo $a \in G'/G''$ y $\nu \in \mathbb{Z}H$, pues

$$\begin{aligned} \nu \cdot (a + b) &= \left(\sum \nu_\alpha t^\alpha \right) (a + b) \\ &= \sum \nu_\alpha t^\alpha (a + b) t^{-\alpha} = \nu \cdot a + \nu \cdot b, \\ (\nu + \mu) \cdot a &= \left(\sum \nu_\alpha t^\alpha + \sum \mu_\alpha t^\alpha \right) \cdot a \\ &= \left(\sum (\nu_\alpha + \mu_\alpha) t^\alpha \right) \cdot a = \sum (\nu_\alpha + \mu_\alpha) t^\alpha a t^{-\alpha} = \nu \cdot a + \mu \cdot a, \\ (\nu\mu) \cdot a &= \left(\sum \nu_\alpha t^\alpha \sum \mu_\alpha t^\alpha \right) \cdot a \\ &= \left(\sum \sum \nu_\alpha \mu_\alpha t^{2\alpha} \right) \cdot a = \sum \sum \nu_\alpha \mu_\alpha t^{2\alpha} a t^{-2\alpha} = \nu \cdot (\mu \cdot a), \end{aligned}$$

para todo $a \in G'/G''$ y $\nu \in \mathbb{Z}H$.

Recordemos que C_n es la cubierta finita y C_∞ es la cubierta infinita, construidas en el Capítulo 1. Denotamos por $H_m(S^3 \setminus K)$ el m -ésimo grupo de homología del espacio $S^3 \setminus K$. Como el grupo de las transformaciones de cubierta C_∞, \tilde{H} , es cíclico infinito entonces $\tilde{H} \simeq \mathbb{Z} \simeq H = G/G'$ y así podemos dotar a $H_1(C_\infty)$ de estructura de $\mathbb{Z}H$ -módulo mediante

$$\nu \cdot a = \left(\sum \nu_\alpha t^\alpha \right) \cdot a = \sum \nu_\alpha a \circ t^\alpha,$$

para todo $a \in H_1(C_\infty)$ y $\nu \in \mathbb{Z}H$, donde $t : C_\infty \rightarrow C_\infty$ es el generador del grupo de transfor-

maciones del cubrimiento, $\langle t \rangle = \tilde{H}$. En efecto

$$\begin{aligned}
\nu \cdot (a + b) &= \left(\sum \nu_\alpha t^\alpha \right) (a + b) \\
&= \sum \nu_\alpha (a + b) \circ t^\alpha = \nu \cdot a + \nu \cdot b, \\
(\nu + \mu) \cdot a &= \left(\sum \nu_\alpha t^\alpha + \sum \mu_\alpha t^\alpha \right) \cdot a \\
&= \left(\sum (\nu_\alpha + \mu_\alpha) t^\alpha \right) \cdot a = \sum (\nu_\alpha + \mu_\alpha) a \circ t^\alpha = \nu \cdot a + \mu \cdot a, \\
(\nu\mu) \cdot a &= \left(\sum \nu_\alpha t^\alpha \sum \mu_\alpha t^\alpha \right) \cdot a \\
&= \left(\sum \sum \nu_\alpha \mu_\alpha t^{2\alpha} \right) \cdot a = \sum \sum \nu_\alpha \mu_\alpha a \circ t^{2\alpha} = \nu \cdot (\mu \cdot a).
\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene el $\mathbb{Z}H$ -epimorfismo

$$\begin{aligned}
\varphi : G' &\rightarrow H_1(C_\infty) \\
g &\mapsto [(p_n)_*(x)]
\end{aligned}$$

donde $(p_\infty)_*(x) = g$. Se tiene que $\ker \varphi = G''$. En efecto, si $a \in G''$ equivale a que $a = ghg^{-1}h^{-1}$ y así $\varphi(a) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1}\varphi(h)^{-1} = e$.

Luego

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi} : G'/G'' &\rightarrow H_1(C_\infty) \\
g &\mapsto \bar{\varphi}(g)
\end{aligned}$$

Es un $\mathbb{Z}H$ -isomorfismo.

Sea $\beta = \varphi(\{y_2, \dots, y_n\}) = \{\hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n\}$. Los elementos de β están en correspondencia 1-1 con los generadores de G' , pues si $\hat{x} = \varphi(y_i) = \varphi(y_j)$, con $i \neq j$, entonces $\bar{y}_i = \bar{y}_j$, es decir, $y_i y_j^{-1} = e$ para $i \neq j$ por ser una 1-frontera en C_∞ , como las 1-cadenas forman un grupo abeliano libre, entonces éste es un $\mathbb{Z}H$ -módulo libre. Puesto que los 1-ciclos son un subgrupo de las 1-cadenas y puesto que β genera los 1-ciclos y como $\mathbb{Z}H$ -módulo, entonces los 1-ciclos en C_∞ son un $\mathbb{Z}H$ -módulo libre con β una $\mathbb{Z}H$ -base libre.

Cada relación s_j corresponde a un 1-ciclo de $S^3 \setminus K$, luego levantando cada relación s_j de $S^3 \setminus K$ a una 1-frontera ∂s_j de C_∞ obtenemos una presentación para G'/G'' , esto lo hacemos como sigue:

Si $s_j = y_{i_1}$, entonces $\partial s_j = \hat{x}_{i_1}$. Si $s_j = y_{i_1}^{-1}$, entonces $\partial s_j = (a(y_{i_1}^{-1})) \hat{x}_{i_1}$. Si $s_j = y_{i_1} y_{i_2}$, $\partial s_j = \hat{x}_{i_1} + (a(y_{i_1})) \hat{x}_{i_2}$. Si $s_j = y_{i_1} y_{i_2}^{-1}$, $\partial s_j = \hat{x}_{i_1} - (a(y_{i_1} y_{i_2}^{-1})) \hat{x}_{i_2}$. Si $s_j = w y_i$, $\partial s_j = A + (a(w)) \hat{x}_i$. Si $s_j = w y_i^{-1}$, $\partial s_j = A - (a(w y_i^{-1})) \hat{x}_i$, donde A se calcula de ∂s_j tomando $s_j = w$. Tenemos entonces que

$$\partial s_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \hat{x}_i, a_{ij} \in \mathbb{Z}H.$$

Por tanto la matriz $A = [a_{ij}]$ con la columna correspondiente a $t = y_1$ removida es una matriz de presentación para G'/G'' . Más aún A coincide con la matriz de Alexander.

Corolario 2.2.1 *Cada A_{ij} , menor $(n-1) \times (n-1)$ de la matriz de Alexander de una presentación*

$$\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$$

es una matriz de presentación de $H_1(C_\infty)$.

Definición 2.2.1 *Sea $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Definimos el k -ésimo polinomio de Alexander Δ_k de una presentación de $G = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ del grupo de un enlace como el máximo común divisor de los determinantes de todas las submatrices $(n-k) \times (n-k)$ de la matriz de Alexander de $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$. Si $m < n-k$ o $n-k \leq 0$ definimos $\Delta_k = 0$ ó $\Delta_k = 1$, respectivamente.*

De ahora en adelante escribimos $\Delta_1 = \Delta$. Consideremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.2.2 *Consideremos el nudo trébol K , cuyo grupo tiene presentación de Wirtinger*

$$G = \langle t, y_2, y_3 \mid t^{-1}y_3ty_2^{-1}y_3^{-1}, t^{-1}y_3^{-1}y_2^{-1}ty_2 \rangle,$$

donde $t = y_1$ es un meridiano y $y_2, y_3 \in G'$. Con esto se sigue que $G/G' = \langle t \rangle$ y $\varphi(\{y_2, y_3\}) = \{\hat{x}_2, \hat{x}_3\}$ es una base para $H_1(C_\infty)$ como $\mathbb{Z}H$ -módulo. Ahora bien, levantamos las relaciones $s_1 = t^{-1}y_3ty_2^{-1}y_3^{-1}$ y $s_2 = t^{-1}y_3^{-1}y_2^{-1}ty_2$ y obtenemos que

$$\begin{aligned} \partial s_1 &= (a(y_1^{-1}) + a(y_1^{-1}y_3)) \hat{x}_1 - a(y_1^{-1}y_3y_1y_2^{-1}) \hat{x}_2 \\ &\quad + (a(y_1^{-1}) - a(y_1^{-1}y_3y_1y_2^{-1}y_3^{-1})) \hat{x}_3 \\ &= (a(t^{-1}) + a(t^{-1}y_3)) \hat{x}_1 - a(t^{-1}y_3ty_2^{-1}) \hat{x}_2 \\ &\quad + (a(t^{-1}) - a(t^{-1}y_3ty_2^{-1}y_3^{-1})) \hat{x}_3, \\ \partial s_2 &= 2a(y_1^{-1}y_3^{-1}y_2^{-1}) \hat{x}_1 + (a(y_1^{-1}y_3^{-1}y_2^{-1}y_1) - a(y_1^{-1}y_3^{-1}y_2^{-1})) \hat{x}_2 \\ &\quad - a(y_1^{-1}y_3^{-1}) \hat{x}_3 \\ &= 2a(t^{-1}y_3^{-1}y_2^{-1}) \hat{x}_1 + (a(t^{-1}y_3^{-1}y_2^{-1}t) - a(t^{-1}y_3^{-1}y_2^{-1})) \hat{x}_2 \\ &\quad - a(t^{-1}y_3^{-1}) \hat{x}_3. \end{aligned}$$

Como $a : G \rightarrow G/G'$ es el homomorfismo canónico, entonces $a(y_2) = a(y_3) = 1$ y $a(t) = t$. Luego la matriz de presentación de $H_1(C_\infty)$ es

$$A = \begin{bmatrix} -1 & t^{-1} - 1 \\ 1 - t^{-1} & -t^{-1} \end{bmatrix}$$

y por tanto $\Delta_1(t) = t^{-2} - t^{-1} + 1$.

Ejemplo 2.2.3 *Se sigue que los k -ésimos polinomios de Alexander para el nudo del Ejemplo 2.2.1, son $\Delta_1(t) = t + t^{-1} - 3$ y $\Delta_k = 1$ para $k \geq 2$. Si normalizamos $t + t^{-1} - 3$, tenemos que $\Delta_1(t) = t^2 - 3t + 1$.*

Recordemos algunas de las propiedades más importantes del polinomio de Alexander, cuyas pruebas se encuentran en [20]. Por ejemplo, $\Delta(1) = 1$, además el polinomio nos da información acerca de $\pi_1(L)$; $\Delta(t) = 1$ si y sólo si G'/G'' es trivial, G' no es finitamente generado si $\Delta(0) \neq 1$, $\Delta(t)$ es invariante bajo unidades de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, es decir, $\Delta(t) = t^\lambda \Delta(t^{-1})$. $\Delta_k, k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ es el generador del ideal principal más pequeño que contiene al ideal generado por todos los determinantes de los menores $(n - k) \times (n - k)$ de la matriz de Alexander.

Capítulo 3

Representaciones de grupos de enlaces

En este capítulo estudiaremos diferentes clases de representación del grupo de un enlace. En general, un homomorfismo de grupos $G \rightarrow T$ se llama una *representación del grupo* G . Cuando se tienen propiedades adicionales en los grupos se acostumbra decirlo explícitamente, como por ejemplo representación metabeliana, si el grupo T lo es.

Sea F un campo, V un F -espacio vectorial de dimensión finita. Una *representación lineal* o simplemente una representación ρ es un homomorfismo $\rho : G \rightarrow GL(V)$. Si la dimensión de V es n , se sabe que $V \simeq F^n$ además $GL(V) \simeq GL_n(F)$. Diremos que dos representaciones ρ, π son *equivalentes* si existe una transformación lineal invertible $T : V \rightarrow V$ tal que $T\pi(g) = \rho(g)T$ para todo $g \in G$. Si $T(x) = axa^{-1}$ para algún $a \in V$, decimos que ρ, π son *simplemente equivalentes*. Decimos que una representación ρ de G en $GL(V)$ es *irreducible* si los únicos subespacios de V que son invariantes bajo ρ son $\{0\}$ y V , y diremos que ρ es *absolutamente irreducible* si ρ es irreducible como representación de G en $(F^c)^n$ donde F^c es la clausura algebraica de F . En este tipo de representaciones hay un concepto de gran utilidad, éste es el *carácter asociado a una representación*, puesto que el carácter juega un papel importante en la teoría de representaciones, estudiaremos varias de sus propiedades en este capítulo.

Sea $G = \langle x_1, \dots, x_n \mid x_i^{-1}x_k^\varepsilon x_j x_k^{-\varepsilon}, i = 1, \dots, n-1 \rangle$ la presentación de Wirtinger del grupo de un nudo. Mediante la transformación $y_i = x_i x_j^{-1} = x_k^\varepsilon x_j x_k^{-\varepsilon} x_j^{-1} \in [G, G]$ se tiene que $G = \langle t, y_2, \dots, y_n \mid r_1, \dots, r_{n-1} \rangle$, donde $y_i \in [G, G]$ para $i = 2, \dots, n$ y $t = x_1$ es un meridiano. Ahora bien, sea $K = \langle t \rangle$ y $G' = [G, G]$, claramente $K \cap G' = 0$. Definimos el homomorfismo $\theta : K \rightarrow Aut(G')$ tal que $\theta_{t^\alpha}(g) = t^\alpha g t^{-\alpha}$, para todo $g \in G', t^\alpha \in K$. Entonces θ realiza a G como el producto semidirecto $K \rtimes G' = G$, con la operación $(t^\alpha, g)(t^\beta, h) = (t^{\alpha+\beta}, \theta_{t^\beta}(g)h)$.

3.1 Representaciones Metabelianas

Diremos que un grupo H es k -metabeliano si el subgrupo $H^{(k)} = 0$, donde $H^{(0)} = H, H' = H^{(1)} = [H, H], H^{(k)} = [H^{(k-1)}, H^{(k-1)}]$. Llamaremos a los grupos 2-metabelianos simplemente metabelianos. Para una representación sobreyectiva de G en un grupo metabeliano H , $\varphi : G \rightarrow H$, claramente $\varphi(G') = H'$ y $\varphi(K) = \langle t \rangle$, note que escribimos $\varphi(t)$ como t para simplificar la notación. Por otro lado, sea $\phi : K \rtimes G' \rightarrow \varphi(K) \rtimes H'$, definido como $\phi(t^\alpha, g) = (t^\alpha, \varphi(1, g))$,

entonces ϕ es un homomorfismo sobreyectivo. Mas aún,

$$\begin{aligned}\ker \phi &= \{(t^\alpha, g) \mid \phi(t^\alpha, g) = (e, e)\} = \{(t^\alpha, g) \mid (t^\alpha, \varphi(e, g)) = (e, e)\} \\ &= \{(t^\alpha, g) \mid (\varphi(t^\alpha, e), \varphi(e, g)) = (e, e)\} \simeq \{(t^\alpha, g) \mid \varphi((t^\alpha, e)(e, g)) = e\} \\ &= \{(t^\alpha, g) \mid \varphi(t^\alpha, g) = e\} = \ker \varphi,\end{aligned}$$

por tanto $H = \varphi(K) \rtimes H' = \langle t \rangle \rtimes \varphi(G')$.

Por otro lado, como H es metabeliano, H' es un grupo abeliano y así, podemos considerar a $\varphi(G')$ como un $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -módulo, bajo la operación

$$\left(\sum \alpha_i t^{\alpha_i}\right) \cdot x = \sum \alpha_i \varphi(t^{\alpha_i} g t^{-\alpha_i}) = \sum (\varphi(t^{\alpha_i} g t^{-\alpha_i}) + \dots + \varphi(t^{\alpha_i} g t^{-\alpha_i})),$$

la suma de α_i -veces $\varphi(t^{\alpha_i} g t^{-\alpha_i})$, $\varphi(g) = x$, para $g \in G'$. Basta probarlo para la base de $\mathbb{Z}\langle t \rangle$, sean $x, y \in H'$, se sigue que $\varphi(g) = x$, $\varphi(h) = y$, con $g, h \in G'$,

$$\begin{aligned}(t^\alpha t^\beta) \cdot x &= (t^{\alpha+\beta}) \cdot x = \varphi(t^{\alpha+\beta} g t^{-\alpha-\beta}) = t^\alpha \cdot (\varphi(t^\beta g t^{-\beta})) = t^\alpha \cdot (t^\beta \cdot x), \\ t^\alpha \cdot (x + y) &= t^\alpha \cdot \varphi((gh)) = \varphi(t^\alpha g h t^{-\alpha}) = \varphi((t^\alpha g t^{-\alpha})(t^\alpha h t^{-\alpha})) \\ &= \varphi(t^\alpha g t^{-\alpha}) + \varphi(t^\alpha h t^{-\alpha}) = t^\alpha \cdot x + t^\alpha \cdot y, \\ (t^\alpha + t^\beta) \cdot x &= \varphi(t^\alpha g t^{-\alpha}) + \varphi(t^\beta g t^{-\beta}), \\ e x &= \varphi(e g) = \varphi(g) = x, \text{ donde } e \text{ denota la identidad en } \mathbb{Z}\langle t \rangle \text{ y } K.\end{aligned}$$

Lema 3.1.1 $H' = (t - id) \cdot H'$, donde id denota la identidad.

Prueba. Si $x \in (t - id) H'$, entonces $x = t \cdot h_1 - h_1 = \varphi(t g_1 t^{-1}) + \varphi(g_1^{-1}) = \varphi(t g_1 t^{-1} g_1^{-1}) = \varphi(g) \in H'$, donde $h_1 = \varphi(g_1)$ para algún $g_1 \in G'$. Finalmente, como H' es generado por $(t^\alpha a)(t^\beta b)(t^\alpha a)^{-1}(t^\beta b)^{-1}$, donde $t^\alpha a, t^\beta b \in H$ y escribiendo $\varphi(g) = a, \varphi(h) = b, \gamma = -\alpha - \beta$, entonces

$$\begin{aligned}(t^\alpha a)(t^\beta b)(t^\alpha a)^{-1}(t^\beta b)^{-1} &= \varphi\left((t^\alpha, g)(t^\beta, h)(t^{-\alpha}, \theta_{t^{-\alpha}}(g^{-1}))(t^{-\beta}, \theta_{t^{-\beta}}(h^{-1}))\right) \\ &= \varphi(e, \theta_{t^{-\alpha}}(g) \theta_{t^{-\alpha-\beta}}(h) \theta_{t^{-\alpha-\beta}}(g^{-1}) \theta_{t^{-\beta}}(h^{-1})) \\ &= \varphi(\theta_{t^{-\alpha}}(g) \theta_{t^{-\alpha-\beta}}(h) \theta_{t^{-\alpha-\beta}}(g^{-1}) \theta_{t^{-\beta}}(h^{-1})) \\ &= \varphi(\theta_{t^{-\alpha}}(g)) + \varphi(\theta_{t^{-\alpha-\beta}}(h)) + \varphi(\theta_{t^{-\alpha-\beta}}(g^{-1})) + \varphi(\theta_{t^{-\beta}}(h^{-1})) \\ &= \varphi(t^\gamma s t^{-\gamma} s^{-1}) = t^\gamma \cdot y - y.\end{aligned}$$

■

Notemos que, si $x_i \in G$ es un generador en la presentación de Wirtinger, entonces dado un $N \triangleright G$ tal que $\langle t \rangle \subset N$ se tiene de las relaciones, que $x_i = w t w^{-1}$ donde w es una palabra en

los generadores x_j . Por tanto, para la clausura normal, $\langle \bar{t} \rangle = G$ y así $\langle \varphi(\bar{t}) \rangle = \varphi(K) \rtimes H'$.

Proposición 3.1.2 *Sea H un grupo metabeliano y sea $\varphi : G \rightarrow H$ una representación sobreyectiva para un grupo de un nudo y t un meridiano. Entonces $t - id : G' \rightarrow G'$ es un isomorfismo.*

Prueba. Por el lema anterior $t - id$ es sobreyectiva. Sean $x, y \in H'$. Veamos que es un homomorfismo, $(t - id)(x + y) = t \cdot (x + y) - (x + y) = (t \cdot x - x) + (t \cdot y - y) = (t - id)(x) + (t - id)(y)$

Si $h \in H'$, es tal que $(t - id)(h) = 0$, entonces $t \cdot h = h$ pero $t \neq e$ así, $h = 0$. ■

En adelante denotamos por $+_{H_m}$ la operación del grupo de la m -ésima homología.

Proposición 3.1.3 *Sea H un grupo metabeliano y sea $\varphi : G \rightarrow \langle t \rangle \rtimes H'$ una representación sobreyectiva. Entonces φ induce una representación $\beta : G \rightarrow \langle t \rangle \rtimes H_1(C_\infty)$ ó $\beta : G \rightarrow \langle t \rangle \rtimes H_1(\hat{C}_n)$ si $\langle t \rangle$ es finito.*

Prueba. Puesto que $\varphi(G') = H'$ es abeliano, $\ker \varphi = G''$ luego φ induce un isomorfismo, $\bar{\varphi} : \langle t \rangle \rtimes (G'/G'') \rightarrow \langle \varphi(t) \rangle \rtimes H'$, pero $G'/G'' \simeq H_1(C_\infty)$ es el $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -módulo de Alexander (bajo la operación $t \cdot u, u \in H_1(C_\infty)$ como se definió antes), donde C_∞ es recubrimiento cíclico infinito del nudo. Así podemos definir una representación $\beta : G \rightarrow \langle \varphi(t) \rangle \rtimes H_1(C_\infty)$.

De manera análoga, si $\langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}_n$, entonces $\ker \varphi = G'_n$, donde $G_n \simeq n\mathbb{Z} \triangleright G'$, además $G'/G'_n \simeq H_1(\hat{C}_n)$ la primera homología del cubrimiento cíclico ramificado de n -hojas del nudo. ■

Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Definimos la función $\delta_\alpha : G \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$ como sigue, si $x_i \in G$ es un generador, entonces

$$\begin{aligned} \delta_\alpha(x_i) : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \delta_\alpha x_i(z) = \frac{\alpha^{1/2}(z - z_i) - \alpha^{-1/2} z_i}{\alpha^{-1/2}} \end{aligned}$$

Proposición 3.1.4 $\delta_\alpha : G \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$ es una representación no trivial si y sólo si α es una raíz del polinomio de Alexander $\Delta_1(t)$.

Prueba. Sea $G = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_{n-1} \rangle$ la presentación de Wirtinger. Para una relación $x_k^{-1} x_i x_k x_{i+1}^{-1} = 1$, si hacemos $u_j = \beta(x_k x_1^{-1}), 1 \leq j \leq n$, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \beta((x_1^{-1}(x_1 x_k^{-1}))(x_i(x_1^{-1} x_1))(x_k x_1^{-1})(x_1 x_{i+1}^{-1})) \\ &= \beta(x_1^{-1}(x_1 x_k^{-1})) +_{H_1} \beta(x_i(x_1^{-1} x_1)) +_{H_1} \beta(x_k x_1^{-1}) +_{H_1} \beta(x_1 x_{i+1}^{-1}) \\ &= -t u_k +_{H_1} t u_i +_{H_1} u_k -_{H_1} u_i, \end{aligned} \tag{6}$$

un sistema de $(n - 1) \times (n - 1)$ ecuaciones, pero este sistema forma una matriz de presentación para $H_1(C_\infty)$. Por tanto, del Corolario 2.2.1, el determinante de este sistema es el polinomio de Alexander $\Delta_1(t)$. Sea α una raíz de $\Delta_1(t)$, reemplacemos $t = \alpha$, en el sistema de ecuaciones, entonces tenemos soluciones no triviales para $z_i = u_i \in \mathbb{C}$. Definimos para cada $x_i \in G$

$$\begin{aligned} \delta_\alpha x_i : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \delta_\alpha x_i(z) = \frac{\alpha^{1/2}(z-z_i) - \alpha^{-1/2}z_i}{\alpha^{-1/2}} \end{aligned}$$

Claramente $\delta_\alpha x_i \in \hat{\mathbb{C}}$. Por tanto se tiene la representación

$$\begin{aligned} \delta_\alpha : G &\rightarrow SL_2(\mathbb{C}) \\ x_i &\mapsto \delta_\alpha x_i = \begin{bmatrix} \alpha^{1/2} & -z_i \left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}} \right) \\ 0 & \alpha^{-1/2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

Ejemplo 3.1.1 Sea L el nudo del ocho de la Figura 2-1 y sea

$$G = \langle x_1, \dots, x_4 \mid x_2^{-1}x_4x_2x_1^{-1}, x_4^{-1}x_2x_4x_3^{-1}, x_1x_3x_1^{-1}x_4^{-1} \rangle$$

una presentación de Wirtinger de su grupo. Sabemos que el polinomio de Alexander es $\Delta_1(t) = t^2 - 3t + 1$. De las relaciones obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} -tu_2 + tu_4 + u_2 &= 0, \\ -tu_4 + tu_2 + u_4 - u_3 &= 0, \\ -tu_4 + u_3 &= 0. \end{aligned}$$

Una solución para el sistema es:

$$\begin{aligned} u_3 &= (t - 1)u_2, \\ u_4 &= \frac{t - 1}{t}u_2. \end{aligned}$$

Para que la solución sea no trivial, t debe ser una raíz de $\Delta_1(t)$, ya que se tiene

$$\begin{aligned} u_2 \left(-\frac{(t-1)^2}{t} + t + -(t-1) \right) &= 0, \\ u_2 (t^2 - 3t + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Tomemos $u_2 = 1$, así $u_3 = \alpha - 1$ y $u_4 = \frac{\alpha-1}{\alpha}$ donde $\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Definimos la representación

$$\delta_\alpha : G \rightarrow \hat{\mathbb{C}},$$

tal que para todo $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\delta_\alpha(x_1)(z) &= \alpha z, \\ \delta_\alpha(x_2)(z) &= \alpha(z-1) + 1 = \alpha z + (1-\alpha), \\ \delta_\alpha(x_3)(z) &= \alpha(z-\alpha+1) + \alpha - 1 = \alpha z - (\alpha^2 - 2\alpha + 1), \\ \delta_\alpha(x_4)(z) &= \alpha\left(z - \frac{\alpha-1}{\alpha}\right) + \frac{\alpha-1}{\alpha} = \alpha z - \left(\frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{\alpha}\right).\end{aligned}$$

Y así obtenemos una representación en $SL(2, \mathbb{C})$

$$\delta_\alpha : G \rightarrow SL(2, \mathbb{C}),$$

tal que

$$\begin{aligned}\delta_\alpha(x_1) &= \begin{bmatrix} \alpha^{1/2} & 0 \\ 0 & \alpha^{-1/2} \end{bmatrix}, & \delta_\alpha(x_2) &= \begin{bmatrix} \alpha^{1/2} & -a^{-1/2}(\alpha-1) \\ 0 & \alpha^{-1/2} \end{bmatrix} \\ \delta_\alpha(x_3) &= \begin{bmatrix} \alpha^{1/2} & -a^{-1/2}(\alpha^2 - 2\alpha + 1) \\ 0 & \alpha^{-1/2} \end{bmatrix}, & \delta_\alpha(x_4) &= \begin{bmatrix} \alpha^{1/2} & -\alpha^{-3/2}(\alpha^2 - 2\alpha + 1) \\ 0 & \alpha^{-1/2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

3.1.1 Representaciones metacíclicas

Como un caso particular de grupos metabelianos tenemos los grupos metacíclicos, que se han estudiado más en detalle. A un grupo H con presentación $\langle x, y \mid x^q, y^p, xyx^{-1}y^{-k} \rangle$, $k > 1$, $k^q \equiv 1 \pmod{p}$, $(k-1, pq) = 1$, lo llamaremos *metacíclico*. Notemos que $H' = \langle y \rangle$, pues $y^{k-1} = xyx^{-1}y^{-1} \in H'$ y así H sería un grupo metabeliano. Además $H/H' \simeq \langle x \mid x^q \rangle \simeq \mathbb{Z}_q$. Ahora bien, si H es un producto semidirecto de un grupo cíclico con su conmutador entonces $H = \langle t \rangle \rtimes H' = \langle t \rangle \rtimes \langle y \rangle \simeq \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_p$.

Teorema 3.1.5 (Fox) *Sea $H = \langle x, y \mid x^q, y^p, xyx^{-1}y^{-k} \rangle$ un grupo metacíclico. Si $\Delta_1(k) \equiv 0 \pmod{p}$ entonces existe una representación de G en H .*

Prueba. Sea $G = \langle t, y_2, \dots, y_n \mid r_1, \dots, r_{n-1} \rangle$ donde $y_i \in [G, G]$, para $i = 2, \dots, n$ y $t = x_1$ es un meridiano.

Tenemos que $p \mid \Delta_1(k)$ además como $k^q \equiv 1 \pmod{p}$ entonces $(k, p) = 1$. Por otro lado, si $\sum_{i=1}^n p_{ij}(k) u_i$ describe la j -ésima fila de la matriz de Alexander, entonces el sistema de ecuaciones

que corresponde a $\Delta_1(k) \equiv 0 \pmod{p}$ es

$$\sum_{i=1}^n p_{ij}(k) u_i \equiv 0 \pmod{p}, j = 1, 2, \dots, n.$$

Sean $s_i, i = 1, \dots, n$ las soluciones de este sistema. Podemos definir la presentación

$$\varphi : G \rightarrow H$$

tal que $\varphi(t) = x$ y $\varphi(y_i) = y^{s_i}$, para cada $i = 1, \dots, n$. ■

3.2 Caracteres de Representaciones en $SL_2(\mathbb{C})$

El papel de los caracteres en la teoría de representación de grupos finitos es central, por lo que es natural estudiar caracteres en el marco de las representaciones de grupos de enlaces. Aunque en este caso la situación es mucho más compleja y se requiere hacer uso de herramientas matemáticas mucho más sofisticadas, pues ahora no podemos estudiar simplemente el comportamiento de los caracteres como conjunto, sino que se requiere estudiarlos desde el punto de vista de las variedades.

En esta sección estamos interesados en representaciones lineales en $SL_2(\mathbb{C})$ dada su importancia geométrica, algunos de los resultados se presentan en el caso $SL_2(K)$, para K un campo de característica cero.

El *carácter* de una representación ρ es la función $\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g))$. Así, representaciones equivalentes, tienen el mismo carácter pues $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Sea K un nudo y sea $G = \langle g_1, \dots, g_m \mid r_1, \dots, r_{m-1} \rangle$ una representación para el grupo de K . Entonces G es finitamente generado por g_1, \dots, g_m , definimos

$$\begin{aligned} R(G) &= \{(\rho(g_1), \dots, \rho(g_m)) \in \mathbb{C}^{4m} \mid \rho \text{ es una representación de } G \text{ en } SL_2(\mathbb{C})\} \\ &\subset SL_2(\mathbb{C}^m) \end{aligned}$$

la inclusión se sigue del hecho $\mathbb{C}^{4m} \simeq M_2(\mathbb{C}^m)$ y

$$(\rho(g_1), \dots, \rho(g_m)) = \rho(g_1) \oplus \dots \oplus \rho(g_m) = \begin{bmatrix} \rho(g_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \rho(g_m) \end{bmatrix}$$

es una matriz por bloques y cada bloque esta en $SL_2(\mathbb{C})$. $R(G)$ es un conjunto algebraico afín, pues cada $(\rho(g_1), \dots, \rho(g_m))$ satisface polinomios $r_i \in SL_2(\mathbb{C})[x_1, \dots, x_m]$. Dos representaciones ρ, π son *equivalentes*, si y sólo si existe $T \in SL_2(\mathbb{C})$ tal que $\rho(g_i) = T\pi(g_i)T^{-1}$ y esto

se cumple si y sólo si

$$(\rho(g_1), \dots, \rho(g_m)) = (T, \dots, T)(\pi(g_1), \dots, \pi(g_m))(T^{-1}, \dots, T^{-1}) = (\pi(g_1), \dots, \pi(g_m)).$$

Por tanto, existe una correspondencia 1-1 entre puntos de $R(G)$ y representaciones de G en $SL_2(\mathbb{C})$. Sean h_1, \dots, h_s otro conjunto de generadores para G y sea

$$R'(G) = \{(\rho(h_1), \dots, \rho(h_s)) \in \mathbb{C}^{4s} \mid \rho \text{ es una representación de } G \text{ en } SL_2(\mathbb{C})\}$$

Como la biyección $\phi : R(G) \rightarrow R'(G)$ tal que $\phi((\rho(g_1), \dots, \rho(g_m))) = (\rho(h_1), \dots, \rho(h_s))$ es un isomorfismo de conjuntos algebraicos, entonces $R(G)$ está bien definido salvo isomorfismos. Por esto identificaremos puntos de $R(G)$ con representaciones de G en $SL_2(\mathbb{C})$ y llamaremos a $R(G)$ el *espacio de representaciones* de G en $SL_2(\mathbb{C})$.

Una transformación de Möbius es una función de la forma, $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tal que $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ donde $ad-bc \neq 0$. Es fácil ver que el conjunto M de todas las transformaciones de Möbius forma un grupo con la composición de funciones. Además existe una correspondencia 1-1 entre M y $PGL_2(\mathbb{C})$. Mas aún, $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ y tomando $\lambda = (ad-dc)^{-1/2}$ se tiene $a'd' - b'c' = 1$, por tanto $M \simeq PSL_2(\mathbb{C})$.

En adelante usaremos varias definiciones y teoremas importantes de geometría algebraica, las cuales se encuentran en el Apéndice E.

Proposición 3.2.1 *Sea V una componente irreducible de $R(G)$. Entonces cualquier representación equivalente a una representación en V pertenece a V .*

Prueba. Como el producto de variedades afines es una variedad afín, se tiene que $V \times SL_2(\mathbb{C}) \subset SL_2(\mathbb{C}^{m+1})$ es una variedad afín. La función $f : V \times SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow R(G)$ tal que $f(y_1, \dots, y_m, \alpha) = (\alpha y_1 \alpha^{-1}, \dots, \alpha y_m \alpha^{-1})$ es una función regular, pues está definida con polinomios en sus coordenadas. El conjunto $clf(V \times SL_2(\mathbb{C})) \subset R(G)$ es una variedad, pues es la clausura de la imagen de una variedad, bajo una función regular. Entonces $clf(V \times SL_2(\mathbb{C}))$ debe caer en una componente irreducible V' de $R(G)$ y además $V = f(V \times \{I\}) \subset V'$, pero V es una componente irreducible de $R(G)$, luego $V = V'$. Por tanto $f(V \times SL_2(\mathbb{C})) \subset V$, y esto es equivalente a la afirmación de la proposición. ■

Lema 3.2.2 *Sea K un campo de característica cero y sea ρ una representación de G en $GL_2(K)$, cuya imagen no es abeliana. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. ρ es reducible.
2. ρ es reducible bajo K^c .

3. $\chi_\rho(a) = 2$ para todo $a \in G'$.

Prueba. $1 \Rightarrow 2$ es clara.

$2 \Rightarrow 3$: Entonces para todo $g \in G$, la matriz de $\rho(g)$ tiene la forma $\begin{bmatrix} A_g & 0 \\ H_g & B_g \end{bmatrix}$. El conmutador de dos matrices triangulares inferiores es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal. Por tanto $\chi_\rho(a) = 2$ si $a \in G'$.

$3 \Rightarrow 1$: Como ρ no es abeliano existe un $g \in G'$ tal que $\rho(g) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq I$ donde $a, b, c, d \in K$ y $a + d = 2$. Si $c \neq 0$, entonces para la transformación de Möbius $T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \neq I$ se tiene que ω es dejado fijo por T si y sólo si

$$\begin{aligned} \omega = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} &\Leftrightarrow c\omega^2 + (a - d)\omega + b = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{(d - a) \pm \sqrt{(a - d)^2 - 4cb}}{2c} \\ &= \frac{(d - a) \pm \sqrt{a^2 - 2ad + d^2 - 4cb}}{2c} = \frac{(d - a) \pm 2\sqrt{1 - ad - cb}}{2c}. \end{aligned}$$

Como $1 - ad = -cb$ entonces $\omega = \frac{(a-d) \pm 2\sqrt{-cb}}{2c}$ es invariante bajo T y también lo es $\bar{\omega}$ y cualquier múltiplo de ω . Por tanto $\rho(g)$ tiene un subespacio L de dimensión 1, invariante, esto es claro si $c = 0$. Supongamos ahora que existe $g' \in G'$ tal que $\rho(g')$ no es invariante bajo L . Entonces $\rho(g') \neq I$ y $\rho(g')$ tiene un subespacio L' de dimensión 1, invariante tal que $L \neq L'$. Luego $\rho(g'), \rho(g)$ son equivalentes a matrices triangulares, y podemos suponer que

$$\rho(g') = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $\rho(g'), \rho(g) \neq I$, $\alpha, \beta \neq 0$, Entonces $\text{tr}(g'g) = 2 + \alpha\beta \neq 2$ lo cual es una contradicción. ■

Corolario 3.2.3 Si K es un campo algebraicamente cerrado de característica cero, entonces una representación ρ de G en $SL_2(K)$ es reducible si y sólo si $\chi_\rho(g) = 2$ para todo $g \in G'$.

Prueba. Si $\rho(G)$ fuera abeliano una dirección es inmediata pues $\rho(g) = I$, para todo $g \in G'$. En la otra dirección, como K es algebraicamente cerrado, $\rho(G)$ tendría un subespacio invariante de dimensión 1. Si $\rho(G)$ no es abeliano, se sigue del lema anterior. ■

3.2.1 Curvas de representaciones

Sea C una curva algebraica afín (ver Apéndice E). Entonces existe una única (salvo equivalencia birracional) curva proyectiva \tilde{C} , cuyo campo de funciones es isomorfo al de C . Como cualquier

función racional de una curva suave a una variedad es regular, entonces cualquier función racional entre curvas afines $f : C \rightarrow D$ determina una función regular $\tilde{f} : \tilde{C} \rightarrow \tilde{D}$. De manera análoga, si \bar{V} es la clausura en \mathbb{P}^n de una variedad afín $V \subset \mathbb{C}^n$, una función racional $f : C \rightarrow V$ determina una función regular $\tilde{f} : \tilde{C} \rightarrow \bar{V}$.

Sea \bar{C} una completación proyectiva de C (ver Apéndice E), decimos que P es un *punto ideal* de \tilde{C} si $f(P) \in \bar{C} \setminus C$ donde $f : \tilde{C} \rightarrow \bar{C}$ es una función birracional. Sea $f : C \rightarrow D$ una función regular entre curvas afines, si P un punto ideal de \tilde{D} , entonces $\tilde{f}^{-1}(P)$ consiste de puntos ideales de \tilde{C} . Así, el conjunto de puntos ideales no depende de la completación proyectiva.

Sean $C = \{(\rho(g_1), \dots, \rho(g_m)) \mid f(\varphi_1(\rho(g_1), \dots, \rho(g_m)), \varphi_2(\rho(g_1), \dots, \rho(g_m))) = 0\} \subset R(G)$ una curva afín y $g \in G$. Sabemos que un punto $\rho = (\rho(g_1), \dots, \rho(g_m)) \in C \subset SL_2(\mathbb{C}^m)$ es una representación de G en $SL_2(\mathbb{C})$. Entonces, dado $g = g_1^{e_1} \cdots g_m^{e_m} \in G$ se tiene que cada punto es de la forma

$$\rho_g = \begin{bmatrix} D_{11}^\rho(g) & D_{12}^\rho(g) \\ D_{21}^\rho(g) & D_{22}^\rho(g) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1g}(\rho) & a_{2g}(\rho) \\ a_{3g}(\rho) & a_{4g}(\rho) \end{bmatrix}.$$

Donde las funciones $D_{ij}^\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$ se definen como la entrada (i, j) de la matriz ρ_g , estas funciones reciben el nombre de funciones coordenadas. Ahora bien, definimos $a_{kg} : C \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $a_{kg}(\rho) = D_{1,k}^\rho(g)$, si $k = 1, 2$, y $a_{kg}(\rho) = D_{2,k-2}^\rho(g)$, si $k = 3, 4$. Claramente estas funciones coordenadas están dadas por polinomios y por tanto son funciones regulares. Definimos la representación $\Psi : G \rightarrow SL_2(K(\tilde{C}))$ como

$$\Psi(g) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{1g} & \tilde{a}_{2g} \\ \tilde{a}_{3g} & \tilde{a}_{4g} \end{bmatrix}$$

donde los $\tilde{a}_k : G \rightarrow K(\tilde{C})$ están definidos como $\tilde{a}_k(g) = \tilde{a}_{kg} = [a_{kg}, C]$.

Lema 3.2.4 *Si C es una curva que contiene una representación irreducible, entonces Ψ es absolutamente irreducible.*

Prueba. Sea F la clausura algebraica de $K(\tilde{C})$. Si Ψ es reducible en F entonces $\text{tr}(\Psi(c)) = 2$, para todo $c \in G'$. Ahora bien, $\text{tr}(\Psi(c)) = \chi_\Psi(c) = \tilde{a}_{1c} + \tilde{a}_{4c} = 2$, luego para todo $\rho \in C$ y para todo $c \in G'$ se tiene $a_{1c}(\rho) + a_{4c}(\rho) = 2$, pero esto equivale a que la representación $\rho \in C$ cumple que $\chi_\rho(c) = 2$, para todo $c \in G'$. ■

Veremos ahora que los caracteres de presentaciones pueden identificarse con puntos de un conjunto algebraico. Sea $g \in G$ y sea $\tau_g : R(G) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tau_g(\rho) = \chi_\rho(g)$, entonces τ_g es una función regular, pues $\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g))$ es un polinomio. Sea T el anillo generado por todas la funciones $\tau_g, g \in G$.

Lema 3.2.5 *Sean $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$. Entonces $\text{tr}(A)\text{tr}(B) = \text{tr}(AB) + \text{tr}(AB^{-1})$*

Prueba. Sean $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ entonces

$$AB = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & * \\ * & a_3b_2 + a_4b_4 \end{bmatrix}, AB^{-1} = \begin{bmatrix} a_1b_4 - a_2b_3 & * \\ * & -a_3b_2 + a_4b_1 \end{bmatrix}$$

con esto

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) + \text{tr}(AB^{-1}) &= a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_4 + a_1b_4 - a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1 \\ &= (a_1b_1 + a_4b_4 + a_1b_4 + a_4b_1) + (a_2b_3 + a_3b_2 - a_2b_3 - a_3b_2) \\ &= (a_1 + a_4)(b_1 + b_4) \end{aligned}$$

■

Recordemos que el anillo T es generado por los caracteres de todas las representaciones de G .

Proposición 3.2.6 *El anillo T es finitamente generado.*

Prueba. Sea T_0 el anillo generado por todas las funciones de la forma $\tau_{g_{i_1} \dots g_{i_r}}$, donde $i_1, \dots, i_r \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $i_j \neq i_k$ si $k \neq j$. Por el lema anterior se tiene que $\tau_g \tau_h = \tau_{gh} + \tau_{gh^{-1}}$ para todo $g \in G$. Sea $g \in G$, tal que $g = g_{i_1}^{m_1} \dots g_{i_r}^{m_r}$, con $i_1, \dots, i_r \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $i_j \neq i_k$ si $k \neq j$, $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{Z}$. Sea $v = \sum_{j=1}^r K_j$, donde

$$K_j = \begin{cases} -m_j, & \text{si } m_j \leq 0 \\ m_j - 1, & \text{si } m_j \geq 1 \end{cases}$$

Probemos por inducción sobre v que $\tau_g \in T_0$. Si $v = 0$, como v es una suma de números no negativos, entonces $K_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, r$, luego todos los m_j son 0 ó 1, es decir, $g = g_{i_1} \dots g_{i_r}$ y por tanto $\tau_g \in T_0$. Si $v \neq 0$, podemos suponer que $m_r \neq 0, 1$, (podemos tomar $g' = g_{i_r} g g_{i_r}^{-1}$). Si $v < 0$ entonces $\tau_g = \tau_{g g_{i_r}^{-1}} \tau_{g_{i_r}^{-1}} - \tau_{g g_{i_r}^2}$, donde $\tau_{g_{i_r}^{-1}} \in T_0$, pero por hipótesis de inducción $\tau_{g g_{i_r}^2}, \tau_{g g_{i_r}^{-1}} \in T_0$, luego $\tau_g \in T_0$. De manera análoga se tiene si $v \geq 2$.

Ahora, sea $g \in G$ cualquiera, entonces $g = g_{i_1}^{m_1} \dots g_{i_r}^{m_r}$ donde $i_1, \dots, i_r \in \{1, 2, \dots, n\}$. Probemos por inducción sobre r que $\tau_g \in T_0$. Podemos asumir que $i_s = i_r$, para algún $s < r$, con esto definamos $V = g_{i_1}^{m_1} \dots g_{i_s}^{m_s}$, $W = g_{i_{s+1}}^{m_{s+1}} \dots g_{i_r}^{m_r}$. Entonces $\tau_g = \tau_V \tau_W - \tau_{VW^{-1}}$. Pero por hipótesis inductiva $\tau_V, \tau_W, \tau_{VW^{-1}} \in T_0$, luego $\tau_g \in T_0$. ■

Sean $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in G$ tales que $\tau_{\gamma_1}, \dots, \tau_{\gamma_n}$ generan a T . Sea

$$\begin{aligned} t : R(G) &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ \rho &\mapsto (\tau_{\gamma_1}(\rho), \dots, \tau_{\gamma_n}(\rho)) = (\chi_\rho(\gamma_1), \dots, \chi_\rho(\gamma_n)) \end{aligned}$$

Definimos $X(G) = t(R(G))$. Entonces

$$P \in X(G) \iff P = (\tau_{\gamma_1}(\rho), \dots, \tau_{\gamma_n}(\rho)) = (\chi_\rho(\gamma_1), \dots, \chi_\rho(\gamma_n)) \iff \chi_\rho$$

es el carácter de una representación $\rho : G \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$, es decir, existe una correspondencia 1-1 entre puntos de $X(G)$ y caracteres de representaciones de G . Llamaremos a $X(G)$ *el espacio de caracteres* del grupo G , y se tiene que $t(\rho) = \chi_\rho$ para $\rho \in R(G)$. En [6] se muestra que $X(G)$ es algebraicamente cerrado y por tanto es único salvo isomorfismos canónicos.

Recordemos que $\langle g, h \rangle$ es el grupo generado por g, h , ver Apéndice E.

Lema 3.2.7 *Si $\rho : G \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$ es una representación irreducible y $\rho(g) \neq \pm I$ para algún $g \in G$, entonces existe $h \in G$ tal que la restricción de ρ a $\langle g, h \rangle \leq G$ es irreducible y $\chi_\rho(h) \neq \pm 2$.*

Prueba. Si existe un único subespacio invariante L de $\rho(g)$ entonces existe $h \in G$ tal que L no es invariante bajo $\rho(h)$. Si existen dos subespacios invariantes L_1, L_0 de $\rho(g)$ entonces existen $h_0, h_1 \in G$ tales que L_0 y L_1 no son invariantes bajo $\rho(h_0)$ y $\rho(h_1)$ entonces tomamos $h = h_0 h_1$. De manera inductiva se sigue que $\rho|_{\langle g, h \rangle}$ es irreducible. Se sigue que $\rho(g)$ y $\rho(h)$ no tienen vectores propios comunes.

Finalmente, si $\chi_\rho(h) = \pm 2$ como $\rho(h) \neq \pm I$ pues no tiene vectores propios comunes con $\rho(g)$, por el lema de Schur [27], podemos suponer que $\rho(h) = \pm \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, luego $\rho(g) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $c \neq 0$. Ahora bien, sea $n \in \mathbb{Z}$, entonces $\chi_\rho(gh^{2n}) = \chi_\rho(g) + 2nc$, podemos escoger algún $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\chi_\rho(gh^{2m}) \neq \pm 2$ y claramente $\rho(g)$ y $\rho(gh^{2m})$ no tienen valores propios comunes, es decir, $\rho|_{\langle g, gh^{2m} \rangle}$ es irreducible. ■

La siguiente proposición es una generalización del caso en el que el grupo G es finito.

Proposición 3.2.8 *Sean ρ, π representaciones irreducibles de G en $SL_2(\mathbb{C})$. Entonces $\chi_\rho = \chi_\pi$ si y sólo si ρ y π son equivalentes.*

Prueba. Es claro que si $\rho \sim \pi$ entonces $\chi_\rho = \chi_\pi$. Supongamos entonces que $\chi_\rho = \chi_\pi$. Por el lema anterior podemos encontrar $g, h \in G$ tales que $\rho|_{\langle g, h \rangle}$ es irreducible y $\chi_\rho(h) \neq \pm 2$. Como $\rho(h)$ y $\pi(h)$ son diagonalizables y $\chi_\rho(h) = \chi_\pi(h)$ existen $A, A' \in SL_2(\mathbb{C})$ tales que

$$A\rho(h)A^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} = A'\pi(h)A'^{-1}, a \neq \pm 1$$

Como ρ y π son irreducibles, $\rho(g)$ y $\pi(g)$ no pueden ser triangulares inferiores. Así, después

de conjugar por matrices apropiadas $B, B' \in SL_2(\mathbb{C})$, podemos suponer que

$$B\rho(h)B^{-1} = \begin{bmatrix} b & 1 \\ c & d \end{bmatrix}, B'\pi(h)B'^{-1} = \begin{bmatrix} b' & 1 \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

con $c, c' \neq 0$. Sea $x \in G$ y sea

$$\rho(x) = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}, \pi(x) = \begin{bmatrix} p' & q' \\ r' & s' \end{bmatrix}$$

Tenemos que

$$p + s = \chi_\rho(x) = \chi_\pi(x) = p' + s'$$

y

$$ap + a^{-1}s = \chi_\rho(hx) = \chi_\pi(hx) = ap' + a^{-1}s'$$

Como $a \neq \pm 1$ se sigue que $p = p'$ y $s = s'$. Análogamente, si reemplazamos x por g obtenemos que $b = b', d = d'$. Y como $\rho(g)$ y $\pi(g)$ tienen determinante 1, se sigue que $c = c'$. De la misma forma, al reemplazar x por xg , se sigue que $bp + r = b'p' + r'$, así que $r = r'$ y $cq + ds = c'q' + d's' = cq' + ds$ y como $c \neq 0$ se sigue que $q = q'$. Por tanto $\rho(x) = D\pi(x)D^{-1}$, $D \in SL_2(\mathbb{C})$, para todo $x \in G$. ■

3.3 Enlaces de 2-puentes

Sea D el diagrama de un enlace K en S^3 no separable. Si $B_1 \cup \dots \cup B_n$ es la unión disjunta de arcos en D tales que contengan todos los cruces por encima, c_+ y ningún cruce por debajo c_- , llamaremos a B_1, \dots, B_n , los *puentes superiores* de K . Como $cl(K \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_n)) = C_1 \cup \dots \cup C_n$ consiste de una unión disjunta de arcos, a cada C_i lo llamamos *puente inferior*. Si n es minimal, lo llamaremos el número de puentes y diremos que K es un enlace de n -puentes. El grupo de un enlace de n -puentes tiene presentación con n generadores y $n - 1$ relaciones, ya que si K es un enlace de n -puentes y tomamos como $Y_i, i = 1, \dots, n$ los n puentes superiores, entonces tenemos por cada Y_i un generador. Para mas propiedades y algunos ejemplos de estas presentaciones ver [13].

En esta sección nos enfocaremos en los enlaces de 2-puentes, estos enlaces aparecen muchas veces en teoría de nudos. Los enlaces de 2-puentes fueron estudiados por primera vez en 1934 por Bankwitz y Shumann, y en 1956 Shubert los clasificó mediante los espacios lenticulares. Veinte años después Burde clasificó estos enlaces por un método totalmente diferente, usando el linking number y los espacios recubridores ramificados.

Sabemos que una presentación de Wirtinger para el grupo de un enlace de 2-puentes está

dada por dos generadores representados por meridianos y una relación, esto nos sugiere la siguiente generalización.

Definición 3.3.1 *Un grupo de un kmot de 2-puentes de determinante α es un grupo G con la siguiente presentación*

$$G = G(\boldsymbol{\varepsilon}) = \langle x_1, x_2 \mid wx_1 = x_2w \rangle$$

donde $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} x_1^{\varepsilon_3} \cdots x_2^{\varepsilon_{\alpha-1}}$ y $\alpha \geq 3$ impar, $\varepsilon_j = \varepsilon_{\alpha-j} = \pm 1$ para $j = 1, \dots, \alpha - 1$ y $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\alpha-1})$.

Definimos las matrices

$$C = C_t = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = D_{t,u} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ -tu & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

$$C_1 = C_{1,t} = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 0 & t^{-1} \end{bmatrix}, D_1 = D_{1,t,u} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ -u & t^{-1} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Notemos que (3.1) se obtiene de (3.2) al conjugar tC_1, tD_1 con la matriz $U = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & h^{-1} \end{bmatrix}$, $h = \sqrt{t}y$ reemplazar t^2 por t . A veces es mejor usar (3.2), ya que $C_1, D_1 \in SL_2(\mathbb{C})$. Escribimos

$$W = C^{\varepsilon_1} D^{\varepsilon_2} C^{\varepsilon_3} \cdots D^{\varepsilon_{\alpha-1}} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}[t, t^{-1}, u])$$

note que $w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}$ son elementos de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}, u]$, es decir, polinomios en la variable u cuyos coeficientes son polinomios de Laurent en la variable t . Pero por simplicidad no escribimos las variables t, u . Con esto, podemos definir la función

$$\varphi_{t,u} : G \rightarrow GL_2(\mathbb{Z}[t, t^{-1}, u])$$

como $\varphi(x_1) = C, \varphi(x_2) = D$.

En [22] y [23], se prueba el siguiente lema de gran utilidad cuando se trabaja con matrices en $GL_2(\mathbb{C})$.

Lema 3.3.1 *Sean $M_1, M_2 \in GL_2(\mathbb{C})$ dos matrices que no conmuten, con determinante y traza igual. Entonces se tiene lo siguiente:*

1. *Podemos encontrar $t, u \in \mathbb{C}$ y una matriz $U \in SL_2(\mathbb{C})$ para los cuales se cumple*

$$UM_1U^{-1} = \lambda \begin{bmatrix} t & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, UM_2U^{-1} = \lambda \begin{bmatrix} t & 0 \\ -tu & 1 \end{bmatrix}, \text{ donde } \lambda^2 = t^{-1} \det M_1. \quad (3.3)$$

1. Si las transformaciones de Möbius T_1, T_2 representadas por M_1, M_2 tienen un punto fijo común en $\mathbb{P}(\mathbb{C})$; $T_1(\bar{x}) = \bar{x} = T_2(\bar{x})$ donde $\bar{x} = \{a \in \mathbb{C}^2 \mid \lambda x = a, \lambda \in \mathbb{C}\}$ con esto, si λ_i es un valor propio de M_i , entonces $M_1 x = \lambda_1 x$, $M_2 x = \lambda_2 x$ y así, M_1, M_2 tienen un vector propio común. Entonces el par (t, u) es único, si no tienen un punto fijo común este par puede reemplazarse por (t^{-1}, u) .

Con este resultado, podemos probar fácilmente el siguiente teorema, el cual es de gran importancia, ya que establece una correspondencia entre las representaciones lineales no abelianas de G y los puntos de curvas afines.

Teorema 3.3.2 $\varphi_{t,u}$ es una representación no abeliana de $G(\varepsilon)$ si y sólo si (t, u) satisface la ecuación

$$w_{11} + (1 - t)w_{12} = 0. \quad (3.4)$$

Recíprocamente, toda representación no abeliana ψ de G es simplemente equivalente a un múltiplo escalar de $\varphi_{t,u}$ para algún (t, u) que satisface (3.4). Cuando ψ es afín ($\psi(g)$ tiene exactamente un punto fijo en $\mathbb{P}(\mathbb{C})$, para todo $g \in G$), este par es único y cuando ψ no es afín ($\psi(G)$ no tiene puntos fijos) (t, u) puede reemplazarse por (t^{-1}, u) .

Prueba. Basta probar que φ respeta las relaciones de G , para C, D , en otras palabras, $WC = DW$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} tw_{11} & w_{11} + w_{12} \\ tw_{21} & w_{21} + w_{22} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} t & 0 \\ -tu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} tw_{11} & tw_{12} \\ -tuw_{11} + w_{21} & -tuw_{12} + w_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se debe cumplir entonces que $w_{11} + (1 - t)w_{12} = 0$, $w_{21} + tw_{12} = 0$, $tw_{11} + (t - 1)w_{21} = 0$, pero si se cumple la primera y segunda, tenemos $utw_{11} = (t - 1)utw_{12}$ y $0 = (t - 1)w_{21} + (t - 1)tw_{12} = (t - 1)w_{21} + utw_{11}$, así que basta mostrar la igualdad $w_{21} + tw_{12} = 0$. Para esto consideremos $W^\dagger = C^{\dagger\varepsilon_1} D^{\dagger\varepsilon_2} C^{\dagger\varepsilon_3} \dots D^{\dagger\varepsilon_{\alpha-1}} = [w_{ij}^\dagger]$, donde

$$\begin{aligned} C^\dagger &= \begin{bmatrix} t & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = VDV^{-1}, D^\dagger = \begin{bmatrix} t & -tu \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = VCV^{-1}, \\ \text{donde } V &= \begin{bmatrix} -tu & 0 \\ 0 & (-tu)^{-1} \end{bmatrix}, \text{ si } u \neq 0, \end{aligned}$$

con esto, para $W^\dagger C^\dagger - D^\dagger W^\dagger = [v_{ij}]$ se tiene $v_{12} = w_{22}^\dagger - w_{22}^\dagger = 0$, pero $V^{-1}W^\dagger V = C^{\varepsilon_1} D^{\varepsilon_2} C^{\varepsilon_3} \dots D^{\varepsilon_{\alpha-1}} = W$, por tanto se tiene la igualdad. La otra dirección es obvia.

Recíprocamente, si ψ es una representación no abeliana, entonces $\psi(x_1), \psi(x_2)$ no conmutan y tienen igual traza y determinante, así, por el lema anterior se tiene el resultado. Finalmente, si todos los $\psi(g)$ tienen exactamente un punto fijo común en $P(\mathbb{C})$, entonces las matrices $[\psi(x_1)], [\psi(x_2)]$ tienen un valor propio común y por (3.3.1-2), (t, u) es único. ■

El siguiente lema nos permite conocer un poco la forma de cada entrada de W . Recordemos que \deg_x denota el grado de un polinomio en la variable x .

Lema 3.3.3 *Con la notación anterior, la matriz $W = C^{\varepsilon_1} D^{\varepsilon_2} C^{\varepsilon_3} \dots D^{\varepsilon_{\alpha-1}}$ tiene la siguiente forma: $W = \begin{bmatrix} \sum a_r(t) u^r & \sum b_r(t) u^r \\ \sum c_r(t) u^r & \sum d_r(t) u^r \end{bmatrix}$, donde*

1. $a_r(t), \dots, d_r(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.
2. Sea $m = \frac{\alpha-1}{2}$. Entonces $\deg_u(w_{11}) = \deg_u(w_{21}) = 1 + \deg_u(w_{12}) = 1 + \deg_u(w_{22}) = m$.
3. Sea $\sigma = \sum_{j=1}^{\alpha-1} \varepsilon_j, \mu = \frac{1}{2}\sigma$ y $\delta = \frac{1-\varepsilon_1}{2}$. Entonces los coeficientes de u^m en w_{11} y w_{12} son

$$a_m(t) = (-1)^m t^\mu, c_m = (-1)^m \varepsilon_1 t^{\mu+\delta}. \quad (3.5)$$

4. Escribamos $w_{ij} = \sum_{s=1}^n u^s \sum_{l=1}^L e_{ls} t^l, e_{ls} \in \mathbb{Z}$ donde $n = m$ ó $m-1$ y sea $k = k(w_{ij})$ el índice mas grande tal que $e_{kn} \neq 0$. Entonces

$$e_{ls} = 0 \text{ si } l + s > n + k \text{ y } k(w_{11}) \geq k(w_{12}), k(w_{21}) \geq k(w_{22}).$$

Prueba. La prueba se hace mediante inducción sobre la longitud de la cadena W_i , donde

$$W_0 = I, W_{r+1} = W_r C^{\varepsilon_{2r-1}} D^{\varepsilon_{2r}}.$$

Para $r = 1$ se tiene

$$W_1 = C^{\varepsilon_1} D^{\varepsilon_2} = \frac{1}{t^\beta} \begin{bmatrix} t^\gamma & \pm 1 \\ 0 & t^{1-\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^\nu & 0 \\ \mp t u & t^\nu \end{bmatrix} = \frac{1}{t^\beta} \begin{bmatrix} t^{\gamma+\nu} - t u & t^\nu \\ \pm t^{2-\gamma} u & t^{1+\nu-\gamma} \end{bmatrix},$$

donde $\beta \in \{0, 1, 2\}$ y $\gamma, \nu \in \{1, 0\}$, con esto $m = 1, \sigma = \pm 2, \mu = \pm 1$ así se tienen las afirmaciones.

Si escribimos W_r por filas, $W_r = \begin{bmatrix} e_r \\ f_r \end{bmatrix}$, las correspondientes filas e_{r+1}, f_{r+1} de W_{r+1} están

determinadas por los posibles valores de $\varepsilon_{2r-1}, \varepsilon_{2r}$, de la siguiente forma:

ε_{2r-1}	ε_{2r}	e_{r+1}	f_{r+1}
1	1	$-tu(e_r + f_r) + t^2 f_r$	$e_r + f_r$
1	-1	$u(e_r + f_r)$	$e_r + f_r$
-1	1	$u(e_r - t f_r) + e_r$	$-t^{-1}e_r + f_r$
-1	-1	$-t^{-1}u(e_r - t f_r) + t^{-2}e_r$	$-t^{-1}e_r + f_r$

Esto se prueba por computo directo. Así, por hipótesis inductiva se tienen los numerales 1 y 2. Para el numeral 3 notemos en e_{r+1} que el término $a_{r+1}(t)u^{r+1}$, $r \geq 0$, tiene una de las siguientes formas

$$-tu(a_r(t)u^r), u(a_r(t)u^r) \text{ ó } -t^{-1}u(a_r(t)u^r),$$

y en f_{r+1} el término $c_{r+1}(t)u^{r+1}$, $r \geq 1$ tiene una las formas

$$-tu(c_r(t)u^r), u(c_r(t)u^r) \text{ ó } -t^{-1}u(c_r(t)u^r).$$

Por tanto, con la hipótesis inductiva se tiene que $a_m(t) = (-1)^s t^p$.

Para hallar s, t notemos que, como el $\det C = \det D = t$, se sigue que el producto

$$(-t)^g (-t^{-1})^h = (-1)^s t^p,$$

donde g es el número de veces que ocurren los valores $\varepsilon_{2r-1}, \varepsilon_{2r} = 1$, y h es el número de veces que aparecen los valores $\varepsilon_{2r-1}, \varepsilon_{2r} = -1$. Por otro lado, puesto que $\alpha - 1$ es par y $\varepsilon_j = \varepsilon_{\alpha-j}$ entonces el par $(-1, 1)$ y $(1, -1)$ aparecen un mismo número de veces, digamos k . Con esto se sigue $m = g + h + 2k, \mu = g - h$ y así, $(-t)^g (-t^{-1})^h = (-1)^{m-2k} t^\mu = (-1)^m t^\mu$. Luego $a_m(t) = (-1)^m t^\mu$. De manera análoga $c_m(t) = (-1)^m \varepsilon_1 t^{\mu+\delta}$. Finalmente, para 4. la prueba es directa, basta hacer inducción y considerar varios casos. ■

Ejemplo 3.3.1 Sabemos que el nudo ocho, K , es un nudo de 2-puentes cuyo grupo tiene presentación

$$\begin{aligned} \pi(K) &= \langle x_1, x_2 \mid (x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1})x_1 = x_2(x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1}) \rangle \\ &= G(\varepsilon) \\ &= \langle x_1, x_2 \mid wx_1 = x_2w \rangle, \end{aligned}$$

donde $\varepsilon = (-1, 1, 1, -1)$, $w = x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1}$ y $\alpha = 5$. Definimos la función $\varphi : G(\varepsilon) \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$

como $\varphi(x_1) = C, \varphi(x_2) = D$, entonces

$$W = \begin{bmatrix} u^2 + 2u - t^{-1}u + 1 & u + 1 - t^{-1} \\ u - tu - t^2u & tu + 1 \end{bmatrix}.$$

Por el Teorema 3.3.2, φ es una representación si y sólo si $u^2 + (3 - 2t)u + (3 - t^{-1} - t) = 0$.

3.4 Polinomios asociados a nab-rep

Notemos que (3.5) nos permite asociar un polinomio a la representación,

$$\Phi(t, u) = t^{-\mu} (w_{11} + (1 - t)w_{12}) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}, u],$$

el cual recibe el nombre de *polinomio nab-rep*. Por Lema 3.3.3-1. $\deg_u \Phi = m$; por Lema 3.3.3-2. el coeficiente de u^m en Φ es $(-1)^m$ y por Lema 3.3.3-3. Φ contiene solamente términos de la forma $e_{ls} t^l u^s$, donde $l + s \leq m$. De acuerdo a de Rham [7], el polinomio de Alexander Δ para un grupo kmot G es un múltiplo de $\Phi(t, 0)$.

Denotamos por F_p un campo primo de característica p , y $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Recordemos que el discriminante de un polinomio $p(x)$ se define como $D = \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ donde los α_k son la raíces, además D puede escribirse como un polinomio en los coeficientes de $p(x)$.

Lema 3.4.1 *La reducción de $\Phi(1, u)$ módulo 2 no tiene factores repetidos en $F_2[u]$. Recíprocamente $\Phi(t, u)$ no tiene factores repetidos en $\Lambda[u]$ salvo Λ -unidades. Más aún, el discriminante $D(t) \in \Lambda$ de Φ respecto a u cumple que $D(\pm 1)$ es impar.*

Prueba. Véase en [22]. ■

El lema anterior nos dice que hay una única factorización $\Phi = q\Phi_1 \cdots \Phi_r$ donde q es una Λ -unidad, los Φ_i son irreducibles con $\deg_u \Phi_i \geq 1$. A cada factor mónico $\Phi_i \in \Lambda[u]$ de Φ le corresponde una curva algebraica afín dada por la ecuación $\Phi_i = 0$ en \mathbb{C}^2 . Decimos que $P = (t_0, u_0)$ es un punto genérico, si está sobre la curva afín y t_0, u_0 son trascendentes sobre \mathbb{Q} . Una representación ϕ_P correspondiente a un punto genérico P es llamada una *representación genérica* de Φ_i .

Proposición 3.4.2 $\Phi(t, u) = \Phi(t^{-1}, u)$.

Prueba. Sea $\Phi = (-1)^m t^k \Phi_1 \cdots \Phi_r$ la factorización mónica irreducible en $\Lambda[u]$ y sea $\phi_P = \phi_{t,u}$ una representación genérica para algún Φ_j . Como $\phi_{t^{-1},u}$ es una representación no abeliana, por Teorema 3.3.2, (t^{-1}, u) satisface la ecuación $w_{11} + (1 - t)w_{12} = 0$ y así (t^{-1}, u) es un punto genérico (y t^{-1}, u son trascendentes en \mathbb{Q} ya que t, u lo son.). Por tanto $\phi_{t^{-1},u}$ es

una representación genérica de algún Φ_k , con esto se tiene $\Phi_k(t, u) = \Phi_j(t^{-1}, u)$. De manera análoga se tiene en la otra dirección y como los Φ_i son irreducibles y Φ_i no divide a Φ_l para todo $i \neq l$, la asignación $j \rightarrow k$ es una permutación de $\{1, 2, \dots, r\}$. Por tanto $\Phi(t, u) = \Phi(t^{-1}, u)$. ■

El conjunto de soluciones de la ecuación $\Phi_{t,u} = \Phi(t, u) = 0$ es una curva afín en \mathbb{C}^2 . El siguiente lema muestra que Φ nunca toca ciertas parábolas en \mathbb{C}^2 .

Lema 3.4.3 Si $t \neq 0$, $\Phi(t, t^{-1} - 2 + t) \equiv 1$.

Prueba. Si $t = 1$, entonces $\Phi(t, t^{-1} - 2 + t) = \Phi(1, 0) = w_{11}$ y

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_{1,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, W_{1,0} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

así $w_{11} = 1$.

Ahora supongamos que $\Phi(t, t^{-1} - 2 + t) = 0$ para algún $t \neq 0, 1$, entonces $C_t, D_{t,u}$ tienen como vector propio común a $v = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-t} \\ 1 \end{bmatrix}$. En efecto, como $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = t$ son los valores propios de $C_t, D_{t,u}$ entonces

$$C_t v = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-t} \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} \frac{1}{1-t} \\ 1 \end{bmatrix} = 1v, D_{t,u} v = \begin{bmatrix} t & 0 \\ -(t-1)^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-t} \\ 1 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{1}{1-t} \\ 1 \end{bmatrix} = tv.$$

Por otra parte, como $0 = \Phi(t, t^{-1} - 2 + t) = t^{-\mu} (w_{11} - (1-t)w_{12})$, entonces $w_{11} = (1-t)w_{12}$. Pero

$$W_{t,u} v = \begin{bmatrix} (t-1)w_{12} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-t} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_{12} + w_{12} \\ \frac{w_{21}}{1-t} + w_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{w_{21}}{1-t} + w_{22} \end{bmatrix} \neq \lambda v.$$

Es decir, v no es vector propio, lo cual es una contradicción. Por tanto $\Phi(t, t^{-1} - 2 + t)$ nunca se anula, luego debe ser constante, pues $\Phi(t, t^{-1} - 2 + t)$ es un polinomio. ■

Ejemplo 3.4.1 Del Ejemplo 3.3.1, se tiene que $\mu = 0$ y $\Phi(t, u) = u^2 + (3 - 2t)u + (3 - t^{-1} - t)$, y $\Phi(t, 0) = 3 - t^{-1} - t = \Delta(t)$.

3.4.1 Algunos resultados de las curvas nab-rep

Recordemos que una curva afín es una variedad algebraica, es decir, el conjunto de ceros de un polinomio irreducible en dos variables y el grado de la curva afín es el grado del polinomio, para mas información ver el Apéndice D. Como podemos asociar un polinomio a una representación de G y éste a su vez se factoriza en polinomios irreducibles, es útil conocer propiedades de las curvas afines asociadas a los factores irreducibles del polinomio nab-rep. Mas aún, el Teorema

3.3.2, nos dice que a cada representación afín le corresponde exactamente un punto (r, s) sobre la curva afín $C = \{(t, u) \mid \Phi(t, u) = 0\}$ y a cada representación no afín le corresponden exactamente dos puntos $(r, s), (r^{-1}, s)$ sobre la curva afín nab-rep $C = \{(t, u) \mid \Phi(t, u) = 0\}$. Por tal razón, presentamos varios resultados, que aunque no probaremos (dado que las herramientas que se emplean en sus pruebas están muy lejos de la teorías de enlaces), abren un camino para otros trabajos de bastante interés. Las pruebas pueden encontrarse en [22].

El siguiente resultado nos dice cuándo el rango de una representación resulta ser un grupo discreto y libre, éste nos ayuda a clasificar las representaciones no abelianas de G en $GL_2(\mathbb{C})$. la prueba se centra prácticamente en encontrar unas cotas que permitan cumplir ciertas desigualdades que cumplen los grupos p -Schottky, éstos son subgrupos del grupo de las transformaciones de Möbius, generados por ciertos lados de poliedros especiales en la p -bola unitaria $B^p = \{x \in \mathbb{R}^p \mid |x| < 1\}$, para mas información de estos grupos ver [21].

Lema 3.4.4 [22] Sea $\tilde{G}_{t,u} = \langle C_{1,t}, D_{1,t,u} \rangle$, $q = t^{-1} - t$, $N_\varepsilon = |u + 1 - t^{2\varepsilon}|$, $\varepsilon = \pm 1$ y $\delta = \pm 1$ tal que $|t|^\delta \geq 1$. Entonces $\tilde{G}_{t,u}$ es libre y discreto cuando se cumplen las siguientes desigualdades.

1. $|t + t^{-1}| \geq 2$,
2. $N_\varepsilon \geq (|t| + |t^{-1}|) \frac{|q|}{||t| - |t^{-1}||}$,
3. $|t|^{2\delta} (N_\varepsilon - |q|) \geq N_{-\varepsilon} + |q|$.

Conocer el comportamiento de estas curvas afines, simplifica enormemente el trabajo de su cómputo, en ese sentido presentamos el siguiente corolario, el cual nos dice que estas curvas se encuentran en ciertos lugares de \mathbb{C}^2 .

Corolario 3.4.5 Sea u una raíz de $\Phi(t, u) = 0$. Si se cumplen las desigualdades

$$|u| < 2|t|^{1/2}, \quad |u - t| < 2|t|^{1/2},$$

entonces $|t| < 11$.

Prueba. Supongamos que $|u| \geq 2|t|^{1/2}$, $|u - t| \geq 2|t|^{1/2}$ y $|t| \geq 11$. Con esto se siguen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} & \left| t^{1/2} + t^{-1/2} \right| \geq 2, \\ & |u - t^\varepsilon + 1| \geq \left(\left| t^{1/2} \right| + \left| t^{-1/2} \right| \right) \frac{|t^{1/2} - t^{-1/2}|}{||t^{1/2}| - |t^{-1/2}||}, \varepsilon = \pm 1, \\ & |t| |u - t^\varepsilon + 1| \geq |u - t^{-\varepsilon} + 1| + \left| t^{1/2} \right| (1 + |t|) |1 - t^{-1}|, \varepsilon = \pm 1. \end{aligned}$$

Luego por el lema anterior con $t^{1/2}$ el grupo $\tilde{G}_{t^{1/2},u} = \langle C_{1,t^{1/2}}, D_{1,t^{1/2},u} \rangle$ es libre, pero u es una raíz de $\Phi(t, u) = 0$, entonces (t, u) cumple la ecuación $w_{11} + (1-t)w_{12} = 0$ y por Teorema 3.3.2, se tiene $WCW^{-1}D^{-1} = I$, lo cual contradice el hecho que $\tilde{G}_{t^{1/2},u}$ es un grupo libre. ■

Sea $n \in \mathbb{Z}$ el mínimo número tal que $t^n \Phi(t, u) \in \mathbb{Z}[t, u]$ y sea $\tilde{\Phi}(t, u) = t^n \Phi(t, u)$. Sea $C \subset \mathbb{C}^2$ una curva algebraica afín dada por $\tilde{\Phi} = 0$. Por Lema 3.3.3, podemos deducir que el término $(-1)^m t^n u^m$ de $\tilde{\Phi}$ es el de mayor grado en u y que $\tilde{\Phi}$ no contiene términos $a_{ls} t^l u^s$ con $l + s > m + n$. Luego C tiene grado $m + n$. Sea \hat{C} la completación proyectiva de C y l_∞ la línea al infinito en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, definimos como $(\hat{C}, l_\infty)_S$ el número veces que \hat{C} y l_∞ se intersectan en un punto S . Cuando la multiplicidad es cero, $S \notin \hat{C}$.

Proposición 3.4.6 [22] *La curva proyectiva \hat{C} se intersecta con l_∞ en tres puntos P, Q y R con multiplicidades como sigue:*

1. $P = (0, 1, 0), (\hat{C}, l_\infty)_P = n,$
2. $Q = (1, 1, 0), (\hat{C}, l_\infty)_Q = m - k, 0 \leq k \leq n,$
3. $R = (1, 0, 0), (\hat{C}, l_\infty)_R = k, 0 \leq k \leq n.$

3.5 Propiedades de los polinomios nab-rep

Veremos en esta sección propiedades importantes de los polinomios asociados a representaciones no abelianas de G en $GL_2(\mathbb{C})$, polinomios nab-rep. Estas propiedades nos ayudarán en la clasificación de las representaciones.

Lema 3.5.1 *Sea $\Phi_1 \in \Lambda[u]$ un factor mónico en $\Lambda[u]$ de algún polinomio nab-rep Φ . Entonces Φ_1 sólo contiene términos $a_{ls} t^l u^s$, donde $l + s \leq \deg_u \Phi_1$.*

Prueba. Sea $\Phi = \Phi_1 \Phi_2$. Supongamos que Φ_1 tiene términos de la forma $a_{ls} t^l u^s$, donde $l + s > \deg_u \Phi_1$. Escojamos l_1, s_1 tal que s_1 sea el mayor exponente para el cual se tiene $n_1 = l_1 + s_1 - \deg_u \Phi_1 > 0$. Escojamos de igual forma para Φ_2 exponentes l_2, s_2 . Puesto que Φ_2 es mónico, entonces $n_2 = l_2 + s_2 - \deg_u \Phi_2 \geq 0$. Luego $n_1 + n_2 > 0$ y así el término $a_{ls} t^l u^s$ correspondiente a la multiplicación de estos factores cumple $l + s - \deg_u \Phi = n_1 + n_2 > 0$, pero como s_1, s_2 son maximales, este término no se cancela con otros sumandos, lo cual contradice el numeral 3 del Lema 3.3.3. ■

Teorema 3.5.2 *Sólo hay finitos polinomios mónicos $\Phi_j \in \Lambda[u]$ con $\deg \Phi_j \geq 1$ que dividen un polinomio nab-rep Φ , para algún grupo kmot.*

Prueba. Supongamos que tenemos una sucesión infinita $\{\Phi_i\} \subset \Lambda[u]$ de factores mónicos diferentes de polinomios nab-rep, con $\deg \Phi_j = r$. Sea $n_j \in \mathbb{Z}$ el mas pequeño que cumple $\tilde{\Phi}_j = t^{n_j} \Phi_j(t, u) \in \mathbb{Z}[t, u]$ y sea d_j el grado de la curva $\tilde{\Phi}_j(t, u) = 0$ en \mathbb{C}^2 . Por el lema anterior, en Φ_j sólo aparecen términos $a_{l,s} t^l u^s$ donde $l + s \leq \deg_u \Phi_j = r$, entonces $n_j + l + s \leq r + n_j$, pero por Lema 3.4.3, $n_j \leq r$ por tanto $d_j \leq 2r$. Consideremos el número $\omega = 2 + \sqrt{3}$, entonces $\omega^{-1} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$ es el conjugado algebraico. Mas aún, para un polinomio cualquiera $p(x)$, se cumple $p(\omega) p(\omega^{-1}) = p(\omega) \bar{p}(\omega) = (a_2 + b\sqrt{3})(a_2 - b\sqrt{3}) \in \mathbb{Z}$. Sean $k \geq 1$ y $\Psi_j(u) = \Phi_j(\omega^k, u) \Phi_j(\omega^{-k}, u) \in \mathbb{Z}[u]$. Si u_l es una raíz de $\Psi_j(u)$ entonces es la raíz de $\Phi_j(\omega^k, u)$ ó $\Phi_j(\omega^{-k}, u)$ y así $\tilde{G}_{\omega^k, u} = \langle C_{1, \omega^k}, D_{1, \omega^k, u} \rangle$ no sería libre, pero de las desigualdades del Lema 3.4.4 se obtiene:

$$\begin{aligned} |\omega^k| &\geq t^\delta + 1 + t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}, \\ |\omega^k| &\geq 2t^\delta + t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

para $\varepsilon = \pm 1, t \neq 1$ y $\delta = \pm 1$ tal que $t^\delta > 1$. Por tanto

$$u_l < B(\omega^k) = \sup \left\{ t \mid |\omega^k| \geq 2t^\delta + t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} \text{ o } |\omega^k| \geq t^\delta + 1 + t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} \right\}.$$

Se sabe que si $\Psi_i = u^{2r} + a_{2r-1}u^{2r-1} + \dots + a_1u + a_0 = (u - u_{2r}) \dots (u - u_1)$ entonces $a_0 = \prod u_i, a_{2r-1} = \sum u_i$ y $a_k = \sum (u_{i_1} \dots u_{i_k}), i_j \neq i_t$ si $j \neq t$. Por tanto los coeficientes de Ψ_j están acotados por términos de la forma $(rB(\omega^r))^r$. Luego existe una subsucesión de $\{\Psi_j\}$ que converge, digamos a Ψ . Sean u_{1k}, \dots, u_{2rk} las raíces de Ψ , entonces todas las curvas $\tilde{\Phi}_j = 0$ pasan a través de los $2r$ puntos (ω^k, u_{lk}) o (ω^{-k}, u_{lk}) . De manera análoga para $k = 1, \dots, 2r+1$ encontramos curvas afines $\Phi_j = 0, \Phi_i = 0$ que pasan por los mismos $2r(2r+1)$ puntos, pero esto contradice el Teorema de Bezout E.0.12. Luego $\{\Phi_i\}$ debe ser finito. ■

Finalmente los siguientes dos últimos resultados nos muestra que cada grupo $G = \pi_1(K)$ tiene segmentos reales sobre las curvas nab-rep C , cuyos puntos p sobre estos segmentos corresponden a representaciones, ψ_p , que son totalmente elípticas.

Proposición 3.5.3 *Sea Φ un polinomio nab-rep de un grupo kmot G . Entonces las raíces de $\Phi(-1, u)$ están en el intervalo $(-4, 0)$, y las raíces reales de $\Phi(1, u)$ pertenecen al intervalo $(0, 4)$.*

Prueba. Sea $\det G = 2m + 1$ con $m \in \mathbb{Z}^+$ y sea u_0 una raíz de $\Phi(-1, u)$, entonces

$$C = C_{-1}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ u_0 & 1 \end{bmatrix}^2 = D_{-1, u_0}^2 = D$$

e $I = \phi_{-1, u_0}(e) = \phi_{-1, u_0}(wx_1w^{-1}x_2^{-1}) = WCW^{-1}D^{-1}$ con esto

$$I = WCW^{-1}D^{-1} = (CD)^m C (CD)^{-m} D^{-1} = (CD)^{2m+1}.$$

Por tanto $\langle C, D \rangle = \langle C, D \mid C^2, D^2, (CD)^n \rangle$, donde $n \mid 2m+1$, es decir, $\langle C, D \rangle = \langle r, s \mid r^n, s^2, sr sr \rangle = D_{2n}$ es el grupo dihedral y por el Corolario F.0.19, se tiene que CD es elíptico, pero

$$CD = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ u_0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+u_0 & 1 \\ u_0 & 1 \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$$

entonces $tr(CD) = 2 + u_0 \in (-2, 2)$, por tanto $u_0 \in (-4, 0)$.

Finalmente, si u_0 es una raíz de $\Phi(1, u)$, se tiene

$$\begin{aligned} WC_tW^{-1} &= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_4 & -w_2 \\ -w_3 & w_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - w_1w_3 & -w_1^2 \\ -w_3^2 & 1 + w_1w_3 \end{bmatrix} = D_{t,u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u_0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Es decir, $u_0 = w_3^2$ y por el Lema 3.3.3, se tiene que $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{Z}[u_0]$, es decir u_0 es un cuadrado en $\mathbb{Z}[u_0]$. Por Lema 3.4.3, se tiene que $\Phi(1, 0) \equiv 1$, luego si u_0 es real, entonces debe ser positivo. Por otra parte, $F_{u_0} = \langle C, D \rangle$ no es libre ya que por $\Phi(1, u_0) = 0$ se tiene una relación en el grupo, así, por [4] se tiene que $u_0 \in (0, 4)$. ■

Sea $\Phi(t_0, u_0) = 0$. Diremos que (t_0, u_0) y su representación son elípticos ó totalmente elípticos si C_{t_0} es elíptico o $\langle C_{t_0}, D_{t_0, u_0} \rangle$ es totalmente elíptico, respectivamente. Notemos que: $t_0 = e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi] \Leftrightarrow tr^2 C_{t_0} = \frac{(e^{i\theta}+1)^2}{e^{i\theta}} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} + 2 = 2 + 2\cos\theta \in [0, 4)$. Es decir, C_{t_0} es elíptico si y sólo si $t_0 = e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi)$. Por otra parte, como $\Phi(t, u) = \Phi(t^{-1}, u)$ podemos escribir $\Phi(t, u) = \Psi(s, u) \in \mathbb{Z}[s, u]$ donde $s = t + t^{-1}$ y si $t = e^{i\theta}$, se tiene que $s = 2\cos\theta$ y $\Psi(s, u) \in \mathbb{R}[u]$. En adelante usamos la notación

$$\phi_{\theta, u} = \phi_{e^{i\theta}, u} \text{ y } \theta_a = \max\{\theta \mid \Psi(2\cos\theta_a, 0) = 0 \text{ y } \theta \leq \pi\},$$

notemos que $\theta_a \neq \pi$ pues $\Psi(-2, 0) \neq 0$ por la proposición anterior. Sea $D(s) \in \mathbb{Z}[s]$ el discriminante de $\Psi(s, u)$, de la definición queda claro que $D(s_0) = 0$ si y sólo si $\Psi(s_0, u)$ tiene raíces repetidas, donde $s_0 = t_0 + t_0^{-1}$. Por el Lema 3.4.1, se tiene que $D(\pm 2) \neq 0$ ya que es impar. Como \cos es una función par, basta considerar los valores $0 \leq \theta \leq \pi$, ordenemos la raíces de $D(2\cos\theta) = 0$ en forma decreciente sin contar multiplicidades como $\theta_1, \theta_2, \dots$

Proposición 3.5.4 *Todas la representaciones $\phi_{\theta, u}$ son totalmente elípticas cuando $\theta_1 \leq |\theta| \leq \pi$ y $\theta_a < |\theta|$. Si para todo $(\theta, u) \in \mathbb{R}^2$ se cumple que $\theta_2 \leq |\theta| \leq \pi$, $u \in \mathbb{R}$ y $\Psi(2\cos\theta, u) = 0$*

entonces $u > 2 \cos \theta - 2$.

Prueba. Una representación elíptica $\phi_{\theta,u}$ es totalmente elíptica si y sólo si axC_t se interseca con $axD_{t,u}$ (por Teorema F.0.18). Esto pasa cuando el punto fijo $(1-t)^{-1}$ de C_t está sobre el segmento abierto $(0, t^{-1}u^{-1}(1-t))$ que conecta los puntos fijos $0, \frac{1-t}{tu}$ de $D_{t,u}$, es decir, $0 < (1-t)^{-1} < \frac{1-t}{tu}$, pero esto equivale a $u = \alpha(t^{-1} - 2 + t)$ para algún $\alpha \in (0, 1)$. La representación dihedral $\phi_{-1,u}$ de la proposición anterior es totalmente elíptica (C, D son elípticos). De la descomposición mónica de Φ y la proposición anterior se sigue que las raíces u_1, \dots, u_m de $\Psi(-2, u)$ son reales diferentes. Las raíces u_{θ_j} de $\Psi(2 \cos \theta, u) = 0$ para $\theta_1 < \theta \leq \pi$ son diferentes y $u_{\theta_j} \in \mathbb{R}$. Ahora bien, si el punto fijo de $C_{e^{i\theta}}$ coincide con un punto fijo de $D_{e^{i\theta},u}$, entonces $u = 2 \cos \theta - 2$ pero por Lema 3.4.3, $\Psi(2 \cos \theta, 2 \cos \theta - 2) \equiv 1$, luego los puntos fijos no coinciden. Por otro lado, si alguna raíz u_{θ_j} está fuera del segmento que une los puntos fijos de D , cuando $\theta_1 \leq |\theta| \leq \pi$, entonces $u_{\theta_j} = 0$ lo cual contradice que θ_a sea máximo.

Finalmente, sabemos que $u_{\theta_j} \neq 2 \cos \theta - 2$ y que $u_{\theta_j} > -4$ cuando $t = -1$, es decir, $u_{\theta_j} > 2 \cos \theta - 2$ para $\theta = \pi$. También se cumple que $u_{\theta_j} > 2 \cos \theta - 2$ cuando $\theta_1 \leq |\theta|$, notemos que pueden haber raíces u_{θ} iguales cuando $\theta = \theta_1$ y pueden ser raíces complejas si $|\theta| < \theta_1$. Pero si no hay raíces complejas cuando $\theta_2 < |\theta| < \pi$, se sigue que $u > 2 \cos \theta - 2$. ■

Un grupo G totalmente elíptico es isomorfo a un subgrupo de $SO(3, \mathbb{C})$ de las matrices ortogonales invertibles, pero si cambiamos del modelo del semiplano superior H^3 al modelo de la 3-bola unitaria B^3 y conjugamos por una H -isometría que mueva los puntos fijos de G al centro de B^3 entonces todos los elementos del grupo conjugado son rotaciones de la bola unitaria. Por tanto nuestras representaciones totalmente elípticas pueden verse como representaciones en $SO(3, \mathbb{C})$.

Hemos encontrado condiciones para la existencia de representaciones de grupos de enlaces en grupos metabelianos, y para clasificar las representaciones de grupos de enlaces de 2-puentes en $SO(3, \mathbb{C})$. Además hallamos una relación uno a dos entre representaciones no abelianas de grupos de enlaces, salvo equivalencia simple, y puntos de una curva afín, y vimos que si agregamos la condición de un único punto fijo esta relación es uno a uno.

Conclusión

En la clasificación de enlaces, el grupo asociado a ellos juega un papel fundamental. Como pudimos observar a lo largo de este trabajo fuera de poder calcular una presentación para el grupo G de un enlace L , de diversas formas, donde una de estas formas nos permitió encontrar una cubierta asociada G . También logramos calcular la matriz de Alexander a partir de G , haciendo uso del cálculo libre, donde se utilizan las derivadas de Fox y como otro método alternativo, encontrando una presentación para G/G' , para así cómputar el polinomio de Alexander Δ , éste último un invariante muy conocido. Finalmente, tomamos las herramientas de representaciones de grupos, y asociamos sus caracteres con curvas algebraicas afines, y nos encontramos en el caso de nudos de 2-puentes con relaciones uno a dos entre las representaciones de G y polinomios en $\mathbb{Z}[t, t^{-1}, u]$, es decir, con curvas algebraicas.

Tabla de Símbolos

$H_n()$	Grupo de n -ésima homología
C_∞	Cubierta cíclica regular infinita
C_n	Cubierta cíclica regular finita
χ_ρ	Caracter de la representación ρ
\times	Producto semidirecto de grupos
∂V	Frontera de V
$\langle a \rangle$	Grupo generado por a
\star	Producto libre de grupos
$\#$	Suma conexa de nudos
$\hat{\sigma}$	Interior de σ
G'	Subgrupo conmutador de G
G''	subgrupo conmutador de G'
Δ_n	n -ésimo polinomio de Alexander
$tr(A)$	Traza de la matriz A
$SL_n(F)$	Matrices $n \times n$ con determinante 1 con entradas en F
$GL_n(F)$	Matrices $n \times n$ no singulares con entradas en F
$PGL_n(F)$	$GL_n(F)/Z$ donde $Z = \{aI \mid a \in F^* = F \setminus 0\}$
$PSL_n(F)$	$SL_n(F)/(SL_n(F) \cap Z)$
$P^n(F)$	El n -espacio proyectivo sobre F
clA	La clausura de A

Bibliografía

- [1] Bass, H., *Groups of integral representation type*, Pacific J. Math. 86 (1980), 15-52.
- [2] Beardon, A., *The Geometry of Discrete Groups*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [3] Burde, G. and Zieschang, H., *Knots*, Walter de Gruyter, New York, New York, 1985.
- [4] Chang, B., Jennings, S. and Ree, R., *On certain pairs of matrices which generate free groups*, Canad. J. Math., 10 (1958).
- [5] Crowell, R. and Fox, R., *Introduction to Knot Theory*, Blaisdell Publishing Company, New York, 1963.
- [6] Culler, M. and Shalen, P., *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*, Ann. of Math, 117 (1983), 109-146.
- [7] DeRham, J., *Introduction aux polinômes d'un noeud*, Enseignement Math. (2) **13** (1967), 187-194.
- [8] Dummit, D. and Foote, R., *Abstract Algebra*, John Wiley & Son Inc, 2004.
- [9] Fox, R. and Crowell, R., *Introduction to Knot Theory*, Blaisdell Publishing Company, New York, NY, 1963.
- [10] Gordon, C and Luecke, J., *Knots are determined by their complements*, J. Amer. Math. Soc., **Vol 2** (1989), 371-415
- [11] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [12] Joyce D., *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, Journal of Pure and Applied Algebra, **23** (1), pp. 37-65. 1982.
- [13] Kawauchi, A., *A survey of knot theory*. Birkhäuser, Basel Berlin, (1996).
- [14] Kim, S., *Virtual Knot Groups and their Peripheral Structure*, Journal of Knot Theory and its Ramifications, **Vol. 9**, No. 6 (2000), 797-812.

- [15] Lyndon, R., and Schupp, P. *Combinatorial group theory*, *Ergebn. Math. Grenzgeb.*, 89, Springer Verlag, 1997.
- [16] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, D. *Combinatorial group theory: Presentation of groups in terms of generators and relations*, Interscience Pub., John Wiley and Sons, 1966.
- [17] Manturov, V., *Knot Theory*. Chapman & Hall CRC, 2004.
- [18] Matveev, S. V., *Distributivnye gruppoidy v teorii uzlov*, *Mat. Sbornik*, 119 1, pp. 78-88 (Russia). 1982.
English Version: *Distributive groupoids in Knot Theory*, *Mat. Sbornik*, 47, pp.73-83. 1984
- [19] Mumford, D., *Algebraic Geometry I: Complex Projective Varieties*, *Grundlehren der Math. Wiss.* 221, Springer-Verlag, 1976.
- [20] Neuwirth, L. *Knot Groups*. Westview Press, Boulder, Colorado, 1969.
- [21] Ratcliffe, J., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer-Verlag, 2006
- [22] Riley, R., *Nonabelian Representations of 2-Bridge knot groups*, *Quart. J. Math. Oxford* (2), **35** (1984), 191-208.
- [23] —, *Holomorphically parameterized groups of hyperbolic isometries*, submitted for publication.
- [24] Sawollek, J., *On Alexander-Conway Polynomials for Virtual Knots and Links*, arXiv:math.GT/9912173 21Dec 1999.
- [25] Toro, M. M. and Rodríguez, J. G., *Nudos combinatorios: Una nueva visión de los nudos virtuales*, preprint, 2008.
- [26] Waldhausen, F. *On Irreducible 3-manifold which are sufficiently large*, *Ann. of Math.*, **Vol 87** (1968), 56-88.
- [27] Worn, R. and Johnson, C. *Matrix analysis*, Cambridge University Press, New York, NY, (1990).

Apéndice A

El Grupo Fundamental

Existen varias herramientas que nos permiten diferenciar ciertos tipos de enlaces, una de ellas es el *grupo fundamental* de un espacio topológico. Este es un grupo que se puede asociar a cada espacio. Pensemos en una curva suave que empiezan y terminan en el mismo punto, que está sobre nuestro espacio, la cual podemos estirar o encoger sin romperla, al hacer esto nuestra curva coincide con varias curvas más en nuestro espacio, entonces basta tomar sólo una de estas. En este apéndice daremos los conceptos básicos para la interpretación de esto y así llegaremos a la definición del grupo que deseamos encontrar.

Un camino a en un espacio topológico X es una función continua $a : [n, m] \rightarrow X$ donde $n, m \in \mathbb{R}$, $n \leq m$ y $[n, m]$ es un intervalo cerrado en \mathbb{R} . Dos caminos $a(t)$ y $b(t)$ son iguales si sus dominios son iguales y $a(t) = b(t)$, para todo t . Ahora bien, si tenemos dos caminos diferentes, podemos deformar uno en el otro en un periodo de tiempo, es decir, tomar un camino y llevarlo a otro camino de manera continua en el espacio. Sean X un espacio topológico y $a : [n, m] \rightarrow X$ y $b : [n, m] \rightarrow X$ dos caminos con $a(n) = x_0 = b(n)$ y $a(m) = x_1 = b(m)$. Decimos que a es *homotópico a b* , $a \sim b$, si existe una función continua $H : [n, m] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que

1. $H(t, 0) = a(t)$ y $H(t, 1) = b(t)$ para todo $t \in [n, m]$.
2. $H(n, s) = x_0$ y $H(m, s) = x_1$ para todo $s \in [0, 1]$.

Esta relación de homotopía " \sim " es una relación de equivalencia.

Fijemos un punto $x_0 \in X$ y consideremos la relación de homotopía para caminos cerrados que comiencen y terminen en x_0 y tomemos

$$\pi_1(X, x_0) = \{[a] \mid a \text{ es un camino cerrado con } a(0) = a(1)\},$$

donde $[a]$ es la clase de equivalencia del camino a . Sean $a : [0, 1] \rightarrow X$ y $b : [0, 1] \rightarrow X$ caminos cerrados tales que $a(0) = x_0 = b(0)$. Definimos el producto de $a * b$ de dos caminos como sigue:
, si

$$(a * b)(t) = \begin{cases} a(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ b(2t - 1), & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Claramente el producto es una función continua. Por otro lado, si $a : [0, 1] \rightarrow X$ es un camino, definimos $a^{-1}(t) = a(m - t)$, $0 \leq t \leq 1$. $\pi_1(X, x_0)$ con la operación producto entre

clases de equivalencia de caminos inducida por el producto de caminos es un grupo, llamado *el grupo fundamental de X con punto base en x_0* .

Si X es un espacio arco-conexo, podemos unir cualquier par de puntos en $x_0, x_1 \in X$ mediante un camino, digamos $c : [0, 1] \rightarrow X$ con $c(0) = x_0$ y $c(1) = x_1$, entonces c define en forma natural un isomorfismo entre los grupos

$$\begin{aligned} \lambda_c : \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(X, x_1) \\ [a] &\mapsto [c^{-1} * a * c] \end{aligned}$$

Es decir, *el punto base puede cambiarse sin alterar el grupo si el espacio es arco-conexo*.

El grupo fundamental nos permite asociarle a cada espacio topológico un grupo, de igual manera, podemos asociarle a una función continua entre espacios un homomorfismo de grupos fundamentales, llamado *el homomorfismo inducido*. Dados dos espacios topológicos X y Y , y una función continua entre ellos, $f : X \rightarrow Y$ con $f(x_0) = y_0$, entonces f induce un homomorfismo

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [a] &\mapsto [f \circ a] \end{aligned}$$

que satisface

1. $Id_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ es el homomorfismo identidad.
2. Sea Z un espacio topológico y $g : X \rightarrow Z$ una función continua. Entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

De aquí se sigue que si $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces el homomorfismo inducido $f_* : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(Y, f(p))$ resulta ser un isomorfismo de grupos, para todo $p \in X$.

El cálculo explícito del grupo fundamental de un espacio dado puede ser muy difícil. Al final del siguiente apéndice presentaremos el Teorema de Van Kampen, que resulta una herramienta fundamental para hallar presentaciones de grupos fundamentales de espacios. Antes de presentar este teorema, necesitamos desarrollar algunos conceptos básicos de presentaciones de grupos.

Apéndice B

Presentación de Grupos

En este apéndice hacemos un recuento de las herramientas sobre teoría de grupos que usamos en el desarrollo del trabajo. Los grupos asociados a un enlace los podemos describir mediante presentaciones de grupos, entonces resulta útil diferenciar cuando dos presentaciones pertenecen al mismo grupo. En general, éste es un problema que no tiene solución, pero en algunos casos particulares, existen varios métodos para hacerlo, uno de estos métodos son las transformaciones de Tietze, que nos permiten manipular las presentaciones de los grupos.

B.1 Grupos Libres

Un concepto muy importante en teoría de grupos es el de grupo libre, la definición formal es la siguiente: *Un grupo F es libre en un conjunto X si para todo grupo G y toda función $f : X \rightarrow G$, f se extiende a un homomorfismo $\phi : F \rightarrow G$ único.*

Se sigue de la definición que si F es libre en X , entonces X genera a F , si X es finito, llamamos a su cardinal, $|X|$, el *rango* del grupo F y este número resulta ser el mismo, sin importar el conjunto sobre el cual el grupo es libre, es decir, en [9] se prueba que F_i es un grupo libre en conjunto finito X_i , $i = 1, 2$, $F_1 \cong F_2$ si y sólo si $|X_1| = |X_2|$. Además, dado un conjunto no vacío X , siempre hay un grupo libre en X . Mas aún, todo grupo es una imagen homomorfa de un grupo libre. Con este resultado y el teorema de isomorfismo podemos considerar cualquier grupo como el cociente de un grupo libre. Sea X un conjunto y $F(X)$ un grupo libre en X . Dado un conjunto $R \subset F(X)$, definimos \overline{R} como la intersección de todos los subgrupos normales de $F(X)$ que contienen a R , llamamos \overline{R} a la *clausura normal* de R en F . Podemos definir lo siguiente: Decimos que un grupo G tiene *presentación* $\langle X \mid R \rangle$

$$\text{si } G \cong \frac{F(X)}{\overline{R}}.$$

Los elementos de X los llamamos generadores y a los de R los llamamos relaciones (relatores). Si X es finito, diremos que G es *finitamente generado*. Si R es finito, diremos que G es *finitamente relacionado*. Y si se cumplen ambas, diremos que G tiene una *presentación finita*.

Conocer las presentaciones de los grupos nos lleva al problema del isomorfismo, es decir, dadas dos presentaciones $\langle X \mid R \rangle$ y $\langle Y \mid S \rangle$ ¿hay algún algoritmo que permita decidir si son presentaciones del mismo grupo? Hay una gran dificultad para saber si dos presentaciones en

realidad corresponden al mismo grupo, mas aún no hay un algoritmo que, en un número finito de pasos, nos diga cómo modificar las relaciones o los generadores para llegar de una a la otra. En la práctica existen varios métodos, pero ellos sólo nos dicen los cambios que están permitidos hacer, o condiciones necesarias para un isomorfismos entre las presentaciones, pero en general este problema no es decidible.

Consideremos un homomorfismo $f : F(X) \rightarrow F(Y)$ con la propiedad $f(\overline{R}) \subset \overline{S}$, denotaremos tal función como $f : \langle X | R \rangle \rightarrow \langle Y | S \rangle$ y la llamaremos *función de presentaciones*. Se sigue de manera inmediata que toda función de presentación $f : \langle X | R \rangle \rightarrow \langle Y | S \rangle$ determina un único homomorfismo

$$f_* : \frac{F(X)}{R} \rightarrow \frac{F(Y)}{S}$$

tal que $f_* \circ \pi = \pi \circ f$ donde π es el homomorfismo canónico, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{f} & F(Y) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \frac{F(X)}{R} & \xrightarrow{f_*} & \frac{F(Y)}{S} \end{array} .$$

La composición se define de manera natural, si $f : \langle X | R \rangle \rightarrow \langle Y | S \rangle$ y $g : \langle Y | S \rangle \rightarrow \langle Z | T \rangle$ son funciones de presentación, definimos $g \circ f : \langle X | R \rangle \rightarrow \langle Z | T \rangle$ como el homomorfismo $g \circ f : F(X) \rightarrow F(Z)$. Se cumple además que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Dos funciones de presentación $f_1, f_2 : \langle X | R \rangle \rightarrow \langle Y | S \rangle$ son homotópicas ($f_1 \simeq f_2$), si para todo $x \in X$, $f_1(x) f_2(x^{-1}) \in \overline{S}$.

Claramente esto equivale a $(\pi \circ f_1)(x) = (\pi \circ f_2)(x)$, para todo $x \in F(X)$.

Por otro lado, $f_1 \simeq f_2$ si y sólo si $f_{1*} = f_{2*}$. En efecto, $\pi \circ f = \pi \circ f_2 \iff f_{1*} \circ \pi = \pi \circ f_1 = f_{2*} \circ \pi \iff f_{1*} = f_{2*}$.

Como un corolario inmediato se tiene: *Si $f_1 \simeq f_2$ y $g_1 \simeq g_2$, entonces $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$.*

Proposición B.1.1 *Sea $\theta : \frac{F(X)}{R} \rightarrow \frac{F(Y)}{S}$ un homomorfismo de grupos. Entonces existe una función de presentación $f : \langle X | R \rangle \rightarrow \langle Y | S \rangle$ tal que $f_* = \theta$. Más aún, cualquier par de tales funciones de presentación son homotópicas.*

Prueba. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(X) & & F(Y) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \frac{F(X)}{R} & \xrightarrow{\theta} & \frac{F(Y)}{S} \end{array}$$

como π es sobreyectiva, dado un elemento $x \in X$ podemos escoger un $y_x \in F(Y)$ tal que $\theta(\pi(x)) = \pi(y_x)$.

Como $F(X)$ es grupo libre, existe un homomorfismo $f : F(X) \rightarrow F(Y)$ tal que $f(x) = y_x$.

Es claro que $(\pi \circ f)(x) = (\theta \circ \pi)(x)$ para todo $x \in F(X)$ y que $f(\overline{R}) \subset \overline{S}$. Por tanto $f_* = \theta$. ■

B.2 Transformaciones de Tietze

Sea G un grupo presentado por $\langle X \mid R \rangle$, entonces G es isomorfo a $\langle X' \mid R' \rangle$ donde X', R' son obtenidos de la siguiente forma

R_+	Adjuntar una relación	$X' = X$	$R' = R \cup \{r\}, r \in \overline{R} \setminus R$
R_-	Remover una relación	$X' = X$	$R' = R \setminus \{r\}, r \in R \cap \overline{R} \setminus \{r\}$
X_+	Adjuntar un generador	$X' = X \cup \{y\}$	$R' = R \cup \{y^{-1}\omega\}$
X_-	Remover un generador	$X' = X \setminus \{a\}$	$R' = R \setminus \{a^{-1}\omega\}$, donde $\omega \in \langle a, X \rangle$ y $a^{-1}\omega$ es la única relación que involucra a .

Ejemplo B.2.1 Muestre mediante transformaciones de Tietze que los grupos

$$\langle a, b \mid ba^{-1}bab^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^{-1}a \rangle$$

y

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_3x_4^{-1}x_3^{-1}x_1, x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_3, x_4x_2^{-1}x_3^{-1}x_2 \rangle$$

son isomorfos.

Solución. Sea $\langle a, b \mid ba^{-1}bab^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^{-1}a \rangle = \langle X \mid R \rangle$. Agregamos dos generadores x, y a X , entonces debemos agregar las relaciones $x^{-1}w_1, y^{-1}w_2$ a R , donde $w_1 = aba^{-1}$ y $w_2 = b^{-1}aba^{-1}b$. Así

$$\langle a, b, x, y \mid ba^{-1}bab^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^{-1}a, x^{-1}aba^{-1}, y^{-1}b^{-1}aba^{-1}b \rangle$$

Como $aba^{-1} = x$, entonces podemos reemplazar las relaciones por $ba^{-1}bx^{-1}ba^{-1}b^{-1}a$, $ab^{-1}a^{-1}x$ y $y^{-1}b^{-1}xb$. Así

$$\begin{aligned} &\langle a, b, x, y \mid ba^{-1}bab^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^{-1}a, x^{-1}aba^{-1}, y^{-1}b^{-1}aba^{-1}b \rangle \\ &\simeq \langle a, b, x, y \mid ba^{-1}bx^{-1}ba^{-1}b^{-1}a, ab^{-1}a^{-1}x, y^{-1}b^{-1}xb \rangle \end{aligned}$$

Ahora, $(b^{-1}a)ba^{-1}bx^{-1}ba^{-1}b^{-1}a(b^{-1}a)^{-1} = yx^{-1}ba^{-1} \in \overline{R}$ y además $y = b^{-1}xb$ entonces

$$\langle a, b, x, y \mid ba^{-1}bx^{-1}ba^{-1}b^{-1}a, x^{-1}aba^{-1}, y^{-1}b^{-1}xb \rangle \simeq \langle a, b, x, y \mid yx^{-1}ba^{-1}, ab^{-1}a^{-1}x, yb^{-1}x^{-1}b \rangle$$

Pero $yx^{-1}ba^{-1} = yx^{-1}a^{-1}aba^{-1} = yx^{-1}a^{-1}x \in \bar{R}$, entonces $x^{-1}ax^{-1}y \in \bar{R}$ y también $yx^{-1}ax^{-1} \in \bar{R}$ y así se tiene que $xy^{-1}x^{-1}a \in \bar{R}$ por tanto

$$\begin{aligned} \langle a, b, x, y \mid yx^{-1}ba^{-1}, x^{-1}aba^{-1}, y^{-1}b^{-1}xb \rangle &\simeq \langle a, b, x, y \mid xy^{-1}x^{-1}a, ab^{-1}a^{-1}x, yb^{-1}x^{-1}b \rangle \\ &\simeq \langle a, b, x, y \mid xy^{-1}x^{-1}a, ab^{-1}a^{-1}x, yb^{-1}x^{-1}b \rangle \\ &\simeq \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_3x_4^{-1}x_3^{-1}x_1, x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_3, x_4x_2^{-1}x_3^{-1}x_2 \rangle \end{aligned}$$

Proposición B.2.1 *Dos presentaciones finitas definen presentaciones isomorfas si y sólo si es posible pasar de la una a la otra por una sucesión finita de transformaciones de Tietze.*

Una prueba de esta proposición se puede ver en [9].

B.3 Subgrupos de palabras

En esta parte veremos como se construye uno de los subgrupos mas importantes asociados al un grupo de un enlace, este subgrupo siempre es normal y es el mas pequeño que nos abelianiza el grupo original.

Sea $F(X)$ un grupo libre en un conjunto $X \neq \phi$, $W \subset F(X)$ y G un grupo. Sea $\Omega = \Omega(G) = \{\omega : F(X) \rightarrow G \mid \omega \text{ es homomorfismo}\}$. Definimos $W(G) = \langle \omega(w) \mid w \in W, \omega \in \Omega \rangle \leq G$. Llamamos a este subgrupo el subgrupo de palabras y cumple $W(G) \triangleleft G$, ya que el automorfismo conjugación pertenece a Ω , además este subgrupo es completamente invariante, es decir, $\phi(W(G)) \subset W(G)$, para todo homomorfismo ϕ .

Ejemplo B.3.1 *Sea G un grupo. Tomemos $X = \{x, y\}$ y $F(x, y)$ un grupo libre en X , escojamos como $W = \{[x, y]\} \subset F(x, y)$ donde $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Entonces $W(G) = G' := \langle aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G \rangle$ es el subgrupo conmutador de G . Es claro que el grupo cociente G/G' es abeliano, el cual llamaremos el grupo abelianizado y al homomorfismo canónico $a : G \rightarrow G/G'$ lo llamamos el abelianizador.*

Sean G_1, G_2 dos grupos, si $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ es un homomorfismo y $W \subset F(X)$ entonces $\phi(W(G_1)) \subset W(G_2)$, ya que $\phi \circ \omega \in \Omega(G_2)$, para todo $\omega \in \Omega(G_1)$. Por B.1.1, ϕ induce un único homomorfismo ϕ_* tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\phi} & G_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{G_1}{W(G_1)} & \xrightarrow{\phi_*} & \frac{G_2}{W(G_2)} \end{array}$$

Proposición B.3.1 *Sea $\phi : G_1 \rightarrow G_2, \psi : G_2 \rightarrow G_3$ homomorfismos de grupos. Entonces*

1. Si $\phi = Id$ entonces $\phi_* = Id$.

2. $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$.
3. Si ϕ es sobreyectiva, entonces ϕ_* también es sobreyectiva.
4. Si ϕ es isomorfismo, entonces ϕ_* también es un isomorfismo.

Hemos encontrado una condición necesaria para el problema del isomorfismo.

Como un corolario inmediato se tiene: *Dados G_1 y G_2 dos grupos isomorfos, entonces $\frac{G_1}{G'_1} \cong \frac{G_2}{G'_2}$ donde G'_1 y G'_2 son los conmutadores de G_1 y G_2 respectivamente.*

Notemos que si G es un grupo y K un grupo abeliano, y se tiene $\theta : G \rightarrow K$ un homomorfismo, entonces existe un único homomorfismo $\theta' : \frac{G}{G'} \rightarrow K$ tal que $\theta' \circ \pi = \theta$, donde π es el homomorfismo canónico. En efecto, si $[g_1, g_2] \in G$ entonces $\theta([g_1, g_2]) = 1$ pues K es abeliano, luego $\overline{G'} \subset \ker \theta$, pero $G' = \langle [g_1, g_2] \mid g_2, g_2 \in G \rangle \subset \overline{G'}$ por tanto θ' está bien definida por $\theta'(\bar{g}) = \theta(g)$. La unicidad es trivial.

Proposición B.3.2 *Sea $\langle X \mid R \rangle$ una presentación de un grupo. Entonces*

$$\langle X \mid R \cup \{[x_i, x_j] \mid x_j, x_i \in X\} \rangle$$

es una presentación del grupo abelianizado de $\frac{F(X)}{R}$.

Prueba. Llamemos $\tilde{F} = \frac{F(X)}{R}$ y $R' = R \cup \{[x_i, x_j] \mid x_j, x_i \in X\}$. Sean $\pi : F(X) \rightarrow \tilde{F}$ y $\alpha : \tilde{F} \rightarrow \frac{\tilde{F}}{R'}$ los homomorfismos canónicos. Claramente $\overline{R'} = \ker \alpha \circ \pi$. Por tanto $\frac{\tilde{F}}{R'} \cong \frac{F(X)}{R}$. ■

B.4 Producto libre de grupos

Una estructura que se estudia muy poco en los cursos de álgebra es el producto libre y su generalización al producto libre amalgamado, los cuales aparecen en el cálculo del grupo fundamental de enlaces, así que es importante conocer su estructura.

Sea un conjunto de grupos $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, un producto libre de grupos es un grupo G y una colección de homomorfismos $i_\lambda : G_\lambda \rightarrow G$ tal que, dados un grupo H y un conjunto de homomorfismos $\varphi_\lambda : G_\lambda \rightarrow H$, existe un único homomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$ tal que $\varphi_\lambda = \varphi \circ i_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Notemos que los homomorfismos i_λ son inyectivos, pues si tomamos $H = G_\lambda$ y $\varphi_\lambda = Id_H$, se tiene que para cualquier par $g, h \in G_\lambda$ tales que $i_\lambda(g) = i_\lambda(h)$ implica que $\varphi(i_\lambda(g)) = \varphi(i_\lambda(h))$ y así $g = \varphi_\lambda(g) = \varphi_\lambda(h) = h$.

Proposición B.4.1 *Si G y \tilde{G} son el producto libre del mismo conjunto de grupos $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, entonces $G \simeq \tilde{G}$.*

Prueba. Supongamos que existen colecciones de homomorfismos $i_\lambda : G_\lambda \rightarrow G$ e $\bar{i}_\lambda : G_\lambda \rightarrow \bar{G}$. Sea $\alpha_\lambda : G_\lambda \rightarrow G_\lambda$ un isomorfismo, para todo $\lambda \in \Lambda$.

Existen $\varphi_1 : G \rightarrow \bar{G}$, $\varphi_2 : \bar{G} \rightarrow G$ tales que $\varphi_1 \circ i_\lambda = \bar{i}_\lambda \circ \alpha_\lambda$ y $\varphi_2 \circ i_\lambda = \bar{i}_\lambda \circ \alpha_\lambda^{-1}$. Así $\varphi_2 \circ \varphi_1 \circ i_\lambda = \varphi_2 \circ \bar{i}_\lambda \circ \alpha_\lambda = \bar{i}_\lambda \circ \alpha_\lambda^{-1} \circ \alpha_\lambda = i_\lambda$, pero $Id_G \circ i_\lambda = i_\lambda$. Por tanto $\varphi_2 \circ \varphi_1 = Id_G$. De manera análoga se tiene que $\varphi_2 \circ \varphi_1 = Id_{\bar{G}}$. Luego φ_1 es un isomorfismo ■

La siguiente proposición nos garantiza la existencia de productos libres; daremos un breve bosquejo de la prueba.

Proposición B.4.2 *A cada conjunto no vacío de grupos $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ le corresponde un producto libre.*

Prueba. Sea $U = \dot{\cup} G_\lambda$ la unión disjunta de todos los grupos y consideremos el conjunto de palabras $S = \{g = g_1 \cdots g_r \mid g_i \in G_{\lambda_i}\}$; la palabra vacía está permitida. Definimos la relación de equivalencia en S como sigue: dos palabras h, g en S están relacionadas, $g \sim h$, si se puede pasar de g a h mediante un número finito de las siguientes operaciones:

1. Insertar el elemento identidad de algún G_λ .
2. Borrar el elemento identidad de algún G_λ , si aparece en la palabra.
3. Reemplazar dos elementos consecutivos que estén en el mismo grupo por su producto en el grupo.

Entonces el grupo $\{[g] = \bar{g} \mid g \in S\}$ es un producto libre de $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. ■

El producto libre G del conjunto de grupos $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ lo denotamos por $G = Fr_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, cada G_λ lo llamamos un factor libre. Si Λ es finito escribimos $G = G_1 \star G_2 \star \cdots \star G_n$.

Proposición B.4.3 *Sea G un grupo generado por subgrupos $G_\lambda, \lambda \in \Lambda$. Suponga que cada elemento de G se puede escribir de manera única de la forma $g_1 \cdots g_r$, donde $r \geq 0$ y $1 \neq g_i \in G_{\lambda_i}, \lambda_i \neq \lambda_{i+1}$. Entonces G es un producto libre de los G_λ 's.*

Cuando además hay un grupo H y homomorfismos inyectivos $h_\lambda : H \rightarrow G_\lambda$, podemos definir el conjunto $I = \left\{ h_\alpha(h) h_\beta(h)^{-1} \mid \text{Para todo } h \in H \text{ y todo } \alpha, \beta \in \Lambda \right\}$. Entonces $G = Fr_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda / I$ se llama el producto libre con amalgama H o simplemente el producto libre amalgamado por H , si Λ es finito es denota por $G = G_1 \star_H G_2 \star_H \cdots \star_H G_n$.

B.5 Teorema de Van-Kampen

Sea X un espacio topológico tal que $X = X_1 \cup X_2$ donde X_1, X_2 son abiertos, $X_0 = X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ y X_1, X_2, X_0 son arco conexos. Sea $p \in X_0$ y $G = \pi_1(X, p), G_i = \pi_1(X_i, p), i = 0, 1, 2$.

Los homomorfismos $\omega_i, i = 0, 1, 2$ y $\theta_j, j = 1, 2$ inducidos por las funciones inclusión hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G_0 & & \\
 & \swarrow \theta_1 & & \searrow \theta_2 & \\
 G_1 & & \downarrow \omega_0 & & G_2 \\
 & \searrow \omega_1 & & \swarrow \omega_2 & \\
 & & G & &
 \end{array} \tag{B.1}$$

Teorema B.5.1 (Van Kampen) *Las imágenes de los homomorfismos $\omega_i(G_i), i = 0, 1, 2$ generan a G . Más aún, si H es un grupo y $\psi : G_i \rightarrow H, i = 0, 1, 2$ son homomorfismos tales que $\psi_0 = \psi_1 \circ \theta_1 = \psi_2 \circ \theta_2$, entonces existe un único homomorfismo $\lambda : G \rightarrow H$ tal que $\psi_i = \lambda \circ \omega_i, i = 0, 1, 2$.*

Para una prueba de este teorema véase [9].

En el siguiente enunciado se utiliza la notación de B.1. Se sigue inmediatamente de Van Kampen que si X_1 y X_2 son simplemente conexos, entonces $X = X_1 \cup X_2$ también es simplemente conexo.

Corolario B.5.2 *Si $G_0 = \{0\}$ y G_1, G_2 son grupos libres sobre $A_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ y $A_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots\}$. Entonces G es libre sobre $\{\omega_1(\alpha_1), \omega_1(\alpha_2), \dots, \omega_2(\beta_1), \omega_2(\beta_2), \dots\}$.*

Prueba. Sea H un grupo libre sobre $C = \{x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots\}$ y sean

$$\begin{aligned}
 \psi_1(\alpha_j) &= x_j, j = 1, 2, \dots \\
 \psi_2(\beta_k) &= y_k, k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Como G_1 y G_2 son libres entonces ψ_1, ψ_2 se extienden a los homomorfismos $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2$

$$\begin{array}{ccc}
 A_1 & \xrightarrow{\psi_1} & H \\
 \downarrow & \nearrow & \bar{\psi}_1 \\
 G_1 & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A_2 & \xrightarrow{\psi_2} & H \\
 \downarrow & \nearrow & \bar{\psi}_2 \\
 G_2 & &
 \end{array}$$

Tomemos $\psi_0 : G_0 \rightarrow H$ el homomorfismo trivial. Así $\psi_0 = \bar{\psi}_1 \circ \theta_1 = \bar{\psi}_2 \circ \theta_2$. Entonces, por Van Kampen, existe un homomorfismo $\lambda : G \rightarrow H$ tal que $\psi_i = \lambda \circ \omega_i, i = 0, 1, 2$ Se tiene entonces

$$\begin{aligned}
 \lambda(\omega_1(\alpha_j)) &= \psi_1(\alpha_j) = x_j, j = 1, 2, \dots \\
 \lambda(\omega_2(\beta_k)) &= \psi_2(\beta_k) = y_k, k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Puesto que H es libre, podemos construir a un homomorfismo $\mu : H \rightarrow G$ tal que

$$\begin{aligned}\mu(x_j) &= \omega_1(\alpha_j), j = 1, 2, \dots \\ \mu(y_k) &= \omega_2(\beta_k), k = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Es fácil ver que $\mu \circ \lambda$ y $\lambda \circ \mu$ es la identidad. ■

Corolario B.5.3 *Si X_2 es simplemente conexo, entonces el homomorfismo ω_1 es sobreyectivo. Más aún, si $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots \rangle = G_0$ entonces $\ker \omega_1 = \overline{\{\theta_1(\alpha_1), \theta_1(\alpha_2), \dots\}}$.*

Prueba. Como G_2 es trivial, entonces $\omega_1(G_1) = \langle \omega_1(G_1) \rangle = G$. Es decir, ω_1 sobre.

Por otro lado, $\omega_1(\theta_1(\alpha_j)) = \omega_2(\theta_2(\alpha_j)) = 1, j = 1, 2, \dots$. Por tanto $\overline{\{\theta_1(\alpha_1), \theta_1(\alpha_2), \dots\}} \subset \ker \omega_1$.

Recíprocamente, sea $\beta \in \ker \omega_1$ y sea

$$\psi_1 : G_1 \rightarrow \frac{G_1}{\overline{\{\theta_1(\alpha_1), \theta_1(\alpha_2), \dots\}}}$$

el homomorfismo canónico.

Llamemos $\psi_0 = \psi_1 \circ \theta_1$, es claro que $\psi_0 = 0$. Definamos el homomorfismo

$$\psi_2 : G_2 \rightarrow \frac{G_1}{\overline{\{\theta_1(\alpha_1), \theta_1(\alpha_2), \dots\}}}$$

como el homomorfismo trivial, entonces $\psi_1 \circ \theta_1 = \psi_0 = \psi_2 \circ \theta_2$, luego por Van Kampen, existe un homomorfismo

$$\lambda : G \rightarrow \frac{G_1}{\overline{\{\theta_1(\alpha_1), \theta_1(\alpha_2), \dots\}}}$$

tal que $\psi_1 = \lambda \circ \omega_1$, por tanto $\psi_1(\beta) = \lambda(\omega_1(\beta)) = 1$, es decir, $\beta \in \overline{\{\theta_1(\alpha_1), \theta_1(\alpha_2), \dots\}}$. ■

Con las mismas hipótesis del teorema de Van Kampen, se tiene este mismo teorema en términos de presentaciones de grupos.

Teorema B.5.4 (Van Kampen) *Si*

$$\begin{aligned}G_1 &= \langle x_1, x_2, \dots \mid r_1, r_2, \dots \rangle \\ G_2 &= \langle y_1, y_2, \dots \mid s_1, s_2, \dots \rangle \\ G_0 &= \langle z_1, z_2, \dots \mid t_1, t_2, \dots \rangle\end{aligned}$$

Entonces

$$G = \langle x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots \mid r_1, r_2, \dots, s_1, s_2, \dots, \{\theta_1(z_k)\theta_2(z_k^{-1}) \mid k = 1, 2, \dots\} \rangle$$

Apéndice C

Aplicación de los Quandles

Como una aplicación importante de los Quandles, veremos en este Apéndice el *álgebra de Conway*, y a partir de ella encontraremos un invariante de enlaces.

Definición C.0.1 Sea A un R -álgebra, con dos operaciones adicionales \circ y $/$ las cuales son inversas una a la otra. Si estas operaciones cumplen para todo $a, b, c, d \in A$

1. $(a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ c) \circ (b \circ d)$,
2. $(a/b) / (c/d) = (a/c) / (b/d)$,
3. $(a/b) \circ (c/d) = (a \circ c) / (b \circ d)$,
4. Existen elementos $a_n \in A$, con $n \geq 1$ tales que $a_n = a_n \circ a_{n+1}$ y $a_n = a_n / a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

Entonces diremos que A es un *álgebra de Conway*.

Veamos que en efecto existen estas estructuras algebraicas.

Ejemplo C.0.1 Consideremos la \mathbb{Z} -álgebra $A = \mathbb{Z}[x]$ y sean $\alpha = 1, \beta = x$. Definimos para todo $p, q \in A$ las operaciones siguientes

$$\begin{aligned} p \circ q &= \alpha p + \beta q \\ p/q &= \alpha^{-1}p - \alpha^{-1}\beta q \end{aligned}$$

Tomemos $a_1 = 1$ y $a_n = 0$ para todo $n \geq 2$. Entonces A con estas operaciones es una *álgebra de Conway*.

Definición C.0.2 Un diagrama de un nudo se llama *ascendente* (o *descendente*) si es posible escoger un punto en el diagrama tal que al recorrer el nudo pasemos todos los cruces por primera vez por arriba (o por abajo). De manera similar, un diagrama de un enlace es *ascendente* (o *descendente*) si en cada componente existe un punto tal que al recorrer esa componente pasemos todos los cruces por arriba (por debajo), recorriendo una componente a la vez.

Lema C.0.5 Un diagrama ascendente (o descendente) representa un enlace trivial.

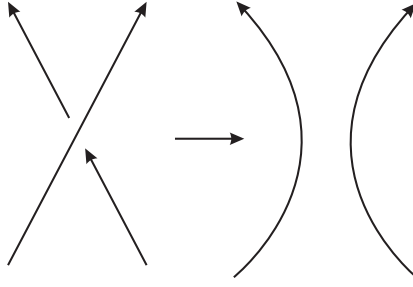


Figura C-1: $L \rightarrow L_0$

Prueba. Sea L el diagrama de un enlace de n -componentes. Probemos esto por inducción sobre el número de cruces, k .

Si $k = 0$, no hay nada que probar.

Si $k = 1$, la única posibilidad en este caso, sería que todas las componentes sean sueltas y triviales, exceptuando una con un solo cruce, pero esta también sería trivial, efectuando un movimiento de tipo I.

Supongamos que la afirmación es cierta para enlaces de con k cruces, y supongamos que L es un diagrama ascendente de un enlace con $k + 1$ cruces. Notemos que los cruces entre componentes son un número par, y como recorreremos una componente a la vez, entonces una de ellas debe estar encima de la otra y así podemos realizar movimientos de Reidemeister tipo II hasta separar las dos componentes. Por tanto podemos separar a L en dos enlaces con un número de cruces menor que $k + 1$, y aplicando la hipótesis de inducción a cada uno de estos enlaces, se tiene que L es trivial.

En el caso de un nudo con una sola componente, tomamos los primero cruces que se recorren, se tiene que si son distintos se puede realizar movimientos de Reidemeister tipo II, y si es el mismo cruce, se puede realizar un movimiento de Reidemeister tipo I, así obtenemos un diagrama del nudo con menos de k cruces. ■

Un corolario inmediato de este lema es, dado cualquier enlace, podemos cambiar sus cruces hasta obtener un enlace trivial.

Definición C.0.3 Sea L un diagrama de un enlace de n -componentes. Si a es un cruce positivo de L , definimos L_- y L_0 como los diagramas que se obtienen de L al cambiar el cruce a por un cruce negativo y quitar el cruce, respectivamente. Si a es negativo, definimos L_+ cambiando sólo el cruce a por uno positivo.

Teorema C.0.6 Para toda álgebra de Conway existe una función W del conjunto de los diagramas de enlaces en el álgebra, la cual es un invariante de enlaces orientados.

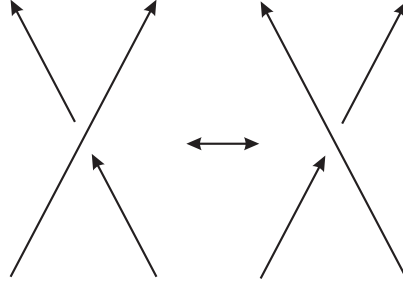


Figura C-2: $L_+ \leftrightarrow L_-$

Prueba. Sea A un álgebra de Conway y denotemos por D el conjunto de los diagramas de enlaces.

Definamos $W : D \rightarrow A$ de manera recursiva como

$$W(L) = a_n \text{ si } L \text{ es trivial de } n\text{-componentes.}$$

$$W(L) = W(L_-) \circ W(L_0) \text{ si } L \text{ tiene un cruce positivo.}$$

$$W(L) = W(L_+) / W(L_0) \text{ si } L \text{ tiene un cruce negativo.}$$

Luego, si L tiene cruces negativos y positivos a la vez veamos que W está bien definida. Dado cualquier enlace L , por Definición C.0.5 existe una sucesión de cambios de cruce que nos da un enlace trivial L' a partir de L . Así $W(L)$ es una sucesión de $a_{n_j} \circ a_{n_i}$ y a_{n_r} / a_{n_s} , con $n_j, n_i, n_r, n_s \geq 1$ y por tanto $W(L) \in A$.

Mostremos que W es un invariante bajo los movimientos de Reidemeister. Sea L un diagrama de un enlace al cual se le pueda aplicar los movimientos de Reidemeister.

Si L' es un diagrama de un enlace obtenido a partir de L mediante un movimiento de tipo I, es decir, L y L' difieren sólo en una vecindad. Entonces $W(L)$ y $W(L')$ difieren, sólo en este cruce por los valores a_{n_i} y $a_{n_i} \circ a_{n_i+1}$, pero en A se cumple $a_{n_i} = a_{n_i} \circ a_{n_i+1}$. Por tanto $W(L) = W(L')$.

Si L' se obtiene de L realizando un movimiento de tipo II. Denotemos por $L_{-+} = L$ y $L_{+-} = L'$, tenemos entonces las siguiente cadena de diagramas C-3 notemos que $L_{-0} = L_{0-}$, luego $W(L) = W(L_{--}) \circ W(L_{-0}) = (W(L_{+-}) / W(L_{0-})) \circ W(L_{-0}) = W(L_{+-}) = W(L')$. De la propiedad $a_n = a_n \circ a_{n+1}$ y $a_n = a_n / a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, aplicada a los dos cruces, se sigue que $W(L) = W(L_{00})$.

Finalmente, consideremos a L' igual a L excepto por una vecindad donde se ha realizado un movimiento de tipo III.

En este caso hay 4 orientaciones posibles donde los cruces x, y, z tienen distintos signos, denotando a $L = L_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}$ donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ y ε_3 son los signos de x, y y z respectivamente, tenemos

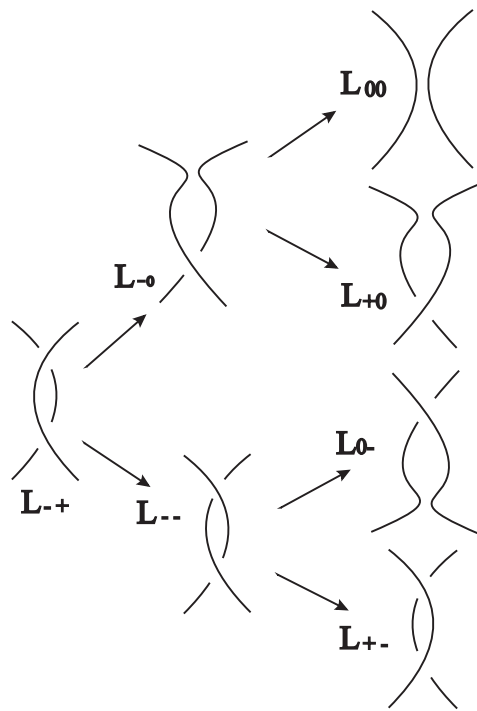


Figura C-3:

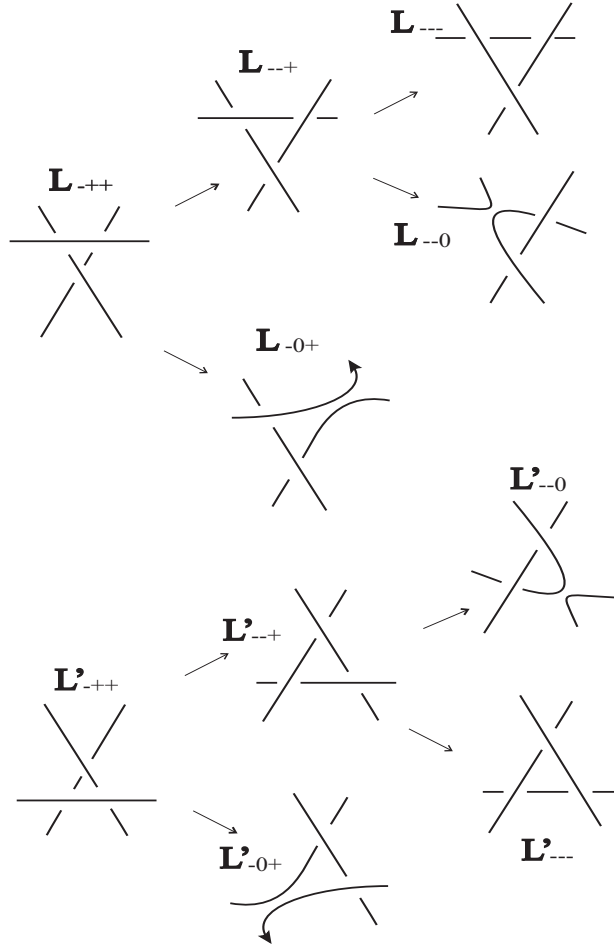


Figura C-4:

los casos $L_{-++}, L_{---}, L_{+--+}, L_{++--}$. Consideremos el caso L_{-++} , los otros tres se deducen de la misma forma. De la cadena de diagramas C-4 notamos que los diagramas de L_{--0} y L'_{--0} coinciden y que L'_{-0+} puede obtenerse de L'_{-0+} realizando movimientos de tipo II. Luego

$$W(L_{-++}) = W(L_{--+}) \circ W(L_{-0+}) = (W(L_{---}) \circ W(L_{-0})) \circ W(L_{-0+}) \text{ y}$$

$$W(L'_{-++}) = W(L'_{--+}) \circ W(L'_{-0+}) = (W(L'_{---}) \circ W(L'_{-0})) \circ W(L'_{-0+}).$$

■

Apéndice D

Anillo Grupo

En este apéndice mostraremos la construcción y conceptos básicos del anillo grupo, que permite construir un anillo a partir de un grupo G y un anillo R , de tal forma que las propiedades de G y de R queden reflejadas en el nuevo anillo. Esta construcción se puede generalizar cambiando la estructura de grupo por una más general llamada monoide y la construcción que se obtiene es una R -álgebra.

Definición D.0.4 Sea G un monoide y R un anillo conmutativo con unidad. Sea

$$RG = \{ \nu : G \rightarrow R \mid \nu(x) \neq 0 \text{ para un número finito de } x \in G \}.$$

Definimos en RG las operaciones. Para todo $a \in R, \nu, \eta \in RG$ y $g \in G$

1. $\eta + \nu : G \rightarrow R$ tal que $(\eta + \nu)(g) = \eta(g) + \nu(g)$,
2. $a\nu : G \rightarrow R$ tal que $(a\nu)(g) = a(\nu(g))$,
3. $\nu\eta : G \rightarrow R$ tal que $(\nu\eta)(g) = \sum_{\substack{(h,l) \in G \times G \\ hl = g, \eta(h)\nu(l) \neq 0}} \nu(h)\eta(l)$.

RG con estas operaciones es un álgebra. Cuando G es un grupo se llama el *álgebra grupo* y la operación 3 se puede escribir como $(\nu\eta)(g) = \sum_{l \in G} \nu(gl^{-1})\eta(l)$.

Note que RG puede ser no conmutativo respecto a la operación 3, si esta operación conmuta diremos simplemente que RG es conmutativo. Por otro lado, hay una forma de ver los elementos de RG que puede simplificar algunos cálculos y es equivalente a la definición anterior.

Proposición D.0.7 Sea G un grupo y R un anillo conmutativo con unidad. Si definimos el conjunto

$$R(G) = \left\{ \sum_{g \in G} r_g g \mid r_g \in R \text{ es diferente de cero para finitos valores de } g \right\}$$

con las operaciones

1. $\sum_{g \in G} r_g g + \sum_{h \in G} r_h h = \sum_{h, g \in G} r_g g + r_h h,$
2. $a \sum_{g \in G} r_g g = \sum_{g \in G} s r_g g, s \in R,$
3. $\left(\sum_{g \in G} r_g g \right) \left(\sum_{h \in G} r_h h \right) = \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} r_g r_h g h = \sum_{\substack{(h, l) \in G \times G \\ hl = g}} r_l r_h g.$

Entonces, $R(G)$ es una R -álgebra y $R(G) \simeq RG$.

Prueba. Es fácil ver que con estas operaciones en efecto $R(G)$ es una álgebra. Sea $\delta = \{\delta_g \mid g \in G\}$ donde $\delta_g : G \rightarrow R$ esta definida como

$$\delta_g(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } g = h \\ 0 & \text{si } g \neq h \end{cases}$$

Como $\eta(x) = \sum_{g \in G} \eta(g) \delta_g(x)$ para todo $\eta \in RG$, se ve fácilmente que δ define una base de RG como R -módulo.

Entonces el homomorfismo de álgebras definido por

$$\begin{aligned} \varphi : RG &\rightarrow R(G) \\ \delta_g &\mapsto g \end{aligned}$$

es un isomorfismo de álgebras. ■

De aquí se sigue que podemos ver a G embebido en RG . Más aún, G forma una base para RG como R -módulo. También se puede ver a R como un subanillo de RG de forma natural.

Nota D.0.1 Es fácil probar que si $g, h \in G$ entonces

1. $\delta_g \delta_h = \delta_{gh},$
2. $\delta_e \delta_g = \delta_g \delta_e = \delta_g.$

Ahora veamos una condición necesaria y suficiente para que RG sea conmutativo.

Proposición D.0.8 RG es conmutativo si y sólo si G es conmutativo.

Prueba. En efecto,

$$\left(\sum_{g \in G} r_g g \right) \left(\sum_{h \in G} r_h h \right) = \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} r_g r_h g h = \sum_{h \in G} \sum_{g \in G} r_h r_g h g = \left(\sum_{h \in G} r_h h \right) \left(\sum_{g \in G} r_g g \right) \quad \blacksquare$$

El siguiente teorema nos permite extender homomorfismos de grupos a homomorfismos de anillos.

Teorema D.0.9 Sea $\varphi : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Entonces existe un único homomorfismo de álgebras $\bar{\varphi} : RG \rightarrow RH$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & H \\ i \downarrow & & \downarrow i \\ RG & \rightarrow & RH \end{array}$$

donde i es el embebimiento natural.

Prueba. Se prueba de manera directa que la función $\bar{\varphi} : RG \rightarrow RH$ definida por $\bar{\varphi} \left(\sum_{g \in G} r_g g \right) = \sum_{g \in G} r_{\varphi(g)} \varphi(g)$ es homomorfismo de álgebras. Ahora bien, $\bar{\varphi}(i(g)) = \bar{\varphi}(g) = \varphi(g) = i(\varphi(g))$. La unicidad es clara de la definición. ■

En este trabajo reemplazamos el anillo grupo para el caso particular en el que el anillo es \mathbb{Z} . En este caso particular se tiene un resultado adicional que usaremos en el Capítulo 2. Sabemos que en un anillo cualquiera no necesariamente existe el máximo común divisor (m.c.d.) de un número finito de elementos del anillo. Así, diremos que un anillo R es un *dominio m.c.d.* si este es un dominio entero y todo subconjunto finito tiene un máximo común divisor (m.c.d.)

Proposición D.0.10 Si G es un grupo cíclico infinito entonces $\mathbb{Z}G$ es un dominio m.c.d.

Prueba. Sea t el generador de G y sean $\mu = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu_n t^n \right), \eta = \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \eta_m t^m \right) \in RG$ tales que $\eta\mu = 0$. Entonces

$$0 = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu_n t^n \right) \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \eta_m t^m \right) (x) = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \mu_n \eta_m t^{n+m} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k t^k,$$

si y sólo si $c_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mu_j \eta_{k-j} = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, y así se prueba por inducción que $\mu_n, \eta_m = 0$, para todo $n, m \in \mathbb{Z}$. Por último, basta usar el algoritmo de la división sobre dos elementos para encontrar su m.c.d. y así por inducción se tiene el resultado. ■

Apéndice E

Geometría Algebraica Básica

En la teoría de representaciones de grupos infinitos resulta útil conocer algunos resultados de la Geometría Algebraica, ya que podemos encontrar una correspondencia entre curvas algebraicas y los caracteres de las representaciones. Recordemos que cuando el grupo es finito, estos caracteres nos dan bastante información de la representación, así que es una buena idea extender este concepto a los grupos infinitos.

Sea R un anillo conmutativo con unidad, y M un R -módulo. M se llama *Noetheriano*, si satisface la condición de cadenas de Submódulos ascendentes, es decir, para cualquier cadena de submódulos $I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_n \subset \dots$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $I_n = I_{n+1} = \dots$. De manera análoga se define un anillo Noetheriano, cambiando submódulo por ideales del anillo. Existen varias propiedades de los módulos (o anillos) Noetherianos, sus pruebas pueden encontrarse en [8]. Como en el caso de grupos infinitos saber cuando dos representaciones son equivalentes implica que exista una matriz de cambio de base, es fundamental que el espacio tenga una base finita, pero el siguiente teorema no da una condición necesaria y suficiente para esto.

Teorema E.0.11 *Sea R un anillo conmutativo con unidad. Un R -módulo M es Noetheriano si y sólo si todo submódulo es finitamente generado.*

Prueba. Si $\{M_j\}_{j \in J}$ es una colección de vacía de submódulos de M , entonces tiene un elemento maximal. En efecto, cualquier cadena $M_1 \subset M_2 \subset \dots$ en $\{M_j\}_{j \in J}$ es acotada, pues M es Noetheriano, por tanto existe un elemento maximal en $\{M_j\}_{j \in J}$.

Sea N un submódulo de M y sea $\{N_j\}_{j \in J}$ una colección de submódulos finitamente generados de N , como $\{0\} \in \{N_j\}_{j \in J}$ se tiene que $\{N_j\}_{j \in J} \neq \emptyset$, entonces existe un elemento maximal N' en $\{N_j\}_{j \in J}$. Si $N' \neq N$, sea $x \in N \setminus N'$. Entonces el submódulo generado por x y los generadores de N' esta en $\{N_j\}_{j \in J}$, lo cual es una contradicción, pues N' está contenido en este submódulo.

Ahora, supongamos que todo submódulo de M es finitamente generado y sea $M_1 \subset M_2 \subset \dots$ una cadena de submódulos de M , entonces el submódulo $\bigcup_{i \in I} M_i$ es generado por algún conjunto $m_1, \dots, m_r \in M$, luego cada $m_j \in M_{j_i}$, sea $s = \max\{j_i \mid i = 1, \dots, r\}$, entonces $m_1, \dots, m_r \in M_s$ por tanto $M_{s+1} \subset M_{s+2} \subset \dots \subset \bigcup_{i \in I} M_i = M_s$. ■

Notemos que esto mismo funciona cuando vemos un anillo R como un R -módulo.

Sea k un campo algebraicamente cerrado. Definimos el n -espacio afín sobre k , como $k^n =$

$\{P = (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in k\}$, llamamos a a_i las *coordenadas* de P . Sea $I \subset R = k[x_1, \dots, x_n]$. Llamamos una *variedad afín* a $V(I) = \{P \in k^n \mid f(P) = 0, \text{ para todo } f \in I\}$ si es irreducible, es decir, si no puede descomponerse como la unión $V(I) = Y_1 \cup Y_2$ de subconjuntos propios cerrados en $V(I)$. Decimos que $Y \subset k^n$ es un conjunto *algebraico afín* si existe $I \subset A$ tal que $Y = V(I)$. Cuando $I = \{f\} \subset R = k[x_1, x_2]$ y f es irreducible $V(f) = V(I)$ se llama una *curva algebraica afín* y se define el *grado de la curva* como el grado del polinomio.

A cada variedad $X = V(f_\alpha \mid \alpha \in A)$ le asociamos un ideal

$$I(X) = \{h \in R \mid h(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ para todo } (a_1, \dots, a_n) \in X\},$$

se sabe por el Nullstellensatz de T. Hilbert que esta es una correspondencia 1-1 [11].

El siguiente resultado, cuya prueba puede encontrarse en [19], fue fundamental es la sección 3.4.

Teorema E.0.12 (Bézout) *El número de puntos de intersección entre dos curvas algebraicas irreducibles distintas es igual al producto de sus grados.*

Decimos que dos elementos de k están *relacionados*, $(a_0, a_1, \dots, a_n) \sim (b_0, b_1, \dots, b_n)$, si $(b_0, b_1, \dots, b_n) = (\lambda a_0, \lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$ para algún $\lambda \in k, \lambda \neq 0$. Esta relación es de equivalencia. Se define el *n-espacio proyectivo bajo k* como $P^n = k^{n+1} / \sim$, los elementos de las clases de equivalencia se llaman *conjunto de coordenadas homogéneas* para P .

Sea $R = k[x_0, x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{d \geq 0} R_d$ donde $R_d = \left\{ \sum x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_d}^{\varepsilon_d} \mid \varepsilon_i \neq 0, i_j = 0, 1, \dots, n \right\}$, llamamos a un elemento de R_d un elemento *homogéneo de grado d*. Si $f \in R_d$ entonces f tiene grado d , y si pensamos en f como una función de P^n en P , entonces $f(a_0, a_1, \dots, a_n) = \lambda^d f(a_0, a_1, \dots, a_n)$ y así podemos definir una función de P^n en $\{0, 1\}$ como $\hat{f}(P) = 0$ si $f(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0$ y $\hat{f}(P) = 1$ si $f(a_0, a_1, \dots, a_n) \neq 0$.

Entonces podemos definir $V(f) = \{P \in P^n \mid f(P) = 0\}$. $Y \subset P^n$ es un conjunto algebraico si existe un conjunto I de elementos homogéneos de R tal que

$$Y = V(I) = \{P \in P^n \mid f(P) = 0 \text{ para todo } f \in I\},$$

si además Y es irreducible entonces se llama *variedad algebraica proyectiva*.

A los espacios k^n y P^n podemos dotarlos de una topología especial, llamada la topología de Zariski, en esta topología se toman los abiertos como el complemento de los conjuntos algebraicos. Con esta topología daremos las siguientes definiciones.

Sea $Y \subset k^n$ un subconjunto abierto de una variedad afín. Una función $f : Y \rightarrow k$ es *regular* si para cada $P \in Y$ existe una vecindad abierta $U \subset Y$, y polinomios $g, h \in k[x_1, \dots, x_n]$ con h diferente de cero en U , tales que $f|_U = g/h$.

Sea $Y \subset \mathbb{P}^n$ un subconjunto abierto de una variedad proyectiva. Una función $f : Y \rightarrow k$ es *regular* si para cada $P \in Y$ existe una vecindad abierta $U \subset Y$, y polinomios $g, h \in k[x_1, \dots, x_n]$ con h diferente de cero en U , tales que $f|_U = g/h$.

Una variedad sobre k será una variedad afín proyectiva, un subconjunto abierto de una variedad proyectiva o un subconjunto abierto de una variedad afín. Si X, Y son variedades, un morfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ es una función continua tal que, para todo abierto $U \subset Y$ y para toda función regular $f : U \rightarrow k$, la función $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \rightarrow k$ es regular. φ es un isomorfismo si existe un morfismo inverso $\psi : Y \rightarrow X$ tal que $\varphi \circ \psi = Id_Y$ y $\psi \circ \varphi = Id_X$.

Si Y es una variedad, $K(Y) = \{[(f, U)] \mid f : U \rightarrow Y \text{ es una función regular}\}$ se llama *el campo de funciones de Y* , donde $[(f, U)] = \{(g, W) \mid g : W \rightarrow Y \text{ es regular y } g|_{W \cap U} = f|_{W \cap U}\}$ es una clase de equivalencia. El siguiente teorema nos permite saber cuando dos variedades en realidad son la misma, una prueba se puede encontrar en [11].

Teorema E.0.13 Sean X, Y variedades afines y $k^n = \{P = (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in k\}$. X y Y son isomorfas si y sólo si $R/I(X)$ y $R/I(Y)$ son isomorfos como k -álgebras.

Las siguientes definiciones nos ayudan a clasificar las variedades.

Como dos morfismos entre variedades son iguales si coinciden en algún abierto, entonces la siguiente relación es de equivalencia. Sean X, Y variedades, U, W abiertos de X y $\varphi : U \rightarrow Y$, $\psi : W \rightarrow Y$ morfismos, entonces $(\psi, W) \sim (\varphi, U)$ si $\psi|_{U \cap W} = \varphi|_{U \cap W}$. Se define una función *racional* $\phi : X \rightarrow Y$ como la clase de equivalencia de

$$[(\varphi, U)] = \{\psi : W \rightarrow Y \text{ un morfismo} \mid (\psi, W) \sim (\varphi, U)\}.$$

Diremos que ϕ es *birrational* si admite inversa, en este caso diremos que X y Y son *birrationalmente equivalentes* o birracionales. Las pruebas de las siguientes proposiciones se encuentran en [19].

Proposición E.0.14 Sean X, Y variedades. X y Y son birracionales si y sólo si $K(X) \simeq K(Y)$ como k -álgebras.

La siguiente proposición nos permite completar una curva afín C , a una curva \tilde{C} en el plano proyectivo.

Proposición E.0.15 Toda variedad X de dimensión r es birrational a una hipersuperficie

$$V(f) = \{P \in \mathbb{P}^{r+1} \mid f(P) = 0 \text{ y } f \text{ es un polinomio homogéneo irreducible de grado positivo}\} \subset \mathbb{P}^{r+1}$$

Sea variedad afín $Y \subset k^n$, y sean $f_1, \dots, f_t \in R = k[x_1, \dots, x_n]$ el conjunto de generadores del ideal $I(Y)$. Y es *no singular* si para todo punto $P \in Y$ el rango de la matriz $[(\partial f_i / \partial x_j)(P)]$ es $n - r$, donde r es la dimensión de Y .

Proposición E.0.16 1. Sea X una curva suave, Y una variedad. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función racional, entonces es regular.

2. Sean X, Y curvas suaves. Si $f : X \rightarrow Y$ es birracional, entonces es birregular.

Esta proposición nos dice que cualquier completación de una curva afín es única, salvo equivalencias birracionales.

Apéndice F

Grupos Discretos

Un *grupo topológico* G es a la vez un grupo y un espacio topológico, en el cual estas dos estructuras son compatibles, es decir, las funciones $x \mapsto x^{-1}$ y $(x, y) \mapsto xy$ son continuas. Dos grupos topológicos son *isomorfos* si existe una función biyectiva que es a la vez homomorfismo y homeomorfismo. Un grupo topológico G es *discreto* si la topología en G es la topología discreta.

En general es difícil saber cuándo un grupo topológico es discreto, así que existen un gran número de resultados para este propósito, para una prueba de ellos ver [2], el primero de ellos es el siguiente.

Proposición F.0.17 *Sea G un grupo topológico tal que para algún $g \in G$, $\{g\}$ es abierto. Entonces G es discreto.*

Un ejemplo importante de grupos discretos es $GL_2(\mathbb{Z})$. Nos interesa encontrar otros subgrupos de $GL_2(\mathbb{C})$ que sean discretos. Por tanto resulta útil conocer ciertos resultados acerca de matrices.

Se define la norma $\|A\| = (\text{tr}(AA^*))^{1/2}$ para todo $A \in GL_2(\mathbb{C})$. Con esta norma se tiene que un subgrupo $G \leq GL_2(\mathbb{C})$ es discreto si y sólo si para todo $k > 0$ el conjunto $\{A \in G \mid \|A\| \leq k\}$ es finito. Notemos que de aquí se pueden encontrar desigualdades que nos permiten probar si un subgrupo de $GL_2(\mathbb{C})$ es discreto o no.

Recordemos que las transformaciones de Möbius se pueden representar por matrices de $GL_2(\mathbb{C})$. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ entonces $g_A(z) = g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y viceversa.

Definimos una norma para estas transformaciones en términos matriciales, sea $\text{traza}^2(g) = \text{tr}^2(g) = \frac{(\text{tr}(A))^2}{\det A}$ y sea $\|g\| = \frac{\|A\|}{|\det A|^{1/2}}$. Con esto definimos ciertas formas especiales de transformaciones. Las pruebas de los siguientes teoremas se encuentran en [2].

Sea g una transformación de Möbius diferente de la identidad. Entonces g se llama *elíptica* si y sólo si $\text{tr}^2(g) \in [0, 4)$. Esto es equivalente a decir que g tenga infinitos puntos fijos en $\hat{\mathbb{R}}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\pm\infty\}$.

Denotamos por M al grupo de las transformaciones de Möbius, donde la operación es la composición de funciones y por $H^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 > 0\}$ al espacio hiperbólico.

Si los puntos fijos de g en $\hat{\mathbb{C}}$ son α, β , entonces los puntos fijos de g en $\hat{\mathbb{R}}^3$ son precisamente los puntos sobre el círculo C que es ortogonal a \mathbb{C} y que pasa a través de α y β . El eje A_g de g es el semicírculo euclídeo $C \cap H^3$, es decir, una geodésica en la geometría hiperbólica.

Teorema F.0.18 *Un subgrupo G de M contiene sólo elementos elípticos (y a I) si y sólo si los elementos de G tienen un punto fijo común en \mathbb{H}^3 .*

Notemos que si g es de orden finito n entonces $gg^{n-1}(x) = x$, es decir, g es elíptico.

Corolario F.0.19 *Los elementos de un subgrupo finito de M tienen un punto fijo común en \mathbb{H}^3 .*