Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

"RECURSOS DIDÁCTICOS EN LA ENSEÑANZA DE CONCEPTOS TRIGONOMÉTRICOS EN EL CURSO DE MATEMÁTICAS BÁSICAS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL"

Alith Simón Noriega de la Barrera

Medellín-Antioquia
2014

“RECURSOS DIDÁCTICOS EN LA ENSEÑANZA DE CONCEPTOS TRIGONOMÉTRICOS EN EL CURSO DE MATEMÁTICAS BÁSICAS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL”

Alith Simón Noriega de la Barrera

Trabajo presentado como requisito parcial para optar el título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:
Magister: Fernando Puerta Ortiz

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Medellín-Antioquia
2014

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Dedicado a

A Cata, por impulsar esta noble empresa.

Agradecimientos

A mis hijos, por su amor incondicional, apoyo y paciencia.

A mi asesor Fernando Puerta Ortiz, por sus sugerencias y acompañamiento en la elaboración y revisión oportuna del presente trabajo.

A la Universidad Nacional y a todos los docentes que con sus enseñanzas, contribuyeron en mi crecimiento personal y profesional.

Resumen

Este documento pretende ofrecer elementos metodológicos que enriquezcan el proceso enseñanza-aprendizaje en el curso de Matemáticas Básicas, que ofrece la Universidad Nacional de Colombia a sus alumnos de primer semestre. Se propone una serie de recursos didácticos aplicados a la enseñanza de las funciones trigonométricas y enmarcados en la teoría del Aprendizaje Significativo. Dentro de tales recursos el más relevante es la propuesta de una Situación Problema que sirve como punto de partida para la enseñanza de conceptos básicos de trigonometría.

Palabras Claves:

Aprendizaje Significativo, proceso enseñanza-aprendizaje, Situación Problema.

Abstrac

This document aims to provide methodological elements to enrich the teaching and learning process in the course of elementary mathematics, which is offered by " Universidad Nacional de Colombia" to their first semester engineering students. We propose some educational resources which are framed in the theory of Meaningful Learning, to be applied in the teaching of trigonometric functions. Among these resources the more relevant is the Problem-based learning, as a starting point for teaching concepts in trigonometry.

Keywords
Meaningful Learning, Teaching-learning process, Problem-based learning.

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo de grado se desarrolla a partir de la experiencia obtenida al dirigir un grupo del curso de Matemáticas Básicas en la Universidad Nacional, bajo la modalidad de *Práctica Docente*; en el cual se pudo evidenciar, a través de la evaluación, dificultad en la comprensión de conceptos de ámbito trigonométrico.

Las posibles causas, de las falencias obtenidas con dicho tema, pueden estar relacionadas con la poca aplicación de esos conceptos en situaciones prácticas y cotidianas; generalmente se atacan los contenidos desde lo conceptual, haciendo poco énfasis en lo procedimental; lo que permite inferir que la utilización de recursos didácticos efectivos, que apoyen el proceso de enseñanza-aprendizaje y posibiliten atraer la atención de los estudiantes, resultan escasos.

Por lo tanto, en este trabajo de grado se **propone una serie de recursos didácticos basados en la aplicación practica y útil de conceptos trigonométricos en el curso de Matemáticas Básicas de la Universidad Nacional, Sede Madellín; con lo que se aspira a que los estudiantes desarrollen competencias matemáticas y los docentes dispongan de otra estrategias efectivas de enseñanza**.

Los recursos didácticos que se proponen y desarrollan en este trabajo de grado se mencionan a continuación:

- *Solución de problemas afines a la adquisición de conceptos trigonométricos*, cuya solución involucra la utilización de diversas estrategias como representaciones gráficas y modelación matemática e integra diversos conceptos trigonométricos. La solución de estos problemas servirá de modelo a seguir a la hora de enfrentar problemas similares.
- *Calcular alturas de manera práctica*, involucrando para ello conceptos trigonométrico y materiales del entorno de fácil adquisición, que posibilitan la medida de algunas magnitudes.

- *Técnicas de mnemotecnia*, de frecuente uso para recordar conceptos trigonométricos básicos. tales como:

  - *Trigonometría digital*, útil para expresar las razones trigonométricas para ángulos de 0°, 30°, 45°, 60° y 90°, sin la ayuda de calculadoras.
  - *Todas sentimos tantas cosas*, signo de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes del plano cartesiano.
  - *Coca, coca, hihi*, permite recordar la definición de cada una de las razones trigonométricas
  - *Triángulos con ángulos notables*, permite determinar rápidamente la medida de todos sus lados a partir de la medida de la longitud de uno de ellos, sin el uso de calculadora y de manera inmediata.

- *Transformación de funciones en identidades trigonométricas*, permite representar gráficamente las funciones $y = \operatorname{sen}^2 x$, $y = \cos^2 x$ y $y = a \operatorname{sen}^2 x + b\cos^2 x + c$ con a, b y c constantes.

- *Cambio de variables en la solución de ecuaciones trigonométricas de la forma:* $\operatorname{sen} mx + \operatorname{sen} nx = 0$, $\operatorname{sen} mx + \cos nx = 0$ y $\operatorname{sen} mx - \operatorname{sen} nx = \operatorname{sen}(m+n)x$ con $m > n$.

- *Demostración de algunas identidades trigonométricas*, empleando triángulos o círculos unitarios.

- Razones trigonométricas en triángulos áureos, es decir para ángulos de 18°, 36°, 54° y 72°.

Capítulo 2

Referentes Teóricos.

2.1. Aprendizaje Significativo

Ausubel, Novak y Hanesian, diseñaron la teoría del aprendizaje significativo, el primer modelo sistemático de aprendizaje cognitivo, el cual sostiene que para aprender es necesario relacionar los nuevos saberes con las ideas previas del estudiante o *subsumidores* [1]. Afirman que *"el mismo proceso de adquirir información produce una modificación tanto en la información adquirida como en el aspecto específico de la estructura cognoscitiva con la cual aquella está vinculada"*. Por lo tanto, para aprender significativamente, el nuevo conocimiento debe interactuar con el conocimiento existente.

La estructura cognitiva hace referencia al conjunto de conceptos e ideas que un individuo posee, así como su organización; en el proceso de enseñanza es muy importante conocerla; no sólo se trata de saber la cantidad de información que posee, sino cuales son los conceptos y proposiciones que maneja, [2]. Las bases de aprendizaje propuestos por Ausubel, ofrecen el insumo necesario para el diseño de herramientas metacognitivas, que permiten conocer la organización de la estructura cognitiva del educando, con lo que se logra una mejor orientación y aprovechamiento de la labor educativa.

La teoría del aprendizaje significativo, sostiene además que, los conceptos tienen varios niveles que van de lo más general a lo más específico; en consecuencia, el material pedagógico que se elabore deberá estar diseñado para lograr un aprendizaje más integrador, comprensivo, de largo plazo, autónomo y estimulante.

El aprendizaje es construcción del conocimiento donde todo debe encajar de manera coherente. Como señala Ballester, para que se produzca *"auténtico aprendizaje, es decir un aprendizaje*

a largo plazo y que no sea fácilmente sometido al olvido. Es necesario conectar la estrategia didáctica del profesorado con las ideas previas del alumnado y presentar la información de manera coherente y no arbitraria, "construyendo", de manera sólida, los conceptos, interconectando los unos con los otros en forma de red del conocimiento; el aprendizaje es un proceso de contraste, de modificación de los esquemas de conocimiento, de equilibrio, de conflicto y de nuevo equilibrio otra vez". [4]
Para que se puedan dar aprendizaje significativo se requieren las siguientes condiciones [5]

1. Significatividad lógica del material: se refiere a la estructura interna organizada, que sea susceptible de dar lugar a la construcción de significados.

2. Significatividad psicológica del material: se refiere a que puedan establecerse relaciones no arbitrarias entre los conocimientos previos y los nuevos.

3. Motivación: debe existir además una disposición subjetiva, una actitud favorable para el aprendizaje por parte del estudiante.

En otras palabras, el aprendizaje ha de ser significativo, de lo contrario, es simplemente un proceso memorístico, frío, que no capacita en la aplicación de competencias, característica general de las educación tradicional.

Con las estrategias didácticas expuestas en este trabajo se pretende precisamente que el estudiante adquiera los conceptos trigonométricos relacionados aquí de manera significativa, pues cada una de ellas supone la acción, el análisis, la lúdica y la participación en el contexto cotidiano de los educandos.

2.2. Situación Problema

La enseñanza por situación problema de los contenidos de carácter matemático, es una estrategia didáctica que posibilita la compresión de los conceptos de una manera eficaz, en cuanto a que el educando, en el proceso de solución de la situación, involucra sus conocimientos, adquiere otros, los pone en práctica, reflexiona y razona matemáticamente. De esta manera encuentra sentido a la instrucción matemática y evidencia sus fortalezas, y debilidades en el área.
Según Moreno y Waldegg una situación problema es el detonador de la actividad cognitiva, la cual debe debe tener las siguientes características [8]:

- involucra implícitamente los conceptos que se van a aprender,

- representa un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez debe ser accesible,

- permite al educando utilizar los conocimientos anteriores.

De acuerdo con lo anterior se puede evidenciar, que bajo la metodología de situación problema, el estudiante logra un aprendizaje significativo, por estar ésta enmarcada dentro de las pedagogías activas.

Por tanto, éste recurso didáctico se debe aprovechar al máximo a la hora de enseñar matemáticas, en el sentido que resulta motivador y atrae la atención de los estudiantes, se plantean nuevos retos y buscan diferentes alternativas de solución. Muchos expertos en el área afirman, que la mejor manera de aprender conceptos matemáticos es a través de la solución de situaciones problemas. En la búsqueda de la solución el alumno se topa con muchos conceptos que enriquecen el problema, aprende de manera autónoma, es recursivo y desarrolla competencias.

Es tanta su importancia en el campo educativo que muchas instituciones de enseñanza básica y media enfocan el área sólo a través de esta metodología , es decir, en lugar de seguir un derrotero en cuanto al desarrollo de contenidos (título, definiciones, ejercicios, etc.), se concentran en aquellos temas que surgen o se requieren para determinar la solución de un determinado problema.

Reconociendo esas bondades en el entorno educativo, se establece en este trabajo de grado un componente especial dentro de la metodología planteada; se proponen y resuelven una serie de problemas del ámbito trigonométrico que integran diversos conceptos en su solución; son situaciones derivadas de la cotidianidad de los estudiantes, con el fin de llamar su atención y cautivarlos hacia el estudio de la matemáticas.

Capítulo 3

Objetivos.

3.1. Objetivo General

Proponer una serie de recursos didácticos basados en la aplicación práctica y útil de las funciones trigonométricas, en el curso de Matemáticas Básicas de la Universidad Nacional

3.2. Objetivos Específicos

- Recopilar y solucionar algunos problemas modelos en el estudio de la trigonometría.
- Determinar alturas a partir de la medición de algunas magnitudes.
- Sistematizar algunas técnicas de mnemotecnia de frecuente uso en estudio de conceptos trigonométricos.
- Usar la transformación de funciones para representar algunas identidades trigonométricas.
- Emplear cambio de variables en la solución de ecuaciones trigonométricas
- Demostrar identidades trigonométricas usando triángulos rectángulos unitarios.
- Demostrar razones trigonométricas para ángulos internos de triángulos áureos (18°, 36°, 54° y 72°)

Capítulo 4

Metodología: Recursos Didácticos en la Enseñanza de Conceptos Trigonométricos

4.1. Problemas en la Enseñanza de Conceptos Trigonométricos

A continuación se proponen una serie de problemas modelos en el ámbito de la trigonometría, así como sus soluciones y su respectivo análisis en torno a sus posibilidades pedagógicas para enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje del tema abordado.

4.1.1. Problema 1.

Desde el punto medio de la distancia entre las bases de dos torres, los ángulos de elevación de sus extremos superiores son 30° y 60°. Demuestre que la altura de una de las dos torres es el triple de la otra [6].

Solución
Se representa gráficamente en la Figura 4.1 la situación planteada en el problema

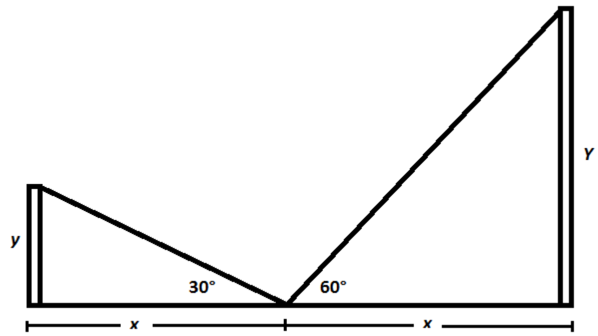

Figura 4.1: Problema 1

De acuerdo con la Figura 4.1 se define y como la altura de la torre menor y Y la altura de la torre mayor; vamos a demostrar que $Y = 3y$.

$$\tan 30^\circ = \frac{y}{x} \tag{4.1}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{Y}{x} \tag{4.2}$$

Dividiendo miembro a miembro (1) y (2) obtenemos:

$$\frac{\tan 30^\circ}{\tan 60^\circ} = \frac{y}{Y}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{y}{Y}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{y}{Y}$$

$$Y = 3y$$

4.1.2. Problema 2

Dos boyas son observadas desde lo alto de un acantilado cuya parte superior está 312 metros sobre el nivel del mar. Calcular la distancia entre las boyas si sus ángulos de depresión medidos desde la punta del acantilado son $46^\circ 18'$ y $27^\circ 15'$ [6].

Solución
Se representa gráficamente la situación planteada en el problema

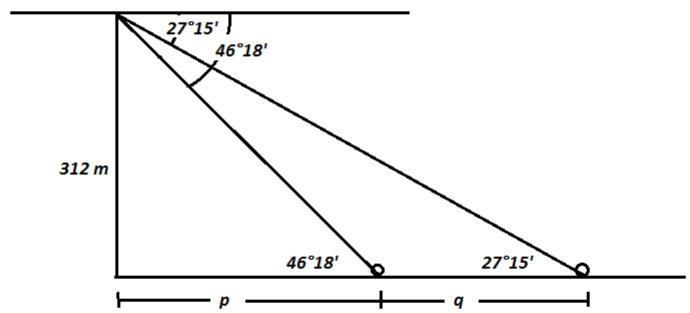

Figura 4.2: Represetación Gráfica del Problema 2

De acuerdo con la Figura 4.2 p es la distancia de la boya 1 al acantilado y q es la distancia entre las boyas.

$$\tan 46°18' = \frac{312}{p}$$

$$p = \frac{312}{\tan 46°18'} \approx \frac{312}{1,046} = 298,15$$

Así, $p \approx 298,15m$
De la figura 4.2 se observa que:

$$\tan 27°15' = \frac{312}{p+q}$$

Sustituyendo el valor de p se obtiene:

$$0,515 = \frac{312}{298,15+q}$$

$$0,515(298,15+q) = 312$$

$$153,55 + 0,515q = 312$$

$$0,515q = 312 - 153,55$$

$$0,515q = 158,45$$

$$q = \frac{158,45}{0,515}$$

$$q = 307,66$$

Por lo tanto la distancia aproximada entre las boyas es $307,66m$

4.1.3. Problema 3

Desde dos puntos A y B ubicados en una planicie y distantes entre sí 50 m se divisan dos postes, señalados su ubicación con los puntos C y D, se miden los ángulos $\angle CAD = 30°$, $\angle DAB = 50°$, $\angle ABC = 60°$ y $\angle CBD = 35°$, como se muestra en la Figura 4.3. Determinar la distancia c entre los dos postes. [14]

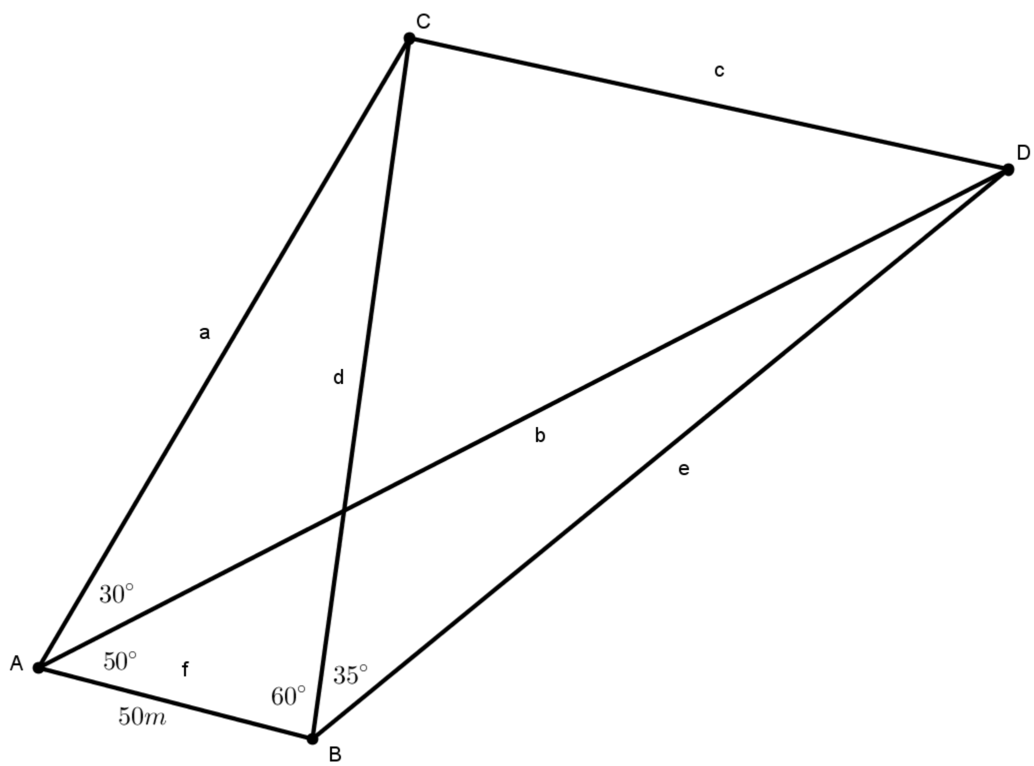

Figura 4.3: Representación Gráfica del Problema 3

Solución

De acuerdo con la Figura 4.3, en el $\triangle ABC$ el $\angle ACB = 180° - 80° - 60° = 40°$ de manera similar se deduce que en el $\triangle ADB$ el $\angle ADB = 35°$ Ahora, aplicando el teorema del seno se determinan los segmentos a y b así:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{50}{\operatorname{sen} 40°} \quad \rightarrow \quad a = \frac{50 \operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 40°} \approx 67,36 \ m$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen} 95°} = \frac{50}{\operatorname{sen} 35°} \quad \rightarrow \quad b = \frac{50 \operatorname{sen} 95°}{\operatorname{sen} 35°} \approx 86,84 \ m$$

Aplicando teorema del coseno en el $\triangle ACD$ se determina la distancia c entre los dos postes, así:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 30°$$
$$c^2 = 67,36^2 + 86,84^2 - 2 \cdot 67,36 \cdot 86,84 \cdot \cos 60°$$
$$\rightarrow c^2 = 17793,37 \quad \rightarrow \quad c \approx 133,39\ m$$

Por tanto la distancia que separa a los dos postes es aproximadamente de $133,39\ m$

4.2. La Trigonometría en el Cálculo de Alturas

A continuación se presentan estrategias didácticas que involucran conceptos trigonométricos para determinar la altura de un edificio o similar. Las mediciones de algunas magnitudes dentro del proceso, tales como ángulos de elevación y diferentes magnitudes, se realizan con instrumentos de fácil consecución. [9]

4.2.1. Con un goniómetro y una varilla

Material para la construcción del goniómetro:

- varilla de madera de 80cm x 1 cm x 1cm
- transportador de ángulos de 360°
- hilo de cañamo
- dos cáncamos o hembrillas
- bolsista llena de arena
- un tornillo.

Figura 4.4: Materiales para la construcción del goniómetro

Construcción del aparato:

1. Colocar los cáncamos a cada extremo acercándose lo máximo al borde de la varilla de madera
2. Agrandar el agujero del transportador y atornillarlo a la varilla a la distancia del radio de éste.
3. Atar la bolsita de arena que sirve de plomada al tornillo
4. El transportador se coloca con el 0° coincidiendo con el extremo de la varilla, para que así quede paralelo al suelo y el hilo de cáncamo al que está unida la plomada, marque la amplitud del ángulo que se forma al elevar el listón. Ver Figura 4.5

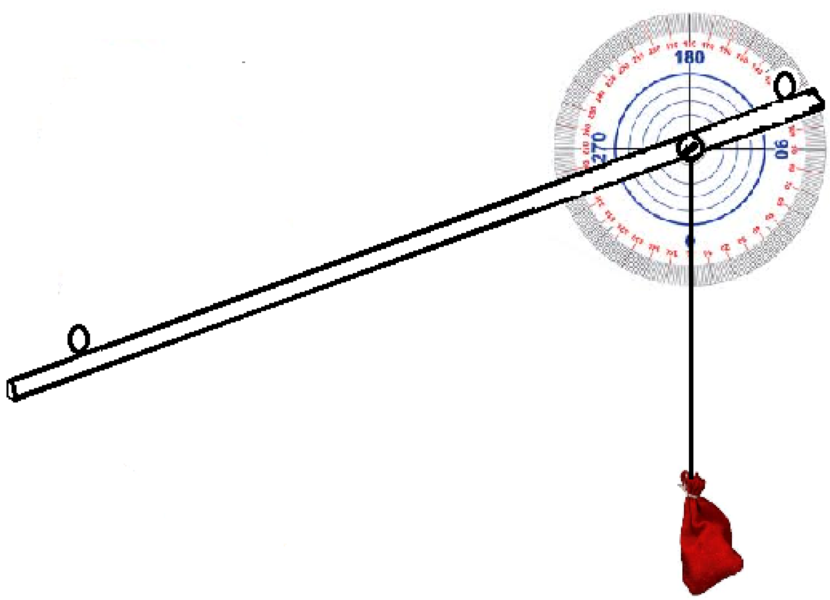

Figura 4.5: Goniómetro

Para medir la altura del edificio procedemos de la siguiente forma:

a. Se sitúa el observador a una distancia aleatoria x de la fachada y dirige la varilla apuntando por los cáncamos a la parte superior del edificio

b. Otro observador lee el ángulo α que señala en el goniómetro la cuerda con la plomada

c. Los observadores se alejan del edificio una distancia d conocida y vuelven a hacer la medición, obteniendo el ángulo β

d. Se obtienen así dos ángulos de elevación α y β, con ellos se puede calcular la altura del edificio.

e. Llamamos H a la altura del edificio y h la altura a los ojos del observador, quien usa el goniómetro. Ver Figura 4.6

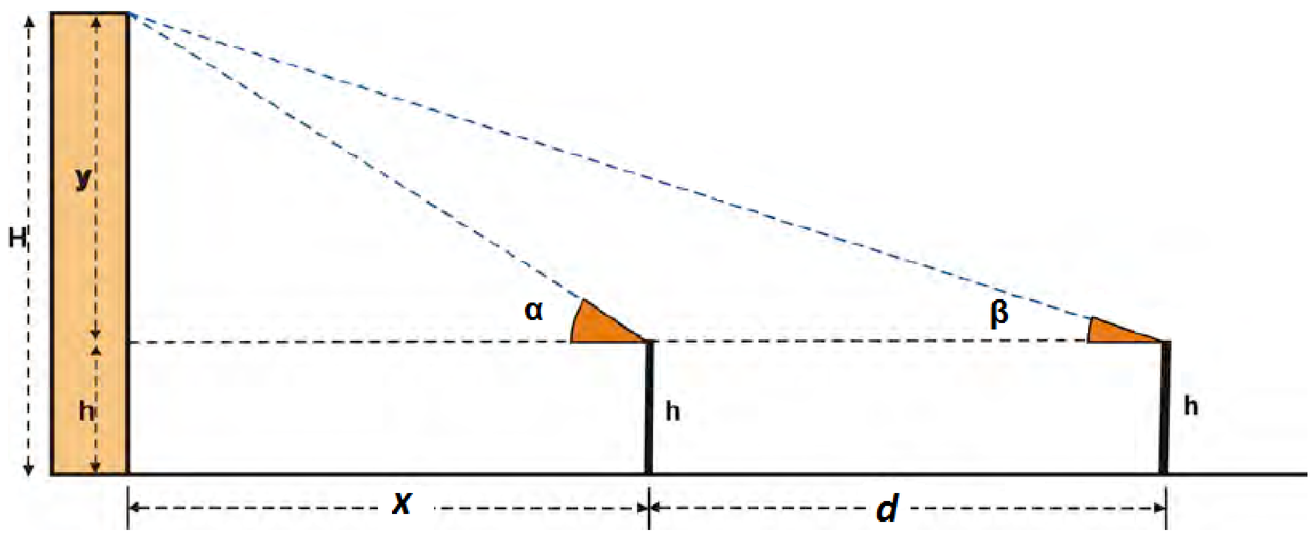

Figura 4.6: Cálculo de la altura con un goniómetro

En la figura se observa:

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} \tag{4.3}$$

$$\tan\beta = \frac{y}{x+d} \tag{4.4}$$

Despejando y de la ecuación (4.3) se obtiene:

$$y = x\tan\alpha \tag{4.5}$$

Despejando y de la ecuación (4.4) se obtiene:

$$y = (x+d)\tan\beta \tag{4.6}$$

Igualando la ecuaciones (4.5) y (4.6) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
x \tan\alpha &= (x+d)\tan\beta \\
x \tan\alpha &= x\tan\beta + d\tan\beta \\
x \tan\alpha - x\tan\beta &= d\tan\beta \\
x(\tan\alpha - \tan\beta) &= d\tan\beta \\
x &= \frac{d\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Se determina y sustituyendo (4.7) en (4.5)

$$y = \frac{d\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} \qquad (4.8)$$

Finalmente se halla la altura del edificio H mediante la suma de h y y, esto es:

$$H = h + y$$

4.2.2. Con un Altímetro de Cartón

Se utiliza un trozo de cartón para construir dos listones de la siguiente forma:

Figura 4.7: Altímetros de Cartón

Para medir la altura del edificio procedemos de la siguiente forma:

a. se sitúa el observador a una distancia aleatoria x de la fachada y con ayuda de la plomada dirige el altímetro en la posición de la figura de forma que apunta desde un extremo a otro con la parte superior del edificio. Ver Figura 4.7

b. Giramos 180° la pieza de forma que el segmento pequeño quede hacia arriba y nos alejamos del edifico una distancia d, hasta conseguir tener orientado los dos extremos de la pieza con la parte superior del edificio.

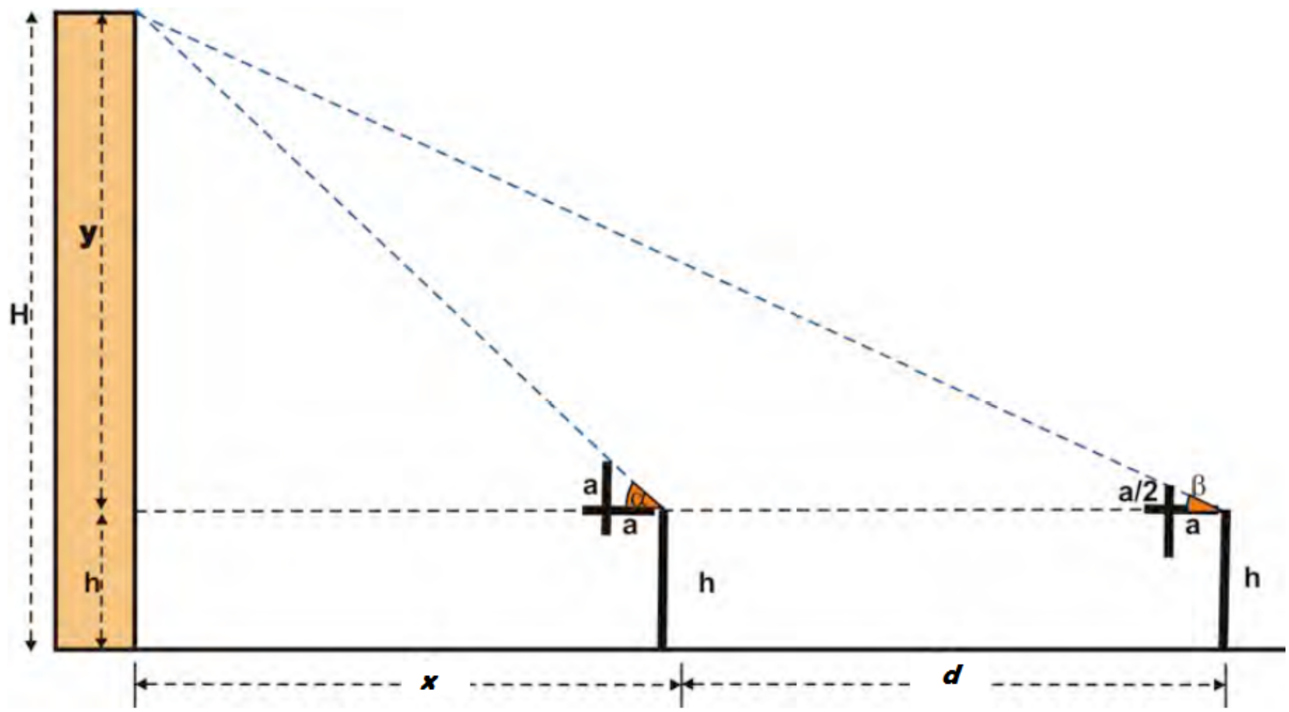

Figura 4.8: Medida de la altura usando el áltímetro

De esta forma se tiene:

$$\tan\alpha = \frac{a}{a} = 1$$
$$\tan\beta = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

por tanto, sustituyendo los valores de $\tan\alpha$ y $\tan\beta$, respectivamente, de acuerdo con la Figura 4.8 se obtiene:

$$\frac{y}{x} = 1 \tag{4.9}$$
$$\frac{y}{x+d} = \frac{1}{2} \tag{4.10}$$

Y de las ecuaciones (4.9) y (4.10) se obtiene:

$$\frac{x}{x+d} = \frac{1}{2}$$

$$2x = x + d$$
$$x = d$$

sustituyendo x en en la ecuación (4,9) se deduce que:

$$y = d$$

Finalmente se suman los valores d y h para determinar la altura H del edificio:

$$H = d + h$$

4.2.3. Con una tablilla y una varilla de madera.

Material: se utiliza una tablilla de madera de 10 cm de ancho y una varilla de madera

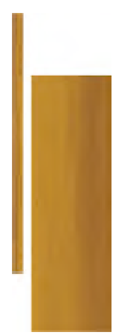

Figura 4.9: Tablilla y varilla de madera para medir la altura

Para medir la altura del edificio procedemos de la siguiente forma:

a. Se sitúa el observador a una distancia aleatoria x de la fachada del edificio y con la ayuda de la tablilla, desplaza la varilla por su costado hasta conseguir tener una visual entre el extremo de la tablilla, de la varilla y el extremo del edificio. Midiendo la longitud b entre la longitud c (ver Figura 4.10), se obtiene el ángulo de elevación usando arctan

b. Nos alejamos del edificio una distancia conocida d y se repite la observación.

c. se realizan los mismos cálculos que en el apartado 5.4.1., dado que este proceso permite determinar la medida α y β.

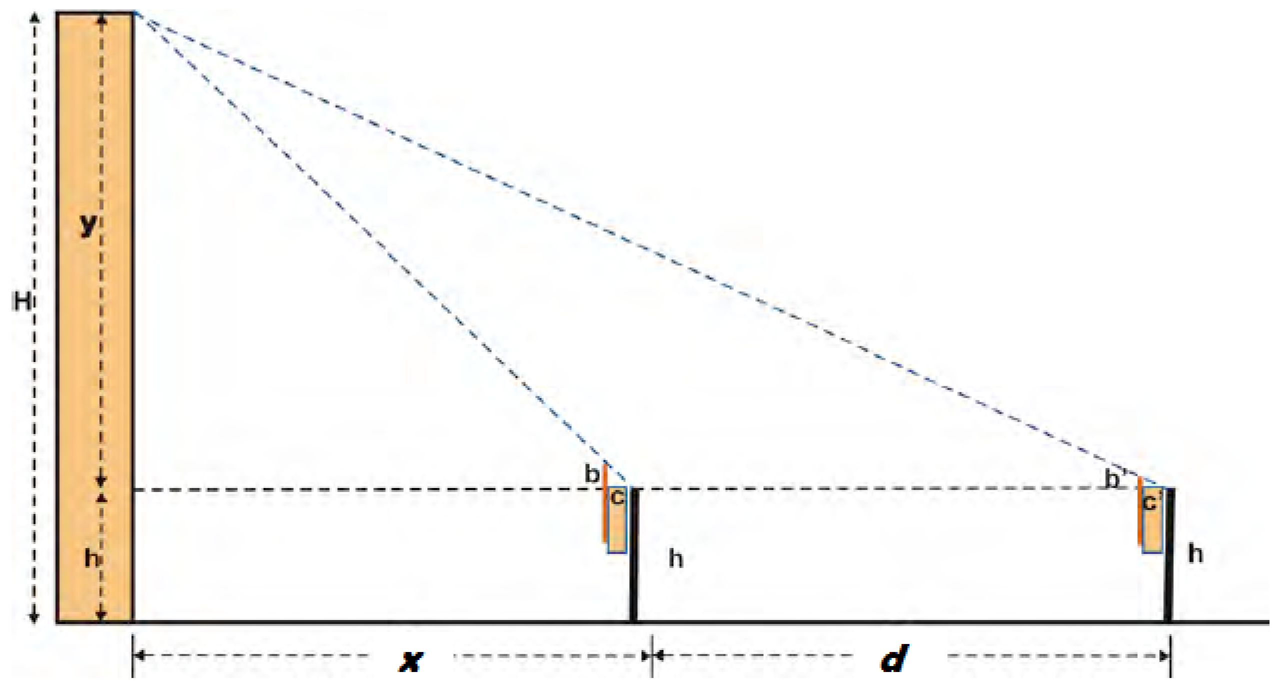

Figura 4.10: Medida de la altura usando tablilla de madera y listón

4.3. Técnicas de Mnemotecnia en la Trigonometría

A continuación se hace una recopilación y sistematización de algunas técnicas de uso frecuente en el ámbito trigonométrico que son usadas especialmente por docentes de educación media para ofrecer alternativas que permita recordar, con mayor, facilidad conceptos dentro de este tópico matemático. Estas técnicas son aplicadas por algunos estudiantes del Curso de Matemáticas Básicas, que recuerdan de su paso por el bachillerato o que simplemente aprendieron por otros medios (internet, compañeros, preuniversitarios, etc.)

4.3.1. COCA, COCA, HIHI

Es una técnica usada con mucha frecuencia por los docentes de matemáticas de secundaria para lograr que sus estudiantes recuerden con facilidad la definición de las razones trigonométricas.[10]

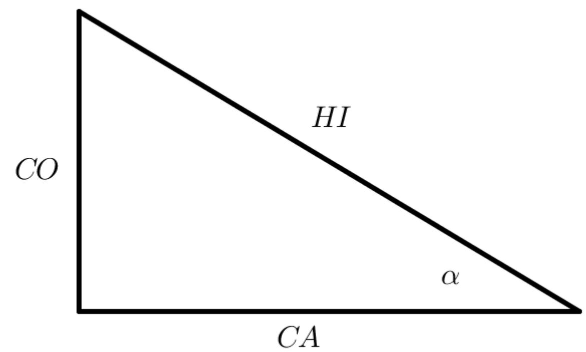

Figura 4.11: Triángulo rectángulo, con α ángulo de referencia

Al definir las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo respecto a un ángulo α (Figura 4.10) se acostumbra listarlas de la siguiente manera:

1. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{CO}{HI}$
2. $\cos\alpha = \frac{CA}{HI}$
3. $\tan\alpha = \frac{CO}{CA}$
4. $\cot\alpha = \frac{CA}{CO}$
5. $\sec\alpha = \frac{HI}{CA}$
6. $\csc\alpha = \frac{HI}{CO}$

Donde: CO indica el cateto opuesto, CA el cateto adyacente y HI la hipotenusa. Fgura 4.10

Entonces el docente dice a sus estudiantes que pueden hacer el siguiente ejercicio para memorizar la definición de éstas razones trigonométricas siguiendo los siguientes pasos:

1. Lista las seis razones trigonométricas en el siguiente orden: $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$, $\sec\alpha$ y $\csc\alpha$, así:

   a) $\operatorname{sen}\alpha = -$
   b) $\cos\alpha = -$
   c) $\tan\alpha = -$
   d) $\cot\alpha = -$
   e) $\sec\alpha = -$
   f) $\csc\alpha = -$

2. Luego escribe en el numerador de las razones trigonométricas, desde arriba hacia abajo, en su respectivo orden, cada una de las siguientes sílabas, mientras las pronuncia en voz alta: “CO”,“CA”,“CO”,“CA”, “HI”, “HI”; esto es:

   a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{CO}{}$
   b) $\cos\alpha = \frac{CA}{}$
   c) $\tan\alpha = \frac{CO}{}$
   d) $\cot\alpha = \frac{CA}{}$
   e) $\sec\alpha = \frac{HI}{}$
   f) $\csc\alpha = \frac{HI}{}$

3. Finalmente escribe en el denominador, de abajo hacia arriba, como en el punto 2, así:

   a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{CO}{HI}$
   b) $\cos\alpha = \frac{CA}{HI}$
   c) $\tan\alpha = \frac{CO}{CA}$
   d) $\cot\alpha = \frac{CA}{CO}$
   e) $\sec\alpha = \frac{HI}{CA}$
   f) $\csc\alpha = \frac{HI}{CO}$

   Esta técnica resulta útil en el momento de resolver ejercicio o problemas matemáticos que involucra la definición de las razones trigonométricas, en cuanto a que de manera sencilla asocia las seis razones trigonométricas con su respectiva definición. Si bien en la universidad, el rigor matemático es mayor, se puede valorar esta alternativa en algunos estudiantes que la utilicen en sus evaluaciones.

   La razón porque la cual la técnica resulta efectiva puede estar relacionada por la entonación que da el docente en el momento de explicarla, pues resulta divertida y la relacionan con en nombre de una famosa bebida. Ejemplo de situaciones que son posible dar solución a partir de la técnica expuesta:

   - Determina las razones trigonométricas respecto a un ángulo α, en un triángulo rectángulo cuyo cateto opuesto mide $6cm$ y el cateto adyacente $8cm$
   - Determinas el valor de las razones trigonométricas si se sabe que $sen\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y que el ángulo θ está en el primer cuadrante del plano cartesiano.

4.3.2. “Todas sentimos tantas cosas”

Técnica usada en el ámbito enseñanza-aprendizaje, especialmente en los niveles escolares, para recordar con facilidad el signo de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes del plano cartesiano. Como en la técnica anterior, también se pone en práctica en el entorno universitario por algunos estudiantes.[11]

Al determinar el signo de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes, a partir de su definición, con ángulos en posición normal cuyo lado final está en cada uno de los cuadrantes del plano cartesiano, se obtiene la siguiente tabla:

	I cuadrante	II cuadrante	III cuadrante	IV cuadrante
$\operatorname{sen} \alpha$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos \alpha$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan \alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\cot \alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\sec \alpha$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\csc \alpha$	$+$	$+$	$-$	$-$
	todas	***sen****timos*	***tan****tas*	***cos****as*

Cuadro 4.1: Signo de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes del plano cartesiano

De acuerdo con la tabla 4.1, que:

- En el primer cuadrante ***"todas"*** las funciones trigonométricas son positivas.
- En el segundo cuadrante se tiene la palabra *"**sen**timos"* , cuya primer sílaba es ***sen***, lo que indica que sólo la función $\operatorname{sen} \alpha$ y su inversa, es decir $\csc \alpha$, son positivas aquí.
- En el tercer cuadrante se tiene la palabra *"**tan**tas"* , que empieza por ***tan***, lo que indica que sólo la función $\tan \alpha$ y su inversa, es decir $\cot \alpha$, son positivas en dicho cuadrante.
- Finalmente, en el cuarto cuadrante se tiene la palabra *"**cos**as"* , que empieza por ***cos***, así, sólo la función $\cos \alpha$ y su inversa, es decir $\sec \alpha$, son positivas en este caso.

De tal manera que la expresión **"todas sentimos tantas cosas"** es una técnica de mnemotecnia útil para recordar en cada cuadrante del plano cartesiano los signos de las funciones trigonométricas. De aplicación en el momento de expresar la solución de problemas que involucran funciones trigonométricas de ángulos de cualquier amplitud.

4.3.3. Trigonometría Digital

Utilizada para recordar, de manera ágil, las funciones trigonométricas para ángulos de 0°, 30°, 45°, 60° y 90°, y poderlos usar en la solución de problemas matemáticos, del ámbito trigonométrico, relativos a estos ángulos. Es un recurso muy importante con el cual se cuenta a la hora de presentar pruebas icfes, examen de admisión a la universidad o en el examen final que se aplica a todos los estudiantes matriculados en el curso de matemáticas básicas, en el sentido que en ninguna de estas pruebas está permitido el uso de calculadoras.
La técnica se conoce con el nombre de “trigonometría digital” o “trigonometría en la palma de la mano”.[12]

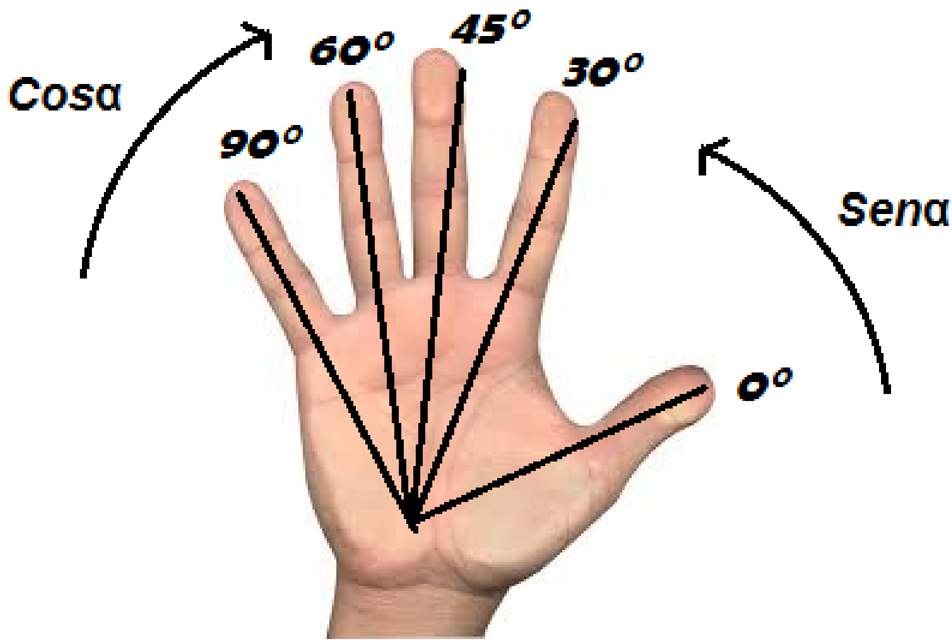

Figura 4.12: Trigonometría digital

La técnica consiste en lo siguiente: de acuerdo con la figura 4.12, tomando cómo referencia el dedo pulgar, se observa que con el dedo índice forma un ángulo de aproximadamente 30°, con el medio de aproximadamente 45°, con el anular de 60° y con el meñique un ángulo aproximado de 90°. Así, se tiene que para un ángulo de 0° la referencia es el pulgar, para 30° será el índice,el medio indica el ángulo de 45°, 60° lo representa el anular y 90° el meñique.

Ahora, para determinar las razones trigonométricas de estos ángulos se procede así:

1. Razón seno: se tiene en cuenta el número de dedos desde el pulgar, hasta el dedo que representa ángulo que se quiere determinar, a esta cantidad se le extrae la raíz cuadrada y se divide por 2. esto es:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{\#\text{ de dedos desde el pulgar}}}{2}$$

2. Razón coseno: se cuentan los dedos desde el meñique, y se procede de manera similar que con el sen, Figura 4.12, es decir:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{\#\text{ de dedos desde el menique}}}{2}$$

3. Razón tangente: dado que la $\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ para determinar su valor mediante esta técnica se baja el dedo que indica él ángulo en consideración, y se hace el cociente entre la raíz cuadrada del número de dedos desde el pulgar (sen) y el número de dedos desde el meñique (cos), es claro que el dos en denominador de las razones sen y cos se simplifican, es decir (Figura 5.10):

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{\#\text{ de dedos desde el pulgar}}}{\sqrt{\#\text{ de dedos desde el menique}}}$$

   Por ejemplo, para determinar el $\operatorname{sen}30°$, el $\cos 30°$, y la $\tan 30°$ bajamos el dedo índice el cual indica el ángulo de 30°; se observan tres dedos desde el meñique (coseno) y un dedo desde el pulgar (seno), Figura 4.13, por tanto:

$$\operatorname{sen}30° = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad tan30° = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

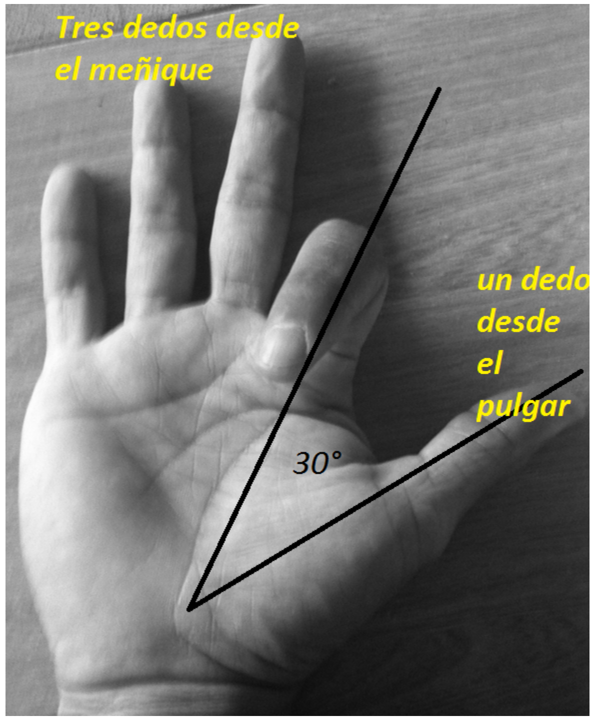

Figura 4.13: $\operatorname{sen} 30°$ y $\cos 30°$

4. Las funciones cotangente, secante y cosecante de los ángulos tratados en este aparte, se determinan a partir de los resultados de tangente, coseno y seno respectivamente por ser sus inversos multiplicativos.

4.3.4. Triángulos con ángulos notables

En este apartado se muestra una forma de determinar con facilidad y de forma inmediata todos los lados de un triángulo rectángulo con ángulos agudos de 30° y 60°, de igual manera si se trata de un triángulo rectángulo isósceles, a partir de la medida de la longitud de uno de sus lados. [13]

1. **Triángulo** 30° **-** 60°

   Estos triángulos se caracterizan porque el cateto opuesto al ángulo de 30° es la mitad de la hipotenusa, lo cual es de fácil demostración, basta con considerar un triángulo equilátero de lado l y determinar la altura en términos de l, aplicando el teorema de Pitágoras.

   La altura en un triángulo equilátero determina triángulos rectángulos congruentes de ángulos agudos 30° y 60° de hipotenusa l y cateto $\frac{l}{2}$ De acuerdo al lado conocido x, se presentan tres casos (Figura 4.14):

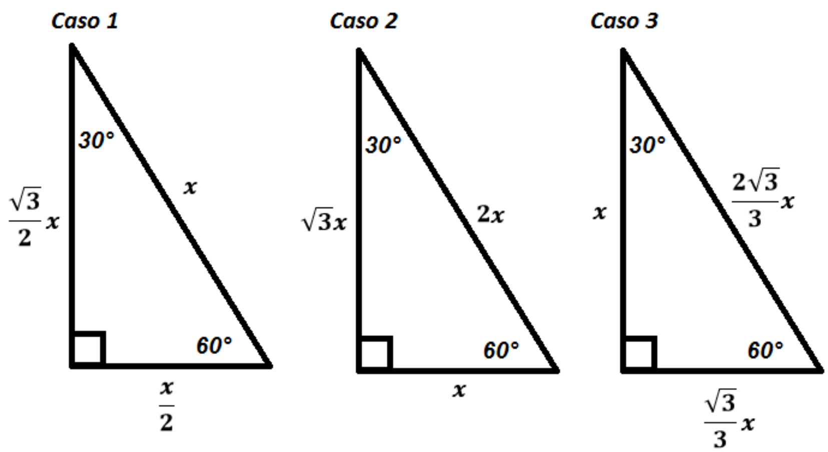

Figura 4.14: Triángulos 30°,60° y 90° dado x

Caso 1: Se conoce la longitud x de la hipotenusa, por tanto el cateto opuesto al ángulo de 30° es la mitad de la hipotenusa, esto es $\frac{x}{2}$, el otro cateto se puede determinar aplicando el teorema de Pitágoras, resultando ser igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Por ejemplo, determina la longitud de la apotema de un hexágono regular de lado $6\sqrt{3}$ cm.

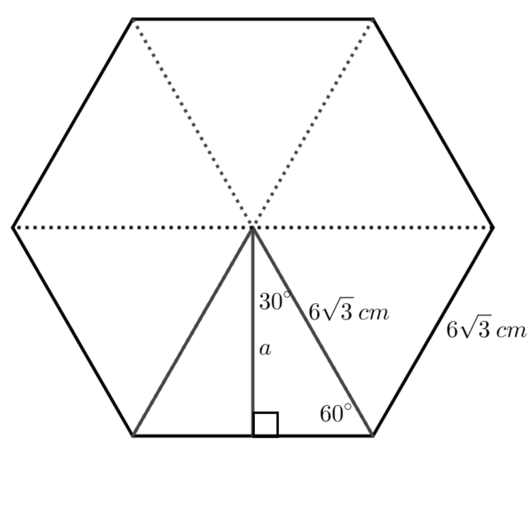

Figura 4.15: Ejemplo: apotema hexágono regular

De acuerdo con la Figura 4.15 tenemos entonces que la apotema a igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ veces el lado,esto es:

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6\sqrt{3} = 9\,cm$$

Caso 2: Se conoce la longitud x del cateto opuesto al ángulo 30°, como este cateto es la mitad de la hipotenusa, se concluye que la longitud de la hipotenusa es $2x$, y por el teorema de Pitágoras se determina la longitud del otro cateto, que equivale a $\sqrt{3}x$. Figura 4.14.

Por ejemplo: Para medir el ancho de un río se avisa un árbol C que se encuentra en el borde opuesto, sea A el punto de este borde más cercano al árbol y B un punto en el mismo borde a 10 m de A, el $\angle ABC = 60°$. Figura 4.16.

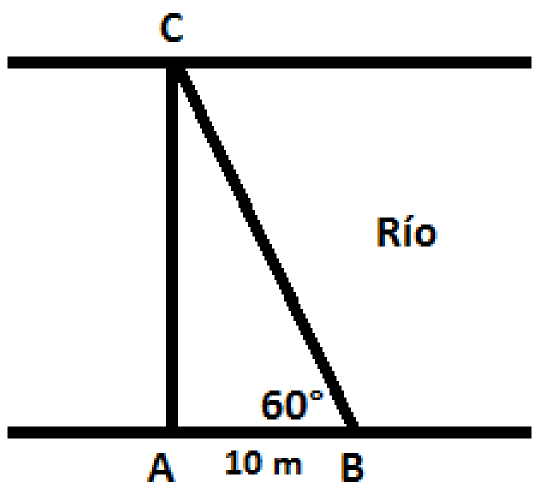

Figura 4.16: Ejemplo:Ancho de un río

Así, se tiene que el ancho del río, representado por la distancia AC (cateto adyacente al ángulo de 30°, sin realizar demasiados cálculos y de manera inmediata es $10\sqrt{3}\,m$, de igual manera se deduce que la distancia BC (hipotenusa) es $20\,m$, es decir el doble de AB (cateto opuesto al ángulo de 30°)

Caso 3: se conoce el cateto adyacente x al ángulo de 30°, Figura 4.14. Por Pitágoras es posible hallar la longitud del cateto desconocido, encontrando que es $\frac{\sqrt{3}}{3}x$, la longitud de hipotenusa es el doble de este cateto, es decir $\frac{2\sqrt{3}}{3}x$.

Por ejemplo se tiene un triángulo rectángulo cuyo cateto adyacente al ángulo de $30°$ es $15\sqrt{3}\,cm$, se deduce rápidamente que el cateto faltante tiene una longitud de $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 15\sqrt{3} = 15\,cm$ y que la hipotenusa es el doble de éste último valor, es decir $30\,cm$

2. **Triángulo Rectángulo Isósceles**

Se sabe que este triángulo se caracteriza por tener dos ángulos agudos de $45°$ y obviamente un ángulo recto. Se presentan entonces, dos casos: cuando se conoce la longitud de uno de los catetos y cuando se conoce la longitud la hipotenusa

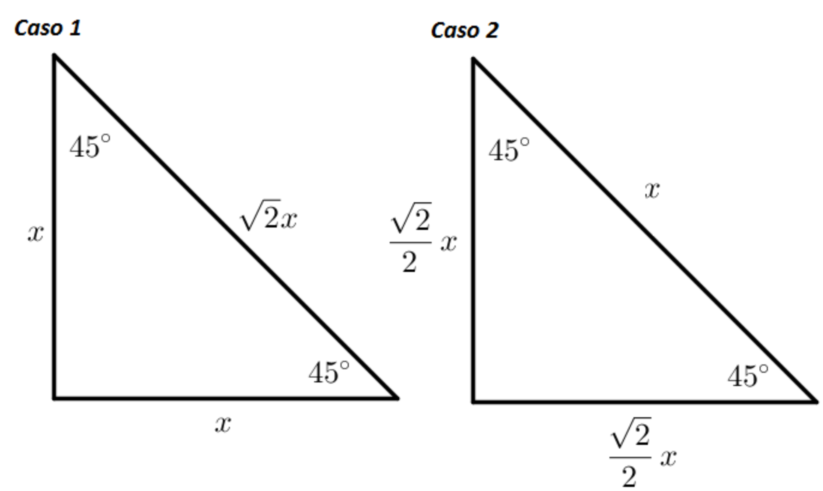

Figura 4.17: Triángulo rectángulo isósceles

- **Caso1:** se conoce la longitud x de un cateto, por ser isósceles el otro cateto también va a tener la misma longitud x, y por teorema de Pitágora se encuentra que la hipotenusa tiene un valor de $\sqrt{2}x$. Figura 4.17.

  Por ejemplo. Si en un triángulo rectángulo isósceles los catetos miden $10\sqrt{2}\,cm$, la hipotenusa tiene una longitud de $10\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 20\,cm$.

- **Caso2:** se conoce la longitud x de la hipotenusa, por trigonometría simple, se puede determinar la longitud de cada uno de los catetos, esto es $\frac{\sqrt{2}}{2}x$. Figura 4.17.
  Por ejemplo si en un triángulo rectángulo isósceles de la hipotenusa mide 12 cm, entonces se deduce inmediatamente que cada uno de los catetos mide $6\sqrt{2}\,cm$.

4.4. Transformación de Funciones en Identidades trigonométricas

Se muestra una forma práctica de graficar la función $y = \operatorname{sen}^2 x$ o $y = \cos^2 x$ aplicando transformaciones sobre la función $y = \cos x$. [14]

Se sabe que:

$$y = \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

Expresado de esta manera es posible determinar la gráfica de $y = \operatorname{sen}^2 x$ usando transformación de la función $y = \cos x$ siguiendo los siguientes pasos:

Paso 1: se representa gráficamente la función $y = f(x) = \cos x$ en el plano cartesiano. Figura 4.18.

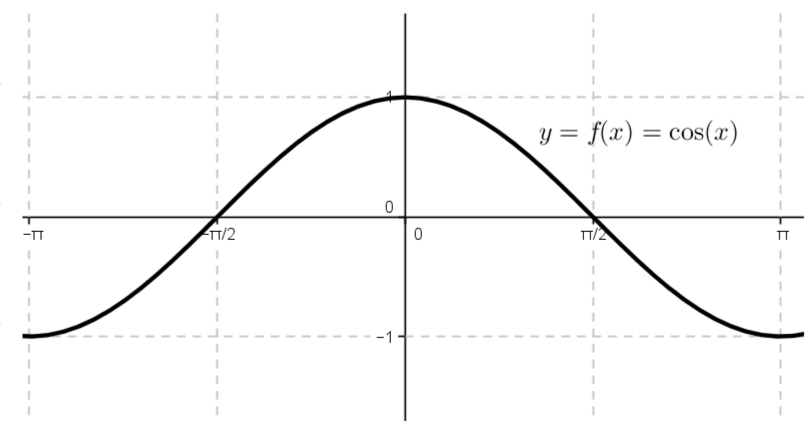

Figura 4.18: Gráfica $y = \cos x$

Paso 2: Luego, se grafica la función $y = g(x) = f(2x) = \cos 2x$. esto es, una *comprensión horizontal* en un factor de $\frac{1}{2}$. Figura 4.19.

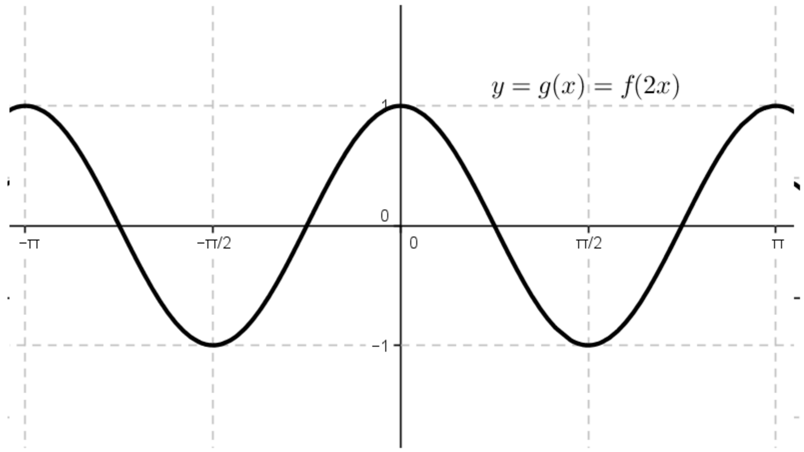

Figura 4.19: Gráfica de $y = g(x) = f(2x) = \cos 2x$

Paso 3: A partir de la gráfica obtenida se representa la función $y = h(x) = -g(x) = -\cos 2x$, es decir, la *reflexión de la gráfica respecto al eje x* de la función $y = g(x)$. Figura 4.20.

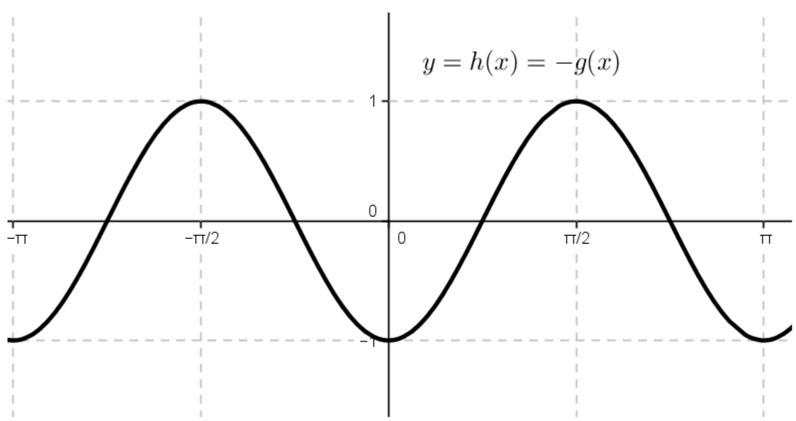

Figura 4.20: Gráfica de $y = h(x) = -g(x) = -\cos 2x$

Paso 4: A continuación se aplica la transformación *desplazamiento vertical de una unidad hacia arriba* a la gráfica de $y = h(x)$, para obtener la representación en el plano de $S(x)$, así,$y = S(x) = 1 + h(x) = 1 - \cos 2x$. Figura 4.21.

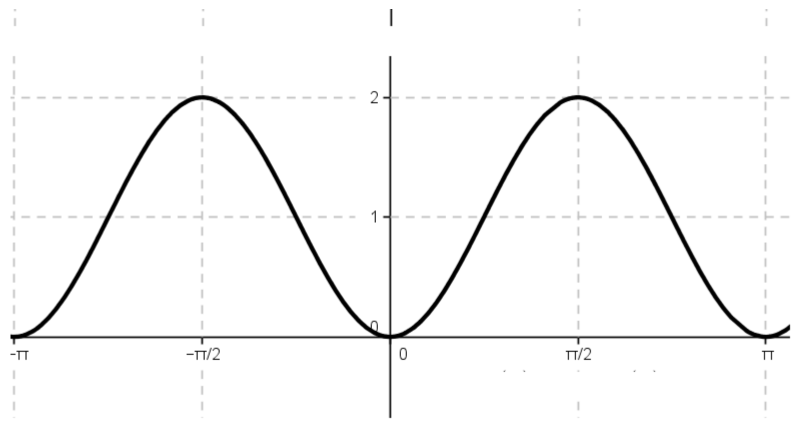

Figura 4.21: Gráfica de $y = S(x) = 1 + h(x) = 1 - \cos 2x$

Paso 5: Finalmente, se aplica a esta última, la transformación *compresión vertical en un factor de* $\frac{1}{2}$ gráfica de $S(x)$, esto es $y = T(x) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \operatorname{sen}^2 x$, obteniendo así la gráfica de $y = \operatorname{sen}^2 x$. Figura 4.22.

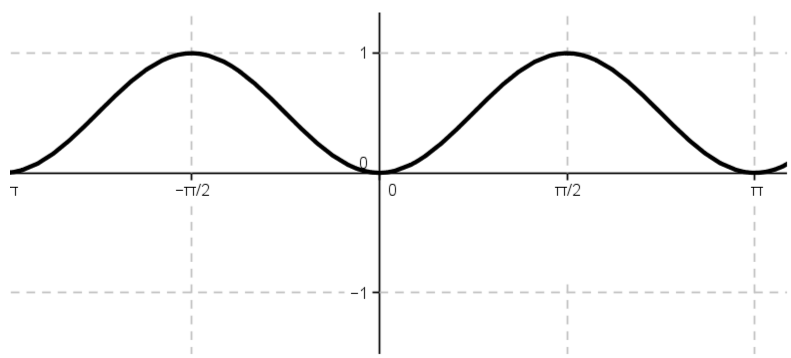

Figura 4.22: Gráfica de $y = T(x) = \frac{1}{2}S(x) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \operatorname{sen}^2 x$

De manera similar, a través de transformaciones sobre la función $\cos x$ es posible obtener la representación gráfica de la función $y = \cos^2 x$, dado que ésta se puede escribir como:

$$y = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Ahora, de forma más general toda función de la forma $g(x) = a \operatorname{sen}^2 x + b \cos^2 x + c$ con a, b y c constantes se puede graficar a partir de transformaciones sobre la función $f(x) = \cos x$, porque es:

$$g(x) = a\operatorname{sen}^2 x + b\cos^2 x + c = a(\frac{1-\cos 2x}{2}) + b(\frac{1+\cos 2x}{2}) + c = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + c + \frac{(b-a)}{2}\cos 2x$$

Así, la representación gráfica de $g(x) = a\operatorname{sen}^2 x + b\cos^2 x + c$ resultará de realizar transformaciones sobre la función $f(x) = \cos x$, la secuencia de tales transformaciones es:

1. contracción horizontal en un factor equivalente a $\dfrac{1}{2}$
2. dilatación vertical en un factor igual a $\frac{(b-a)}{2}$
3. y una traslación vertical de $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + c$

4.5. Cambio de Variables en ecuaciones trigonométricas.

En este apartado se muestra una forma muy interesante de encontrar la solución de una ecuación trigonométrica de la forma. [14]:

$$\operatorname{sen} mx + \operatorname{sen} nx = 0 \qquad (1) \quad \textit{donde} \quad m,\ n \in \mathbb{R} \qquad \textit{con} \quad m+n \neq 0$$

Así: se realiza el siguiente cambio de variables:

$$A + B = mx \quad (2)$$

$$A - B = nx \quad (3)$$

Resolviendo el sistema conformado por las ecuaciones (2) y (3) para A y para B se obtiene:

$$A = \frac{(m+n)x}{2} \quad (4)$$

$$B = \frac{(m-n)x}{2} \quad (5)$$

sustituyendo (2) y (3) en la ecuación (1), se obtiene:

$$\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B) = \operatorname{sen} A\cos B + \operatorname{sen} B\cos A + \operatorname{sen} A\cos B - \operatorname{sen} B\cos A = 0$$

simplificando:

$$\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B) = 2\operatorname{sen} A\cos B = 0$$

Por tanto

$$\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)] = \operatorname{sen} A\cos B = 0 \quad (7)$$

Luego, por (4) y (5) en (7):

$$\operatorname{sen}\frac{(m+n)x}{2}\cos\frac{(m-n)x}{2}=0$$

Finalmente

$$\operatorname{sen}\frac{(m+n)x}{2}=0 \quad \vee \quad \cos\frac{(m+n)x}{2}=0$$

Por tanto

$$\frac{(m+n)x}{2}=k\pi \qquad con \quad k\in\mathbb{Z} \qquad \vee \quad \frac{(m-n)x}{2}=(2k-1)\frac{\pi}{2} \qquad con \quad k\in\mathbb{Z}$$

Así

$$x=\frac{2k\pi}{m+n} \qquad con \quad k\in\mathbb{Z} \qquad \vee \quad x=\frac{(2k-1)\pi}{m-n} \qquad con \quad k\in\mathbb{Z}$$

Ejemplo 1. Hallar la solución de la ecuación $\operatorname{sen}5x+\operatorname{sen}3x=0$
Aplicado el proceso anterior se deduce que:

$$\operatorname{sen}5x+\operatorname{sen}3x=\operatorname{sen}\frac{(5+3)x}{2}\cos\frac{(5-3)x}{2}=\operatorname{sen}4x\cos x=0$$

Así,

$$\operatorname{sen}4x=0 \quad \vee \quad \cos x=0$$

$$4x=\operatorname{arc\,sen}(0) \quad \vee \quad x=\arccos(0)$$

$$x=\frac{k\pi}{4} \qquad k\in\mathbb{Z} \quad \vee \quad x=\frac{(2k-1)\pi}{2} \quad k\in\mathbb{Z}$$

Ejemplo 2. Hallar la solución de la ecuación $\operatorname{sen}5x+\cos 3x=0$
Solución Sustituyendo (2) y (3) en la ecuación dada y aplicando identidades trigonométricas para suma y diferencia de ángulos, se tiene:

$$\operatorname{sen}(A+B)+\cos(A-B)=\operatorname{sen}A\cos B+\operatorname{sen}B\cos A+\cos A\cos B+\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B=0$$

factorizando,

$$\operatorname{sen}(A+B)+\cos(A-B)=\cos B(\operatorname{sen}A+\cos A)+\operatorname{sen}B(\operatorname{sen}A+\cos A)=0$$

factorizando,

$$\operatorname{sen}(A+B)+\cos(A-B)=(\operatorname{sen}A+\cos A)(\operatorname{sen}B+\cos B)=0$$

Así,

$$\operatorname{sen}A+\cos A=0 \quad \vee \quad \operatorname{sen}B+\cos B=0$$

$$\operatorname{sen} A = -\cos A \qquad \vee \quad \operatorname{sen} B = -\cos B$$

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} = -1 \qquad \vee \quad \frac{\operatorname{sen} B}{\cos B} = -1 \quad \textit{con} \ \ \cos A \neq 0 \ \ y \ \ \cos B \neq 0$$

$$\tan A = -1 \qquad \vee \quad \tan B = -1$$

De donde se obtiene que:

$$A = n\pi - \frac{\pi}{4} \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{Z} \qquad B = q\pi - \frac{\pi}{4} \quad \text{con} \quad q \in \mathbb{Z}$$

Pero como

$$A + B = 5x \quad \text{y} \quad A - B = 3x \qquad \to 2A = 8x \to A = 4x\text{y} \quad B = x$$

$$4x = n\pi - \frac{\pi}{4} \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \quad \vee \qquad x = q\pi - \frac{\pi}{4} \quad q \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{16} \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \quad \vee \qquad x = q\pi - \frac{\pi}{4} \quad q \in \mathbb{Z}$$

entonces:

$$4x = \pi n - \frac{\pi}{4} \quad \vee \quad x = \pi n - \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{16} \quad \vee \quad x = \pi n - \frac{\pi}{4}$$

Ahora, de manera más general se plantea la solución de la ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} mx - \operatorname{sen} nx = \operatorname{sen}(m+n)x \qquad \text{con } m > n$$

Sustituyendo (2) y (3) en ésta ecuación y teniendo en cuenta que sumando (2) y (3) miembro a miembro se deduce que $(m+n)x = 2A$, se obtiene:

$$\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B) = \operatorname{sen} 2A$$

$$\to 2 \operatorname{sen} B \cos A = \operatorname{sen} 2A$$

$$\to 2 \operatorname{sen} B \cos A = 2 \operatorname{sen} A \cos A$$

$$\to \cos A[\operatorname{sen} B - \operatorname{sen} A] = 0$$

Por tanto:

$$\cos\frac{(m+n)x}{2}=0 \qquad \vee \qquad \operatorname{sen} B-\operatorname{sen} A=0$$

$$\rightarrow \cos\frac{(m+n)x}{2}=0 \qquad \vee \qquad \operatorname{sen}\frac{(m-n)x}{2}-\operatorname{sen}\frac{(m+n)x}{2}=0$$

$$\rightarrow \cos\frac{(m+n)x}{2}=0 \qquad \vee \qquad 2\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\cos\frac{mx}{2}=0$$

Así:

$$\cos\frac{(m+n)x}{2}=0 \qquad \vee \qquad \operatorname{sen}\frac{nx}{2}=0 \qquad \vee \qquad \cos\frac{mx}{2}=0$$

Por ejemplo, se propone solucionar el siguiente ejercicio, aplicando las sustituciones sugeridas:

$$\operatorname{sen} 8x-\operatorname{sen} 6x=\operatorname{sen} 14x$$

4.6. Demostración de Algunas Identidades Trigonométricas.

Ahora se probará algunas identidades trigonométricas usando triángulos rectángulos unitarios, es decir, triángulos rectángulos cuya hipotenusa tiene longitud igual a uno.[14]

1. **Identidades Pitagórica.** Son identidades que se demuestran a partir del teorema de Pitágoras, su veracidad se muestra a continuación usando triángulos rectángulos unitarios:

   a) En primer lugar se muestra la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, Figura 4.23. Evidentemente, a partir del teorema en mención se puede comprobar la veracidad de esta identidad trigonométrica. Se tiene en cuenta que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y}{1}$ y que $\cos\alpha = \dfrac{x}{1}$, de dónde se obtiene que $\operatorname{sen}\alpha = y$ y $\cos\alpha = x$. Otra propiedad que se deriva de la Figura 4.23, es que el $\operatorname{sen}\alpha$ y el $\cos\alpha$ oscilan entre 0 y 1, esto es: $0 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1$ y $0 \leq \cos\alpha \leq 1$.

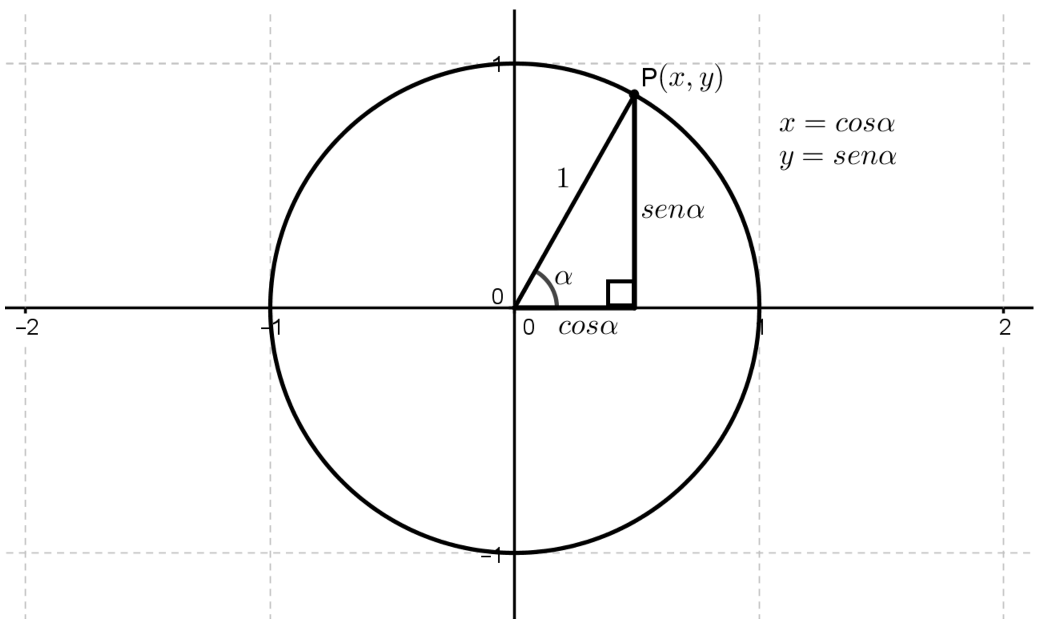

Figura 4.23: Triángulo unitario para $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$

   b) A continuación se prueba la identidad: $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$. La Figura 4.24 muestra la interpretación geométrica de $\tan\alpha$ y $\sec\alpha$, lo cual es sencillo demostrar aplicando semejanza de triángulos, y las identidades $\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ y $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$. Claramente se observa que $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo de la Figura 4.24.

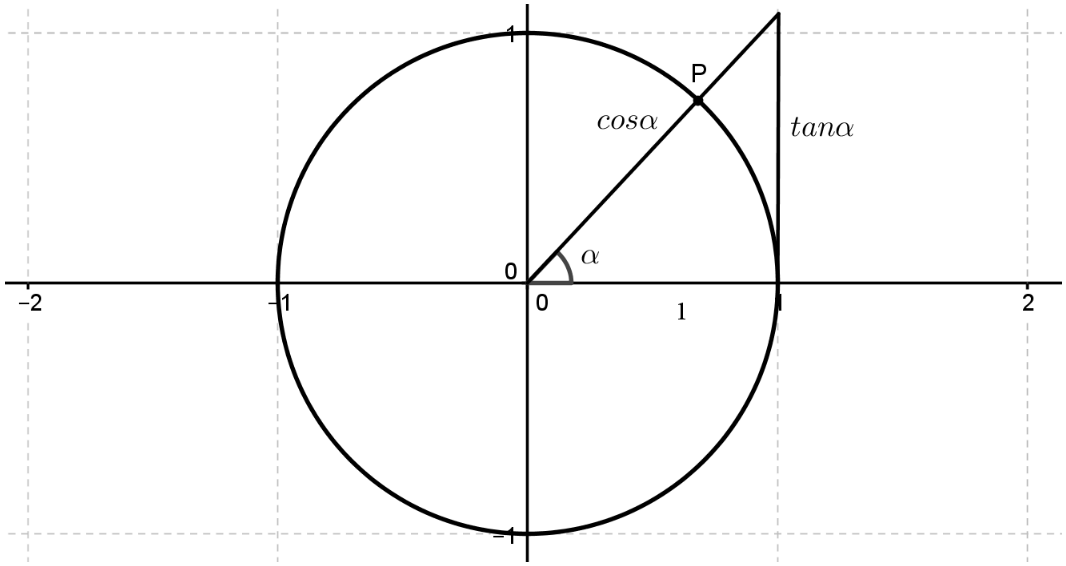

Figura 4.24: Triángulo unitario, para $\tan\alpha$ y $\sec\alpha$

c) Finalmente se prueba la identidad: $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$. La Figura 4.25 muestra la interpretación geométrica de $\cot\alpha$ y $\csc\alpha$, lo que es posible demostrar a través de la semejanza de triángulos, y las identidades $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ y $\csc\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$. Aplicando teorema de Pitágoras en el triángulo de la Figura 4.25, se prueba que $1+\cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

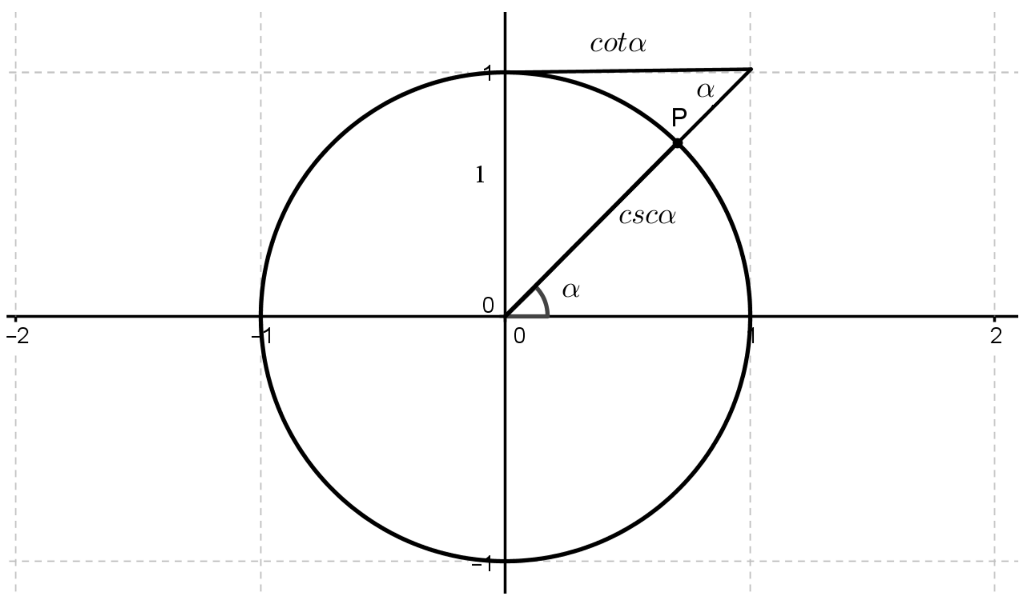

Figura 4.25: Triángulo unitario, para $\cot\alpha$ y $\csc\alpha$

2. **Seno y coseno de para la suma de ángulos**. Gráficamente, a partir de triángulos unitarios se determina $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha+\beta)$

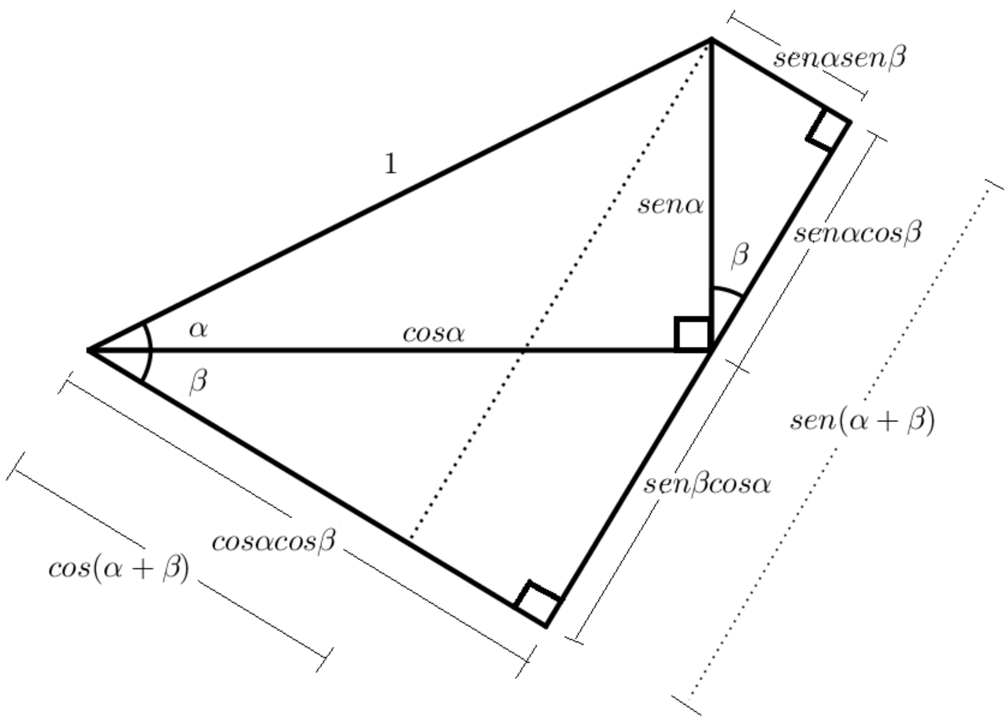

Figura 4.26: Representación gráfica de $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha+\beta)$

De acuerdo con la Figura 4.26, donde se representa gráficamente $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y el $\cos(\alpha+\beta)$, se prueba que:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

3. **Seno y coseno de** 2α A partir de triángulos unitarios es posible probar las identidades trigonométricas $\operatorname{sen}2\alpha$ y $\cos 2\alpha$.

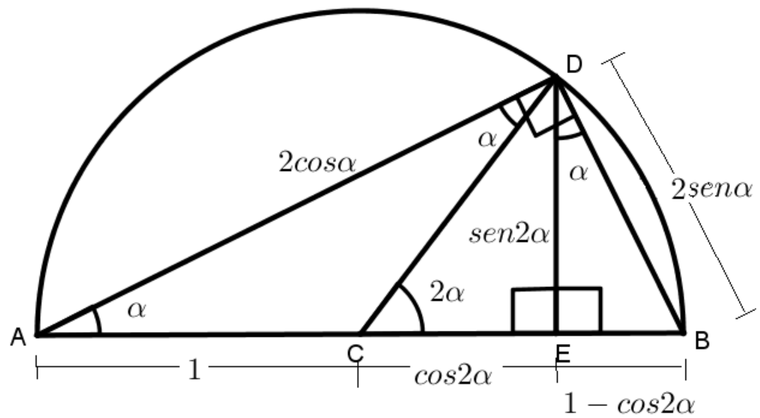

Figura 4.27: Representación gráfica de $\operatorname{sen} 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$

De la Figura 4.27 se sabe que el $\triangle ABD$ es rectángulo en D, ya que dos de sus vértices están en los extremos del diámetro y otro vértice está sobre la circunferencia; como la circunferencia es de radio 1 unidad, la hipotenusa tiene longitud 2 unidades. Es claro que $\angle DCE = 2\alpha$, al ser externo del $\triangle ACD$. Usando semejanza de triángulos se puede probar que $\angle EDB = \alpha$ Por tanto se tiene que $\overline{DB} = 2\operatorname{sen}\alpha$, teniendo en cuenta el $\triangle ABD$ y de acuerdo con el $\triangle CED$ (rectángulo y de hipotenusa 1), $\overline{ED} = \operatorname{sen} 2\alpha$ y $\overline{CE} = \cos 2\alpha$ Ahora, centrándose en el $\triangle EBD$, se observa que:

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}$$

de donde se concluye que:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

Ahora,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2sen\alpha}$$

despejando $\cos 2\alpha$, se tiene que:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$$

4.7. Razones Trigonométricas en Triángulos Áureos

El número áureo, o número de oro es uno entre varios números que son denotados universalmente de forma especial.

- el número π
- el número e
- el número áureo: Φ

Aparece en el Libro VI de las Elementos de Euclides la siguiente definición: *Se dice que un segmento ha sido cortado en extrema y media razón cuando el segmento entero es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor.*

Otra manera de expresarlo es: *El todo es a la parte mayor como ésta es a la menor.* [15]

Traduciendo la definición anterior a lenguaje:

1. Consideremos un segmento de longitud L
2. Lo dividimos en dos partes, a una de las cuales, la mayor, la llamamos a y la menor b
3. El segmento total es pues de longitud $a + b$
4. El segmento completo es al segmento mayor como el segmento mayor es al menor:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

luego:

$$ab + b^2 = a^2 \quad \rightarrow \quad a^2 - ab - b^2 = 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática se obtiene:

$$a = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4b^2}}{2} \quad \rightarrow \quad a = \frac{(1+\sqrt{5})b}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{a+b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Se concluye entonces que, cualquier segmento dividido en media y extrema razón, independientemente de su longitud, siempre cumple que la razón entre el todo y el trozo mayor es igual a la razón entre el lado mayor y el menor, y este cociente es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. A este número se le llama número áureo o número de oro y se le representa por la letra griega ϕ o su mayúscula Φ.

Algunas propiedades de Φ, de fácil demostración son:

1. $\Phi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

2. $1 + \Phi^{-1} = \Phi \quad \leftrightarrow \quad \Phi^{-1} = \Phi - 1$

3. $\Phi + 1 = \Phi^2$

4. $\Phi + \Phi^{-1} = \sqrt{5}$

5. $1 - \Phi^{-1} = \Phi^{-2}$

La manera clásica de dividir un segmento en media y extrema razón es una aplicación del teorema de Pitágoras: Consideremos un triángulo rectángulo cuyo cateto menor es la mitad de su cateto mayor. Sea b la longitud del cateto mayor, entonces su hipotenusa es: $\dfrac{b\sqrt{5}}{2}$ Figura 4.28.

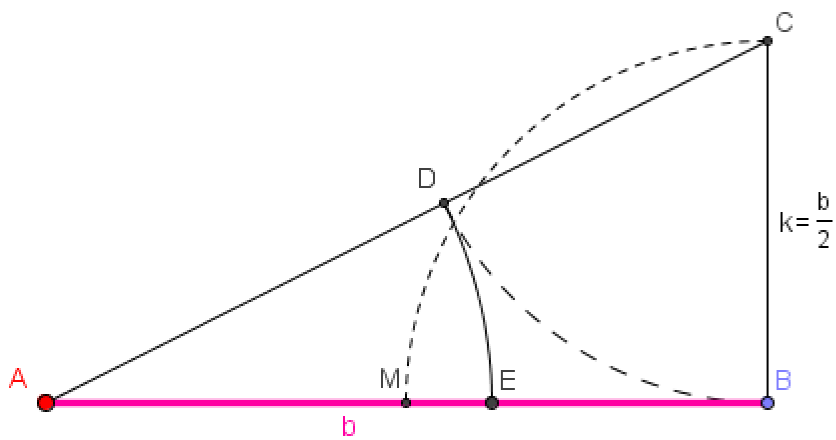

Figura 4.28: Divisón de un segmento en media y extrema razón

De acuerdo con la figura se tiene que:

$$\overline{AC}^2 = b^2 + (\frac{b}{2})^2 \quad \rightarrow \quad \overline{AC} = \frac{b\sqrt{5}}{2} \quad y \quad \overline{DC} = \frac{b}{2}$$

Ahora:

$$\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{DC} \quad \rightarrow \quad \overline{AD} = \frac{b\sqrt{5}}{2} - \frac{b}{2} = \frac{b(\sqrt{5}-1)}{2} \quad \rightarrow \quad \overline{AD} = b\,\Phi^{-1}$$

Pero:

$$\overline{AE} = \overline{AD} \quad \rightarrow \overline{AE} = b\,\Phi^{-1} \quad \rightarrow \quad \overline{AE}\,\Phi = b \quad \rightarrow \quad \frac{b}{\overline{AE}} = \Phi \quad \rightarrow \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \Phi \quad (1)$$

Además:

$$\overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE} \quad \rightarrow \quad \overline{EB} = b - b\,\Phi^{-1} = b(1 - \Phi^{-1}) = b\,\Phi^{-2} \quad (propiedad\ 5\ de\ \Phi)$$

Así,

$$\overline{EB} = b\,\Phi^{-1}\Phi^{-1} \quad \rightarrow \quad \overline{EB} = \overline{AD}\Phi^{-1} \quad \rightarrow \quad \overline{EB}\Phi = \overline{AD} \quad \rightarrow \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{EB}} = \Phi \quad \rightarrow \quad \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \Phi \quad (2)$$

Por tanto de (1) y (2), se concluye que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \Phi$$

Se llama rectángulo áureo a aquel en el que la razón entre el lado mayor a y el lado menor b es la razón áurea. esto es $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Si a un rectángulo áureo le quitamos el cuadrado determinado por el lado menor, el rectángulo resultante también es áureo.

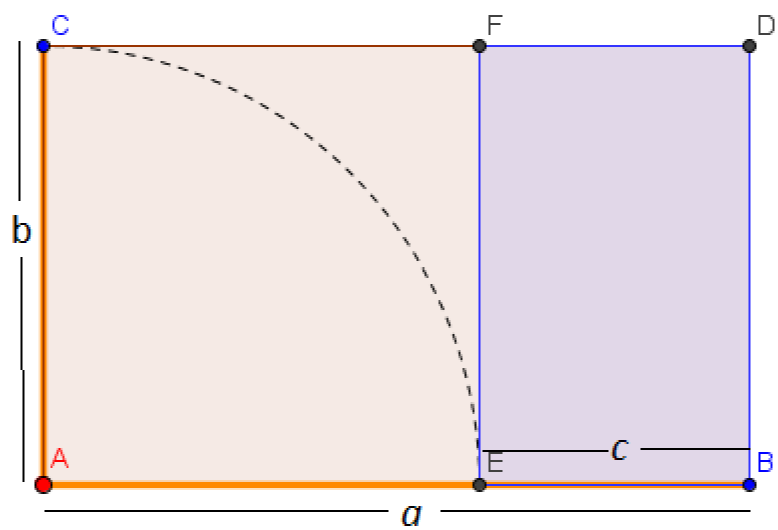

Figura 4.29: Rectángulo áureo

De acuerdo con la Figura 4.30, $ABCD$ es un rectángulo áureo, por tanto, $\dfrac{a}{b} = \Phi$, entonces $a = b\Phi$, se observa que $c = a - b$, entonces $c = b\Phi - b = b(\Phi - 1) = b\Phi^{-1}$, por tanto $c\Phi = b$, de donde se deduce que $\dfrac{b}{c} = \Phi$, por tanto el rectángulo $EBDF$ también es áureo.

El Pentágono regular y el número áureo tienen una relación muy estrecha ya que se puede encontrar la razón áurea entre varios de los elementos implicados en él.

En un Pentágono regular la razón entre la diagonal d y el lado l es la razón áurea, esto es $\frac{d}{l} = \Phi$, además $\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}$

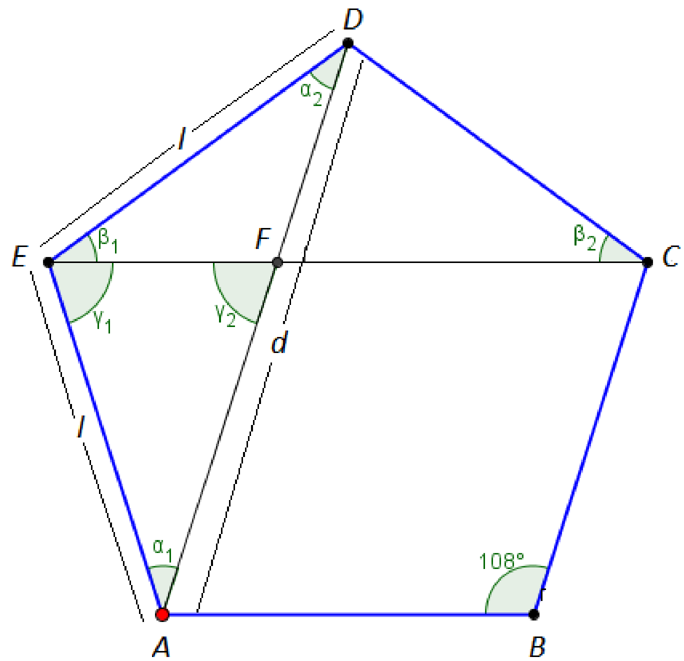

Figura 4.30: Pentágono regular

de acuerdo con la figura 4.30, se observa que el $\triangle ADE$ es isósceles, puesto que $\alpha_1 = \alpha_2 = 36°$ y el $\triangle ECD$ es isósceles, puesto que $\beta_1 = \beta_2 = 36°$; luego $\triangle EDF$ es isósceles, pues $\alpha_2 = \beta_1 = 36°$, por tanto, por el criterio de semejanza de triángulos AAA se concluye que $\triangle ADE \sim \triangle EDF$, entonces $\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}$ (1).

También se observa que $\gamma_1 = 108° - 36° = 72°$ y que $\gamma_2 = 180° - 36° = 72° = 72°$, por tanto $\triangle AEF$ es isósceles y $\overline{AF} = l$.

Así, se tiene que $\overline{AD} = d$; $\overline{AE} = \overline{ED} = \overline{AF} = l$ y que $\overline{FD} = d - l$.

En conclusión, sustituyendo estos resultados en la ecuación (1), se obtiene $\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}$, así $\frac{d}{l} = \Phi$; es decir la razón entre la diagonal y el lado de un pentágono regular es la razón áurea.

Cualquier triángulo cuyos ángulos sean $108°, 36°\ y\ 36°$, se llama triángulo áureo mayor y verificará que la relación entre su lado mayor y cualquiera de los otros dos es la razón áurea.

Cualquier triángulo cuyos ángulos sean $36°, 72°\ y\ 72°$, se llama triángulo áureo menor y verificará que la relación entre cualquiera de sus lados mayores y su lado menor es la razón áurea.

Ahora bien, si en un pentágono regular, desde un vértice cualquiera se trazan las dos diagonales resulta un triángulo áureo menor, determinado por éstas y el lado, Figura 4.31.

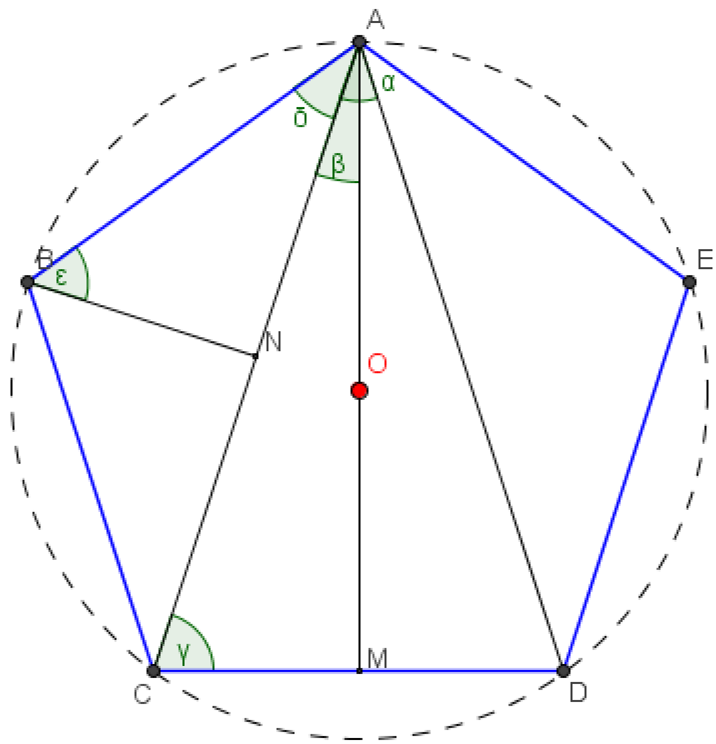

Figura 4.31: Triángulo áureo menor y mayor

Al Trazar la altura correspondiente al lado, se establecen dos triángulos rectángulos con las siguientes características:

- Son rectos y la hipotenusa es la diagonal del pentágono.
- El ángulo agudo menor es de $\beta = 18°$ y su cateto opuesto es la mitad del lado del pentágono.
- El ángulo agudo mayor es $\gamma = 72°$

Aplicando la definición de seno y coseno se obtiene que:

$$\alpha = 36^\circ \qquad \beta = 18^\circ \qquad \gamma = 72^\circ \qquad \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

$$\operatorname{sen} 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\overline{CM}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{\overline{CD}}{2}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}\Phi^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Además:

$$\cos 18^\circ = \operatorname{sen} 72^\circ = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 18^\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}$$

En un pentágono regular, si unimos mediante una diagonal dos vértices no consecutivos nos queda un triángulo áureo mayor determinado por dos lados contiguos y la diagonal. Figura 4.31.

Trazando la altura correspondiente a la diagonal resultan dos triángulos rectángulos con las siguientes características:

- Son rectos y la hipotenusa es el lado del Pentágono.
- El ángulo agudo menor es de $\delta = 36^\circ$ y su cateto opuesto es la mitad de la diagonal del pentágono
- El ángulo agudo mayor es $\epsilon = 54^\circ$

Aplicando la definición de seno y coseno se obtiene que:

$$\delta = 36^\circ \qquad \epsilon = 54^\circ \qquad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos 36^\circ = \operatorname{sen} 54^\circ = \frac{\overline{AN}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{\overline{AC}}{2}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Además:

$$\operatorname{sen} 36^\circ = \cos 54^\circ = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 54^\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}$$

A partir de los valores obtenidos, aplicando identidades trigonométricas es posible determinar el resto de razones trigonométricas para los ángulos en un triángulo áureo.

Bibliografía

[1] MOREIRA, MARCO ANTONIO, *"Aprendizaje Significativo, de la Visión Clasica a la Visión Crítica"*. Instituto de Física Universidad Federal Do Rio Grande Do Sul (UFRGS), Conferencia de cierre del V encuentro Internacionl Sobre Aprendizaje Significativo, Madrid España, septiembre de 2006. Documento de estudio para el curso de maestría, *Seminario de Proyecto Final* (UNALMED)

[2] AUSUBEL, D.P, *"Psicología Educativa. Una perspectiva cognitiva"*.1976. Ed. Trillas, Mexico

[3] MOREIRA, MARCO ANTONIO *"Unidades de Enseñanza Potencialmente Significativa - UEPS"*. Instituto de Física Universidad Federal Do Rio Grande Do Sul (UFRGS, versión 6.0. Documento de estudio para el curso de maestría, *Seminario de Proyecto Final* (UNALMED)

[4] BALLERTER VALORI, ANTONI; GAYOSO ENRIQUE, PILAR; PAYERAS AGUILÓ, JOANA M. Y VICENS XAMENA, GUILLEM *"El aprendizaje significativo en la práctica y didáctica de la geografía. Prácticas del Seminario de aprendizaje significativo"* Revista Educación y Pedagogía. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educadón. Vol. X3Y No. 34, 2002. pp. 99-110

[5] SORIA AZNAR, MARISOL Y OTROS *"El Mapa Conceptual: Una Nueva Herramienta de Trabajo. Diseño de una Práctica para Fisiología"* Universidad de Zaragoza, 2007,

[6] STEWARD, K.; REDLIN, L.; WATSON, S. *"Precálculo"* . Ed. Cengage Learning, 5ta. Ed. (2007)

[7] DAVILA ESPINOZA, SERGIO *"El aprendizaje significativo. Esa extraña expresión (utilizada por todos y comprendida por pocos)". Contexto Educativo 9.*

[8] OBANDO ZAPATA, GILBERTO Y MUÑERA CÓRDOBA, JOHN JAIRO. *"Las situaciones problemas como estrategia para la conceptualización matemática"* En Revista Educación y Pedagogía. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, no. 35, (enero- abril), 2003. pp. 185 -199.

[9] GUTIÉRREZ DEL ANILLO, CORAL; JIMÉNEZ, AZAHARA Y MORILLO, ALBA *"Trabajo de Investigación Sobre la Trigonometría"* I.E.S. Antonio López García, Madrid, España, 2007.

[10] PARDO MARTÍNEZ, JORGE *"Maestros"[on line]* Fecha de revisión/Actualización 6-10-2009 [Fecha de consulta: 10-10-2013]. Disponible en:http://maestros.brainpop.com/profiles/blogs/importancia-de-las-tecnicas

[11] FLORES ZÚÑIGA, JOSÉ PABLO *"Manual de teoría: Trigonometría Matemática Bachillerato"[on line]* Fecha de revisión/Actualización 01-06-2009 [Fecha de consulta: 10-10-2013]. Disponible en: http://matematicacr.files.wordpress.com/2009/06/trigonometria.pdf

[12] HERNÁNDEZ, DIANA *"Trigonometría Grado Décimo"[on line]* Fecha de revisión/Actualización 24-01-2013 [Fecha de consulta: 10-10-2013]. Disponible en:http://www.iedricaurtevirtual.com/guias/trig10i13.pdf

[13] CARLOS *"Trigonometria.co"[on line]* Fecha de revisión/Actualización 04-04-2011 [Fecha de consulta: 04-09-2013]. Disponible en:http://trigonometria.co/funciones-trigonometricas-de-los-angulos-notables/

[14] PUERTA ORTIZ, FERNANDO *"Apuntes de Clase del Curso Funciones y Áreas "* Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, de la Universidad Nacional, sede Medellin. 2011

[15] *"del Ángulo a la Trigonometría"[on line]* Fecha de revisión/Actualización 01-06-2010 [Fecha de consulta: 04-09-2013]. Disponible en:http://www.jorge-fernandez.es/proyectos/angulo/temas/indice.html