



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Modelos Matemáticos Para Sistemas Memristivos Análogos

John Jairo Leal Gómez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad De Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
Año 2014

Modelos Matemáticos Para Sistemas Memristivos Análogos

John Jairo Leal Gómez

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Matemática Aplicada

Orientador:
Alberto Delgado, PhD

Línea de Investigación:
Circuitos No Lineales
Grupo de Investigación:
Control Inteligente de Sistemas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
Año 2014

Dedicatoria

Para Ana Sofía

Agradecimientos

Agradezco a mi esposa por su paciencia y colaboración, Al Dr. Alberto Delgado por sus orientaciones para el desarrollo de la tesis. A mi madre y a mi familia porque siempre han creído en mi. A mis amigos quienes hicieron invaluable aportes para el desarrollo del trabajo.

Declaración

Me permito afirmar que he realizado la presente tesis de manera autónoma y con la única ayuda de los medios permitidos y no diferentes a los mencionados en la propia tesis. Todos los pasajes que se han tomado de manera textual o figurativa de textos publicados y no publicados, los he reconocido en el presente trabajo. Ninguna parte del presente trabajo se ha empleado en ningún otro tipo de tesis. Los resultados, simulaciones y experimentos, son total responsabilidad del autor.

Bogotá, D.C., Marzo de 2014.

JOHN JAIRO LEAL GÓMEZ

El trabajo ha sido desarrollado en torno al estudio de modelos matemáticos de los memristores y sistemas memristivos análogos, se presenta una revisión de los artículos y textos más relevantes que han contribuido al desarrollo del tema desde que el profesor Chua propuso el memristor como el cuarto elemento básico de circuitos en 1971, se analizan circuitos que incluyen elementos no lineales tipo memristor. En el **Capítulo 1** se realiza una revisión de fuentes documentales, análisis de las propiedades y presentación de algunos modelos matemáticos de memristores y sistemas memristivos con aplicaciones, se muestra el diseño de un circuito que permite emular el comportamiento de un memristor con el software libre para solución de circuitos LTspice, se simula el comportamiento del memristor de Hewlett Packard con el software libre Netlogo. En el **Capítulo 2** se presentan los desarrollos más destacados en la teoría de circuitos no lineales y se incluyen técnicas para la solución de este tipo de circuitos, se muestran algunos ejemplos usando métodos de linealización a trozos, el balance armónico, la transformada diferencial de Taylor y el método de Newton Raphson para solucionar sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. En el **Capítulo 3** se estudian las respuestas de circuitos que incluyen memristores utilizando las técnicas estudiadas en el capítulo anterior, las simulaciones se realizan con el software libre Octave, para las comprobaciones matemáticas se utilizó el software libre Wxmaxima.

Palabras clave: memristor, sistemas memristivos, circuitos no lineales, análogos, simulación.

Abstract

The work has been developed around the study of mathematical models of the analogous memristive systems, shown a review of the articles and books more relevant and that contributed to the development of the subject since professor Chua proposed the memristors as the fourth basic element of circuits in 1971, analyzing circuits that include memristor. The **Chapter 1** show the document sources, analysis of properties and presentation of some mathematical models of memristors and memristive systems with applications, also present the design a circuit with operational amplifiers and simulations in free software (Ltpspice and Netlogo), in **Chapter 2** shows the most highlighted developments in the theory of nonlinear circuits and included techniques for the solution of this type of circuits, we show some examples using methods of Piecewise linear, armonic balance, Taylor's differential transform, and the Newton Raphson method to solve nonlinear ordinary differential equation systems, the **Chapter 3** studied the responses of circuits that include memristors using the studied techniques in the last chapter, the simulations are realized with free software Octave and Wxmaxima for the mathematical verifications.

Keywords: memristor, memristive systems, nonlinear circuits, analog, simulation.

Introducción

En 1971 el profesor León Chua estudiando las relaciones entre los elementos básicos de circuitos el resistor R , el inductor L y el capacitor C y las variables físicas fundamentales el flujo magnético φ , la carga eléctrica q , la tensión v y la corriente i , encuentra que no hay ningún elemento básico de circuitos que relacione directamente el flujo y la carga eléctrica, así propuso la existencia del **memristor** el cual no puede construirse a partir de los otros tres [1].

Memristor es una contracción de "memory-resistor" o resistencia con memoria, es decir una resistencia que "recuerda", que varía con el tiempo y de la cual es posible conocer su último estado de polarización, la corriente que ha circulado por él, la intensidad, el tiempo de duración y la tensión aplicada.

Antes del memristor cuando un fenómeno particular presentaba comportamiento memristivo se trataba de justificar de otra forma, actualmente la comprensión de éste tipo de comportamientos precisamente permitirá la construcción de nuevos diseños tecnológicos y nuevas formas de estudiar y hacer electrónica, otro tipo de computadores, celulares, memorias, comunicaciones y en general todo lo que involucre los dispositivos básicos y avanzados, es posible que los alcances sean semejantes a la revolución que produjo el transistor.

En 1976 Kang y Chua generalizan el concepto del memristor, establecen que un sistema dinámico que tiene comportamiento memristivo se denominará un sistema memristivo [2], presentan ejemplos como el termistor o algunos sistemas iónicos.

En 2008 el profesor Stanley Williams de los laboratorios Hewlett Packard utilizó un elemento nanométrico formado por TiO_2 dióxido de Titanio y dióxido de Titanio al cual se le extrajeron iones de oxígeno TiO_{2-x} , entre dos electrodos metálicos. Este dispositivo así construido emula el comportamiento del memristor propuesto por Chua, publican un artículo titulado "The missing memristor found" [3] en el cual se planteaba que el memristor había sido encontrado!. Cuando se aplica una tensión al nuevo elemento construido por H.P. éste se polariza, es decir los iones en su interior se movilizan produciendo una modificación de su estructura interna, si la tensión se suprime, los iones no se pueden movilizar de regreso a su estado anterior, es decir recuerdan el punto de operación en el cual trabajó, esto significa que el memristor así construido tiene memoria.

Actualmente se están haciendo investigaciones en diferentes campos relacionados con el tema, por una parte se está estudiando el funcionamiento del memristor y de los sistemas memristivos, por otra se están analizando nuevos materiales y modelos matemáticos que permitan utilizar de manera más óptima los recursos y la energía en los equipos electrónicos que utilicen ésta clase de dispositivos puesto que en teoría utilizarán menor energía, mayor velocidad de procesamiento y la posibilidad de realizar operaciones lógicas en su interior. Cuando el computador diseñado con memristores se apague y se vuelva a encender, el estado en el que se encuentra aparecerá como la última vez en el que se había dejado.

En otro sentido se trabaja realizando análisis físicos, químicos y biológicos [4–7], para la utilización de nuevos materiales cuyo comportamiento sea memrsitivo. En general se hacen simulaciones y se busca ajustar modelos a los memristores. Por otra parte en [8] se generaliza el concepto de memristor a memcapacitor y meminductor, así como a sistemas memristivos generales. Se está estudiando la posibilidad tanto teórica como práctica de construir dispositivos que se comporten de estas formas y sus posibles aplicaciones.

Contenido

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
Introducción	x
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tablas	xiii
Lista de símbolos	xvii
1. Teoría del Memristor y Sistemas Memristivos	1
1.1. El nuevo elemento: El memristor	1
1.1.1. El memristor como elemento digital	3
1.1.2. Teoría de circuitos, Propiedades de los memristores	5
1.2. Propiedades de los Sistemas Memristivos	6
1.3. Algunos Modelos Matemáticos del memristor	10
1.3.1. Modelo matemático de Hewlett-Packard	10
1.3.2. Modelo no lineal	15
1.3.3. Otros modelos matemáticos	17
1.4. Emulación del memristor utilizando circuitos electrónicos	18
1.5. Netlogo	20
2. Circuitos No lineales	24
2.1. Elementos y circuitos no lineales	24
2.2. Método: Linealización a trozos	26
2.3. Método de balance armónico	28
2.4. Soluciones Numéricas	31
2.4.1. Análisis usando transformada de Taylor	32
2.4.2. Propiedades Transformada Diferencial de Taylor	34
2.4.3. Métodos Iterativos	36

3. Memristor, dispositivo análogo	41
3.1. Simulaciones	41
3.1.1. Circuito memristor-capacitor	42
3.1.2. Análisis comparativo de respuesta de circuitos MLRC	44
3.1.3. Respuesta cuando se cambia el inductor	49
3.1.4. Respuesta forzada del circuito MRLC	50
3.1.5. Solución de la ecuación del circuito MRLC en serie	52
3.2. Método del balance armónico	53
4. Conclusiones y Perspectivas	55
A. Revisión Componentes Tradicionales	57
A.1. Resistor	57
A.2. Capacitor	57
A.3. Inductor	58
B. Códigos de simulación en octave	61
C. Redes Resistivas	68
D. Circuitos de segundo orden	70
E. Artículos publicados	73

Lista de Figuras

1-1. Relación entre las cantidades eléctricas	2
1-2. Memristor General	2
1-3. Relación entre las cantidades eléctricas completas	3
1-4. Curvas del memristor	4
1-5. Operación del memristor como elemento digital	4
1-6. Curva de histéresis característica	5
1-7. Gráficas del Termistor como Sistema Memristivo	11
1-8. Modelo de HP	12
1-9. Estados del memristor R_{on}, R_{off}	12
1-10. Gráficas del memristor de HP	14
1-11. Gráfica para simular la no linealidad interna del memristor	16
1-12. Circuito emulador del memristor	19
1-13. Curva característica del memristor	19
1-14. Curvas de tensión y corriente	20
1-15. Curva característica del memristor en el osciloscopio	20
1-16. Simulación del memristor en Netlogo	21
2-1. Diodo ideal	25
2-2. Diodo Juntura-pn	25
2-3. Circuito no lineal	26
2-4. Linealización de la curva del diodo real	27
2-5. Comportamiento del diodo ideal	28
2-6. Feedback de un sistema físico no lineal	29
2-7. Representación gráfica de un sistema de ecuaciones no lineales	39
3-1. Circuito R-L-C	41
3-2. Circuito M-R-L-C	42
3-3. Circuito M-C	43
3-4. Carga para el circuito M-C	43
3-5. Corriente para el circuito M-C	44
3-6. Gráfica comparativa de las respuestas de carga al cambiar aumento en el valor de la resistencia $R = 0,5$ del circuito MRLC, línea punteada circuito sin memristor, línea continua circuito MRLC	45

3-7. Gráfica comparativa de las respuestas de carga, la línea continua es la curva con memristor, línea punteada circuito sin memristancia	45
3-8. Gráfica comparativa de las respuestas de un circuito MLC vs LC	46
3-9. Gráfica comparativa en el espacio de fase sin resistencia, la línea continua es con Memristancia, la línea punteada es sin memristancia.	46
3-10. Gráfica comparativa de las respuestas de carga al incluir las resistencias . . .	47
3-11. Gráfica comparativa de las respuestas de carga al cambiar las resistencias . .	47
3-12. Gráfica comparativa de las respuestas de carga al cambiar las resistencias . .	48
3-13. Gráfica en el espacio de fase al incluir las resistencias	48
3-14. Gráfica comparativa de las respuestas de carga de un circuito MRLC al cambiar el valor de la capacitancia	49
3-15. Gráfica en el espacio de fase al forzar un circuito	49
3-16. Gráfica del circuito cuando se cambia el inductor de $1 \times 10^{-3}H$ a $1H$	50
3-17. Gráfica comparativa de las respuestas de carga de un circuito forzado	50
3-18. Gráfica comparativa de las respuestas de carga de un circuito forzado	51
3-19. Gráfica comparativa de las respuestas de carga de un circuito forzado	51
3-20. Gráfica comparativa de las soluciones del circuito MRLC usando TDT y Octave	53
4-1. Estado del arte actual de los memristores	56
A-1. Resistor General	58
A-2. Capacitor General	59
A-3. Capacitor General	60
C-1. Representación del resistor no lineal	69

Lista de Tablas

2-1. Tabla de transformadas TDT	34
D-1. Respuestas de EDO segundo orden	71

Lista de símbolos

A continuación se escriben los símbolos que se utilizan en la Tesis.

Símbolo

Símbolo	Significado
V	Tensión
i, I	Corriente
q	Carga
φ	Flujo magnético
R	Resistencia
L	Inductancia
C	Capacitancia
M	Memristancia
Ω	Ohmios
W	Memductancia
f	Frecuencia
ω	Frecuencia angular
w_m	Ancho del memristor de H.P.
j	Unidad imaginaria
Δ	Diferencia
x	Variable de estado
\dot{x}	Derivada
D	Ancho del memristor de H.P.
w_m	Ancho de la región dopada
R_{on}	Resistencia de conducción
R_{off}	Resistencia de apagado
ψ	No linealidad de un dispositivo
Ψ	Función descriptiva de una no linealidad
J	Matriz Jacobiana
J^{-1}	Inversa de la matriz Jacobiana
$p(\cdot)$	Operador diferencial
T	Temperatura

Símbolo **Significado**

k Constante de Boltzman

Abreviaturas**Abreviatura** **Término**

TDT Transformada Diferencial de Taylor

H.P. Hewlett Packard

1. Teoría del Memristor y Sistemas Memristivos

Se presentan formalmente el memristor, los sistemas memristivos, sus modelos matemáticos y posibles aplicaciones. Se propone un circuito utilizando amplificadores operacionales que emula el comportamiento de un memristor y se simula en el software libre LTspice, se diseña el memristor de Hewlett Packard -H.P- utilizando el software Netlogo.

1.1. El nuevo elemento: El memristor

Cada elemento básico de circuitos relaciona las variables eléctricas fundamentales de manera directa, el resistor R relaciona la tensión y la corriente, el inductor L el flujo φ y la corriente i , el capacitor C la tensión v y la carga eléctrica q (ver apéndice A). El profesor Chua analizando las relaciones básicas entre las cantidades circuitales establece que por simetría de las relaciones entre las variables físicas debe existir un elemento que relacione directamente el flujo φ y la carga q como en la figura (1-1) y el cual no puede ser construido con los otros tres elementos básicos de circuitos ni sus combinaciones.

Es así como propone la existencia de un nuevo elemento que relacione directamente estas variables, **el memristor** como elemento básico de circuitos, no lineal, de dos terminales y cuya curva característica de tensión contra corriente es un lazo de histéresis que se corta en el origen cuando la entrada es periódica, lo que quiere decir que el dispositivo no consume energía cuando las fuentes externas se suprimen [1], debe comportarse como una resistencia variable, que "recuerda" lo que le ha ocurrido, la tensión y la corriente que han fluido a través de él, razón por la cual se dirá que dicha resistencia variable tiene memoria.

De manera que cualquier dispositivo que relacione funcionalmente la carga eléctrica y el flujo magnético se denominará memristor ¹:

$$\varphi = f(q) \tag{1-1}$$

$$, \text{ ó, } q = g(\varphi) \tag{1-2}$$

En el caso de la relación funcional (1-1) se dirá que el memristor es controlado por carga, mientras que en el caso de la relación funcional (1-2) se dirá que el memristor es controlado por flujo magnético.

¹Cuyo símbolo se presenta en el circuito de figura 1.2(a)

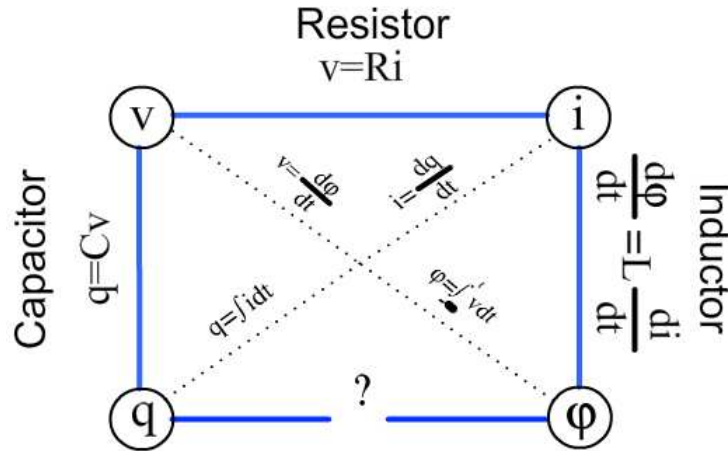


Figura 1-1.: Relación entre las cantidades eléctricas

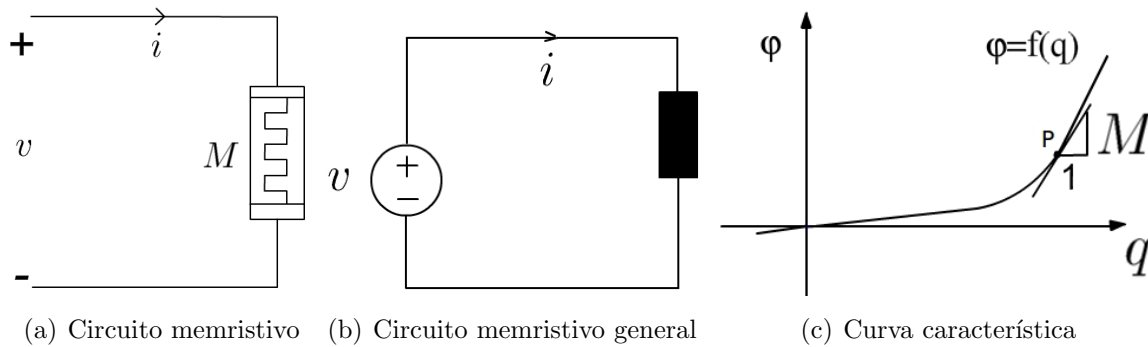


Figura 1-2.: Memristor General

De las relaciones circuitalas conocidas, la tensión es una función del flujo magnético así $v = \frac{d\varphi}{dt}$, al derivar implícitamente (1-1) teniendo en cuenta que cada una de las cantidades eléctricas dependen del tiempo se tiene:

$$v(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{df(q)}{dq} \frac{dq}{dt} \quad (1-3)$$

De donde al reescribirla resultan las ecuaciones de estado del dispositivo definidas en [3]

$$v(t) = M(q)i \quad (1-4)$$

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1-5)$$

La pendiente de la curva en el punto de operación está dada por $M(q) = \frac{df(q)}{dq}$ y se denomina la *memristancia* del dispositivo y representa la resistencia en un punto de operación P particular, en el cual se esté operado el dispositivo como en la figura (1.2(c)). Las unidades de la memristancia son los ohmios para conservar las unidades entre tensión y corriente en la ecuación (1-4).

Las relaciones completas entre las cantidades eléctricas y los elementos básicos de circuitos incluyendo el memristor se muestran en la figura² (1-3). Teóricamente el dispositivo tiene varias características y propiedades las cuales se analizan y estudian a continuación.

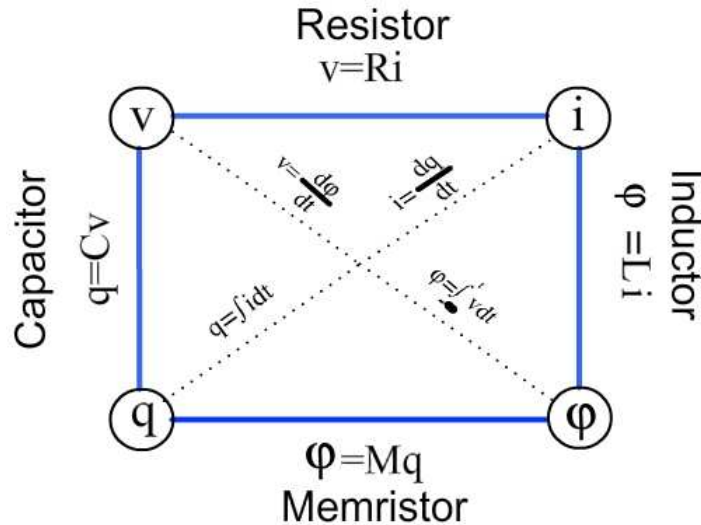


Figura 1-3.: Relación entre las cantidades eléctricas completas

1.1.1. El memristor como elemento digital

El memristor se puede utilizar como una memoria digital tanto a nivel macro como a nivel nanométrico [9–11,26]. A continuación se muestra una breve descripción del comportamiento de un memristor como un elemento digital, en la figura 1.4(a) se muestra una curva que relaciona el flujo ϕ y la carga q linealizada por dos segmentos de recta. A medida que la carga aumenta dentro del dispositivo el flujo aumenta y se pasa de un estado de baja resistencia (pendiente más pequeña) a un estado de mayor resistencia (pendiente mayor). En la figura 1.4(b) se muestra como la memristancia que es la derivada de la curva 1.4(a) a medida que la carga cambia hay un valor de carga $1C$ en el cual se cambia el valor de su memristancia, en éste caso pasa de un estado de 1Ω a un valor de 5Ω , así el memristor pasa de un estado de memristancia inicial o cero lógico a un valor de memristancia final o uno lógico quedando almacenado este valor dentro del dispositivo.

Operación digital del memristor

Supongamos que al circuito de la figura 1.2(a) se le aplica un pulso de tensión de corta duración digamos Δt y de amplitud E como el que se ve en la figura 1.5(a) y en un punto de operación particular del dispositivo P figura 1.5(b), supongamos además que el memristor tiene una carga inicial Q_P pero sin flujo inicial $\varphi_0 = \varphi(t_0) = 0$ figura 1.5(c). En la figura

²De manera similar se establece de la relación funcional en la ecuación (1-2) la memductancia que es $W(\varphi) = \frac{dq}{d\varphi}$

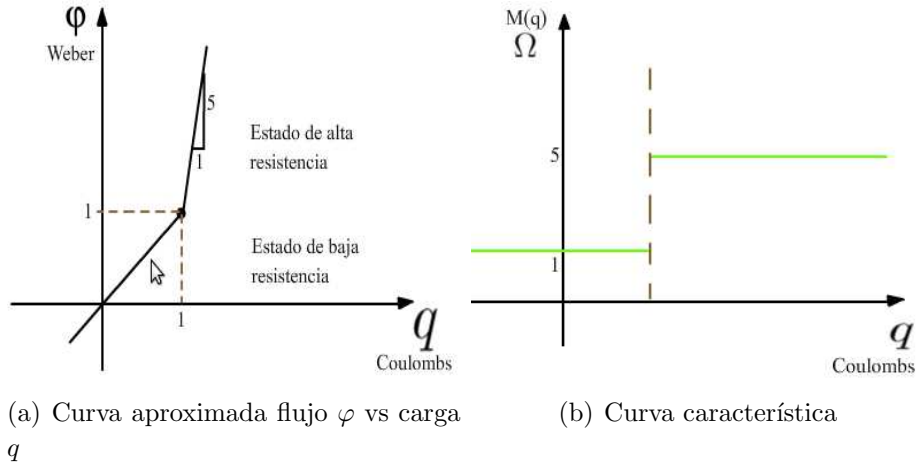


Figura 1-4.: Curvas del memristor

1.4(b) se aprecia lo que ocurre en el memristor; el flujo inicial era cero antes de t_0 momento en el cual se aplica el pulso, por su puesto el flujo cambia de manera lineal pasando de $(0, \varphi_0)$ a $(t + \Delta t, \varphi_P)$, donde $\varphi_P = E\Delta$. El cambio que sufre el flujo se halla utilizando:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \tag{1-6}$$

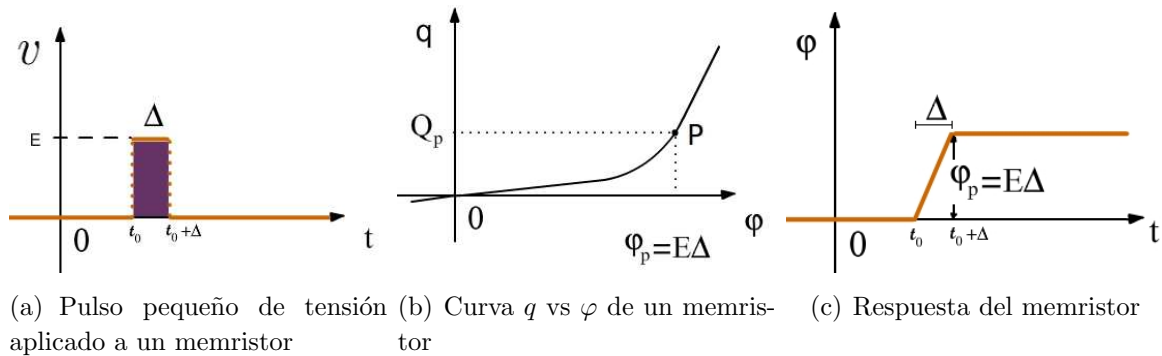


Figura 1-5.: Operación del memristor como elemento digital

Integrando la figura 1.5(a) se obtiene la figura 1.5(c) la cual muestra que el dispositivo cambio su flujo magnético de un estado inicial cero a un estado final φ_P en un intervalo de tiempo Δt . Para concluir, cuando a un memristor se le aplica un pulso de tensión de ancho Δ y altura E el área bajo la curva será $\varphi_P = E\Delta$ el cual será el nuevo flujo del memristor. Algo diferente sucede cuando se aplica una tensión sinusoidal al dispositivo, la curva característica entre tensión y corriente para un elemento memristivo es una lazo cerrado o **curva de histéresis** como se aprecia en la Figura (1-6) en la cual se muestra el efecto de eliminar

la tensión del dispositivo obteniendo que $v = 0$ si y solo si $i = 0$, "pinched hysteresis loop" o curva de histéresis que se corta en el origen.

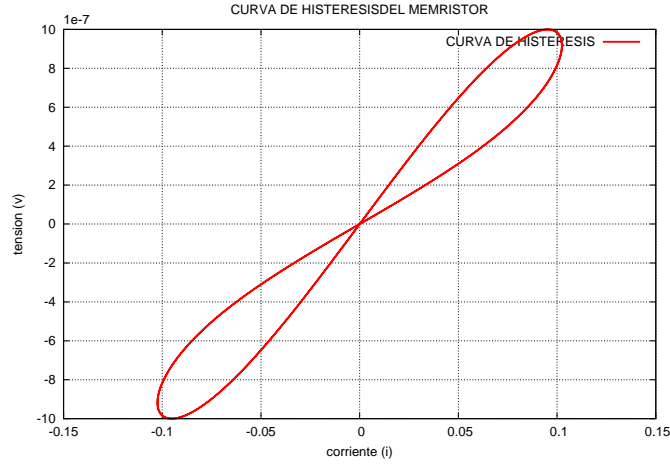


Figura 1-6.: Curva de histéresis característica

A continuación se presenta una revisión de las propiedades teóricas de memristores y sistemas memristivos [1,2], con lo cual se caracteriza un dispositivo o sistema cuyo comportamiento sea memristivo.

1.1.2. Teoría de circuitos, Propiedades de los memristores

Se estudia el memristor como elemento análogo [18], en general se dice que un memristor es controlado por carga si la relación $h(\varphi, q) = 0$ se puede expresar como un función de φ en función de la carga, y se dirá que es controlado por flujo si se puede expresar la carga q como una función del flujo φ .

La caída de tensión en el memristor se expresa como:

$$\begin{aligned} v(t) &= M(q(t))i(t) \\ M(q(t)) &= \frac{d\varphi(q)}{dq} \end{aligned} \quad (1-7)$$

Donde $M(q)$ se denomina la **memristancia incremental**, tiene unidades de resistencia Ω ohmios, y tiene el sentido presentado en las secciones anteriores. Por otra parte, un memristor controlado por flujo se expresa como

$$\begin{aligned} i(t) &= W(\varphi(t))v(t) \\ W(\varphi) &= \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} \end{aligned} \quad (1-8)$$

Donde $W(\varphi)$ se denomina la **memductancia incremental** debido a que tiene unidades de conductancia Siemens S .

De la ecuación (1-7) al hacer separación de variables e integrar, se puede escribir:

$$\varphi(q) = \int_{-\infty}^{t_0} v(t)dt = \int_{q_0}^q M(r)dr \quad (1-9)$$

El valor de la memristancia incremental en cualquier instante de tiempo t_0 depende de la integral de la tensión que pasa por el memristor desde $t = -\infty$ hasta $t = t_0$. Así mientras que el memristor se comporta como un resistor común en un instante dado de tiempo t_0 , su resistencia depende completamente de la historia de la tensión que ha sido aplicada. De aquí la escogencia de su nombre porque recuerda la historia y trabaja en ese punto de operación es decir se comporta como una resistencia en un punto particular, pero a su vez su resistencia depende de la operación que haya tenido anteriormente de aquí su nombre "memristor", resistencia con memoria. Una vez se haya especificado un valor de tensión o de corriente para el memristor, éste se comporta como un resistor lineal variable en el tiempo. En el caso en que la curva $\varphi - q$ sea una línea recta se cumple que $M(q) = R$. Casi cualquier curva $\varphi - q$ puede ser sintetizada por redes activas, los siguientes teoremas muestran la clase de memristores que se pueden construir en forma de dispositivos puros, es decir sin fuentes internas [1],

TEOREMA 1 *Criterio de pasividad: Un memristor caracterizado por una curva $\varphi - q$ diferenciable es pasivo³ si y solo si su memristancia incremental $M(q) \geq 0$*

TEOREMA 2 *Teorema de clausura: Un uno-puerto⁴ que contiene solo memristores es equivalente a un memristor.*

TEOREMA 3 *Existencia y unicidad:*

Cualquier red que contenga solo memristores con memristancia incremental positiva tiene una única solución

1.2. Propiedades de los Sistemas Memristivos

A diferencia de los memristores, los sistemas memristivos pueden contener fuentes internas [12]. Un sistema memristivo (1-10) es un sistema dinámico en el cual u denota la *entrada* del sistema, y denota la *salida* y x denota el estado interno del sistema o *variable de estado*⁵.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t) \\ y &= g(x, u, t)u \end{aligned} \quad (1-10)$$

³Se dice que un resistor es pasivo si y solo si su resistencia es no negativa, así un resistor pasivo siempre absorbe energía del circuito

⁴Recordemos que un puerto puede ser creado de un circuito utilizando dos cables a un par de nodos del circuito, así un uno puerto puede ser vista como una caja negra que tiene un par de terminales accesibles desde afuera ([37])

⁵Como lo establecen en [2]

Para éste sistema dinámico, la salida y es igual al producto entre la entrada u y la función escalar g , con lo que se tiene que a entrada cero, salida cero. Ésta característica se evidencia en la curva de Lissajous que siempre cruza por el origen. La función $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial n -dimensional.

Un sistema memristivo se dice controlado por corriente cuando:

$$\dot{x} = f(x, i, t) \quad (1-11)$$

$$v = R(x, i, t)i \quad (1-12)$$

Y controlado por tensión cuando [2]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, v, t) \\ i &= G(x, v, t)v \end{aligned} \quad (1-13)$$

Donde v e i representan la tensión y la corriente respectivamente.

En ésta sección se presentan las propiedades de los sistemas memristivos. Las pruebas se pueden consultar en [2].

1. Propiedad 1. *Criterio de pasividad.*

Dado un sistema memristivo controlado por corriente e invariante en el tiempo y cuya función de resistencia no lineal denotada por $R(\cdot)$ satisface la restricción $R(x, i) = 0$ solo si $i = 0$. El unipuerto se denomina *pasivo* si y solo si $R(x, i) \geq 0$, para cualquier valor de corriente admisible $i(t)$, para todo $t \geq t_0$, donde t_0 se escoge de tal forma que $x(t_0) = x^*$, con x^* el mínimo estado de energía almacenada en el sistema.

2. Propiedad 2. *Sin almacenamiento de energía eléctrica.*

Si un sistema memristivo satisface la hipótesis de la propiedad 1, entonces la potencia instantánea de entrada al unipuerto es siempre no negativa.

3. Propiedad 3. *Característica DC.* Un sistema unipuerto memristivo controlado por corriente e invariante en el tiempo operando en DC, es equivalente a un resistor no lineal invariante en el tiempo controlado por corriente. Si $f(x, I) = 0$ tiene una única solución $x = x(I)$ tal que para cada valor $I \in \mathbb{R}$, el punto de equilibrio es globalmente asintóticamente estable⁶.

⁶Sistema estable (Lyapunov). El estado de equilibrio $x_e = 0$ es estable en el sentido de Lyapunov, o simplemente estable, si para cualquier escalar dado $\epsilon > 0$, existe un escalar $\delta(t_0, \epsilon) > 0$ tal que $\|x_0\| < \delta$, implica $\|x(t)\| < \epsilon$, para todo $t \geq t_0$. Se dice que asintóticamente estable si es estable en el sentido Lyapunov y además para cualquier tiempo t_0 y para cualquier estado inicial x_0 suficientemente cercano al origen del espacio de estado, el estado $x(t)$ tiende al origen en cuanto t tiende a infinito. También, si en éstas definiciones, el estado inicial x_0 no está restringido a que dicho estado esté lo suficientemente cerca del origen (o sea que se cumple cualquiera sea del estado inicial x_0 de que se parta), entonces se dice que la estabilidad es **global**.

4. Propiedad 4. *Valores dobles en la figura de Lissajous.*

Un sistema memristivo unipuerto controlado por corriente, en operación periódica⁷ con $i(t) = I \cos(\omega t)$ siempre produce un figura de Lissajous en el plano $v - i$, para cada valor de corriente $i \in [-I, I]$ le corresponden a lo más dos valores distintos de tensión v .

5. Propiedad 5. *La figura de Lissajous es simétrica.*

Si la función $R(\cdot)$ de un sistema unipuerto memristivo controlado por corriente es tal que $R(x, i) = R(x, -i)$ entonces la curva de Lissajous $v - i$ correspondiente a la entrada $i(t) = I \cos(\omega t)$ es abierta (es decir no se cierra el lazo) cuando el estado $x(t)$ es periódica con el mismo período de la entrada $i(t)$ y es de media onda es simétrica. Por otra parte, es simétrica impar con respecto al origen siempre que el estado $x(t)$ sea periódica del mismo período que el de $i(t)$ y de cuarto de onda simétrica.

6. Propiedad 6. *Linealización de la curva de histéresis.*

Si un sistema memristivo unipuerto controlado por corriente tiene la forma (1-14), de entrada-acotada estado-acotado estable⁸, entonces cuando se opera con una señal periódica se degenera en un resistor lineal invariante en el tiempo a medida que la frecuencia aumenta hacia el infinito.

$$\dot{x} = f(x, i) \quad (1-14)$$

$$v = R(x)i \quad (1-15)$$

Esto es debido a que la función $f(x, i)$ se puede escribir como:

$$f(x, i) = \alpha_0 + \sum_{k=-N}^N \exp(jk\omega t) \alpha_k \quad (1-16)$$

Donde $N \neq 0$ es un entero y α_0, α_k son $n - tuplas$ de números complejos, al integrar la ecuación (1-14) se obtiene:

$$x(t) = x_0 + \alpha_0(t - t_0) + \sum_{k=-N}^N \frac{\exp(jk\omega t) \alpha_k - \exp(jk\omega t_0)}{jk\omega} \quad (1-17)$$

Dado que $x(t)$ es periódica y acotada por la suposición, entonces $\alpha_0 = 0$, además como $\omega \rightarrow \infty$, la variable de estado $x(t)$ tiende a x_0 , la función $R(x)$ de la memristancia es un valor fijo y la resistencia es lineal.

⁷Un unipuerto se dice que es de operación periódica cuando su respuesta es periódica con el mismo período que el de la entrada

⁸Un sistema dinámico como el (1-14) se dice que es entrada-acotada estado-acotado si para todo t_0 , para todo estado inicial x_0 y para toda entrada acotada $i_{[t_0, \infty]}$, la trayectoria de estado $x(\cdot)$ es acotado.

7. *Característica de pequeña señal AC.* Si un sistema unipuerto memristivo controlado por corriente es globalmente asintóticamente estable para todas las entradas de corriente I , entonces se puede construir un circuito equivalente cerca del punto de operación DC.

Ejemplos de sistemas memristivos fueron propuestos en [2, 13–17, 19–22], a continuación se muestra uno de ellos:

■ **Ejemplo 1** *El **Termistor** Es un semiconductor electrónico o resistor térmico que presenta grandes cambios en su resistencia a causa de cambios en la temperatura de su estructura⁹, la resistencia escrita como una función de la temperatura está dada por [16]:*

$$R(T) = R(T_0) \exp \left[\beta \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] \quad (1-18)$$

Donde $R(T)$ y $R(T_0)$ son las resistencias de potencia cero a la temperatura absoluta T y T_0 respectivamente, y β es una constante del material cuyos rangos están entre 4000K y 5000K para la mayoría de materiales de termistores. Esto produce un coeficiente de temperatura de resistencia de entre -3% y $-5,7\%$ por $^{\circ}K$, la expresión para la tensión en el dispositivo se escribe como:

$$v = R_0(T_0) \exp \left[\beta \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] i \equiv R(T)i \quad (1-19)$$

La potencia instantánea disipada por el termistor está dada por:

$$p(t) = v(t)i(t) = \delta(T_a - T) + C \frac{dT}{dt} \quad (1-20)$$

Donde C es la capacidad calorífica y δ es el coeficiente de disipación el cual está definido como el cociente del cambio en la disipación de potencia respecto al cambio en la temperatura del dispositivo, cuyo valor aproximado es $1mW/K$ y T_a es la temperatura ambiente. Substituyendo (1-19) en (1-20) se obtiene:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\delta}{C}(T_a - T) + \frac{R_0(T_0)}{C} \exp \left[\beta \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] i^2 \quad (1-21)$$

Veamos que en efecto el termistor es un sistema memristivo de primer orden controlado por corriente, la variable de estado es $x = T$, la ecuación (1-21) tiene la misma forma que la ecuación (1-11):

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\delta}{C}(T_a - x) + \frac{R_0(T_0)}{C} \exp \left[\beta \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{T_0} \right) \right] i^2 = f(x, i, t) \quad (1-22)$$

Y la ecuación (1-19) corresponde con la ecuación (1-12)

⁹Su nombre proviene de las palabras "resistor térmico" o termistor, estas resistencias son semiconductores de cerámica, fabricados por sinterización de mezclas de óxidos de metales de manganeso, níquel, cobalto, cobre, hierro, uranio y otros.

$$v = R_0(T_0) \exp \left[\beta \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{T_0} \right) \right] i = R(x, i, t) i \quad (1-23)$$

Al resolver las ecuaciones (1-22) y (1-23) se obtienen las figuras 1.7(a), 1.7(a), 1.7(a), 1.7(c) y la conocida curva de histéresis en donde se evidencia que el sistema es memristivo 1.7(d).

1.3. Algunos Modelos Matemáticos del memristor

El comportamiento memristivo ha estado presente en muchos elementos conocidos hace bastante tiempo debido a que la memristancia representa las pérdidas en los sistemas [1, 2, 13, 23], sin embargo fue solo hasta 1971 en el que Chua trata de explicar algunos de estos fenómenos. Es a partir de éste momento cuando se plantean varios modelos matemáticos, alguno de los cuales se presentan junto con sus análisis y características más importantes.

1.3.1. Modelo matemático de Hewlett-Packard

En 2008 Williams construyó un dispositivo nanométrico de dióxido de titanio TiO_2 y ¹⁰dióxido de titanio con vacancias de oxígeno TiO_{2-x} , entre dos electrodos metálicos, ver figura (1-8), para hacer el análisis físico propuesto en [5]¹¹ se supone que la longitud es D y el ancho de la región dopada es ¹² w_m , se observó que tenía el mismo comportamiento del dispositivo propuesto por Chua, al parecer "El memristor perdido había sido encontrado!" [3].

Internamente cuando la región de dopaje cubre totalmente el dispositivo con una alta concentración de dopantes¹³ la resistencia se disminuye considerablemente y el valor de resistencia del memristor se define como R_{on} el dispositivo puede conducir fácilmente la corriente, por otra parte, cuando los dopantes se concentran y hay mucha resistencia, el estado del dispositivo es R_{off} y la conducción de corriente es mucho menor, ver figura (1-9). Entonces es posible que el memristor tome valores de resistencia entre estos dos valores $R_{on} \leq R \leq R_{off}$ y funcione como una resistencia variable análoga cuya utilización tiene la posibilidad de tomar "todos" los valores posibles en el intervalo $\frac{w_m}{D} \in [0, 1]$ esto permitiría la computación analógica hasta ahora inexplorada.

Inicialmente tendrá su máxima resistencia o su valor más grande, pero cuando el dispositivo se polariza los iones se mueven de sus lugares originales¹⁴ y se desplazan de acuerdo con la intensidad del voltaje, la resistencia entonces va disminuyendo hasta tener su valor mínimo. Si en algún momento del proceso la tensión aplicada se elimina, los iones se detendrán y el dispositivo "recordará" el estado en el cual estaba antes de eliminar la energía. El

¹⁰Se han extraído por algún método iones de oxígeno eliminando x iones

¹¹Aún cuando se siguen realizando estudios respecto a otros materiales cuyos comportamientos sean memristivos como por ejemplo la sangre [7], [6].

¹²Se supone que este ancho será siempre positivo

¹³pueden ser iones positivos o negativos

¹⁴En el caso de los semiconductores los que se mueven son los electrones únicamente

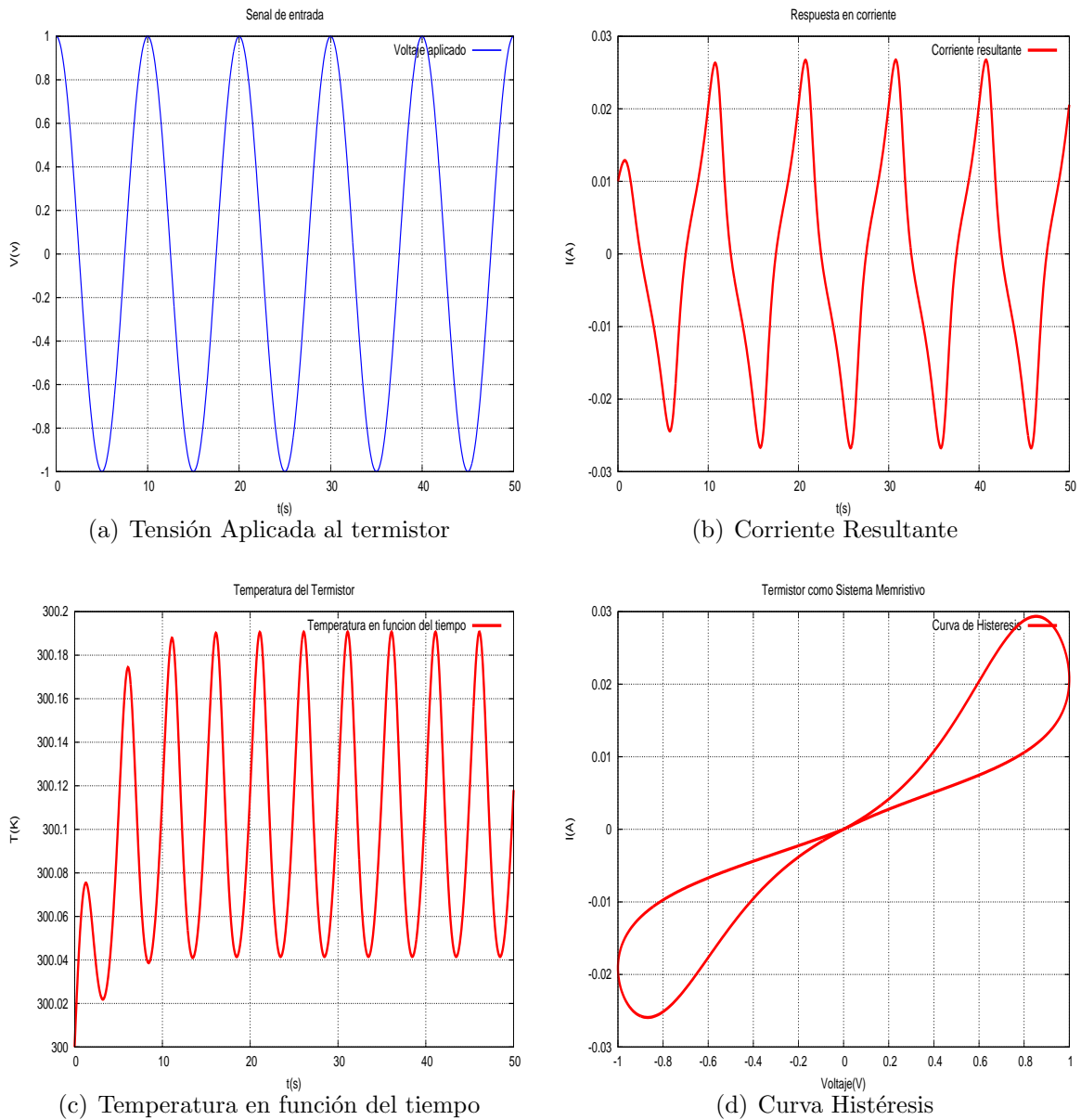


Figura 1-7.: Gráficas del Termistor como Sistema Memristivo

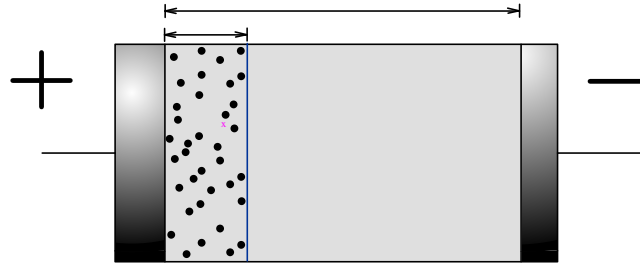


Figura 1-8.: Construcción de un memristor a nivel nanométrico entre cátodos de platino y una capa aislante de TiO_2 y una capa dopada con vacancias de oxígeno TiO_{2-x}

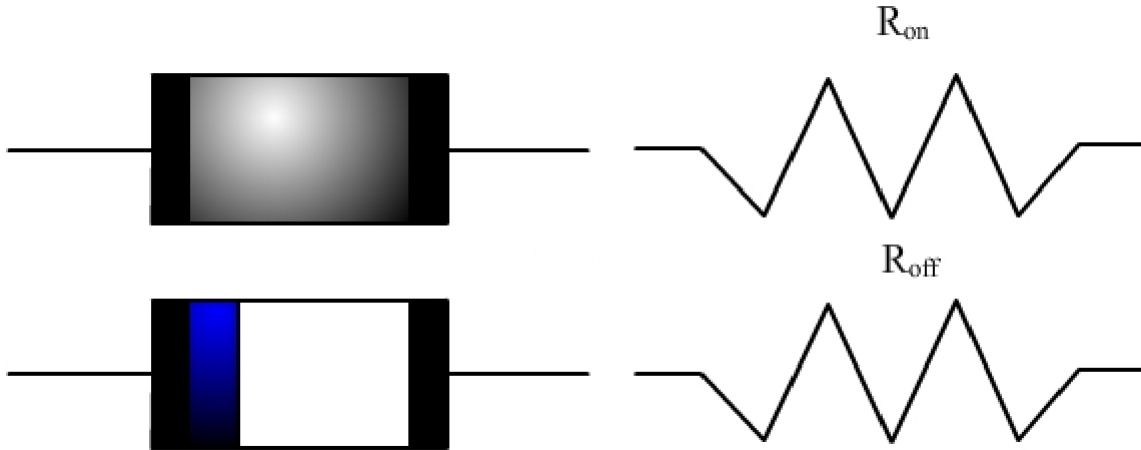


Figura 1-9.: Estados del memristor R_{on} , R_{off}

dispositivo así diseñado satisface que cuando $v = 0$, la $i = 0$, y tiene memoria pues su estado dependerá de la intensidad y tiempo que haya durado la aplicación del voltaje.

Parámetros del modelo

En la ecuación (1-4), la carga q representa la variable de estado del dispositivo que corresponde justamente a la carga o dopaje interno y M es una resistencia generalizada o memristancia que depende de la configuración o estado interno del dispositivo.

La memristancia se definió en la sección (1.1) por $M(q) = d\varphi(q)/dq$ y se puede expresar en función del parámetro w_m como:

$$M(w_m) = \frac{w_m}{D} R_{on} + \left(1 - \frac{w_m}{D}\right) R_{off} \quad (1-24)$$

Al definir $\Delta R = R_{off} - R_{on} \approx R_{off}$, representa el cambio de resistencia que el dispositivo tendrá. Cuando se aplica una tensión, $v(t) = M(q(t))i(t) = M(w_m(t))i(t)$. La frontera entre la región dopada y la región no dopada en presencia de una tensión, se moverá en función

del tiempo con lo cual la variación del ancho de la región dopada se puede expresar de la siguiente forma [55]:

$$\frac{dw_m(t)}{dt} = v_D = \eta \frac{\mu_D R_{on}}{D} i(t) \quad (1-25)$$

Donde $\eta = \pm 1$ representa la polaridad del memristor según sea que al aplicar la tensión la región dopada se extienda o se contraiga, μ_D es la movilidad iónica y es de aproximadamente del orden de $10^{-10} \text{cm}^2/\text{V.s}$. Integrando la ecuación (1-25) se obtiene

$$w_m(t) = w_{m0} + \eta D q(t) / Q_0 \quad (1-26)$$

El valor $Q_0 = D^2 / \mu_D R_{on}$ representa la cantidad de carga que debe moverse a través del memristor para que la frontera se mueva una distancia D , y w_{m0} representa el ancho inicial de la región dopada. Reemplazando este resultado en la ecuación (1-24) obtenemos

$$M(q) = R_o - \eta \Delta R q / Q_0 \quad (1-27)$$

Donde se definió el valor R_0 el cual representa la resistencia inicial del memristor

$$R_o = \frac{w_{m0}}{D} R_{on} + \left(1 - \frac{w_{m0}}{D}\right) R_{off} \quad (1-28)$$

La ecuación que se resolverá para determinar la tensión en el memristor es

$$v(t) = M(q)i(t) = \left(R_o - \frac{\eta \Delta R q}{Q_0}\right) \frac{dq}{dt} \quad (1-29)$$

Sujeta a la condición inicial $q(0) = 0$, obteniendo [55]

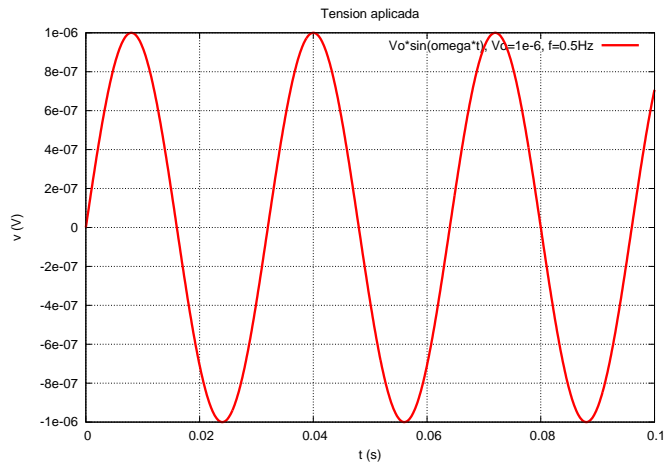
$$q(t) = \frac{Q_0 R_o}{\eta \Delta R} \left[1 - \sqrt{1 - \eta \frac{2 \Delta R}{Q_0 R_o^2} \phi(t)}\right] \quad (1-30)$$

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_o} \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \eta \Delta R \phi(t) / Q_0 R_o^2}} = \frac{v(t)}{M(t)} \quad (1-31)$$

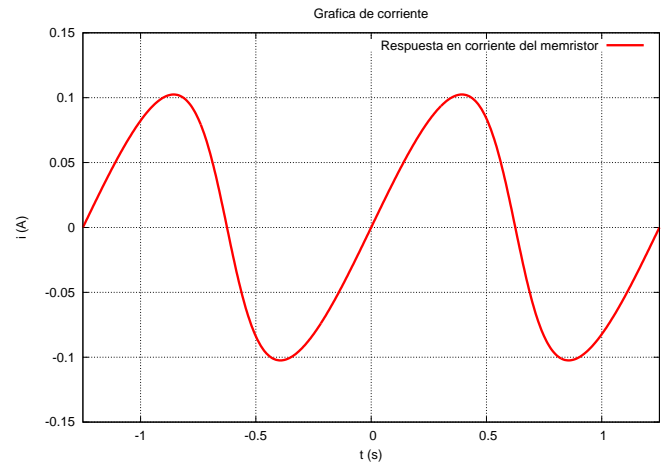
A continuación se muestran los resultados de las simulaciones realizadas en Octave (Ver programas en el Apéndice B)

En la gráfica (1.10(a)) se muestra la señal que se aplicó en la simulación cuya amplitud fue de $1 \times 10^{-6} \text{V}$, con una frecuencia de $f = 0,8 \text{Hz}$, por una parte se presentan las gráficas de las ecuaciones (1-30) (Solución exacta) y por otra parte se resolvió la ecuación (1-29) utilizando métodos numéricos. Los resultados son exactamente iguales.

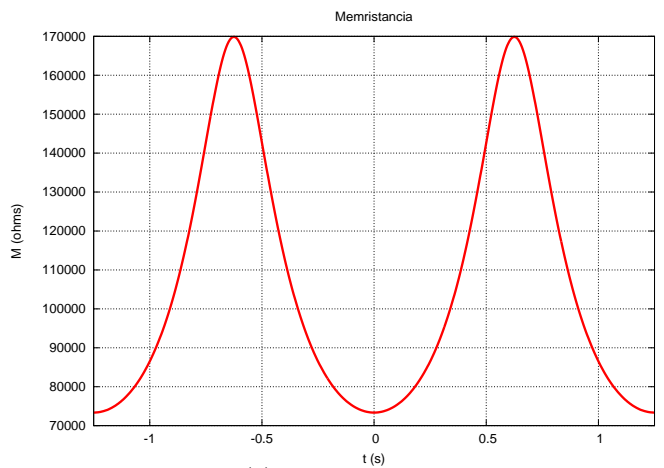
La gráfica de la carga se muestra en (1.10(d)) y la de memristancia en (1.10(c)). En ésta última es interesante observar que la memristancia varía (en esta simulación) entre aproximadamente los $80 \text{k}\Omega$ y los $180 \text{k}\Omega$ lo que quiere decir que los valores de resistencia son bastante altos y pueden llegar a ser apropiados para el uso en componentes electrónicos nanométricos.



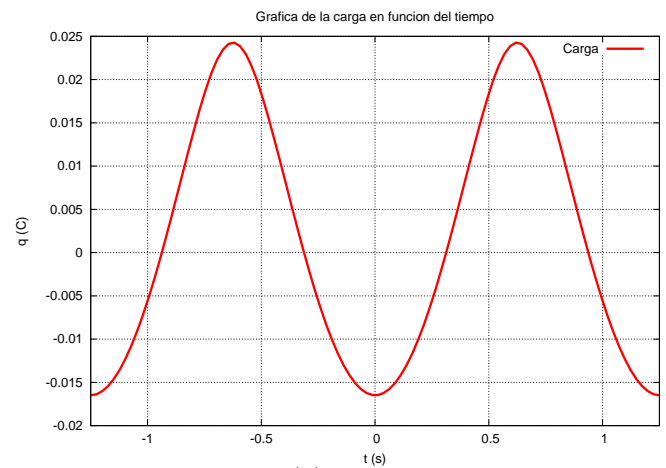
(a) Tensión Aplicada al memristor



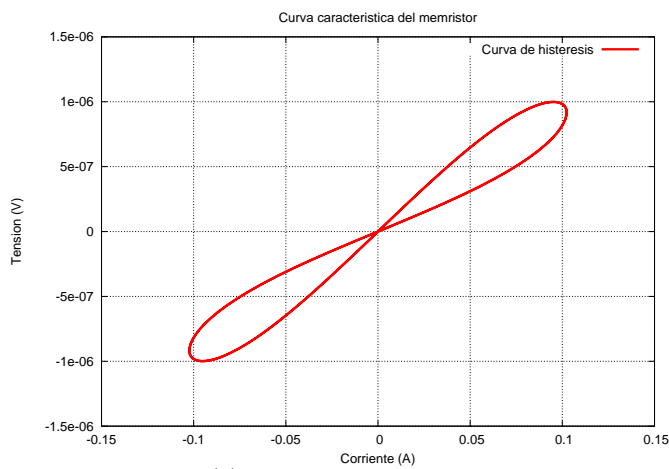
(b) Corriente Resultante



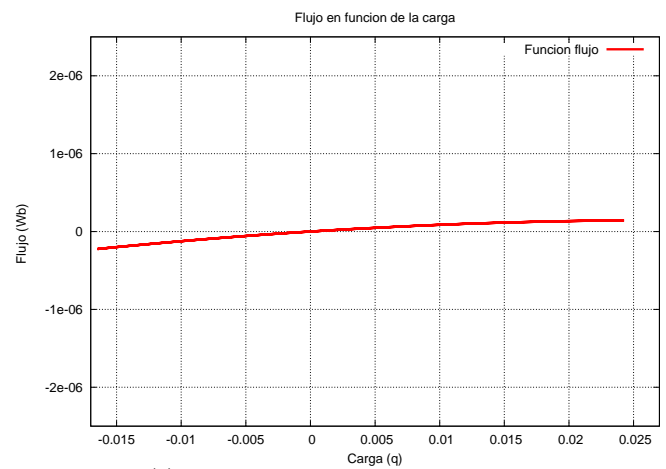
(c) Memristancia



(d) Carga



(e) Curva de Histéresis



(f) Flujo como función de la carga

Figura 1-10.: Gráficas del memristor de HP

El comportamiento más importante se observa en la gráfica (1.10(e)), en la cual se muestra que el memristor no consume energía cuando se suprimen las fuentes externas, es decir la potencia del dispositivo $p = 0$ cuando no se le aplica ninguna tensión. Ésta "propiedad" del dispositivo es lo que permitirá el diseño de equipos electrónicos con bajo consumo de potencia y por otra parte se pretende que la información almacenada allí cuando se prenda un computador por ejemplo, se restablezca tal y como se había dejado en su última utilización, como se mencionó anteriormente, esto se puede explicar debido a que cuando el memristor se polariza, la estructura interna del memristor se modifica es decir se hacen cambios estructurales del material. Cuando la tensión se suprime la estructura no puede cambiar a su estado anterior "recordando" lo que le había sucedido puesto que mantiene ese estado hasta que una nueva polarización ocurra. Este es el principio que se está estudiando actualmente para los arreglos de memorias que se construirán con resistencias, las llamadas RRAM.

Análisis de la curva de flujo

Utilizando la ecuación (1-27) $M(q) = Ro - \eta\Delta Rq/Q_0$, y dado que $M(q) = \frac{d\varphi}{dq}$ se tiene integrando que $\varphi = \int M(q)dq$ de donde se obtiene que para el caso propuesto por Williams, el flujo en el memristor está dado por $\varphi = Roq - \frac{\eta\Delta R}{Q_0} \frac{q^2}{2}$ cuya gráfica se presenta en 1.10(f)

1.3.2. Modelo no lineal

En [23–25] se presentan análisis en el que se resalta que el modelo lineal tiene varias simplificaciones importantes desde el punto de vista de la electrodinámica. En primer lugar, cuando se aplican pequeñas tensiones al dispositivo nanométrico se producen campos eléctricos grandes; Así la posición de la frontera iónica se moverá de una manera no lineal. Además McDonald resalta el hecho de que la frontera w_m podría en realidad nunca ser de longitud cero pues esto indicaría que físicamente no existen vacancias de oxígeno que son la característica del memristor. De otra parte, el dispositivo completo podría potencialmente estar dopado con vacancias de oxígeno. Al modelar el cambio de estado como una masa sujeta a un resorte, la velocidad de deriva de la frontera iónica, v_D , podría ser mayor en el centro del dispositivo y reducirse fuertemente cuando se aproxime a las fronteras ($w_m = 0$ ó $w_m = D$). El modelo lo presentan en la ecuación (1-25):

$$v_D = \frac{dw_m}{dt} = \eta \frac{\mu_D R_{on}}{D} i(t) F\left(\frac{w_m}{D}\right) \quad (1-32)$$

La función $F\left(\frac{w_m}{D}\right)$ puede tener su valor más grande en el centro, digamos ($w_m/D = 0,5$) y ser cero en las fronteras es decir $w_m = 0$ y $w_m = D$, en [55] define que la función puede estar definida por:

$$F_p = 1 - \left(2\frac{w_m}{D} - 1\right)^{2p} \quad (1-33)$$

Donde p es un entero positivo. Las gráficas de varias funciones F_p se muestran en la figura (1-11), en las cuales se observa que para diferentes valores de p la curva se va "achatando" más alrededor de $w_m/D = 0,5$ lo que quiere decir que cuando se está polarizando el dispositivo en el centro luego de un tiempo el movimiento de los iones se disminuye notablemente.

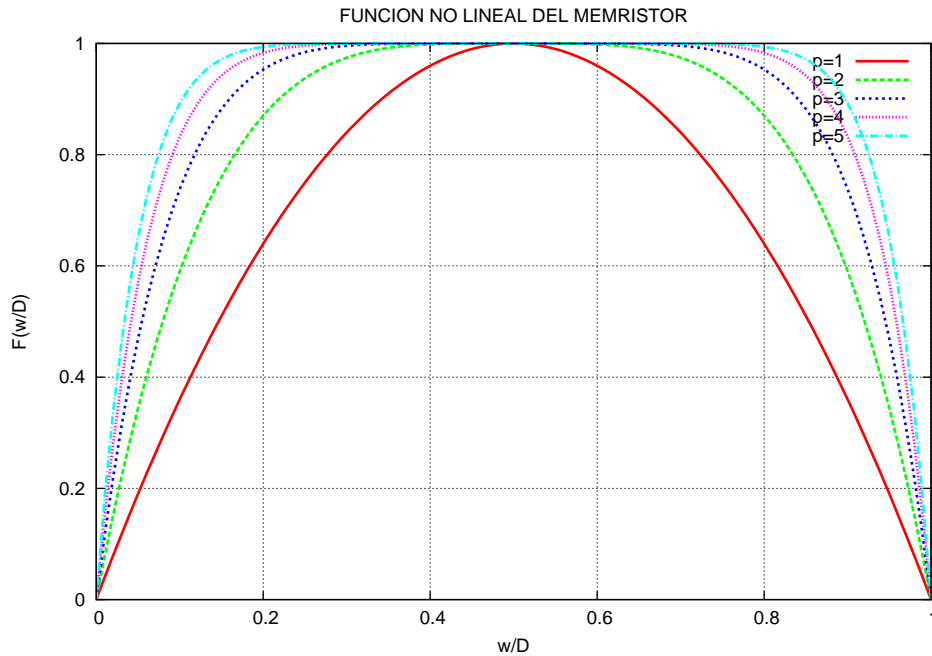


Figura 1-11.: Gráfica para simular la no linealidad interna del memristor

Funcionamiento interno

En [5] se propone que "El comportamiento memristivo del dispositivo propuesto por Williams en [3] está basado en el acople entre los grados de libertad del transporte atómico (ej: las vacancias de oxígeno actúan como dopantes móviles que definen el estado interno del dispositivo) y de electrones". La corriente electrónica fluye a través del dispositivo dinámicamente cambiando su estado interno, el cual a su vez, influencia el transporte de electrones en una forma no lineal.

El transporte iónico se basa en las características microscópicas del sistema las cuales en general son difíciles de controlar, especialmente a nivel nanométrico. Por ésta razón es que se utiliza una función con diferentes grados de libertad que simulen el comportamiento memristivo deseado.

En [4] se muestra que tales grados de libertad se deben al spin del electrón y muestran que el comportamiento memristivo es común en una amplia clase de dispositivos semiconductores espintrónicos, además de explicar el proceso físico del funcionamiento de la memorización en un memristor desde el punto de vista de "crossbar" o barras cruzadas de memristores usados

como switches o como almacenamiento de memoria digital.

1.3.3. Otros modelos matemáticos

En varios artículos [1, 13] se proponen otros modelos matemáticos para el memristor, se muestra la revisión de las ecuaciones y de los comportamientos que tienen, el resto del trabajo utilizaremos uno de los memristores que aquí se propone $M(q) = 1 + q^2$

Memristor Polinómico

Hasta ahora es claro que las ecuaciones de estado de los memristores se pueden escribir como:

Ley de Ohm¹⁵

$$v = R(x)i \quad (1-34)$$

Y su ecuación de estado interna

$$\frac{dx}{dt} = i \quad (1-35)$$

De manera más general los sistemas memristivos permiten escribir las ecuaciones anteriores como

Ley de Ohm

$$v = R(\mathbf{x}, i)i \quad (1-36)$$

Y su ecuación de estado interna

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, i) \quad (1-37)$$

Donde $R(\mathbf{x}, 0) \neq \infty$ para asegurar que se satisfaga la condición que $v = 0$ si y solo si $i = 0$, además $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ denota el vector con n variables internas de estado x_1, x_2, \dots, x_n . Conservando la relación $v = R(x)i$ es posible escribir una expresión para la variable de estado x como una familia generadora de memristores así:

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + b_1i + b_2i^2 + \dots + b_mi^m + \sum_{j,k=1}^{p,r} c_{jk}x^j i^k \quad (1-38)$$

Asignando valores numéricos a las constantes se genera una gran familia de memristores distintos, originados todos ellos a partir de (1-34) y (1-35).

¹⁵ x puede representar la carga

Seleccionando un memristor

Como en [13] tomemos un caso particular en el cual la variable de estado es $x = q$, $b_1 = 1$ y el resto de coeficientes son cero. al aplicar una señal senoidal $i(t) = A\cos(\omega t)$ para $t \geq 0$ se tiene que

$$\frac{dq}{dt} = i \quad (1-39)$$

Además supongamos que $\varphi(q)$ está definida como:

$$\varphi(q) = q + \frac{1}{3}q^3 \quad (1-40)$$

de donde se tiene que la memristancia está dada por:

$$M(q) = \frac{\varphi(q)}{dq} = 1 + q^2 \quad (1-41)$$

La carga $q(t)$ es la integral de $[0, t]$ de la corriente de manera que:

$$q(t) = \int_0^t i(\tau)d\tau = \int_0^t A\cos(\omega\tau)d\tau = \frac{A}{\omega}\text{sen}(\omega t) \quad (1-42)$$

Al reemplazar (1-42) en (1-40) se obtiene que el flujo está dado por:

$$\varphi(t) = \frac{A\text{sen}(\omega t)}{\omega} \left(1 + \frac{A^2}{\omega^2}\text{sen}^2(\omega t) \right) \quad (1-43)$$

Para obtener la tensión se hace la derivada $v = \frac{d\varphi}{dt}$ y se obtiene:

$$v(t) = \frac{\cos(t\omega) A (3 \sin(t\omega)^2 A^2 + \omega^2)}{\omega^2} \quad (1-44)$$

1.4. Emulación del memristor utilizando circuitos electrónicos

Actualmente es bastante amplia la gama de diseños que emulan el comportamiento del memristor [27–36], es interesante analizar algunos emuladores que se han diseñado con el ánimo de estudiar el comportamiento memristivo usando simuladores como SPICE, PSPICE o LTSPICE, el circuito que aquí se diseño está basado en estas propuestas de memristor y se puede apreciar en la figura (1-12) en el cual se utilizó el software gratuito LTSpice, empleado para la simulación de circuitos eléctricos y electrónicos.

La señal de entrada es una tensión $V_{in}(t) = A\text{sen}(2 * \pi ft)$, se utilizó en este caso $A = 1$, $f = 60Hz$ es la frecuencia en Hertz de la señal de entrada. En la figura (1-13) se puede apreciar la curva característica del memristor que se produce al graficar la corriente (canal

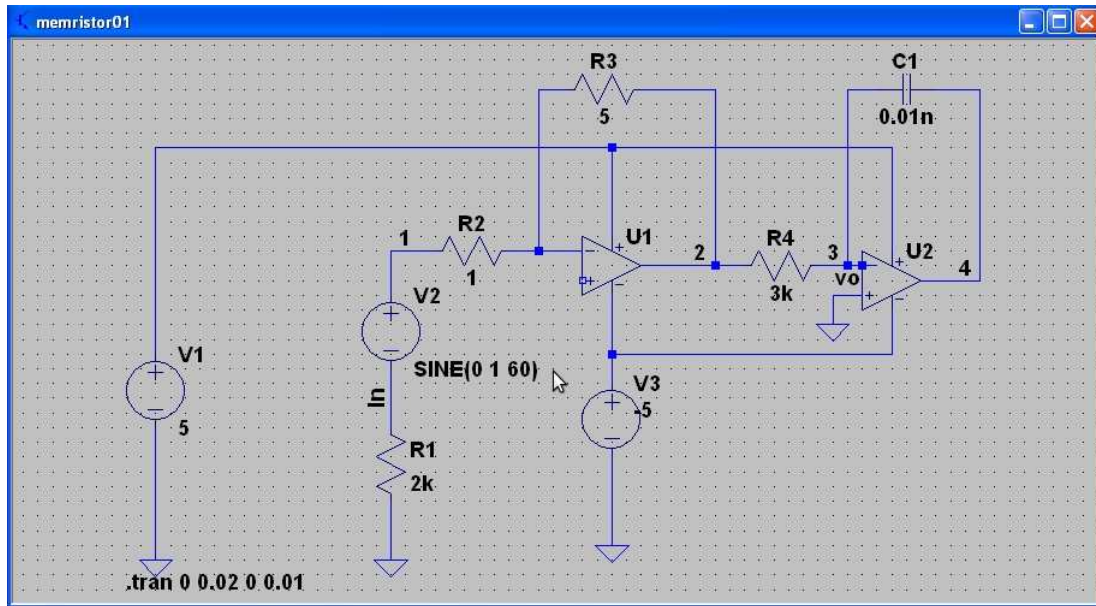


Figura 1-12.: Circuito emulador del memristor

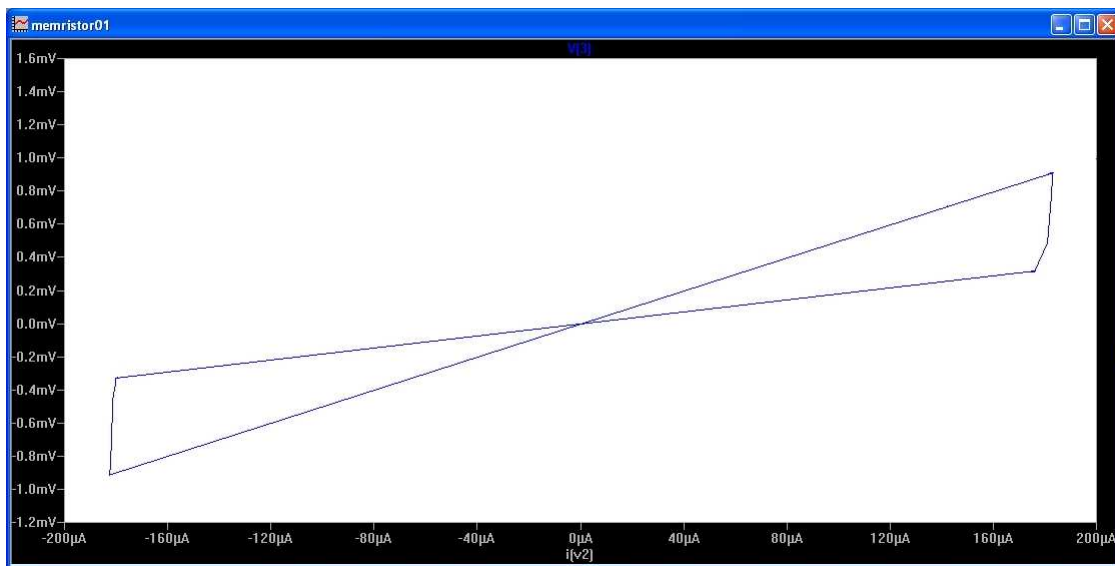


Figura 1-13.: Curva característica del memristor

A) contra la tensión producida en el integrador (canal B), como lo plantea Chua [13] si la curva v vs i se corta en $(0,0)$ cuando la señal de entrada es periódica el dispositivo es un memristor.

Las curvas de tensión aplicada y corriente se pueden apreciar en la figura (1-14):

Como se puede apreciar se hizo el montaje teórico y experimental y se obtuvo la curva de histéresis, lo que garantiza que es un memristor.

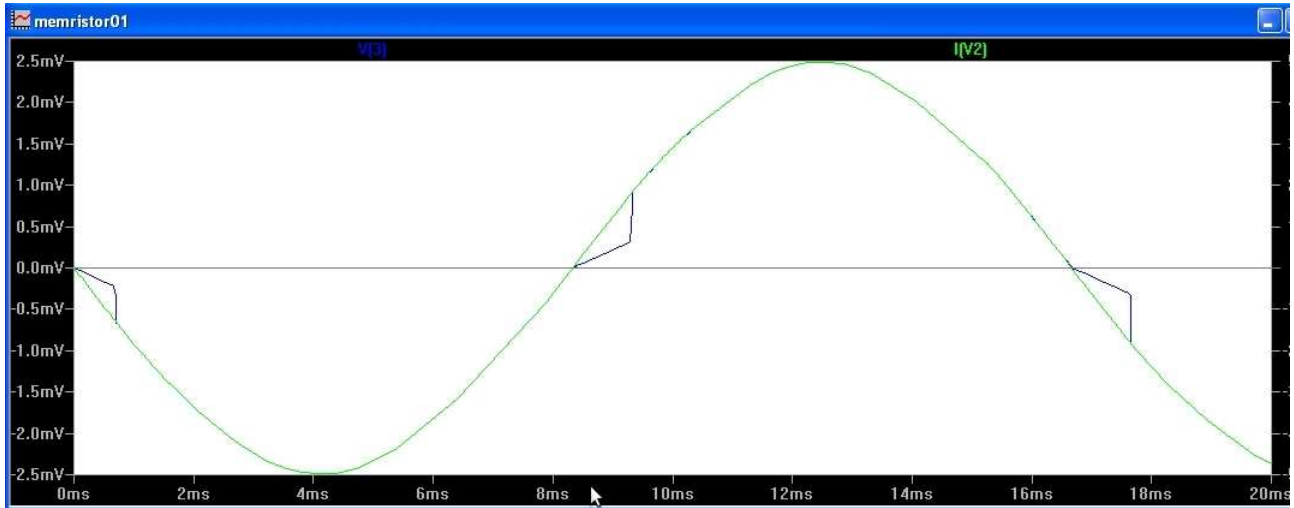


Figura 1-14.: Curvas de tensión y corriente

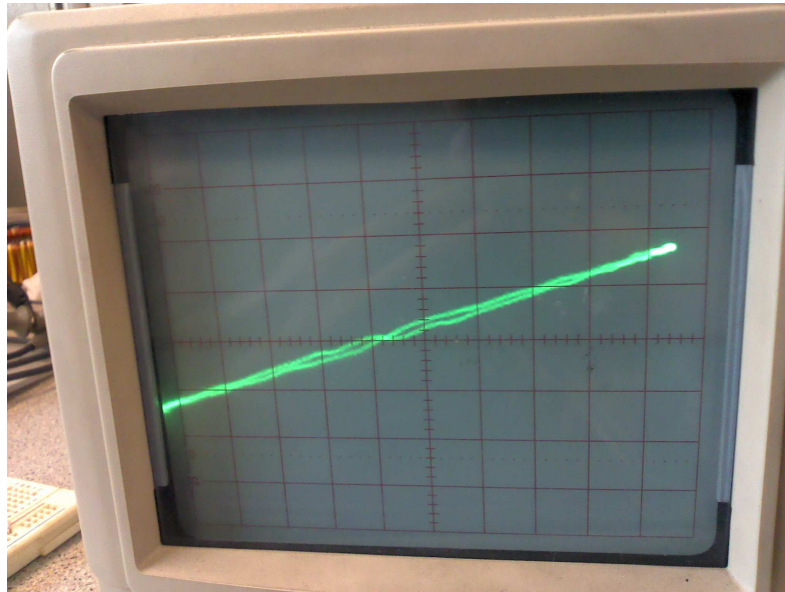


Figura 1-15.: Curva característica del memristor en el osciloscopio

1.5. Netlogo

Un software que permite la emulación del memristor se llama Netlogo, en el cual se simuló el memristor de Hewlett Packard, se obtuvieron los siguientes resultados al realizar la simulación:

En la gráfica (1-16) se observa que cuando la tensión se aplica al dispositivo propuesto por H.P., la corriente empieza a circular, ésta corriente tiene dos componentes que corresponden

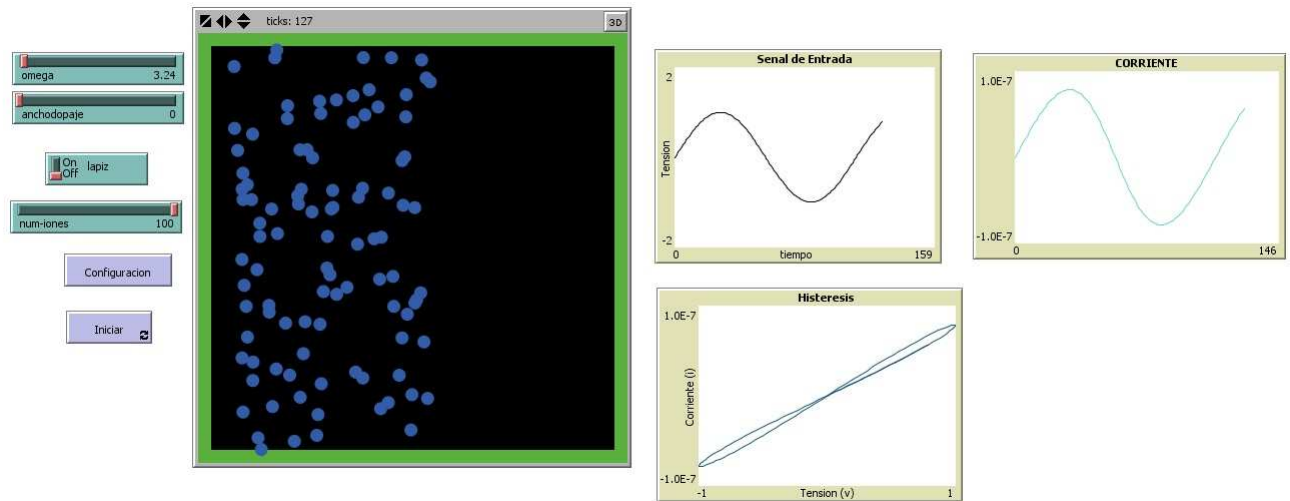


Figura 1-16.: Simulación del memristor en Netlogo

con la corriente electrónica y la corriente iónica, por tal razón la corriente sufre una deformación respecto a la señal de entrada, al graficar tensión v vs corriente i , se muestra que el dispositivo es un memristor pues se corta y a entrada cero, salida cero.

El código es el siguiente:

```
;Definicion general de los iones
i»¿breed [iones ion] ;Son los iones
```

```
globals [
  v0
  r0
  D
  Ron
  Roff
  muv
  beta
  r
]
```

```
to configurar
  ca
  set v0 1.0
  set D 1.0E-8
  set Ron 2.0E3
  set Roff 160.0E3
```

```

set mov 1.0E-14
set beta (D * D) / mov
set r Roff / Ron
set r0 anchodopaje / D * 1.0E-6 + ( 1 - anchodopaje / D) * 2.0E-5
set-default-shape turtles "circle" ;Da forma a las tortugas
borde ;Crea el borde
crt num-iones ;Crea la cantidad de iones
[aleatorios]
reset-ticks
end
to Adelantar
tick
if (lapiz = true ) [ask turtles [pd]]
ifelse (v0 * sin(omega * ticks) >= 0) [
ask turtles [set heading 90 rebotar fd 0.1 ]
][
ask turtles [set heading 270 rebotar fd 0.1 ]
]
end
to borde ;Formato del borde
ask patches with [abs pxcor = max-pxcor]
[set pcolor green]
ask patches with [abs pycor = max-pycor]
[set pcolor green]
end
to aleatorios
set color blue
setxy random-xcor random-ycor
while [xcor > anchodopaje][setxy random-xcor random-ycor]
if pcolor = green
[aleatorios]
end
to rebotar
if abs[pxcor] of patch-ahead 0.1 = max-pxcor
[set heading (- heading)]
if abs[pycor] of patch-ahead 0.1 = max-pycor
[set heading (180 - heading)]
end
to grafica
set-current-plot "Histeresis"

```



```
;; definimos el rango del eje y entre 0 y 3
set-plot-y-range -1.5E-6 1.5E-6
set-plot-x-range -1.5E-6 1.5E-6
;set-   current-plot "Histeresis"
;plotxy (v0 * sin(omega * ticks))/(1.05E-5 *
sqrt(abs (1 + 3.45E8 * v0 * cos(omega * ticks)) / omega))v0
*sin(omega * ticks)
;set-current-plot-pen "comparacion"
plotxy (v0 * sin(omega * ticks)) v0 * sin(omega * ticks)
/ (Ron * (r * r + 2.0 * v0 * (r - 1.0) * cos(omega * ticks)
/(beta * omega) ^ 0.5));
end
```

El software permite explorar las opciones de movimiento que muestren el comportamiento del memristor.

2. Circuitos No lineales

Debido a que el memristor es un elemento no lineal y se incluirá en circuitos en el próximo capítulo, se hace necesaria la presentación de una revisión de circuitos no-lineales, teoría y ejemplos, lo cual se hace desde la perspectiva presentada en [37, 38], se muestra una recopilación de los conceptos y técnicas más relevantes a la hora de analizar los circuitos y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y no-lineales.

2.1. Elementos y circuitos no lineales

El análisis de circuitos busca determinar la soluciones (tensiones y corrientes) que se obtienen cuando se conectan diversos elementos, es posible que el circuito no tenga solución, tenga única o infinitas soluciones. En la actualidad los sistemas de computo permiten resolver diversos circuitos cada vez más complejos y con elementos no lineales cuyos análisis en general no son tan simples y en la mayoría de los casos es necesario hacer aproximaciones numéricas para resolverlos.

Un elemento de circuitos se denomina *elemento lineal* si su relación algebraica entre tensión y corriente instantáneas es lineal, si esto no ocurre se dice que el elemento es *no-lineal*. Un circuito se denomina *circuito lineal* si contiene elementos lineales y fuentes independientes de tensión o corriente, las cuales son consideradas en general como entradas de los circuitos y las soluciones son consideradas como las respuestas a estas entradas. Se dirá que todo circuito que no cumple la condición de linealidad es un *circuito no-lineal*.

A continuación se muestran algunos elementos no lineales:

El diodo: Un elemento muy utilizado dentro de la teoría de circuitos es el diodo ideal, el cual se puede considerar como un resistor no lineal cuya curva característica en el plano $v - i$ se puede ver en la figura (2-1) la cual está constituida por dos líneas rectas así, si la tensión $V_D < 0$ la corriente $I_D = 0$, si la tensión $V_D = 0$ la corriente $I_D \rightarrow \infty$, esto es:

$$R_D = \{(V_D, I_D): V_D I_D = 0, I_D = 0 \text{ para } V_D < 0, \text{ y } V_D = 0, \text{ para } I_D > 0\}$$

Lo cual quiere decir que cuando el diodo se polariza de manera inversa el circuito se abre y no circula ninguna corriente, mientras que cuando el diodo se polariza de manera directa, hay flujo de corriente. La potencia consumida por un diodo ideal es idénticamente cero en cualquier instante de tiempo.

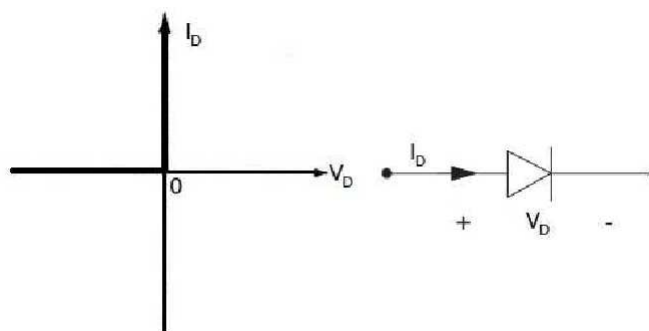


Figura 2-1.: Diodo ideal

Diodo juntura pn: Es un diodo cuya relación entre $v - i$ se puede apreciar en la figura (2-2) y está dada por,

$$i = I_s \left[\exp\left(\frac{v}{V_T}\right) - 1 \right] \quad (2-1)$$

Donde I_s es una constante en microamperios y representa la corriente inversa de saturación es decir la corriente que conduce el diodo cuando está polarizado con un gran voltaje inverso. El voltaje $V_T = \frac{kT}{q}$ se denomina el voltaje térmico, donde q es la carga del electrón y k la constante de Boltzman, T la temperatura en grados Kelvin. En la ecuación (2-1) se puede apreciar que la relación entre la tensión y la corriente es una función no lineal, esto significa que para cualquier voltaje dado la corriente es única. Cualquier resistor no lineal que tiene ésta propiedad se denomina **resistor no lineal controlado por tensión**.

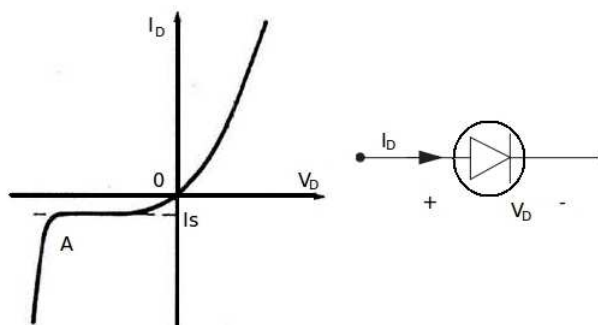


Figura 2-2.: Diodo Juntura-pn

En conclusión, un elemento de circuitos no-lineal relaciona las variables a través de funciones no lineales, lo cual introduce armónicos cuando se incluyen en los circuitos. La solución de este tipo de circuitos en general no se pueden hacer de forma analítica debido a que las ecuaciones que resultan son ecuaciones no lineales, así que es necesario recurrir a otras técnicas para resolverlos.

■ **Ejemplo 2** *Circuito no lineal:* En la figura (2-3) se muestra una fuente de tensión E , una resistencia R y un diodo D no ideal cuya relación entre tensión y corriente está dada por la ecuación (2-2) y cuya curva característica se puede apreciar en la figura (2-4a). Debido a que el circuito contiene un elemento no lineal que es el diodo, el circuito se denomina *circuito no lineal*.

$$I_D = I_S(e^{V_D/V_{Th}} - 1) \quad (2-2)$$

Escribimos la ¹LCK para el nodo de voltaje conocido:

$$\frac{E - V_D}{R} = I_D \quad (2-3)$$

Al reemplazar la ecuación (2-2) en la ecuación (2-3) se obtiene:

$$\frac{E - V_D}{R} - I_S(e^{V_D/V_{Th}} - 1) = 0 \quad (2-4)$$

Ésta ecuación debe ser resuelta por métodos numéricos o aproximativos.

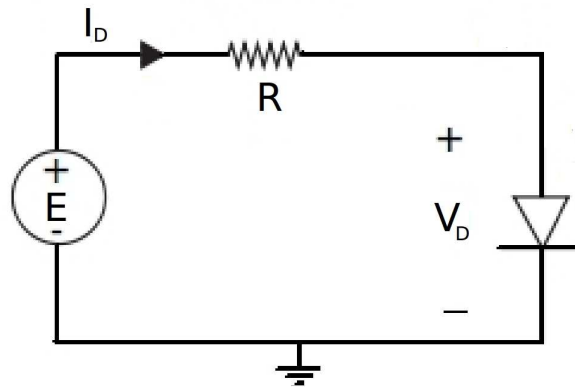


Figura 2-3.: Circuito no lineal

Para estudiar con mayor profundidad la solución de éste tipo de ecuaciones puede remitirse al libro de Burden [39].

2.2. Método: Linealización a trozos

El método "Piecewise linear"² consiste en transformar una función no lineal en varias funciones lineales y luego utilizar las bien conocidas técnicas para solución de circuitos lineales. Al utilizar una aproximación se cometen errores al resolver los circuitos, lo cuales se minimizan

¹Ley de corrientes de Kirchoff

²La traducción es como linealización a trozos, por secciones o por partes

dependiendo de la fineza en la linealización inicial. Un estudio amplio del método se presenta en [40–42], ejemplos relacionados con el método se pueden encontrar en [43–46].

En la sección (2.1) se presentó un diodo ideal y uno real, en la figura (2-4) en a) se muestra una curva típica de un diodo real, en la b) se muestra una curva aproximada o de diodo ideal caracterizada por dos rectas, una linealización a trozos de la curva:

$$R_D = \{(V_D, I_D): V_D I_D = 0, I_D = 0 \text{ para } V_D < 0, \text{ y } V_D = 0, \text{ para } I_D > 0\}$$

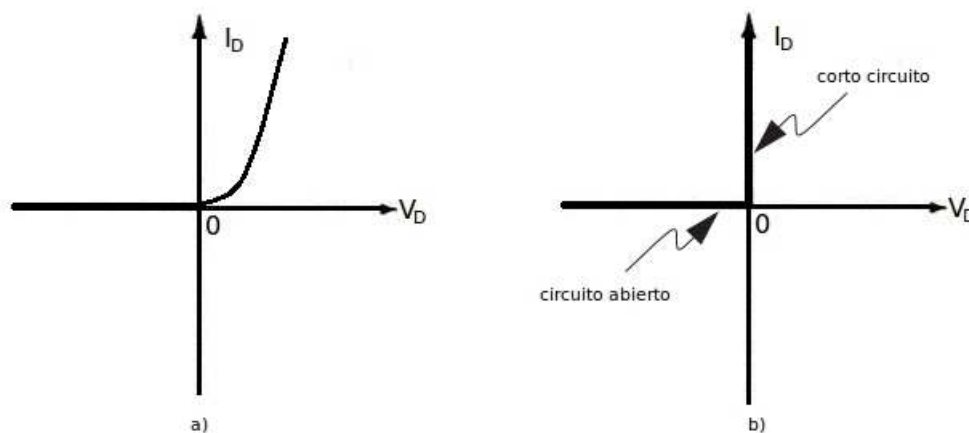


Figura 2-4.: Linealización de la curva del diodo real

Al analizar el circuito no-lineal de la figura (2-3) utilizando la linealización propuesta para el diodo real se separan cada una de las secciones en el circuito y se utilizando las técnicas de circuitos lineales obtenemos las soluciones correspondientes, finalmente el circuito no lineal se ha resuelto de manera aproximada.

1. Cuando el diodo está polarizado en el sentido de la corriente, su estado es ON, es decir corto circuito como en la figura 2.5(a). En este caso la corriente

$$I_D = \frac{E}{R} \quad (2-5)$$

y la tensión en la resistencia es

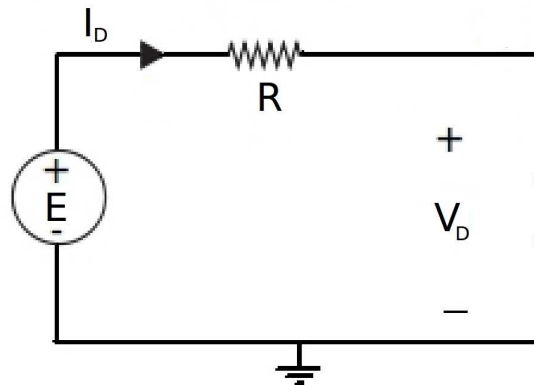
$$V_R = R I_D = E \quad (2-6)$$

2. Cuando el diodo está polarizado en el sentido contrario al de la corriente, su estado es OFF, es decir es un circuito abierto como en la figura 2.5(b) se tiene que

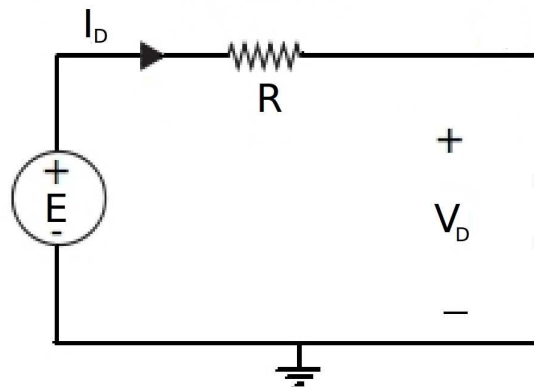
$$I_D = 0 \quad (2-7)$$

y así

$$V_R = 0 \quad (2-8)$$



(a) Diodo en conducción ON



(b) Diodo en circuito abierto OFF

Figura 2-5.: Comportamiento del diodo ideal

Se puede apreciar que hay circuitos no-lineales para los cuales se pueden aplicar algunas técnicas sencillas para resolverlos, sin embargo en su mayoría, los circuitos no-lineales requieren técnicas más avanzadas para aproximar la solución.

2.3. Método de balance armónico

Muchos sistemas físicos no lineales pueden ser representados por una conexión realimentada con un elemento lineal y otro no lineal, como se muestra en la figura (2-6), en [47–50] se analiza el método del balance armónico para este tipo de sistemas, aquí se presenta un resumen del método, en el Capítulo 3 se aplica para un memristor particular siguiendo el análisis presentado en [49].

Supongamos que $G(s)$ es una función de transferencia racional estrictamente propia y ψ representa la no-linealidad sin memoria invariante en el tiempo, además en principio la entrada es $v(t) = 0$ y se estudia la existencia de soluciones periódicas cuando las entradas son periódicas. Una solución periódica satisface que $y(t) = y(t + T)$ para todo t , y $T = \frac{2\pi}{\omega}$

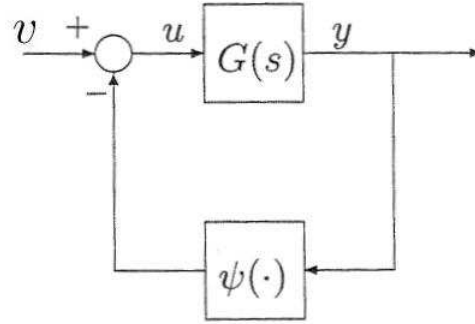


Figura 2-6.: Feedback de un sistema físico no lineal

donde ω es la frecuencia de oscilación. El método del balance armónico pretende representar la solución del sistema por una serie compleja de Fourier truncada y buscar una frecuencia de oscilación ω y unos coeficientes que satisfagan la ecuación del sistema. Supongamos que $y(t)$ se puede representar como una serie de Fourier compleja de la siguiente forma:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp(jk\omega t)$$

Donde $j = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria, a_k son los coeficientes de la serie y ${}^3a_k = \bar{a}_k$. Dado que $\psi(\cdot)$ representa la no-linealidad invariante en el tiempo, $\psi(y(t))$ es periódica con la misma frecuencia de y así:

$$\psi(y(t)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(jk\omega t)$$

Donde cada coeficiente complejo c_k es una función de los coeficientes a_i . Para que $y(t)$ sea solución del sistema realimentado debe satisfacer la ecuación diferencial:

$$d(p)y(t) + n(p)\psi(y(t)) = 0$$

donde p es el operador diferencial $p(\cdot) = d(\cdot)/dt$ y $n(s)$ y $d(s)$ son el numerador y el denominador de la función racional $G(s)$. Además se cumple:

$$p \exp(j\omega t) = \frac{d}{dt} \exp(jk\omega t) = jk\omega \exp(jk\omega t)$$

Se tiene que,

$$d(p) \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp(jk\omega t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d(jk\omega) a_k \exp(jk\omega t)$$

³ \bar{a}_k es el conjugado del coeficiente a_k

y

$$n(p) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(jk\omega t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} n(jk\omega) c_k \exp(jk\omega t) \quad (2-9)$$

Substituyendo estas expresiones en la ecuación diferencial se tiene,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [d(jk\omega) a_k + n(jk\omega) c_k] \exp(jk\omega t) = 0 \quad (2-10)$$

Debido a la ortogonalidad de las funciones $\exp(jk\omega t)$ para diferentes valores de k , encontramos que los coeficientes de Fourier deben satisfacer,

$$G(jk\omega) c_k + a_k = 0 \quad (2-11)$$

para todo entero k . Debido a que $G(jk\omega) = \bar{G}(-jk\omega)$, $a_k = \bar{a}_{-k}$ y $c_k = \bar{c}_{-k}$ basta con encontrar valores para $k \geq 0$. La ecuación (2-11) es una ecuación de infinitas dimensiones y puede ser muy difícil de resolver, razón por la cual es necesario buscar una ecuación de dimensiones finitas que aproxime a (2-11). Supongamos que es posible hallar un valor de q tal que para todo $k > q$, $|G(jk\omega)|$ es lo bastante pequeño como para reemplazar $G(jk\omega)$ por 0 y consecuentemente a_k también. Esta suposición reduce la ecuación (2-11) a un problema de dimensión finita:

$$\hat{G}(jk\omega) \hat{c}_k + \hat{a}_k = 0 \quad (2-12)$$

Donde los acentos en la ecuación (2-12) solamente enfatizan que esta solución corresponde con una aproximación de (2-11). Supongamos que se resolverá el problema cuando $q = 1$ resultando el sistema:

$$\hat{G}(0) \hat{c}_0(\hat{a}_0, \hat{a}_1) + \hat{a}_0 = 0 \quad (2-13)$$

$$\hat{G}(j\omega) \hat{c}_1(\hat{a}_0, \hat{a}_1) + \hat{a}_1 = 0 \quad (2-14)$$

Note que se definen dos ecuaciones una real (2-13) y otra compleja (2-14) con dos valores reales desconocidos que son ω y \hat{a}_0 y un valor complejo desconocido \hat{a}_1 . Escogiendo apropiadamente que el primer armónico de $y(t)$ sea $a \sin \omega t$ con $a \geq 0$ se encuentra que $\hat{a}_1 = \frac{a}{2j}$ lo que permite reescribir las ecuaciones (2-13) y (2-14) como:

$$\hat{G}(0) \hat{c}_0 \left(\hat{a}_0, \frac{a}{2j} \right) + \hat{a}_0 = 0 \quad (2-15)$$

$$\hat{G}(j\omega) \hat{c}_1 \left(\hat{a}_0, \frac{a}{2j} \right) + \frac{a}{2j} = 0 \quad (2-16)$$

Debido a que (2-15) no depende de ω , puede ser resuelta para \hat{a}_0 como una función de a . Si además $\psi(\cdot)$ es una función impar, esto es:

$$\psi(-y) = -\psi(y)$$

Entonces los coeficientes $\hat{a}_0 = \hat{c}_0 = 0$ debido a que,

$$\hat{c}_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \psi(\hat{a}_0 + a \operatorname{sen}\omega t) dt$$

Se puede escribir (2-16) como:

$$\hat{G}(j\omega)\hat{c}_1 \left(0, \frac{a}{2j}\right) + \frac{a}{2j} = 0 \quad (2-17)$$

de donde se obtiene que,

$$\hat{c}_1(0, a/2j) = -j \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} \psi(a \operatorname{sen}\omega t) \operatorname{sen}\omega t dt$$

Resultando entonces la definición de $\Psi(a)$ como:

$$\Psi(a) = \frac{\hat{c}_1(0, a/2j)}{a/2j} = \frac{2\pi}{a\omega} \int_0^{\omega/\pi} \psi(a \operatorname{sen}\omega t) \operatorname{sen}\omega t dt \quad (2-18)$$

así que (2-17) se puede reescribir como,

$$G(j\omega)\Psi(a) + 1 = 0 \quad (2-19)$$

La ecuación (2-19) es conocida como la *ecuación de balance armónico de primer orden* o simplemente *ecuación de balance armónico*. La función $\Psi(a)$ definida en (2-18) se denomina *la función descriptiva de la no-linealidad ψ* . En general se planteó que la función puede ser compleja y dependiente de ω y a , pero se utilizarán solamente funciones impares, invariantes en el tiempo, y no-linealidades sin memoria que produzcan funciones $\Psi(a)$ reales y que dependan solamente de a así:

$$\Psi(a) = \frac{2}{\pi a} \int_0^{\pi} \psi(a \operatorname{sen}\theta) \sin\theta d\theta \quad (2-20)$$

En el Capítulo 3 en la sección (3.2) se hará un ejemplo de la técnica descrita incluyendo memristores.

2.4. Soluciones Numéricas

Los circuitos no lineales en general se modelan a través de sistemas de funciones no lineales, algunas formas de solución de estos sistemas se muestran en ésta sección.

2.4.1. Análisis usando transformada de Taylor

Una de las técnicas empleadas para la solución de ecuaciones diferenciales no lineales es conocida como la **Transformada Diferencial de Taylor (TDT)**, aunque el método tiene bastantes deficiencias a la hora de la convergencia, se presenta una revisión de la teoría de la transformada [51–53], en el próximo capítulo se utiliza para resolver el circuito MRLC.

Taylor aproximó una función analítica de acuerdo con:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k \quad (2-21)$$

Donde t_0 representa el punto alrededor del cual se desarrolla la serie de la función $x(t)$, y $x^{(k)}(t_0) = \left. \frac{d^k x}{dt^k} \right|_{t=t_0}$ representa la derivada k -ésima de la función evaluada en el punto $t = t_0$. En particular cuando $t_0 = 0$ la serie se denomina serie de McLaurin y se presenta como:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(k)}(0)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left. \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right|_{t=0} \frac{t^k}{k!} \quad (2-22)$$

En [51, 52] se propone el uso de la técnica que permite analizar circuitos no lineales y es conocida como la Transformada Diferencial de Taylor (TDT); consiste en tomar de (2-21) la transformación de una función original con argumento continuo, por ejemplo el tiempo, en una función imagen con argumento discreto, los coeficientes resultantes se llamarán de la misma forma, discretos.

La transformación se escribe como

$$X(k) = \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right] \quad (2-23)$$

Con transformada inversa dada por

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{H} \right)^k X(k) \quad (2-24)$$

La ecuación (2-23) es la transformación directa de la función $x(t) \in \mathbb{R}^n$ como una función continua en el tiempo $t \in [0, H]$ y su respectiva transformación $X(k) \in \mathbb{R}^n$ como una función de argumento discreto $k = 0, 1, \dots, \infty$. La ecuación (2-24) es la transformación inversa $X(k)$ en $x(t)$; H es un coeficiente normalizado.

Al darle valores en la ecuación (2-23) $k = 0, 1, 2, 3$ en $X(k)$ se obtienen argumentos específicos $k \in \mathbb{N}^n$ son llamados valores discretos así por ejemplo con $k = 0$ se obtiene:

$$X(0) = \frac{H^0}{0!} \left[\frac{d^0 x(t)}{dt^0} \right]_{t=0} = x(0) \quad (2-25)$$

Si la variable independiente representa el tiempo entonces la variable dependiente representa la posición de un objeto, $x(0)$ corresponde a la posición inicial del objeto. Por otra parte para $k = 1$ se tiene $X(1)$:

$$X(1) = \frac{H^1}{1!} \left[\frac{d^1}{dt^1} x(t) \right]_{t=0} = H\dot{x}(0) \quad (2-26)$$

El cual representa la velocidad inicial del objeto. Por otra parte para $k = 2$ se tiene $X(2)$ es el segundo discreto dado por:

$$\frac{H^2}{2!} \left[\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right]_{t=0} = \frac{H^2}{2} \ddot{x}(0) \quad (2-27)$$

Éste representa la aceleración inicial del objeto. Así sucesivamente se pueden determinar los otros valores. De la ecuación (2-23) se sigue que la función $x(t)$ y sus derivadas en el punto $t = 0$ en la forma del operador serán transformadas en el espectro diferencial discreto. A su vez, lo discreto permite reescribir la función $x(t)$ en su forma extendida de la serie de Taylor.

■ **Ejemplo 3** : *La Transformada Diferencial de Taylor de la función $x(t) = e^{-t}$, alrededor de $t = 0$.*

La función imagen para ésta función es:

$$X(k) = \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^k e^{-t}}{dt^k} \right]_{t=0} = \frac{(-H)^k}{k!} [e^{-t}]_{t=0} = \frac{(-H)^k}{k!} \quad (2-28)$$

Donde se ha reemplazado la variable t por la variable H que representa el tiempo discreto. Por tal razón, la función discreta $X(k)$, que representan la función exponencial e^{-t} , tiene coeficientes $X(0) = 1$, $X(1) = -H$, $X(2) = H^2/2!$, $X(3) = -H^3/3!$, etc.

Conociendo su representación discreta $X(k) = \frac{(-H)^k}{k!}$ al reemplazar en la (2-24) se obtiene:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{H} \right)^k X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{H} \right)^k \frac{(-H)^k}{k!} \\ &= 1 - t + \frac{t^2}{2!} + \dots = e^{-t} \end{aligned} \quad (2-29)$$

Que es efectivamente el desarrollo en serie de Taylor de la función $x(t) = e^{-t}$.

Entonces si un circuito lineal o no lineal puede ser analizado utilizando una serie de Taylor u otro tipo de serie en un intervalo de tiempo restringido, entonces su modelo matemático puede ser obtenido usando la transformada diferencial de Taylor (TDT) independientemente de su no linealidad. Se presentan varias fórmulas matemáticas en el dominio discreto, construyendo finalmente una tabla con los resultados. Cuando finalmente logramos transformar las ecuaciones de un circuito en el dominio discreto, resulta un conjunto discreto de ecuaciones diferenciales como modelo matemático. La solución de éstas últimas ecuaciones son la solución del circuito y al pasarlo al dominio del tiempo, se obtiene la solución $x(t)$ desarrollada en serie de Taylor.

Tabla 2-1.: Reglas de transformación TDT (a es una constante, $\delta(k)$ es la delta de Kronecker)

Expresiones en el dominio del tiempo	Expresiones en el dominio de la TDT
$ax(t)$	$aX(k)$
$\frac{d}{dt}x(t)$	$\frac{k+1}{H}X(k+1)$
$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$\frac{(k+n)!}{k!H^n}X(k+n)$
$\int x(t)dt$	$\frac{H}{k}X(k-1) + a\delta(k)$
$x(t)y(t)$	$\sum_{l=0}^k X(l)Y(k-l)$
a	$a\delta(k)$
t^n	$H^n\delta(k-n)$
$\{t^n\}_v$, en $(t = t_v)$	$\sum_{l=0}^n \frac{n!}{l!(n-l)!} t^{n-l} H^l \delta(l-k)$
e^{at}	$\frac{(aH)^k}{k!}$
$\sin(at)$	$\frac{(aH)^k}{k!} \text{sen}(k\frac{\pi}{2})$

2.4.2. Propiedades Transformada Diferencial de Taylor

En la tabla (2-1) se presentan algunas propiedades de la TDT que a continuación se van a demostrar. Se empieza por lo siguiente, si $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ entonces la transformada diferencial de Taylor $Y(k) = \frac{k+1}{H}X(k+1)$, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 Y(k) &= \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} \frac{dx(t)}{dt} \right]_{t=0} \\
 &= \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} x(t) \right]_{t=0} \\
 &= \frac{k+1}{H} \left[\frac{H^{k+1}}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} x(t) \right]_{t=0} \\
 &= \frac{k+1}{H} X(k+1)
 \end{aligned} \tag{2-30}$$

Ahora probemos que la transformada diferencial de Taylor de $y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ es igual a $Y(k) = \frac{(k+2)!}{k!H^2}X(k+2)$, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 Y(k) &= \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} \frac{d^2x(t)}{dt^2} \right]_{t=0} \\
 &= \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^{k+2}}{dt^{k+2}} x(t) \right]_{t=0} \\
 &= \frac{(k+2)!}{k!H^2} \left[\frac{H^{k+2}}{(k+2)!} \frac{d^{k+2}}{dt^{k+2}} x(t) \right]_{t=0}
 \end{aligned} \tag{2-31}$$

$$Y(k) = \frac{(k+2)!}{k!H^2}X(k+2)$$

Razonando de manera similar, se obtiene que si $y(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n}$ su transformada es $Y(k) = \frac{(k+n)!}{k!H^n} X(k+n)$

Si $y(t) = \int x(t)dt$ entonces consiste en demostrar que $Y(k) = \frac{H}{k} X(k-1) + a\delta(k)$, para lo cual procedemos como sigue:

Supongamos que $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$ y por supuesto que $x(0)$ es constante, entonces aplicamos la TDT y obtenemos

$$\begin{aligned} Y(k) &= \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} \int_0^t x(\tau)d\tau \right] \\ &= \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} x(t) + a \right] \\ &= \frac{H}{k} \left[\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} x(t) \right] + a\delta(k) \\ &= \frac{H}{k} X(k-1) + a\delta(k) \end{aligned} \quad (2-32)$$

Ahora si se tiene una función $w(t) = x(t)y(t)$ entonces consiste en demostrar que la TDT para

$$W(k) = \sum_{l=0}^k X(l)Y(k-l) = \sum_{l=0}^k Y(l)X(k-l) \quad (2-33)$$

de la siguiente forma, se procederá a hacerlo para $k = 0, 1, 2, 3$ y si se quiere es posible hacer la prueba por inducción matemática.

Se asume que $X(k) = \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} x(t) \right]_{t=0}$ y que $Y(k) = \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} y(t) \right]_{t=0}$

La transformada del producto se puede expresar como:

$$X(k) * Y(k) = \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^k x(t)y(t)}{dt^k} \right]_{t=0} \quad (2-34)$$

(1) Para $k = 0$ en la ecuación (2-33) se obtiene que $X(0) = x(0)$ y $Y(0) = y(0)$ entonces se tiene:

$$X(0) * Y(0) = \frac{H^0}{0!} [x(t)y(t)]_{t=0} = x(0)y(0) = X(0)Y(0) \quad (2-35)$$

(2) Para $k = 1$ se tiene $X(1) = H \left[\frac{dx(t)}{dt} \right]_{t=0}$; $Y(1) = H \left[\frac{dy(t)}{dt} \right]_{t=0}$ así:

$$\begin{aligned} X(1) * Y(1) &= H \left[\frac{dx(t)y(t)}{dt} \right]_{t=0} \\ &= H \left[\frac{dx(t)}{dt} y(t) + x(t) \frac{dy(t)}{dt} \right]_{t=0} \\ &= H \left[\frac{dx(t)}{dt} \right]_{t=0} y(0) + x(0) H \left[\frac{dy(t)}{dt} \right]_{t=0} \\ &= X(1)Y(0) + X(0)Y(1) \end{aligned} \quad (2-36)$$

(3) Para $k = 2$ se obtiene

$$X(2) = \frac{H^2}{2} \left[\frac{d^2x(t)}{dt^2} \right]_{t=0}; \quad Y(2) = \frac{H^2}{2} \left[\frac{d^2y(t)}{dt^2} \right]_{t=0} \quad (2-37)$$

Haciendo la transformación del producto para este caso se tiene:

$$\begin{aligned} X(2) * Y(2) &= \frac{H^2}{2} \left[\frac{d^2x(t)y(t)}{dt^2} \right]_{t=0} \\ &= \frac{H^2}{2} \left[\frac{d^2x(t)}{dt^2} y(t) + 2 \frac{dx(t)}{dt} \frac{dy(t)}{dt} \right. \\ &\quad \left. + x(t) \frac{d^2y(t)}{dt^2} \right]_{t=0} \\ &= \frac{H^2}{2} \left[\frac{d^2x(t)}{dt^2} \right]_{t=0} y(0) + H \left[\frac{dx(t)}{dt} \right]_{t=0} H \left[\frac{dy(t)}{dt} \right]_{t=0} \\ &\quad + x(0) \frac{H^2}{2} \left[\frac{d^2y(t)}{dt^2} \right]_{t=0} \\ &= X(2)Y(0) + X(1)Y(1) + X(0)Y(2) \end{aligned} \quad (2-38)$$

(4) De (1), (2) y (3) anteriores se puede mostrar que la transformación para el producto es la relación escrita en la ecuación (2-33):

$$W(k) = \sum_{l=0}^k X(l)Y(k-l) = \sum_{l=0}^k Y(l)X(k-l) \quad (2-39)$$

La Transformada Diferencial de Taylor presenta problemas de convergencia uniforme, sólo sirve en intervalos muy cortos de tiempo.

2.4.3. Método Iterativo para solución de Circuitos no lineales, Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson sirve para resolver sistemas de ecuaciones no lineales, en nuestro caso se emplea para discretizar una ecuación diferencial no lineal y luego emplear el método para encontrar la solución. El método se presenta en [39].

Dado un sistema de n ecuaciones no lineales el cual escribimos como

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2-40)$$

De tal forma que

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))^t \quad (2-41)$$

El objetivo es determinar los vectores \mathbf{x} tales que la función vectorial evaluada en dicho vector sea el vector $\mathbf{0}$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2-42)$$

Se dice que f_1, f_2, \dots, f_n son funciones coordenadas de \mathbf{F} . Se pretende resolver el sistema de ecuaciones. El objetivo es encontrar un punto que satisfaga todas las ecuaciones no lineales simultáneamente, para esto existen varios métodos sin embargo en éste trabajo utilizaremos el método de Newton-Raphson.

■ **Ejemplo 4** *El sistema de ecuaciones no lineales, de 3 ecuaciones con 3 variables.*

$$\begin{aligned} 3x_1^2 - \text{sen}(x_1x_2) + x_3 &= 0 \\ x_1x_2 + 8(x_2 - 1)^3 + \text{cos}(x_3) &= 0 \\ \ln(x_1x_3) - 2x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2-43}$$

Método de Newton-Raphson

Dada una función de varias variables \mathbf{G} escrita como

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2 &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots \\ x_n &= g_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{2-44}$$

DEFINICIÓN 1 *Se dice que una función $\mathbf{G} : \mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tiene un punto fijo en $\mathbf{p} \in \mathbf{D}$ si $\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$.*

Para hallar una solución n -dimensional $\mathbf{p} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, se construye una sucesión

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^k) \tag{2-45}$$

y se escoge una aproximación inicial $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ arbitraria, y luego se van hallando los correspondientes valores siguientes para $k = 0, 1, \dots$, así por ejemplo para hallar el valor $\mathbf{x}_1 = \mathbf{G}(\mathbf{x}_0)$, hallando el valor de \mathbf{x}_1 , para hallar el siguiente valor $\mathbf{x}_2 = \mathbf{G}(\mathbf{x}_1)$, y así sucesivamente. Es necesario establecer entonces un criterio para determinar cuando la función vectorial \mathbf{G} . Si el proceso (2-45) converge en todos los valores de las variable, cuando el número de iteraciones es muy grande, entonces se tendrá una solución al sistema. Supongamos que converge a \mathbf{p} el cual será una raíz vectorial.

El método de iteración se puede aplicar a la ecuación (2-42), siempre que se cumpla el siguiente teorema.

TEOREMA 4 *Sea $\mathbf{D} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | a_i \leq x_i \leq b_i, \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n\}$, con a_i y b_i constantes arbitrarias. Suponga que \mathbf{G} es una función continua que va de $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con la característica que cuando $\mathbf{x} \in \mathbf{D}$ entonces $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in \mathbf{D}$. Entonces \mathbf{G} tiene un punto fijo en \mathbf{D} .*

Si además suponemos que todas las funciones componentes de la función \mathbf{G} tienen derivadas parciales continuas y existe una constante K de tal forma que

$$\left| \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right| \leq \frac{K}{n} \text{ Para cualquier } \mathbf{x} \in \mathbf{D} \quad (2-46)$$

Para cada $j = 1, 2, \dots, n$ y cada función componente g_i . Entonces, la sucesión $\{\mathbf{x}\}_{k=0}^{\infty}$ definida por

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^k) \text{ Para } k \geq 1 \quad (2-47)$$

Converge a un punto $\mathbf{p} \in \mathbf{D}$ indistintamente del valor inicial que se escoja \mathbf{x}_0 y

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{p}\|_{\infty} \leq \frac{K}{1-K} \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|_{\infty} \quad (2-48)$$

El cual significa que las variables están en un dominio \mathbf{D} y el rango o las imágenes también deben estar en dicho conjunto \mathbf{D} . La existencia de la constante garantiza una convergencia mucho más rápida en ese dominio y además garantiza que el punto fijo \mathbf{p} sea único.

Veamos como se construye el método, suponemos un valor inicial \mathbf{x}_0 , para hallar el siguiente valor tenemos que hacer

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{A}\mathbf{F}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{G}(\mathbf{x}^k) \quad (2-49)$$

Donde \mathbf{A} es una matriz no singular. Si las funciones son derivables, entonces se tiene

$$\mathbf{x} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{J} \quad (2-50)$$

La matriz \mathbf{J} es conocida como la *Matriz Jacobiana* y está definida como

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = J_{ij} = \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right)$$

Si la matriz $J(x^{(0)}) = F(x^{(0)})$ es no singular⁴, tendremos que $\mathbf{A} = -[J(x^{(0)})]^{-1}$

Veamos como se aplica el método con el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 5** Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 1 \\ x_1^3 - x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2-51)$$

Utilizar el método iterativo para dar una solución aproximada al sistema.

Solución En la figura (2-7) se puede apreciar que el sistema tiene dos soluciones, es decir dos puntos de corte. El objetivo es tratar de determinar alguno de ellos utilizando el método iterativo.

⁴Que es el método de Newton Modificado

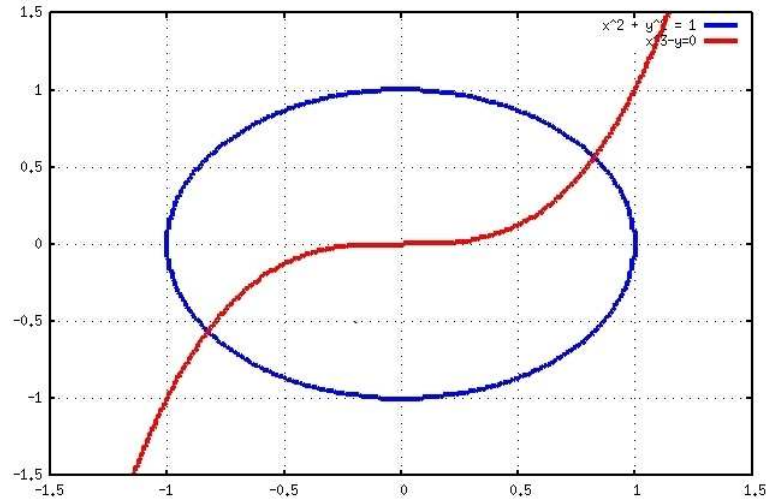


Figura 2-7.: Representación gráfica de un sistema de ecuaciones no lineales

Para determinar una de las soluciones se toma una aproximación inicial, digamos $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = (-0.9, -0.5)^t$, y sabiendo que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^3 - x_2 \end{pmatrix} \quad (2-52)$$

De donde

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 3x_1^2 & -1 \end{pmatrix} \quad (2-53)$$

Que al reemplazarla en la aproximación inicial se obtiene $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} -1,8 & 2,43 \\ -1,0 & -1,0 \end{pmatrix}$ y su determinante es $|\mathbf{J}(\mathbf{x}_0)| = 4,23 \neq 0$, la matriz $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0)$ es no singular, $\mathbf{A} = -\mathbf{J}(\mathbf{x}_0)^{-1}$ y su inversa es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,236 & 0,574 \\ -0,236 & 0,426 \end{pmatrix}$$

Dado que se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{F}(\mathbf{x}) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,236 & 0,574 \\ -0,236 & 0,426 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^3 + x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2-54)$$

Utilizando ésta última fórmula y el valor de $\mathbf{x}_{0(0)} = (-0.9, -0.5)$, se encuentran las aproximaciones sucesivas, se ilustra para el valor $\mathbf{x}_{1(1)}$

$$\begin{pmatrix} x_{1(1)} \\ x_{2(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1(0)} \\ x_{2(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,236 & 0,574 \\ -0,236 & 0,426 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1(0)}^2 + x_{2(0)}^2 - 1 \\ x_{1(0)}^3 + x_{2(0)} \end{pmatrix} \quad (2-55)$$

Los resultados en cada iteración son:

$$\begin{pmatrix} x_{1(1)} \\ x_{2(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,017 \\ -0,611 \end{pmatrix}$$

Utilizando estos valores ahora como las entradas en (2-54) se obtiene:

$$\begin{pmatrix} x_{1(2)} \\ x_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8454 \\ -0,2997 \end{pmatrix}$$

Y se obtiene la solución con una tolerancia menor que 10^{-6}

$$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,82603 \\ -0,56362 \end{pmatrix}$$

Se puede apreciar en la gráfica (2-7) que uno de los puntos de corte es el punto⁵ $(-0,82603, -0,56362)$, y si se utiliza otra aproximación inicial por ejemplo $(1, 1)$ el método llega a la otra solución $(0,82603, 0,56362)$.

Sin embargo el método de Newton-Raphson es de rápida convergencia siempre que se escoja un valor cercano a \mathbf{p} la solución, pero al escoger cualquier valor, es posible que el método diverja. Por otra parte, en cada iteración se debe calcular la Jacobiana y su inversa respectiva para resolver un sistema lineal, lo cual eleva la eficiencia de los algoritmos.

Método de Runge-Kutta

El método de Runge-Kutta para resolver sistemas de ecuaciones se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Es un método con una buena aproximación y permite obtener soluciones satisfactorias a los sistemas.

Cuando se tiene una ecuación diferencial de primer orden, se utiliza el algoritmo de Runge-Kutta para determinar las aproximaciones a la solución de la ecuación. Sin embargo, en algunos problemas el método puede presentar inestabilidades o divergencias. Por tal razón, cuando se tenga una ecuación diferencial se utilizará el **Método implícito del trapecio** el cual consiste en tomar:

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha \\ w_{j+1} &= w_j + \frac{h}{2}[f(t_{j+1}, w) + f(t_j, w_j)] = 0 \quad 0 \leq j \leq N - 1 \end{aligned} \quad (2-56)$$

En general w_{j+1} se obtiene resolviendo iterativamente una ecuación no lineal o sistema de ecuaciones no lineales, para el cual utilizaremos el método de Newton-Raphson.

⁵Las soluciones fueron verificadas con el software Wxmaxima

3. El memristor como dispositivo análogo

En algunos artículos [10, 11, 15, 54] se estudia el memristor como elemento digital, memoria, elemento de almacenamiento de ceros y unos o como un switch. En el presente capítulo se analiza la respuesta del circuito análogo al conectar un memristor como elemento no lineal en serie con los otros elementos circuitales básicos.

Se utilizará el modelo propuesto por Chua en [13] en el cual la memristancia está dada por $M(q) = 1 + q^2$ y se estudian circuitos *MRLC* serie [55], se analizan las respuestas utilizando algunos métodos matemáticos estudiados en el Capítulo 2. Se comparan entonces los resultados de las soluciones para los circuitos *RLC* y *MRLC* indagando sobre el efecto que tiene el nuevo elemento en éste tipo de circuitos, se utilizan simulaciones para distintos valores de resistencia, inductancia y capacitancia, en el tiempo y en el plano fase con el software libre Octave. La simulación de circuitos de este tipo es relevante cuando se quieren hacer análisis como en [56–59].

3.1. Simulación de circuitos que incluyen el memristor

Tradicionalmente se hace la conexión del resistor R , del inductor L y del capacitor C en serie con una fuente de tensión $v(t)$ como se muestra en la figura (3-1):

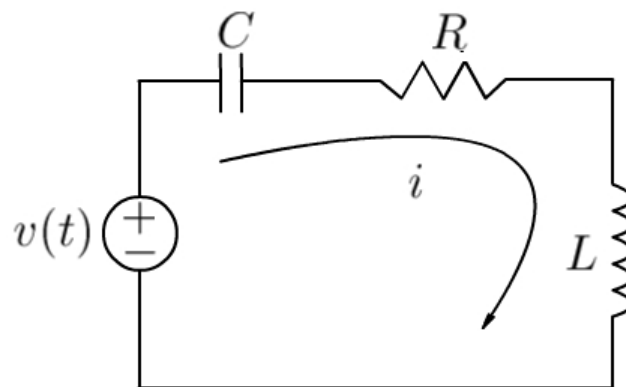


Figura 3-1.: Circuito R-L-C

Cuya ecuación diferencial se escribe como (3-3):

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = v(t) \quad (3-1)$$

Cuando se conecta en serie el nuevo elemento básico de circuitos el memristor resulta el circuito de la figura (3-2):

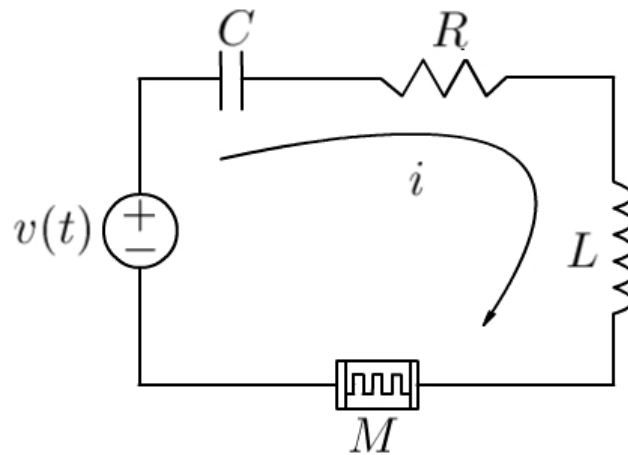


Figura 3-2.: Circuito M-R-L-C

La ecuación que rige al sistema se escribe como:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + M \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = v(t) \quad (3-2)$$

De donde se obtiene que

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + (R + M) \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = v(t) \quad (3-3)$$

A continuación se presentan las soluciones para diferentes configuraciones de circuitos MRLC, con el modelo del inductor $L = 1 \times 10^{-3}H$, $C = 1 \times 10^{-3}F$, $R = 1\Omega$, los valores para la fuente son amplitud $A = 1V$, el valor de la frecuencia angular se selecciona debido a que los intervalos de tiempo son pequeños y por tanto el período debe ser corto $\omega = 196rad/s^1$.

3.1.1. Circuito memristor-capacitor

En primer lugar se estudia un circuito Memristor-Capacitor MC con fuente. Ver figura (3-3).

¹Algunos de los resultados aquí obtenidos fueron presentados en el Tercer Encuentro de Micro y Nanotecnología de la Universidad de los Andes en 2011.

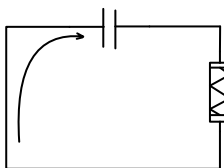


Figura 3-3.: Circuito M-C

La ecuación diferencial del circuito está dada por:

$$M(q) \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C} \quad (3-4)$$

Sujeto a la condición inicial $q(0) = q_0$. Reemplazando el valor de la memristancia se obtiene

$$(1 + q^2) \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C} \quad (3-5)$$

Al solucionar la ecuación anterior se obtiene,

$$\ln(q) + \frac{q^2}{2} = \frac{t}{C} + C_1 \quad (3-6)$$

Al resolver el circuito MC, con $C = 0,5F$ la constante de integración, cuyo valor es $C_1 = \ln(q_0) + q_0^2/2$ para la solución se considera que el capacitor está inicialmente cargado con una carga inicial $q_0 = 0,1C$ y sin fuente de tensión. La gráfica de la solución numérica se puede ver en la figura (3-4), la gráfica de la corriente se presenta en la figura (3-5) cuyo comportamiento tiende a cero a medida que el tiempo avanza, es decir la corriente se atenúa con el memristor.

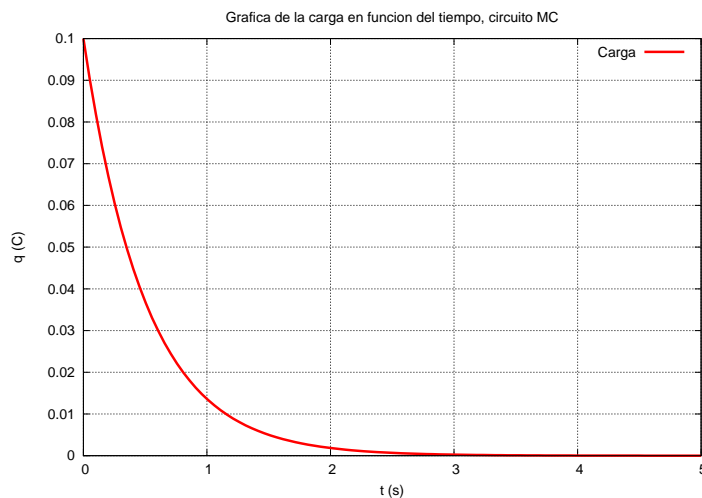


Figura 3-4.: Carga para el circuito M-C

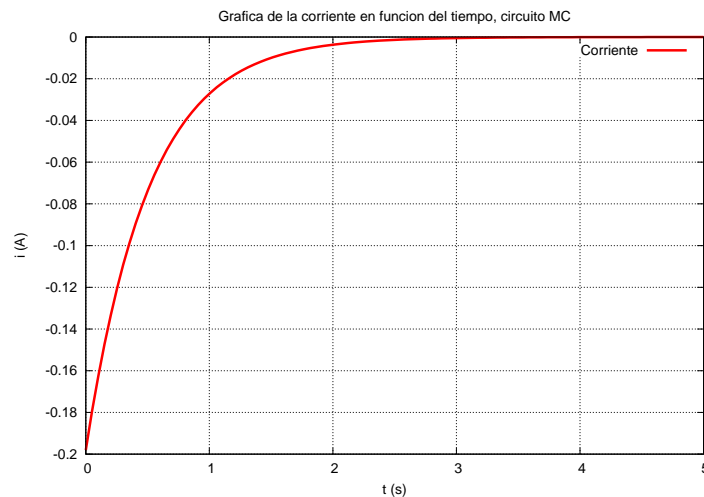


Figura 3-5.: Corriente para el circuito M-C

3.1.2. Análisis comparativo de respuesta de circuitos MLRC

El modelo matemático para un circuito MRLC se escribe como:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + (R + M(q)) \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = f(t) \quad (3-7)$$

La cual se resolverá ² utilizando la fórmula propuesta en [13] por el profesor Chua, dada por $M(q) = 1 + q(t)^2$ y con la que se obtienen comportamientos teóricos interesantes como respuesta de la ecuación.

A continuación se resuelve numéricamente utilizando el software Octave la ecuación (3-7) cuando el circuito está con y sin memristor, las condiciones iniciales dadas por $q(0) = -0,1C$ y $\dot{q} = 0C/s$, los valores de la inductancia $L = 1 \times 10^{-3}H$ y capacitancia $C = 1 \times 10^{-3}F$

Solución del circuito MRLC vs la solución RLC para diferentes valores de resistencia

A continuación se presentan las gráficas para una resistencia de $R = 0,5$ en la figura (3-6), donde nuevamente se comparan las dos respuestas, circuito con memristor el cual se atenúa bastante más rápido en respecto a la respuesta del circuito sin memristor, el cual oscila mucho más alrededor del punto de equilibrio. En la figura (3-7) se puede apreciar éste efecto en el espacio de fase, lo que evidencia la atenuación producida por el memristor llegando más rápido al punto de estabilidad, respecto al circuito sin memristor.

Donde finalmente es más notorio el efecto memristivo, ocurre al eliminar la resistencia del circuito $R = 0$, se puede ver en la figura (3-8) que el circuito sin memristor es oscilatorio, mientras que el memristor produce un efecto de atenuación, esto se confirma en el espacio de fase en la gráfica (3-9).

²Soluciones numéricas utilizando el software Octave

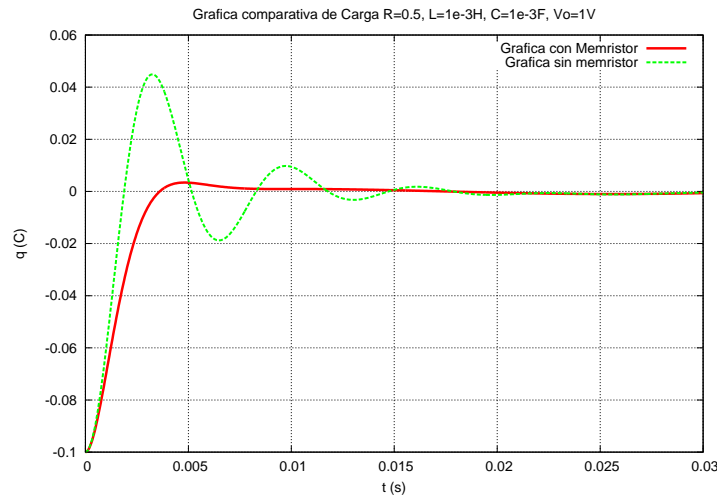


Figura 3-6.: Gráfica comparativa de las respuestas de carga al cambiar aumento en el valor de la resistencia $R = 0,5$ del circuito MRLC, línea punteada circuito sin memristor, línea continua circuito MRLC

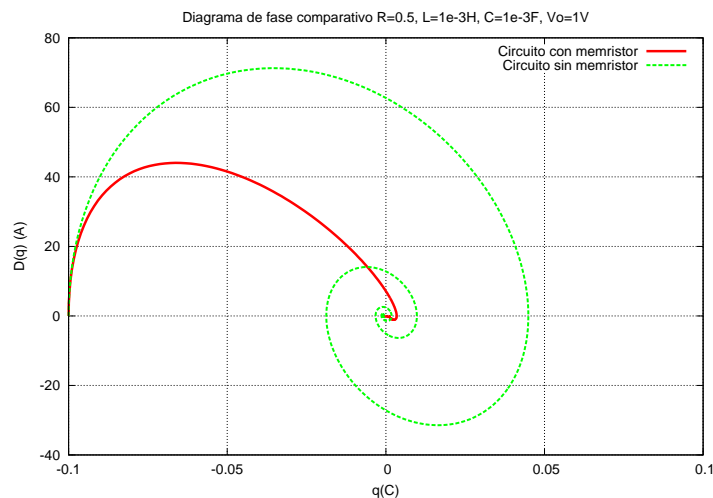


Figura 3-7.: Gráfica comparativa de las respuestas de carga, la línea continua es la curva con memristor, línea punteada circuito sin memristancia

Respuesta natural del circuito MRLC vs MLC

En este proceso de indagación de las posibles soluciones del circuito, se estudia la respuesta del circuito MRLC frente al circuito MLC utilizando una resistencia $R = 1\Omega$, los resultados de la simulación se pueden visualizar en la figura (3-10), en la cual se puede observar que la respuesta del circuito con resistor se amortigua bastante hasta tal punto que no se alcanzan a producir oscilaciones, aproximándose rápidamente al punto de estabilidad $q = 0$, mientras que la respuesta del circuito que incluye el resistor tiene una forma un tanto oscilatoria antes

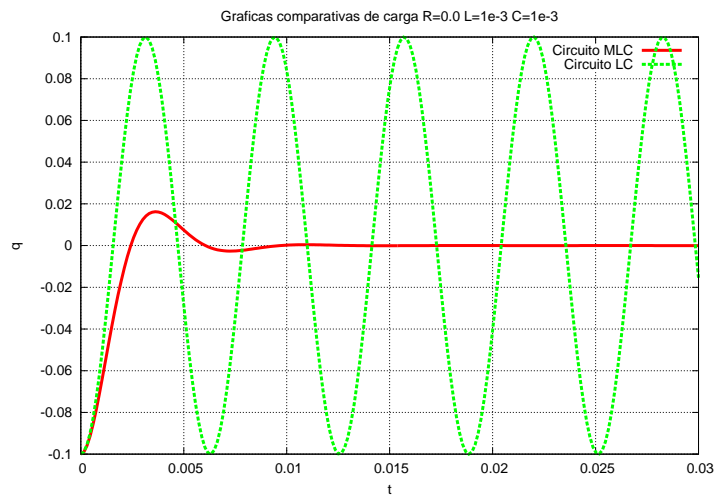


Figura 3-8.: Gráfica comparativa de las respuestas de un circuito MLC vs LC

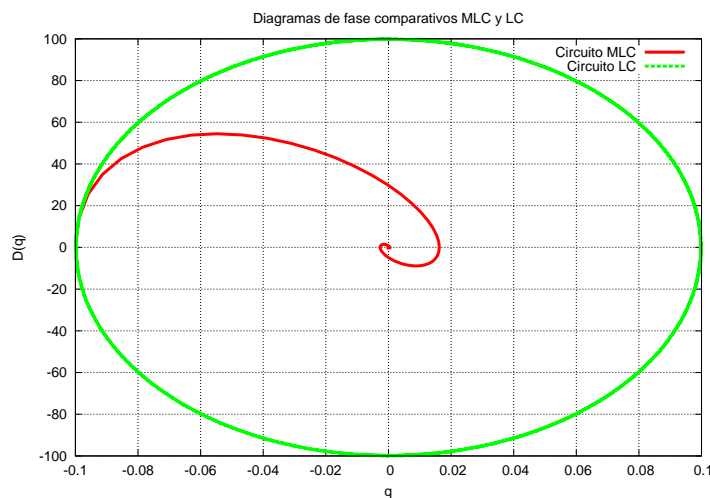


Figura 3-9.: Gráfica comparativa en el espacio de fase sin resistencia, la línea continua es con Memristancia, la línea punteada es sin memristancia.

de estabilizarse.

En el espacio de fase (3-11) la respuesta es interesante, pues el circuito con resistor va directo al punto de estabilidad, contrario a lo que había ocurrido en la respuesta de la sección anterior en la cual la respuesta del circuito memristivo sufría pequeñas oscilaciones. En el circuito con resistor oscila antes de alcanzar el punto de equilibrio.

Comparación del circuito MRLC con dos valores distintos de resistencia

Continuando con el análisis presentado se compararon dos ecuaciones diferenciales de la forma (3-7) pero en las cuales se hicieron variaciones en los valores de las resistencias, una

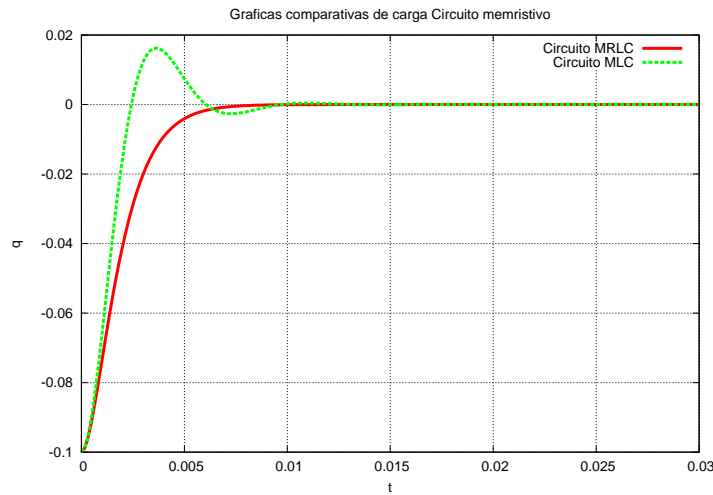


Figura 3-10.: Gráfica comparativa de las respuestas de carga al incluir las resistencias

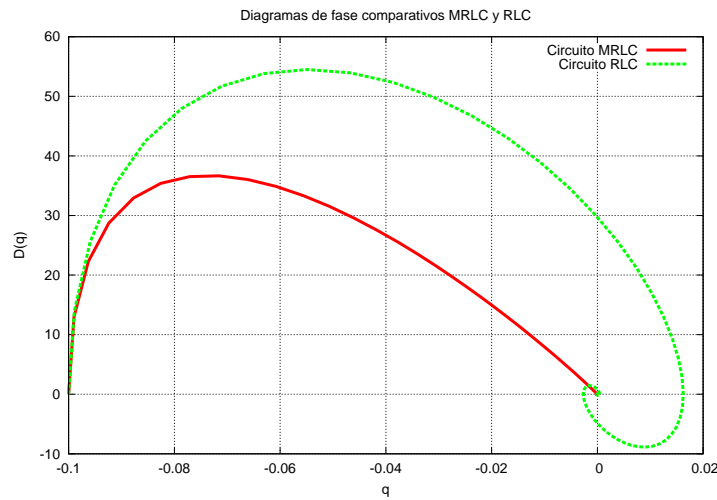


Figura 3-11.: Gráfica comparativa de las respuestas de carga al cambiar las resistencias

de ellas $R = 0,1\Omega$ y la otra $R = 10\Omega$, en la figura (3-12) es claro el efecto de atenuación que ocurre al aumentar el valor de la resistencia. Con un valor de menor resistencia la respuesta del circuito alcanza a ser incluso oscilatoria, mientras que cuando se aumenta el valor de R se amortigua bastante y no se alcanzan a producir oscilaciones. Esto se hace evidente en el diagrama de fase donde se observa el fenómeno en la figura (3-13). Es notorio como el aumento en el valor de resistencia en el circuito genera una tendencia de respuesta del circuito más lineal, es decir se comporta como un circuito netamente resistivo.

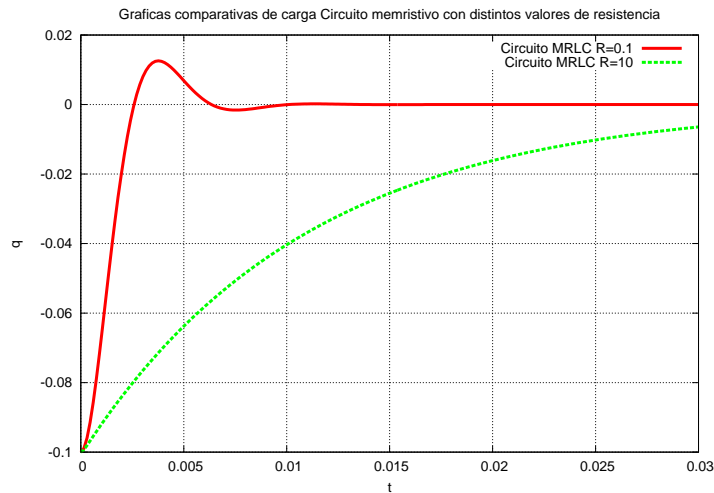


Figura 3-12.: Gráfica comparativa de las respuestas de carga al cambiar las resistencias

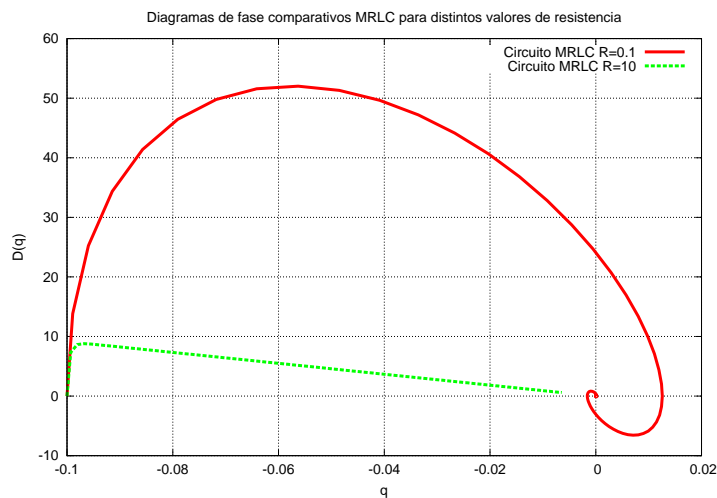


Figura 3-13.: Gráfica en el espacio de fase al incluir las resistencias

Respuesta natural del circuito MRLC con distintos valores de C

Se ha presentado el análisis del circuito incluyendo la memristancia y sin incluirla y cambiando valores de resistencia y se han visto los efectos de estos cambios. En esta parte, se propone analizar la influencia del circuito cambiando los valores del capacitor.

Se comparan dos circuitos MRLC en uno de los cuales se utiliza $C1 = 1e - 3F$ y en el otro se utiliza $C = 1e - 6F$, don valor de resistencia $R = 0,1\Omega$. Como se puede apreciar en la figura (3-14) el comportamiento del circuito memristivo con un capacitor mayor que con uno de menor tamaño. En el diagrama de fase figura (3-15) se pueden observar las oscilaciones del sistema al rededor del punto de equilibrio, mientras que el otro converge directamente al punto de equilibrio con una leve oscilación.

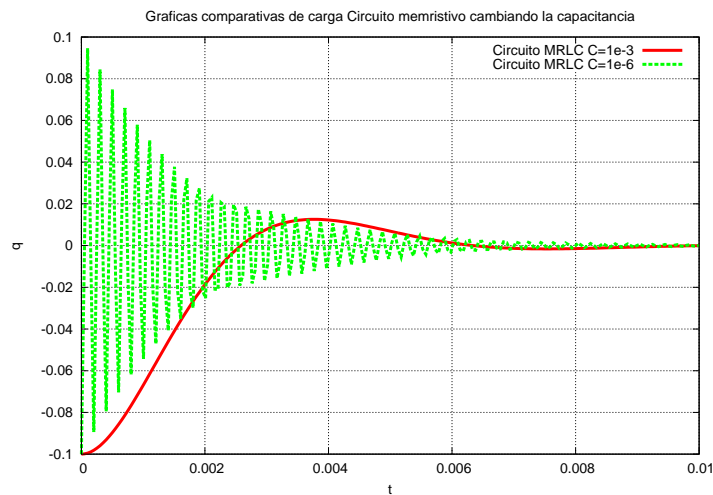


Figura 3-14.: Gráfica comparativa de las respuestas de carga de un circuito MRLC al cambiar el valor de la capacitancia

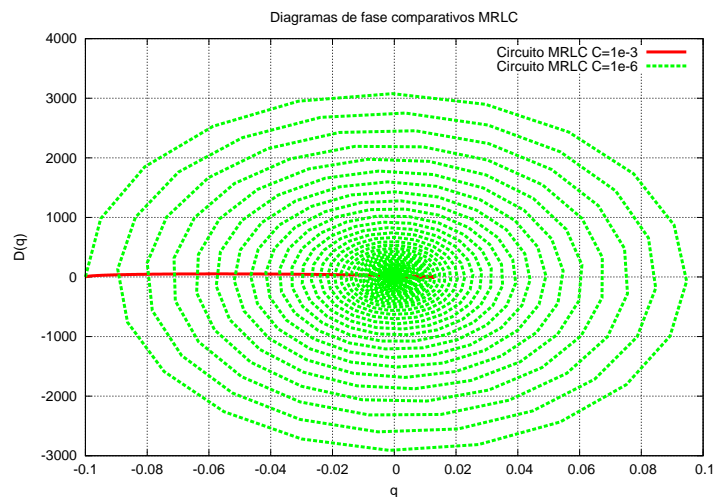


Figura 3-15.: Gráfica en el espacio de fase al forzar un circuito

3.1.3. Respuesta cuando se cambia el inductor

En la figura (3-16) se puede apreciar el efecto que tiene el cambio en el inductor, el cual muestra que con una inductancia pequeña se produce un acercamiento rápido a la estabilidad, pero al aumentar la inductancia el circuito se comporta como un oscilador prácticamente sin resistencia.

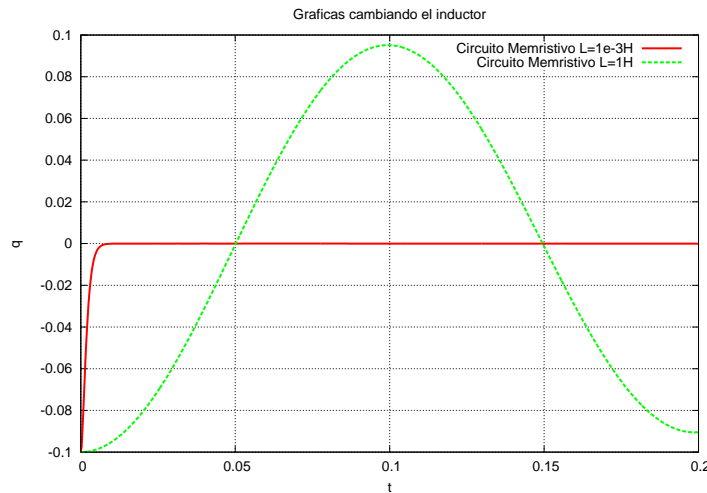


Figura 3-16.: Gráfica del circuito cuando se cambia el inductor de $1 \times 10^{-3}H$ a $1H$

3.1.4. Respuesta forzada del circuito MRLC

Es interesante analizar la respuesta del circuito utilizando una fuente $v = V \sin(\omega t)$ utilizando en este caso una frecuencia $\omega \approx 196 \text{ rad/s}$ con una inductancia de $L = 1e - 3$, una capacitancia de $C = 1e - 3$ y una resistencia $R = 5\Omega$. Se observa en la figura (3-17) que la respuesta varía ligeramente al utilizar una fuente de éstas características.

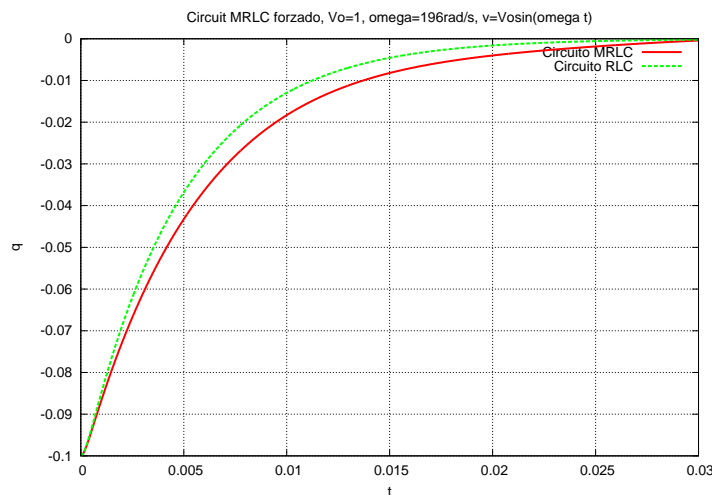


Figura 3-17.: Gráfica comparativa de las respuestas de carga de un circuito forzado

Si se incrementa suficientemente la amplitud de la señal aplicada por ejemplo $V_0 = 10V$, y una $\omega = 5\omega_0$ se obtienen los resultados presentados en las gráficas

Y su correspondiente respuesta de corriente,

se observa que el análisis más interesante estuvo centrado en la influencia que ejerce el

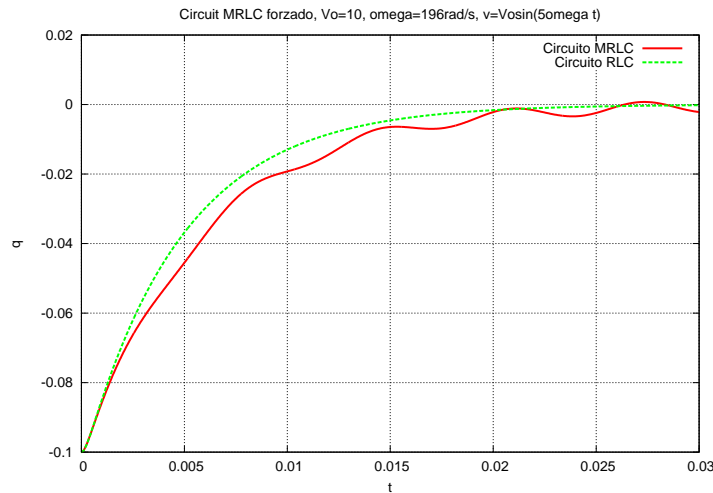


Figura 3-18.: Gráfica comparativa de las respuestas de carga de un circuito forzado

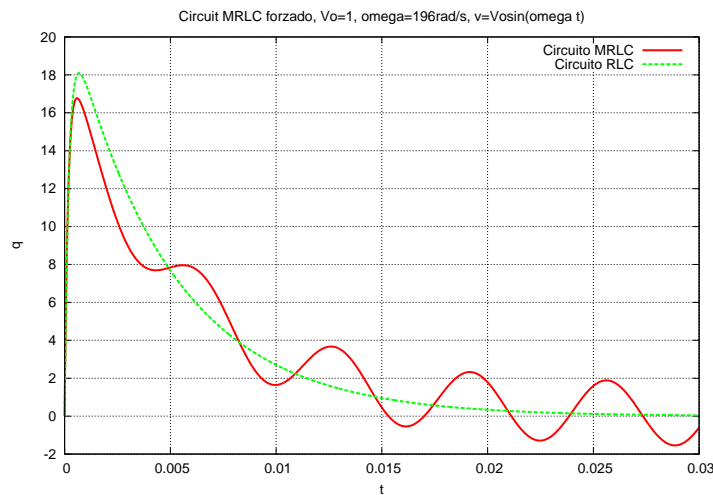


Figura 3-19.: Gráfica comparativa de las respuestas de carga de un circuito forzado

resistor sobre el circuito, pues al hacer cambios, se evidenciaba el efecto que producía sobre el circuito MRLC, sin embargo, también es notorio el efecto de agregar un memristor como el que propuso el profesor Chua en 2011 [13].

En general los análisis que se presentan, pueden tener o no un sentido físico, y en general puede ocurrir que el dispositivo que satisfaga esta forma de memristancia no necesariamente se puedan construir.

Las ecuaciones diferenciales que resultan en general son ecuaciones diferenciales no lineales, las técnicas estudiadas en la sección (2.1) se aplican para resolver algunas de las ecuaciones diferenciales no lineales, luego se comparan y determinan los comportamientos de dichas simulaciones.

3.1.5. Solución de la ecuación del circuito MRLC en serie

Solución de Sistemas memristivos utilizando el método TDT

Resolver la ecuación que corresponde al circuito MRLC en serie, en la cual $x(t) = q(t)$ representa la carga del circuito, L el valor de la inductancia, C el valor de la capacitancia, R_{eq} es el valor de la resistencia equivalente conectada en serie con el circuito, $f(t)$ es una fuente de excitación externa.

$$L \frac{d^2x}{dt^2} + (R_{eq} + x(t)^2) \frac{dx}{dt} + \frac{x(t)}{C} = f(t) \quad (3-8)$$

La idea es resolver la ecuación (3-8) utilizando la TDT. Para eso reescribimos algunas transformaciones presentadas en la tabla (2-1) así: Si $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ entonces

$$Y(k) = \frac{(k+1)}{H} X(k+1) \quad (3-9)$$

Cuando $p(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ se tiene que

$$P(k) = \frac{(k+2)(k+1)}{H^2} X(k+2) \quad (3-10)$$

Por otra parte si $w(t) = x(t)y(t)$ su transformada correspondiente se escribe como:

$$W(k) = \sum_{l=0}^k X(l)Y(k-l) = \sum_{l=0}^k Y(l)X(k-l) \quad (3-11)$$

Si tenemos que $x1(t) = x(t)x(t)$ su transformada se puede escribir como:

$$X1(k) = \sum_{l=0}^k X(l)X(k-l) \quad (3-12)$$

Además para éste caso se necesita una función $s(t) = x^2(t) \frac{dx}{dt} = x1(t) \frac{dx}{dt}$ cuya transformada es de la siguiente forma:

$$S(k) = \sum_{l=0}^k X1(k)Y(k-l) = \sum_{l=0}^k X1(k) \frac{(k+1-l)}{H} X(k+1-l) \quad (3-13)$$

Aplicando las ecuaciones desde (3-9) hasta (3-13) a la ecuación (3-8) se obtiene

$$\begin{aligned} L \frac{(k+2)(k+1)}{H^2} X(k+2) &+ R_{eq} \frac{(k+1)}{H} X(k+1) + \\ &+ \sum_{l=0}^k X1(l) \frac{(k+1-l)}{H} X(k+1-l) \\ &+ \frac{1}{C} X(k) = F(k) \end{aligned} \quad (3-14)$$

Para este caso vamos a utilizar un función $f(t) = \text{sen}(\omega t)$ cuya transformada TDT está dada por $F(k) = \frac{(\omega H)^k}{k!} \text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)$. Las condiciones iniciales supongamos que son $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = x_1$, la R_{eq} será el valor de R sumado con el valor 1 de la memristancia; Al hacer los despejes para los diferentes valores de k obtenemos:³.

Las condiciones iniciales del problema las vamos a suponer: $x(0) = -0,1$ y $\dot{x}(0) = 0$ es decir vamos a suponer que el circuito tiene una carga inicial, pero su corriente inicial es cero. $L = 1e^{-3} H$ $C = 1e^{-4} F$ $R_{eq} = 1,1 \Omega$, operando a una frecuencia de $\omega = 196,25 \text{ rad/s}$, se hallará la solución y se comparará con la solución numérica obtenida con Octave-3.2.4 con las mismas condiciones. La función aproximación después de usar la TDT y resolver la ecuación de recurrencia (3-14):

$$f(t) = -0,1 + 5,000000000 * 10^5 t^2 - 1,849672917 * 10^8 t^3 - 3,653382432 * 10^{11} t^4 + 1,785886728 * 10^{14} t^5 + 8,565772174 * 10^{16} t^6 - 6,678672283 * 10^{19} t^7; \quad (3-15)$$

Al comparar las gráficas figura (3-20) se observa que las respuestas usando TDT y resolviendo la ecuación diferencial no lineal por aproximaciones numéricas usando Octave son muy similares en un intervalo de tiempo muy corto, sin embargo cuando el tiempo se extiende a un intervalo mayor, la TDT no converge a la solución de la ecuación diferencial..

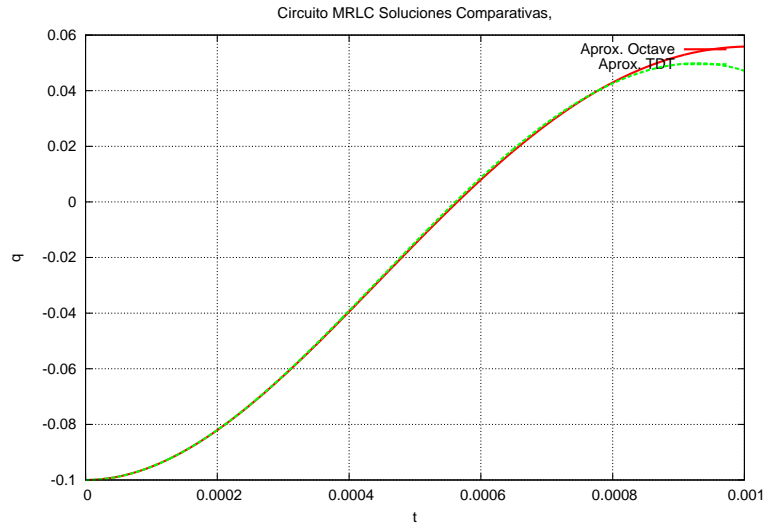


Figura 3-20.: Gráfica comparativa de las soluciones del circuito MRLC usando TDT y Octave

3.2. Método del balance armónico

En ésta sección se utiliza el método del balance armónico presentado en el Capítulo 2, sección (2.3) para resolver un circuito no lineal que incluye elementos no lineales tipo memristor,

³Los despejes se verifican con el software Wxmaxima

como en [49] y [50].

Hemos supuesto que la memristancia tiene la forma $M(x) = 1 + x^2$, de manera que las ecuaciones que rigen el memristor se pueden expresar como:

$$\frac{dx(t)}{dt} = i(t) \quad (3-16)$$

$$v(t) = (1 + x^2)i(t) \quad (3-17)$$

Para encontrar la función descriptiva $\Psi(A)$ se supone una entrada de la forma $i(t) = A \text{sen}(\omega t)$ que al reemplazarla en la ecuación (3-16) e integrar se obtiene:

$$x(t) = \frac{-A}{\omega} \cos(\omega t) \quad (3-18)$$

Valor que se reemplaza en la ecuación (3-17) para obtener:

$$v(t) = \left(A + \frac{A^3}{\omega^2} \right) \text{sen}(\omega t) - \frac{A^3}{\omega^2} \text{sen}^3(\omega t) \quad (3-19)$$

Como se puede apreciar la función $\Psi(A)$ corresponde con los dos primeros armónicos impares. Se trata de establecer el comportamiento del memristor como elemento básico de circuitos cuando se utiliza en una configuración de circuito MRLC en serie y compararlo con el comportamiento del circuito RLC en serie, es decir se pretende analizar el cambio de los circuitos cuando se incluía este tipo de elementos.

Al ser el memristor un dispositivo no lineal, las ecuaciones diferenciales de los circuitos resultantes no se pueden realizar de forma analítica, razón por la cual es necesario utilizar métodos numéricos o aproximativos para obtener las soluciones en intervalos determinados. El memristor produce una atenuación de las señales cada vez que interactúa con los elementos del circuito en serie, las respuestas de los circuitos se atenúan hasta conseguir puntos de estabilidad.

4. Conclusiones y Perspectivas

La solución de diversos sistemas que incluyen memristores y sistemas memristivos amplia el conocimiento actual de los sistemas dinámicos y de la teoría de circuitos, por tal razón se puede inferir que *el Memristor* y los *Sistemas memristivos* se pueden considerar como categorías nuevas de estudio tanto de los sistemas dinámicos como en la teoría de circuitos no lineales, presentando en la tesis los fundamentos para continuar con el desarrollo teórico experimental.

Debido al enfoque del trabajo de abordar la temática de los sistemas memristivos como elementos análogos, fue necesario estudiar e implementar herramientas teóricas diseñadas para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, además de utilizar herramientas computacionales libres como Octave y Wxmaxima.

Se puede apreciar como se aplican las matemáticas a una situación real, en este caso se hizo experimentalmente y simuladamente un circuito que emula el comportamiento de un memristor real, logrando un desarrollo teórico-experimental de los memristores y sistemas memristivos análogos.

Se hizo el análisis de circuitos no lineales que incluyen los cuatro elementos fundamentales, resistor, inductor, capacitor y memristor en serie, resolviendo las ecuaciones resultantes y analizando la ingerencia del nuevo elemento en las respuestas de los circuitos. En éste punto es de considerar que se avanza en el desarrollo de la teoría de circuitos no lineales.

La tesis presenta una revisión amplia de las nociones y conceptos que involucran el estudio de los memristores y sistemas memristivos análogos, así como una revisión detallada de algunas técnicas para solucionar sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con no linealidades y el uso de herramientas computacionales de carácter libre para solucionar todos los problemas propuestos.

Entre las técnicas más potentes para la solución de los circuitos *MRLC* presentados está el método del balance armónico presentado en el **Capítulo 2** ya que a pesar de las simplificaciones necesarias para la solución, permite resolver las ecuaciones en el dominio de la frecuencia y encontrar soluciones bastante aproximadas respecto a las soluciones analíticas.

Perspectivas

Si bien en éste trabajo se hicieron algunos análisis de las aplicaciones que pueden tener los memristores dentro de la teoría de circuitos, existen diversos campos del conocimiento que quedan abiertos para la exploración, ver figura (4-1), entre los que se puede mencionar

el uso de memristores como memoria asociativa [64], aplicaciones a la teoría de control [65], los análisis físico-químicos [66] o el diseño de redes neuronales con memristores [67], algunas aplicaciones como el memristor emisor de luz [68]. En inteligencia artificial [69], o los análisis físicos presentados en [70], la computación neuromórfica [71], el desarrollo teórico matemático de los sistemas memristivos [72], la construcción de nuevos materiales, nuevas técnicas de solución y de simulación con análisis computacionales más eficientes [73,74,76], el estudio del memristor mecánico [75]. El análisis físico-químico de nuevos materiales [77] y sus interacciones internas [78], las aplicaciones en otras áreas como por ejemplo el tratamiento analógico de imágenes, el procesamiento computacional dentro del dispositivo, la creación y el estudio de nuevos y variados sistemas cuyo comportamiento corresponde con los sistemas dinámicos pero analizados con la perspectiva de pérdidas memristivas y el desarrollo de los sistemas memristivos como elementos digitales.

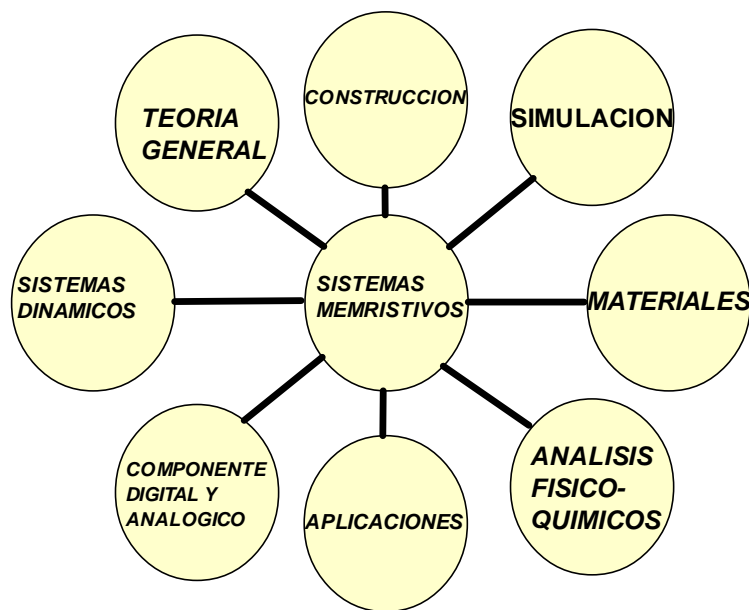


Figura 4-1.: Estado del arte actual de los memristores

Visto de ésta forma el estudio de los memristores es un campo nuevo del conocimiento, que ha venido incrementando el interés debido a que es relativamente desconocido, el número de publicaciones ha aumentado sustancialmente, sin embargo en Colombia no existen suficientes líneas de investigación sobre el tema.

Aun cuando el memristor se quiere utilizar como elemento digital, como en memorias, discos duros, etc., la propuesta presentada pretende estudiarlo como un elemento análogo que permita la simulación de sinapsis [21] u otro tipo de computación como la computación neuromórfica [71] que está en pleno proceso de exploración y desarrollo teórico.

A. Revisión Componentes Tradicionales

A.1. Resistor

Georg Simon Ohm aproximadamente en 1827 presenta la conocida **Ley de ohm** que establece que la tensión es proporcional a la corriente por una cantidad aproximadamente constante y que se denominará la resistencia R

$$v = Ri \tag{A-1}$$

Las unidades de tensión son los voltios¹ V , para la corriente los amperios² A y para la resistencia los ohmios³ Ω , en la figura A.1(a). se puede observar el esquemático de un circuito de una fuente en serie con una resistencia.

En general se puede decir que cualquier dispositivo representado esquemáticamente en la figura A.1(a), que relacione la tensión v y la corriente i a través de una función $v = f(i)$ corresponde a un resistor, cuya pendiente en un punto P es el valor de la resistencia, figura A.1(c), como se presenta en [9].

A.2. Capacitor

”El primer condensador utilizado para almacenar grandes cargas eléctricas fue una botella con una lámina de oro en su cara interior y exterior que se llamó botella de Leyden. Fue inventada en el siglo XVIII en Leyden (Holanda) cuando estudiando los efectos de las cargas eléctricas sobre las personas y los animales, uno de aquellos experimentadores tuvo la idea de almacenar una gran cantidad de carga en una botella de agua. Para ello sostenía la botella en una mano mientras la carga procedente e un generador electrostático era conducida hasta el agua por medio de una cadena. Cuando trató de sacar la cadena de agua con la otra mano

¹Un volt (V) es la diferencia de potencial eléctrico que existe entre dos puntos de un hilo conductor que transporta una corriente de intensidad constante de un amperio cuando la potencia disipada entre estos puntos es igual a 1 watt. [80]

²El amperio es la intensidad de una corriente constante que manteniéndose en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y situados a una distancia de un metro uno de otro en el vacío, produciría una fuerza igual a 2×10^{-7} Newton por metro de longitud. [81]

³Un ohmio se define como la resistencia eléctrica que existe entre dos puntos de un conductor cuando una diferencia de potencial constante de 1V se aplica entre estos dos puntos produce, en dicho conductor, una corriente de intensidad 1A [80]

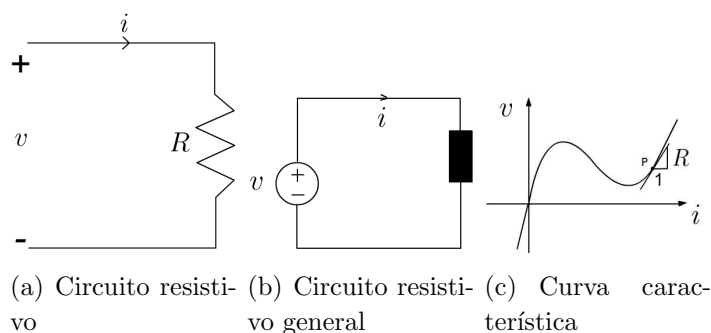


Figura A-1.: Resistor General

sufrió una sacudida eléctrica que le dejó inconsciente. Después de muchos experimentos se descubrió que la mano que sostenía la botella podía reemplazarse por hojas metálicas que recubrían las superficies interior y exterior de la botella.

Benjamín Franklin comprobó que el dispositivo para almacenar cargas no debía tener necesariamente la forma de botella y utilizó en su lugar vidrios de ventana recubiertos de hojas metálicas, que se llamaron vidrios de Franklin. Con varios de estos vidrios conectados en paralelo, Franklin almacenó una gran carga y con ello trató de matar un pavo. En su lugar, sufrió él mismo una fuerte descarga. Más tarde, Franklin escribió: *Trataba de matar un pavo y por poco no mató un gusano*⁴

En términos generales un condensador es cualquier elemento pasivo de circuitos eléctricos que relacione la carga q y la tensión v . En la figura A.2(a) se muestra el circuito esquemático de un condensador.

$$q = Cv \tag{A-2}$$

De manera similar a como se definió el resistor, en [9] se establece que un dispositivo que relacione la tensión $v(t)$ y la carga ⁵ $q = \int idt$ a través de una relación funcional $q = f(v)$ como en la figura A.2(c) es un capacitor, la pendiente en el punto P de la curva mostrada en la figura A.2(c) es llamada la capacitancia C del dispositivo⁶.

A.3. Inductor

”El conocimiento del magnetismo se mantuvo limitado a los imanes, hasta que en 1820, Hans Christian Orsted, profesor de la Universidad de Copenhague, descubrió que un hilo conductor sobre el que circulaba una corriente ejercía una perturbación magnética a su

⁴<http://www.info-ab.uclm.es/labelec/solar/Componentes/Condensadores.htm>

⁵medida en Culombios donde el Coulomb (C) es la cantidad de electricidad transportada en 1 segundo por una corriente de intensidad 1 Ampère. [80]

⁶medida en *Faradios*, donde un Faradio (F) es la capacidad de un condensador eléctrico que entre sus armaduras aparece una diferencia de potencial eléctrico de 1 volt, cuando está cargado con una cantidad de electricidad igual a 1 Culomb. [80]

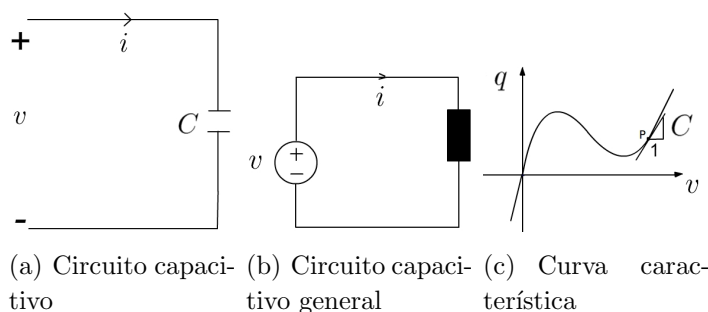


Figura A-2.: Capacitor General

alrededor podía mover una aguja magnética situada en ese entorno. Muchos otros experimentos siguieron con André-Marie Ampère, Carl Friedrich Gauss, Michael Faraday y otros que encontraron vínculos entre el magnetismo y la electricidad. James Clerk Maxwell sintetizó y explicó estas observaciones en sus ecuaciones de Maxwell. Unificó el magnetismo y la electricidad en un solo campo, el electromagnetismo.”⁷

En el circuito inductivo de la figura A.3(a). se puede establecer la relación entre el flujo magnético $\varphi(t)$ y la corriente eléctrica $i(t)$ de la siguiente forma:

$$v = \frac{d\varphi}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad (\text{A-3})$$

Donde el flujo magnético φ tiene unidades de Weber⁸, L es el valor de la inductancia cuya unidad es el Henry⁹.

Un inductor en general se establece como un elemento básico de circuitos que relaciona el flujo φ y la corriente i a través de una relación funcional $\varphi = f(i)$, en la figura A.3(c) la pendiente en P representa la inductancia.

Para **resumir** las relaciones entre las cantidades eléctricas se pueden ver en la figura **1-1**, el resistor relaciona la corriente i y la tensión v , el inductor relaciona la corriente i y el flujo magnético φ y el capacitor relaciona la tensión eléctrica v con la carga eléctrica q así como otras. Sin embargo en 1971 el profesor Leon O. Chua estudiando las relaciones ilustradas encuentra que no existía un dispositivo básico de circuitos como el resistor el capacitor o el inductor, que relacionara de manera directa la carga q y el flujo magnético φ , el cual por simetría debería existir. Entonces propone [1] la existencia y el diseño de un dispositivo que lo denominará memristor debido a que se comporta como una ”resistencia con memoria”¹⁰.

⁷<http://es.wikipedia.org/wiki/Magnetismo>

⁸Un weber (Wb) es el flujo magnético que, al atravesar un circuito de una sola espira produce en la misma una fuerza electromotriz de 1 volt si se anula dicho flujo en un segundo por decaimiento uniforme. [80]

⁹Un Henrio (H) es la inductancia eléctrica de un circuito cerrado en el que se produce una fuerza electromotriz de 1 volt, cuando la corriente eléctrica que recorre el circuito varía uniformemente a razón de un Amperio por segundo. [80]

¹⁰Memristor es la contracción de memory-resistance

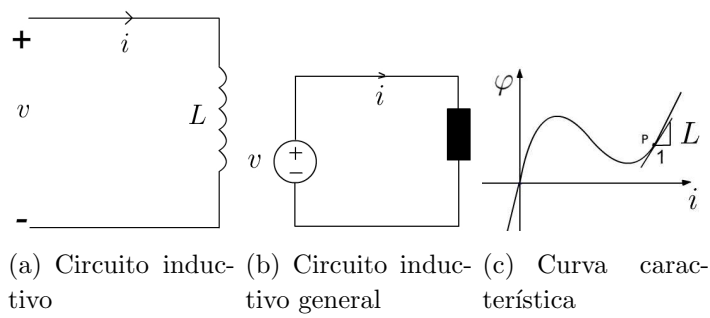


Figura A-3.: Capacitor General

B. Códigos de simulación en octave

En éste apéndice se escriben algunos códigos en el programa Octave, que pueden ser útiles para la solución de problemas para ingeniería y matemáticas, se pueden comparar con [79]. En éste código se resuelve la ecuación del memristor

$$v = M(q)i \quad (\text{B-1})$$

```
#Intervalo de tiempo
n=500;
t=linspace(-1.25,1.25,n);
f=0.8;#Frecuencia de la senal de entrada
omega=2*pi*f;
D=10e-9;#Tamano del dispositivo
Ron=1e-6;#Ancho de la frontera dopada
Roff=20*Ron;#Ancho de la frontera no dopada
mud=10e-10;#Movilidad ionica
eta=1;#Polarizacion del dispositivo
Q0=D^2/(mud*Ron);#Constante asignada
w0=0.5*D;#Frontera inicial dopada
deltar=Roff-Ron;#Constante
R0=Roff*(1.-w0/D)+Ron*w0/D;#Resistencia inicial del dispositivo
Vo=1e-6;#Voltaje Pico
phi=-(Vo/omega)*cos(omega*t);#Flujo magnetico
q0=-1.6488e-02 ;#Carga inicial
t0=-1.25;#Tiempo inicial
Tend=1.25;#Tiempo final
v=Vo*sin(omega*t);#Senal de entrada
#####
#Definimos la funcion del memristor
#####
function y=mem(q,t)
    eta=1; f=0.8; omega=2*pi*f;D=10e-9;
    Ron=1e-6; Roff=20*Ron; mud=10e-10;
    Q0=D^2/(mud*Ron);w0=0.5*D;
```

```

R0=Roff*(1.-w0/D)+Ron*w0/D;
deltar=Roff-Ron;
#Senal de entrada
#Amplitud de la onda de entrada
Vo=1e-6;
y=v./(R0-(eta*deltar/Q0)*q);
endfunction
#####
#Solucion de la ecuacion
#####
T=linspace(t0,Tend,n);#eje de tiempo
solution=lsode('mem',q0,T);#Solucion usando lsode
#Calcula la memristancia
for i=1:300
  m = R0-eta*deltar/Q0*solution;
endfor
#Hallar la corriente
mem=1./m;
i=v.*mem';
#####
# Graficas
#####
subplot(3,2,1);
plot(t,v);
xlabel('tiempo');ylabel('Tension aplicada');
title('Tension aplicada');
subplot(3,2,2);
plot(t,i,'r','linewidth',3);
title('Grafica de la corriente');
xlabel('tiempo');ylabel('Corriente');
subplot(3,2,3);
plot(t,mem,'r','linewidth',5);
title('Curva de memristancia en funcion del tiempo');
xlabel('tiempo');ylabel('Memristancia');
subplot(3,2,4);
plot(i,v,'-r');
title('Curva de histeresis');
xlabel('Corriente');ylabel('Tension aplicada');
subplot(3,2,5);
plot(t,solution);

```



```

title('Solucion aproximada, curva de carga vs tiempo');
xlabel('tiempo');ylabel('Carga');
subplot(3,2,6);
plot(solution,phi);
title('Flujo en funcion de la carga');
xlabel('carga');ylabel('Flujo');

```

Este es el archivo nombearchivo.m que se va a ejecutar desde octave, basta con escribir el nombre del archivo en octave. Luego se gráfica el archivo en gnuplot, ver segunda parte de los archivos. Solucion de la ecuacion diferencial de segundo orden generada por un circuito RLMC.

```

#clear all
#clc
f=0.5;
omega=125*pi*f;
#####
Vo=1;#Voltaje Pico
R=5.10; L=1e-3; C=1e-6;#valores
R1=0.1; R2=10;
##### circuito con memristor , definicion de la funcion memristor
memristor = @(x,t)[x(2),-(1/L)*(R+1+x(1)^2)*x(2)-x(1)*(1/(L*C))+Vo*sin(omega*t)];
##### definicion linea de tiempo
t = linspace(0,0.005,800); s=t';
#Senal de entrada
v=Vo*sin(omega*t);#*sin(omega*t);
##### Resuelve la ecuacion diferencial dy/dt=memristor, solucion de la ecuacion
y = lsode(memristor,[-0.1 0],t);
##### monto una matriz con la linea de tiempo y las dos columnas de salida
w=[s,y];
#####
##### circuito sin memristor
memristor1 = @(x,t)[x(2),-(1/(L))*(R)*x(2)-x(1)*(1/(L*C))+Vo*sin(omega*t)];
# solucion de la ec. con otro resistor
y1 = lsode(memristor1,[-0.1 0],t);
# matriz aumentada con las otras dos columnas solucion
w=[w,y1];
# Escribe en el archivo datos.dat,
#el dato w que en
#este caso es la matriz y ' ' deja el espacio entre columnas

```

```
dlmwrite('datos.dat',w,' ');
```

Graficando con gnuplot, se guarda en un archivo grafica.plt

el cual se carga en gnuplot y guarda la gr\'afica en por

ejemplo grafica.ps quedando lista para incluir en latex.

Carga los datos desde comparacion01.dat

u: using 1:2 w l es usando las columnas 1 y 2 del archivo.

```
set terminal postscript eps color enhanced
set title "Gr\'aficas comparativas de carga\
v=Vosin(omega t),Vo=1,R=0.1 L=1e-3 C=1e-3"
set xlabel "t"
set ylabel "q"
plot "comparacion01.dat" u 1:2 w l title "Circuito memristivo con resistencia",\
"comparacion01.dat" u 1:4 w l title "Circuito memristivo sin resistencia"
set grid
set output "grafica.ps"
replot
reset
```

Programa para hacer las gráficas características del memristor propuesto por Williams.

Intervalo de tiempo

```
n =500;
t=linspace(-1.25,1.25,n);
f=0.8;#Frecuencia de la senal de entrada
omega=2*pi*f;
D=10e-9;#Tamano del dispositivo
Ron=1e-6;#Ancho de la frontera dopada
Roff=20*Ron;#Ancho de la frontera no dopada
mud=10e-10;#Movilidad ionica
eta=1;#Polarizacion del dispositivo
Q0=D^2/(mud*Ron);#Constante asignada
w0=0.5*D;#Frontera inicial dopada
deltar=Roff-Ron;#Constante
RO=Roff*(1.-w0/D)+Ron*w0/D;#Resistencia inicial del dispositivo
Vo=1e-6;#Voltaje Pico
```

```

phi=-(Vo/omega)*cos(omega*t);#Flujo magn\`etico
q0=-1.6488e-02 ;#Carga inicial
t0=-1.25;#Tiempo inicial
Tend=1.25;#Tiempo final
v=Vo*sin(omega*t);#Senal de entrada
#####
#Definimos la funcion del memristor
function y=mem(q,t)
    eta=1; f=0.8; omega=2*pi*f;D=10e-9;
    Ron=1e-6; Roff=20*Ron; mud=10e-10;
    Q0=D^2/(mud*Ron);w0=0.5*D;
    R0=Roff*(1.-w0/D)+Ron*w0/D;
    deltar=Roff-Ron;
    #Senal de entrada
    #Amplitud de la onda de entrada
    Vo=1e-6;
    v=Vo*sin(omega*t);
    y=v./(R0-(eta*deltar/Q0)*q);
#fid=fopen('/home/john/Desktop/TESIS01/OCTAVE COMPLETO/
#MEMRISTOR01/aproximacion.txt','w');
#fprintf(fid,'%6.2f %12.8f\n',y);
#fclose(fid);
endfunction
#####
#Solucion de la ecuacion
#####
T=linspace(t0,Tend,n);#eje de tiempo
solution=lsode('mem',q0,T);#Solucion usando lsode
#Calcula la memristancia
for i=1:300
    m = R0-eta*deltar/Q0*solution;
endfor
#Hallar la corriente
mem=1./m;
i=v.*mem';
s=T';
w=[s,i];
#Escribe en el archivo datos.dat,
#el dato w que en este caso es la matriz y
#' ' deja el espacio entre columnas

```

```

dlmwrite('datos.dat',w,' ');
##### Graficas
subplot(3,2,1);
plot(t,v);
xlabel('tiempo');ylabel('Tension aplicada');
title('Tension aplicada');
subplot(3,2,2);
plot(t,i,'r','linewidth',3);
title('Grafica de la corriente');
xlabel('tiempo');ylabel('Corriente');
subplot(3,2,3);
plot(t,mem,'r','linewidth',5);
title('Curva de memristancia en funcion del tiempo');
xlabel('tiempo');ylabel('Memristancia');
subplot(3,2,4);
plot(i,v,'-r');
title('Curva de histeresis');
xlabel('Corriente');ylabel('Tension aplicada');
subplot(3,2,5);
plot(t,solution);
title('Solucion aproximada, curva de carga vs tiempo');
xlabel('tiempo');ylabel('Carga');
subplot(3,2,6);
plot(solution,phi);
title('Flujo en funcion de la carga');
xlabel('carga');ylabel('Flujo');

```

GNUPLOT

```

set terminal postscript eps color enhanced
set title "Graficas comparativas de carga\
v=Vosin(omega t),Vo=1,R=0.1 L=1e-3 C=1e-3"
set xlabel "t"
set ylabel "q"
plot "comparacion01.dat" u 1:2 w l title "Circuito memristivo con resistencia",\
"comparacion01.dat" u 1:4 w l title "Circuito memristivo sin resistencia"
set grid
set output "grafica.ps"
replot
reset

```

Con el siguiente código se resuelve el circuito memristor con los parámetros establecidos, se almacena en la variable **memristor**, luego se define la línea de tiempo con el comando **linspace** y se almacena en la variable **t**, se resuelve la ecuación utilizando el comando **lsode** y se almacena en la variable **y**. En **w** se almacena un vector con el tiempo y las respuestas para **y** y **y'**, finalmente se almacenan la variable **w** en el archivo de datos con el comando **dlmwrite** para graficarlo en gnuplot. El código completo se muestra a continuación.

```
#clear all
#clc
f=0.5;
omega=125*pi*f;
#####
Vo=0;#Voltaje Pico
R=0.50; L=1e-3; C=1e-3;#valores
R1=0.1; R2=10;
##### circuito con memristor
memristor = @(x,t)[x(2),-(1/L)*(R+1+x(1)^2)*x(2)-x(1)*(1/(L*C))+Vo*sin(omega*t)];
##### definicion linea de tiempo
t = linspace(0,0.03,800); s=t';
v=Vo*sin(omega*t);#*sin(omega*t);#Senal de entrada
##### solucion de la ecuacion con memristor
y = lsode(memristor,[-0.1 0],t);
##### monto una matriz con la linea de tiempo y las dos columnas de salida
w=[s,y];
#####
##### circuito sin memristor
memristor1 = @(x,t)[x(2),-(1/(L))*(R)*x(2)-x(1)*(1/(L*C))+Vo*sin(omega*t)];
##### solucion de la ec. con otro resistor
y1 = lsode(memristor1,[-0.1 0],t);
##### aumento la matriz con las otras dos columnas solucion
w=[w,y1];
##### Escribe en el archivo grafica01.dat, el dato w
#####que en este caso es la matriz y ' ' deja el espacio entre columnas
dlmwrite('grafica01.dat',w,' ');
##### Hace dos graficas, t vs q y t vs qsin mem
#plot(t,y(:,1),t,y1(:,1)); legend('con','sin')
##### Grafica de q vs qpunto
#figure #abre otra ventana grafica
#plot(y(:,1),y(:,2))
```

C. Redes Resistivas

Una red resistiva se puede definir como aquella red que contiene sólo elementos pasivos, es decir que no contiene elementos dinámicos, según Chua [37] una red resistiva involucra elementos pasivos cuyas relaciones constitutivas no involucran derivadas que dependan del tiempo, integrales temporales o ecuaciones con retardo, etc. Es decir las relaciones constitutivas solamente deben considerar tensiones y corrientes en los mismos instantes de tiempo. En general los circuitos físicos son la interconexión de elementos de circuitos reales, para efectos del análisis cada dispositivo es reemplazado por un modelo hecho con elementos ideales (fuentes, transistores, diodos, etc). La interconexión teórica de estos elementos produce un circuito eléctrico. Es necesario tener en cuenta que un circuito físico nunca podrá ser modelado totalmente por circuitos resistivos, pero sirven como construcciones auxiliares para realizar los análisis. Entre otros aspectos se utilizan para determinar puntos de operación DC, puntos de equilibrio, síntesis de circuitos, etc.

Se presentan algunos métodos de solución tratados en el libro [37] para resolver circuitos resistivos lineales y no-lineales, luego de lo cual se revisarán algunas técnicas para resolver circuitos no-lineales.

En general los elementos resistivos se clasifican como lineales, no-lineales, invariantes en el tiempo y variantes en el tiempo, y se caracterizan por una relación lineal entre la tensión y la corriente, se habla de la característica $v - i$ del resistor.

Un elemento se llama **resistor** si satisface la relación llamada curva característica del resistor y se puede graficar bien sea en el plano $v - i$ o en el plano $i - v$

$$\mathbf{R}_R = (v, i) : f(v, i) = 0 \tag{C-1}$$

Ésta relación especifica completamente al dispositivo¹.

Resistor Lineal

Un resistor se llama lineal si satisface que

$$\begin{aligned} f(v, i) &= v - Ri = 0 \\ \rightarrow v &= Ri \end{aligned}$$

Gráficamente es una línea recta y R el valor de la resistencia, representa el valor de la pendiente (mostrado en una sección anterior), en un punto de operación particular. Un resistor que no sea lineal se denominará no-lineal.

¹Es de aclarar que $v = v(t)$ es la tensión en el dispositivo en el instante t , e $i = i(t)$ es la corriente que cruza el resistor en cualquier instante

Resistor Pasivo

En general la potencia entregada a un elemento cuya tensión es $v(t)$ y cuya corriente es $i(t)$ está dada por

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (\text{C-2})$$

Para un resistor lineal cuya característica sea $v = Ri$ la potencia entregada será

$$p(t) = Ri^2(t) \quad (\text{C-3})$$

y será siempre positiva si el resistor es lineal y $R \geq 0$. Se dice que un resistor es pasivo si y solo si, su resistencia es no negativa, razón por la cual el resistor siempre absorberá energía del balance del circuito. Por otra parte, si $R \leq 0$ el resistor la potencia que fluye a través del resistor es negativa lo que quiere decir que está entregando energía al circuito, se dirá que el resistor es *Resistor Activo*, gráficamente se puede ver que es una línea recta de pendiente negativa.

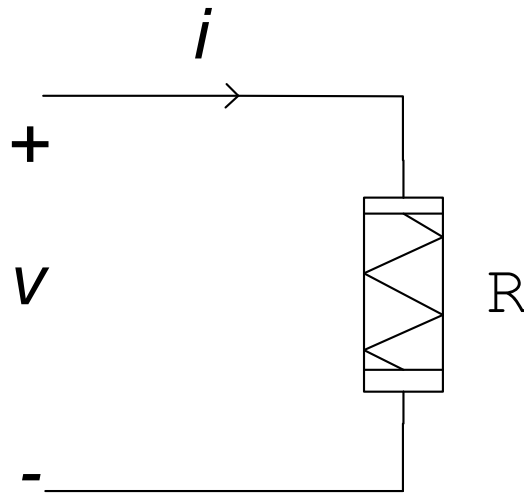


Figura C-1.: Representación del resistor no lineal

Un resistor se dice pasivo si la característica $v - i$ está confinada al primer y tercer cuadrante, y un resistor se dice activo si no es pasivo. De la misma forma un resistor que no sea lineal se llamará no-lineal.

Resistores variantes e invariantes en el tiempo

Un resistor se dice variable en el tiempo si y solo si su característica $v - i$ varía en el tiempo, de otra manera se dice que es invariante en el tiempo. Un resistor que sea lineal variable en el tiempo, satisface

$$v(t) = R(t)i(t) \quad (\text{C-4})$$

Un ejemplo de él es un switch de operación periódica [37].

D. Circuitos de segundo orden

En ésta sección se hará una presentación semejante a la que se presenta en [37]. Los circuitos que involucran dos capacitores, o dos inductores, o un capacitor y un inductor se denominan circuitos de segundo orden. Se pretende hacer diversos análisis con circuitos que incluyan memristores. Para un circuito de segundo orden construido con elementos lineales variables en el tiempo la ecuación diferencial escalar que lo modela se puede escribir como:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2x = u(t) \quad (\text{D-1})$$

Donde α se denomina constante de amortiguamiento y corresponde a $\omega_0 = 2\pi f$ es la frecuencia angular (en radianes por segundo) y f es la frecuencia medida en Hertz. Y sus ecuaciones de estado se pueden escribir en la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{u}(t)$, donde x_1 y x_2 son llamadas variables de estado del sistema, el vector \mathbf{x} representa el vector de estado, el vector $\mathbf{u}(t)$ es llamado el vector de entrada y la matriz \mathbf{A} corresponde a la matriz del sistema.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{D-2})$$

Es necesario reducir la ecuación (D-2) a la forma (D-1), lo cual se hace de la siguiente forma:

$$\ddot{x}_1 - T\dot{x}_1 + \Delta x_1 = u_a(t), \text{ si } a_{12} \neq 0 \quad (\text{D-3})$$

$$\ddot{x}_2 - T\dot{x}_2 + \Delta x_2 = u_b(t), \text{ si } a_{21} \neq 0 \quad (\text{D-4})$$

$$T = (a_{11} + a_{22}) \quad (\text{D-5})$$

$$\Delta = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \quad (\text{D-6})$$

$$u_a(t) = -a_{22}u_1(t) + a_{12}u_2(t) + \dot{u}_1(t) \quad (\text{D-7})$$

$$u_b(t) = a_{21}u_1(t) - a_{11}u_2(t) + \dot{u}_2(t) \quad (\text{D-8})$$

De donde se puede concluir que:

$$2\alpha = -T = -(a_{11} + a_{22}) \quad (\text{D-9})$$

$$\omega_0^2 = \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (\text{D-10})$$

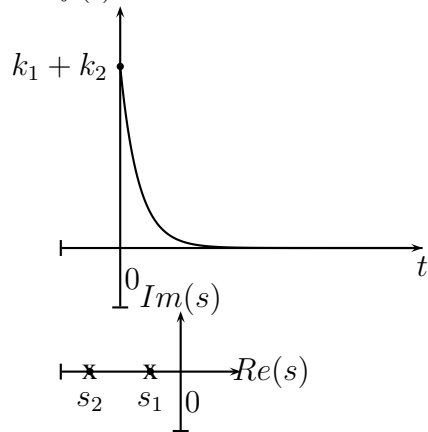
Cuando el circuito es no lineal, en ocasiones puede ser muy complejo escribir una ecuación diferencial escalar, lo que en general se puede hacer es escribirla de la siguiente forma

Tabla D-1.: Respuesta de entrada cero de $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2x = 0$, $\alpha \geq 0$, $\omega_0^2 > 0$

1. Respuesta Sobre Amortiguada

$$(\alpha > \omega_0 > 0)$$

$$f(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

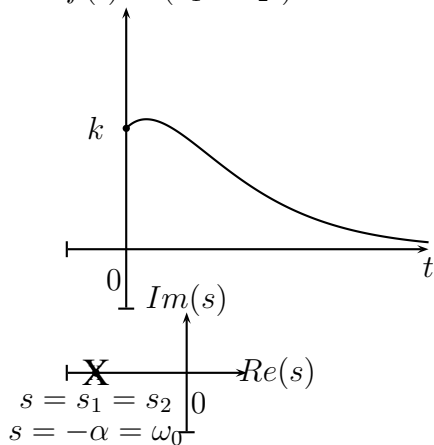


$$s_1 = -\alpha - \alpha_d$$

$$s_2 = -\alpha + \alpha_d$$

3. Respuesta Críticamente Amortiguada ($\alpha = \omega_0 > 0$)

$$f(t) = (k_1 + k_2 t) e^{-\alpha t}$$



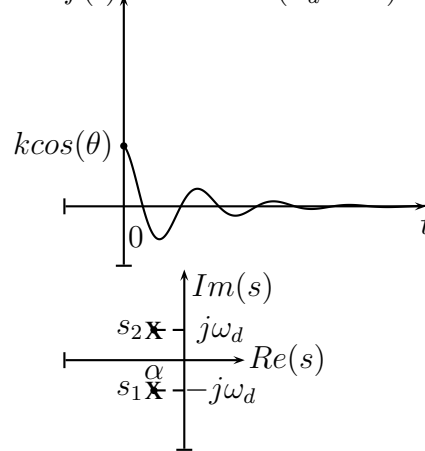
$$s = s_1 = s_2$$

$$s = -\alpha = \omega_0$$

2. Respuesta Subamortiguada

$$(0 < \alpha < \omega_0)$$

$$f(t) = k e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \theta)$$



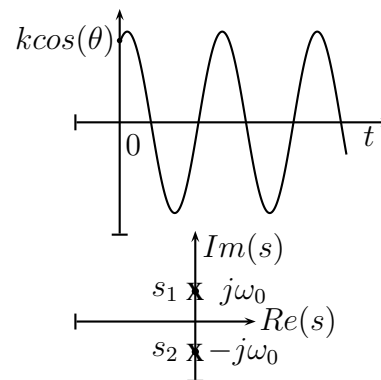
$$s_1 = -\alpha + j\omega_d$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

4. Respuesta Sin Amortiguamiento

$$(\alpha = 0, \omega_0 > 0)$$

$$f(t) = k \cos(\omega_0 t - \theta)$$



$$s_1 = j\omega_0$$

$$s_2 = -j\omega_0$$

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, t) \end{aligned} \tag{D-11}$$

Respuesta de entrada cero

Cuando a la ecuación (D-1) sin fuentes externas, se dice que se estudiará la respuesta natural del circuito y resulta ser de la forma:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{D-12}$$

Con parámetro $\alpha \geq 0$, el método para resolverla es utilizando la ecuación característica o polinomio $p(s) = s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2$, cuyas raíces son

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \begin{cases} -\alpha \pm \alpha_d & \text{si } \alpha > \omega_0 > 0 \\ -\alpha \pm j\omega_d & \text{si } 0 < \alpha < \omega_0 \\ -\alpha & \text{si } \alpha = \omega_0 > 0 \end{cases} \tag{D-13}$$

Donde

$$\alpha_d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \tag{D-14}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \tag{D-15}$$

Son muy conocidas las respuestas a estos circuitos para las diferentes posibilidades de respuestas las cuales se muestran en la tabla (D-1). En todos los casos se analiza el circuito es *RLC* sin fuentes. Para nuestro caso analizaremos un circuito *RLC* en serie con un elemento no lineal tipo memristor.

E. Artículos publicados

Se publicaron dos artículos con base en los resultados obtenidos durante el desarrollo de la tesis; El primer evento fue El encuentro nacional de Investigadores, ENID 2011 con el artículo titulado "Introducción al memristor: La nueva era de la electrónica".

El otro evento es el Tercer encuentro de micro y nanotecnología llevado a cabo en el 2011, en el cual se presentó el artículo titulado "Un análisis del memristor como elemento análogo". Se adjuntan los dos artículos.

Bibliografía

- [1] L.O. Chua, "Memristor: the missing circuit element", IEEE Trans. Circuit Theory, 18, 507-519, 1971.
- [2] L.O. Chua, S.M. Kang, "Memristive devices and systems", Proc. IEEE, 64 (2), 209-223, 1976.
- [3] D.B.Strukov, G.S.Snider, D.R.Stewart,and R.S.Williams, "The missing memristor found," Nature(London) 453, 80-83, 2008.
- [4] D.B. Strukov, R.S. Williams, "Exponential ionic drift: fast switching and low volatility of thin film memristors," Applied Physics A, pp. 515 – 519, 2009.
- [5] Pershin,Yu V. and Di Ventra,M., "Spin memristive systems: Spin memory effects in semiconductor spintronics", Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics, Volume 78, Number 11, 2008.
- [6] S.P. Kosta, Y.P. Kosta, Mukta Bhatele, Y.M. Dubey, Avinash Gaur, Shakti Kosta, Jyoti Gupta, Amit Patel, Bhavin Patel, "Human blood liquid memristor", International Journal of Medical Engineering and Informatics, Vol. 3, No.1 pp. 16 - 29, 2011.
- [7] Q. Lai, L. Zhang, Z. Li, W. F. Stickle, R. S. Williams and Y. Chen, "Ionic/Electronic Hybrid Materials in a Synaptic Transistor with Signal Processing and Learning Functions," Adv. Mats. 22, 2248, 2010.
- [8] Di Ventra, M.; Pershin, Y.V.; Chua, L.O., "Circuit Elements With Memory: Memristors, Memcapacitors, and Meminductors," Proceedings of the IEEE , vol.97, no.10, pp.1717,1724, Oct. 2009
- [9] "Memristor and Memristive Symposium", November 21, 2008. <http://www.youtube.com/watch?v=QFdDPzcZwbs>, consultado por última vez Febrero de 2014.
- [10] Tezaswi Raja, Samiha Mourad, "Digital Logic Implementation in Memristor-Based Crossbars - A Tutorial," delta, pp.303-309, 2010 Fifth IEEE International Symposium on Electronic Design, Test & Applications, 2010.

-
- [11] Raja, T.; Mourad, S.; , "Digital logic implementation in memristor-based crossbars," *Communications, Circuits and Systems*, pp. 939 – 943, 23 – 25 July 2009.
- [12] Corinto, F.; Ascoli, A.; Gilli, M., "A novel elementary memristive system," *VLSI and System-on-Chip (VLSI-SoC)*, 2012 IEEE/IFIP 20th International Conference on , vol., no., pp.76,81, 7-10 Oct. 2012.
- [13] L.O. Chua, "Resistance switching memories are memristors", *Applied Physics A, Materials Science and Processing*, 765-783, 2011.
- [14] Pershin, Y.V.; DiVentra, M. "Memory effects in complex materials and nanoscale systems", *ArXiv* 60 (2): 145, 2011.
- [15] Sung Hyun Jo; Kuk-Hwan Kim; Ting Chang; Gaba, S.; Wei Lu; , "Si Memristive devices applied to memory and neuromorphic circuits," *Circuits and Systems (ISCAS)*, *Proceedings of 2010 IEEE International Symposium on*. pp. 13 – 16, 2010.
- [16] Yuriy V. Pershin, Massimiliano Di Ventra, "Memory effects in complex materials and nanoscale systems", *Advances in Physics*, Vol. 60, Iss. 2, 2011.
- [17] F. Z. Wang, N. Helian, S. Wu, M.-G. Lim, Y. Guo, M. A. Parker, "Delayed Switching in Memristors and Memristive Systems," *IEEE Electron Device Letters*, vol.31, no.7, pp.755-757, July 2010.
- [18] Valsa, Juraj.,Biolek, Dalibor.,Biolek, Zdenek.,"An analogue model of the memristor",*John Wiley & Sons, Ltd*, 2011.
- [19] M. Sapoff and R. M. Oppenheim, "Theory and application of self-heated thermistors," *Proc. IEEE*, vol. 51, pp. 1292-1305, 1963.
- [20] T. Prodromakis and C. Toumazou, "A Review on Memristive Devices and Applications," *IEEE International Conference on Electronics, Circuits, and Systems*, Dec 2010.
- [21] Snider, Greg; Amerson, Rick; Carter, Dick; Abdalla, Hisham; MuhammadShakeel, Qureshi; Leveille, Jasmin; Amerson, Rick; Versace, Massimiliano et al, "From Synapses to Circuitry: Using Memristive Memory to Explore the Electronic Brain", *IEEE Computer* 44: 21-28, 2011.
- [22] Pershin Y.V., Di Ventra M.,"Memristive circuits simulate memcapacitors and meminductors",*"Electron. Lett."*, 2010.
- [23] O. Kavehei, A. Iqabal, Y. S. Kimi, K. Eshraghian , S. F. Al-Sarawi, "The Fourth Element: Characteristics, Modeling and Electromagnetic Theory of the Memristor", *arXiv:1002.2310v1*, 2010.

-
- [24] Radwan, A.G.; Zidan, M.A.; Salama, K.N., "HP Memristor mathematical model for periodic signals and DC," *Circuits and Systems (MWSCAS)*, 2010 53rd IEEE International Midwest Symposium, pp.861,864, 1-4 Aug. 2010
- [25] Elgabra, H.; Farhat, I.A.H.; Hosani, A.S.A.; Homouz, D.; Mohammad, B., "Mathematical modeling of a memristor device," *Innovations in Information Technology (IIT)*, 2012 International Conference, pp.156,161, 18-20 March 2012
- [26] K. Kerur, "A Study of The Memristor, the Fourth Circuit Element," An M.Sc. Thesis, Kansas State University, Manhattan, Kansas, 2010.
- [27] Z. Biolek, D. Biolek, V. Biolkova, "Spice model of memristor with nonlinear dopant drift", *Radioengineering*, 2009.
- [28] D. Biolek, Z. Biolek, V. Biolkok, "PSPICE modeling of meminductor," *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, Springer Netherlands, 2010.
- [29] Biolek, D.; Bajer, J.; Biolkova, V.; Kolka, Z., "Mutators for transforming nonlinear resistor into memristor," *Circuit Theory and Design (ECCTD)*, 2011 20th European Conference on , pp.488,491, 29-31 Aug. 2011
- [30] Benderli, S., Wey, T.A., "On SPICE macromodelling of TiO₂ memristors," *Electronics Letters*, vol.45, no.7, pp.377-379, March 26 2009.
- [31] Yu Zhang, Xuliang Zhang, Juebang Yu , "Approximated SPICE model for memristor," *International Conference on Communications, Circuits and Systems*, 2009. ICCCAS 2009, pp.928-931, 23-25 July 2009.
- [32] Rak, A., Csereny, G., "Macromodeling of the Memristor in SPICE," *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, vol.29, no.4, pp.632-636, April 2010.
- [33] Mahvash, M., Parker, A.C. , "A memristor SPICE model for designing memristor circuits," 2010 53rd IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS), pp.989-992, 1-4 Aug. 2010.
- [34] Batas, D.; Fiedler, H., "A Memristor SPICE Implementation and a New Approach for Magnetic Flux-Controlled Memristor Modeling," *Nanotechnology*, *IEEE Transactions on* , vol.10, no.2, pp.250,255, March 2011.
- [35] Mohammad Mahvash, Alice C. Parker, "A Memristor SPICE Model for Designing Memristor Circuits," *Circuits and Systems (MWSCAS)*, 2010 53rd IEEE International Midwest Symposium, pp. 989-992, 2010.

- [36] H. Yu, W. Fei, "A New Modified Nodal Analysis for Nano-Scale Memristor Circuit Simulation," Proceedings of 2010 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), pp. 3148-3151, 2010.
- [37] Chua, L. O., C. A. Desoer, E. S. Kuh., "Linear and Nonlinear Circuits". McGraw-Hill Book Company, New York, XVII, 839 S., DM 122,40. ISBN 0-07-010898-6, 1987.
- [38] Agarwal, Anant and Lang, Jeffrey. "Foundations of Analog and Digital Electronic Circuits". The Morgan Kaufmann Series in Computer Architecture and Design, ISBN 1558607358, 2005.
- [39] Burden Richard y Faires D. "Análisis Numérico". Sexta edición. México International Thompson Editores, 2001.
- [40] Domine Leenaerts, Wim M.G. van Bokhoven. "Piecewise Linear Modeling and Analysis". Springer, 208. 1998.
- [41] Yuan F., Raahemifar K., Mohammadi F.A." Efficient transient analysis of nonlinear circuits using volterra series and piecewise constant interpolation", Proceedings - IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 3, pp. 819-822, 2001.
- [42] Herdem S., Koksall M. "A fast algorithm to compute the steady-state solution of nonlinear circuits by piecewise linearization", Computers and Electrical Engineering, 28 (2), pp. 91-101, 2002.
- [43] D. Wang, Z. Hu, X. Yu, J. Yu , "A PWL model of memristor and its application example," International Conference on Communications, Circuits and Systems (ICCCAS 2009) , pp.932-934, 23-25 July 2009.
- [44] D. Wang, Z. Hu, X. Yu, and J. Yu, "A PWL model of memristor and its application example," in International Conference on Communications, Circuits and Systems (ICCCAS), pp. 932-934, 2009.
- [45] Vats V.B., Parthasarathy H." Parameter estimation for time varying nonlinear circuit from state analysis and simulation", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 13 (4), pp. 839-846, 2008.
- [46] Chua Leon O., "Device Modeling via basic nonlinear circuit elements".IEEE transactions on circuits and systems, CAS-27 (11), pp. 1014-1044, 1980.
- [47] Khalil, H.K. "Nonlinear Systems". Macmillan Publishing, New York, 1992.
- [48] Santos Bravo Yuste. "Métodos matemáticos avanzados para científicos e ingenieros". Universidad de Extremadura, 2006.

-
- [49] Delgado, A., "The memristor as controller," Nanotechnology Materials and Devices Conference (NMDC), 2010 IEEE , pp.376,379, 12-15 Oct. 2010.
- [50] Delgado, A., "Input - Output linearization of memristive systems," Nanotechnology Materials and Devices Conference, 2009. NMDC '09. IEEE , pp.154,157, 2-5 June 2009.
- [51] E. Pukhov, "Differential transformations and circuit theory", Circuit theory and applications, Vol 10, pp. 265-276, 1982.
- [52] Koksál M., Herdem S." Analysis of nonlinear circuits by using differential Taylor transform", Computers and Electrical Engineering, 28 (6), pp. 513-525, 2002.
- [53] Stukach, O.V., "Use of Differential-Taylor Transformation in problems of characterization of the nonlinear amplifier," Computational Technologies in Electrical and Electronics Engineering, 2008. SIBIRCON 2008. IEEE Region 8 International Conference on, pp.343,346, 21-25 July 2008.
- [54] Bickerstaff, K.; Swartzlander, E.E.; , "Memristor-based arithmetic," Signals, Systems and Computers (ASILOMAR), 2010 Conference Record of the Forty Fourth Asilomar Conference on, pp. 1173 – 1177, 2010.
- [55] Yogesh N. Joglekar and Stephen J. Wolf. "The elusive memristor: properties of basic electrical circuits". J. Phys. 30-661, 2009.
- [56] R. Sasse, A. Domhardt, M. Reinhard, "Calculation of Electrical Circuits with Fractional Characteristics of Construction Elements," Forschung im Ingenieurwesen, Vol. 69, Number 4, pp. 230-235, 2005.
- [57] Chua Leon O. "Qualitative analysis of 1st-and 2nd-order nonlinear networks", 118, 19-28, 1971.
- [58] E. Lehtonen, M. Laiho, "CNN Using Memristors for Neighborhood Connections," 12th International Workshop on Cellular Nanoscale Networks and their Applications (CNNA) 2010, pp. 1-4, 2010.
- [59] R. Riaza, "Dynamical Properties of Electrical Circuits with Fully Nonlinear Memristors," arXiv:1008.2528.v1, 2010.
- [60] G. Oster, "A note on memristors," IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol.21, no.1, pp. 152, Jan 1974.
- [61] Borghetti, J., Li, Z., Straznický, J., Li, X., Ohlberg, D. A. A., Wu, W., Stewart, D. R., Williams, R. S.: "A hybrid nanomemristor/transistor logic circuit capable of self-programming". Proceedings of the National Academy of Sciences 106(6), 1699-1703, 2009.

- [62] Ruiz P., Gutierrez J.M., Guemez J. "Experimental mastering of nonlinear dynamics in circuits by sporadic pulses", *Chaos, Solitons and Fractals*, 36 (3), pp. 635-645, 2008.
- [63] E. Gluskin, "On the mathematical representation of nonlinearity", manuscript, arXiv:0807.0966v2, 2008
- [64] Pershin Y.V., Di Ventra M., "Experimental demonstration of associative memory with memristive neural networks", *Neural Networks*, Volume 23, Issue 7, pp. 881-886, September 2010.
- [65] Wang J., Duan Z., Huang L. "Dichotomy of nonlinear systems: Application to chaos control of nonlinear electronic circuit", *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 351 (3), pp. 143-152, 2006.
- [66] B. Widrow, "An adaptive ADALINE neuron using chemical memistors," Stanford Electronics Laboratories, Tech. Rep. 1553 – 2, 1960.
- [67] Chua Leon O., Thiran Patrick., "An analytic method for designing simple cellular neural networks", *IEEE transactions on circuits and systems*, 38 (11), pp. 1332-1341, 1991.
- [68] Alexander A. Zakhidov, Byungki Jung, Jason D. Slinker, Héctor D. Abruña, George G. Malliaras, "A light-emitting memristor", *Organic Electronics* 11 150, 2010.
- [69] Versace, M.; Chandler, B., "The brain of a new machine," *Spectrum, IEEE* , vol.47, no.12, pp.30,37, December 2010
- [70] Y. Chen, X. Wang, "Compact modeling and corner analysis of spintronic memristor", *IEEE/ACM, NANOARCH 2009*, p.7-12, 2009.
- [71] McDonald, N.R.; Pino, R.E.; Rozwood, P.J.; Wysocki, B.T., "Analysis of dynamic linear and non-linear memristor device models for emerging neuromorphic computing hardware design," *Neural Networks (IJCNN), The 2010 International Joint Conference on* , vol., no., pp.1,5, 18-23 July 2010
- [72] B. Mouttet, "A Memadmittance Systems Model for Thin Film Memory Materials," arXiv:1003.2842.v1, 2010.
- [73] P.S. Georgiou, S. Yaliraki, M. Barahona, E.M. Drakakis, "Quantitative Measure of Hysteresis for Bernoulli Memristors," arXiv:1011.0060v1, 2010.
- [74] Sangho Shin, Kyungmin Kim, and Sung-Mo Kang, "Data-Dependent Statistical Memory Model for Passive Array of Memristive Devices," *IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS, EXPRESS BRIEFS*, Vol. 57, No. 12, December 2010.

-
- [75] Chen, M.Z.Q., Papageorgiou, C., Scheibe, F., Fu-cheng Wang., Smith, M.C., "The missing mechanical circuit element," *Circuits and Systems Magazine, IEEE* , vol.9, no.1, pp.10,26, First Quarter 2009.
- [76] S. Shin, K. Kim, S.-M. Kang , "Compact Models for Memristors Based on Charge-Flux Constitutive Relationships," *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, vol.29, no.4, pp.590-598, April 2010.
- [77] O. Bichler, W. Zhao, C. Gamrat, F. Alibart, S. Pleutin, D. Vuillaume, "Development of a Functional Model for the Nanoparticle-Organic Memory Transistor," *Proceedings of 2010 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, pp.1663-1666, May 30 2010-June 2 2010.
- [78] B. Mouttet, "A Memadmittance Systems Model for Thin Film Memory Materials," arXiv:1003.2842.v1, 2010.
- [79] <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/25082>
- [80] <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/unidades/unidades/unidades.htm>
- [81] <http://es.wikipedia.org/wiki/Amperio>