



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Minimización de costos del control de contaminación del aire en un espacio tridimensional

Alirio Gómez Gómez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2012

Minimización de costos del control de contaminación del aire en un espacio tridimensional

Alirio Gómez Gómez

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias - Matemática Aplicada

Directora:
Ph.D. Alina Fedossova

Línea de Investigación:
Optimización

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2013

Dedicatoria

A la memoria de mi padre, José Martín.

A mi madre, que renuncio a todos sus sueños para que los míos tuvieran mayor probabilidad de hacerse realidad.

Agradecimientos

A mi directora de tesis, Alina Fedosova, por sus valiosas sugerencias, su enorme paciencia y todo el tiempo dedicado a este trabajo.

A Mauricio Ruíz por sus sugerencias.

A la Universidad Nacional de Colombia, por abrirme sus puertas.

A mi madre, Rosenda, y mis hermanas, Flor y Martha, por su apoyo incondicional.

Resumen

En este trabajo se resuelve el problema de minimización de costos del control de contaminación del aire en una región tridimensional en la que existen varias fuentes del contaminante. El problema es planteado como un problema de programación semi-infinita y se implementa una versión del método de aproximaciones estocásticas externas de Volkov-Zavriev para su solución. La concentración del contaminante en cada punto de la región es obtenida a partir de un modelo Gaussiano.

Palabras clave: Optimización semi-infinita, Método de intercambio, Método estocástico de aproximaciones externas, Modelo Gaussiano, Problema de contaminación del aire.

Title: Minimization of cost of air pollution control in a three-dimensional space

Abstract

In this work cost control pollution minimization problem is solved in a tridimensional region where there are several sources. Problem is posed as a Semi-infinite programming problem which is solved using a version of the stochastic outer approximation Method created by Volkov-Zavriev. Gaussian Model has been used to compute concentration of pollutant.

Keywords: Semi-infinite programming, Exchange method, Outer stochastic outer approximation Method, Gaussian Model, Air pollution problem.

Contenido

Agradecimientos	VII
Resumen	IX
Introducción	XIII
1. Preliminares	1
1.1. Programación semi-infinita	1
1.1.1. Problema de programación semi-infinita	1
1.2. Métodos numéricos para optimización semi-infinita	2
1.2.1. Métodos basados en reducción local	3
1.2.2. Métodos de discretización	3
1.2.3. Métodos de intercambio	7
1.3. Dispersión atmosférica, transporte y meteorología.	9
1.3.1. Radiación solar	10
1.3.2. Circulación del viento	10
1.3.3. Estabilidad atmosférica	12
2. Caso Bidimensional y Método estocástico de aproximaciones externas	14
2.1. Caso Bidimensional	14
2.2. Método estocástico de aproximaciones externas	17
3. El problema de minimización de costos del control de contaminación del aire en un espacio tridimensional	21
3.1. Modelo Matemático para el problema: caso tridimensional	21
3.1.1. Variables de decisión y función objetivo	21
3.1.2. Modelo para la concentración del contaminante	22
3.2. Formulación del problema	27
3.2.1. Reflejo del contaminante debido al choque con el piso	28
3.3. Un caso particular	29
3.4. Algoritmo para resolver el problema de minimización de costos del control de contaminación del aire en una región tridimensional	30

4. Resultados numéricos	33
4.1. Caso: $\Omega = [0, 20000] \times [0, 20000] \times [0, 100]$ con reflejo.	34
4.2. Caso: $\Omega = [0, 40000] \times [0, 40000]$, sobre la superficie	36
5. Conclusiones y Trabajo Futuro	39
5.1. Conclusiones	39
5.2. Trabajo Futuro	40
A. Anexo: Programa: Versión del método de aproximaciones externas	41
B. Parámetros para las restricciones para el problema que aproxima la solución de caso Ω_1 Reflejo	44
Bibliografía	45

Introducción

El crecimiento de las áreas urbanas y el desarrollo industrial de algunos países ha provocado problemáticas ambientales. Los efectos que genera la contaminación del aire van desde la modificación de las estructuras arquitectónicas, hasta el aumento de los problemas respiratorios en los habitantes de las regiones donde se presenta el fenómeno.



Figura 0-1.: Piedra tallada en la Torre de Londres. Fuente [17], Fotografía: Carlota Grossi.

Un ejemplo del primer caso es la alteración del color de la torre de Londres, generado por el dióxido de carbono que se ha acumulado, dejando en color negro la mayor parte de su superficie, como se puede ver en la figura **0-1**. Antecedentes de los efectos negativos sobre la salud son registrados con frecuencia en los medios de comunicación (ver **0-2**) y han provocado el establecimiento de normas ambientales en algunas ciudades para regular la cantidad máxima de concentración de compuestos químicos reconocidos como contaminantes.

A pesar que existen antecedentes de este tipo de normas, como una ley promulgada por el gobierno inglés en 1273 para reducir la contaminación de aire procedente de la combustión del carbón bituminoso [27]; legislación sobre este tema sólo se desarrolló hasta 1972 en algunos estados en Norteamérica como California, que por esa época era altamente afectado por el “neblumo”¹ que cubría gran parte de la ciudad de Los Ángeles, ver figura **0-3**.

¹Término adaptado como resultado de fusionar niebla-humo



Figura 0-2.: Titulares problemática ambiental.

La eficacia de las medidas que se adoptan para controlar la contaminación, depende de la exactitud con que se estime la concentración del contaminante en cada punto de la región. Estas estimaciones se derivan de patrones de transporte incorporados a modelos matemáticos que apuntan a describir el fenómeno incluyendo un análisis de factores y causas (fuentes de emisión , procesos meteorológicos, deposición) lo mejor posible.

Los modelos matemáticos, además de aportar información que permita controlar la cantidad de emisión de contaminantes y la ubicación de las fuentes, pueden estimar las consecuencias de futuros escenarios y periódicamente optimizar estos datos, en el marco de la región para adopción operacional de medidas, e incluso determinar la efectividad de otras estrategias de control de contaminación.

El objetivo de este trabajo es determinar la disminución de contaminación que es necesaria en una región tridimensional, para cumplir con los requerimientos legales de manera que el costo de llevar a cabo tal operación sea mínimo. El problema es planteado como un problema de programación semi-infinita (SIP), en el que cada restricción se deriva de la condición impuesta por la norma sobre la concentración de la contaminación en cada punto.

El término “semi-infinito” hace referencia a que el problema involucra un número finito de variables (en este caso los factores de reducción), pero un número infinito de restricciones, una por cada punto de la región.



Figura 0-3.: Episodio de neblumo en los Ángeles,1972. Fuente: Documerica, US Environmental Protection Agency. Photo Gallery; Fotógrafo: Gene Daniels.

En el modelo se supone que la función de costo (función objetivo) es lineal o convexa y que la concentración es resultado de la acumulación de las contribuciones individuales de cada fuente. El algoritmo usado para resolver el problema SIP es una versión del método estocástico de aproximaciones externas [6, 24], que aproxima el problema original por problemas con un número finito de restricciones, obtenidas a partir de esquemas de búsqueda estocástica.

En este trabajo se usa un modelo Gaussiano para calcular la concentración, es decir se supone que en cada fuente la dispersión de la pluma tiene una distribución Gaussiana y por tanto es determinada por las desviación estándar en el plano vertical y horizontal. Estos parámetros son estimados en función de la distancia a la fuente en la dirección del viento, a partir de resultados experimentales presentados gráficamente por Pasquill, Gifford y Turner, en [18, 21].

Estado del Arte

Existen diferentes modelos que permiten estimar la concentración de la contaminación: *Mode-*

los de Caja, Lagrangianos, Computacionales de fluido dinámico y Gaussianos. Estos modelos en general incorporan parámetros que tienen en cuenta el movimiento medio general del aire que transporta el contaminante en la dirección del viento; las fluctuaciones turbulentas de la velocidad que lo dispersan en todas las direcciones y la difusión de la masa debido al gradiente de la contaminación. El modelo Gaussiano en particular supone el conocimiento de la elevación de la pluma y de la dispersión del contaminante en el plano vertical y horizontal que dependen de las condiciones atmosféricas y la velocidad media del fluido.

El estudio de la difusión (movimiento turbulento) comenzó con los trabajos de Taylor (1915,1921) en un estudio sistemático de la mezcla vertical en la atmósfera baja. En los años subsiguientes, los trabajos de Sutton en 1932 y Bosanquet en 1936 (ver [1, 20]) permitieron la comprensión de las propiedades de difusión de las plumas emitidas por fuentes con una altura significativa, sin embargo es la década del 60 tal vez la más productiva en esta área, como lo demuestran los trabajos de Turner (1964) en [21] sobre la dispersión y los estudios de Briggs [3] en (1965) que dieron lugar a las fórmulas de elevación de la pluma.

El problema de minimización de costos de control de la contaminación, se compone de dos subproblemas a saber: el primero determinar la concentración del contaminante y el segundo la obtención del valor óptimo para la función de costo (cumpliendo con las restricciones impuestas). Los trabajos mencionados anteriormente apuntan a resolver el primero de los subproblemas. En el caso del segundo, trabajos desde el punto de vista económico fueron el punto de partida a principios de la década del 60.

La primera aplicación de la programación matemática al manejo de la calidad de aire fue realizada por Teller en 1968 quien desarrolló un modelo de optimización lineal para este problema, posteriormente Gorn, Gustafson y Kortanek en 1972 plantearon el problema para tres fuentes en una región rectangular suponiendo que la función de costo es lineal y obtuvieron la solución por medio de aproximaciones lineales. En 1979 Paul Gribick [10], consiguió una solución al problema en términos de optimización no diferenciable habiendo considerado la función de costo como no lineal.

Recientemente en 2004, Fedossova, Kafarov y Mahecha trataron el problema en el caso bi-dimensional, mediante una versión del método estocástico de aproximaciones externas de Volkov- Zavriev, ver [6], y en 2009 Vaz en [23], resuelve el problema usando un método de discretización para programación semi-infinita. Finalmente, Fedossova en 2012 resolvió el problema en el caso que existe una región de conflicto entre las fuentes afectadas por la

norma legal (ver [5]).

En los trabajos mencionados anteriormente se ha supuesto que la superficie es un plano y sólo se ha tenido en cuenta la concentración al nivel del piso; en este trabajo se considera la concentración en una región tridimensional; de esta manera se pretende que la norma ambiental sea cumplida en lugares con una altura considerable, por ejemplo en los pisos superiores de edificios ubicados en la región.

Estructura del documento

En el primer capítulo de este documento se presentan los preliminares tanto de programación semi-infinita, como de fenómenos meteorológicos, que se ha dejado hasta la última sección. El estudio del método de aproximaciones estocásticas externas se ha aplazado hasta el capítulo 2, que está dedicado en la mayor parte al caso bidimensional.

En el capítulo 3 se presenta el modelo matemático para el caso tridimensional, asumiendo un modelo Gaussiano para la dispersión del contaminante en una región donde existen una montaña y diferentes fuentes. En el capítulo 5 se muestran resultados numéricos obtenidos para el contaminante dióxido de azufre, considerando como norma ambiental la establecida para Bogotá y usando como método de solución una versión del método propuesto por Volkov-Zavriev, la cuál se presenta al final del capítulo 4.

1. Preliminares

1.1. Programación semi-infinita

En la mayor parte de este documento si A es un conjunto, $|A|$ representa su cardinal. El conjunto de los números naturales es considerado como $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, además $\|\cdot\|$ es una norma arbitraria y $\|\cdot\|_p$ es la norma p usual en \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{Z}^+$; para $p = \infty$, y $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$.

La densidad de un subconjunto Y_σ de $Y \subset \mathbb{R}^n$ es definida por:

$$d(Y_\sigma, Y) = \sup_{y \in Y} \inf_{y_\sigma \in Y_\sigma} \|y - y_\sigma\|_\infty$$

1.1.1. Problema de programación semi-infinita

Los problemas de optimización con un continuo de restricciones aparecen en diferentes áreas de aplicaciones (ver, por ejemplo, [14]). Un problema con un infinito número de restricciones ¹ se llama problema de programación semi-infinita (SIP) y se describe así:

$$\begin{aligned} P(Y) : \quad & \text{minimizar} && f(x) && x \in X \subset \mathbb{R}^n \\ & \text{sujeto a (s.t)} && g(x, y) \leq 0 && y \in Y \subset \mathbb{R}^m \end{aligned} \tag{1-1}$$

donde Y es un conjunto compacto con $|Y| = \infty$, y las funciones f y g generalmente se consideran continuamente diferenciables en una vecindad de X y de $X \times Y$ respectivamente.

A el número de componentes de x se denomina la dimensión del problema y el conjunto $\mathcal{F}(Y)$ de todos los puntos en \mathbb{R}^n que satisfacen todas las restricciones, se llama conjunto de puntos factibles, es decir $\mathcal{F}(Y) = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x, y) \leq 0 \quad \forall y \in Y\}$.

Si $Y_\sigma \subset Y$ el subproblema $P(Y_\sigma)$ se define así:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(x, y) && x \in X \subset \mathbb{R}^n \\ & \text{s.t} && g(x, y) \leq 0 && \forall y \in Y_\sigma \end{aligned} \tag{1-2}$$

¹También cuando el problema tiene infinitas variables

El valor $\mu(Y_\sigma) = \inf_{x \in \mathcal{F}(Y_\sigma)} f(x)$ se llama valor minimal del problema $P(Y_\sigma)$, y un punto factible x_σ tal que $f(x_\sigma) = \mu(Y_\sigma)$ se llama solución del problema $P(Y_\sigma)$.

En el problema $P(Y_\sigma)$, la restricción $g(x, y_0)$ se llama activa en el punto x si $g(x, y_0) = 0$ e inactiva si $g(x, y_0) < 0$, a el punto $y_0 \in Y_\sigma$ se le llama un punto activo. Un punto $x \in \mathcal{F}(Y_\sigma)$ tal que $g(x, y) < 0$ para todo $y \in Y_\sigma$ se llama un punto de Slater o un punto interior factible. Se dice que una restricción $g(\cdot, y)$ es violada en el punto x si $g(x, y) > 0$.

Definición 1.1. Sea $x_F \in \mathcal{F}(Y)$ y $Y_\sigma \subset \mathbb{R}^n$, el conjunto de nivel del punto x_F con respecto a Y_σ está dado por $\Lambda(x_F, Y_\sigma) := \mathcal{F}(Y_\sigma) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_F)\}$

Nótese que si el problema $P(Y)$ tiene una solución, esta también lo es para el problema

$$\min_{x \in \Lambda(x_F, Y)} f(x).$$

El problema $P(Y)$ tiene solución si $\mathcal{F}(Y)$ es compacto. Sin embargo como $\Lambda(x_F, Y)$ siempre es cerrado [9], entonces (por el teorema de Weiertrass) una hipótesis importante que se necesita para asegurarse que el problema tiene solución es que $\Lambda(x_F, Y)$ es acotado para algún x_F factible. Cuando la función objetivo f es convexa sólo es necesario que exista $x_F \in \mathcal{F}(Y)$ y un conjunto finito $Y_0 \subset Y$ tal que el conjunto de nivel $\Lambda(x_F, Y_0)$ sea acotado (ver, [9]).

1.2. Métodos numéricos para optimización semi-infinita

Existen gran cantidad de artículos en la literatura sobre métodos para resolver problemas de programación semi-infinita. En la mayoría de ellos se obtienen problemas de optimización finitos (lineales o no lineales) a partir del problema original de tal manera que sus soluciones permitan construir una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a al óptimo del problema original. De acuerdo con la forma en que se generan los problemas finitos, desde el punto de vista de Hettich y Kortanek (ver [14]), se pueden distinguir tres tipos de métodos: i) Métodos de intercambio, ii) Métodos basados en reducción local y iii) Métodos de discretización.

A lo largo de esta sección denotaremos por $P(Y)$ al problema SIP:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n \\ \text{s. t.} & g(x, y) \leq 0, \quad y \in Y \end{array} \quad (1-3)$$

Además $\mathcal{F}(Y) = \{x : g(x, y) \leq 0, \forall y \in Y\}$ el conjunto de puntos factibles del problema $P(Y)$ y $M_c(Y)$ el conjunto de todos los subconjuntos compactos de Y .

1.2.1. Métodos basados en reducción local

Se conocen como métodos basados en reducción local los métodos para resolver el problema SIP $P(Y)$ que pueden ser descritos conceptualmente mediante el siguiente algoritmo:

ALGORITMO CONCEPTUAL:

paso n:

entrada: $x_n \in \mathbb{R}^n$ no necesariamente factible.

- (i) Determinar máximos locales y_1^n, \dots, y_m^n de la función $g(x_n, y)$ en el conjunto Y .
- (ii) Formar el problema $P(Y_n) : \max\{f(x) : g(x, y_l^n) \leq 0, l = 1, \dots, m\}$
- (iii) Realizar un número finito k_n de iteraciones de un algoritmo para resolver el problema de optimización finita.
- (iv) hacer $x_n = x_{k_n}$, el valor obtenido en la última iteración del paso anterior.

El problema $P(Y_n)$ usualmente se llama problema reducido. Bajo hipótesis como la existencia de funciones continuas en alguna vecindad de cada $y_i^n, i = 1, \dots, m$ y una vecindad de x se puede probar que x es óptimo local para $P(Y)$ si y sólo si lo es para el problema reducido. Para una prueba de este hecho ver [14].

1.2.2. Métodos de discretización

Una manera de abordar los problemas de programación semi-infinita $P(Y)$, es aproximar la solución por el valor óptimo de la función objetivo sujeta a un número finito N de restricciones, esto significa que el conjunto de parámetros Y_i para $i = 1, \dots, N$ es un conjunto finito. Si se desea tener una mayor precisión en la solución se aumenta el número de elementos en el conjunto de parámetros.

Los métodos de discretización comienzan determinando una grilla de puntos que sucesivamente se va refinando, además los puntos de ella se usan para definir la siguiente grilla y determinar las nuevas restricciones que serán usadas en el siguiente paso, de tal manera que si $Y_i \subset Y$ es el conjunto de restricciones obtenidas en el paso i se debe cumplir

$\lim_{i \rightarrow \infty} \text{dist}(Y_i, Y) = 0$ en la distancia de Hausdorff.

Una sucesión de grillas G_i donde $G_i \subset G_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$ puede ser prescrita, o también puede definirse en cada paso de manera que la información obtenida en el i -ésimo nivel de discretización es utilizado para definir la siguiente, en el primer caso se dice que la sucesión es definida a priori y en el segundo definida a posteriori. Antes de todo se puntualiza la definición de grilla.

Cosidérese T un conjunto compacto ². Sin pérdida de generalidad se puede suponer

$$T \subset I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_p \subset \mathbb{R}^p$$

donde $I_j = [\alpha_j, \beta_j]$, $j = 1, \dots, p$.

Un vector $0 < h = (h_1, h_2, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ se llama vector de paso si h es tal que $n_j = (\beta_j - \alpha_j)/h_j$ son números enteros para $j = 1, \dots, p$. Se denomina Grilla rectangular de tamaño de paso h al conjunto

$$G[h] := \{t = (t_1, \dots, t_p) : t_i = \alpha_i + jh_i, j = 0, \dots, n_i \ i = 1, \dots, p\}.$$

Por ejemplo en \mathbb{R}^2 , si T es un conjunto compacto contenido en el rectángulo $[1, 10] \times [2, 6]$ y $h = (h_1, h_2)$ entonces $n_1 = \frac{9}{h_1} \in \mathbb{Z}^+$ y por tanto los valores enteros positivos posibles para h_1 son 1, 9, 3 y los correspondientes para n_1 : 9, 1, 3. De manera análoga, los posibles valores enteros positivos para $n_2 = \frac{4}{h_2}$ y h_2 son respectivamente 1, 4, 2 y 4, 1, 2.

Eligiendo $h_1 = 3$ y $h_2 = 2$ es decir el vector de paso $h = (3, 2)$, los valores para n_1 y n_2 son respectivamente 3 y 2. los puntos (t_1, t_2) de $G[h]$ se obtienen así:

$$t_1 = 1 + 3j \text{ para } j = 1, 2, 3,$$

$$t_2 = 2 + 2j \text{ para } j = 1, 2.$$

Por lo tanto los valores de t_1 y t_2 son $\{1, 4, 7, 10\}$ y $\{2, 4, 6\}$ que generan la grilla rectangular $G[h] = \{1, 4, 7, 10\} \times \{2, 4, 6\}$. Estos puntos son presentados en la figura **1-1**, donde el conjunto T corresponde a los puntos de la curva continua junto con la región encerrada por ella.

²La compacidad garantiza que la sucesión de las soluciones de los problemas de aproximación tiene un punto de acumulación

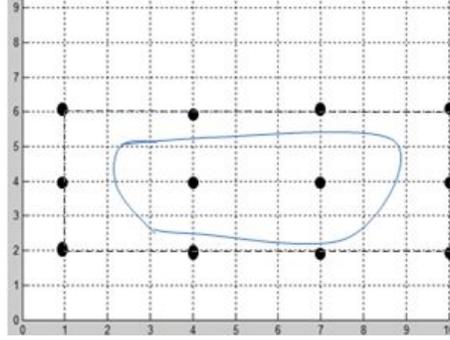


Figura 1-1.:

Se notará $T[h]$ al conjunto de los puntos de la grilla que pertenezcan al conjunto T , es decir $T[h] = T \cap G[h]$. Un punto $t^r = (t_1^r, \dots, t_p^r) \in T[h]$ es llamado un punto próximo o vecino de un segundo punto t^l si $|t_i^r - t_i^l| \leq h_i$ para $i = 1, \dots, p$. Por la definición de h_i se tiene:

$$h_i \geq |t_i^k - t_i^l| = |\alpha_i + j^k h_i - (\alpha_i + j^l h_i)| = |h_i| |j^k - j^l|$$

por tanto $1 \geq |j^k - j^l|$ para $j^k, j^l \in 1, \dots, n_i$. Esto significa que un punto es vecino de otro si la distancia entre cada una de sus componentes no es superior a una unidad del tamaño determinado por la respectiva componente de h .

Para un problema $P(Y)$ si T_1 y T_2 son subconjuntos finitos de Y , con $T_1 \subset T_2$, se dice que T_2 es un refinamiento de T_1 . Naturalmente si T es finito $T[h]$ para algún h es un refinamiento suyo. De otro lado, no es necesario que T sea finito para que $T[h]$ lo sea. Por ejemplo el problema con restricciones lineales :

$$\begin{aligned} P(Y) : \quad & \text{maximizar} && f(x) && x \in \mathbb{R}^n \\ & \text{s. t.} && \mathbf{a}^t x \leq b && a \in Y, b \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (1-4)$$

puede ser aproximado por subproblemas finitos de la forma:

$$\begin{aligned} P(Y[h]) : \\ & \text{maximizar} && f(x) && x \in \mathbb{R}^n \\ & \text{s. t.} && Ax \leq B \end{aligned}$$

donde a_i : la fila i de $A_{m \times n}$ es tal que $a_i \cdot t^i \in Y[h]$. En general, a en el problema $P(Y)$ puede ser una función $a(t) : Y \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y en el problema $P(Y[h])$ cada fila de la matriz A es una función de un valor t de $Y[h]$.

Cuando se resuelve un problema que su conjunto de parámetros Y_{n+1} es un refinamiento de otro Y_n , es posible que las restricciones nuevas sean violadas en el punto que soluciona al problema formado a partir Y_n . Los puntos del conjunto de parámetros asociados a ellas son caracterizados en la siguiente:

Definición 1.2. Si $Y_1 \subset Y_2$ son subconjuntos finitos de Y y \bar{x} es la solución del problema $P[Y_1]$ la \bar{x} -selección del Conjunto Y_2 es el conjunto $S[\bar{x}, Y_2] = \{y : y \in Y_2, g(\bar{x}, y) > b(y)\}$

Nótese que la x -selección de Y_2 es el conjunto de parámetros de Y_2 que viola las restricciones del problema $P(Y)$ en el punto óptimo de $P(Y_1)$ bajo las restricciones de este último.

Considérese $Y = (1, 3] \cup (3.5, 4.8]$, $P([Y])$ un problema con restricciones $a(t)x \leq b(t)$ para $t \in Y$. Como $Y \subset [1, 5]$ el vector de tamaño del paso para la grilla es h tal que $n = 4/h \in \mathbb{Z}$ escogiendo $h = 1$ entonces $G[1] = \{2, 3, 4, 5\}$, $Y[1] = Y \cap G[1] = 2, 3, 4$. Si ahora se elige $h = \frac{h}{2} = 1/2$ entonces $n = 8$ y $Y[2] = \{\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5\}$. Si suponemos que $\bar{x} = 1$ es solución a un subproblema $P(Y[1])$ entonces la 1-selección de $P(Y[2])$ son los puntos $\frac{5}{2}, \frac{9}{2}$, que en la figura se han encerrado.

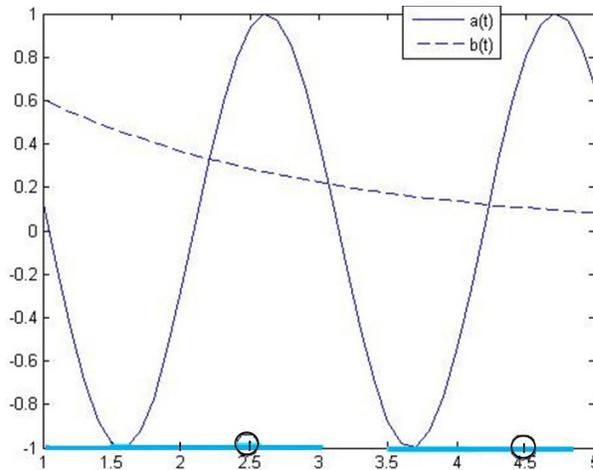


Figura 1-2.:

Solución de problemas discretizados

Existe diversidad de algoritmos para resolver problemas PSI lineales por métodos de discretización, a continuación se presenta uno dado por Reemtsen en [19]:

sea $i \in \mathbb{N}$ fijo

Paso 0. Elegir $k \in \mathbb{N}$ y $D_k \subset Y_i$ con $n \leq |D_k| < \infty$, y elegimos $k = 0$ si $i = 0$.

Paso 1. Encontrar una solución $x_k \in \mathbb{R}^n$ de $P[D_k]$, hacer $A_k := \{y \in D_k : g(x_k, y) = 0\}$.

Paso 2. Encontrar $y_k \in Y_i$ tal que $g(x_k, y_k) = \max_{y \in Y_i} g(x_k, y)$.

Paso 3. Si $g(x_k, y_k) \leq 0$ parar. Sí no, elegir $D_{k+1} \subset Y_i$ con $A_k \cup \{y_k\} \subset D_{k+1}$.

Paso 4. $k := k + 1$ e ir al paso 1.

En el algoritmo anterior es posible construir el conjunto $D_1 = Y[h_1]$ como la intersección del conjunto de parámetros con la grilla que tiene tamaño de paso h_1 y D_{k+1} se obtiene adicionando al conjunto anterior D_k los puntos de la \bar{x} -selección de $Y[h_{k+1}] = G[h_{k+1}] \cap Y$. La grilla $G[h_{k+1}]$ construida de esta manera, es un refinamiento de $G[h_k]$. Un algoritmo en estos términos junto con ejemplos numéricos y la prueba para la convergencia, es presentado en [13].

Los métodos de discretización en comparación con otros métodos, tienen la ventaja que la factibilidad de los puntos se puede evaluar de manera sencilla debido a la finitud del conjunto de parámetros, sin embargo, el costo computacional, es alto por el número de veces que se debe evaluar la función para conseguir una solución suficientemente precisa. Además las soluciones pueden ser aproximaciones externas “es decir” el punto óptimo aproximado no es factible, a pesar de esto, la soluciones alcanzadas por el método de discretización frecuentemente son suficientes para propósitos prácticos y en el caso en que esto no ocurra, bajo ciertas condiciones la solución puede mejorarse por un método localmente convergente basado en reducción, [9].

1.2.3. Métodos de intercambio

Informalmente hablando, estos métodos en cada paso realizan un intercambio de restricciones en el sentido que adicionan y “pueden ” eliminar algunas de ellas al conjunto que se tenía previamente. Estos métodos en términos generales en el paso k actúan algorítmicamente como sigue ([14]):

- Si $Y_k \subset Y$ es finito, se obtiene la solución $w_k = f(x_k)$ del problema de optimización (con finito número de restricciones) $P(Y_k)$ y los elementos y_1^k, \dots, y_m^k de Y , tal que alguno de ellos es punto óptimo para el problema de maximización interno (los demás se pueden elegir arbitrariamente)

$$IP_k : \max\{g(x_k, y) : y \in Y\}$$

- Se conforma el nuevo conjunto de restricciones Y_{k+1} tal que

$$Y_{k+1} \subset \{y_1^k, \dots, y_m^k\} \cup Y_k$$

- El proceso continua hasta cuando $g(x_k, y_j^k) \leq 0$ para todo $0 \leq j \leq m$; es decir que con la solución al problema $P(Y_k)$ las restricciones más relevantes formadas a partir de elementos del conjunto de parámetros Y del problema SIP, son cumplidas cuando $x = x_k$.

La frase “se pueden eliminar algunas restricciones” en el primer párrafo de esta sección, se justifica en el hecho que no es necesario eliminar restricciones en cada paso; en otras palabras, el nuevo conjunto de parámetros Y_{k+1} se puede conformar a partir del anterior sólo adicionando los nuevos puntos obtenidos de la solución del problema interno IP_k .

El siguiente teorema, establece las condiciones bajo las cuales, el algoritmo permite determinar una solución aproximada al problema SIP. Aquí se presenta detalladamente la prueba dada por Hettich y Kortanek en [14].

Teorema 1. ([14]). *Si $\bar{Y} \in M_c(Y)$, $\bar{Y} \subset B_\gamma(0) = \{y : \|y\|_\infty \leq \gamma\}$ y en cada paso $v(x_k) := \max_{y \in Y} g(x_k, y) = y_j^k$ existe para algún $j \in \{1, \dots, m\}$ entonces el algoritmo descrito arriba obteniendo el conjunto de parámetros $Y_{k+1} = Y_k \cup \{y_1^k, \dots, y_m^k\}$ se detiene en un número finito de pasos con una solución al problema $P(Y)$ o la sucesión $\{x_k\}$ tiene un punto de acumulación que resuelve $P(Y)$.*

Demostración: Como $\{x_k\}$ es acotada por estar contenida en un conjunto compacto, existe un punto de acumulación \bar{x} . Sin pérdida de generalidad supóngase $x_k \rightarrow \bar{x}$. Debido a que $Y_{k+1} \subset Y$ se tiene $v(Y) = \sup_{x \in \mathcal{F}(Y)} f(x) \leq f(\bar{x})$, luego es suficiente mostrar que \bar{x} es un punto factible de $P(Y)$.

En efecto, si $\max_{y \in Y} g(\bar{x}, y) > 0$ y $\max_{y \in Y} g(x_k, y) = g(x_k, \hat{y}_k)$ se tiene

$$\begin{aligned} \max_{y \in Y} g(\bar{x}, y) &= \max_{y \in Y} g(x_k, y) + [\max_{y \in Y} g(\bar{x}, y) - \max_{y \in Y} g(x_k, y)] \\ &= g(x_k, \hat{y}_k) + [\max_{y \in Y} g(\bar{x}, y) - \max_{y \in Y} g(x_k, y)] \\ &\leq [g(x_k, \hat{y}_k) - g(\bar{x}, \hat{y}_k)] + [\max_{y \in Y} g(\bar{x}, y) - \max_{y \in Y} g(x_k, y)], \end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho que $\bar{x} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x : g(x, y) \leq 0, y \in Y_k\}$ porque $Y_k \subset Y_{k+1}$ para todo k . Como las funciones g y v (donde $v(x) = \max\{g(x, y), y \in Y\}$), son continuas el lado derecho de la desigualdad anterior toma valores arbitrariamente pequeños cuando k es

suficientemente grande, lo cual contradice que $v(\bar{x}) > 0$.

En general obtener una solución global para el problema de optimización interno IP_k es muy costoso para problemas donde $Y \subset \mathbb{R}^n, n > 2$, esto motiva estrategias como trabajar solamente con $y = y_1$ tal que $g(x_k, y_1) > 0$, ([14]).

1.3. Dispersión atmosférica, transporte y meteorología.

En esta sección se discutirá la emisión, transporte y difusión de un contaminante liberado en la atmósfera y que finalmente es depositado sobre la superficie de algún área geográfica. Las cantidades de contaminantes provenientes de diferentes fuentes, que recibe una región, varían de un punto a otro, dependiendo de los vientos existentes y de la presencia de obstáculos naturales o artificiales como montañas y edificios.

El transporte y la difusión del contaminante, son afectados por los diferentes fenómenos físicos que ocurren en la atmósfera. En general, según [27], la dispersión es el resultado de tres mecanismos dominantes: a). El movimiento medio general del aire que transporta el contaminante en la dirección del viento; b) las fluctuaciones turbulentas de la velocidad que dispersan el contaminante en todas las direcciones y c) la difusión de la masa debido al gradiente de la contaminación.

Los movimientos del aire afectan la dispersión y el transporte del contaminante en cercanías a una fuente o incluso a cientos de kilómetros. En la tabla **1-1**, se presentan los fenómenos ocasionados por estos movimientos en las diferentes escalas meteorológicas.

Escala	Área geográfica (km^2)	Periodo	Fenómeno
Micro-escala	2 – 15	Minutos	Comportamiento de la pluma
Meso-escala	15 – 160+	Horas a días	Brisas del mar y lagos
Escala sináptica	> 106	Días	Sistemas migratorias de alta y baja presión, frentes fríos y cálidos, sistemas semipermanentes de alta presión.
Escala planetaria	> 10^6	Semanas y meses	Fenómeno de Hadly, tormenta tropicales, otros.

Tabla 1-1.: Escalas meteorológicas. Tomado de [8]

En las siguientes secciones se estudiarán los factores que afectan la turbulencia atmosférica y la del viento.

1.3.1. Radiación solar

Un factor muy importante en los comportamientos del movimiento del aire, es la la cantidad de radiación solar que llega a un área unitaria de la superficie terrestre, denominada Insolación. El ángulo en que los rayos solares inciden sobre la superficie juega un papel fundamental, debido a que hace variar el área que recibe la misma cantidad de insolación, y es por esto que las estaciones y las diferentes horas del día tienen efectos distintos.

La absorción de esta radiación es función del tipo de superficie, por ejemplo el hielo absorbe menor cantidad de radiación que el suelo desnudo, y que el agua. Esta diferencia de la cantidad de radiación absorbida, genera diferencias de temperatura entre las distintas superficies, y en consecuencia comportamientos complejos en el viento, en lugares donde por ejemplo existen cuerpos de agua.

1.3.2. Circulación del viento

El calentamiento diferencial del aire origina movimientos horizontales, las diferentes temperaturas entre la atmósfera del Ecuador y la de los polos genera movimientos a escala global; entre el aire de los océanos y de la masa continental, los movimientos a escala media; y las que ocurren en lugares con extensiones de agua generan los movimientos del aire a escala local. No se presentarán aquí detalles de lo movimientos a nivel global, para un estudio profundo del tema, ver [14, 27].

El aire fluye de las regiones de mayor a las de menor presión, lo que genera una mayor dispersión del contaminante cuando las diferencias son significativas. Esta diferencia de presión medida en una unidad de longitud se denomina gradiente de presión o fuerza del gradiente de presión. En regiones donde el gradiente de presión es mayor, la cantidad de aire sobre la superficie también lo es, mientras que los lugares donde el gradiente de presión es menor, más liviano es el viento sobre la superficie [11].

Mezcla vertical.

La altura a la cual se lleva a cabo el mezclado convectivo y turbulento cuando la temperatura de la superficie es máxima, se llama altura del mezclado. Ella afecta la dispersión de un contaminante porque la cantidad de aire disponible para diluirse es mayor en la medida que altura de mezclado también lo es. Esta altura es influenciada por cambios de temperatura, por ejemplo, cuando la temperatura de la superficie es alta las porciones de aire cercanas se

calientan y adquieren flotabilidad.

La aceleración de flotación debida a la diferencia de la temperatura con el aire circundante, bajo hipótesis no muy fuertes esta dada por:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{T' - T}{T} g. \quad (1-5)$$

donde T' es la temperatura de la porción de aire, T la temperatura de la atmósfera local y g es la aceleración de la gravedad.

Nótese que la aceleración es cero cuando la temperatura de un cubo diferencial de aire en movimiento es igual a la de la atmósfera local, y cuando la diferencia de la temperatura es muy grande mayor lo es la aceleración, es decir más vigoroso el mezclado. Para la deducción de la ecuación 1-5 ver por ejemplo [27].

Movimientos horizontales

Los movimientos horizontales del aire son caracterizados por la velocidad y la dirección. La velocidad es afectada por las diferencias de presión y temperatura, cuanto mayor es el gradiente de presión mayor la velocidad. La rugosidad de la superficie afecta los movimientos del aire generando en algunos casos movimientos no suaves. Sin embargo estos movimientos conocidos como turbulentos pueden ser ocasionados también por las diferencias de temperatura de objetos sobre la superficie con diferente capacidad calórica, que hacen que muy pequeñas cantidades de aire se calienten y se muevan verticalmente generando un mezclado del contaminante.

El efecto de la fricción de la superficie varía de un lugar a otro, por ejemplo en las áreas rurales la influencia de la rugosidad sobre la velocidad del viento sólo se mantiene decenas de metros, mientras en las grandes ciudades los efectos pueden ser de hasta cientos de metros.

Para ver el efecto de la velocidad del aire en la dilución del contaminante, siguiendo a [11], supóngase que una parcela de aire se mueve a través de la emisión de una fuente, a una velocidad u . Entonces en una unidad de tiempo, el volumen de aire en el que se encuentra diluido el contaminante es igual al producto entre el área de la sección transversal y la velocidad del viento, por tanto la concentración del contaminante C se puede representar

$$C = \frac{Q}{u \times A}$$

donde A es el área de la sección transversal de la pluma y Q la tasa de emisión (g/s) del contaminante, ver figura 1-3.

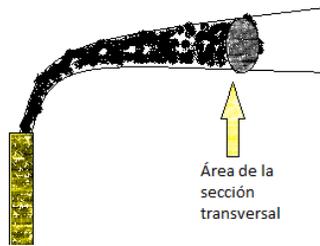


Figura 1-3.:

La ecuación para la concentración evidencia el efecto directo de la velocidad del viento, pues si la velocidad se multiplica por K , la concentración se disminuye en esa proporción.

1.3.3. Estabilidad atmosférica

La estabilidad atmosférica es la medida de flotabilidad de una parcela de aire, es decir la tendencia a resistir el movimiento vertical.

Si una parcela de aire se mueve verticalmente, su temperatura puede cambiar con la altura, esta tasa de cambio se denomina gradiente vertical³, noción que permite caracterizar la estabilidad atmosférica respecto a movimientos verticales de una pequeña porción de aire.

El gradiente de temperatura vertical en condiciones adiabáticas, es aproximadamente $\frac{dT}{dz} = -1^\circ\text{C}/100\text{m}$, donde z es la altitud. En algunos casos es conveniente designar la tasa de cambio como el valor negativo del gradiente de temperatura, por lo que con frecuencia se encuentra en la literatura que la tasa de cambio adiabática es aproximadamente 1. Una deducción de este valor para la tasa de cambio a partir de la ley del equilibrio de fuerzas estáticas y de la primera ley de la termodinámica, puede leerse en [27].

Normalmente la atmósfera no está en condiciones adiabáticas. Cuando la tasa de decaimiento es menor a $-1^\circ\text{C}/100\text{m}$, la atmósfera es superadiabática; cuando tiene el mismo valor en cualquier altura, se dice que la atmósfera es isoterma o isotérmica; y en el caso en que la tasa de decaimiento es mayor que la tasa adiabática, la estabilidad de atmósfera se denomina subadiabática. Los diferentes tipos de condiciones de estabilidad para la atmósfera se muestran en la figura 1-4.

³este término se puede emplear también para definir gradiente vertical adiabático

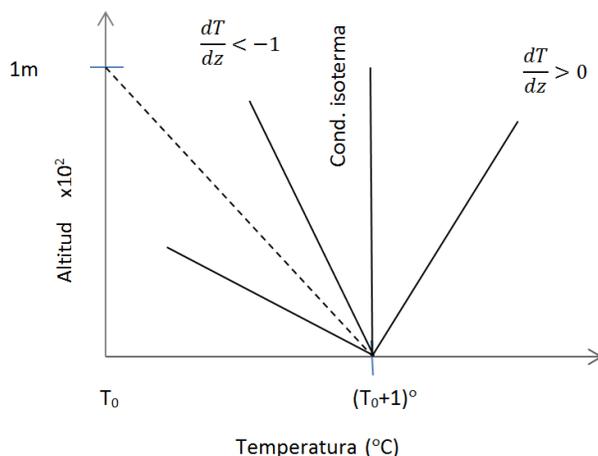


Figura 1-4.: Estabilidad atmosférica

Las anteriores condiciones atmosféricas permiten clasificar la atmósfera en estable o inestable. En efecto, en el caso superadiabático (la tasa de decaimiento $\frac{dT}{dz}$ es mayor que -1) si una parcela de aire es transportada rápidamente hacia arriba entonces su temperatura es mayor que la del aire circundante, y por lo tanto es menos densa que el aire de algún entorno cercano, por lo que seguirá su desplazamiento verticalmente hacia arriba. De la misma forma, si la pequeña porción de aire es movida súbitamente hacia abajo, experimentará una compresión adiabática y debido a su mayor densidad, el aire continuará en movimiento descendente [27].

En el caso subadiabático, en cambio, si una pequeña porción de aire es empujada hacia arriba (abajo) esta tiende a regresar a su posición original. En este caso se dice que la atmósfera es estable. Por último, cuando la tasa de decaimiento de la temperatura es aproximadamente igual al adiabático se dice que la estabilidad atmosférica es neutral.

2. Caso Bidimensional y Método estocástico de aproximaciones externas

En este capítulo se estudia brevemente el problema de minimización de costos del control de contaminación del aire, especialmente los resultados obtenidos por [6, 23]. La última sección se dedica al método estocástico de aproximaciones externas propuesto por Volkov-Zavriev en [24] y del cual se usará una versión para resolver el problema SIP.

2.1. Caso Bidimensional

El problema de contaminación de aire ha sido estudiado desde décadas anteriores. En 1972 Gustafson y Kortanek presentaron una formulación del problema y plantearon explícitamente el siguiente ejemplo con tres fuentes:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } 2x_1 + 4x_2 + x_3, \quad x_i \in [0, 1], \quad i = 1, 2, 3. \\ & \text{sujeto a } g(x, y) = \sum_{i=1}^3 (1 - x_i)c_i(y) - \frac{1}{2} \leq 0, \quad y \in [-1, 4] \times [-1, 4] \end{aligned} \quad (2-1)$$

La solución obtenida usando aproximaciones lineales, estableció el óptimo en el punto $(0, 0, 0.272)$.

Posteriormente Gribick [10] estudio el problema para el caso en que la función de costos (función objetivo) es no lineal, en términos de optimización no diferenciable.

Más recientemente, en 2004 Fedosova, Kafarov y Mahecha, bajo la hipótesis de diferenciable sobre las función objetivo y las restricciones del problema PSI propuesto, trataron el problema en los casos lineal y convexo, mediante una versión del método estocástico de aproximaciones externas, denominado SMETH.ACTIV.Medio.

Asumiendo que el costo es una función lineal y que existe la obligación de cumplir con una norma para la concentración máxima permitida de un contaminante en una región plana Y^0 , el problema de minimización de costos para el control de la contaminación, según [6] es:

$$P(Y^0) \quad \min c(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{sujeto a } g(x, y) = \sum_{j=1}^n (1 - x_j) \mathcal{C}_j(y) - \varphi(s) \leq 0 \quad \forall y \in Y^0$$

donde $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ son los porcentajes de emisiones que debe reducir cada fuente; c_1, \dots, c_n los costos respectivos y $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ la cantidad de contaminante aportada por cada fuente en un punto y del área de control $Y^0 \subset \mathbb{R}^2$.

La idea principal del método de solución (aproximaciones estocásticas externas) consiste en reemplazar el problema original por una sucesión $\{P^n\}$ de problemas con un número finito de restricciones. Este algoritmo utiliza el esquema de la búsqueda estocástica activa y pasiva RS.ACTIV, ver [24], para encontrar los parámetros relevantes para cada problema P^n de la sucesión que aproxima a P^0 .

Como ejemplo para el caso lineal, Fedossova en [6], resolvió el problema de contaminación en la región $[-1, 4] \times [-1, 4]$ para tres fuentes, planteado por Gustafson. La dirección del viento se consideró paralela al eje horizontal en el sentido positivo y la ubicación de las fuentes en los puntos $(0,1)$, $(0,0)$, $(2, -1)$, y las funciones de transferencia de contaminación se asumieron del tipo Sutton. El algoritmo fue implementado en lenguaje de programación $C++$; la solución obtenida es aproximadamente igual a la de [12] como se puede ver en la tabla **2-1**, donde se muestran los resultados obtenidos partiendo de diferentes puntos iniciales.

En la gráfica **2-1** tomada de [6], es posible apreciar la factibilidad de los puntos en la región de control. Las áreas donde $g(x, y) \leq -0.1$ están pintadas de gris claro, las zonas en color gris oscuro corresponden a los puntos donde $-0.1 < g(x, y) \leq -0.0001$ y la región pintada en color negro corresponde a los puntos donde la diferencia entre la concentración y la norma no es superior a $-0,0001$ (sin embargo la norma se cumple).

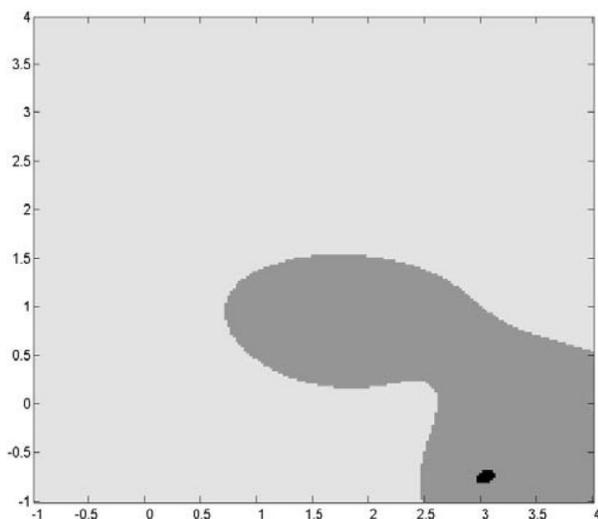


Figura 2-1.: Caso lineal óptimo $(0.0, 0.0, 0.2729)$, fuente [6]

Número de iteraciones y de restricciones activas	Punto crítico aproximado (concentración de la contaminación)	punto inicial	Punto óptimo	Valor función de costo
3	(2.897737,-0.840293)	(0,0,0)	(0,0,0.2729)	0.2729
5	(3.195362,-0.884669)	(0,0,0)	(0,0,0.27303)	0.27303
4	(3.035533,-0.922631)	(0.15,0.2,0.05)	(0,0,0.2750)	0.2750
3	(3.055767,-0.863967)	(0.15,0.2,0.05)	(0,0,0.2752)	0.2752

Tabla 2-1.: Resultado para diferentes puntos iniciales con tres fuentes. Tomado de [6]

El problema de minimización de costos de control de contaminación en el caso bidimensional, también fue resuelto en 2009 por Vaz en [23], usando un método de discretización para SIP, implementado en SIPAMPL aplicando un modelo Gaussiano para calcular la concentración del contaminante. Como ejemplo para tres fuentes fue resuelto el planteado por Gustafson en 1972. Las desviaciones estándar vertical y horizontal empleadas son las que permiten obtener una equivalencia con las condiciones de Sutton en el caso $n = 1$, [23]:

$$\sigma_y = \sigma_z = \begin{cases} \sqrt{\frac{\mathcal{X}}{2}} & \text{si } \mathcal{X} > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde \mathcal{X} es la distancia a la fuente en la dirección del viento.

SIPAMPL (*Semi-infinite programming with AMPL*) es un lenguaje de modelación que ayuda

a evaluar el desempeño de algoritmos numéricos. Este software fue desarrollado con base en el lenguaje de modelamiento algebraico para problemas de optimización lineal y no-lineal AMPL (A Modeling Language for mathematical programming) y contiene una base de datos con mas de un centenar de problemas lineales y no lineales completamente codificados, algunos con parámetros que pueden ser modificados para formar problemas de mayor complejidad. Para una descripción de como codificar problemas en este software ver [22].

Vaz también resolvió el problema de minimización de costos del control de contaminación con la herramienta SIPAMPL para diez fuentes, usando los datos de [25] en la región plana $[-20000, 20000] \times [-20000, 20000]$. El límite máximo de concentración aplicado fue el portugués de $350\mu g/m^3$. Asumiendo que los costos de reducción de una unidad porcentual no varía entre las diferentes fuentes, el costo óptimo obtenido según [23] es $7,44p$, donde p es el costo de disminuir una unidad porcentual. La solución del problema sin embargo tiene dificultades para su aplicación en la práctica porque se requiere que algunas fuentes reduzcan la totalidad de sus emisiones.

La solución para el problema 2-1, obtenida usando el método SMETH.ACTIV.Medio propuesto por [6] e implementado en MATLAB se se presenta en la tabla 2-2, usando diferentes puntos iniciales.

número de iteraciones	Punto inicial	punto óptimo	Costo mínimo
3	(0.2,0.1,0.05)	(0,0,0.2751)	0.2751
5	(0,0,0)	(0,0,0.2749)	0.2749
8	(0.5, 0.5, 0.5)	(0,0,0.2748)	0.2748
4	(1,1,1)	(0,0, 0.2744)	0.2744

Tabla 2-2.: Resultado para diferentes puntos iniciales con tres fuentes implementado en MATLAB

2.2. Método estocástico de aproximaciones externas

Este método desarrollado por Volkov y Zavriev en 1997 incorpora mecanismos para la búsqueda activa de restricciones relevantes y para la depuración de restricciones irrelevantes.

Los primeros trabajos que usaron el método de aproximaciones externas, tenían el problema que a medida que el cardinal del conjunto de parámetros $|Y_n|$ de los problemas de aproximación crecía, se convertían en problemas tan difíciles de solucionar como el original. En 1988 Wardi [26] usó esquemas de eliminación para reducir el tamaño del conjunto de restricciones y de esta manera tener problemas más simples, sin embargo la ejecución de estos esquemas

necesita aplicar una técnica de optimización global en cada iteración y cuando la dimensión del conjunto de parámetros es muy grande la mayoría de los valores elegidos a partir de la distribución de probabilidad uniforme no son relevantes.

Para obtener un equilibrio entre la simplicidad de los problemas y la relevancia de las restricciones Volkov y Zavriev en [24] extendieron el método de Wardi como sigue:

En la n -ésima iteración del método de aproximaciones externas:

Esquema RS.ACTIV (búsqueda aleatoria activa)

Paso 1. Hacer $i := 0$.

Paso 2. Hacer $i := i + 1$.

Paso 3. Determinar y_i^n usando la distribución de probabilidad uniforme sobre Y . Luego aplicar un método de descenso empezando en y_i^n para obtener un máximo local y_i^{n*} del problema:

$$\max_{y \in Y} g(x_n, y).$$

Si una restricción del problema

$$\min_{x \in X} f(x)$$

$$s.t. \quad g(x, y) \leq 0 \quad y \in Y_n \cup \{y_1^n, y_1^{n*}, \dots, y_i^n, y_i^{n*}\}$$

no es suficientemente violada en x_n ir al *paso 2*, de lo contrario ir al *paso 4*.

paso 4. Hacer $S_n := i$, $\bar{Y} := Y_n \cup \{y_1^n, y_1^{n*}, \dots, y_{S_n}^n, y_{S_n}^{n*}\}$ y terminar.

Los métodos de este tipo son comúnmente denominados multistar, por lo que en síntesis, se puede afirmar que el método general estocástico de aproximaciones externas utiliza técnicas multistar para hallar parámetros relevantes para formar problemas aproximados $P(Y_n)$. El algoritmo usa como criterio de parada una función cuasi-óptima que se estudia a continuación.

Una función cuasi-óptima, es un criterio escalar $\Theta : X \times M_c(Y) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que para cada $x \in X$ y Y_σ un subconjunto compacto de Y , puede estimar $\Theta(x, Y)$ la calidad de x como solución del problema $P(Y_\sigma)$ [24].

Si se impone la condición que $\Theta(x, Y) = 0$ para x tal que $f(x) = \mu(Y)$, es posible reemplazar 0 por algún valor ϵ lo suficientemente pequeño para garantizar cierto nivel de predicción en una aproximación de la solución a un problema.

Se llama conjunto Θ -cuasi-óptimo del problema $P(Y)$ al conjunto

$$X_{qopt}(Y) := \{x \in \mathbb{R}^n : \Theta(x, Y) = 0\} \quad (2-2)$$

Si $X_{opt} := \{x \in \mathcal{F}(Y) : f(x) = \mu(Y)\}$ denota el conjunto de todos los óptimos entonces $X_{opt}(Y) \subseteq X_{qopt}(Y)$ es inmediato de la ecuación (2-2), además,

$$\Theta(x, Y) = 0 \text{ si y sólo si } x \in \mathcal{F}(Y), \quad \mu(Y) = f(x).$$

El conjunto de parámetros activos con respecto a la función cuasi-óptima Θ , en (x, V) , con $V \subset M_c(Y)$, es un subconjunto finito A de Y tal que $\Theta(x, A) = \Theta(x, Y') = \Theta(x, V)$ para todo $Y' \in M_c(V)$, $A \subseteq Y' \subseteq V$. El conjunto de todos los conjuntos de parámetros activos se notará $\mathcal{A}(x, V)$.

EJEMPLO. (Tomado de [24]) Considérese el problema de resolver el sistema con infinitas desigualdades:

$$\text{hallar } x \in X$$

$$\text{sujeto a } g(x, y) \leq 0, \forall y \in Y, x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$$

donde g es continuamente diferenciable en una vecindad de $X \times Y$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, y $Y \subseteq \mathbb{R}^m$.

Una función cuasi-óptima en $X \times M_c(Y)$ está definida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Theta(\cdot, \cdot) &: X \times M_c(Y) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ (x, Y) &\rightarrow \Theta(x, Y) \end{aligned}$$

donde $\Theta(x, Y) := \max(0; \max_{y' \in Y} g(x, y'))$.

A continuación se presenta el método estocástico de aproximaciones externas, propuesto por Volkov-Zavriev, para la prueba sobre convergencia del método ver [24]:

Método SMETH.ACTIV.

Parámetros: Sucesiones $\{\epsilon_n\}, \{\sigma_n\}$,
 $\epsilon_n, \sigma_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \epsilon_n, \sigma_n \searrow 0.$

Paso0.

$n := 1,$

$Y_1 := 0,$

Paso1.

Variables de entrada x_n y Y_n

Variables de salida $\Theta, \Delta Y_n, \bar{Y}_n, S_n$

Paso2

Definir $Y_{n+1} := \Delta Y_n \cup \bigcup_{\substack{j: \theta_j > \sigma_j, \\ 1 \leq j \leq n-1}} \Delta Y_j.$

Paso3

Encontrar $x_{n+1} \in X$ que satisfaga $\Theta(x_{n+1}, Y_{n+1}) < \epsilon_{n+1}$

Paso4

Hacer $n := n + 1$ y regresar a la etapa 1.

3. El problema de minimización de costos del control de contaminación del aire en un espacio tridimensional

3.1. Modelo Matemático para el problema: caso tridimensional

Determinar el costo mínimo de reducir la contaminación del aire en una región tridimensional hasta cumplir con una norma ambiental, es equivalente a resolver un problema de programación semi-infinita. A continuación se estudia el problema y al final del capítulo se dan los detalles de la formulación explícita de este para una región donde hay 10 fuentes de contaminación.

3.1.1. Variables de decisión y función objetivo

Sí en una región tridimensional Ω hay n fuentes del contaminante. Se notaran por w_j , $j = 1, 2, 3, \dots, n$ los factores de reducción de la contaminación. Es decir $100w_j$ representa el porcentaje de emisiones que debe reducir la empresa j .

Además sí $C_j(x, y, z)$ representa la concentración del contaminante, generada por la empresa j en el punto (x, y, z) de la región Ω , entonces $(1 - w_j)C_j(x, y, z)$ representa la concentración (promedio) de contaminación causada por la empresa j después de haber reducido por un factor w_j su aporte original al punto (x, y, z) .

Se notará por $G(w_j)$ el costo para la fuente j de reducir las emisiones para cumplir con una norma (Ley ambiental por ejemplo) $\varphi(x, y, z)$, en la región Ω . Si se supone que en cada empresa el costo es proporcional al porcentaje de reducción entonces $G(w_j) = \alpha_j w_j$, y el costo total se puede expresar por la función lineal $G = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j$. Si se supone que el costo de reducir el mismo porcentaje tiene el mismo costo para todas las fuentes entonces

$$G = \sum_{j=1}^n w_j \tag{3-1}$$

El tratamiento matemático del problema para este caso es el mismo que para el caso lineal general, y el algoritmo empleado para la solución que se presenta al final del capítulo es indistinto para funciones lineales o cualquier función convexa por lo tanto a lo largo del documento, para simplificar la notación se considera el costo dado por (3-1) .

Así el problema de minimizar el costo de esta reducción, cumpliendo con la norma esta dado por

$$\min G = \sum_{j=1}^n w_j$$

$$\text{sujeto a } \sum_{j=1}^n (1 - w_j) C(x, y, z) \leq \varphi \quad (x, y, z) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$$

La función G (en unidades monetarias) se llama función objetivo y representa el costo total de reducir las emisiones por cada factor w_j . Las variables $w_j, j = 1, 2, \dots, n$ se llaman variables de decisión.

Es importante tener en cuenta que la forma en que se escribió la función objetivo G es consecuencia de elegir la unidad monetaria de manera adecuada para que el costo de reducir una unidad porcentual sea una monetaria.

3.1.2. Modelo para la concentración del contaminante

Asumiendo que en cada fuente la pluma tiene una distribución Gaussiana y que las condiciones atmosféricas son estables o una gran altura de mezclado, entonces la concentración de contaminante en un punto (x, y, z) aportada por la empresa j , en g/m^3 está dada por

$$C_j(x, y, z) = \frac{Q_j}{2\pi\sigma_{y_j}\sigma_{z_j}u_j} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_{y_j}}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-H_j}{\sigma_{z_j}}\right)^2} \quad (3-2)$$

donde no se está considerando la reflexión del contaminante con el piso.

Sí la atmósfera es inestable o neutral, y el valor de la desviación estándar en el plano vertical σ_z es mayor a 1,6 veces la altura de mezclado, según [2]:

$$C_j(x, y, z) = \frac{Q_j}{u_j\sqrt{2\pi}\sigma_y L} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2} \quad (3-3)$$

Para condiciones atmosféricas inestables o neutrales donde el valor de σ_z es menor a 1,6 veces la altura de mezclado, la concentración está dada por :

$$C_j(x, y, z) = \frac{Q_j}{u_j 2\pi \sigma_y \sigma_z} \sum_{N=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{H_j - z + 2NL}{\sigma_z} \right)^2} + e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{H_j + z + 2NL}{\sigma_z} \right)^2} \quad (3-4)$$

Según [2] esta serie converge rápidamente y es suficiente con tomar N desde -4 hasta 4 .

En las anteriores fórmulas para la concentración:

$$X = (x - a_j) \cos \theta - (y - b_j) \sin \theta, \quad Y = (x - a_j) \sin \theta + (y - b_j) \cos \theta$$

Q_j := Tasa de emisión uniforme de la fuente j

u_j := Velocidad del viento que afecta a la pluma de la fuente j

σ_y := Desviación estándar (en metros) de la concentración del contaminante en el plano horizontal.

σ_z := Desviación estándar (en metros) de la concentración del contaminante en el plano vertical.

(a_j, b_j) := coordenadas planas de la fuente j .

L := Altura de mezclado

H_j := Altura de emisión efectiva, que corresponde a la suma de la altura h_j de la chimenea, la altura de la montaña h_{mj} y la elevación de la pluma ΔH_j . Es decir para cada fuente $H = h + h_m + \Delta H$

La elevación de la pluma ΔH (ver [27]) “depende de la capacidad de flotación de los gases calientes y la cantidad de movimiento de los gases que salen verticalmente de la chimenea a una velocidad V_0 ”

Las principales características de ΔH son:

1. La elevación de la pluma es directamente proporcional a la velocidad de salida del gas y la flotabilidad de la pluma (en relación con la temperatura de salida del gas).
2. ΔH es inversamente proporcional a la velocidad del viento y los parámetros de la clase de estabilidad (cuanto mas estable, más baja será la pluma).

La elevación de la pluma en una atmósfera estable, se puede calcular mediante la fórmula

de Briggs [3]

$$\Delta H = 2,6 \left(\frac{F}{us} \right)^{1/3}$$

donde u es la velocidad media del viento, F es un parámetro de flujo y s es un parámetro de estabilidad atmosférica.

$$F = \frac{d^2 V_0 g (T_0 - T_a)}{4T_0}$$

donde d representa el diámetro de la chimenea (en metros), V_0 la velocidad del gas en la salida de la chimenea (en m/s), T_0 la temperatura (en grados Kelvin) del gas en la salida de de la chimenea, y T_a la temperatura ambiente.

El parámetro s se puede calcular mediante la fórmula (ver [23]):

$$s = \frac{g}{T_0} \frac{d\theta}{dz}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y $\frac{d\theta}{dz}$ el gradiente de potencial; que según [27], por defecto, para una atmósfera estable se elige como $0,02^\circ K/m$.

Una vez se conocen los parámetros T_0 , T_a , d y V_0 para cada fuente, la elevación de la pluma se obtiene automaticamente, reemplazandolos en la ecuación de Briggs, por ejemplo si una chimenea con un diámetro de $8m$ emite un gas que sale a una velocidad de $19,245m/s$, con temperatura de $413^\circ K$ en una región donde la temperatura ambiente es $297,16^\circ K$ y la velocidad del viento a la altura de la chimenea $5,64m/s$; entonces la elevación de la pluma correspondiente es:

$$F = \frac{64(19,245)(9,8)(413 - 297,16)}{4(413)} \cong 846,39$$

$$s = \frac{9,8}{413} 0,02 \cong 4,7 * 10^{-4}$$

$$\Delta H = 2,6 \left(\frac{846,39}{4,7 * 10^{-4}(5,64)} \right)^{\frac{1}{3}} \cong 177,14$$

En el caso en que la región sobre la cual se ubican la fuentes no sea totalmente plana, la altura de la chimenea es aumentada sumando la altura con respecto al piso del lugar donde se ubica la fuente.

OBSERVACIÓN: Moses y Carson en [4], mediante un trabajo experimental (analizando 711 plumas) determinaron que la fórmula de Holland resulta muy apropiada para fuentes de gran altura. Sí se tiene en cuenta que la superficie de la tierra de la región Ω no es totalmente plana, y que en consecuencia la altura chimenea

se debe asumir igual a la altura real mas la elevación del lugar donde está ubicada la fuente, entonces la elevación de fuente ubicadas sobre montañas en la región Ω puede calcularse mediante la fórmula de Holland.

Los valores $x = (x - a_j) \cos \theta - (y - b_j) \sin \theta$, $y = (x - a_j) \sin \theta + (y - b_j) \cos \theta$ corresponden un cambio de coordenadas como resultado de aplicar una traslación del origen al lugar de la fuente, seguida de una rotación por el ángulo θ formado entre el eje X y la recta de la dirección del viento. Según [25]

$$\theta = \begin{cases} 2\pi - \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) + \theta' & x > 0, y > 0 \\ \pi - \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) + \theta' & x < 0 \\ -\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) + \theta' & x > 0, y < 0 \end{cases}$$

con θ' un valor muy cercano a cero.

Desviaciones Estándar

Experimentalmente la dispersión vertical y horizontal de la pluma es medida por la desviación estándar de su distribución espacial. Resultados experimentales obtenidos por Pasquill en 1961 y Turner en 1994, [21], que describen gráficamente la dispersión como función de la estabilidad atmosférica y de la distancia a la fuente en la dirección del viento, son presentadas en la figura 3-1, tomadas de [2].

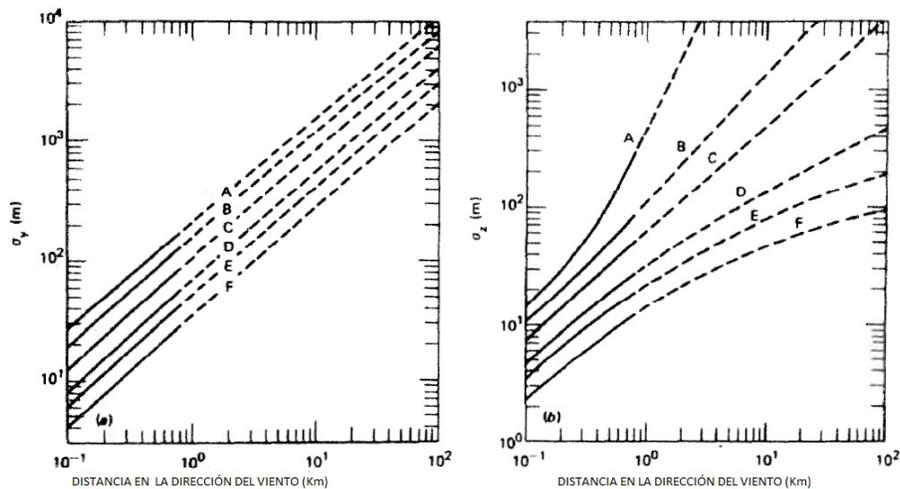


Figura 3-1.: Dispersión horizontal y vertical. Fuente [2]

El rango para los parámetros de estabilidad en la gráfica van desde muy estable, “Clase F”,

a neutral, “Clase D”, hasta muy inestable, “Clase A”.

Debido a la dificultad para obtener los valores de manera precisa, hay trabajos orientados a estabalescer fórmulas que permitan calcular aproximadamente estos valores, por ejemplo las obtenidas por Martin [15]

$$\sigma_y = ax^b \text{ y } \sigma_z = cx^d + f$$

donde a, c, d, f son constantes para las diferentes clases de estabilidad, pero que varían según la distancia a la fuente sea mayor o inferior a $1Km$, la tabla con los valores correspondientes se puede ver en [15]. El valor de b es siempre $0,894Km$.

Los valores para σ_z y σ_y que se usarán aquí son tomados de ¹ [23] y [25].

$$\sigma_{y_j}(x_j) = \begin{cases} 0,9591 & \text{si } x_j \leq 10 \\ 0,1136x_j^{0,9265} & \text{si } 10 < x \leq 200 \\ 0,1385x_j^{0,9015} & \text{si } 200 < x \leq 10000 \\ 0,2030x_j^{0,8600} & \text{si } 10000 < x \leq 100000 \\ 1 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$\sigma_{z_j} = \begin{cases} 0,07925 & \text{si } x_j \leq 10 \\ 4,828 * 10^{-5}(\log x_j)^{8,8776} & 10 < x_j \leq 2 * 10^2 \\ 3,1808 * 10^{-6}(\log x_j)^{10,5295} & 2 * 10^2 < x_j \leq 10^3 \\ 1,808 * 10^{-7}(\log x_j)^{11,9998} & 10^3 < x_j \leq 5 * 10^3 \\ 1,892 * 10^{-9}(\log x_j)^{14,1284} & 5 * 10^3 < x_j \leq 10^5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\sigma_{z_j}\sigma_{y_j} = \begin{cases} 0,07925 & x_j \leq 10 \\ 4,828 * 10^{-5}(\log x_j)^{8,8766} & 10 < x_j \leq 200 \\ 3,108 * 10^{-6}(\log x_j)^{10,5295} & 200 < x_j \leq 10^3 \\ 1,808 * 10^{-7}(\log x_j)^{11,9998} & 10^3 < x_j \leq 5 * 10^3 \\ 1,892 * 10^{-9}(\log x_j)^{14,1284} & 5 * 10^3 < x_j \leq 10^5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¹El archivo *vaz4.briggs.mod* en SIPAMPL database referido por este autor

3.2. Formulación del problema

SUPOSICIONES DEL MODELO

- La dispersión de la pluma tiene una distribución Gaussiana.
- Existe una montaña en la región Ω y la altitud de cada punto de su superficie es conocido.
- La atmósfera es estable.
- El costo total de reducción del contaminante es una función lineal².
- La concentración de contaminación en cada punto (x, y, z) de Ω es una combinación lineal de los aportes de cada fuente, es decir:

$$C(x, y, z) = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{2\pi\sigma_{y_j}\sigma_{z_j}u} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_{y_j}}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-H_j}{\sigma_{z_j}}\right)^2}$$

MODELO MATEMÁTICO PARA EL PROBLEMA

Bajo las suposiciones anteriores, el problema de minimización de costos de control de contaminación de aire puede ser formulado por medio del siguiente problema de programación semi-infinita:

$$\begin{cases} \text{minimizar } G = \sum_{j=1}^n w_j & w_j \in [0, 1], j = 1, \dots, n. \\ \text{sujeto a } \sum_{j=1}^n (1 - w_j) \frac{Q_j}{2\pi\sigma_{y_j}\sigma_{z_j}5,64} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_{y_j}}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-H_j}{\sigma_{z_j}}\right)^2} \leq \varphi & (x, y, z) \in \Omega \end{cases}$$

Los parámetros de dispersión σ_y , σ_z y la elevación de la pluma ΔH se calculan como se describió en la sección anterior.

Es importante tener en cuenta que la restricción sobre la función de costo puede ser mas débil. Si se emplea una una función convexa, el algoritmo empleado para la solución del problema no necesita ser modificado.

²Puede ser alguna función convexa, esto sólo modifica la forma de la función objetivo en el planteamiento del problema

3.2.1. Reflejo del contaminante debido al choque con el piso

Cuando el viento que transporta el contaminante producido por alguna fuente j , golpea el piso, se genera un fenómeno de reflexión, haciendo que la concentración en los puntos cercanos sea un poco mayor. Este aumento es equivalente a la concentración generada por una fuente imaginaria con una chimenea del mismo tamaño que la de j , que se ubica simétricamente por debajo del punto donde se asienta la fuente real. En el modelo Gaussiano este fenómeno provoca la aparición de un segundo término exponencial.

Cuando la superficie de la tierra no es totalmente plana, generalmente el choque no ocurre a la misma altura $z = 0$, por ejemplo si hay una montaña en la región, el aumento en la concentración debido a este fenómeno ocurre sobre su superficie. Si se considera una fuente virtual simétrica a la original con respecto a un plano horizontal que pasa por la base de la fuente, entonces la concentración aportada por esta fuente a los puntos de la superficie de la montaña es inferior a la que realmente ocurre.

Para evitar este inconveniente, con cada fuente en Ω se considera otra virtual, simétrica con respecto al plano horizontal que contiene al punto (x, y, z_m) sobre la superficie donde ocurre el choque del contaminante. De esta manera, para una fuente fija, su asociada virtual varía la altura de su chimenea dependiendo de la elevación del terreno por debajo del punto (x, y, z) donde se está estimando la concentración³. Esto se incorpora al modelo restando a la altura efectiva de la fuente la elevación de la superficie z_m abajo del punto (x, y, z) , donde se va a calcular la concentración.

Si se escribe $Z = z - z_m$, es decir Z es la altura del punto (x, y, z) sobre la superficie de la tierra en la región Ω , entonces término exponencial que aparece por la fuente virtual, en el modelo Gaussiano, basta con reemplazar z por Z , como se puede ver luego. La notación es la misma dada al comienzo.

$$C_j = \frac{Q_j}{2\pi\sigma_{y_j}\sigma_{z_j}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-H_j}{\sigma_z}\right)^2} + e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Z+H_j}{\sigma_z}\right)^2}$$

La formulación del problema para este caso es similar a la planteada previamente, por lo que no se escribe aquí. Sin embargo en el capítulo cinco se presentaran resultados para ejemplos con esta consideración.

³El punto (x, yz) se ubica exactamente arriba de (x, y, z_m) sobre la misma recta vertical que pasa por el punto $(x, y, 0)$

3.3. Un caso particular

A continuación se plantea explícitamente el problema, asumiendo que hay diez fuentes ($n = 10$) en la región $\Omega = [0, 40000] \times [0, 40000] \times [0, 17000]$. La ubicación de las fuentes se puede ver en la figura 3-2

La norma ambiental φ que se considera es la establecida para la concentración del dióxido de Azufre SO_2 por el Ministerio Colombiano de Medio Ambiente, ver [16], mediante resolución 610 de 2010 que establece: “para SO_2 el límite máximo permisible a $25^\circ C$ y $1Atm$ de presión es $80\mu m/m^3$, $250\mu m/m^3$, $750\mu m/m^3$ en tiempos de exposición de 1 año, 24 y 3 horas respectivamente.”

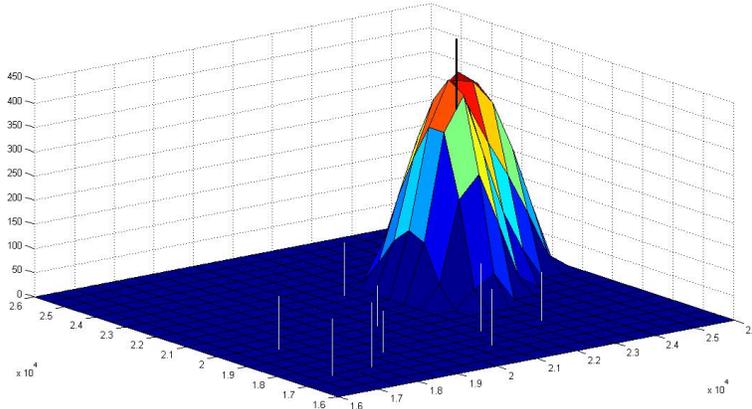


Figura 3-2.: Ubiación de las fuentes de contaminación

Suponiendo que la concentración de contaminación en cada punto (x, y, z) de Ω es una combinación lineal de los aportes de cada fuente entonces

$$C(x, y, z) = \sum_{j=1}^{10} \frac{Q_j}{2\pi\sigma_{y_j}\sigma_{z_j}u} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_{y_j}}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-H_j}{\sigma_{z_j}}\right)^2}$$

En el modelo para la concentración los valores de Q_j , T_0 , d_j , h_j , V_{0_j} son tomadas de [25], las coordenadas planas de cada fuente son la mismas que aparece allí salvo por una traslación horizontal. La temperatura ambiente $T_a = 297,16^\circ K$ corresponde con la temperatura a la cual se establece el límite de concentración por la legislación para (Bogotá) Colombia en [16]. Estos parámetros se presentan en la tabla 3-1.

Se asumirá que una de las fuentes está ubicada sobre una montaña a una altura $h_m = 400m$, por tanto la altura efectiva para la chimenea es calculada como la suma de la elevación de la pluma con la altura de la chimenea y la altura de la elevación del terreno donde se construyo la fuente, en este caso $400m$.

Fuente	a_j	b_j	Q_j	T_{0_j}	T_{a_j}	d_j	V_{0_j}	h_j
Fuente 1	17000	17500	2882.6	413	298	8	19.245	183
Fuente 2	17400	19700	2882.6	413	298	8	19.245	183
Fuente 3	18900	18300	2391.3	413	298	7.6	17.690	160
Fuente 4	21000	17500	2391.3	413	298	7.6	17.690	160
Fuente 5	21000	22200	2173.9	413	298	6.3	23.404	152.4
Fuente 6	22700	21000	2173.9	413	298	6.3	23.404	152.4
Fuente 7	23000	18400	1173.9	413	298	4.3	27.128	121.9
Fuente 8	18000	17500	1173.9	413	298	4.3	27.128	121.9
Fuente 9	20000	20000	1304.3	413	298	5	22.293	91.4
Fuente 10	21500	18400	1304.3	413	298	5	22.293	91.4

Tabla 3-1.: Parámetros para calcular la concentración de Contaminación.

Así el problema de minimizar el costo de esta reducción, cumpliendo con la norma esta dado por

$$\text{Minimizar } G = \sum_{j=1}^{10} w_j \quad w_j \in [0, 1]$$

$$\text{Sujeto a } \sum_{j=1}^{10} (1 - w_j) C_j(x, y, z) \leq 250 \times 10^{-6} \quad (x, y, z) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$$

3.4. Algoritmo para resolver el problema de minimización de costos del control de contaminación del aire en una región tridimensional

En esta sección se presenta el algoritmo para resolver el problema formulado en las secciones anteriores y que es una versión del Método Estocástico de Aproximaciones Externas, [24].

Se notará $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_j) \in [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, además en el modelo presentado en la sección 2 de este capítulo las restricciones se expresan de manera que adopten de la forma $g(\mathbf{w}, \mathbf{x}) \leq 0$ con $\mathbf{x} \in \Omega$.

Para establecer las restricciones del problema n -ésimo en la sucesión para aproximar $P(\Omega)$, el algoritmo resuelve el problema interno de optimización:

$$IP : \quad \max_{\mathbf{x} \in \Omega} g(\mathbf{w}_{n-1}, \mathbf{x}) \quad (3-5)$$

donde \mathbf{w}_{n-1} es el óptimo del problema $P(\Omega_{n-1})$.

La solución aproximada \mathbf{x}^* del problema (3-5) se halla mediante el método de proyección del gradiente, de manera que \mathbf{x}^* pertenezca al conjunto ϵ -estacionario $\Omega_{stat}^\epsilon(\mathbf{w}_{n-1}) := \{\mathbf{x} \in \Omega / \|Proy_\Omega(\mathbf{x} + \nabla_{\mathbf{x}}g(\mathbf{w}_{n-1}, \mathbf{x})) - \mathbf{x}\| \leq \epsilon\}$ del problema IP es decir, al conjunto de todos los puntos, que cumplen las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden con exactitud $\epsilon > 0$. Ahora se presenta el algoritmo

Procedimiento SPROC.ACTIV.Medio.

Paso 0. $i = 1$

Parámetros de entrada: $\mathbf{w} \in [0, 1]^n$, $\Omega' \subset M_f(\Omega)$.

Parámetros de salida: $\theta \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\Delta\Omega \in M_f(\Omega)$.

Parámetros de procedimiento: $\delta > 0$, $\epsilon > 0$.

Paso 1. Aplicar el algoritmo de la búsqueda local (algoritmo proyección del gradiente) para solucionar el problema $\max_{\mathbf{x} \in \Omega} g(\mathbf{w}, \mathbf{x})$ empezando desde un punto aleatorio \mathbf{x}_{i0} para obtener un punto $\mathbf{x}_i^* \in \Omega$ tal que $\mathbf{x}^* \in \Omega_{stat}^\epsilon(\mathbf{w})$ y $g(\mathbf{w}, \mathbf{x}_{i0}) \leq g(\mathbf{w}, \mathbf{x}_i^*)$.

Paso 2. Obtener $\theta_i = \max(g(\mathbf{w}, \mathbf{x}_1^*), \dots, g(\mathbf{w}, \mathbf{x}_i^*))$

paso 3. Si $i\theta_i \leq \delta$ e $i < N$ entonces $i = i + 1$ ($N \in \mathbb{Z}^+$ suficientemente grande), regresar al paso 1.

paso 4. (Criterio de parada del algoritmo) Si $i = N$ hacer $\theta = 0$, $\Delta\Omega := \emptyset$ y salir.

Paso 5. Hacer: $\theta = \theta_i$, $\Delta\Omega := \{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i^*\}$.

Procedimiento SMETH.ACTIV.Medio

Paramétros: ϵ, N, δ

Paso 0. $n := 1$ $\Omega_1 := \emptyset$.

Paso 1. Encontrar \mathbf{w}_n -solución al problema $P(\Omega_n)$.

Paso 2. Llamar al procedimiento SPROC.ACTIV.Medio para obtener $\Delta\Omega_n$ y θ_n .

Paso 3. Si $\theta_n = 0$ terminar.

Paso 4. Formar el conjunto de restricciones

$$\Omega_{n+1} := \Delta\Omega_n \cup \bigcup_{\substack{j:\theta_j > \delta/n \\ 1 \leq j \leq n-1}} \Delta\Omega_j$$

Paso 5. $n = n + 1$, Regresar al paso1.

El algoritmo termina cuando no encuentra mas puntos activos en Ω que no cumplen las restricciones del conjunto factibles del problema finito generado en la iteración anterior. N representa el máximo número de búsquedas realizadas sin que se encontraran puntos activos.

Para evaluar un punto $w \in W \subset \mathbb{R}^n$ como solución al problema $P(\Omega)$ localmente, se utiliza la función cuasi-óptima (ver [6])

$$\Theta(\mathbf{w}, \Omega') = \left(G(\mathbf{w}) - \min_{\substack{\mathbf{w} \in [0,1]^n \\ g(\mathbf{w}, \mathbf{x}) \leq 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega'}} G(\mathbf{w}), \max_{\mathbf{x} \in \Omega'} g(\mathbf{w}, \mathbf{x}) \right) \quad (3-6)$$

La función cuasi-óptima Θ cumple el papel de criterio de optimización para el método SMETH.ACTIV.Medio. Nótese que si $\bar{\mathbf{w}}$ es solución al problema $P(\Omega)$ entonces $\Theta(\bar{\mathbf{w}}, \Omega) = 0$.

Volkov y Zavriev en [24] demostraron que cualquier trayectoria del método SMETH.ACTIV converge al conjunto cuasi-óptimo del problema $P(\Omega)$ sí la función cuasi-óptima cumple las suposiciones *A1* y *A2* de [24]. La primera establece que cada uno de los problemas finitos $P(\Omega_n)$ tiene solución, mientras *A2* que la función cuasi-óptima cumple condiciones de continuidad. Fedosova en [7] demostró que la función cuasi-óptima 3-6 cumple estas hipótesis y que por tanto el método SMETH.ACTIV.Medio es una versión del método SMETH.ACTIV y así cualquier trayectoria del Método SMETH.ACTIV.Medio converge al conjunto cuasi-óptimo con probabilidad uno.

4. Resultados numéricos

El método empleado para resolver el problema de programación semi-infinita fue implementado en MATLAB (ver anexo A). Como ya se había mencionado, es una versión del método estocástico de aproximaciones externas de Volkov-Zavriev, que emplea un método multistart para la búsqueda de los parámetros relevantes que genera el conjunto de restricciones de los problemas $P(\Omega_n)$ que aproximan el problema original $P(\Omega)$.

Eligiendo como contaminante el dióxido de azufre SO_2 y la norma colombiana $250 \times 10^{-6} g/m^3$ para Bogotá [16] como el límite para la concentración, el problema de minimización de costos del control de contaminación del aire en una región Ω con diez fuentes, tiene la siguiente formulación:

$P(\Omega)$:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && G = \sum_{j=1}^{10} w_j && w_j \in [0, 1] \\ & S. t. && \sum_{j=1}^{10} (1 - w_j) C_j(x, y, z) \leq 250 \times 10^{-6} && (x, y, z) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

El escenario del problema incluye una montaña en la región Ω , de la que se supone que se conoce con buena precisión la elevación de cada uno de sus puntos. El algoritmo usado para obtener las restricciones de los problemas $P(\Omega_n)$ no considera los puntos bajo la superficie de la montaña como puntos posibles para el conjunto de parámetros. Esto explica tal suposición.

Las fuentes están ubicadas según las dos primeras columnas de la tabla **3-1**, la que tiene coordenadas planas en el punto (22700, 21000), está sobre la montaña a una altura de 400m. Una panorámica de la ubicación de las fuentes para este problema puede verse en la figura **3-2** del capítulo anterior.

A continuación se presentan los resultados obtenidos para diferentes consideraciones de Ω . En algunos casos se tiene en cuenta el fenómeno generado por el choque del contaminante con la superficie, denominado reflejo. En todos los casos se asume que velocidad del viento es $5,6371m/s$ en la dirección $= 3,996$ (rad), obtenidas por Wang-Luus en [25].

4.1. Caso: $\Omega = [0, 20000] \times [0, 20000] \times [0, 100]$ con reflejo.

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}
0.9990	0.9991	0.9990	0.9920	0	0	0	0.9983	0	0.9660

Tabla 4-1.: Resultados numéricos. Caso con reflejo.

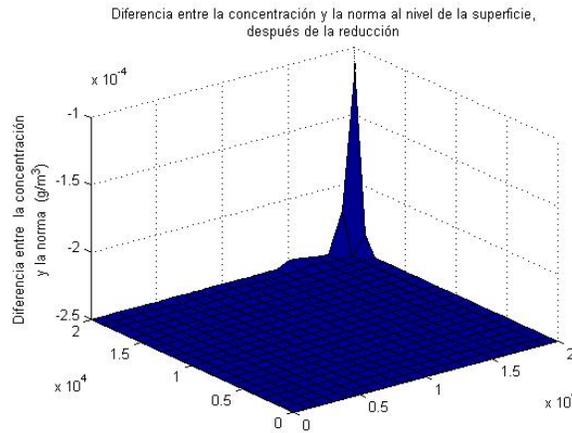


Figura 4-1.: Diferencia: Concentración - Norma, sobre la superficie.

Tomando $W_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ como punto inicial, es decir suponiendo que las fuentes no tienen que reducir sus emisiones, el costo aproximado del control de contaminación obtenido en 50 iteraciones es 5,9534. En la tabla 4-1 se muestran los porcentajes que debe reducir cada fuente.

El subconjunto finito de Ω que genera las restricciones es determinado por el procedimiento SPROC.ACTIV.Medio. Cada restricción se obtiene de la siguiente forma:

$$\sum_{j=1}^{10} (1 - w_j) C(a_j) \leq 250 \times 10^{-6}$$

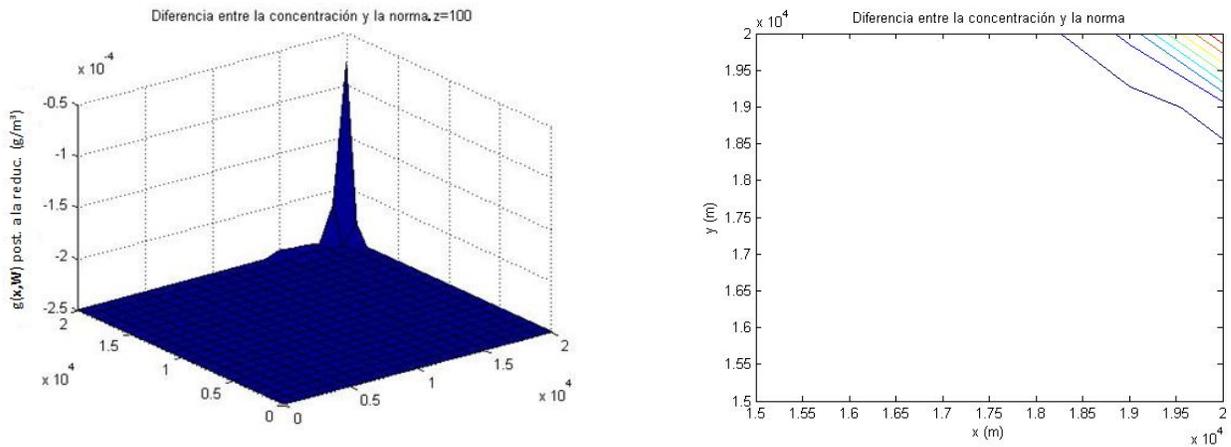


Figura 4-2.: Diferencia: Concentración - Norma, en $z = 100m$, después de la reducción.

donde $a_j \in \Omega$, $1 \leq j \leq 50$, es la fila j -ésima de la matriz de restricciones del subproblema que aproxima el original, la cual se presenta en el anexo A2.

La evolución de los factores de reducción del contaminante para cada una de las fuentes, a lo largo de las iteraciones del algoritmo, comenzando en W_0 , se muestra en las figuras 4-3 y 4-4. A pesar que en las gráficas presentadas aquí, los factores de reducción se comportan como funciones monótonas, en general este fenómeno puede no ocurrir debido a que el conjunto de restricciones se va modificando en cada paso.

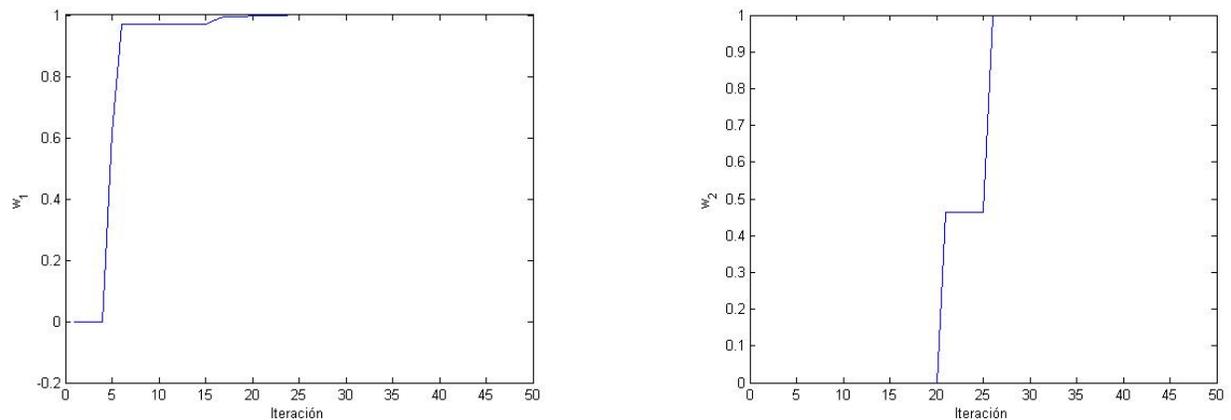


Figura 4-3.: Comportamiento de w_1 , w_2 a lo largo de las iteraciones

[htb]

Para verificar que se están cumpliendo las restricciones, se ha graficado la diferencia $g(\mathbf{w}, \mathbf{x})$ entre la concentración y la norma, los resultados para el nivel del piso y el plano a una altura de de 100 metros se muestran en las figuras 4-1 y 4-2 respectivamente. Observese que al nivel de la superficie $g(\mathbf{w}, \mathbf{x}) < -10^{-4}g/m^3$, mientras que a 100m de altura, existen puntos en los que $-10^{-4}g/m^3 < g(\mathbf{w}, \mathbf{x}) < -0.5^{-4}g/m^3$, como se esperaría si se tiene en cuenta que estos puntos están más cerca de la altura efectiva de la chimenea.

4.2. Caso: $\Omega = [0, 40000] \times [0, 40000]$, sobre la superficie

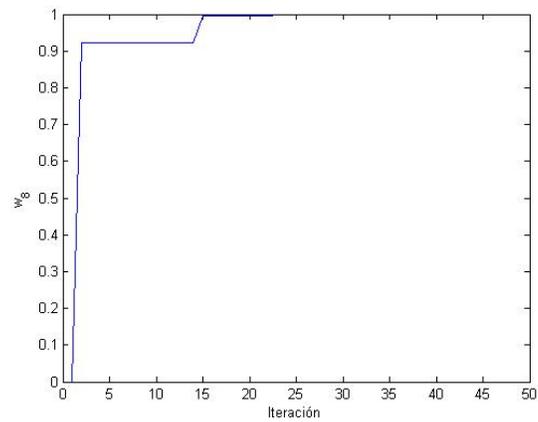
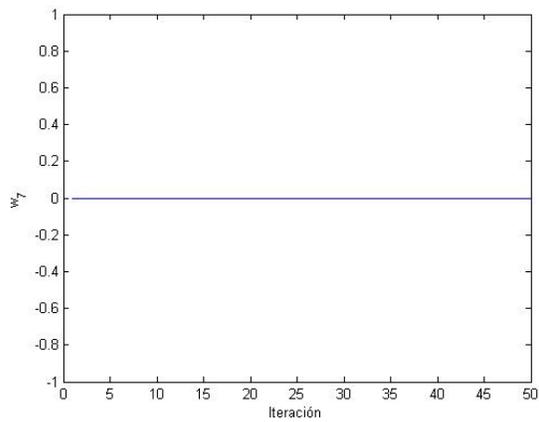
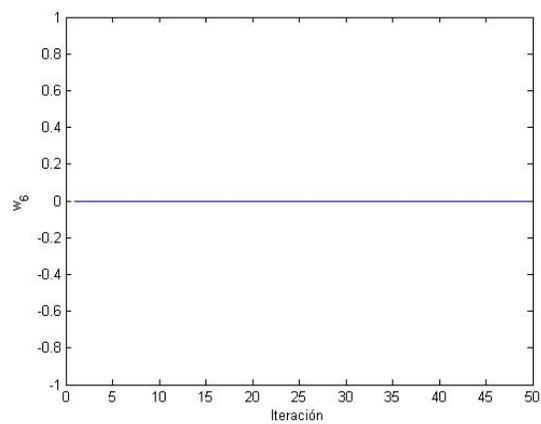
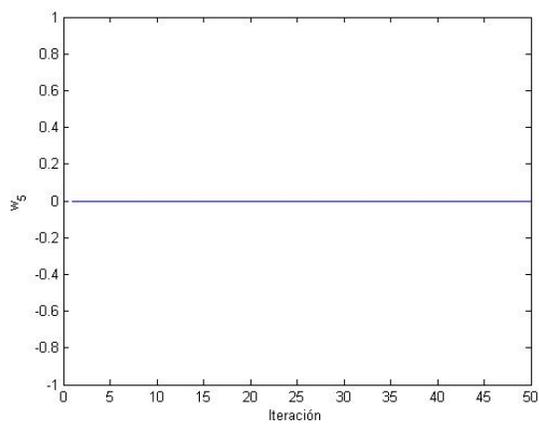
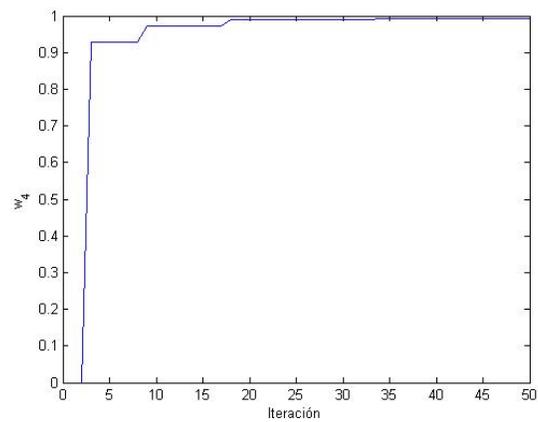
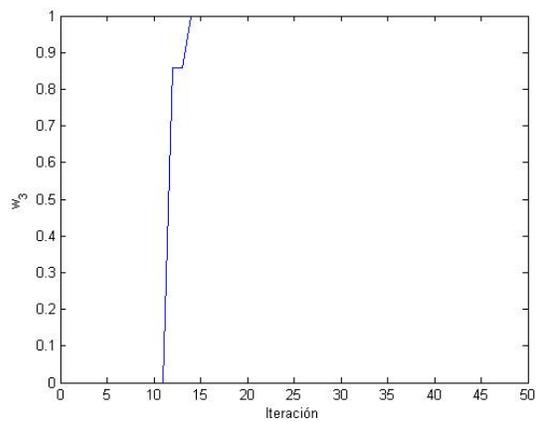
w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}
0.9988	0.9990	0.9989	0.9916	0	0	0.9566	0.9982	0.8801	0.9691

Tabla 4-2.: Resultados numéricos para control de contaminación. Sobre la superficie.

Considerando $\Omega = [0, 40000] \times [0, 40000]$, la norma ambiental como $350\mu g/m^3$ y teniendo en cuenta el efecto de reflejo debido al impacto del SO_2 con la superficie, la solución aproximada del problema se obtuvo en 27 iteraciones y se presenta en en la tabla 4-2. Para este caso se eligió $W_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ como punto inicial y la distribución de las fuentes se mantuvo igual que en las secciones anteriores. El subconjunto Ω_{27} a partir cual se generaron las restricciones para el problema $P(\Omega_{27})$, cuya solución permite aproximar la del problema original, se muestran gráficamente en la figura 4-5.

El valor de la función de costo en el punto óptimo es 7.7922, es decir que en un escenario como el descrito con anterioridad, el costo mínimo de reducir las emisiones para que la concentración sea inferior a $350\mu g/m^3$ es 7.7922 veces el valor monetario de reducir una unidad porcentual.

Finalmente es importante señalar que se ha resuelto el problema para la región $\Omega = [0, 40000] \times [0, 40000] \times [0, 400]$, considerando el reflejo del contaminante en la superficie. La solución que se obtuvo a partir de diferentes puntos iniciales sugieren la reducción de la totalidad de las emisiones en todas las fuentes. Por citar dos casos, para las fuentes 1 y 10 los factores de reducción son 0,999999756435567 y 0,999999461704490. Estos resultados no deber ser alarmantes si se tiene en cuenta que en puntos cercanos a la altura efectiva de las chimeneas, la concentración es exageradamente alta comparada con la que permite la norma.



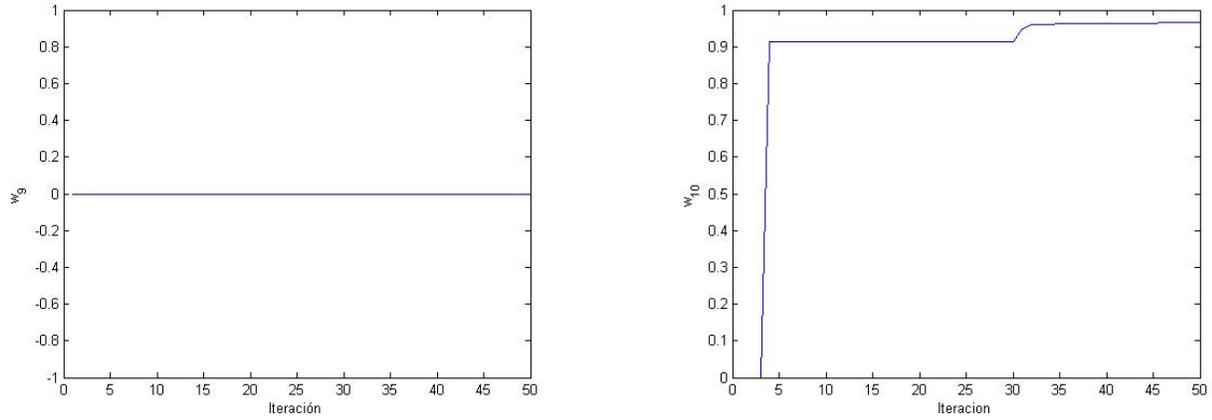


Figura 4-4.: Comportamiento de w_j a lo largo de las iteraciones

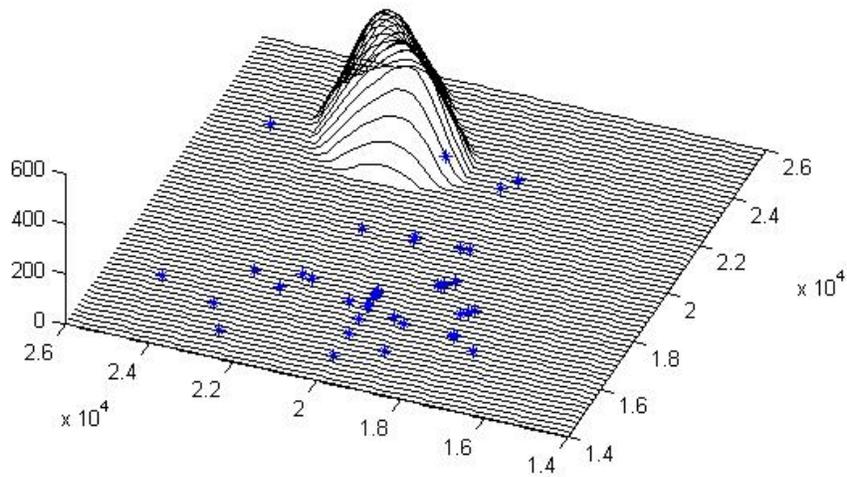


Figura 4-5.: parámetros para rest relevantes. Caso superficie.

5. Conclusiones y Trabajo Futuro

5.1. Conclusiones

- El problema de minimización de costos del control de contaminación del aire en una región tridimensional puede ser descrito como un problema de programación semi-infinita. En este trabajo se ha usado un modelo Gaussiano para calcular la concentración del contaminante y se han realizado experimentos numéricos para el dióxido de azufre, usando parámetros reales. En algunos casos fue aplicada la norma Colombiana de $250\mu g/m^3$ a una temperatura ambiente de $25^{\circ}C$.
- En el escenario empleado para los experimentos numéricos se introdujo una montaña (por primera vez), con una altura máxima de $400m$. Los efectos que se generan como consecuencia de ubicar una fuente allí, son captados por la elevación de la pluma y las medidas de dispersión, debido a que cuando hay mayor altura el viento tiene menor fricción, y además la cantidad de atmósfera disponible para la dilución de los contaminantes es mayor.
- Para resolver el problema de programación semi-infinita se ha aplicado una versión del método estocástico de aproximaciones externas [24]. El algoritmo fue implementado en MATLAB y se presenta en Anexo A. Los resultados numéricos obtenidos reflejan que las fuentes ubicadas dentro de la región donde se ha establecido la norma, están obligadas a reducir por encima del 90 % de las emisiones actuales; estos resultados coinciden con la premisa de que fuentes fijas de contaminación no deben establecerse dentro de las ciudades y es coherente con el hecho las normas ambientales son diferenciales en las zonas industriales.
- Al aplicar el modelo para futuros escenarios, la solución permite estimar los efectos que genera el establecimiento de alguna fuente en una región.
- El número de iteraciones del método en los experimentos numéricos, es mayor comparado con el experimento realizado en el caso bidimensional. Causas de este hecho son los valores muy cercanos a cero (del orden de 10^{-5}) para la concentración en algunas partes de región estudiada, y la inmensa superioridad en el número de puntos de control en el caso tridimensional.

5.2. Trabajo Futuro

En un futuro se podrían emprender investigaciones similares y fortalecer la investigación realizada.

- Proponiendo modelos que permitan determinar en que medida se cumple o no una norma ambiental, cuando esta ha sido establecida de manera que resulta mas exigente en unas regiones que otras, teniendo en cuenta la distancia a algún lugar fijo (por ejemplo un hospital).
- Vinculando parámetros en el modelo, que tengan en cuenta la posibilidad de que la información suministrada por una compañía acerca de los gastos, sea modificada para obtener beneficios. Esto es muy llamativo en el caso del problema de minimización de costos del control de contaminación del aire, cuando se ponen pesos diferentes al costo de reducir una unidad porcentual para las diferentes fuentes con base en la información suministrada por las mismas compañías.

A. Anexo: Programa: Versión del método de aproximaciones externas

```
%----- DATOS DE ENTRADA-----
```

```
Introducir:
```

```
u=5.64;
```

```
a y b, vectores de las cordenadas planas de las fuentes
```

```
 $d_i$  vector de los diámetros
```

```
 $T_0$  y  $V_0$  vectores de la temperatura y velocidad del gas a la salida de la chimenea .
```

```
Q vector de la concentración a la salida de la chimeneas .
```

```
 $T_a$  Temperatura ambiente
```

```
h vector de las alturas de las chimeneas (incluir la altura de la montaña)
```

```
valor de la norma en la región: phi
```

```
Calcular
```

```
deltaH=elevacion_pluma(h, di, To, Ta, Vo, u); % mediante form. Briggs.
```

```
H=h+deltaH';
```

```
%----- SMETH.ACTIV.medio -----
```

```
delta % introducir parámetro de control para la funcion cuasi-óptima
```

```
LB % cotas inferiores para las variables  $W_j$ 
```

```
LU % cotas superiores para las variables  $W_j$ 
```

```
S=[];
```

```
for N=1:m % m bastante grande, el algoritmo debe terminar sin que llegue a m
```

```
if N==1
```

```
A=[];
```

```
B=[];
```

```
W0= % introducir punto inicial.
```

```
end
```

```

[W,fval]=fmincon(@(W)W(1)+W(2)+W(3)+W(4)+W(5)+W(6)+W(7)+W(8)
+W(9)+W(10),W0,A,B,[],[],LB,LU)

%-----SPROC.ACTIV-----

for j=1:n % n es un entero positivo suficientemente grande
xi=0+40000*rand();
yi=0+40000*rand();
zi=40000*rand();
[P_opt,val]=Gradproyres(H,Q,a,b,u,xi,yi,zi,W0); % obtiene un punto  $P_j$  donde la res-
tricción es mayor o igual que en el punto aleatorio
if j==1
tetha_i=val
end

tetha_i=max(val,tetha_i);
jtetha_i=j*tetha_i;

if jtetha_i>delta

Pi=[xi,yi,zi]

concentr_Popt=concentracion( H,Q,a,b,u,P_opt(1),P_opt(2),P_opt(3));
concentr_alea=concentracion( H,Q,a,b,u,xi,yi,zi);
A=[[A];[-concentr_alea];[-concentr_Popt]];
Bopt=(phi)-sum(concentr_Popt);
Bale=(phi)-sum(concentr_alea);
B=[B;Bale;Bopt];
DS=[[Pi];[P_opt]'];
porcent=W0 ;
TETHA=tetha_i;
j

break
end

if j>n-1
disp('limite maximo para sproc')

```

```
break
end
S=[[S];[DS]]; %conjunto de restricciones para el paso  $n + 1$ 
tamS=size(S);
Ns=tamS(1);
A;
B;
N=N+1;

end
```

B. Parámetros para las restricciones para el problema que aproxima la solución de caso Ω_1 Reflejo

x	y	z	x	y	z
1.6752	1.7752	0.0060	1.8566	1.8663	0.0015
1.6289	1.9762	0.0088	1.9916	1.9970	0.0033
1.9864	1.9944	0.0080	1.9945	1.9987	0.0057
1.5124	1.9357	0.0023	1.9339	1.3363	0.0086
1.3194	1.6010	0.0041	1.9966	1.8704	0.0045
1.1595	1.9558	0.0076	1.9997	1.9956	0.0014
1.9076	1.9492	0.0042	1.6772	1.7736	0.0096
1.5836	1.5577	0.0050	1.8700	1.8509	0.0062
1.7430	1.7333	0.0084	1.6775	1.7767	0.0036
1.5169	1.9007	0.0022	1.8726	1.8505	0.0045
1.7470	1.9525	0.0036	1.7157	1.9984	0.0004
1.2405	1.5481	0.0040	1.8709	1.8536	0.0063
1.7789	1.7789	0.0062	1.7767	1.7782	0.0010
1.6212	1.8492	0.0051	1.7749	1.7779	0.0009
1.5402	1.9467	0.0093	1.7768	1.7764	0.0057
1.9938	1.8742	0.0067	1.7831	1.7700	0.0037
1.5608	1.4152	0.0066	1.9976	1.9997	0.0025
1.6566	1.7952	0.0034	1.9991	1.8640	0.0031
1.8544	1.8675	0.0099	1.8709	1.8518	0.0052
1.7273	1.9958	0.0053	1.8697	1.8539	0.0085
1.5490	1.4107	0.0075	1.9996	1.8634	0.0060
1.7761	1.7755	0.0053	1.9461	1.9684	0.0006
1.6601	1.7944	0.0065	1.7618	1.1070	0.0028
1.0447	1.0779	0.0085	1.7139	1.9991	0.0048

Tabla B-1.: Conjunto de parámetros para restricciones problema Ω_1 Reflejo

Bibliografía

- [1] C.H. Bosanquet and J.L. Pearson, *The spread of smoke and gases from chimneys*, Trns. Faraday Society **32** (1936), no. 0, 1249-1263.
- [2] R. W. Boubel, D. L. Fox, D. B. Turner, and A. C. Stern, *Fundamental of Air Pollution*, 3rd ed., Academic Press, 1994.
- [3] G. Briggs, *A Plume Rise Model Compared with Observations*, Journal of the air pollution control association **15** (1965), no. 9, 433-438.
- [4] J. E. Carson and H. Moses, *The Validity of Several Plume Rise Formulas*, urnal of the Air Pollution Control Association **19** (1969), no. 11, 862-866.
- [5] V.V Fedossov and A.V. Fedossova, *Optimization of industrial pollution interprises conflict with the standars of contamination (En Ruso)*, Testing Diagnostics **168** (2012), no. 6, 24-30.
- [6] A.V. Fedossova, V. Kafarov, and D.P. Mahecha, *Solución numérica al problema de control de contaminación de aire*, Revista colombiana de la computación **4** (2005), no. 2, 21-34.
- [7] A.V. Fedossova, *Algorimos estocásticos de aproximaciones externas para solución de problemas convexos de optimización semi-infinita*, Ph.D Tesis, Universidad Estatal de Moscú, 2000.
- [8] T. Godish, *Air quality*, 4th ed., Lewis publishers, 2004.
- [9] S. Gorner and R. Reemtsen, *Numerical Methods for semi-infinite programming: a survey*, Non convex optimization and applications, Semi-infinte programming. Kluwer academic P. **25** (1998), 195-275.
- [10] P.R. Gribik, *Selected aplication of Semi-infinite programming*, 1st ed., Constructive Approaches to Mathematical Models, C. V. Coffman and G. J. Fix, eds.,Academic Press, New York, London, 1979.
- [11] R. D. Griffin, *Principles of air quality management*, 2nd ed., CRC Press, Taylor and Francis group, 2007.
- [12] S.A. Gustafson and K.O. Kortanek, *Mathematical models for air pollution control*, 1st ed., R.A. Deininger (ed.), Arbor Science Publishers, 1973.
- [13] R. Hettich, *An implementation of a method for semi-infinite programming*, Mathematical programming **34** (1986), no. 3, 354-361.
- [14] R. Hettich and K. Kortanek, *Semi-infinite programming: Theory, methods and applications*, SIAM Review. **35** (1993), no. 3, 380-430.
- [15] D. O. Martin, *The change of Concentration standar Desviations with distance*, Journal of air pollution Control **26** (1976), no. 2, 145-147.
- [16] Ministerio de Ambiente y Desarrollo Territorial. Resolución 0610 de 2010 [En línea], *Normatividad Ambiental Colombia*. <http://www.alcaldiabogota.gov.co/sisjur/normas/Norma1.jsp?A;39330#2> ([Consulta: 02 de marzo de 2012].)
- [17] D. Moreira and M. Vielhena, *Air Pollution and Turbulence.*, 1st ed., CRC Press, 2010.
- [18] F. Pasquill and F.B Smith, *Atmosferic difusion*, 3rd ed., Ellis Horwood Limited, 1983.

-
- [19] R. Reemtsen, *Semi-infinite programming: Discretization methods*, En C. A. Floudas and P. M. Pardalos (Eds.), Encyclopedia of optimization, Kluwer pub. **5** (2001), 101-107.
- [20] O.G. Sutton, *A theory of eddy diffusion in the atmosphere*, Proceedings of the Royal Society **135** (1932), no. 826, 143-165.
- [21] D. B. Turner, *Workbook of atmospheric Dispersion Estimates*, 2nd ed., Lewis publishers, 1998.
- [22] I. Vaz, *Aplicaciones Métodos y herramientas para programación semi-infinita no lineal (En portugués)*., 1st ed., Tesis Doctoral. U. Minho, 2003.
- [23] I. Vaz and E. Ferreira, *Air pollution control with semi-infinite programming*, Journal of Applied Mathematical Modeling **33** (2009), no. 4, 1957-1969.
- [24] Y.V. Volkov and S. K. Zavriev, *A General Stochastic Outer Approximations method*, SIAM J. Control Optim. **35** (1997), no. 4, 1387-1421.
- [25] B.C. Wang and R. Luus, *Reliability of optimization procedures for obtain global optimum.*, AIChE J. **24** (1978), no. 4, 619 - 626.
- [26] Y. Wardi, *A stochastic Algorithm for optimization problems with continua of inequalities.*, Journal of optimization theory and applications. **56** (1988), no. 2, 286-311.
- [27] K. Warner and C. Wark, *Contaminación de aire: origen y control*, 3rd ed., Limusa Ed., 2010.
- [28] P. Zanetti and A. Daly, *Ambient air Pollution*, 1st ed., En P. Zannetti, D. Al-Ajmi, and S. Al-Rashied (Eds.), Arab school of Science and Technology, 2007.