

TESIS DE MAESTRÍA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS ASTRONOMÍA

Perfil de masa de Abell 370 a partir de
sus propiedades como Lente
Gravitacional

Roger Anderson Hurtado Mojica

Director de Tesis
Leonardo Castañeda Colorado

Maestría en Astronomía
Observatorio Astronómico Nacional
Universidad Nacional de Colombia

*Dedicado a
mi hijo Roger Steve, mi familia
y a aquel hermano taciturno en el desuso del orbe*

Agradecimientos

A mis padres por otorgarme su cariño, su amor y sobre todo su fuerza.

A mi esposa por su incomparable tolerancia y apoyo en cada noche de trabajo y desvelo.

Al profesor Leonardo Castañeda Colorado, del Observatorio Astronómico Nacional, por su incomparable colaboración y dirección de este trabajo, pero sobre todo por su querida amistad.

Al profesor Juan Manuel Tejeiro, del Observatorio Astronómico Nacional, por la dirección del Grupo de Gravitación y Cosmología, al cual pertenezco.

Al Grupo de Gravitación y Cosmología del Observatorio Astronómico Nacional, por las incontables tardes de seminario.

Al Observatorio Astronómico Nacional de la Universidad Nacional de Colombia por el apoyo financiero durante mi tiempo en la Maestría en Astronomía.

Resumen

En este trabajo se hace analiza el efecto de lente gravitacional generado por el cúmulo galáctico Abell 370 ($z = 0,375$) sobre las galaxias y fuentes de fondo ($z = 0,724$) con el objetivo de calcular el perfil y valor de masa del cúmulo.

Se utilizan métodos paramétricos con base en distribuciones de masa conocidas y que provienen de la dinámica galáctica, a fin de utilizar una función de contraste χ^2 que conduzca a los mejores parámetros que reproduzcan las observaciones. El modelo encontrado posee una distribución bimodal de masa con una fuerte presencia de materia oscura.

Las imágenes encontradas a partir de los mejores modelos reproducen las observaciones en tamaño, forma y posición. Es analizada y comprendida la formación de la estructura del gran arco que subyace por debajo de una de las galaxias dominantes en el cúmulo.

La masa del cúmulo es calculada así como las velocidades de dispersión de las galaxias.

Palabras clave: 1) Lentes gravitacionales: fuerte y débil. 2) Galaxias: distancias y corrimiento al rojo. 3) Métodos: estadísticos. 4) Técnicas: procesamiento de imágenes. 5) Materia oscura. 6) Galaxias: halos.

Abstract

In this work it is analyzed the gravitational lens effect generated by the galactic cluster Abell 370 ($z = 0,375$) on the background galaxies and sources ($z = 0,724$) with the aim of calculate the mass value and profile of the cluster.

Are used parametric methods based on known mass distributions from the galactic dynamics, in order to employ a contrast function χ^2 that leads to the best parameters that reproduce the observations. The model found have a bimodal distribution of mass with a strong component of dark matter.

The images found from the best models reproduces the observations in size, form and position. It is analyzed and understood the structure formation of the great arc that lies underneath of one of the dominants galaxies in the cluster.

The cluster mass is calculated as well as the dispersion velocities of the galaxies.

Keywords: 1) Gravitational lensing: strong and weak. 2) Galaxies: distances and redshift. 3) Methods: statistical. 4) Thecniques: image processing. 5) Dark matter. 6) Galaxies: halos.

Índice general

Lista de figuras	15
Lista de tablas	21
1. Consideraciones Cosmológicas	27
1.1. Principio Cosmológico	28
1.2. Modelo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	29
1.2.1. Hipersuperficie 3-dimensional	29
1.2.2. Métrica FLRW	31
1.3. Ecuaciones de campo de Einstein	31
1.4. Parámetro de Hubble	34
1.5. Modelos de Universo	36
1.6. Corrimiento al rojo	38
1.7. La edad del Universo	41
1.8. Distancias Cosmológicas	43
1.8.1. Distancia de Luminosidad	45
1.8.2. Distancia Diametral Angular	46
2. Efecto de Lente Gravitacional	51
2.1. Deflexión de la luz por campos gravitacionales	52
2.1.1. Ecuaciones geodésicas y órbita del fotón	53
2.2. Ecuación de la lente	54
2.3. Ángulo de deflexión de una distribución de masa	56
2.4. Potencial deflector	58
2.5. Potencial de Fermat	59
2.6. Distorsión de las imágenes	60
2.7. Magnificación	62
2.8. Curvas críticas y cáusticas	63
2.9. Efecto de lente débil	64

3. Algunos modelos de lente	69
3.1. Esfera Singular Isoterma	70
3.2. Elipsoide Isoterma	72
3.3. Perfil NFW	73
3.3.1. Críticas y Cústicas	77
3.4. Formación de imágenes	80
3.4.1. Magnificación	82
3.5. NFW elíptico	84
4. Métodos para reconstrucción de masa	87
4.1. Elipticidad y shear	88
4.2. Kaiser & Squires	89
4.2.1. Lentes Críticas	92
4.3. Métodos de obtención de estimadores	94
4.3.1. Método de la mínima χ^2	94
4.3.2. Comparación entre fuentes	95
4.3.3. Comparación con la fuente promedio	96
4.3.4. Lente modelada como una SIS	97
5. Simulaciones	99
5.1. Reconstrucción numérica	100
5.2. Lente gravitacional simulada por un sistema de SIS	100
5.3. Lente gravitacional simulada por un sistema de NIE	104
5.4. Lente gravitacional simulada por un sistema SIS+NIE	107
5.4.1. Reconstrucción de parámetros a partir de los baricentros	111
6. Perfil de masa de Abell 370	115
6.1. Abel 370	116
6.1.1. Aspectos históricos	117
6.2. Clasificación de imágenes	117
6.3. Análisis de la reconstrucción	120
6.4. Resultados y conclusiones	121
6.5. Perfil de masa del cúmulo	128
A. Solución de la ecuación de la órbita de un fotón	131
B. Lente gravitacional esférica	133
B.1. Convergencia	133
B.1.1. Potencial deflector	134
B.1.2. Ecuación de la lente	135
B.1.3. $f(x)$ para los perfiles SIS y NIS	136
B.2. Magnificación y Shear	137
B.3. Curvas críticas y cústicas	138

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	13
C. Convergencia NFW	139
D. Puntos extremales en varias variables	141

Índice de figuras

1.1.	Soluciones numéricas de la ecuación de Friedmann (1.21) determinando el comportamiento del factor de escala como función del tiempo escalado. Los valores medidos en la actualidad de los parámetros de densidad son aproximados $\Omega_m \approx 0,3$ y $\Omega_\Lambda \approx 0,7$, y están representados por la línea negra más fuerte.	37
1.2.	Soluciones numéricas de la ecuación de Friedmann (1.21) determinando el comportamiento del factor de escala como función del tiempo escalado. En todas las curvas $\Omega_m = 0$. Se aprecia el comportamiento oscilante del factor de escala cuando $\Omega_\Lambda < 0$ (líneas punteadas), lineal, cuando $\Omega_\Lambda = 0$ (línea continua); e hiperbólico cuando $\Omega_\Lambda > 1$	39
1.3.	Edad del Universo (escalada por la constante de Hubble H_0) como función de Ω_Λ en tres escenarios cosmológicos. En los tres casos mostrados la edad del Universo tiende a infinito cuando $\Omega_\Lambda \rightarrow 1$. Las edades mínima y máxima se registran en un Universo vacío con $\Omega_k + \Omega_\Lambda = 1$ cuyo valor es $\frac{1}{2H_0}$ (≈ 6500 millones de años), y con $\Omega_r + \Omega_\Lambda = 1$ correspondiente a $\frac{1}{H_0}$ (≈ 13 mil millones de años), respectivamente.	43
1.4.	Edad del Universo como función de Ω_m en tres escenarios cosmológicos cuando no hay energía asociada a la constante cosmológica. La tasa de crecimiento o decrecimiento en un Universo donde solo hay contribución a la energía de la materia bariónica, es pequeña en comparación a la de los otros dos casos, energía bariónica más radiativa y energía bariónica más energía asociada a la curvatura. En un hipotético Universo vacío, su edad sería infinita.	44
1.5.	Edad del Universo como función de Ω_r (para las curvas continua y a trozos más grandes) y Ω_k (solamente para la línea a trozos más pequeños) en tres Universos distintos.	44

- 1.6. Distancia Diametral angular adimensional $H_0 D_A/c$ como función del redshift para $\alpha = 1$ (panel izquierdo), $\alpha = 0$ (panel derecho). De arriba a abajo en ambos paneles: $\Omega_m = 0,0$ y $\Omega_\Lambda = 1,0$, $\Omega_m = 0,3$ y $\Omega_\Lambda = 0,7$, $\Omega_m = 0,7$ y $\Omega_\Lambda = 0,3$, y $\Omega_m = 1,0$ y $\Omega_\Lambda = 0,0$. Nótese el cambio en el valor de la D_A entre las gráficas primera y segunda (cosmología actual) de arriba a abajo, la agrupación de materia tiene como consecuencia que la D_A tenga un máximo local. 49
- 1.7. Distancia Diametral angular adimensional $H_0 D_A/c$ como función del redshift al aumentar el parámetro de suavidad. De arriba a abajo, $\Omega_m = 1,0$ y $\Omega_\Lambda = 0,0$. $\Omega_m = 0,7$ y $\Omega_\Lambda = 0,3$. $\Omega_m = 0,3$ y $\Omega_\Lambda = 0,7$. $\Omega_m = 0,01$ y $\Omega_\Lambda = 0,99$. $\Omega_m = 0,0$ y $\Omega_\Lambda = 1,0$ 50
- 2.1. Quasar 0957 + 561, infrarrojo. Las dos imágenes más brillantes corresponden al mismo quasar, mientras que la tercera es una galaxia que actúa como lente doblando la luz proveniente del quasar. Imagen tomada de CASTLES SURVEY, C.S. Kochanek, et. al [KFI⁺] 52
- 2.2. Trazo geométrico de los haces de luz en el efecto de lente gravitacional. Las distancias entre planos son diametrales angulares. 55
- 2.3. Efecto de lente gravitacional generado por un cúmulo galáctico (RCS2 032727-132623) a $z = 0,564$ sobre una galaxia de fondo (RCSGA 032727-132609) a $z = 1,701$. Crédito: NASA, ESA, J. Rigby (NASA Goddard Space Flight Center), K. Sharon (Kavli Institute for Cosmological Physics; University of Chicago), and M. Gladders and E. Wuyts (University of Chicago). Imagen tomada en marzo de 2011. 60
- 2.4. Curvas críticas (arriba) y cáusticas (medio) y potencial de Fermat (abajo) de un sistema binario de galaxias modeladas como esferas isotermas no singulares al separar sus centros en dos arreglos distintos. Las unidades en todos los diagramas es $1kp$ 65
- 3.1. Formación de imágenes de una fuente circular ubicada en $(3,3)kpc$ a través de una lente gravitacional modelada por medio de un elipsoide isotermo. Las curvas negras más fuertes corresponden a una fuente de radio $0,1kpc$ 73
- 3.2. Curvas críticas (izquierda) y cáusticas (derecha) generadas por un elipsoide isotermo. Los colores se corresponden en cada diagrama. 74
- 3.3. Ecuación de lente gravitacional modelada con el perfil NFW, (3.43), como función de x y de la constante C , que depende de los parámetros de la lente, (3.35). 77

3.4. Ecuación de lente gravitacional modelada con el perfil NFW para un valor $C = 0,1$. Destacan los puntos $x = 0$ y x_{c1} donde la función intercepta al eje horizontal y toma un valor mínimo, y x_{c2} donde la ecuación de la lente posee el máximo local en el intervalo $[0, x_{c1}]$. Si $y > y(x_{c2})$ las imágenes estarán ubicadas por fuera del círculo de radio x_r . En la sección 3.3.1 (a continuación) se demostrará que x_{c1} y x_{c2} corresponden a los radios de los círculos críticos. 78

3.5. Comportamiento de los puntos maximales (con $x \neq 0$) de la ecuación de la lente (3.43) como función de la constante C . La curva x_{c1} representa el intercepto de $y(x)$ con el eje x y x_{c2} el punto donde $y(x)$ es máximo en el intervalo $(0, x_{c1})$. De acuerdo con las ecuaciones (3.59), x_{c1} y x_{c2} corresponden a los radios de los círculos críticos. 78

3.6. Una recta horizontal, $C > 0$, determina las curvas críticas al cruzarse con las funciones $f(x)$, Ec. (3.41), y $g(x)$, Ec. (3.60). Nótese que a partir del valor $x = 1,3182045\dots$ la función $g(x)$ es negativa. 81

3.7. Posición de las imágenes con respecto al valor de la constante C dada por la Ec. (3.35). Las curvas críticas x_{c1} y x_{c2} como función de C , dividen el plano de la lente en tres regiones de formación de imágenes. De izquierda a derecha (por debajo de x_{c1}) y de arriba a abajo (por encima) se aprecia la posición de las imágenes de una fuente ubicada en $y = 8, 4, 2, 1, 1/2$, con respecto a C . Las líneas continuas representan la posición de la primer imagen (α), las líneas punteadas, la segunda (β) y las líneas a trozos largos, la tercera (γ), en cada uno de los casos de y 83

3.8. Magnificación de las imágenes en el plano de la lente para dos valores de C . Las asíntotas se formarán en x_{c1} y x_{c2} (en cada curva, de derecha a izquierda respectivamente). 84

3.9. Curvas críticas y cáusticas de una lente gravitacional descrita por un perfil NFW elíptico. En ambos páneles las unidades están dadas en kiloparsecs. 85

3.10. Imágenes de una fuente circular en (3, 3) a través de una lente modelada con un perfil NFW (izquierda) y NFW elíptico (derecha). También se aprecian la formación de imágenes de una fuente de radio 0,1 en negro más fuerte. En ambos páneles las unidades están dadas en kiloparsecs. 86

4.1. Debido a los errores implícitos en el modelamiento de la lente, no es posible tomar la posición de una imagen y retornar al plano de la fuente (S) de forma que coincida absolutamente con su posición real. El método busca unicidad en las posiciones de la fuente a través del modelo. 94

- 5.1. Efecto de lente gravitacional de dos Esferas Singulares Isotermas L1 y L2, sobre cuatro fuentes de fondo. Las imágenes etiquetadas con la misma letra corresponden a una sola fuente. La formación de arcos implica la proximidad de las fuentes a las curvas cáusticas, descritas en el capítulo 2. 102
- 5.2. Formación de imágenes de cuatro fuentes de fondo a través de una lente gravitacional formada por dos perfiles NIE. Las imágenes etiquetadas con la misma letra corresponden a una sola fuente. Se aprecia la formación del arco 3B debido a que la fuente S3 se halla junto al astroide cáustico (azul), las curvas naranja y roja también representan cáusticas. 105
- 5.3. 4 fuentes de fondo $S1 - S4$ a través de una lente gravitacional modelada por un perfil SIS, L1, y uno NIE, L2. Las imágenes etiquetadas con la misma letra corresponden a una sola fuente. Las flechas indican tres imágenes demagnificadas que serán utilizadas en la reconstrucción de masa, sin embargo, en el caso real no es posible distinguir y así tampoco poder clasificar ni medir las posiciones de todas las imágenes como en este ejemplo, ya que en este caso las posiciones son calculadas numéricamente. Así mismo, en el problema real deben asociarse las posiciones de las imágenes a sus baricentros, que pueden ser medidos, no obstante a la considerable dispersión de puntos pertenecientes a una sola imagen cuando se trate de los grandes arcos, como el 3A. 108
- 6.1. Cúmulo galáctico Abel 370, R.A. 02h 39m 49s.90, Dec. $-01^{\circ} 34'26''.70$. El ancho de la imagen es de 2.4 arcmin, es decir, aproximadamente 3.4 millones de años luz. Créditos: NASA, ESA, the Hubble SM4 ERO Team, and ST-ECFE. 116
- 6.2. Detalle del gran arco generado por el cúmulo, mostrando en elipses del mismo color los conjuntos de imágenes que provienen de la misma fuente. 118
- 6.3. Abel 370 con las imágenes de una misma fuente encerradas en elipses y etiquetadas por conjuntos. A través de una imagen más amplia se pueden observar algunas características del gran arco en forma de “dragón” como se le conoce en la literatura, Fig. 6.2. La imagen es cuadrada y posee un lado de $726.9Kpc$, de modo que las unidades son $14.538Kpc$ 119

6.4. Curvas críticas (izquierda) y cáusticas (derecha), encontradas numéricamente a partir de los parámetros del Cuadro 6.1 y el potencial 6.3, que representan la estructura másica de Abel 370, nótese su complicada morfología. Las curvas en cada diagrama se corresponden. Nótese también que la posición de la fuente que genera el gran arco coincide con una curva cáustica, efecto que produce su impresionante forma y tamaño. Las unidades son $14.538Kpc$	123
6.5. Izquierda: imagen generada computacionalmente al modelar A370 con los perfiles que descritos por el potencial (6.3) y los parámetros consignados en el Cuadro 6.1 al realizar una minimización con las imágenes medidas. Derecha: imágenes correspondientes reales.	124
6.6. Segundo conjunto de imágenes. Debido a que el radio de la fuente circular es supuesto, es de esperar que a medida que éste disminuye, el arco $2A\ 2B$ del pánel izquierdo se dividirá formando la pareja $2A$ y $2B$ del derecho.	125
6.7. Tercer conjunto de imágenes.	125
6.8. Cuarto conjunto de imágenes.	126
6.9. Quinto conjunto de imágenes.	126
6.10. Imagen del gran arco generada por medio de la reconstrucción de masa superpuesta sobre la imagen real, donde se aprecian las similitudes del tamaño y forma de ambos arcos. Una segunda imagen se aprecia igualmente mediante la simulación, pero no en la imagen de campo real.	127
6.11. Curvas de contorno del perfil de masa de Abel 370 obtenidas con el modelo (6.3) y los parámetros del Cuadro 6.1.	128
6.12. Perfil del masa de Abel 370 obtenido con el mejor ajuste realizado con las imágenes 1 hasta 5, contenidas en la Fig. 6.3. Se aprecia la amplia presencia de un componente de materia oscura modelado con el perfil NFW y de los dos perfiles isoterms NIE. Las unidades son $14.538Kpc$	129

Índice de cuadros

5.1. Sistema binario de lentes gravitacionales modeladas como esferas singulares isotermas actuando sobre cuatro fuentes de fondo. Por medio del método de la mínima χ^2 , se buscan los mejores parámetros de un modelo que reproduzca las observaciones, en este caso simuladas computacionalmente. Cabe notar la convergencia en los valores de los parámetros en los modelos NIS y NIE con los de la simulación original, las elipticidades y radios de los núcleos son cercanos a cero. En la primer columna se encuentran las posiciones de las fuentes $S1$ hasta $S4$. Las posiciones de las imágenes están dadas por (x, y) para cada modelo y en la Fig. 5.1 corresponderían a los centroides de las imágenes.	103
5.2. Dos lentes gravitacionales modeladas como elipsoides isotermos actuando sobre cuatro fuentes de fondo. Nótese que a diferencia del Cuadro 5.1, la reconstrucción de los parámetros por medio del método de la mínima χ^2 , muestra que no es posible simular la formación de imágenes con los perfiles SIS y NIS, ya que son submodelos del perfil NIE, allí se aprecia la importancia de las elipticidades en la simulación. En la primer columna se encuentran las posiciones de las fuentes $S1$ hasta $S4$. Las posiciones de las imágenes están dadas por (x, y) para cada modelo y en la Fig. 5.2 corresponderían a los centroides de las imágenes.	106
5.3. Reconstrucción numérica de una lente simulada por medio de un perfil SIS y uno NIE. Nótese que el valor obtenido de χ^2 es un medidor directo del grado de similitud del modelo escogido y de sus parámetros.	109
5.4. Continuación Cuadro 5.3.	110

5.5.	Redondeo hasta la segunda cifra significativa de las posiciones reales (calculadas al invertir la ecuación de la lente) de las imágenes y suministradas por medio de los baricentros de las mismas con las respectivas desviaciones estándar, de las cuatro fuentes de fondo del Cuadro 5.3, a través de una lente formada por un perfil SIS y uno NIE. Se aprecia que la posición dada por los baricentros coincide con el valor exacto dentro del margen de error. Sin embargo, los grandes arcos arrojan una dispersión de puntos que inciden en una desviación relativamente alta, como en el caso del arco 3A.	112
5.6.	Reconstrucción numérica a partir de los baricentros de las imágenes formadas por un sistema de lentes SIS+NIE.	113
5.7.	Continuación del Cuadro 5.6.	114
6.1.	Parámetros obtenidos con la mejor minimización utilizando los conjuntos de imágenes 1, 2, 3, 4 y 5 de la Fig. 6.3. Algunas desviaciones son del orden de 10^{-4} y por tanto no aparecen.	121
6.2.	Posiciones de los baricentros de las imágenes 1 hasta 5 de la Fig. 6.3 y las respectivas al modelar el cúmulo por medio de dos perfiles NIE y un NFWE con los parámetros del Cuadro 6.1. Las imágenes etiquetadas con la Z corresponden a imágenes no observadas en la Fig. 6.3, pero que el modelo predice. Nótese el valor de la minimización.	122

Introducción

Los cúmulos de galaxias son los sistemas que por naturaleza gravitacional, ofrecen en mayor detalle la formación y evolución de estructura del universo a gran escala. Ejemplos claros de esta proposición son el análisis estadístico de los cúmulos de materia y las curvas de rotación plana de las galaxias, que evidencian distribuciones de materia oscura, piezas fundamentales en la construcción de valores como densidades cosmológicas, la constante de Hubble, la constante cosmológica, etc.

Todas las propiedades gravitacionales y estadísticas de la distribución de los cúmulos de galaxias reposan en la Teoría de la Relatividad General (RG) o Teoría de la Gravitación, desarrollada por Albert Einstein a mediados de la segunda década del pasado siglo, donde, entre otros fenómenos, se predice la flexión de las trayectorias de los haces de luz a causa de fuertes campos gravitacionales, en este caso, los generados por dichos cúmulos y súper cúmulos. Este campo de investigación teórico ha sido fuertemente explorado y cotejado con las evidencias observacionales a través del desarrollo de mejores y más sofisticadas herramientas observacionales, con un importante número de aciertos y efectos extraordinarios como la multiplicidad de las imágenes o la magnificación de las mismas.

A la curvatura de las trayectorias de luz y todas las consecuencias que este fenómeno supone, se conoce con el nombre de Efecto de Lente Gravitacional (ELG) (*Gravitational Lensing*), y dado que la desviación de la luz depende completamente del campo gravitacional que atraviesa, es posible conocer aspectos de su fuente, por ejemplo la masa o distribución de materia, por mencionar algunos. Asimismo, a través de la magnificación de las imágenes es posible observar objetos tan distantes o tan débiles que con los instrumentos más potentes no se hubiesen podido detectar, es decir, el efecto de lente gravitacional actúa como un verdadero telescopio cósmico que permite observar más allá de nuestro alcance tecnológico.

No obstante, existen otros acontecimientos importantes que han sido descubiertos y medidos en el ELG y que le han dado el estatus de una de las herramientas más útiles en la Cosmología Moderna: Anillos de Einstein, Arcos Gigantes Luminosos, eventos de Microlentes y Lentes Débiles, etc., que han contribuido enormemente en la comprensión de magnitudes como las Distancias Cosmológicas, la física de los Cuásars, los halos de materia oscura, la estructura galáctica y la estructura de la distribución de materia del Universo a gran escala, que en párrafos anteriores se mencionó.

Es importante mencionar que a partir del nivel de deflexión de los haces de luz es posible segmentar el área del ELG en dos subdisciplinas:

- *Efecto de Lente Débil* (fotones cruzando a gran distancia del centro de la fuente de campo). El ángulo de deflexión decrece linealmente a medida que la distancia de los fotones al centro de la masa aumenta. Los efectos son medibles a través de promedios estadísticos.

- *Efecto de Lente Fuerte* (fotones cruzando cerca al centro de la fuente del campo). Distorsiones complejas de las fuentes de fondo (mayormente galaxias y Quasars). Los ángulos de deflexión son cada vez menos lineales a medida que los fotones se acercan a la masa y, como consecuencia de este efecto, pueden ser creadas varias imágenes de la fuente.

La pieza medular en la teoría del ELG es la curvatura del espacio–tiempo debido a alguna presencia másica que afecta las líneas de avance (geodésicas nulas) y la sección transversal de los paquetes de luz, estableciéndose distintas configuraciones y morfologías de las imágenes de acuerdo a la distribución de masa. Esta propiedad es fundamental porque permite reconstruir la densidad superficial de masa a partir de la medición de las imágenes. Este problema es abordado a través de dos subdisciplinas del ELG:

- *Modelamiento Paramétrico*: Se basa en la suposición de modelos de masa que reproduzcan la formación de imágenes. A medida que el número de imágenes y arcos aumenta, el número de posibles modelos que los pueden predecir disminuye.
- *Modelamiento No-Paramétrico*: En oposición al anterior, el objetivo es invertir los datos sin recurrir a ninguna parametrización del perfil de masa, pero permitiéndole distribuciones aleatorias. Para llevar a cabo este propósito, el número de arcos debe ser suficientemente grande, o los arcos deben extenderse sobre una buena fracción de la imagen de campo.

En este trabajo se hará uso del ELG en los regímenes Fuerte y Débil para deducir el perfil de masa del cúmulo Abell 370 paramétricamente; el cual es uno de los más exóticos y relevantes en la evidencia de las Lentes Gravitacionales. Además, los enormes arcos que exhibe y la, distinguible a simple vista, distorsionada galaxia ($z = 0,724$) que se encuentra por debajo de las dos gigantes espirales que pertenecen al cúmulo galáctico ($z = 0,375$), han sido objeto de diversos análisis y artículos en este campo de la astrofísica, e.g. J.P. Kneib et al. [KMF⁺94], J. Bézecourt et al. [BKSE99] entre otros.

Notación

La siguiente es una lista con las acepciones de los símbolos y convenciones usadas posteriormente o con mayor frecuencia en este trabajo.

- $i, j, k \dots$: índices latinos serán destinados para etiquetar las coordenadas espaciales, x, y, z .
- $\alpha, \beta, \gamma \dots$: índices griegos serán destinados para etiquetar las coordenadas espacio-temporales t, x, y, z .
- \mathbf{V} : representación de un vector.
- (V^0, V^1, V^2, V^3) : un vector \mathbf{V} expresado en sus componentes
- A^μ : representación de la componente μ del vector o tensor A .
- Cuando un par de magnitudes etiquetadas con subíndices repetidos se encuentren multiplicando, deben sumarse los productos de las magnitudes para cada valor que tome el índice, es decir

$$x_i x^i = (x^i)^2 = (x_i)^2 = \sum_{i=1}^3 x_i x^i = x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3.$$

A esta convención se le conoce como suma de Einstein.

- $T_{\mu\nu}$: tensor momento-energía.
- Λ : constante cosmológica.
- $g_{\mu\nu}$: tensor métrico que representa el elemento de línea Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), véase sección §1.2,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right).$$

- La signatura de la métrica utilizada será $(-, +, +, +)$.
- $\Gamma_{\mu\nu}^\gamma$: símbolos de Christoffel, definidos en términos del tensor métrico,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right)$$

- $R_{\mu\nu}$: tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\rho}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\mu}^\nu}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda$$

- Un punto encima de una cantidad representa la derivada temporal de la misma.
- c : velocidad de la luz, $c = 3 \times 10^8 \text{ms}^{-1}$.
- G : constante de la gravitación universal, $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2 \text{kg}^{-2}$.
- H_0 : constante de Hubble, $H_0 = 74,8 \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$.
- z : redshift o corrimiento al rojo.

Capítulo 1

Consideraciones Cosmológicas

El entorno donde se desarrolla el Efecto de Lente Gravitacional (ELG) es imprescindible en su análisis ya que las distancias que separan observador, lente y fuente dependen del modelo cosmológico, así como la desviación de los haces de luz. Este modelo a su vez debe estar sustentado teóricamente y en concordancia con observaciones astronómicas, e.g., la expansión acelerada del Universo, la abundancia de elementos ligeros y la Radiación Cómica de Fondo (CMB por sus siglas en inglés). No obstante, recientes evidencias experimentales apuntan hacia la existencia de la desconocida materia oscura, que, si bien puede ser modelada a través del perfil NFW (Navarro, Frenk & White) [NFW96], aún plantea una de las más grandes cuestiones en cosmología y por supuesto, el modelo cosmológico adoptado debe ser capaz de describir.

Un camino para establecer este modelo se basa en la hipótesis de homogeneidad e isotropía del Universo a gran escala, es decir, que la medición de propiedades no dependan de la dirección ni del lugar en el Universo desde los cuales se observen. La geometría del espacio-tiempo que cumple con esta condición está dada por la métrica Robertson-Walker y al relacionarla con la distribución de materia y energía por medio de las Ecuaciones de campo de Einstein de la relatividad general (RG), se obtiene un modelo de fluido perfecto, que está acorde con la morfología cósmica presente: un gas homogéneo a gran escala [Wei72], [Car04], [Dod03], [Sar05], [Pad10].

1.1. Principio Cosmológico

El principio cosmológico establece que el Universo es espacialmente homogéneo e isotrópico. Esta proposición debe entenderse de la misma forma en la que un fluido o un sólido pueden considerarse medios continuos, es decir, como un conjunto infinito de elementos constitutivos, individuales, pero que un modelo matemático permite estudiar macroscópicamente a través de cantidades como la densidad, presión, temperatura, etc. En un sentido por poco literal, promediando en secciones lo suficientemente grandes como para contener miles de cúmulos y súper cúmulos de galaxias, el Universo presenta las mismas propiedades; lo que supone la no existencia de lugares privilegiados en el Universo. En tanto, la isotropía indica que puede obtenerse la misma información física sin importar la dirección en la que se tomen los datos, propiedad que ha quedado impresa en el CMB¹ (Cosmic Microwave Background), y cuyas fluctuaciones con respecto a la temperatura promedio del campo de radiación (anisotropías) son del orden de 10^{-5} , es decir, la temperatura medida en una dirección discrepa con la medida en cualquier otra tan solo en una parte en cien mil.

No obstante, el carácter evolutivo del Universo, comprobado en el movimiento relativo y de separación de la materia (expansión del Universo), implica una distribución de materia-energía dependiente del tiempo: en el pasado la densidad de la misma debió ser mayor que en su estado presente, y como consecuencia inmediata se restringe la homogeneidad e isotropía solamente al 3-espacio.

Como está anotado en [BS99], el espacio-tiempo es descrito a través de hipersuperficies cuadrimensionales de tiempo constante maximalmente simétricas² que cambian de acuerdo a una función que depende del tiempo, denominada factor de escala. Como se verá a continuación, este modelo puede ser descrito a partir de sus propiedades geométricas escribiendo la forma general del elemento de línea que define el espacio-tiempo, incluso sin recurrir a las Ecuaciones de Campo de Einstein, las cuales impondrán después condiciones a la dinámica del factor de escala a través

¹CMB o Cosmic Microwave Background es el nombre que en inglés se le da a la Radiación Cómica de Fondo, predicha por Gamow [Gam48], Alpher y Hermann en 1948, y medida por primera vez por Penzias y Wilson en 1965 (trabajo por el cual fueron laureados con el Premio Nóbel en 1978); y posteriormente de forma más precisa por el instrumento FIRAS (The Far InfraRed Absolute Spectrophotometer) a bordo del satélite COBE (Cosmic Background Explorer) a principios de los 90, en una longitud de onda de 1cm a 0.5mm , mostrando que el CMB corresponde al espectro de radiación de un cuerpo negro a temperatura de $2,735 \pm 0,06^\circ K$ ¡y con un error menor a 1 %! [MCJ⁺90] El CMB es considerado como una de las evidencias más fuertes que apoyan el modelo del Big-Bang.

²Un n -espacio maximalmente simétrico admite un número máximo $n(n+1)/2$ de vectores de Killing. Cada vector de Killing define una dirección en la cual la derivada de Lie de la métrica es nula (para una exposición detalla de funciones sobre variedades diferenciables, véase [Car04], [Wei72], [Sar05])

$$\mathcal{L}_k g_{\mu\nu} = 0$$

A su vez, cada vector de Killing está asociado a alguna simetría de la métrica que describe el espacio, además implica la existencia de cantidades conservadas [Car04].

de dos ecuaciones y a partir de la alta simetría del tri-espacio.

1.2. Modelo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

El Principio Cosmológico restringe la forma del tensor métrico $g_{\alpha,\beta}$ que describe la estructura del espacio-tiempo³, mientras que las ecuaciones de campo de Einstein gobiernan su dinámica en relación al contenido de materia-energía del Universo. Debido a la isotropía, las componentes g_{0i} del tensor métrico son nulas, pues de lo contrario identificarían alguna dirección particular en el espacio-tiempo, así que el elemento diferencial de distancia en el espacio-tiempo

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.1)$$

puede escribirse como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j \quad (1.2)$$

donde g_{ij} es el tensor métrico asociado al tri-espacio, el cual, a lo más debe depender del tiempo para no violar el principio de homogeneidad.

1.2.1. Hipersuperficie 3-dimensional

Para determinar la forma espacial del elemento Ec. (1.2), $g_{ij} dx^i dx^j$, analizaremos una variedad n -dimensional isotrópica contenida en otra de dimensión mayor⁴, [Nor97].

La isotropía implica que el elemento de línea tri-espacial debe cumplir

$$g_{ij} = f(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.3)$$

donde $f(r)$ es una función que contiene información de la curvatura del tri-espacio y $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$.

Consideremos una variedad curva de dimensión n definida por el conjunto de puntos (x^1, \dots, x^{n+1}) que satisfacen

$$(x^i)^2 = R^2 \quad (1.4)$$

donde $i = 1, \dots, n+1$ y R es el radio de curvatura de la variedad. El elemento de línea de la superficie descrita por la Ec. (1.4) es

$$(dx^i)^2 = (dx^j)^2 + \frac{(x_j dx^j)^2}{R^2 - (x^j)^2} \quad (1.5)$$

³Recordar que los índices griegos (α, β, \dots) van de 0 a 3 y representan las coordenadas espacio-temporales, mientras que los latinos (i, j, \dots) , se emplearán para las coordenadas espaciales.

⁴Por ejemplo la 2-esfera (S^2), cuyo radio R dependa del tiempo, lo cual constituye un 2-espacio isotrópico contenido en un espacio de 3 dimensiones.

con $j = 1, \dots, n$, por tanto es posible escribir el elemento de línea en $n + 1$ dimensiones en función de las coordenadas del espacio en n dimensiones. Si $n = 3$, y nombrando el elemento de línea del tri-espacio dl^2 , se obtiene

$$dl^2 = (dx^1)^2 + \dots + (dx^4)^2 \quad (1.6)$$

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \frac{(x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3)^2}{R^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2} \quad (1.7)$$

en coordenadas esféricas $x^1 = r' \sin \theta \cos \phi$, $x^2 = r' \sin \theta \sin \phi$ y $x^3 = r' \cos \theta$, es inmediato notar que los tres primeros términos son el elemento de línea en coordenadas esféricas del espacio Euclidiano, mientras que el segundo término hace referencia a la curvatura del espacio

$$dl^2 = dr'^2 + r'^2 d\Omega^2 + \frac{r'^2 dr'^2}{R^2 - r'^2} \quad (1.8)$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. Por tanto

$$dl^2 = \frac{dr'^2}{1 - Kr'^2} + r'^2 d\Omega^2 \quad (1.9)$$

donde $K = 1/R^2$ es la curvatura del espacio, el cual puede ser [Car04], [Ham13], [Wei72],

- Cerrado, si $K > 0$.
- Plano, si $K = 0$.
- Abierto, si $K < 0$.

Denominaremos *comóviles* a las coordenadas espaciales que expanden con el Universo, como lo define [Ham13], y solamente un observador *comóvil* puede observar la isotropía del Universo, como lo define [Car04], hecho que por ejemplo produce una anisotropía en el CMB debido a que la Tierra no es comóvil [Car04].

Relacionando la coordenada radial comóvil r con la propia r' a través de una función del tiempo $a(t)$ conocida como *factor de escala*, cuyo valor al tiempo presente es tomado como uno, $a(t_0) = 1$, de modo que la distancia física evolucione con el tiempo y sea proporcional al factor de escala, mediante $r' = a(t)r$, el elemento de línea (1.9) se lee

$$dl^2 = a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (1.10)$$

donde $k = (a(t)/R)^2$.

1.2.2. Métrica FLRW

Finalmente es posible escribir la métrica espacio-temporal (1.2) como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (1.11)$$

la métrica (1.11) fue derivada independientemente por A. Friedmann en 1924 y G. Lemaître en 1927, y sus propiedades fueron estudiadas más a fondo por H. Robertson y A. Walker en la década de 1930, razón por la cual se ha denominado históricamente métrica *FLRW*, *FL* o *RW*, y al modelo que describe se le conoce como *Modelo Estándar de la Cosmología*.

Como se mencionó, a menudo se establece que al momento actual $a(t_0) = a_0 = 1$ de modo que la constante k se convierte en la curvatura del espacio. Es común normalizarla a $k = -1, 0, 1$. Introduciendo una nueva coordenada radial \tilde{r} tal que

$$d\tilde{r} = \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}} \quad (1.12)$$

con lo cual

$$r = \begin{cases} \sin \tilde{r} & \text{si } k = 1, & \text{cerrado,} \\ \tilde{r} & \text{si } k = 0, & \text{plano,} \\ \sinh \tilde{r} & \text{si } k = -1, & \text{abierto.} \end{cases} \quad (1.13)$$

lo que permite escribir la métrica FLRW de una forma compacta

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) (d\tilde{r}^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (1.14)$$

1.3. Ecuaciones de campo de Einstein

La métrica FLRW describe al espacio-tiempo como función del factor de escala $a(t)$ y su dinámica está determinada por las Ecuaciones de campo de Einstein, que relacionan la geometría del Universo con su contenido de materia-energía

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (1.15)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el llamado escalar de Ricci⁵, el cual es la traza de $R_{\mu\nu}$, $R = R^\mu_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico asociado a la métrica FLRW, $T_{\mu\nu}$ es el tensor momento-energía y Λ es la llamada constante cosmológica, que permite obtener soluciones cosmológicas estáticas de las ecuaciones de campo a través del término $\Lambda g_{\mu\nu}$ introducido por Einstein.

El miembro izquierdo de las ecuaciones de Einstein (1.15) es puramente geométrico

⁵También conocido como *escalar de curvatura* y no debe confundirse con el radio de curvatura del espacio, definido por la Ec (1.4).

y depende del elemento de línea FLRW (1.11), en tanto, el miembro derecho describe el contenido de materia-energía del Universo, modelado como un fluido perfecto y definido por su densidad de energía ρ y densidad de presión p . Dada la alta simetría del espacio (1.9), isotropía, el fluido debe permanecer estático con respecto a un observador cuyas coordenadas sean comóviles, como lo anota [Car04], así que la cuadri-velocidad de cada una de sus partículas (galaxias) en este marco de referencia puede ser escrita

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (1.16)$$

y como muestra [Sar05], el tensor momento-energía de un fluido perfecto

$$T_{\mu\nu} = \left(\frac{p}{c^2} + \rho \right) U_\mu U_\nu + \frac{p}{c^2} g_{\mu\nu}. \quad (1.17)$$

Recordando $U_0 = -c^2 U^0$, en el sistema en reposo, explícitamente

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c^2 \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(1 - kr^2)^{-1} \frac{p}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 \frac{p}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \frac{p}{c^2} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Entre tanto, el tensor de Ricci, calculado a partir de los símbolos de Christoffel, es

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -3\ddot{a}a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(1 - kr^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & fr^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & fr^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

donde $f = (2c^2k + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a})c^{-2}$. Así mismo, el escalar de Ricci

$$R = \frac{6}{c^2} \left[\frac{c^2 k}{a^2} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right]. \quad (1.20)$$

Utilizando (1.19), (1.20), (1.11), (1.18) en las ecuaciones de Einstein (1.15), en la parte temporal, se llega a

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{c^2 k}{a^2} + \frac{c^2 \Lambda}{3} \quad (1.21)$$

en tanto, las tres componentes de la parte espacial conducen a

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G \left(\frac{p}{c^2} + \frac{\rho}{3} \right) + \frac{c^2 \Lambda}{3}. \quad (1.22)$$

Las ecuaciones, (1.21) y (1.22) son conocidas como *ecuaciones de Friedmann* y determinan la evolución de un espacio maximalmente simétrico.

Derivando la Ec. (1.21) y reemplazando en la Ec. (1.22) resulta

$$3 \left(\frac{p}{c^2} + \rho \right) \frac{\dot{a}}{a} + \dot{\rho} = 0 \quad (1.23)$$

o equivalentemente⁶

$$p \frac{da^3}{dt} + \frac{d(a^3 \rho c^2)}{dt} = 0. \quad (1.24)$$

El primer término de esta ecuación es interpretado como el trabajo $W = p\Delta V$ realizado por el gas en expansión debido a la presión, en un volumen a^3 medido por un observador comóvil, mientras que el segundo señala un cambio $\Delta E = \Delta(mc^2) = \Delta(V\rho c^2)$ en la energía contenida en aquel volumen, y de acuerdo a esto

$$W + \Delta E = 0, \quad (1.25)$$

por lo tanto la Ec. (1.24) comprende la primer ley de la termodinámica para un proceso adiabático, denominada conservación de la energía. El cambio en la energía relativista de las partículas del gas en expansión genera un trabajo a través de la presión que ejercen.

La ecuación de estado para un fluido perfecto relaciona directamente la presión y la densidad

$$p = \omega \rho \quad (1.26)$$

donde ω es constante. De modo que la Ec. (1.24) conduce a

$$\rho = \tilde{\rho} a^{-3\left(1+\frac{\omega}{c^2}\right)}, \quad (1.27)$$

donde $\tilde{\rho}$ es la constante de integración. En realidad, se presume que el fluido cosmológico está constituido por materia ordinaria, bariones y materia oscura no relativistas, y una contribución importante debida a la radiación, partículas relativistas como fotones o partículas masivas con velocidades cercanas a la velocidad de la luz, esto es

$$\rho = \rho_m + \rho_r; \quad p = p_m + p_r. \quad (1.28)$$

Una buena aproximación a la materia no relativista es considerar

$$p_m = 0 \quad (1.29)$$

con lo cual $\omega = 0$ y la Ec. (1.27) implica

$$\rho_m = \frac{\rho_{0m}}{a^3}, \quad (1.30)$$

⁶Nótese que la Ec. (1.23) puede ser escrita como

$$3\dot{a} \frac{p}{c^2} + 3\dot{a}\rho + a\dot{\rho} = 0$$

multiplicando por a^2

$$3a^2\dot{a} \frac{p}{c^2} + (3a^2\dot{a}\rho + a^3\dot{\rho}) = 0$$

lo que conduce a la Ec. (1.24).

de modo que la densidad decrece a medida que el Universo se expande. Este modelo de Universo, donde la componente de materia es dominante, es conocido como tipo *dust* [BG06].

Por otra parte, la radiación es descrita por el tensor momento-energía electromagnético

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\lambda} F_{\lambda}^{\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \right), \quad (1.31)$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor electromagnético. La traza $T = T_{\mu}^{\mu} = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ es, teniendo en cuenta $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$

$$T = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu}^{\lambda} F_{\lambda}^{\mu} - F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \right) = 0. \quad (1.32)$$

Asimismo la radiación puede ser descrita por el tensor (1.18), cuya traza es

$$T = -\rho + \frac{3p}{c^2} = 0, \quad (1.33)$$

resultando la ecuación de estado para la radiación

$$p_r = \frac{c^2}{3} \rho_r, \quad (1.34)$$

donde $\omega = c^2/3$, y la Ec. (1.27) conduce a

$$\rho_r = \frac{\rho_{0r}}{a^4}. \quad (1.35)$$

Esto es, un modelo que describe un Universo para el cual la mayor parte de la densidad de energía es dominada por la radiación.

Las ecuaciones (1.30) y (1.35) indican que el comportamiento de la densidad depende de la geometría del espacio y de su evolución; de hecho, la conservación de la materia bariónica implica una reducción en la densidad de energía a medida que el volumen $a^3(t)$ aumenta, así mismo, gracias a la expansión los fotones pierden energía en un factor adicional $a^{-1}(t)$ (con respecto a la materia ordinaria) porque disminuye su frecuencia (corrimiento al rojo).

1.4. Parámetro de Hubble

La tasa de cambio del factor de escala define el parámetro de Hubble

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (1.36)$$

Su valor al tiempo presente $H(t_0) = H_0$ es conocido como la constante de Hubble, y aunque no se sabe su valor exacto, observaciones recientes obtenidas con el Telescopio

Espacial Hubble (NASA/ESA) en el óptico e infrarrojo de más de 600 variables Cefeidas registran que, [RMC⁺11]

$$H_0 = 74,8 \pm 3,1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (1.37)$$

Definiendo la densidad *crítica* como

$$\rho_{crit} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 1,052 \times 10^{-23} \text{ g/m}^3 \quad (1.38)$$

cuya interpretación se da a partir de la primer ecuación de Friedmann (1.21) ya que la misma proporciona el valor de la densidad promedio actual del Universo, modelado bajo la suposición que su geometría fuese plana ($k = 0$) y sin contribución de la constante cosmológica ($\Lambda = 0$).

El valor de la densidad crítica es equivalente a ¡la masa de 6.286 átomos de Hidrógeno por metro cúbico!, la cual es una densidad muy pequeña. Sin embargo, su valor, así como el parámetro de Hubble, depende del tiempo. La densidad crítica permite expresar la tasa de cambio del parámetro de Hubble en el tiempo actual mediante la Ec. (1.22) en este mismo modelo cosmológico

$$\dot{H} \Big|_{t_0} = -\frac{3}{2} H_0^2 \left(\frac{p_0}{c^2 \rho_{crit}} + 1 \right). \quad (1.39)$$

Nótese que la densidad (1.38) permite escribir la Ec. (1.21) de una forma compacta, pues asumiendo que la energía total del Universo tiene contribuciones en la curvatura y la constante cosmológica, representadas por densidades ρ_k y ρ_Λ respectivamente, la primer ecuación de Friedmann toma la forma

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_r + \rho_m + \rho_k + \rho_\Lambda), \quad (1.40)$$

donde se ha definido

$$\rho_k = -\frac{3c^2 k}{8\pi G} \frac{1}{a^2} \quad (1.41)$$

y

$$\rho_\Lambda = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G}. \quad (1.42)$$

La Ec. (1.41) expresa que la densidad es inversamente proporcional al factor de escala al cuadrado. Si la constante cosmológica Λ es constante la densidad (1.42) es también una constante.

Con estas definiciones en mente y empleando el conocido parámetro de densidad, Ω , definido como la razón de la densidad actual de cada uno de los tipos de energía a la densidad crítica

$$\Omega_r = \frac{\rho_{r0}}{\rho_{crit}} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{r0} a^4, \quad (1.43)$$

$$\Omega_m = \frac{\rho_{m0}}{\rho_{crit}} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{m0} a^3, \quad (1.44)$$

$$\Omega_k = \frac{\rho_{0k}}{\rho_{crit}} = \frac{c^2 k}{H_0^2}, \quad (1.45)$$

y

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_{0\Lambda}}{\rho_{crit}} = \frac{c^2 \Lambda}{3H_0^2}, \quad (1.46)$$

la Ec. (1.21) puede ser escrita

$$H^2 = H_0^2 (\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda). \quad (1.47)$$

Al tiempo presente la condición de suma de densidades

$$\Omega_r + \Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1 \quad (1.48)$$

implica que tanto la geometría de las hipersuperficies espaciales como su dinámica son funciones de la suma de las contribuciones de energía en términos de las densidades de radiación, Ω_r , materia Ω_m y constante cosmológica, Ω_Λ

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + (1 - \Omega_r - \Omega_m - \Omega_\Lambda) a^{-2} + \Omega_\Lambda]. \quad (1.49)$$

Mediciones actuales señalan que $\Omega_r \ll \Omega_m$ [LDH⁺11], así, solo basta conocer el valor de la densidad de materia y constante cosmológica para determinar la curvatura del espacio, i.e. si $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ sería plano, si $\Omega_m + \Omega_\Lambda < 1$ el espacio sería hiperbólico y en caso contrario sería cerrado.

1.5. Modelos de Universo

La distribución de la energía en las distintas densidades define el comportamiento dinámico del Universo a través del factor de escala, sin embargo, esta distribución no es constante en el tiempo y en diferentes épocas diferentes parámetros habrán dominado su evolución. La Fig. 1.1 exhibe el comportamiento del factor de escala al solucionar (1.49) en varios modelos de Universos dependiendo de algunos parámetros de densidad Ω_m y Ω_Λ . En Universos vacíos $\Omega_m = 0$ (evidentemente hipotéticos), el crecimiento del factor de escala dependerá del signo de la constante cosmológica

$$a(t) = \begin{cases} \cos[H_0 \sqrt{|\Omega_\Lambda|} (t - t_0)] + \frac{1}{\sqrt{|\Omega_\Lambda|}} \sin[H_0 \sqrt{|\Omega_\Lambda|} (t - t_0)] & \text{si } \Omega_\Lambda < 0, \\ 1 + H_0 (t - t_0) & \text{si } \Omega_\Lambda = 0, \\ \cosh[H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} (t - t_0)] + \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \sinh[H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} (t - t_0)] & \text{si } \Omega_\Lambda > 0 \end{cases} \quad (1.50)$$

- En el primer caso, $\Omega_\Lambda < 0$, o mediante (1.46), $\Lambda > 0$, el factor de escala es oscilante. El Universo es abierto ($k < 0$) y su historia es cíclica, se expandirá a partir del “Big-Bang” hasta que recaerá en un periodo de contracción llegando al “Big-Crunch” y repetirá esta dinámica incesantemente. Fig. (1.2).

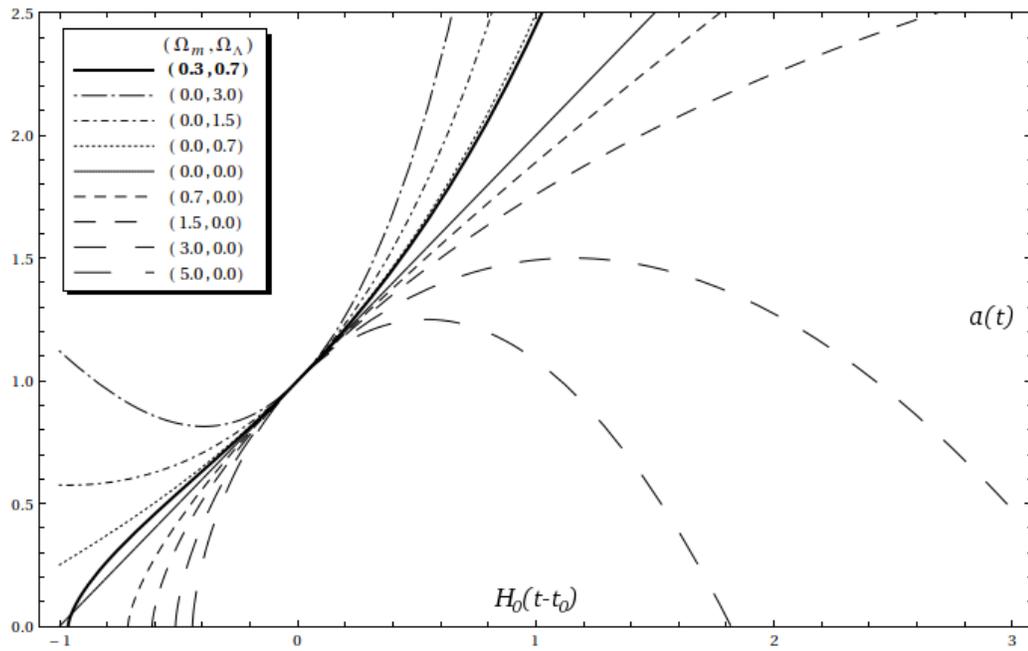


Figura 1.1: Soluciones numéricas de la ecuación de Friedmann (1.21) determinando el comportamiento del factor de escala como función del tiempo escalado. Los valores medidos en la actualidad de los parámetros de densidad son aproximados $\Omega_m \approx 0,3$ y $\Omega_\Lambda \approx 0,7$, y están representados por la línea negra más fuerte.

- El modelo en el cual $\Omega_\Lambda = 0$ y $\Omega_m = 0$ es conocido como Universo de *Milne*. Nuevamente el Universo es abierto y el factor de escala es proporcional al tiempo, i.e. el Universo se expandirá linealmente y eternamente, Figuras (1.1) y (1.2).
- En el caso en el que $0 < \Omega_\Lambda < 1$, el Universo es abierto y el factor de escala es descrito por funciones hiperbólicas que pueden ser representadas por sumas de exponenciales, con lo cual el Universo se expandirá eternamente de forma acelerada. Es importante notar que en este modelo el factor de escala tiene intercepto en el eje temporal, es decir un instante en el cual el Universo no tenía dimensiones físicas, probablemente el “Big-Bang”. Cuando $\Omega_\Lambda = 1$ el Universo es plano, pero jamás el factor de escala ha sido nulo, de hecho, el “Big-Bang” en este modelo ocurrió infinitamente atrás en el tiempo. Finalmente, cuando $\Omega_\Lambda > 1$ el Universo es cerrado y $a(t)$ decrece en el tiempo hasta alcanzar un mínimo para luego crecer indefinidamente, en este modelo tampoco existió el “Big-Bang”. Fig. (1.2).

En Universos más realistas con contenido de materia, un modelo es de particular interés⁷, aquel donde $\Omega_m = 1$ y no hay contribución a la energía de la constante cosmológica $\Omega_\Lambda = 0$, llamado Universo de *Einstein-de Sitter*. En este modelo el Universo es plano $k = 0$ y el factor de escala es proporcional a $t^{2/3}$

$$a(t) = \left[1 + \frac{3H_0(t - t_0)}{2} \right]^{2/3} \quad (1.51)$$

Más importante aún, el modelo estándar de la cosmología contempla las medidas astronómicas de $\Omega_m \approx 0,3$ y $\Omega_\Lambda \approx 0,7$, [LDH⁺11]. Con estos valores, los parámetros describen un Universo plano cuyo factor de escala está representado por la línea más gruesa de la Fig. (1.1).

1.6. Corrimiento al rojo

La radiación electromagnética es una forma de propagación de la energía y los fotones son los portadores de esta interacción, se mueven a lo largo de geodésicas nulas ($ds^2 = 0$) y su velocidad en el vacío es constante entre otras características. Dado que la energía que transportan depende de su longitud de onda, la expansión del Universo genera un aumento en la misma. Para calcular este efecto netamente relativista, consideremos un observador situado en $r = 0$ que registra un haz de luz en t_0 , el haz de luz fue emitido en (t_e, r_e) y arriva en dirección radial ($\theta = \text{cte}$,

⁷Durante varias décadas se pensó que el modelo de Einstein-de Sitter describía perfectamente el Universo.

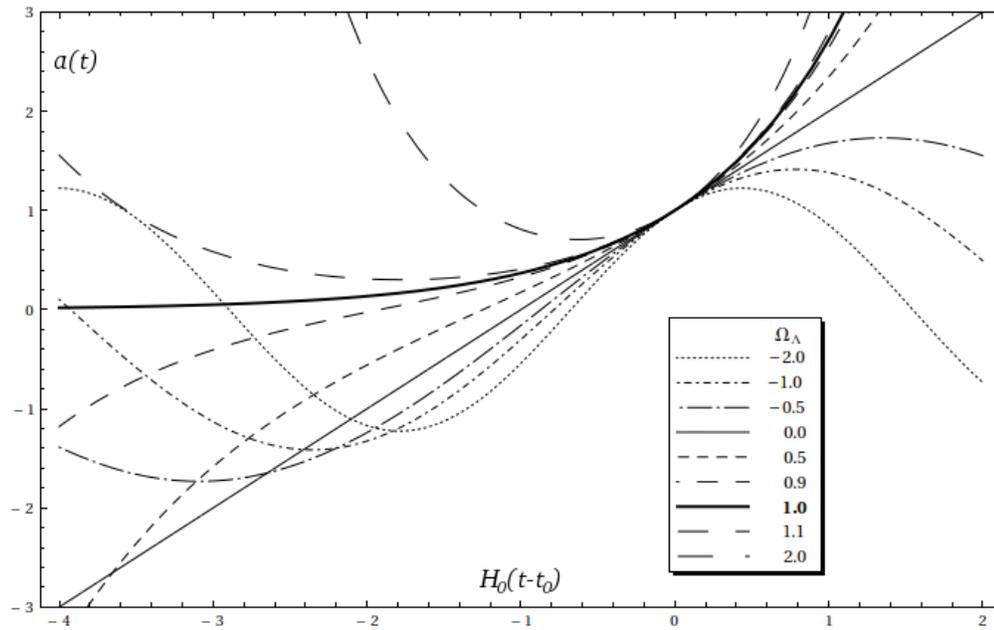


Figura 1.2: Soluciones numéricas de la ecuación de Friedmann (1.21) determinando el comportamiento del factor de escala como función del tiempo escalado. En todas las curvas $\Omega_m = 0$. Se aprecia el comportamiento oscilante del factor de escala cuando $\Omega_\Lambda < 0$ (líneas punteadas), lineal, cuando $\Omega_\Lambda = 0$ (línea continua); e hiperbólico cuando $\Omega_\Lambda > 1$.

$\phi = \text{cte}$), con lo cual la Ec. (1.11) toma la forma

$$-c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} \right) = 0 \quad (1.52)$$

o, integrando

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (1.53)$$

el lado derecho de esta ecuación es una función⁸ que depende explícitamente de r . La solución tal que $t_0 = 0$ cuando $a = 0$ (momento en el que el Universo comenzó a expandirse) en la Ec. (1.53), corresponde al punto más alejado posible desde el cual una fuente pueda emitir un haz de luz capaz de arriar al observador. A esta coordenada $r_e = r_H$ se le conoce como *radio del horizonte* y a su distancia física correspondiente, d_H , como *distancia al horizonte*

$$d_H(t_0) = a(t_0) \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = a(t_0) \int_0^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (1.55)$$

En efecto, d_H se interpreta como la distancia física más lejana a la cual es posible observar, la cual depende enteramente del comportamiento del factor de escala. En la cosmología estándar $d_H \propto t_0$, es decir finita y por tanto existe una superficie matemática y bidimensional que separa el Universo visible de aquella parte de la cual nunca se ha tenido ningún tipo de interacción o información, de esta parte se dice que no está causalmente relacionada con un punto a una distancia mayor a d_H . Por otra parte, si la distancia al horizonte es infinita todos los puntos del Universo son observables y están relacionados causalmente.

La Ec. (1.53) relaciona la coordenada temporal con una función de la coordenada radial asociada al movimiento de un fotón que parte en (t_e, r_e) y arriva al punto $(t_0, 0)$. Con base en esto, el lado derecho de la Ec. (1.53) debe permanecer inalterado al considerar el intervalo de tiempo δt_e entre dos crestas sucesivas de la misma onda de luz emitidas en t_e y $t_e + \delta t_e$ y observadas en t_0 y δt_0 respectivamente, es decir

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} \quad (1.56)$$

pero por medio de un teorema del cálculo integral

$$\int_{t_e}^{t_0} = \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} + \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0} + \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \quad (1.57)$$

⁸Resolviendo la integral

$$\int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \begin{cases} k^{-1/2} \arcsin(\sqrt{kr_e}) & \text{si } k \geq 1, \\ r_e & \text{si } k = 0, \\ (-k)^{-1/2} \operatorname{arcsinh}(\sqrt{-kr_e}) & \text{si } k \leq -1 \end{cases} \quad (1.54)$$

la ecuación finalmente queda

$$\int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} \quad (1.58)$$

en la aproximación $\delta t \sim 0$, las integrales simplemente se calculan resultando

$$\frac{\delta t_e}{a(t_e)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)}. \quad (1.59)$$

Teniendo en cuenta que δt_e corresponde al intervalo de tiempo entre dos crestas emitidas (periodo) de una onda de radiación de longitud λ_e , pero que son registradas con una diferencia δt_0 y una longitud λ_0

$$\frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{\delta t_0}{\delta t_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e}, \quad (1.60)$$

es posible entonces afirmar que la frecuencia del haz de luz emitido no es igual a la del observado y que su razón es igual a la del factor de escala en ambos instantes de tiempo. En astrofísica, el *corrimiento al rojo* o *redshift*, z , es definido por

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} \quad (1.61)$$

por lo cual es posible redefinir la Ec. (1.60) como

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (1.62)$$

o

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}. \quad (1.63)$$

La interpretación física del corrimiento al rojo es que a medida que el fotón se desplaza en un Universo en expansión, su longitud de onda aumenta de forma proporcional al factor de escala.

1.7. La edad del Universo

En la sección anterior se derivó una expresión que relaciona al factor de escala en el tiempo de emisión t_e y recepción t_0 , de un fotón que varía su longitud de onda conforme el Universo se expande, Ec. (1.60), y como una función del redshift (1.62) donde se emitió. Si la emisión es producida en un tiempo arbitrario t y la observación es efectuada al tiempo actual,

$$a(t) = \frac{1}{1 + z} \quad (1.64)$$

entonces, el parámetro de Hubble (1.49) puede ser escrito como una función del redshift

$$H(z) = H_0 [\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda]^{1/2}, \quad (1.65)$$

pero el parámetro de Hubble a su vez es definido en términos de $a(t)$ y puede ser expresado como

$$H = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt} \quad (1.66)$$

lo cual es válido para cualquier valor arbitrario de $a(t_0)$. Por tanto

$$\frac{dz}{dt} = -H_0(1+z) [\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda]^{1/2} \quad (1.67)$$

entonces el tiempo transcurrido desde que se emitió el fotón hasta el presente está dado en términos de su redshift y los parámetros cosmológicos,

$$\int_t^{t_0} dt = -\frac{1}{H_0} \int_z^0 \frac{dz}{(1+z) [\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda]^{1/2}} \quad (1.68)$$

donde se ha utilizado el hecho que el redshift del observador es cero.

El tiempo máximo que el fotón duró en movimiento antes de arriar al observador corresponde a una emisión⁹ en $t = 0$, de modo que la Ec. (1.68) revela la edad del Universo como una función de los parámetros cosmológicos

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z) [\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda]^{1/2}}. \quad (1.69)$$

En las figuras (1.3), (1.4) y (1.5) se visualiza el comportamiento de t_0 en Universos con componentes dominantes de Ω_r , Ω_m y Ω_Λ en cada caso. Las medidas actuales de los parámetros de densidad de materia y constante cosmológica suponen un Universo plano, $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$, con lo cual la edad del Universo puede ser expresada solamente en términos de Ω_m

$$t_0 = \frac{1}{3\sqrt{1-\Omega_m}} \ln \left(\frac{2 + 2\sqrt{1-\Omega_m} - \Omega_m}{\Omega_m} \right). \quad (1.70)$$

Por ejemplo en el modelo de Einstein-de Sitter es necesario tomar el límite $\Omega_m \rightarrow 1$ (o calculando la integral (1.69) de forma directa) para obtener

$$t_{0ES} = \frac{2}{3H_0} \quad (1.71)$$

⁹En este texto $t = 0$ se refiere al tiempo en el cual $a(t) = 0$, con lo cual la Ec. (1.64) indica $z(0) \rightarrow \infty$.

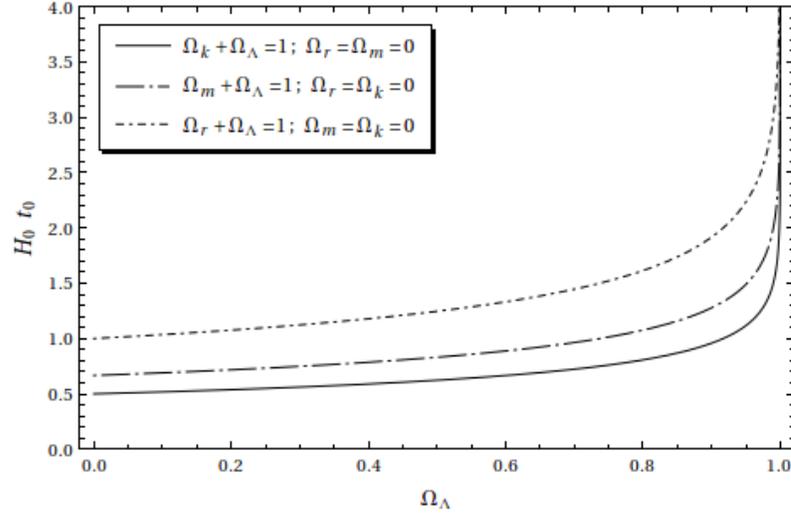


Figura 1.3: Edad del Universo (escalada por la constante de Hubble H_0) como función de Ω_Λ en tres escenarios cosmológicos. En los tres casos mostrados la edad del Universo tiende a infinito cuando $\Omega_\Lambda \rightarrow 1$. Las edades mínima y máxima se registran en un Universo vacío con $\Omega_k + \Omega_\Lambda = 1$ cuyo valor es $\frac{1}{2H_0}$ (≈ 6500 millones de años), y con $\Omega_r + \Omega_\Lambda = 1$ correspondiente a $\frac{1}{H_0}$ (≈ 13 mil millones de años), respectivamente.

tiempo aproximadamente igual a 8720 millones de años. Sin embargo, un Universo un poco más viejo es obtenido con los parámetros recientemente calculados a partir de los datos basados en siete años de exploración de la misión WMAP¹⁰ $\Omega_\Lambda = 0,734 \pm 0,029$ y $\Omega_m = 0,2669 \pm 0,0288$, [JBD⁺11], implicando

$$t_0 = (1,30387 \pm 0,05403) \times 10^{10} \text{ años}, \quad (1.72)$$

aproximadamente 13 mil millones de años más o menos 500 millones de años.

1.8. Distancias Cosmológicas

Las trayectorias que siguen los haces de luz provenientes de alguna fuente describen la dinámica espacio-temporal del universo, y son imprescindibles en la teoría de Lentes Gravitacionales debido a que en las ecuaciones aparecen siempre las distancias entre observador-lente, observador-fuente y fuente-lente. Y aunque las distancias cotidianas entre objetos suelen ser de tipo Euclidiano, cuya magnitud corresponde

¹⁰La sonda espacial WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) fue lanzada en colaboración conjunta de la NASA y la Universidad de Princeton en 2001 con el fin de medir las diferencias en temperatura del CMB. Los datos recogidos por la sonda han sido publicados en distintos años: 2003, 2006, 2008, 2010 y el más reciente en diciembre de 2012.

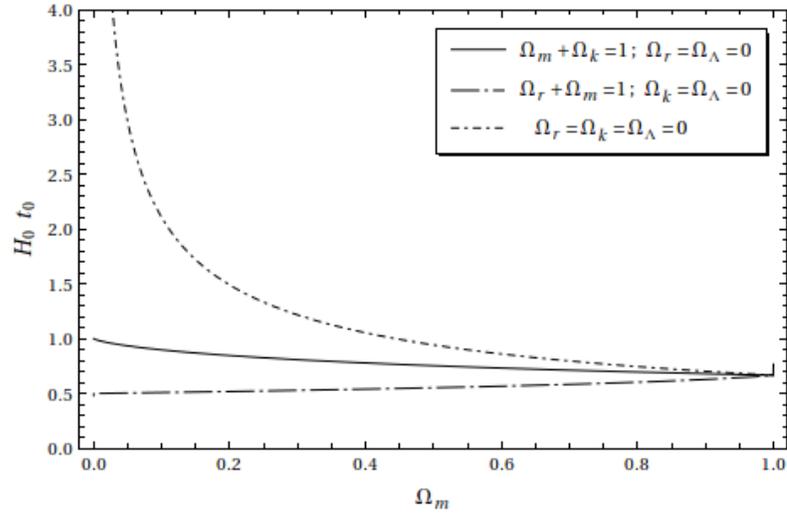


Figura 1.4: Edad del Universo como función de Ω_m en tres escenarios cosmológicos cuando no hay energía asociada a la constante cosmológica. La tasa de crecimiento o decrecimiento en un Universo donde solo hay contribución a la energía de la materia bariónica, es pequeña en comparación a la de los otros dos casos, energía bariónica más radiativa y energía bariónica más energía asociada a la curvatura. En un hipotético Universo vacío, su edad sería infinita.

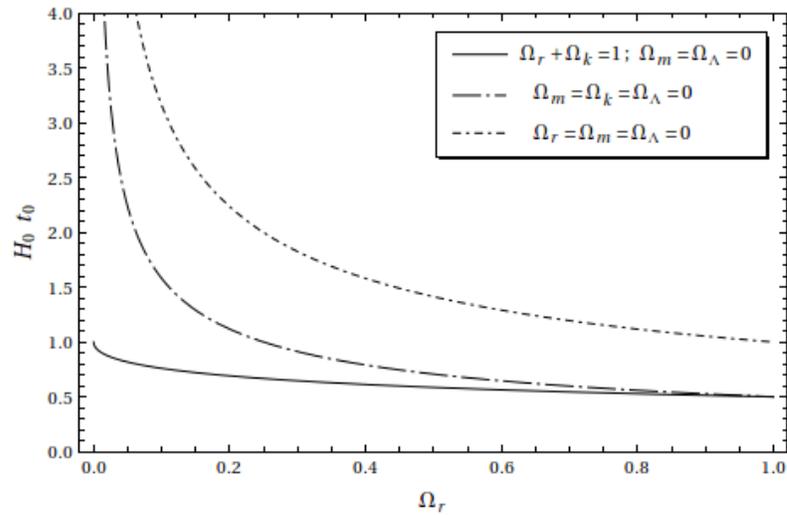


Figura 1.5: Edad del Universo como función de Ω_r (para las curvas continua y a trozos más grandes) y Ω_k (solamente para la línea a trozos más pequeños) en tres Universos distintos.

a la de la línea recta que los une, en un escenario astronómico, deben definirse operacionalmente en términos de la luz que emiten los cuerpos celestes, ya que no son mensurables de un modo directo. Estas distancias proporcionarán una medida de la propagación de la luz en el universo y sus valores serán una consecuencia del modelo cosmológico que se adopte.

1.8.1. Distancia de Luminosidad

El flujo observado S_0 de un paquete de N_e fotones emitidos isotrópicamente por un objeto astronómico, es definido como la razón de la potencia observada L_0 , a su área transversal (en este caso área del telescopio),

$$S_0 = \frac{L_0}{A_0} = \frac{E_0}{\delta t_0 A_0}, \quad (1.73)$$

donde $E_0 = N_0 hc / \lambda_0$ es la energía observada en el tiempo δt_0 . Sin embargo, el flujo del haz de luz también es definido a través de la *distancia de luminosidad* del objeto, d_L y de su potencia emitida, L_e , como

$$S_0 = \frac{L_e}{4\pi d_L^2}. \quad (1.74)$$

No obstante, debido a la expansión L_e no es la misma que se registra en la Tierra, i.e.,

$$L_e = \frac{E_e}{\delta t_e} = \frac{N_e hc}{\lambda_e \delta t_e}. \quad (1.75)$$

Utilizando (1.73), (1.75), (1.60) y (1.62), la distancia de luminosidad es

$$d_L = \sqrt{\frac{L_e}{4\pi S_0}} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} \sqrt{\frac{N_e A_0}{N_0 4\pi}} = (1+z) \sqrt{\frac{N_e A_0}{N_0 4\pi}}, \quad (1.76)$$

pero el área del telescopio A_0 registra solo una fracción N_0/N_e del área total A de la esfera concéntrica en el objeto y que llega hasta nosotros¹¹

$$A = \int a^2(t_0) r_e^2 d\Omega = 4\pi a^2(t_0) r_e^2 \quad (1.77)$$

por lo tanto, el redshift de un objeto es una medida directa de su distancia de luminosidad

$$d_L = a(t_0)(1+z)r_e. \quad (1.78)$$

Ahora, es necesario notar que un fotón se mueve a través de (1.52)

$$cdt = a(t) \left(\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \right) \quad (1.79)$$

¹¹Nótese que el radio físico de la esfera es $a(t_0)r_e$.

o en términos del redshift

$$c(1+z)dt = \frac{a(t_0)dr}{\sqrt{1-kr^2}}, \quad (1.80)$$

la relación entre z y t es recordada mediante la expresión (1.67)

$$(1+z)dt = -\frac{dz}{H_0 [\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda]^{1/2}}. \quad (1.81)$$

La Ec. (1.80) conlleva

$$\int_0^{r_e} \frac{a(t_0)dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_0^z \frac{cdz'}{H_0 [\Omega_r(1+z')^4 + \Omega_m(1+z')^3 + \Omega_k(1+z')^2 + \Omega_\Lambda]^{1/2}} \quad (1.82)$$

la integral del miembro izquierdo ya se había calculado (1.54), y puede escribirse de forma más compacta

$$\int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \arcsin(\sqrt{k}r_e), \quad (1.83)$$

donde debe tenerse en cuenta que $k = 0$ no puede reemplazarse directamente sino tomarse el límite $k \rightarrow 0$. Así

$$r_e = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \left[\frac{c\sqrt{k}}{a(t_0)} \int_0^z \frac{dz'}{H_0 [\Omega_r(1+z')^4 + \Omega_m(1+z')^3 + \Omega_k(1+z')^2 + \Omega_\Lambda]^{1/2}} \right]. \quad (1.84)$$

Si hacemos $a(t_0) = 1$ y recordando (1.41), la distancia de luminosidad es

$$d_L = \frac{c(1+z)}{H_0 |\Omega_k|^{1/2}} \sin \left[\int_0^z \frac{|\Omega_k|^{1/2} dz'}{[\Omega_r(1+z')^4 + \Omega_m(1+z')^3 + \Omega_k(1+z')^2 + \Omega_\Lambda]^{1/2}} \right], \quad (1.85)$$

o escrita de forma corta en términos de $H(z)$, Ec. (1.65)

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0 |\Omega_k|^{1/2}} \sin \left[H_0 \int_0^z \frac{|\Omega_k|^{1/2} dz'}{H(z')} \right]. \quad (1.86)$$

La distancia de luminosidad es una función de los parámetros cosmológicos y por ende, del modelo de Universo adoptado.

1.8.2. Distancia Diametral Angular

Otro tipo de distancia, que en nuestro empeño resulta imprescindible [Cas00], es definida a través de la razón entre la longitud propia (tamaño físico) del objeto

en particular, d , al ángulo que subtiene en el cielo, θ , y que puede ser medido directamente,

$$D_A = \frac{d}{\theta} \quad (1.87)$$

conocida como *distancia diametral angular*. Esta definición en un espacio Euclidiano representa el radio del círculo concéntrico en el observador que va hasta el objeto en la aproximación $\theta \rightarrow 0$. En el modelo FLRW la distancia al objeto está dada en términos del factor de escala y del redshift (1.64). Supongamos un observador en el origen de un sistema de coordenadas (r, θ, ϕ) que registra

$$D_A = a(t)r_e = \frac{a(t_0)}{1+z}r, \quad (1.88)$$

donde $a(t)r_e$ es la distancia física hasta el objeto, cuyo haz de luz fue emitido en el tiempo t y que arriva hacia el observador en dirección radial. De este modo, la distancia diametral angular está relacionada con la distancia de luminosidad por

$$D_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}. \quad (1.89)$$

En la sección anterior se encontró la dependencia de r_e con respecto a z , Ec. (1.84), sin embargo, esta expresión es válida solamente en el caso en que el observador se encuentre en el centro de coordenadas, si su posición es arbitraria, la distancia diametral angular D_A debe ser una función que depende tanto de la posición del observador z_1 como del objeto z_2 , i.e.,

$$D_A(z_1, z_2) = a(t_2)r(z_1, z_2), \quad (1.90)$$

donde $a(t_2)$ es el factor de escala en el segundo objeto y $r(z_1, z_2)$ es la distancia radial comóvil entre el objeto y el observador. Utilizando (1.89) y (1.85) la distancia diametral angular en términos del redshift y los parámetros cosmológicos es

$$D_A(z) = \frac{c|\Omega_k|^{-1/2}}{H_0(1+z)} \sin \left[\int_0^z \frac{|\Omega_k|^{1/2} dz'}{[\Omega_r(1+z')^4 + \Omega_m(1+z')^3 + \Omega_k(1+z')^2 + \Omega_\Lambda]^{1/2}} \right] \quad (1.91)$$

o

$$D_A(z) = \frac{c|\Omega_k|^{-1/2}}{H_0(1+z)} \sin \left[H_0|\Omega_k|^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right]. \quad (1.92)$$

Si el Universo es plano, $k = 0$, la distancia diametral angular es

$$D_A(z) = \frac{c}{(1+z)} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (1.93)$$

La solución, por ejemplo, en el modelo Einstein-de Sitter, $\Omega_r = \Omega_\Lambda = 0$, es

$$D_A(z) = \frac{2c}{H_0\sqrt{\Omega_m}} \left(\frac{(1+z)^{1/2} - 1}{(1+z)^{3/2}} \right). \quad (1.94)$$

Hasta el momento hemos utilizado el principio cosmológico para definir la estructura y dinámica del Universo, pero esto sólo es válido a gran escala. El Universo real presenta inhomogeneidades en la distribución de materia que pueden ser modeladas a través de una fracción α ($0 \leq \alpha \leq 1$), conocido como parámetro de suavidad, que se encuentra localmente agrupada y sumergida en una porción $1 - \alpha$ de distribución homogénea de materia. Este tipo de Universo no homogéneo genera el fenómeno de Lente Gravitacional. La ecuación diferencial de segundo orden que describe la distancia diametral angular entre dos objetos $D_A(z_1, z)$, como una función de sus redshift (z_1, z) y en un Universo donde hay constante cosmológica, fue derivada¹² por Dyer-Roeder [DR73], [SEF99], y conocida de forma homónima, i.e.

$$\begin{aligned} & \left(1 + z\Omega_m - \frac{z(2+z)\Omega_\Lambda}{(1+z)^2} \right) \frac{d^2 D_A(z_1, z)}{dz^2} \\ & + \frac{1}{1+z} \left(3 + \frac{\Omega_m}{2} + \frac{7z\Omega_m}{2} - \frac{(1+6z+3z^2)\Omega_\Lambda}{(1+z)^2} \right) \frac{dD_A(z_1, z)}{dz} \\ & + \frac{3\alpha\Omega_m}{2(1+z)} D_A(z_1, z) = 0 \end{aligned} \quad (1.95)$$

con las condiciones de frontera

$$D_A(z_1, z_1) = 0 \quad \text{y} \quad \left[\frac{dD_A(z_1, z)}{dz} \right]_{z=z_1} = \frac{(1+z_1)^{-2}}{\sqrt{1+z_1\Omega_m - \frac{z_1(2+z_1)\Omega_\Lambda}{(1+z_1)^2}}} \quad (1.96)$$

Algunas soluciones de la Ec. (1.95) obtenidas numéricamente para las distancias diametrales angulares con respecto a z , se encuentran visualizadas en diferentes escenarios cosmológicos y para distintos valores de z_1 , según los siguientes casos:

- Caso I: $\alpha = 1$ (Universo con una distribución homogénea de materia “clump-free”) (Izquierda) y $\alpha = 0$ (Universo inhomogéneo, materia totalmente agrupada “clumpy”) (derecha). Figura 1.6
- Caso II: valores constantes de Ω_m y Ω_Λ en cada caso y aumentando $\alpha = 0, 0, 0, 2, \dots, 1, 0$. Figuras 1.7

¹²Para la derivación completa y sucinta de la ecuación de Dyer-Roeder véase [Cas00].

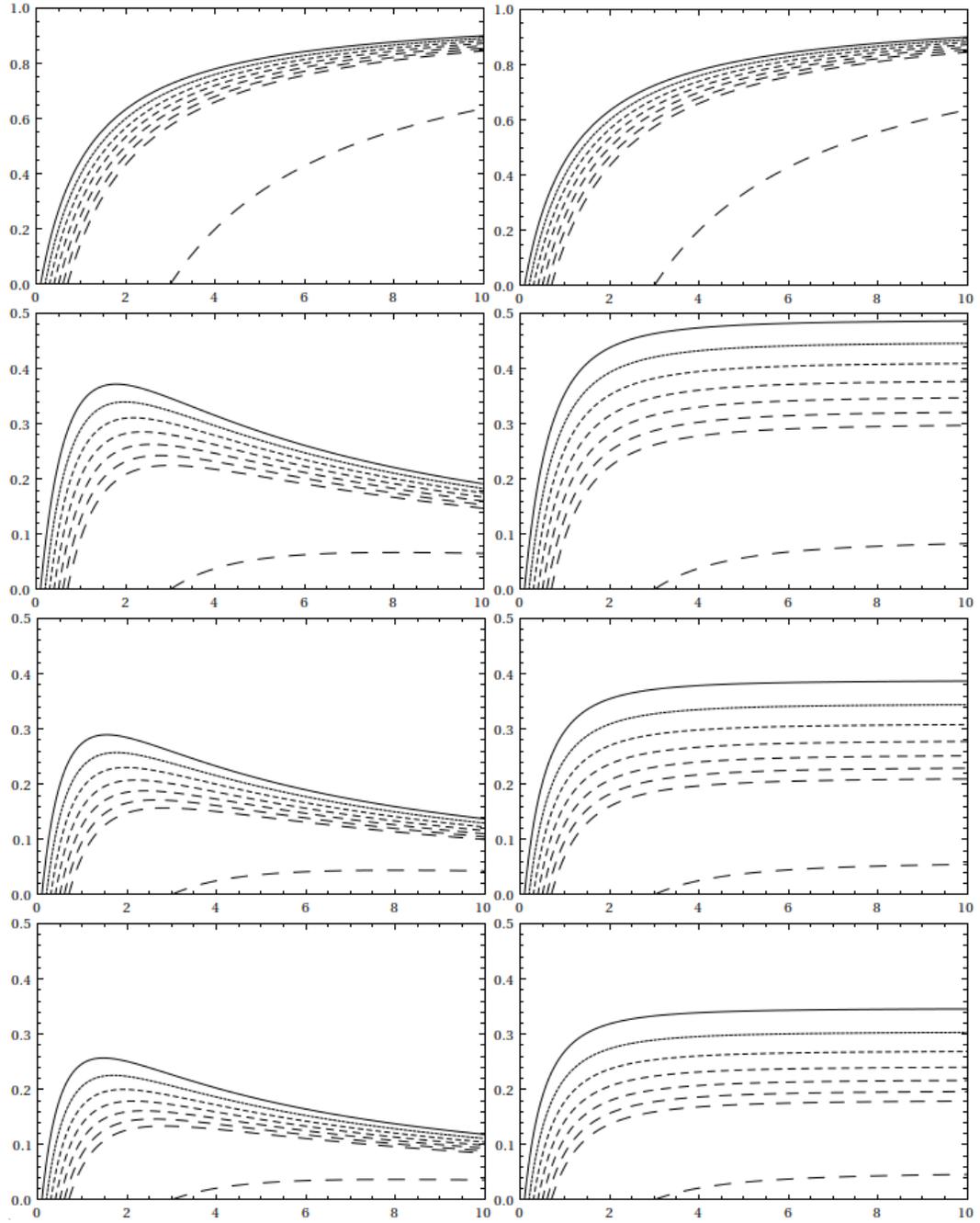


Figura 1.6: Distancia Diametral angular adimensional $H_0 D_A / c$ como función del redshift para $\alpha = 1$ (panel izquierdo), $\alpha = 0$ (panel derecho). De arriba a abajo en ambos paneles: $\Omega_m = 0,0$ y $\Omega_\Lambda = 1,0$, $\Omega_m = 0,3$ y $\Omega_\Lambda = 0,7$, $\Omega_m = 0,7$ y $\Omega_\Lambda = 0,3$, y $\Omega_m = 1,0$ y $\Omega_\Lambda = 0,0$. Nótese el cambio en el valor de la D_A entre las gráficas primera y segunda (cosmología actual) de arriba a abajo, la agrupación de materia tiene como consecuencia que la D_A tenga un máximo local.

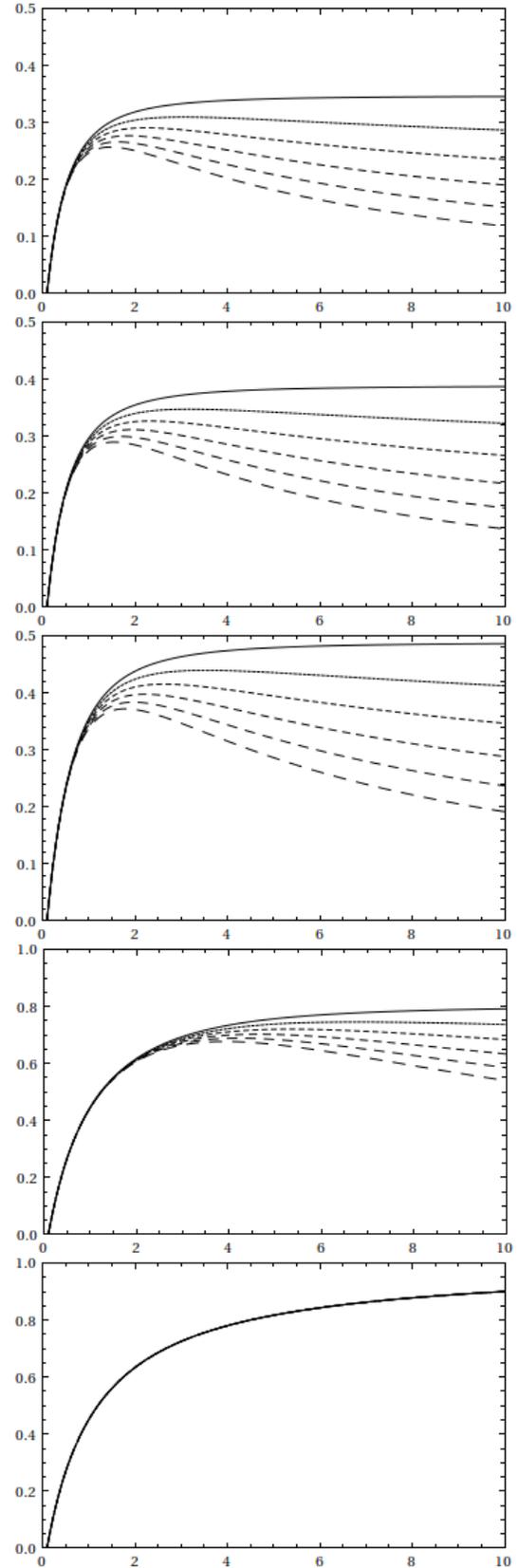


Figura 1.7: Distancia Diametral angular adimensional $H_0 D_A / c$ como función del redshift al aumentar el parámetro de suavidad. De arriba a abajo, $\Omega_m = 1,0$ y $\Omega_\Lambda = 0,0$. $\Omega_m = 0,7$ y $\Omega_\Lambda = 0,3$. $\Omega_m = 0,3$ y $\Omega_\Lambda = 0,7$. $\Omega_m = 0,01$ y $\Omega_\Lambda = 0,99$. $\Omega_m = 0,0$ y $\Omega_\Lambda = 1,0$.

Capítulo 2

Efecto de Lente Gravitacional

La Relatividad General encuentra uno de sus más grandes aciertos en el Efecto de Lente Gravitacional, en el cual la masa curva el espacio-tiempo a su alrededor, deflectando la trayectoria de los haces de luz que pasen a través de ella. A pesar de que en un principio el propio Einstein supuso que este fenómeno era inescrutable excepto en la teoría, las técnicas modernas de observación astronómica han permitido apreciar las lentes gravitacionales como un efecto medible.

A partir de 1979, cuando Dennis y Walsh observaron por primera vez cuatro imágenes del mismo Quasar $Q0957 + 561$ a una distancia de 8,7 mil millones de años luz, a través de una galaxia con un núcleo súper masivo a 3,7 mil millones de años luz, Fig. 2.1; la investigación en el campo del ELG ha sido exponencial, J. Wambsganss [Wam98], constituyéndose en una de las herramientas más poderosas en la cosmología moderna [SKW06].

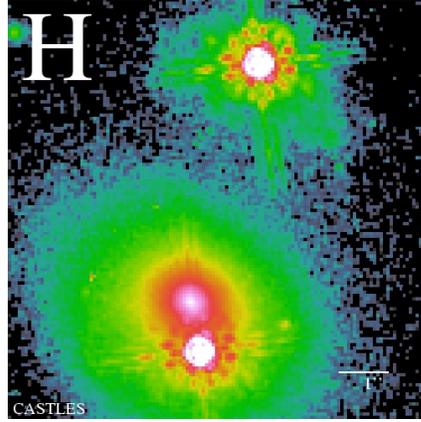


Figura 2.1: Quasar 0957+561, infrarrojo. Las dos imágenes más brillantes corresponden al mismo quasar, mientras que la tercera es una galaxia que actúa como lente doblando la luz proveniente del quasar. Imagen tomada de CASTLES SURVEY, C.S. Kochanek, et. al [KFI⁺]

2.1. Deflexión de la luz por campos gravitacionales

Un par de meses después (1916) de que Einstein publicara la Teoría la Relatividad General (RG) Karl Schwarzschild encontró una solución exacta de las ecuaciones de campo (1.15), que describen el espacio-tiempo en el exterior de un cuerpo masivo estático, de simetría esférica y no rotante. El elemento de línea métrico de la solución de Schwarzschild está dado por

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.1)$$

donde r_s es el denominado *radio de Schwarzschild* del cuerpo de masa M y está dado por

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (2.2)$$

La órbita de una partícula que interactúa con el campo gravitacional de un objeto puede ser deducida a partir de la métrica de Schwarzschild, por ejemplo el movimiento planetario¹³, y no se restringe al caso de partículas masivas, pues las ecuaciones geodésicas asociadas a la métrica de Schwarzschild también conducen al efecto de la desviación de los haces de luz a causa de campos gravitacionales intensos.

¹³En efecto, el movimiento al perihelio del planeta Mercurio fue uno de los fenómenos predichos por la RG y se constituyó en uno de sus mayores logros.

2.1.1. Ecuaciones geodésicas y órbita del fotón

Las ecuaciones geodésicas describen las curvas en el espacio-tiempo que sigue una partícula de masa despreciable¹⁴ bajo la acción solamente de un campo gravitacional, y están dadas por

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.3)$$

donde τ es un parámetro que describe la curva geodésica, y los símbolos de Christoffel están dados en términos de la métrica $g_{\mu\nu}$,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right). \quad (2.4)$$

Supongamos un haz de luz que se mueve en presencia del campo gravitacional de un objeto esférico de masa M cuyo exterior está dado por (2.1). Debido a la naturaleza simétrica del objeto, el movimiento del rayo de luz se da en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, con lo cual se rescatan tres de las cuatro ecuaciones de geodésicas (2.3), temporal

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{r_s}{r^2} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} = 0, \quad (2.5)$$

radial

$$c^2 r_s \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + 2 \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \frac{d^2 r}{d\tau^2} + r_s \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - 2r^3 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (2.6)$$

y angular

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + 2 \frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} = 0. \quad (2.7)$$

Las ecuaciones geodésicas no son independientes, en efecto, están relacionadas por medio de la métrica (2.1) de tal forma que es posible eliminar la dependencia temporal de la misma. Un fotón describirá una geodésica nula, que al ser dividida por $d\tau^2$, resulta

$$0 = -c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \left(\frac{dt^2}{d\tau^2} \right) + \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} \left(\frac{dr^2}{d\tau^2} \right) + r^2 \left(\frac{d\phi^2}{d\tau^2} \right), \quad (2.8)$$

pero las ecuaciones (2.5) y (2.7) pueden ser integradas como

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{a}{b} \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} \quad (2.9)$$

y

$$\frac{d\phi}{d\tau} = c \frac{a}{r^2} \quad (2.10)$$

¹⁴Por definición de geodésica, se exige que la masa de la partícula que interactúa con el campo gravitacional del objeto esférico sea cero, de modo que su campo pueda ser despreciable y no contribuya al campo generado por la masa.

con a y b constantes. Al reemplazar (2.9) y (2.10) en (2.8) podemos encontrar la dependencia de la coordenada radial con respecto a la angular, resultando la órbita del haz de luz

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{r^4}{b^2} - r^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right). \quad (2.11)$$

Definiendo $r = 1/u$, la Ec. (2.11) resulta

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - \frac{1}{b^2} + u^2(1 - ur_s) = 0 \quad (2.12)$$

tomando la variable independiente ϕ , la ecuación diferencial de segundo orden que describe la trayectoria del fotón es

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - \frac{3}{2}r_s u^2 = 0. \quad (2.13)$$

La solución de esta ecuación puede hallarse por medio de iteraciones, encontrándose en particular que el ángulo de deflexión de la trayectoria del haz de luz producido por la masa esférica es¹⁵

$$\Delta\phi = \frac{4GM}{c^2} \frac{1}{r_0}, \quad (2.14)$$

donde r_0 es la distancia más cercana al objeto másico a la cual el fotón pasa, llamada parámetro de impacto.

Para el caso del Sol, $\Delta\phi \approx 1,74$ segundos de arco, ángulo que fue medido por Sir Arthur Eddington en mayo de 1919 durante un eclipse solar en una expedición al golfo de Guinea en la Isla Príncipe, sus resultados fueron publicados un año después[DED20], lo que dio a Einstein renombre mundial. Este fenómeno netamente relativista se le conoce como *Efecto de Lente Gravitacional* (*Gravitational lensing*).

2.2. Ecuación de la lente

Supongamos una fuente de luz a una distancia¹⁶ D_{OS} (o al redshift z_S) cuya posición está descrita por $\boldsymbol{\eta}$ en el plano S , y algún objeto másico a una distancia D_{OL} en $\boldsymbol{\lambda}$ en el plano L (o en z_L), ambas distancias con respecto a un plano O , en cuyo centro de coordenadas se sitúa un observador. La distancia del objeto a la fuente, es decir de L a S la denominaremos D_{LS} .

Bajo la suposición que no existen más campos gravitacionales que deflecten la trayectoria de los haces de luz y que las distancias D_{LS} y D_{OL} sean lo suficientemente grandes como para que el propio campo del objeto sea inapreciable en los planos S y

¹⁵Véase el Apéndice A para una deducción detallada de la Ec. (2.14)

¹⁶En lo que sigue todas las distancias que se mencionan son diametrales angulares a menos que se indique lo contrario. Véase la sección 1.8.2.

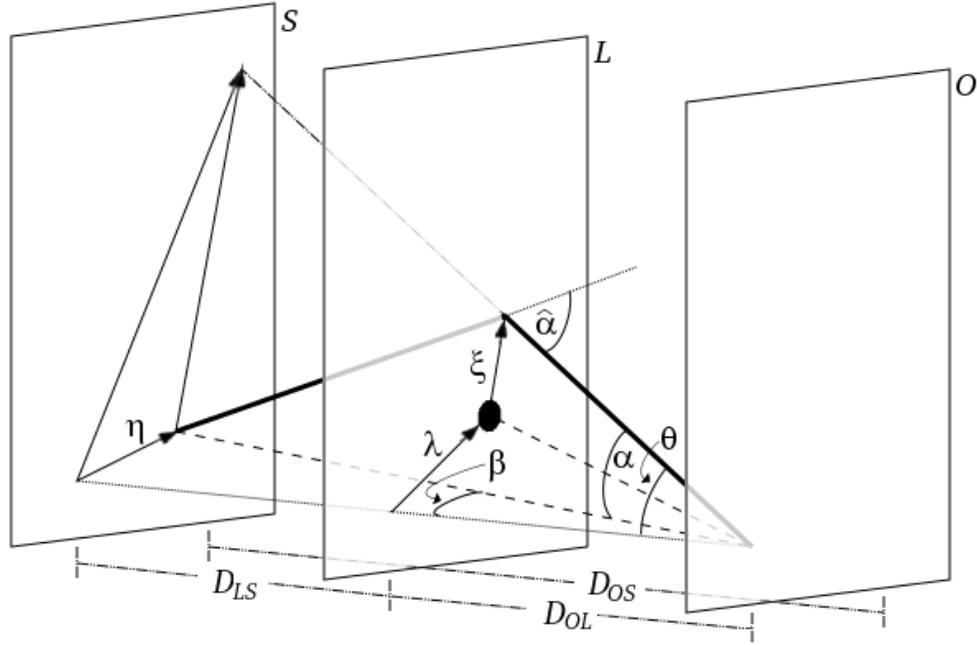


Figura 2.2: Trazo geométrico de los haces de luz en el efecto de lente gravitacional. Las distancias entre planos son diametrales angulares.

O ; la trayectoria de los haces de luz puede ser aproximada a líneas rectas con cierta flexión justo al cruzar por el plano L . Esta aproximación es válida en el límite de campo débil o ángulos de deflexión pequeños. En la Fig. 2.2 se muestra el esquema general de la deflexión de la luz emitida por la fuente a causa de la masa, y percibida por el observador O . Allí mismo se aprecian los vectores bidimensionales $\boldsymbol{\eta}$ en S y $\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\lambda}$ en L , los cuales representan las posiciones de partida del haz y de impacto sobre los planos de la fuente y la lente respectivamente. Los ángulos $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\theta}$, definidos con respecto al eje óptico (línea punteada en la Fig. 2.2) quedarán especificados por los vectores antes mencionados, de modo que será útil asociarles un carácter vectorial. En ausencia de masa, la imagen de la fuente es vista por el observador en la posición $\boldsymbol{\eta}$ o $\boldsymbol{\beta}$ y el haz de luz se mueve a través de la trayectoria descrita por la línea a guiones, de otro modo, bajo la influencia gravitacional del objeto, los haces de luz se desvían un ángulo $\hat{\alpha}$, que llamaremos de deflexión; lo que produce que la posición de la imagen que registra el observador cambie a $\boldsymbol{\theta}$.

En virtud de la definición de distancia diametral angular (1.87), se puede establecer una relación vectorial entre la posición de la imagen con y sin lente en el plano de la misma.

$$\boldsymbol{\eta} + \hat{\alpha}D_{LS} = \boldsymbol{\theta}D_{OS} \quad (2.15)$$

con lo cual

$$\beta D_{OS} + \hat{\alpha} D_{LS} = \theta D_{OS} \quad (2.16)$$

donde a $\hat{\alpha}$ se le ha asignado también una dimensión vectorial. De lo anterior resulta

$$\beta = \theta - \hat{\alpha} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \quad (2.17)$$

o simplemente

$$\beta = \theta - \alpha \quad (2.18)$$

donde α es el llamado ángulo escalado y está relacionado con el ángulo de deflexión por

$$\alpha D_{OS} = \hat{\alpha} D_{LS} \quad (2.19)$$

En general α depende de la distribución de masa de la lente que causa la deflexión al haz de luz y de la posición sobre L en la cual éste incida, es decir es una función de θ , de modo que la Ec. (2.18) debe ser escrita como

$$\beta = \theta - \alpha(\theta) \quad (2.20)$$

conocida como ecuación de la lente. Esta es la relación básica entre la posición real de la fuente y su posición aparente, observadas por O .

2.3. Ángulo de deflexión de una distribución de masa

Sea el caso de una lente puntual cuyo ángulo de deflexión es muy pequeño, esto es $\hat{\alpha} \ll 1$ (lo que se conoce como aproximación de lente delgada o aproximación de Born). En la sección 2.14 se derivó la expresión para el ángulo de deflexión generado por una masa esférica a partir de la métrica de Schwarzschild, por tanto de la Fig. 2.2 se obtiene

$$\hat{\alpha}(\xi) = \frac{4GM}{c^2 \xi} \quad (2.21)$$

donde $\hat{\alpha} = |\hat{\alpha}|$ y $\xi = |\xi|$.

En el caso de campos débiles, el ángulo de deflexión de una distribución discreta de masas en L puede ser considerado como la superposición de las deflexiones individuales de cada masa, de modo que

$$\hat{\alpha}(\xi) = \frac{4G}{c^2} \sum_i \left(m_i \frac{\xi - \xi_i}{|\xi - \xi_i|^2} \right) \quad (2.22)$$

donde, como se había mencionado, se le ha dado un valor vectorial al ángulo de deflexión.

La expresión (2.22) nos invita a definir el ángulo de deflexión de una distribución

continua de masa de densidad volumétrica¹⁷ $\rho = \rho(\xi_1, \xi_2, z)$, como el límite infinito de la suma de ángulos de deflexión debidos a elementos de masa $dm = \rho(\xi_1, \xi_2, z)dV$

$$\hat{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int_{V'} \frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|^2} dm(\xi'_1, \xi'_2, z'). \quad (2.23)$$

Esta integral puede ser llevada a cabo sobre todo el espacio debido a que no hay contribución al ángulo de deflexión por fuera de la distribución

$$\hat{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi'_1, \xi'_2, z') \frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|^2} d\xi'_1 d\xi'_2 dz' \quad (2.24)$$

y ya que el vector $\boldsymbol{\xi}$ reposa en el plano de la lente L y es bidimensional podemos expresar la integral triple como

$$\hat{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|^2} \int_{\mathbb{R}} \rho(\xi'_1, \xi'_2, z') dz' d\xi'_1 d\xi'_2 \quad (2.25)$$

Si definimos la densidad de masa superficial de la lente como la proyección de la masa volumétrica en L ,

$$\Sigma(\boldsymbol{\xi}') = \int_{\mathbb{R}} \rho(\xi'_1, \xi'_2, z') dz' \quad (2.26)$$

el ángulo de deflexión es

$$\hat{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Sigma(\boldsymbol{\xi}') \frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|^2} d\xi'_1 d\xi'_2. \quad (2.27)$$

En este punto cabe anotar el hecho de que toda la información física de la lente está contenida en el ángulo de deflexión y éste a su vez en la densidad de masa de la lente.

Como las distancias diametrales angulares son definidas en términos de ángulos, Ec. (1.87), el ángulo de deflexión es función de los mismos, donde $d\xi_i = D_{OL}d\theta_i$ con $i = 1, 2$

$$\hat{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{4GD_{OL}}{c^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Sigma(\boldsymbol{\theta}') \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|^2} d\theta'_1 d\theta'_2 \quad (2.28)$$

y recordando la relación con el ángulo escalado Ec. (2.19)

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) \frac{D_{LS}}{D_{OS}} = \frac{4G}{c^2} \frac{D_{OL}D_{LS}}{D_{OS}} \int_{\mathbb{R}^2} \Sigma(\boldsymbol{\theta}') \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|^2} d\theta'_1 d\theta'_2 \quad (2.29)$$

Los términos constantes pueden ser recogidos en una función (la aparición de la constante π tiene una razón que se explicará adelante)

$$\Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_{OS}}{D_{OL}D_{LS}} \quad (2.30)$$

¹⁷No debe confundirse la coordenada z sobre la cual se define la densidad volumétrica, con el redshift, también simbolizado por medio de la z .

la cual es conocida como la densidad de masa superficial crítica y depende de las distancias involucradas y, por lo tanto, del modelo cosmológico. Con esta nueva definición, el ángulo escalado será

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\Sigma(\boldsymbol{\theta}')}{\Sigma_{cr}} \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|^2} d\theta'_1 d\theta'_2 \quad (2.31)$$

No todos los sistemas galácticos tienen las mismas consecuencias gravitacionales sobre los haces de luz, pues esto depende enteramente de las propiedades másicas de cada sistema, por ejemplo en el régimen del ELG Fuerte son comunes características como la multiplicidad de imágenes y la deformación de la fuente; por lo tanto es conveniente definir una cantidad que sirva de criterio de comparación entre los regímenes existentes: *strong* y *weak lensing*, la densidad de masa superficial adimensional, o conocida como *convergencia* $\kappa(\boldsymbol{\theta})$

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\Sigma(\boldsymbol{\theta})}{\Sigma_{cr}} \quad (2.32)$$

entonces, el ángulo de deflexión escalado será

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \kappa(\boldsymbol{\theta}') \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|^2} d\theta'_1 d\theta'_2 \quad (2.33)$$

Lentes para las cuales $\kappa(\boldsymbol{\theta}) \approx 1$ pueden considerarse como lentes fuertes, mientras que en el caso $\kappa(\boldsymbol{\theta}) \ll 1$ son llamadas débiles.

2.4. Potencial deflector

Utilizando ahora el hecho que

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \frac{\partial}{\partial\theta_2} \right) \ln |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'| = \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \ln |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'| = \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|^2} \quad (2.34)$$

e introduciendo esto en el ángulo escalado

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \kappa(\boldsymbol{\theta}') \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \ln |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'| d\theta'_1 d\theta'_2, \quad (2.35)$$

el gradiente puede ser llevado fuera de la integral, pues es evaluado con respecto a los ángulos no primados

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \kappa(\boldsymbol{\theta}') \ln |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'| d\theta'_1 d\theta'_2 \right), \quad (2.36)$$

es decir

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \nabla\psi(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.37)$$

donde

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathfrak{R}^2} \kappa(\boldsymbol{\theta}') \ln |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'| d\theta'_1 d\theta'_2 \quad (2.38)$$

es el potencial deflector bidimensional que contiene igualmente toda la información de la lente como su masa o ubicación cosmológica.

El potencial deflector satisface la Ecuación de Poisson, pues a partir de

$$\nabla^2_{\boldsymbol{\theta}} \ln |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'| = 2\pi\delta(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') \quad (2.39)$$

siendo $\delta(\boldsymbol{\theta})$ la función Delta de Dirac. Tomando la divergencia del ángulo de deflexión

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \nabla^2 \psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathfrak{R}^2} \kappa(\boldsymbol{\theta}') \nabla^2_{\boldsymbol{\theta}} \ln |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'| d\theta'_1 d\theta'_2 \quad (2.40)$$

con lo cual

$$\nabla^2 \psi(\boldsymbol{\theta}) = 2 \int_{\mathfrak{R}^2} \kappa(\boldsymbol{\theta}') \delta(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') d\theta'_1 d\theta'_2 = 2\kappa(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.41)$$

es decir

$$\nabla^2 \psi(\boldsymbol{\theta}) = 2\kappa(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.42)$$

en este punto se aprecia claramente por qué se introdujo la constante π en la definición de la densidad de masa Σ_{cr} , expresión (2.30).

2.5. Potencial de Fermat

A partir de la Ec. (2.37) se puede escribir la ecuación de la lente en términos del potencial deflector

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} - \nabla\psi(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.43)$$

o

$$\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\theta} + \nabla\psi(\boldsymbol{\theta}) = 0 \quad (2.44)$$

y recordando que el gradiente es una función de las coordenadas (θ_1, θ_2)

$$\frac{1}{2} \nabla(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\beta})^2 = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\theta} \quad (2.45)$$

podemos escribir la ecuación de la lente como

$$\nabla \left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\beta})^2 - \psi(\boldsymbol{\theta}) \right] = 0 \quad (2.46)$$

o

$$\nabla\Phi(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\beta}) = 0 \quad (2.47)$$

donde se ha introducido el *Potencial de Fermat*

$$\Phi(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\beta})^2 - \psi(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.48)$$

Escribir la ecuación de la lente de la forma (2.47) es útil ya que la formación de imágenes se da en aquellos puntos extremos del potencial de Fermat.



Figura 2.3: Efecto de lente gravitacional generado por un cúmulo galáctico (RCS2 032727-132623) a $z = 0,564$ sobre una galaxia de fondo (RCSGA 032727-132609) a $z = 1,701$. Crédito: NASA, ESA, J. Rigby (NASA Goddard Space Flight Center), K. Sharon (Kavli Institute for Cosmological Physics; University of Chicago), and M. Gladders and E. Wuyts (University of Chicago). Imagen tomada en marzo de 2011.

2.6. Distorsión de las imágenes

Einstein pensaba que los efectos de las lentes gravitacionales eran inapreciables, sin embargo, con el desarrollo de potentes telescopios como el Hubble se ha podido observar en detalle la excelstitud de este fenómeno. En la Fig. 2.3 se observa uno de los más espectaculares ejemplos, donde el campo gravitacional de un cúmulo de galaxias, no sólo deforma y rota casi un ángulo de 90° una galaxia de fondo sino que también aumenta su brillo.

Si la fuente es mucho más pequeña que la escala angular en la cual las propiedades de la lente cambian, la ecuación de la lente puede ser linealizada localmente. La distorsión de las imágenes queda descrita por medio del jacobiano de la matriz, el cual caracteriza el mapeo del plano de la lente al plano de la fuente,

$$\mathcal{A} = \frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j} \quad i, j = 1, 2 \quad (2.49)$$

la primer componente de la matriz de la transformación se obtiene cuando $i = j = 1$

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_1} = \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\theta_1 - \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} \right) = 1 - \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1^2} \quad (2.50)$$

y para la segunda $i = 1, j = 2$

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_2} = \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\theta_1 - \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} \right) = -\frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2 \partial \theta_1}. \quad (2.51)$$

Haciendo lo propio para las otras dos componentes se obtiene

$$\mathcal{A} = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right) \quad i, j = 1, 2 \quad (2.52)$$

sin embargo, es muy útil expandir el último término de la Ec. (2.50) de la siguiente forma

$$\frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1^2} + \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1^2} - \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2^2} \right). \quad (2.53)$$

Se aprecia claramente que el primer término entre paréntesis del miembro derecho de la ecuación anterior es la convergencia, Ec (2.42) y definiendo

$$\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1^2} - \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2^2} \right) \quad (2.54)$$

y

$$\gamma_2(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} \quad (2.55)$$

conocidas como las *componentes del Shear*, se obtiene

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_1} = 1 - \kappa - \gamma_1 \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_2} = -\gamma_2 \quad (2.57)$$

Por lo tanto, la matriz de la transformación estará dada por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

Inmediatamente se observa que la traza de la matriz es función del potencial deflector

$$Tr \mathcal{A} = 2(1 - \kappa) = 2 - \nabla^2 \psi \quad (2.59)$$

Las cantidades γ_1 y γ_2 pueden ser combinadas para definir el número complejo

$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2, \quad (2.60)$$

es decir

$$\gamma(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1^2} - \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2^2} \right) + i \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} \quad (2.61)$$

o en términos de un operador diferencial actuando sobre el potencial deflector

$$\gamma(\boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} \right) + i \frac{\partial^2}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} \right] \psi(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.62)$$

esta interpretación del shear en términos del potencial constituye el punto de partida para reconstruir la masa de una distribución que actúa como lente sobre una fuente de fondo, método conocido como Kaiser & Squires.

2.7. Magnificación

Las formas de las imágenes y la de la fuente son, en general, distintas. Sin embargo, la desviación de la luz no supone la absorción ni emisión de los fotones, de modo que la distribución de brillo superficial (o intensidad específica) no se ve alterada por el efecto de lente gravitacional. Es decir

$$I(\boldsymbol{\theta}) = I[\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\theta})] \quad (2.63)$$

Debido a que la ecuación de la lente puede linealizarse, $\boldsymbol{\beta}$ es descrito por la matriz jacobiana, y por ende, la razón entre los ángulos sólidos subtenidos por una imagen y su fuente es el inverso del determinante de la matriz, llamado *magnificación* μ . En esa dirección, escribiremos la ecuación de valores propios de la matriz jacobiana como

$$(1 - \kappa - \gamma_1 - \lambda)(1 - \kappa + \gamma_1 - \lambda) - \gamma_2^2 = 0 \quad (2.64)$$

$$(1 - \kappa - \lambda)^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 = 0 \quad (2.65)$$

$$\lambda = 1 - \kappa \pm (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{1/2} \quad (2.66)$$

y definiendo la amplitud del shear como

$$|\gamma| = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{1/2} \quad (2.67)$$

los valores propios de \mathcal{A} resultan

$$\lambda_1 = 1 - \kappa + |\gamma|, \quad \lambda_2 = 1 - \kappa - |\gamma|. \quad (2.68)$$

Por lo tanto, el determinante de la matriz jacobiana es

$$\lambda_1 \lambda_2 = (1 - \kappa)^2 - \gamma^2 \quad (2.69)$$

y la magnificación

$$\mu = \frac{1}{|\det \mathcal{A}|} = \frac{1}{|(1 - \kappa)^2 - \gamma^2|} \quad (2.70)$$

esto es, la razón entre los flujos observados de la fuente con, y sin lente. Puede demostrarse a partir de este efecto que las imágenes son distorsionadas tanto en

tamaño como en forma. Por ejemplo, si la fuente es circular, su imagen será una elipse con semieje mayor $\lambda_1 r$ y menor $\lambda_2 r$, si $\kappa < 1$.

Cabe notar que la matriz jacobiana Ec. (2.58) puede ser reescrita como

$$\mathcal{A} = (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

y debido a que el shear se definió como una cantidad compleja, la Ec. (2.60) implica que el shear puede expresarse en términos de un ángulo ϕ que representa la fase del shear

$$\gamma = |\gamma| e^{2i\phi} = |\gamma| (\cos 2\phi + i \sin 2\phi) \quad (2.72)$$

de modo que las componentes del shear se pueden reescribir como

$$\gamma_1 = |\gamma| \cos 2\phi \quad \gamma_2 = |\gamma| \sin 2\phi \quad (2.73)$$

y la Ec. (2.71) será entonces

$$\mathcal{A} = (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - |\gamma| \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

Lo que indica que la convergencia solamente reduce o amplía la imagen mientras que el shear es la cantidad que induce anisotropía a la fuente.

No obstante de la ecuación anterior, al factorizar el término que tiene que ver con la convergencia de la matriz jacobiana se obtiene

$$\mathcal{A} = (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 - g_1 & -g_2 \\ -g_2 & 1 + g_1 \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

donde se ha introducido la cantidad

$$g_i = \frac{\gamma_i}{1 - \kappa} \quad (2.76)$$

conocido como shear reducido. Al igual que γ , g puede ser considerado como un número complejo y sus componentes determinan el cambio en la forma entre la fuente y su imagen.

2.8. Curvas críticas y cáusticas

No para todos los puntos en L la transformación dada por la ecuación de la lente puede ser invertida. Allí, el determinante de la matriz jacobiana es idénticamente cero, de modo que la magnificación en esos puntos es infinita. Tales parejas (θ_1, θ_2) son llamadas puntos críticos y a su imagen a través de la ecuación de la lente en el plano de la fuente S , (β_1, β_2) puntos cáusticos. El conjunto de todos los puntos críticos se les conoce como *curva crítica* y al de los cáusticos, *curva cáustica*.

Cuando una fuente reposa cerca a una curva cáustica, su imagen es fuertemente distorsionada formando arcos de luz y perfiles de “banana”. El número de imágenes (multiplicidad¹⁸) depende de la posición de la fuente en su plano, pues las curvas críticas dividen el plano de la lente en regiones de *paridad negativa* ($\mu < 0$) y *positiva* ($\mu > 0$) de modo que cuando la fuente cruce sus correspondientes cáusticas el número de imágenes puede ser aumentado o disminuido en 2.

El potencial deflector determina las curvas críticas y cáusticas al igualar el determinante de la matriz (2.49) a cero

$$\det \mathcal{A} = 0 \quad (2.77)$$

lo que quiere decir

$$(1 - \partial_{\theta_1} \partial_{\theta_1} \psi(\theta_1, \theta_2)) (1 - \partial_{\theta_2} \partial_{\theta_2} \psi(\theta_1, \theta_2)) - (\partial_{\theta_1} \partial_{\theta_2} \psi(\theta_1, \theta_2))^2 = 0. \quad (2.78)$$

No obstante de la definición en términos de $\psi(\boldsymbol{\theta})$, resulta útil escribir la Ec. (2.77) en términos del shear Ec. (2.60) y de la convergencia (2.32)

$$(1 - \kappa(\boldsymbol{\theta}))^2 - \gamma_1^2(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_2^2(\boldsymbol{\theta}) = 0, \quad (2.79)$$

$$(1 - \kappa(\boldsymbol{\theta}))^2 - \gamma^2(\boldsymbol{\theta}) = 0, \quad (2.80)$$

$$(1 - \kappa(\boldsymbol{\theta}) - |\gamma(\boldsymbol{\theta})|)(1 - \kappa(\boldsymbol{\theta}) + |\gamma(\boldsymbol{\theta})|) = 0. \quad (2.81)$$

Es decir, las curvas críticas se obtendrán cuando alguna de un par de ecuaciones se satisfaga para $\boldsymbol{\theta}$

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) + |\gamma(\boldsymbol{\theta})| = 1 \quad (2.82)$$

o

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) - |\gamma(\boldsymbol{\theta})| = 1. \quad (2.83)$$

En la Fig. 2.4 se muestran las curvas críticas y cáusticas obtenidas a partir de una lente compuesta por un par de galaxias idénticas modeladas como esferas isoterma con núcleos y separadas desde sus centros una distancia de $100r_0$ (izquierda) y $160r_0$ (derecha), donde r_0 es el radio de los núcleos. En el pánel inferior se aprecian los potenciales de Fermat (2.48) de ambas configuraciones para una fuente ubicada en $(1, 1)$ (unidades en kpc) en su plano. Las posiciones de las imágenes se dan en los puntos maximales.

2.9. Efecto de lente débil

Debido a que el principal efecto de los campos gravitacionales sobre las fuentes de fondo es distorsionar sus imágenes, es posible medir a partir de las mismas, las propiedades de la lente que causa la distorsión. Para ello es indispensable cuantificar la forma de una galaxia en términos de cantidades observables, además la mayoría

¹⁸Cuando la lente es capaz de producir más de una geodésica conectando la fuente y el observador.

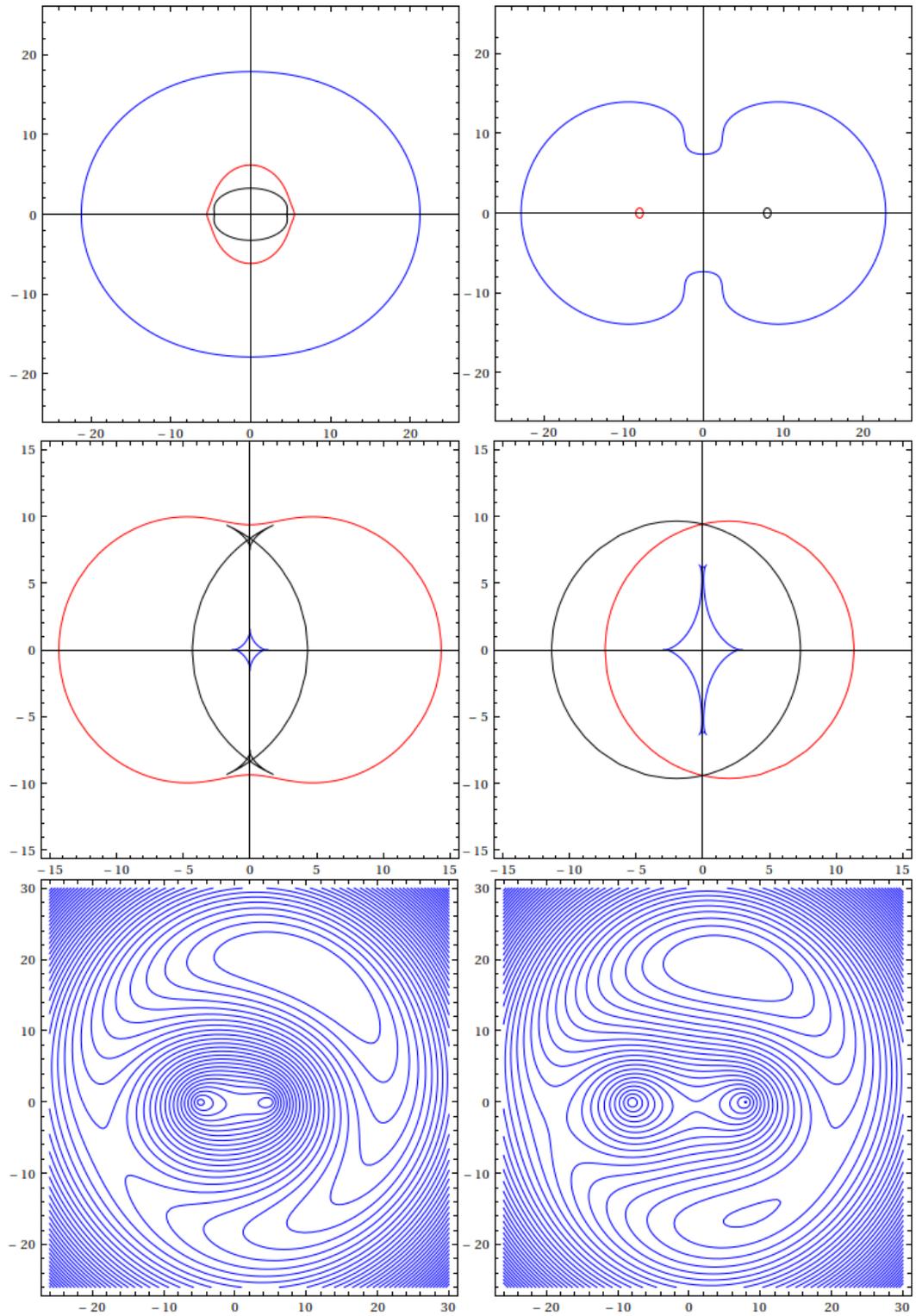


Figura 2.4: Curvas críticas (arriba) y cáusticas (medio) y potencial de Fermat (abajo) de un sistema binario de galaxias modeladas como esferas isotermas no singulares al separar sus centros en dos arreglos distintos. Las unidades en todos los diagramas es $1kpc$.

de galaxias que se observan poseen formas irregulares y están dadas en términos del brillo de cada pixel de la cámara CCD con la que se registre. Es por esto que se debe definir una cantidad para determinar tamaño y forma las cuales den cuenta de la irregularidad de las imágenes.

Sea $I(\boldsymbol{\theta})$ la distribución de brillo superficial de la imagen de una galaxia, se define el centro de la imagen como

$$\boldsymbol{\theta}_c = \frac{\int \boldsymbol{\theta} q[I(\boldsymbol{\theta})] d^2\boldsymbol{\theta}}{\int q[I(\boldsymbol{\theta})] d^2\boldsymbol{\theta}} \quad (2.84)$$

donde $q[I(\boldsymbol{\theta})]$ es una función de peso que debe ser escogida apropiadamente, por ejemplo, la función paso de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2.85)$$

de modo que se puede definir

$$q(I) = H(I - I') \quad (2.86)$$

donde I' es una superficie de brillo límite (isofota). Así mismo, si

$$q(I) = I \quad (2.87)$$

$\boldsymbol{\theta}_c$ será el centro de luz de la imagen.

Una vez que se halla escogido $q(I)$, se define el *tensor de momentos de segundo brillo*

$$Q_{ij} = \frac{\int (\theta_i - \theta_{ci})(\theta_j - \theta_{cj}) q[I(\boldsymbol{\theta})] d^2\boldsymbol{\theta}}{\int q[I(\boldsymbol{\theta})] d^2\boldsymbol{\theta}}, \quad i, j = 1, 2 \quad (2.88)$$

así definido, el tensor Q cuyas componentes están dadas por la Ec. (2.88), es simétrico, de modo que su determinante, que es un invariante, nos servirá para definir el tamaño de la imagen como

$$\omega = (Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2)^{1/2} \quad (2.89)$$

tal que, si $q(I)$ está definida mediante la Ec. (2.86), ω será proporcional al ángulo sólido encerrado por la isofota límite.

Ahora cuantificamos la forma de la imagen definiendo la elipticidad compleja,

$$\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2. \quad (2.90)$$

Por ejemplo una posible escogencia es

$$\chi = \frac{Q_{11} - Q_{22} + 2iQ_{12}}{Q_{11} + Q_{22}} \quad (2.91)$$

o, que usaremos de ahora en adelante (por razones más abajo expuestas)

$$\epsilon = \frac{Q_{11} - Q_{22} + 2iQ_{12}}{Q_{11} + Q_{22} + 2(Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2)^{1/2}} \quad (2.92)$$

Esta definición concuerda con la invarianza en la rotación de una elipse un ángulo de 180° , ya que, en el caso en el que se trate de una imagen con isofotas elípticas con semiejes a y b , tales que $a/b \leq 1$, entonces

$$\epsilon = \frac{a - b}{a + b} e^{2i\varphi} = |\epsilon| e^{2i\varphi} \quad (2.93)$$

siendo φ el ángulo barrido por el semieje mayor de la elipse al ser rotada, y se encuentra a partir de la Ec. (2.90), que corresponde la mitad de la fase de χ .

Sea ahora $I_S(\boldsymbol{\beta})$ la distribución de brillo superficial de la imagen de la galaxia sin el efecto de la lente, donde $\boldsymbol{\beta}$ es la posición de la fuente y se halla relacionado con $\boldsymbol{\theta}$ mediante la ecuación de la lente. Y definamos el tensor de los segundos momentos de brillo de la fuente sin el efecto de la lente del mismo modo que para la imagen Ec. (2.88)

$$Q_{Sij} = \frac{\int (\beta_i - \beta_{ci})(\beta_j - \beta_{cj}) q[I_S(\boldsymbol{\beta})] d^2\boldsymbol{\beta}}{\int q[I_S(\boldsymbol{\beta})] d^2\boldsymbol{\beta}}, \quad i, j = 1, 2 \quad (2.94)$$

donde $\boldsymbol{\beta}_c$ es la posición angular del centro de la lente sin el efecto de la lente, y tiene la misma forma que $\boldsymbol{\theta}_c$ Ec. (2.84).

En la sección (2.7) se mencionó que el paquete de luz proveniente de la fuente no es emitido ni absorbido en el proceso de desviación, es decir que el brillo superficial de la fuente permanece constante, esto es

$$I_S(\boldsymbol{\beta}) = I(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.95)$$

además localmente es posible escribir la ecuación de la lente como

$$\beta_i - \beta_{ci} = a_{ij}(\theta^j - \theta_c^j) \quad (2.96)$$

donde los términos de la matriz jacobiana de la ecuación de la lente son

$$a_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad i, j = 1, 2 \quad (2.97)$$

Lo anterior permite escribir a Q_{Sij} en términos de Q_{ij}

$$Q_{Sij} = a_{ik} a_{jl} Q^{kl}, \quad k, l = 1, 2 \quad (2.98)$$

o en notación matricial

$$Q_S = \mathcal{A} Q \mathcal{A}^T \quad (2.99)$$

pero la matriz jacobiana es simétrica $\mathcal{A} = \mathcal{A}^T$, luego

$$Q_S = \mathcal{A}Q\mathcal{A} \quad (2.100)$$

es decir, se puede obtener el tensor de los segundos momentos de brillo de la fuente a partir de aquel de la imagen si se conoce el jacobiano de la transformación $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\boldsymbol{\theta})$. Ahora definimos la elipticidades complejas ϵ_S de la fuente en el mismo modo que para las imágenes Ec. (2.92),

$$\epsilon_S = \frac{Q_{S11} - Q_{S22} + 2iQ_{S12}}{Q_{S11} + Q_{S22} + 2(Q_{S11}Q_{S22} - Q_{S12}^2)^{1/2}} \quad (2.101)$$

pero al estar relacionadas las componentes de los tensores de los segundos momentos de brillo de la fuente y la imagen, Ec. (2.98), puede demostrarse que las elipticidades de la imagen ϵ y de la fuente ϵ_S están relacionadas mediante

$$\epsilon = \begin{cases} (\epsilon_S + g)/(1 + g^*\epsilon_s) & \text{si } |g| \leq 1 \\ (1 + g^*\epsilon_S)/(\epsilon_s^* + g^*) & \text{si } |g| > 1 \end{cases} \quad (2.102)$$

donde g es el shear reducido definido por la Ec. (2.76)

$$g = \frac{\gamma}{1 - \kappa} \quad (2.103)$$

y es la cantidad que cuantifica el grado y dirección de la distorsión de las imágenes. El asterisco denota el complejo conjugado de las cantidades en la Ec. (2.102). Por otra parte, el determinante de la matriz jacobiana puede ser escrito en términos del shear reducido Ec. (2.75)

$$\det\mathcal{A} = (1 - g^2)(1 - \kappa)^2 = (1 - |g|)(1 + |g|)(1 - \kappa)^2 \quad (2.104)$$

lo cual implica que las condiciones $|g| \leq 1$ y $|g| > 1$ son equivalentes a $\det\mathcal{A} \geq 0$ y $\det\mathcal{A} < 0$ respectivamente, es decir, la elipticidad dependerá de la paridad de la región en la cual repose la imagen.

Capítulo 3

Algunos modelos de lente

Los efectos como la multiplicidad y la deformación de imágenes dependen de la distribución de materia que causa el campo gravitacional. Los modelos de lentes se han nutrido en buena parte de funciones de distribución provenientes de la dinámica galáctica, dadas en términos de leyes de potencias, e.g., el modelo de Hernquist [Her90], el modelo NFW (Navarro, Frenk & white) [NFW96], el modelo de Jaffe [Jaf83], por solo mencionar algunos.

En efecto, esta clase de modelos basados en leyes de potencias han dado al LG avances importantes. Tal es el caso del modelo Plummer [Plu11], quien puede dar cuenta de una galaxia achatada con un agujero negro central súper masivo, conduciendo a posibles métodos de detección de los mismos gracias a sus propiedades como lente [WE06]; o, e.g. $\rho \propto r^{-2}$ en la EI (esfera isoterma), fue suficiente para explicar las curvas de rotación planas de galaxias a grandes distancias [RR73]. No obstante, para cada modelo es necesario introducir perturbaciones debido a otras galaxias, cúmulos, o halos de materia oscura.

En este capítulo repasaremos el efecto de lente gravitacional producido por distribuciones de masa modelados a través de perfiles conocidos.

3.1. Esfera Singular Isotherma

El modelo de la Esfera Singular Isotherma (SIS) resulta de comparar un sistema estelar, como una galaxia o un cúmulo de galaxias, con una esfera de gas ideal isotérmico y autogravitante, los cuales resultan, al menos matemáticamente, idénticos desde el punto de vista estructural en sus ecuaciones de Poisson; conocida como ecuación de Lane-Emden de la politropa. Ahora bien, éste sistema ofrece una de las pocas soluciones analíticas de dicha ecuación interpretada como una politropa con índice adiabático igual a la unidad y donde la densidad de masa volumétrica está dada por [BT94]

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2} \quad (3.1)$$

donde σ es la velocidad de dispersión de la galaxia y cabe notar que la singularidad del modelo cuando $r \rightarrow 0$ puede ser evitada otorgando a la esfera un núcleo de modo que el modelo sea mejorado.

Modelaremos una lente galáctica por medio de una SIS, a una distancia D_{OL} , deflectando los haces de luz provenientes de una fuente a una distancia D_{OS} de nosotros y D_{LS} de la lente. De modo que la densidad escrita ahora en términos de los vectores paralelos y perpendicular al plano de la lente $\vec{r} = (\xi, z)$ [SEF99], es

$$\rho(\xi, z) = \frac{\sigma^2}{2\pi G (\xi^2 + z^2)} \quad (3.2)$$

donde $\xi = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}$.

A partir de (2.26), la densidad de masa proyectada será

$$\Sigma(\xi) = \frac{\sigma^2}{\pi G} \int_0^\infty \frac{1}{(\xi^2 + z^2)} dz = \frac{\sigma^2}{G\pi\xi} \left[\text{ArcTan} \left(\frac{z}{\xi} \right) \right]_0^\infty \quad (3.3)$$

$$\Sigma(\xi) = \frac{\sigma^2}{2G} \left(\frac{1}{\xi} \right) \quad (3.4)$$

y por medio de la densidad crítica (2.30), es posible escribir la convergencia

$$\kappa(\xi) = \frac{2\pi\sigma^2 D_{OL} D_{LS}}{c^2 D_{OS}} \left(\frac{1}{\xi} \right) \quad (3.5)$$

o, escrita en términos de θ , que no debe confundirse con el ángulo polar,

$$\kappa(\theta) = \frac{2\pi\sigma^2 D_{LS}}{c^2 D_{OS}} \frac{1}{\theta} \quad (3.6)$$

donde $\xi = D_{OL}\theta$.

La Ecuación de Poisson de acuerdo a las coordenadas antes descritas y para la distribución de masa esférica, queda expresada por

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\theta \frac{\partial \psi(\theta)}{\partial \theta} \right) = 2\kappa(\theta) \quad (3.7)$$

lo que conduce a¹⁹

$$\psi(\theta) = 2 \int_0^\theta \theta' \kappa(\theta') \ln \left(\frac{\theta}{\theta'} \right) d\theta' \quad (3.8)$$

$$\psi(\theta) = \frac{4\pi\sigma^2 D_{\text{LS}}}{c^2 D_{\text{OS}}} \int_0^\theta \ln \left(\frac{\theta}{\theta'} \right) d\theta' \quad (3.9)$$

es decir

$$\psi(\theta) = \frac{4\pi\sigma^2 D_{\text{LS}}}{c^2 D_{\text{OS}}} \theta. \quad (3.10)$$

Las curvas críticas de este perfil son círculos cuyo radio es proporcional a la velocidad de dispersión de la galaxia

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 = \left(\frac{4\pi\sigma^2 D_{\text{LS}}}{c^2 D_{\text{OS}}} \right)^2 \quad (3.11)$$

con lo cual las curvas cáusticas convergen a

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = 0. \quad (3.12)$$

La ecuación de la lente será

$$\beta_i(\theta_1, \theta_2) = \theta_i - \partial_{\theta_i} \psi(\theta_1, \theta_2); \quad i = 1, 2 \quad (3.13)$$

$$\beta_i(\theta_1, \theta_2) = \theta_i \left(1 - \frac{4\pi\sigma^2 D_{\text{LS}}}{c^2 D_{\text{OS}} \theta} \right); \quad i = 1, 2 \quad (3.14)$$

con $\theta = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}$.

Supongamos que la posición real de la fuente es $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, y dado que la ecuación de la lente es invertible, es posible hallar las posiciones de las imágenes a partir de aquella de la fuente

$$\beta^2 = \theta^2 \left(1 - \frac{4\pi\sigma^2 D_{\text{LS}}}{c^2 \theta D_{\text{OS}}} \right)^2 \quad (3.15)$$

$$\beta = \pm \left(\theta - \frac{4\pi\sigma^2 D_{\text{LS}}}{c^2 D_{\text{OS}}} \right) \quad (3.16)$$

llamaremos θ_p y θ_n las dos raíces que corresponden a su signo, (p), positiva y (n), negativa, respectivamente

$$\beta = \theta_p - \frac{4\pi\sigma^2 D_{\text{LS}}}{c^2 D_{\text{OS}}} \rightarrow \theta_p = \beta + \frac{4\pi\sigma^2 D_{\text{LS}}}{c^2 D_{\text{OS}}} \quad (3.17)$$

$$\beta = -\theta_n + \frac{4\pi\sigma^2 D_{\text{LS}}}{c^2 D_{\text{OS}}} \rightarrow \theta_n = -\beta + \frac{4\pi\sigma^2 D_{\text{LS}}}{c^2 D_{\text{OS}}} \quad (3.18)$$

¹⁹Veáse el Apéndice B

donde las posiciones de las imágenes son $\boldsymbol{\theta}_p = (\theta_{p1}, \theta_{p2})$ y $\boldsymbol{\theta}_n = (\theta_{n1}, \theta_{n2})$.

Con las posiciones reales de las imágenes, Ec. (3.17) y (3.18), podemos calcular las posiciones de las fuentes $\boldsymbol{\beta}_p = (\beta_{p1}, \beta_{p2})$ y $\boldsymbol{\beta}_n = (\beta_{n1}, \beta_{n2})$ arrojadas a través de la ecuación de la lente, que esta vez, depende del modelo que se escoja.

Un modelo con mayor realidad física procede de la inclusión de un núcleo que evite la singularidad de la Ec. (3.1) en $r \rightarrow 0$

$$\rho \propto (r_c^2 + r^2)^{-1} \quad (3.19)$$

donde r_c es el radio del núcleo. Las propiedades de lente de una versión más razonable de este modelo se estudiarán a continuación.

3.2. Elipsoide Isotermo

La Esfera Singular Isoterma no es consistente con la forma real de las galaxias ni con su densidad central, sin embargo, un mejor modelo puede ser aprovechado al introducir cierta elipticidad al potencial (3.10) y removiendo la singularidad por medio de (3.19)

$$\psi(\theta_1, \theta_2) = \frac{4\pi\sigma^2 D_{\text{LS}}}{c^2 D_{\text{OS}}} [\theta_0^2 + (1 - \epsilon)\theta_1^2 + (1 + \epsilon)\theta_2^2]^{1/2}, \quad (3.20)$$

redefiniendo las coordenadas escaladas por la elipticidad

$$q_1 = \theta_1 \sqrt{1 - \epsilon} \quad \text{y} \quad q_2 = \theta_2 \sqrt{1 + \epsilon}, \quad (3.21)$$

$$b_1 = \beta_1 \sqrt{1 - \epsilon} \quad \text{y} \quad b_2 = \beta_2 \sqrt{1 + \epsilon}, \quad (3.22)$$

la ecuación de la lente puede escribirse como

$$b_i = q_i \left(1 - \frac{k_i}{(\theta_0 + q^2)^{1/2}} \right) \quad (3.23)$$

con $i = 1, 2$; donde $q^2 = q_1^2 + q_2^2$, y

$$k_1 = k(1 - \epsilon) \quad \text{y} \quad k_2 = k(1 + \epsilon). \quad (3.24)$$

con

$$k = \frac{4\pi\sigma^2 D_{\text{LS}}}{c^2 D_{\text{OS}}} \quad (3.25)$$

Un ejemplo de formación de imágenes a partir de la Ec. (3.23) se visualiza en la Fig. 3.1 para una fuente circular en la posición (3, 3) y de radio 0,1 (unidades en kiloparsecs) a través de un elipsoide isotermo para $|k_1| = 5$, $|k_2| = 15$ y $\theta = 0,1$. En efecto, la Figura muestra la formación de imágenes circulares de distintos radios. Las curvas críticas estarán dadas por

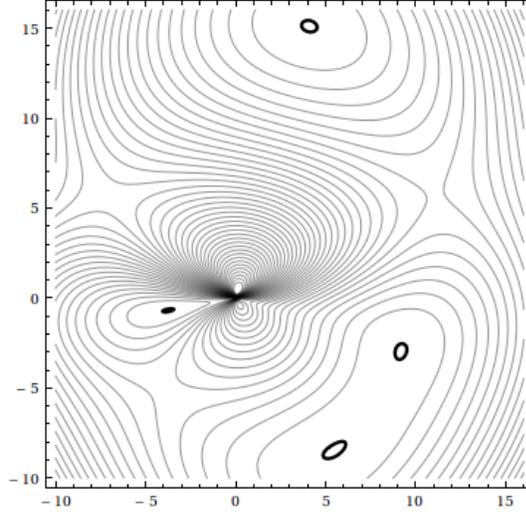


Figura 3.1: Formación de imágenes de una fuente circular ubicada en $(3,3)kpc$ a través de una lente gravitacional modelada por medio de un elipsoide isotermo. Las curvas negras más fuertes corresponden a una fuente de radio $0,1kpc$.

$$\frac{k (\theta_0^2 + q^2)^{1/2} [2\theta_0^2 + (1 + \epsilon)q_1^2 + (1 - \epsilon)q_2^2]}{k^2 (1 - \epsilon^2) \theta_0^2 + (\theta_0^2 + q^2)^2} = 1. \quad (3.26)$$

En la Fig. 3.2 se aprecia la solución numérica de la Ec. (3.26) y sus respectivas curvas cáusticas por medio de la ecuación de la lente (3.23) bajo los mismos parámetros definidos líneas atrás. En ella se observa la transformación entre regiones del plano de la lente (izquierda) al de la fuente (derecha), la curva crítica exterior se mapea en un astroide cáustico de cuatro picos, en tanto que la interior (pequeño círculo central) será llevada a través de la ecuación de la lente en una elipse.

3.3. Perfil NFW

A mediados de los años noventa se descubrió un perfil de densidad para los halos de materia oscura, conocido actualmente como perfil NFW (Julio Navarro, Carlos Frenk & Simon White), el cual resulta a partir de investigaciones numéricas sobre ciertas estructuras colapsadas (denominadas halos), encontrándose una forma funcional de la densidad volumétrica del halo. Esta densidad apenas depende de la masa del halo por lo que puede considerarse casi universal, no obstante para radios de halo muy pequeños el perfil no describe óptimamente las observaciones. El perfil NFW está dado por [NFW96]

$$\rho(r) = \frac{\delta_k \rho_c}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2} \quad (3.27)$$

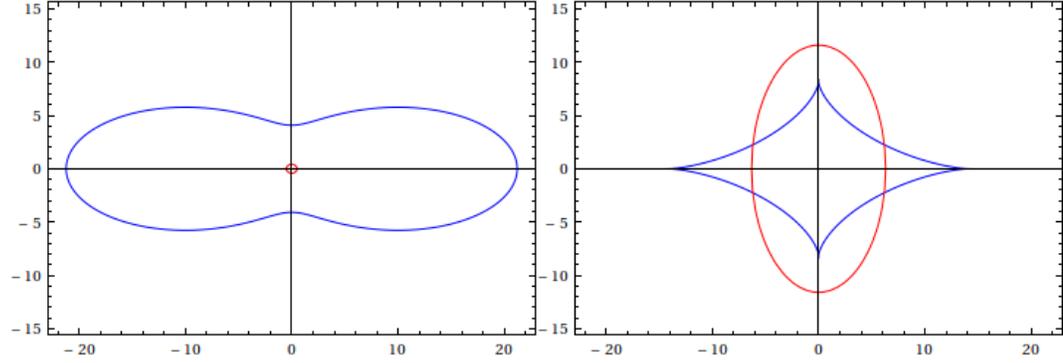


Figura 3.2: Curvas críticas (izquierda) y cáusticas (derecha) generadas por un elipsoide isoterma. Los colores se corresponden en cada diagrama.

este perfil aunque singular en $r = 0$, presenta una convergencia y potencial deflector continuos en todo el espacio²⁰ [HCT10]. Además posee un patrón de escala bien definido donde la densidad de masa es constante, llamado radio de escala $r_s = r_{200}/k$, donde k es una función del corrimiento al rojo cosmológico conocida como parámetro de concentración, y dentro del radio virial r_{200} el halo posee una densidad de masa igual a $200\rho_c$, siendo

$$\rho_c = \frac{3H^2(z)}{8\pi G} \quad (3.28)$$

es la densidad crítica del universo al redshift z del halo, Ec. (1.38), $H(z)$ es el parámetro de Hubble al mismo redshift, y δ_k es la llamada sobre-densidad característica del halo, relacionada con k mediante

$$\delta_k = \frac{200}{3} \frac{k^3}{\ln(1+k) - k/(1+k)} \quad (3.29)$$

Algunos de los efectos del perfil NFW en el contexto de las lentes gravitacionales ya han sido estudiados [Bar96], [HCT13]; ya que describe la distribución de materia oscura en el universo gracias a la aplicabilidad directa del perfil NFW al componente de masa dominante de todos los objetos astrofísicos.

Supongamos ahora una lente gravitacional modelada mediante un perfil NFW Ec. (3.27), donde son válidas nuevamente las distancias diametrales angulares atribuidas para el modelo de la SIS. Expresando la densidad de masa en términos de $\vec{\xi}$ y z

$$\rho(\xi, z) = \frac{\delta_k \rho_c}{\left[(\xi^2 + z^2)^{1/2} / r_s \right] \left[1 + (\xi^2 + z^2)^{1/2} / r_s \right]^2}, \quad (3.30)$$

²⁰La densidad de masa proyectada y potencial deflector son convergentes y de valor real en $r = 0$.

con lo cual la densidad de masa proyectada²¹

$$\Sigma(\xi) = 2 \int_0^\infty \rho(\xi, z) dz \quad (3.31)$$

$$\Sigma(\xi) = -\frac{2\delta_k \rho_c r_s^3}{(r_s^2 - \xi^2)^{3/2}} \left((r_s^2 - \xi^2)^{1/2} + 2r_s \text{ArcTanh} \left[\frac{\xi - r_s}{(r_s^2 - \xi^2)^{1/2}} \right] \right) \quad (3.32)$$

y la convergencia es, en términos de θ

$$\kappa(\theta) = -\frac{2\delta_k \rho_c r_s^3}{\Sigma_{cr} (r_s^2 - \theta^2 D_{OL}^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{2r_s}{(r_s^2 - \theta^2 D_{OL}^2)^{1/2}} \text{ArcTanh} \left[\frac{(r_s - \theta D_{OL})^{1/2}}{(r_s + \theta D_{OL})^{1/2}} \right] \right) \quad (3.33)$$

o en términos de la variable escalada $x = \theta D_{OL}/r_s$

$$\kappa(x) = -\frac{1}{2C(1-x^2)} \left(1 - \frac{2}{(1-x^2)^{1/2}} \text{ArcTanh} \left[\frac{(1-x)^{1/2}}{(1+x)^{1/2}} \right] \right) \quad (3.34)$$

donde se ha definido la constante

$$C = \frac{\Sigma_{cr}}{4\delta_k \rho_c r_s}. \quad (3.35)$$

Ahora es posible calcular el potencial deflector Ec. (3.8)

$$\psi(x) = \frac{2r_s^2}{D_{OL}^2} \int_0^x x' \kappa(x') \ln \left(\frac{x}{x'} \right) dx' \quad (3.36)$$

$$\psi(x) = -\frac{r_s^2}{CD_{OL}^2} \int_0^x \frac{x'}{(1-x'^2)} \left(1 - \frac{2}{(1-x'^2)^{1/2}} \text{ArcTanh} \left[\frac{(1-x')^{1/2}}{(1+x')^{1/2}} \right] \right) \ln \left(\frac{x}{x'} \right) dx' \quad (3.37)$$

$$\psi(x) = -\frac{2r_s^2}{CD_{OL}^2} \left[\text{ArcTanh}^2 \left[\frac{(1-x')^{1/2}}{(1+x')^{1/2}} \right] + \frac{1}{4} \ln^2 \left(\frac{x}{x'} \right) - \frac{1}{(1-x'^2)^{1/2}} \text{ArcTanh} \left[\frac{(1-x')^{1/2}}{(1+x')^{1/2}} \right] \ln \left(\frac{x}{x'} \right) \right]_0^x \quad (3.38)$$

$$\psi(x) = \frac{r_s^2}{2CD_{OL}^2} \left(\ln^2 \left(\frac{x}{2} \right) - 4 \text{ArcTanh}^2 \left[\frac{(1-x)^{1/2}}{(1+x)^{1/2}} \right] \right) \quad (3.39)$$

²¹Véase el Apéndice C

En la literatura no se halla reportado hasta el momento este potencial Ec. (3.39). Una vez determinado el potencial deflector, es posible escribir la ecuación de la lente en términos de las cantidades angulares, Ec. (2.18) donde se lee

$$\beta(\theta) = \theta \left| 1 - \frac{4\delta_k \rho_c r_s^3}{\Sigma_{cr} D_{OL}^2 \theta^2} \left(\ln \left(\frac{\theta D_{OL}}{2r_s} \right) + \frac{2r_s}{(r_s^2 - \theta^2 D_{OL}^2)^{1/2}} \text{ArcTanh} \left[\frac{(r_s - \theta D_{OL})^{1/2}}{(r_s + \theta D_{OL})^{1/2}} \right] \right) \right|. \quad (3.40)$$

O en términos de las coordenadas escaladas, bajo la definición de una nueva función

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \left(\ln \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{2}{(1-x^2)^{1/2}} \text{ArcTanh} \left[\frac{(1-x)^{1/2}}{(1+x)^{1/2}} \right] \right) \quad (3.41)$$

la ecuación de la lente quedará escrita como

$$\beta(\theta) = \theta \left| 1 - \frac{4\delta_k \rho_c r_s}{\Sigma_{cr}} f(\theta) \right| \quad (3.42)$$

o simplemente

$$y(x) = x \left| 1 - \frac{1}{C} f(x) \right| \quad (3.43)$$

donde se ha hecho el cambio de variable a las coordenadas escaladas $(x, y) = D_{OL}(\theta, \beta)/r_s$. El comportamiento de la ecuación de la lente en este modelo está visualizado en la Fig. 3.3, donde puede apreciarse que los máximos y mínimos locales (puntos críticos) dependen del valor de C . En tanto, la Fig. 3.4 muestra la ecuación de la lente en el caso en que $C = 0,1$. Dependiendo de la posición de la fuente en su plano existen cuatro posibilidades de formación de imágenes, si

- $y = 0$, existirán infinitas imágenes (anillo de Einstein de radio x_{c1}), si
- $0 < y < y(x_{c2})$, existirán tres imágenes, una en el interior del círculo de radio x_{c2} y otra exterior al mismo, pero interior al de radio x_{c1} , y la tercera exterior a x_{c1} , pero interior al círculo de radio x_r , si
- $y = y(x_{c2})$, existirán dos imágenes, una en x_{c2} y la otra en x_r , y si
- $y > y(x_{c2})$, existe solo una imagen exterior al círculo de radio x_r .

Como se observa, el número y formación de imágenes dependen de x_{c1} y x_{c2} . En particular, $y(x_{c2})$ divide el plano de la lente en secciones donde el número de imágenes varía en dos, de modo que x_{c2} y $y(x_{c2})$ corresponderán a los radios de un círculo crítico y cáustico de la lente, respectivamente. Cabe notar que $x_{c2} \in (0, x_{c1})$ y

$$y(x) = -x \left[1 - \frac{1}{C} f(x) \right] \quad (3.44)$$

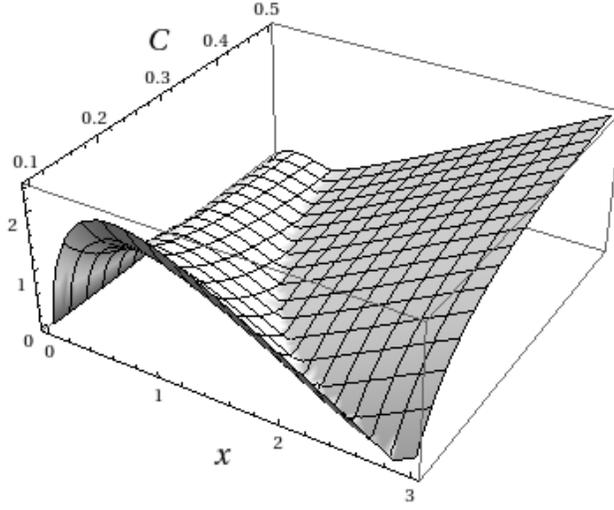


Figura 3.3: Ecuación de lente gravitacional modelada con el perfil NFW, (3.43), como función de x y de la constante C , que depende de los parámetros de la lente, (3.35).

pero el máximo de $y(x)$ se halla en

$$y'(x_{c2}) = 0 \quad (3.45)$$

esto es

$$g(x_{c2}) = C \quad (3.46)$$

donde se ha definido

$$g(x) = f(x) + xf'(x). \quad (3.47)$$

Por otra parte, $x_{c1} \neq 0$ se encuentra cuando $y = 0$

$$f(x_{c1}) = C. \quad (3.48)$$

En la Fig. 3.5 se encuentra graficado el comportamiento de los puntos maximales x_{c1} y x_{c2} como función de la constante C . El máximo valor tomado por los puntos maximales se halla cuando $C \rightarrow 0$, de donde, $x_{c1} \rightarrow \infty$ y $x_{c2} \rightarrow 1,3182\dots$

3.3.1. Críticas y Cáusticas

En la Sección 2.8 se definieron las curvas críticas como aquellos puntos donde la matriz de la transformación no posee inversa, y se demostró que esta definición equivale a solucionar un par de ecuaciones que dependen del shear Ec. (2.60) y de

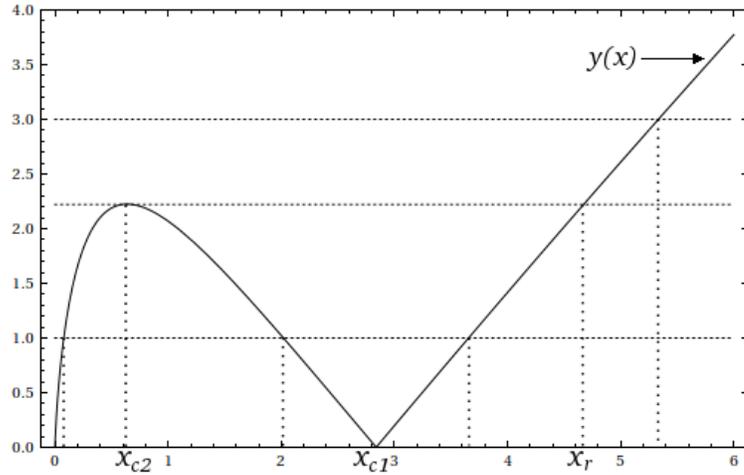


Figura 3.4: Ecuación de lente gravitacional modelada con el perfil NFW para un valor $C = 0,1$. Destacan los puntos $x = 0$ y x_{c1} donde la función intercepta al eje horizontal y toma un valor mínimo, y x_{c2} donde la ecuación de la lente posee el máximo local en el intervalo $[0, x_{c1}]$. Si $y > y(x_{c2})$ las imágenes estarán ubicadas por fuera del círculo de radio x_r . En la sección 3.3.1 (a continuación) se demostrará que x_{c1} y x_{c2} corresponden a los radios de los círculos críticos.

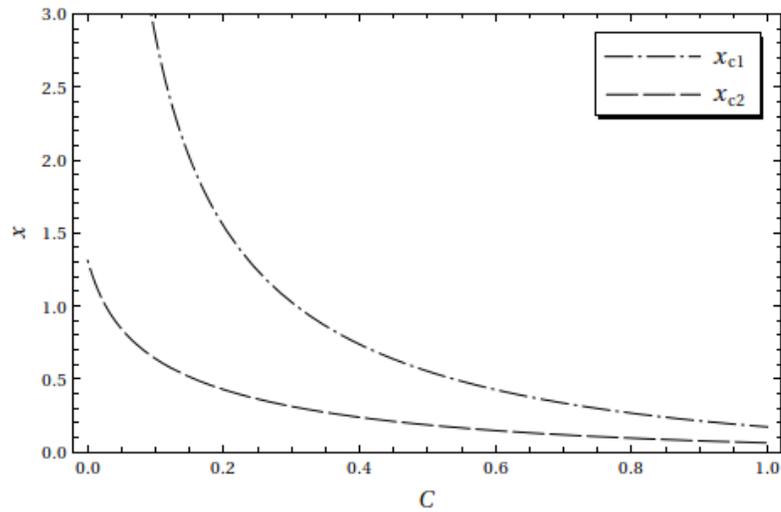


Figura 3.5: Comportamiento de los puntos máximos (con $x \neq 0$) de la ecuación de la lente (3.43) como función de la constante C . La curva x_{c1} representa el intercepto de $y(x)$ con el eje x y x_{c2} el punto donde $y(x)$ es máximo en el intervalo $(0, x_{c1})$. De acuerdo con las ecuaciones (3.59), x_{c1} y x_{c2} corresponden a los radios de los círculos críticos.

la convergencia asociados a la lente. En este caso el shear, a partir de las Ec. (2.54) y (2.55), el potencial deflector Ec. (3.39) y en términos de la función (3.41)

$$f(\theta) = \left(\frac{r_s}{\theta D_{\text{OL}}} \right)^2 \left(\ln \left(\frac{\theta D_{\text{OL}}}{2r_s} \right) + \frac{2r_s}{(r_s^2 - \theta^2 D_{\text{OL}}^2)^{1/2}} \text{ArcTanh} \left[\frac{(r_s - \theta D_{\text{OL}})^{1/2}}{(r_s + \theta D_{\text{OL}})^{1/2}} \right] \right) \quad (3.49)$$

es, en su primera componente

$$\gamma_1(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2C} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x^2(1-x^2)} \left[1 + \ln \left(\frac{x}{2} \right) + (2 - 3x^2)f(x) \right] \quad (3.50)$$

y para la segunda

$$\gamma_2(\mathbf{x}) = -\frac{1}{C} \frac{x_1 x_2}{x^2(1-x^2)} \left[1 + \ln \left(\frac{x}{2} \right) + (2 - 3x^2)f(x) \right] \quad (3.51)$$

de modo que la magnitud del shear será

$$|\gamma(x)| = (\gamma_1^2(\mathbf{x}) + \gamma_2^2(\mathbf{x}))^{1/2} \quad (3.52)$$

$$|\gamma(x)| = \frac{1}{2C} \frac{1}{1-x^2} \left[1 + \ln \left(\frac{x}{2} \right) + (2 - 3x^2)f(x) \right] \quad (3.53)$$

mientras que la convergencia Ec. (3.33)

$$\kappa(x) = -\frac{1}{2C} \frac{1}{1-x^2} \left[1 + \ln \left(\frac{x}{2} \right) - x^2 f(x) \right] \quad (3.54)$$

Por lo tanto, la suma y la diferencia de la convergencia y el shear dan como resultado

$$\kappa(x) + |\gamma(x)| = \frac{1}{C} f(x) \quad (3.55)$$

y

$$\kappa(x) - |\gamma(x)| = -\frac{1}{C} \frac{1}{1-x^2} \left[1 + \ln \left(\frac{x}{2} \right) + (1 - 2x^2)f(x) \right] \quad (3.56)$$

donde C es la constante definida mediante (3.35).

De este modo las Ec. (2.82) y (2.83) que determinan los puntos críticos θ_c , serán respectivamente

$$f(x_{c1}) = C \quad (3.57)$$

y

$$-\frac{1}{1-x_{c2}^2} \left[1 + \ln \left(\frac{x_{c2}}{2} \right) + (1 - 2x_{c2}^2)f(x_{c2}) \right] = C \quad (3.58)$$

con lo cual, puede decirse que las curvas críticas estarán dadas por

$$f(x_{c1}) = C \quad \text{o} \quad g(x_{c2}) = C, \quad (3.59)$$

donde

$$g(x) = -\frac{1}{x^2} \left(\frac{x^2}{1-x^2} + \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2(1-2x^2)}{(1-x^2)^{3/2}} \text{ArcTanh} \left[\frac{(1-x)^{1/2}}{(1+x)^{1/2}} \right] \right). \quad (3.60)$$

Las ecuaciones (3.59) ya se habían deducido en la sección anterior analizando la formación de imágenes, y cabe destacar que no están asociadas formando un sistema, de modo que dado un único valor de la constante C es posible encontrar dos soluciones x_{c1} y x_{c2} . Esto refleja la simetría esférica intrínseca del modelo, pues $x_c = \theta_c D_{OL}/r_s$ es constante y se interpreta como la magnitud de la posición de los puntos críticos (θ_c), esto es, dos círculos concéntricos, en la Fig. (3.5) se encuentran sus radios como función de la constante C .

En la Fig. (3.6) se aprecia el comportamiento de $f(x)$ y $g(x)$. Una recta paralela al eje horizontal manifiesta el valor constante de C , e intersecta las curvas en los puntos $(x_{c1}, f(x_{c1}))$ y $(x_{c2}, g(x_{c2}))$. Y dado que C es estrictamente mayor que cero²², cuando $C \rightarrow 0$ se registra el máximo valor del radio x_{c2} del círculo crítico asociado a $g(x)$ y tiene un valor $x_{c2} = 1,318\dots$ (corte de $g(x)$ con el eje horizontal), en tanto, el radio del círculo crítico asociado a $f(x)$ es infinito. Cuando $C \rightarrow \infty$ el radio de los círculos críticos es idénticamente cero. Nótese además que para C finito, $x_{c2} < x_{c1}$. Por su parte, las curvas cáusticas serán la imagen de las soluciones de las ecuaciones (3.59) mediante la ecuación de la lente (3.43), así

$$y(x_{c1}) = 0 \quad (3.61)$$

y

$$y(x_{c2}) = -\frac{1}{C} x_{c2}^2 f'(x_{c2}) \quad (3.62)$$

con $f'(x) < 0$ en $x \in (0, \infty)$, y ya que para un solo valor de C existe uno solo de x_{c2} satisfaciendo $g(x_{c2}) = C$, Fig. 3.6, se concluye que su curva cáustica asociada es un círculo, consecuencia de la simetría del modelo.

3.4. Formación de imágenes

En general, la multiplicidad de imágenes dependerá de la posición de la fuente con respecto al círculo cáustico, llegando a un máximo de tres si la fuente se halla en su interior, esto es, $y < y(x_{c2})$. De estas imágenes, que llamaremos α , β y γ , dos están comprendidas entre los círculos críticos, pero en conjunto obedecen

$$0 < x_\alpha < x_{c2} < x_\beta < x_{c1} < x_\gamma < x_r \quad (3.63)$$

²²Nótese que la densidad crítica (3.28) es definida positiva, de modo que a partir de (3.27), δ_k también es positiva.

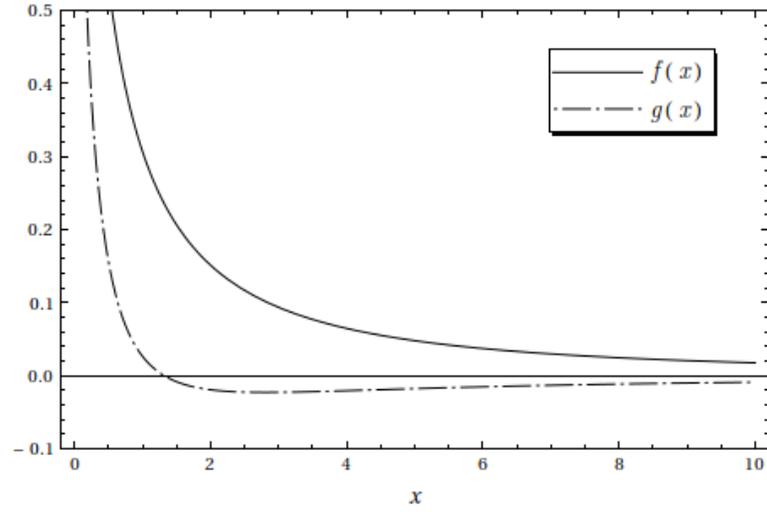


Figura 3.6: Una recta horizontal, $C > 0$, determina las curvas críticas al cruzarse con las funciones $f(x)$, Ec. (3.41), y $g(x)$, Ec. (3.60). Nótese que a partir del valor $x = 1,3182045\dots$ la función $g(x)$ es negativa.

de donde

$$x_j < x_{c2} \quad (3.64)$$

con $j = \alpha, \beta$; y ya que la función $f(x)$ es decreciente en $x \in (0, \infty)$, Fig. (3.6), el valor que tome la misma en las posiciones de las imágenes x_α y x_β será menor que la constante C , lo cual será determinante en la formación de imágenes, esto es,

$$f(x_j) > f(x_{c1}) = C. \quad (3.65)$$

Supongamos una fuente ubicada en el primer cuadrante de un sistema de ejes cartesianos en cuyo centro reposa la lente; es decir $y_i > 0$ con $i = 1, 2$. El mapeo de puntos a través de la ecuación de la lente (3.43), se lee, por componentes

$$y_i = x_i \left[1 - \frac{1}{C} f(x) \right] \quad (3.66)$$

y mediante la Ec. (3.65)

$$1 - \frac{1}{C} f(x_j) < 0, \quad \text{con } j = \alpha, \beta. \quad (3.67)$$

lo cual implica

$$x_{ji} < 0, \quad (3.68)$$

en consecuencia, las imágenes α y β estarán en el tercer cuadrante. Y ya que el ángulo que forma $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ está dado por la razón entre sus componentes,

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_{j2}}{x_{j1}} \quad (3.69)$$

el ángulo que forman las imágenes será

$$\arctan\left(\frac{x_{j2}}{x_{j1}}\right) = \pi + \arctan\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \quad (3.70)$$

por consiguiente las imágenes α y β reposan en la misma línea que une la lente y la fuente, pero se hallan diametralmente opuestas a esta última.

En tanto, la tercera imagen γ satisface $x_\gamma > x_{c1}$, de modo que

$$1 - \frac{1}{C}f(x_\gamma) > 0 \quad (3.71)$$

y ya que $y_i > 0$, se deduce que $x_{\gamma i} > 0$, con $i = 1, 2$. Este resultado implica que el ángulo formado por \mathbf{x}_γ es igual al de la fuente, por tanto la tercera imagen también se ubica en la misma línea que une la lente y la fuente.

Si $y = y(x_{c2})$ existirán dos imágenes diametralmente opuestas y en la línea que une lente y fuente.

Si $y > y(x_{c2})$ sólo habrá una imagen cuyo ángulo es el mismo que el de la fuente.

La Fig. 3.7 exhibe el comportamiento de la posición de las imágenes para distintos valores de la posición de la fuente. El cambio en la ubicación de las imágenes se hace menor a medida que C aumenta y y disminuye.

3.4.1. Magnificación

Como se definió en la Sección (2.7), la magnificación está dada por la razón entre los flujos de la fuente emitido y observado. Con esta definición en mente, es posible entonces describir la magnificación de una imagen en términos de la constante C y de la posición de la fuente

$$\mu(x, C) = \frac{1}{|(1 - \kappa - |\gamma|)(1 - \kappa + |\gamma|)|} \quad (3.72)$$

$$\mu(x, C) = \frac{C^2}{|C - f(x)||C - g(x)|}. \quad (3.73)$$

La Ec. (3.73) manifiesta que dado un valor de C , la lente magnificará infinitamente las imágenes cuando la fuente se halle en las curvas cáusticas, esto es, si las imágenes se ubican en los círculos críticos x_{c1} y x_{c2} dados por las ecuaciones (3.59).

En la Fig. 3.8 se aprecian las curvas de magnificación para $C = 0,1$ y $0,6$. Las asíntotas se hallan en x_{c1} y x_{c2} y debido a que estos valores corresponden a los radios

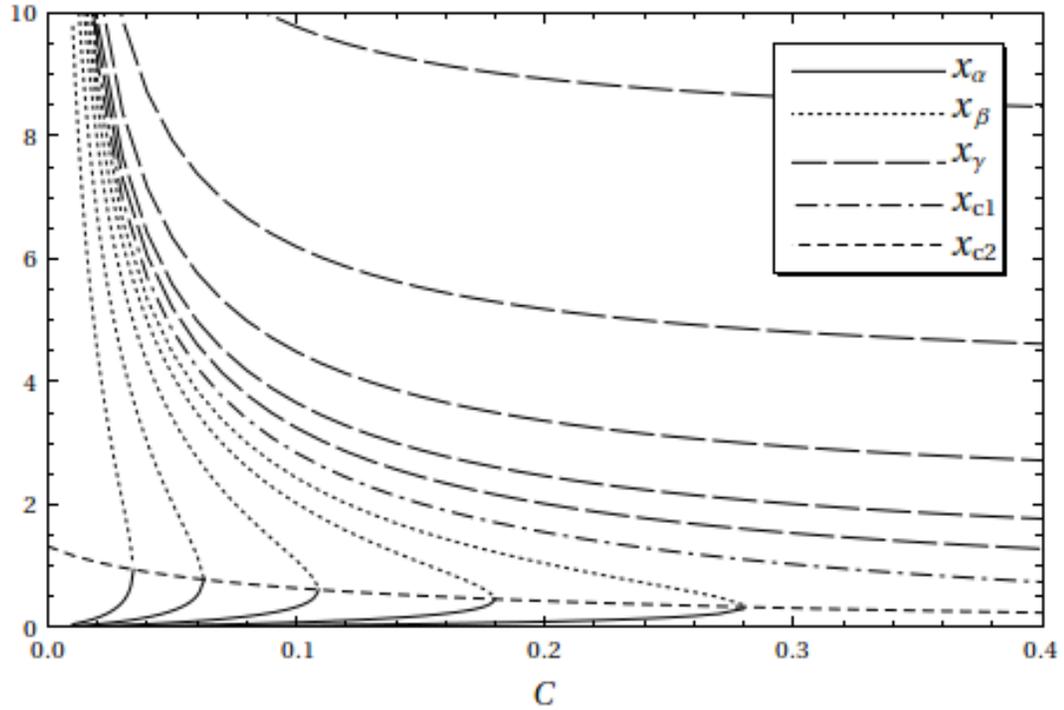


Figura 3.7: Posición de las imágenes con respecto al valor de la constante C dada por la Ec. (3.35). Las curvas críticas x_{c1} y x_{c2} como función de C , dividen el plano de la lente en tres regiones de formación de imágenes. De izquierda a derecha (por debajo de x_{c1}) y de arriba a abajo (por encima) se aprecia la posición de las imágenes de una fuente ubicada en $y = 8, 4, 2, 1, 1/2$, con respecto a C . Las líneas continuas representan la posición de la primer imagen (α), las líneas punteadas, la segunda (β) y las líneas a trozos largos, la tercera (γ), en cada uno de los casos de y .

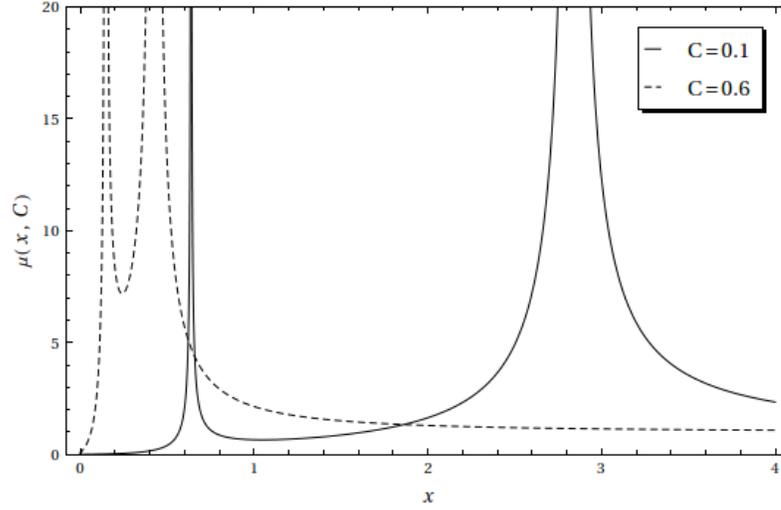


Figura 3.8: Magnificación de las imágenes en el plano de la lente para dos valores de C . Las asíntotas se formarán en x_{c1} y x_{c2} (en cada curva, de derecha a izquierda respectivamente).

de los círculos críticos que dividen el plano de la lente en regiones de formación de imágenes, es posible asegurar que en el caso en que se formen tres imágenes, una de ellas será demagnificada casi a cero.

Sin embargo, las dos asíntotas no se formarán en cualquier punto del plano de la lente debido a que $C - g(x) > 0$ para $x \in (1, 3182\dots, \infty)$, esto quiere decir que la primer asíntota se formará en el intervalo $x \in (0, 1, 3182\dots)$ o equivalentemente, la primer asíntota (de izquierda a derecha), correspondiente a x_{c2} tendrá lugar en 1,3182... en $C \rightarrow 0$.

3.5. NFW elíptico

Un modelo elíptico del perfil NFW deriva de introducir una elipticidad al potencial (3.39) por medio de las coordenadas (3.21), esto es

$$\psi(q_1, q_2) = \frac{2\delta_k \rho_c r_s^3}{\Sigma_{cr} D_{OL}^2} \left(\ln^2 \left(\frac{q D_{OL}}{2r_s} \right) - 4 \text{ArcTanh}^2 \left[\left(\frac{r_s - q D_{OL}}{r_s + q D_{OL}} \right)^{1/2} \right] \right) \quad (3.74)$$

donde $q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$. Y por medio de (3.22), la ecuación de la lente resulta

$$b_1 = q_1 \left| 1 - \frac{1 - \epsilon}{C} f(x) \right| \quad (3.75)$$

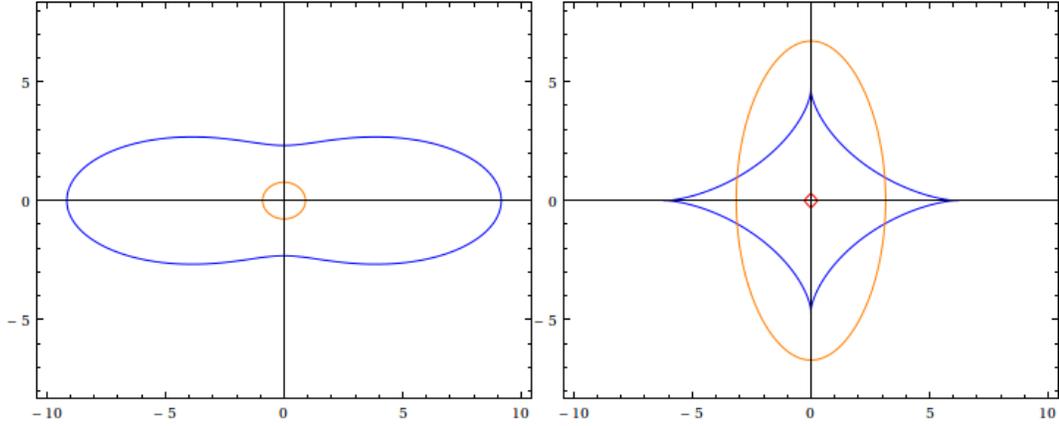


Figura 3.9: Curvas críticas y cáusticas de una lente gravitacional descrita por un perfil NFW elíptico. En ambos páneles las unidades están dadas en kiloparsecs.

y

$$b_2 = q_2 \left| 1 - \frac{1 + \epsilon}{C} f(x) \right| \quad (3.76)$$

con

$$x = \frac{q D_{OL}}{r_s}, \quad (3.77)$$

donde se ha utilizado la función $f(x)$, (3.41) y la constante (3.35).

Las curvas críticas y cáusticas para una lente modelada con un perfil NFW elíptico con $\delta_k \rho_c = 50 \Sigma_{cr}$, $D_{OL} = 0,1$ y $r_s = 0,1$, se encuentran graficadas en la Fig. 3.9 y las imágenes de una fuente circular ubicada en $(3, 3) kpc$ se encuentran visualizadas en la Fig. 3.10. Allí se observan en líneas más gruesas las imágenes de una fuente de radio $0,1 kpc$

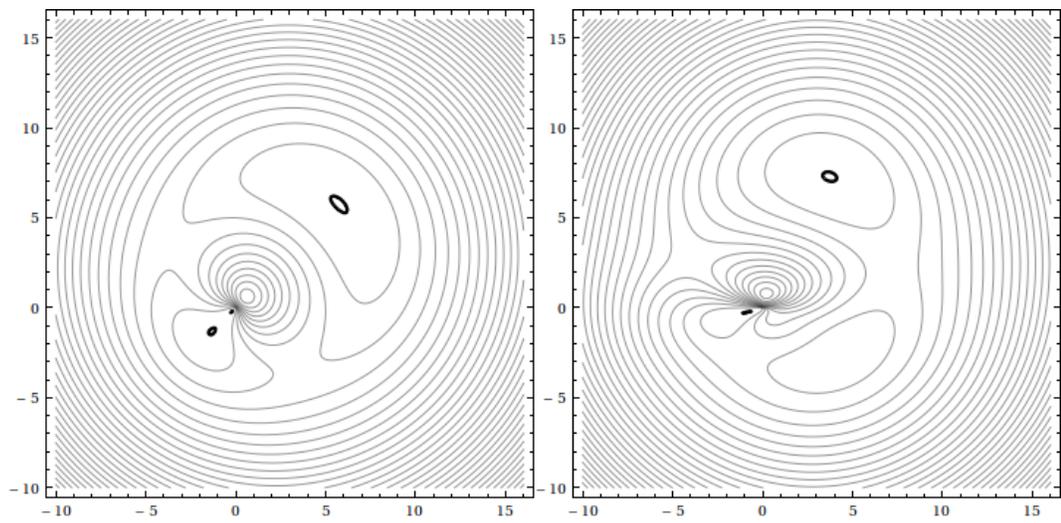


Figura 3.10: Imágenes de una fuente circular en $(3, 3)$ a través de una lente modelada con un perfil NFW (izquierda) y NFW elíptico (derecha). También se aprecian la formación de imágenes de una fuente de radio 0,1 en negro más fuerte. En ambos paneles las unidades están dadas en kiloparsecs.

Capítulo 4

Métodos para reconstrucción de masa

El propósito de la reconstrucción de masa es medir alguna propiedad de la lente a través del campo de imágenes en una CCD, y cualquier método debe estar encaminado en esta dirección, bien a partir de la distorsión y posición de las imágenes (no-paramétrico), o planteando un modelo libre que se ajuste de acuerdo a lo observado (paramétrico).

En este capítulo se describen propiedades observables de la lente y los métodos para determinar su masa a partir del campo shear que genera y se discutirá la aplicabilidad de estos procedimientos.

4.1. Elipticidad y shear

Supongamos que en una imagen de campo las fuentes están orientadas en cualquier dirección y con cualquier elipticidad (lo cual es válido bajo el principio de que no hay orientaciones privilegiadas en el universo, sección 1.1). Sea $p(|\epsilon_S|)$ la densidad de probabilidad de que la una fuente tenga una elipticidad de valor real $|\epsilon_S|$, en analogía con la Ec. (2.93). A partir de la densidad de probabilidad construimos la probabilidad de que una fuente tenga elipticidad ϵ_S en el segmento $d\epsilon_1 d\epsilon_2$ centrado en ϵ_S , $p_{\epsilon_S}(|\epsilon_S|)d\epsilon_1 d\epsilon_2$, de modo que al integrar a lo largo de todo el plano, la probabilidad debe ser igual a la unidad

$$\int p(|\epsilon_S|)d\epsilon_1 d\epsilon_2 = 1 \quad (4.1)$$

sin embargo, dada la orientación aleatoria de las fuentes es posible escribir su elipticidad como $\epsilon_S = |\epsilon_S|e^{2i\phi}$ donde ϕ es el ángulo de orientación aleatorio; resultando así $0 \leq |\epsilon| \leq 1$ y $0 \leq \phi < 2\pi$

$$\int p(|\epsilon_S|)d\epsilon_1 d\epsilon_2 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} p(|\epsilon_S|)|\epsilon_S|d|\epsilon_S|d\phi = 1 \quad (4.2)$$

$$\int_0^1 p(|\epsilon_S|)|\epsilon_S|d|\epsilon_S| \int_0^{2\pi} d\phi = 1 \quad (4.3)$$

la primera integral en (4.4) corresponde al valor esperado de la magnitud de la elipticidad $\langle |\epsilon_S| \rangle = 1$, donde se ha normalizado

$$\int_0^1 p(|\epsilon_S|)|\epsilon_S|d|\epsilon_S| = 1 \quad (4.4)$$

de modo que para que (4.1) se cumpla $\phi \rightarrow \phi/2\pi$, es decir, la probabilidad ha sido normalizada. El valor esperado de la elipticidad $\langle \epsilon \rangle$, que depende de ϵ_S y de g , Ec. (2.102), será

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} p(|\epsilon_S|)\epsilon(\epsilon_S, g)|\epsilon_S|d|\epsilon_S|d\phi \quad (4.5)$$

El primer caso es en el cual $|g| \leq 1$

$$\begin{aligned} \langle \epsilon \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} p(|\epsilon_S|) \frac{\epsilon_S + g}{1 + g^* \epsilon_S} |\epsilon_S|d|\epsilon_S|d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 p(|\epsilon_S|)|\epsilon_S|d|\epsilon_S| \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon_S + g}{1 + g^* \epsilon_S} d\phi \end{aligned} \quad (4.6)$$

la última integral es compleja y puede ser resuelta utilizando el teorema del residuo; haciendo $\epsilon_S = |\epsilon_S|e^{2i\phi}$ y $d\phi = -id\epsilon_S/2\epsilon_S$, además los límites verifican el hecho de

que la integración se puede hacer a lo largo del círculo centrado en el origen y cuyo radio es ϵ_S

$$\int_0^{2\pi} \frac{\epsilon_S + g}{1 + g^* \epsilon_s} d\phi = -i \oint \frac{\epsilon_S + g}{1 + g^* \epsilon_s} \frac{1}{\epsilon_S} d\epsilon_S = 2\pi g \quad (4.7)$$

y como $g = g(\boldsymbol{\theta}) = \gamma(\boldsymbol{\theta})/(1 - \kappa(\boldsymbol{\theta}))$

$$\langle \epsilon \rangle = g \int_0^1 p(|\epsilon_S|) |\epsilon_S| d|\epsilon_S| = g \quad (4.8)$$

esto es, una relación entre una cantidad medible como el valor esperado de la elipticidad y el shear reducido, el cual es una propiedad de la lente.

Al hacer lo propio en el caso en el que $|g| > 1$ se obtiene una expresión similar para el valor esperado en términos del shear reducido, de modo que

$$\langle \epsilon \rangle = \begin{cases} g & \text{si } |g| \leq 1 \\ 1/g^* & \text{si } |g| > 1 \end{cases} \quad (4.9)$$

Hay que notar en la Ec. (4.9) que el valor esperado $\langle \epsilon \rangle$ no depende de la distribución de elipticidades de la fuente, esto debido a la escogencia del parámetro de elipticidad Ec. (2.92) y no así para el caso en el que la elipticidad hubiese sido tomada como en el caso de la Ec. (2.91) [SKW06]. La elipticidad entonces es un estimador directo del shear.

En el caso en el que la lente sea débil en el sentido en el que $\kappa \ll 1$ y $|\gamma| \ll 1$, osea $|g| \ll 1$, se puede hacer uso de la expansión en series del shear reducido

$$g = \frac{\gamma}{1 - \kappa} = \gamma(1 + \kappa + \dots) \approx \gamma \quad (4.10)$$

es decir, a partir de la Ec. (4.9)

$$\langle \epsilon \rangle = g \approx \gamma \quad (4.11)$$

con lo cual podemos asegurar que para una lente débil el shear γ es un observable directo y esto implica que $\langle \epsilon \rangle$ es un estimador sin sesgo del shear.

4.2. Kaiser & Squires

En el apartado §2.8 se introdujo el shear γ como una combinación de derivadas parciales del potencial deflector Ec. (2.62); definidas como un número complejo que se asocia a la anisotropía en la distorsión de las imágenes y cuya medida puede realizarse directamente en el régimen de ELG débil, Ec. (4.11). De (2.38) se obtiene

$$\gamma(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} (\partial_{11} - \partial_{22}) + i \partial_{12} \right] \int_{\mathbb{R}^2} \kappa(\boldsymbol{\theta}') \ln |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'| d^2 \theta' \quad (4.12)$$

donde se ha representado la derivada parcial por medio del operador

$$\partial_{ij} = \frac{\partial}{\partial_i \partial_j}$$

esto es, el shear puede ser escrito en términos de un operador que actúa sobre las variables (θ_1, θ_2) y por tanto puede conmutar con la integral

$$\gamma(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \kappa(\boldsymbol{\theta}') \left[\frac{1}{2}(\partial_{11} - \partial_{22}) + i\partial_{12} \right] \ln |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'| d^2 \theta' \quad (4.13)$$

o simplemente

$$\gamma(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int \mathcal{B}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') \kappa(\boldsymbol{\theta}') d^2 \theta' \quad (4.14)$$

donde \mathcal{B} es el kernel complejo, definido por

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') = \frac{-1}{[\theta_1 - \theta'_1 - i(\theta_2 - \theta'_2)]^2} \quad (4.15)$$

La Ec. (4.14) refleja el hecho de que el shear es la convolución de la convergencia κ y el kernel \mathcal{B} en plano real (θ_1, θ_2) , es decir

$$\gamma(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \kappa(\boldsymbol{\theta}) \otimes \mathcal{B}(\boldsymbol{\theta}) \quad (4.16)$$

por ello, se puede expresar la transformada de Fourier del shear, en el espacio de Fourier (ω_1, ω_2) , como

$$\hat{\gamma}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\pi} \hat{\kappa}(\boldsymbol{\omega}) \hat{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\omega}) \quad (4.17)$$

donde

$$\hat{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\omega}) = \int \mathcal{B}(\boldsymbol{\theta}) e^{-i\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega}} d^2 \theta \quad (4.18)$$

y del mismo modo para $\hat{\kappa}(\boldsymbol{\omega})$ y $\hat{\gamma}(\boldsymbol{\omega})$. Al efectuar la integral Ec. (4.18) se obtiene

$$\hat{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\omega}) = \pi \frac{\omega_1 + i\omega_2}{\omega_1 - i\omega_2} \quad (4.19)$$

y así mismo su conjugado, que nos resultará útil

$$\hat{\mathcal{B}}^*(\boldsymbol{\omega}) = \pi \frac{\omega_1 - i\omega_2}{\omega_1 + i\omega_2} \quad (4.20)$$

reemplazando (4.20) en (4.17)

$$\hat{\gamma}(\boldsymbol{\omega}) = \hat{\kappa}(\boldsymbol{\omega}) \frac{\omega_1 + i\omega_2}{\omega_1 - i\omega_2} \quad (4.21)$$

invirtiendo esta expresión con el fin de obtener a $\hat{\kappa}(\boldsymbol{\omega})$ en términos de las demás cantidades

$$\hat{\kappa}(\boldsymbol{\omega}) = \hat{\gamma}(\boldsymbol{\omega}) \frac{\omega_1 - i\omega_2}{\omega_1 + i\omega_2} \quad (4.22)$$

pero el factor de la derecha es el complejo conjugado del kernel en el espacio de Fourier dividido entre π , de modo que

$$\hat{\kappa}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\pi} \hat{\gamma}(\boldsymbol{\omega}) \hat{\mathcal{B}}^*(\boldsymbol{\omega}) \quad (4.23)$$

nuevamente utilizamos el hecho de que la transformada inversa de Fourier de un producto de funciones es la convolución de las mismas en el espacio real

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \kappa_0 + \frac{1}{\pi} \int \gamma(\boldsymbol{\theta}') \mathcal{B}^*(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') d^2\theta' \quad (4.24)$$

donde debemos tomar la parte real del integrando y la constante κ_0 se ha introducido debido a que una capa superficial de masa no altera el shear. O en términos de la densidad de masa superficial

$$\Sigma(\boldsymbol{\theta}) = \Sigma_0 + \frac{\Sigma_{cr}}{\pi} \int \Re \{ \gamma(\boldsymbol{\theta}') \mathcal{B}^*(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') \} d^2\theta' \quad (4.25)$$

La Ec. (4.25) es la inversión de la Ec. (4.14), esto es, la masa en términos del shear. Conocer el perfil bidimensional de masa $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$ implica conocer a Σ_0 y a Σ_{cr} , además de poder solucionar la integral Ec. (4.25), es decir, se hace indispensable saber el comportamiento de γ con respecto a (θ_1, θ_2) en todo el espacio \mathfrak{R}^2 .

Sin embargo no es viable aplicar la Ec. (4.25) en todos los casos debido a:

- (a) No es posible conocer Σ_0 en el régimen de ELG débil, pues existe una transformación $\Sigma(\boldsymbol{\theta}) \rightarrow \Sigma(\boldsymbol{\theta}) + \Sigma_0$ tal que $\gamma(\boldsymbol{\theta})$ permanece invariante, con Σ_0 una constante arbitraria. Es decir que a la densidad de masa bidimensional puede agregársele una capa de masa constante y las formas de las imágenes no se ven alteradas. A este se le conoce como el problema del *mass sheet degeneracy* (degeneramiento de la capa de masa).
- (b) El modelo cosmológico adoptado reposa en las distancias diametrales angulares entre observador, lente y fuente; quienes a su vez están contenidas en Σ_{cr} , de modo que es necesario que la razón $D_{OS}/D_{OL}D_{LS}$ sea constante para todas las fuentes, sin embargo lo que se tiene es una distribución de redshift de las galaxias fuente.
- (c) Los datos observacionales no se hallan disponibles en todo el espacio, pues están restringidos al campo de la CCD. No es posible conocer la distorsión de las imágenes en todo \mathfrak{R}^2 .

No obstante, aún es posible hacer uso de la Ec. (4.25) al suponer que se conoce a Σ_0 y que la deflexión de la luz está en el régimen de ELG débil: $\kappa \ll 1$ y $\gamma \ll 1$. Esta suposición además implica que el cúmulo sea *no crítico* en el sentido que no produzca curvas críticas, $\det \mathcal{A} = (1 - \kappa)^2 - \gamma^2 \approx 1$. Al mismo tiempo, al ser una lente débil el campo de distorsión puede ser tomado aproximadamente igual a cero para puntos que se hallen lejos del centro óptico, implicando así que la integral puede ser estimada en el campo de la CCD.

Suponiendo que el valor esperado de las elipticidades de las imágenes fuera una cantidad conocida en función de (θ_1, θ_2) en el campo y utilizando el hecho que $\langle \epsilon \rangle \approx \gamma$ Ec. (4.11); la Ec. (4.25) escrita para una lente débil, donde el shear es directamente observable, resulta

$$\Sigma(\boldsymbol{\theta}) = \Sigma_0 + \frac{\Sigma_{cr}}{\pi} \int \Re \{ \langle \epsilon(\boldsymbol{\theta}') \rangle \mathcal{B}^*(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') \} d^2\theta' \quad (4.26)$$

Por lo tanto, es posible determinar la masa de una lente gravitacional a partir del campo de deflexión de las imágenes en el régimen de ELG débil, aunque necesitamos suposiciones que excluyen el caso general y sólo permiten su aplicabilidad a casos particulares. De igual modo, admitiendo las suposiciones, está el hecho de poder medir el valor esperado de las elipticidades de las imágenes en el campo y poderlo escribir como una función en las variables (θ_1, θ_2) .

4.2.1. Lentes Críticas

Una Lente Crítica es aquella capaz de producir curvas críticas, esto es, el conjunto de puntos (θ_1, θ_2) que satisfagan

$$\det \mathcal{A}(\theta_1, \theta_2) = [1 - \kappa(\theta_1, \theta_2)]^2 - \gamma^2(\theta_1, \theta_2) = 0 \quad (4.27)$$

Estas curvas dividen el plano en regiones donde el signo del determinante varía, llamadas pares e impares. Por otra parte, para hallar la Ec. (4.26) tuvo que ser necesario, además de las suposiciones antes empleadas, aproximar el valor esperado de la elipticidad al shear, resultando así empleable sólo en el caso en el que la lente fuese débil y por tanto no crítica. Este inconveniente puede ser superado una vez que se pueda expresar a γ en términos de $\langle \epsilon \rangle$ ²², en ambas regiones, pares e impares. Supongamos nuevamente que se conocen Σ_0, Σ_{cr} para una distribución de fuentes al mismo redshift, γ en todo el espacio y además $\langle \epsilon \rangle$. Entonces, a partir de las ecuaciones (2.103) y (4.9)

$$\gamma = \begin{cases} \langle \epsilon \rangle (1 - \kappa) & \text{si } |g| \leq 1 \\ (1 - \kappa) / \langle \epsilon \rangle^* & \text{si } |g| > 1 \end{cases} \quad (4.28)$$

²²El valor esperado de la elipticidad puede ser obtenido a partir del análisis estadístico de la imagen mediante algún software diseñado para tal fin. Por ejemplo SEXTRACTOR

o utilizando la función paso de Heaviside Ec. (2.85)

$$\gamma = \langle \epsilon \rangle (1 - \kappa) H(1 - |g|) + \frac{(1 - \kappa)}{\langle \epsilon \rangle^*} H(|g| - 1) \quad (4.29)$$

El problema que aquí se presenta es poder reemplazar la Ec. (4.29) en (4.25) pues la solución para Σ dependería de él mismo. Debido a la recurrencia de la solución, Seitz y Schneider[SS97] propusieron una sucesión iterativa para hallar $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$

$$\begin{aligned} \Sigma^{(n+1)}(\boldsymbol{\theta}) &= \Sigma_0 \\ &+ \frac{1}{\pi} \int \Re \{ \langle \epsilon(\boldsymbol{\theta}') \rangle \mathcal{B}^*(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') \} [\Sigma_{cr} - \Sigma^{(n)}(\boldsymbol{\theta}')] H(1 - |g^{(n)}(\boldsymbol{\theta}')|) d^2 \theta' \\ &+ \frac{1}{\pi} \int \Re \left\{ \frac{\mathcal{B}^*(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}')}{\langle \epsilon(\boldsymbol{\theta}') \rangle} \right\} [\Sigma_{cr} - \Sigma^{(n)}(\boldsymbol{\theta}')] H(|g^{(n)}(\boldsymbol{\theta}')| - 1) d^2 \theta' \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde $g^{(n)}$ es el shear reducido en el n-ésimo paso de la iteración y depende del punto donde se evalúe

$$g^{(n)}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\Sigma_{cr} \gamma^{(n)}(\boldsymbol{\theta})}{\Sigma_{cr} - \Sigma^{(n)}(\boldsymbol{\theta})} \quad (4.31)$$

con

$$\gamma^{(n)}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi \Sigma_{cr}} \int \Sigma^{(n)}(\boldsymbol{\theta}') \mathcal{B}^*(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') d^2 \theta' \quad (4.32)$$

y la iteración debe comenzar con $\gamma^{(0)}(\boldsymbol{\theta}) = \Sigma^{(0)}(\boldsymbol{\theta}) = 0$.

Al llevarse a cabo la integral sobre el campo debe tenerse en cuenta que éste se halla compuesto por pixeles y no por puntos, de modo que hay que aproximar la integral mediante una sumatoria sobre una cuadrícula $\boldsymbol{\theta}_{ij}$ en el campo donde el shear sea medido

$$\begin{aligned} \Sigma^{(n+1)}(\boldsymbol{\theta}) &= \Sigma_0 \\ &+ \frac{a^2}{\pi} \sum_{i,j} \Re \{ \langle \epsilon(\boldsymbol{\theta}_{ij}) \rangle \mathcal{B}^*(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_{ij}) \} [\Sigma_{cr} - \Sigma^{(n)}(\boldsymbol{\theta}_{ij})] H(1 - |g^{(n)}(\boldsymbol{\theta}_{ij})|) \\ &+ \frac{a^2}{\pi} \sum_{i,j} \Re \left\{ \frac{\mathcal{B}^*(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_{ij})}{\langle \epsilon(\boldsymbol{\theta}_{ij}) \rangle} \right\} [\Sigma_{cr} - \Sigma^{(n)}(\boldsymbol{\theta}_{ij})] H(|g^{(n)}(\boldsymbol{\theta}_{ij})| - 1) \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde

$$\gamma^{(n)}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{a^2}{\pi \Sigma_{cr}} \sum_{i,j} \Sigma^{(n)}(\boldsymbol{\theta}_{ij}) \mathcal{B}^*(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_{ij}) \quad (4.34)$$

y a es la separación de los puntos de la cuadrícula. El problema ahora se reduce a medir el valor esperado de la elipticidad en cada uno de los puntos de la cuadrícula.

En este trabajo no se dará solución a los problemas presentados al aplicar la fórmula de inversión. Sin embargo, para el caso de las fuentes a diferentes distancias del observador y de la lente puede encontrarse más información en [SS97].

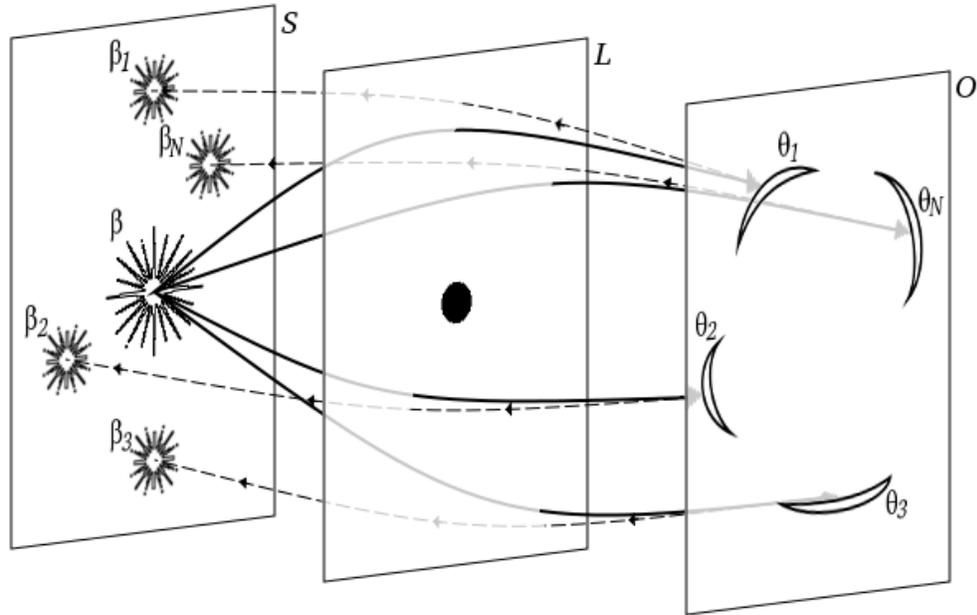


Figura 4.1: Debido a los errores implícitos en el modelamiento de la lente, no es posible tomar la posición de una imagen y retornar al plano de la fuente (S) de forma que coincida absolutamente con su posición real. El método busca unicidad en las posiciones de la fuente a través del modelo.

4.3. Métodos de obtención de estimadores

Los métodos paramétricos de reconstrucción de masa se basan en el modelamiento de lentes a partir de perfiles de masa establecidos, con el propósito de variar los parámetros involucrados para reproducir los datos observados. La complejidad de este cometido aumenta en casos en que los parámetros presentan diversidad de valores y no tiene sentido modelar un sistema con mayor número de parámetros que el de condiciones, sin embargo, la multiplicidad de imágenes restringe fuertemente el modelamiento de la lente debido a que es posible encontrar la posición de la fuente independientemente de sus características.

4.3.1. Método de la mínima χ^2

Supongamos que se tiene una imagen de campo donde se aprecia el fenómeno de lente gravitacional, tomada con algún dispositivo, por ejemplo una CCD, y donde mediante la medición del redshift es posible determinar un conjunto de imágenes que corresponden a ciertas fuentes. Supongamos además que existen M sistemas

de imágenes, es decir, M conjuntos de imágenes que deben provenir de una misma fuente β_j , y que cada conjunto posee N_j imágenes, donde $j = 1, \dots, M$. Señalaremos cada posición de las imágenes del sistema j como θ_{ji} donde $i = 1, \dots, N_j$. Al modelar la lente se obtienen degeneramientos en las posiciones de la fuente β_j , Fig. 4.1, pues no es posible que el modelo sea perfecto y que la inversión de la ecuación de la lente para cada imagen que corresponda al sistema j conduzca a un solo valor. Por lo tanto para cada imagen θ_{ji} del sistema j se obtendrá una posición de la fuente β_{ji} . El objetivo del modelamiento es buscar los estimadores que procuren

$$\beta_{ij} \rightarrow \beta_j \quad (4.35)$$

El método consistirá en una minimización multi-paramétrica χ^2 a partir de la información obtenida de las imágenes, por ejemplo sus posiciones, las cuales dependen de las variables x_i contenidas en $\alpha(\theta_{ji}, x_1, \dots, x_r)$.

$$\chi^2 = \chi^2(x_1, \dots, x_r) \quad (4.36)$$

El camino para minimizar χ^2 consiste en derivar respecto a cada una de las variables e igualar a cero

$$\frac{\partial \chi^2(x_1, \dots, x_r)}{\partial x_p} = 0 \quad p = 1, \dots, r \quad (4.37)$$

con lo cual se obtienen los puntos críticos de la función, que permitan analizar si se trata de un punto maximal²³. No obstante, este camino es complejo y resulta útil minimizar numéricamente la función.

4.3.2. Comparación entre fuentes

Un primer camino para determinar qué tan parecido es el modelo a la lente real, es por medio de la comparación de las posiciones de la fuentes obtenidas a través del modelo y a partir de las posiciones de las imágenes. Es decir, cuanto mayor sea la multiplicidad de imágenes a partir de una misma fuente, mejor será el modelo y de allí que la inversión de la ecuación de la lente producirá fuentes muy cercanas. Esto es mensurable mediante la comparación directa de todas las fuentes

$$\bar{\chi}^2 = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N_j} \sum_{k>i}^{N_j} |\beta_{ji} - \beta_{jk}|^2 \quad (4.38)$$

y teniendo en cuenta la ecuación de la lente Ec. (2.18) en un caso donde hallan (x_1, \dots, x_r) parámetros a estimar

$$\beta_{ji} = \theta_{ji} - \alpha(\theta_{ji}, x_1, \dots, x_r) \quad (4.39)$$

²³Véase el Apéndice C

$$\bar{\chi}^2 = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N_j} \sum_{k>i}^{N_j} |\boldsymbol{\theta}_{ji} - \boldsymbol{\theta}_{jk} - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_{ji}, x_1, \dots, x_r) + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_{jk}, x_1, \dots, x_r)|^2 \quad (4.40)$$

o en términos de las componentes del vector $\boldsymbol{\theta}$

$$\begin{aligned} \bar{\chi}^2 = & \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N_j} \sum_{k>i}^{N_j} (\theta_{ji1} - \theta_{jk1} - \alpha_1(\boldsymbol{\theta}_{ji}, x_1, \dots, x_r) + \alpha_1(\boldsymbol{\theta}_{jk}, x_1, \dots, x_r))^2 \\ & + \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N_j} \sum_{k>i}^{N_j} (\theta_{ji2} - \theta_{jk2} - \alpha_2(\boldsymbol{\theta}_{ji}, x_1, \dots, x_r) + \alpha_2(\boldsymbol{\theta}_{jk}, x_1, \dots, x_r))^2 \end{aligned} \quad (4.41)$$

La minimización de $\bar{\chi}^2$ no tiene como referencia un parámetro fijo y en general no habrá convergencia de las variables hacia los datos observados. De ahí que un contraste más ventajoso se obtendrá al precisar una fuente con respecto a la cual se compare.

4.3.3. Comparación con la fuente promedio

Una función de concordancia más óptima es aquella en la que se aproxima el valor real de β_j al promedio de las fuentes obtenidas mediante la inversión de la ecuación de la lente para cada imagen $\boldsymbol{\theta}_{ji}$, es decir

$$\beta_j \approx \langle \beta_{ji} \rangle \quad (4.42)$$

entonces, teniendo en cuenta el principio de los mínimos cuadrados utilizaremos como medida de la desviación entre ambas cantidades la expresión

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N_j} |\beta_{ji} - \langle \beta_{ji} \rangle|^2 \quad (4.43)$$

utilizando la ecuación de la lente en términos de los parámetros, las Ec. (4.42) y Ec. (4.43) se convierten en

$$\langle \beta_{ji} \rangle = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} (\boldsymbol{\theta}_{ji} - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_{ji}, x_1, \dots, x_r)) \quad (4.44)$$

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N_j} |\boldsymbol{\theta}_{ji} - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_{ji}, x_1, \dots, x_r) - \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} (\boldsymbol{\theta}_{jk} - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_{jk}, x_1, \dots, x_r))|^2 \quad (4.45)$$

o teniendo en cuenta las componentes de cada vector

$$\begin{aligned} \chi^2 = & \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N_j} \left(\theta_{ji1} - \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \theta_{jk1} - \alpha_1(\boldsymbol{\theta}_{ji}, x_1, \dots, x_r) + \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \alpha_1(\boldsymbol{\theta}_{jk}, x_1, \dots, x_r) \right)^2 \\ & + \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N_j} \left(\theta_{ji2} - \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \theta_{jk2} - \alpha_2(\boldsymbol{\theta}_{ji}, x_1, \dots, x_r) + \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \alpha_2(\boldsymbol{\theta}_{jk}, x_1, \dots, x_r) \right)^2 \end{aligned} \quad (4.46)$$

por lo tanto obtenemos una medida de la desviación cuyas propiedades dependen de los parámetros desconocidos en cuestión.

El método de la mínima χ^2 escoge los mejores estimadores de los parámetros, de modo que el estadístico χ^2 dado por la expresión Ec. (4.46) sea mínimo.

4.3.4. Lente modelada como una SIS

A manera de ejemplo, supongamos que en una imagen de campo se observan las posiciones de dos arcos en el régimen de ELG fuerte generados por una lente sobre una fuente de fondo. Modelaremos la lente mediante una SIS, ya que, como se vió en la sección 3.1, produce dos imágenes. La ecuación de la lente será entonces, Ec. (3.14)

$$\beta_{mi}(\theta_1, \theta_2) = \theta_i \left(1 - \frac{4\pi\sigma_m^2 D_{LS}}{c^2 D_{OS}\theta} \right); \quad i = 1, 2 \quad (4.47)$$

donde β_{mi} y σ_m corresponden a la posición de la fuente y la velocidad de dispersión de la lente según el modelo, en tanto D_{LS} y D_{OS} se refieren a las distancias lente-fuente y observador-fuente, que en principio pueden ser medidas a través del redshift. Sean ahora $\boldsymbol{\theta}_p$ y $\boldsymbol{\theta}_n$ las posiciones de las imágenes (medidas), que al ser invertidas a través de la ecuación de la lente producirán las fuentes $\boldsymbol{\beta}_{mp}$ y $\boldsymbol{\beta}_{mn}$ debido a que el modelo no reproduce a cabalidad lo observado.

Las componentes de la fuente $\boldsymbol{\beta}_{mp}$ serán

$$\beta_{mpi} = \beta_{mi}(\theta_{p1}, \theta_{p2}) = \theta_{pi} \left(1 - k \frac{\sigma_m^2}{\theta_p} \right) \quad (4.48)$$

y de $\boldsymbol{\beta}_{mn}$

$$\beta_{mni} = \beta_{mi}(\theta_{n1}, \theta_{n2}) = \theta_{ni} \left(1 - k \frac{\sigma_m^2}{\theta_n} \right), \quad (4.49)$$

donde $k = -4\pi D_{LS}/c^2 D_{OS}$ e $i = 1, 2$.

De acuerdo a la Ec. (4.38)

$$\bar{\chi}^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{k>i}^2 |\beta_i - \beta_k|^2 = |\boldsymbol{\beta}_{mp} - \boldsymbol{\beta}_{mn}|^2 \quad (4.50)$$

$$\bar{\chi}^2 = (k\sigma_m - \theta_n)^2 + (k\sigma_m - \theta_p)^2 - 2(k\sigma_m - \theta_n)(k\sigma_m - \theta_p) \left(\frac{\boldsymbol{\theta}_n \cdot \boldsymbol{\theta}_p}{\theta_n \theta_p} \right) \quad (4.51)$$

$$\bar{\chi}^2 = (k\sigma_m - \theta_n)^2 + (k\sigma_m - \theta_p)^2 - 2(k\sigma_m - \theta_n)(k\sigma_m - \theta_p) \cos \gamma \quad (4.52)$$

donde γ es el ángulo que forman los vectores $\boldsymbol{\theta}_p$ y $\boldsymbol{\theta}_n$. Al derivar con respecto a σ_m

$$\frac{d\bar{\chi}^2}{d\sigma_m} = -2k(\boldsymbol{\theta}_p + \boldsymbol{\theta}_n - 2k\sigma_m)(1 - \cos \gamma) \quad (4.53)$$

con lo cual el mínimo de la función $\bar{\chi}^2$ se obtendrá cuando

$$\sigma_m = \frac{1}{2k}(\theta_p + \theta_n). \quad (4.54)$$

como era de esperarse, σ_m depende de las posiciones de las imágenes medidas, qué tan bueno será el modelo dependerá por lo tanto del error al efectuar la medida de las imágenes.

Si en vez de comparar todas las fuentes se hace con respecto a la fuente promedio (4.42)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^2 |\boldsymbol{\beta}_{mi} - \langle \boldsymbol{\beta} \rangle|^2 \quad (4.55)$$

la minimización resulta equivalente y el mejor parámetro para σ_m es el mismo que en la Ec. (4.54). A partir de (4.54) el modelo que mejor reproduce la observación será

$$\beta_m^2 = \left(\theta - \frac{c^2 D_{OS}}{16\pi D_{LS}} (\theta_p + \theta_n)^2 \right)^2. \quad (4.56)$$

La minimización para la SIS consiste solamente en un ejemplo gracias a que puede ser solucionado analíticamente, esto en gran parte debido a que la SIS es un modelo de lente que depende de un solo parámetro. Casos en los que existen más de un parámetro debe solucionarse numéricamente.

En el siguiente capítulo se empleará la reconstrucción de masa de una lente a partir de las imágenes que produce utilizando simulaciones numéricas con varios modelos.

Capítulo 5

Simulaciones

En este capítulo se visualizará la formación de imágenes de fuentes de fondo a través de varios modelos de lente empleando herramientas computacionales. El objetivo es la reconstrucción paramétrica de masa y para tal fin, éstas imágenes servirán como base, ya que sus posiciones son obtenidas numéricamente al invertir la ecuación de la lente en cada modelo. Luego los mejores parámetros son calculados efectuando la minimización χ^2 .

Sin embargo, en un caso real, las posiciones de las imágenes no son mensurables y sí, las posiciones de sus baricentros, por tal motivo las minimizaciones resultan menos precisas, pero igualmente efectivas.

El valor que tome χ^2 en cada minimización indica el éxito de la reproducción de los parámetros e imágenes.

5.1. Reconstrucción numérica

En la sección §4.3.4 se implementaron los métodos de minimización, ecuaciones (4.38)

$$\bar{\chi}^2 = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N_j} \sum_{k>i}^{N_j} |\beta_{ji} - \beta_{jk}|^2 \quad (5.1)$$

y (4.43)

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N_j} |\beta_{ji} - \langle \beta_{ji} \rangle|^2 \quad (5.2)$$

de las secciones §4.3.2 y §4.3.3, respectivamente, del capítulo 4. Sin embargo, un problema evidente es que en realidad algunas de las imágenes que se desean medir se encuentren demagnificadas, a tal punto de no poder ser observadas, en tal sentido los dos métodos no para todos los casos convergen hacia la misma solución ya que por cada posición de una imagen medida, $\bar{\chi}^2$ conduce a una posición de la fuente, haciéndolas tender finalmente a algún valor para todas las posiciones de las imágenes. En tanto, χ^2 se calcula con base en el promedio de todas las imágenes de una misma fuente, es decir de un valor de referencia que puede no coincidir con la posición real de la fuente, lo que implica una ventaja del método $\bar{\chi}^2$, pues este siempre es convergente a una solución, que si bien puede no ser la real, si se encuentra atrapada en un mínimo local. Pese a esto, y a que el método χ^2 consuma mayor tiempo computacional, resulta más preciso debido a que minimiza la dispersión en las fuentes obtenidas al invertir un sistema de imágenes.

5.2. Lente gravitacional simulada por un sistema de SIS

En el apartado §3.1 del capítulo 3 analizamos las propiedades del modelo conocido como la Esfera Singular Isoterma (SIS). Allí calculamos analíticamente el parámetro σ_m que corresponde a la velocidad de dispersión en la galaxia cuyo modelo se ajusta mejor a las posiciones de las imágenes observadas.

Sin embargo, un proceso numérico a través de simulaciones de lentes descritas por medio de los perfiles de masa mencionados en el capítulo 3, resulta un conducto más general y aplicable al problema de calcular los mejores parámetros que reproduzcan las observaciones.

Para tal efecto, es necesario partir de un modelo de lente con el cual pueda probarse la validez del método, i.e., conocer las posiciones de las imágenes generadas por un modelo también conocido y verificar que los parámetros calculados coincidan con los obtenidos a través de la minimización χ^2 . Sin pérdida de generalidad, supondremos un sistema discreto de λ lentes gravitacionales desviando los haces de luz de un conjunto de μ fuentes. Si denominamos $\psi_l(\theta_1, \theta_2)$ al potencial de la masa l -ésima,

el principio de superposición puede ser utilizado en la aproximación de lente delgada o campo débil, de modo que el potencial deflector del conjunto será

$$\psi(\theta_1, \theta_2) = \sum_{l=1}^{\lambda} \psi_l(\theta_1, \theta_2). \quad (5.3)$$

Un primer ejemplo asoma al considerar la relativa simplicidad del perfil SIS, ya que el número de parámetros involucrados es 3: la velocidad de dispersión y la posición del centro de la lente²⁴. Por eso simularemos un sistema binario de lentes a través de dos perfiles SIS, véase la sección §3.1,

$$\psi(\theta_1, \theta_2) = \sum_{l=1}^2 k_l [(\theta_1 - x_l)^2 + (\theta_2 - y_l)^2]^{1/2} \quad (5.4)$$

donde (x_l, y_l) representa la posición del centro de cada una de las lentes y

$$k_l = \frac{4\pi\sigma_l^2 D_{LS}}{c^2 D_{OS}}, \quad (5.5)$$

de este modo, la ecuación de la lente se expresa como

$$\beta_1 = \theta_1 - \sum_{l=1}^2 \frac{k_l(\theta_1 - x_l)}{\sqrt{(\theta_1 - x_l)^2 + (\theta_2 - y_l)^2}} \quad (5.6)$$

y

$$\beta_2 = \theta_2 - \sum_{l=1}^2 \frac{k_l(\theta_2 - y_l)}{\sqrt{(\theta_1 - x_l)^2 + (\theta_2 - y_l)^2}}. \quad (5.7)$$

En la Fig. (5.1) se muestra la formación de imágenes 1, 2, 3 y 4 de cuatro fuentes de fondo, $S1$, $S2$, $S3$ y $S4$, generada por dos perfiles SIS $L1$ y $L2$, y en la columna titulada *Lentes modeladas como SIS* del Cuadro 5.1 están consignadas las posiciones de las lentes, las fuentes y sus imágenes. Cabe notar que como se trata de una simulación, los parámetros del modelo, así como las posiciones de las fuentes fueron tomados aleatoriamente. En el mismo cuadro, bajo el título *Reconstrucción Numérica*, se observan los parámetros e imágenes encontradas al efectuar la minimización (5.2) por medio de dos lentes modeladas como perfiles de masa SIS, NIS y NIE. El valor de χ^2 es un indicador de la capacidad del modelo para reproducir las imágenes a través de los parámetros encontrados y por ende del éxito de la reconstrucción: cuanto menor sea χ^2 , mejor será la reconstrucción.

²⁴En principio, las distancias diametrales angulares involucradas en todo el sistema pueden ser halladas a través de los redshift de la lente y fuente. Sección §1.8.2 del capítulo 1.

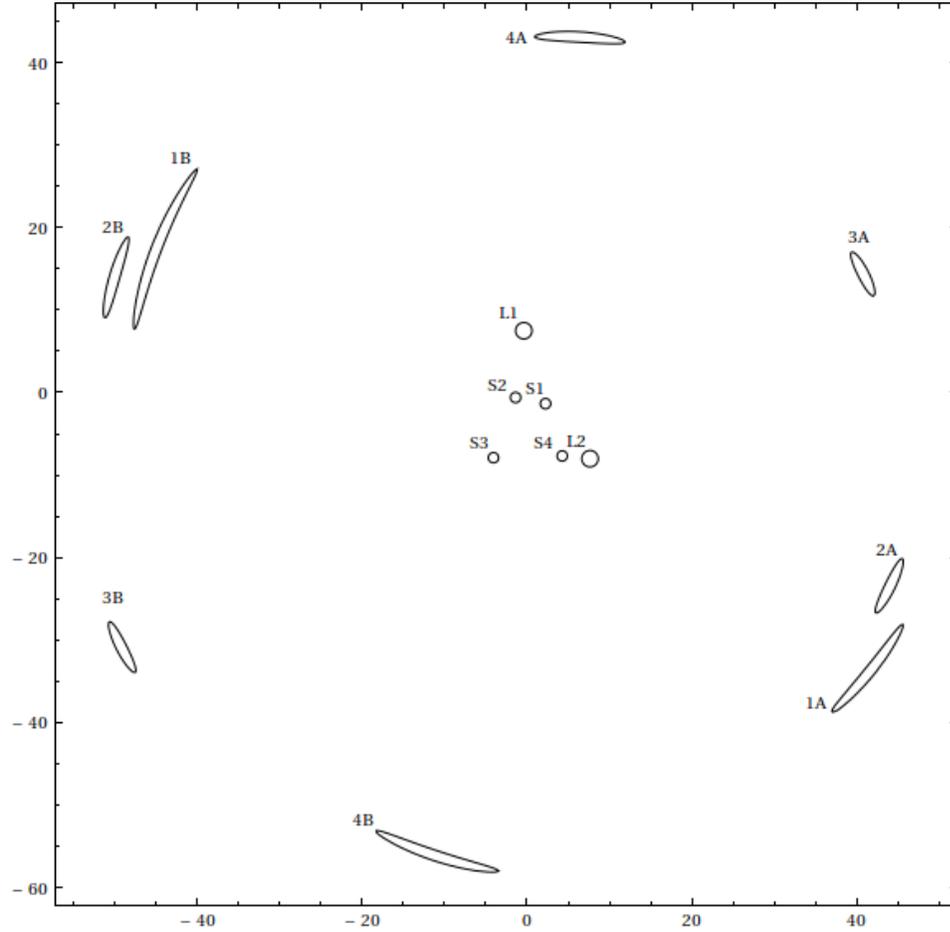


Figura 5.1: Efecto de lente gravitacional de dos Esferas Singulares Isotermas L1 y L2, sobre cuatro fuentes de fondo. Las imágenes etiquetadas con la misma letra corresponden a una sola fuente. La formación de arcos implica la proximidad de las fuentes a las curvas cáusticas, descritas en el capítulo 2.

Lentes modeladas como SIS			Reconstrucción Numérica					
Simulación			SIS		NIS		NIE	
Fuente	x	y	x	y	x	y	x	y
S1	41.51096	-33.88569	41.51096	-33.88569	41.51109	-33.88558	41.50057	-33.89984
(2.24915,-1.35709)	-45.02318	17.18393	-45.02318	17.18393	-45.02321	17.18379	-45.01442	17.20329
S2	-	-	-	-	7.62858	-7.97056	7.62267	-7.97526
(-1.37628,-0.61050)	44.00951	-23.51942	44.00951	-23.51942	44.00937	-23.51941	44.00661	-23.52601
S3	-50.02118	13.93438	-50.02118	13.93438	-50.02122	13.93471	-50.01800	13.94358
(-4.05752,-7.91161)	-	-	-	-	7.65544	-7.97646	7.64435	-7.98000
S4	40.78004	14.37532	40.78004	14.37532	40.78028	14.37391	40.77936	14.37316
(4.27734,-7.69240)	-49.16342	-30.91597	-49.16342	-30.91597	-49.16453	-30.91468	-49.16571	-30.91479
	-	-	-	-	7.67764	-7.91393	7.66231	-7.92961
	6.26262	43.09872	6.26262	43.09872	6.26515	43.09826	6.25447	43.09648
	-11.21935	-56.11768	-11.21935	-56.11768	-11.22204	-56.11720	-11.20197	-56.12589
	-	-	-	-	7.61126	-7.91592	7.60874	-7.93128
Lente	x	y	x	y	x	y	x	y
L1	-0.37691	7.48402	-0.37691	7.48402	-0.37791	7.48885	-0.38292	7.50989
L2	7.64435	-8.02815	7.64435	-8.02814	7.6432	-8.02674	7.63428	-8.02031
k_1	16.00258		16.00258		15.99449		15.95910	
k_2	35.07238		35.07238		35.08147		35.11994	
θ_{01}	-		-		0.38207		1.06016	
θ_{02}	-		-		0.25321		0.20485	
ϵ_1	-		-		-		0.00002	
ϵ_2	-		-		-		$2,08086 \times 10^{-10}$	
χ^2			$1,97512 \times 10^{-27}$		$2,88812 \times 10^{-10}$		$3,39357 \times 10^{-9}$	

Cuadro 5.1: Sistema binario de lentes gravitacionales modeladas como esferas singulares isotermas actuando sobre cuatro fuentes de fondo. Por medio del método de la mínima χ^2 , se buscan los mejores parámetros de un modelo que reproduzca las observaciones, en este caso simuladas computacionalmente. Cabe notar la convergencia en los valores de los parámetros en los modelos NIS y NIE con los de la simulación original, las elipticidades y radios de los núcleos son cercanos a cero. En la primer columna se encuentran las posiciones de las fuentes S1 hasta S4. Las posiciones de las imágenes están dadas por (x, y) para cada modelo y en la Fig. 5.1 corresponderían a los centroides de las imágenes.

Los datos recogidos en el Cuadro 5.1 constituyen solo un ejemplo de la reconstrucción numérica de los parámetros de varios perfiles. Sin embargo tipifica el funcionamiento del ajuste, ya que está basado en la suposición de un conjunto de imágenes reales producidas por una lente o sistema de lentes. En efecto, la posición (x, y) de las imágenes de las fuentes $S1$ a $S4$ consignadas en el Cuadro 5.1 fueron obtenidas al invertir la ecuación de la lente de un sistema conocido, en este caso dos perfiles SIS, es decir, las posiciones de las imágenes no solo son reales sino que unívocamente conllevan a un modelo de lente. Por otra parte, el método debe ser implementado ensayando con distintos perfiles de masa de modo que se obtenga un mínimo entre el conjunto de ajustes. Por esta razón, las posiciones de las imágenes fueron utilizadas como base en la reconstrucción de dos lentes modeladas al unísono por los perfiles, en cada caso, mencionados en el Cuadro 5.1.

Una característica importante en este ejemplo es que las posiciones de las imágenes fueron calculadas numéricamente, motivo por el cual los valores de los ajustes en cada columna del Cuadro 5.1 son extremadamente pequeños, como en el caso SIS donde alcanzó 10^{-27} . No menos importante, es observar que el perfil SIS es submodelo del NIS y este a su vez del NIE, así que los parámetros compartidos por los tres modelos deben ser muy similares, en tanto que aquellos parámetros de los cuales dependa un modelo y no cualquier otro, deben converger a cero a través del ajuste, como por ejemplo la elipticidad del perfil NIE ϵ_1 , ausente o nula en los modelos esféricos; sin embargo, un número mayor de parámetros con el mismo de datos hace que el mínimo del ajuste aumente, lo que puede ser constatado directamente en el Cuadro 5.1 para los modelos NIS y NIE.

5.3. Lente gravitacional simulada por un sistema de NIE

Un nuevo modelo se exhibe en la Fig. 5.2, donde se halla la formación de imágenes de un sistema binario de elipsoides isotermos, sección §3.2, al igual que sus curvas cáusticas. Para este caso, el potencial toma una forma similar, pero más compleja que en la Ec. (5.4), pues ahora se cuentan con dos parámetros más, i.e., el radio del núcleo de la galaxia y la elipticidad de la misma,

$$\psi(\theta_1, \theta_2) = \sum_{l=1}^2 k_l [\theta_{0l}^2 + (1 - \epsilon_l)(\theta_1 - x_l)^2 + (1 + \epsilon_l)(\theta_2 - y_l)^2]^{1/2}, \quad (5.8)$$

donde k_l aún está dado por la Ec. (5.5). La ecuación de la lente será

$$\beta_1 = \theta_1 - \sum_{l=1}^2 \frac{k_l(\theta_1 - x_l)(1 - \epsilon_l)}{\sqrt{(\theta_1 - x_l)^2(1 - \epsilon_l) + (\theta_2 - y_l)^2(1 + \epsilon_l) + \theta_{0l}^2}} \quad (5.9)$$

$$\beta_2 = \theta_2 - \sum_{l=1}^2 \frac{k_l(\theta_2 - y_l)(1 - \epsilon_l)}{\sqrt{(\theta_1 - x_l)^2(1 - \epsilon_l) + (\theta_2 - y_l)^2(1 + \epsilon_l) + \theta_{0l}^2}}. \quad (5.10)$$

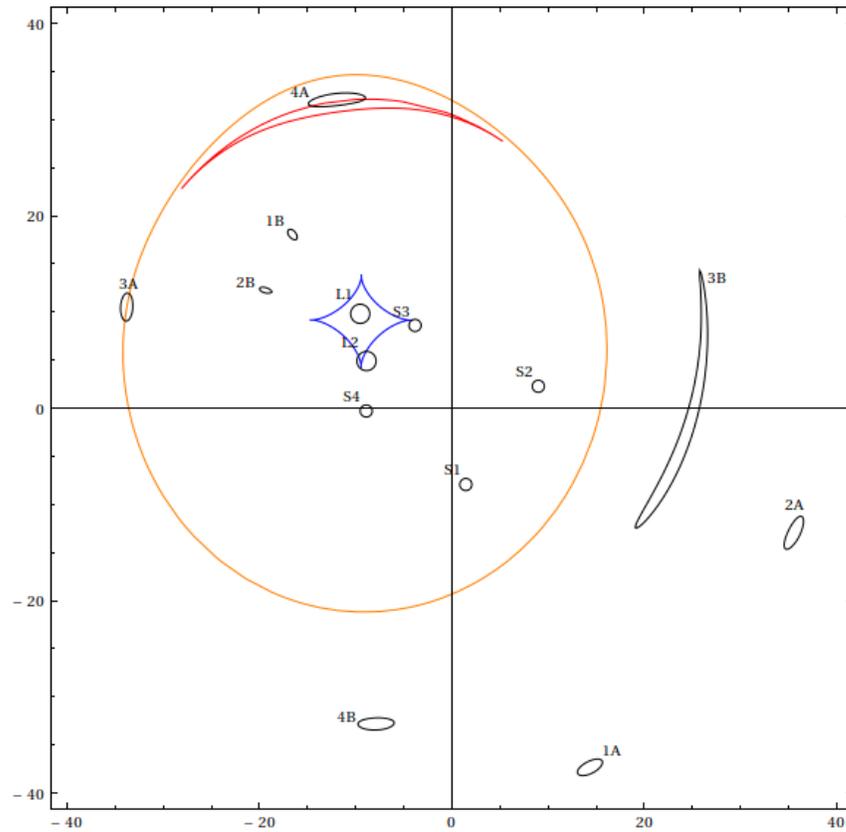


Figura 5.2: Formación de imágenes de cuatro fuentes de fondo a través de una lente gravitacional formada por dos perfiles NIE. Las imágenes etiquetadas con la misma letra corresponden a una sola fuente. Se aprecia la formación del arco 3B debido a que la fuente S3 se halla junto al astroide cáustico (azul), las curvas naranja y roja también representan cáusticas.

En el Cuadro 5.2 están consignadas las posiciones de las fuentes y de sus imágenes así como los parámetros utilizados en los modelos, bajo la columna titulada *Lentes modeladas como NIE*, y bajo la columna *Reconstrucción Numérica* se encuentran los parámetros e imágenes obtenidas mediante la minimización.

Lentes modeladas como NIE			Reconstrucción Numérica							
Simulación			SIS			NIS			NIE	
Fuente	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
S1 (1.45084, -7.93735)	14.35678	-37.34398	19.64532	-32.99395	19.56366	-33.81557	14.35678	-37.34398	14.35678	-37.34398
	-16.56677	18.03804	-16.26722	17.26897	-15.61659	17.32832	-16.56677	18.03804	-16.56677	18.03804
	-9.62579	9.91121	-	-	-9.63172	9.91533	-9.62579	9.91121	-9.62579	9.91121
S2 (8.98693, 2.27372)	35.56639	-12.97623	39.02163	-5.15968	39.36916	-6.30028	35.56639	-12.97623	35.56639	-12.97623
	-19.35970	12.24774	-20.36129	9.88276	-19.33647	10.87775	-19.35970	12.24774	-19.35970	12.24774
	-9.71574	9.83131	-11.52093	7.86010	-10.48002	9.71151	-9.71574	9.83131	-9.71574	9.83131
S3 (-3.82835, 8.59837)	-33.79844	10.50465	-32.99048	-1.41108	-34.37463	2.27314	-33.79844	10.50465	-33.79844	10.50465
	23.01220	-6.06530	25.55790	18.16571	27.00070	14.85668	23.01220	-6.06530	23.01220	-6.06530
	-9.56501	9.78247	-	-	-9.56950	9.76275	-9.56501	9.78247	-9.56501	9.78247
S4 (-8.90101, -0.29595)	-12.02267	32.07510	-10.26333	30.64843	-10.45498	31.02870	-12.02267	32.07510	-12.02267	32.07510
	-7.88030	-32.82689	-7.66815	-31.24628	-7.45139	-31.78613	-7.88029	-32.82689	-7.88029	-32.82689
	-9.52630	9.83956	-9.09246	6.16884	-9.52838	9.83631	-9.52630	9.83956	-9.52630	9.83956
Lente	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
L1	-8.87119	4.89521	-8.97119	4.79521	-8.97119	4.79521	-8.87120	4.89520	-8.87120	4.89520
L2	-9.52574	9.80278	-9.53842	9.90278	-9.53153	9.83465	-9.52574	9.80278	-9.52574	9.80278
k_1	4.51296		18.71298		14.91782		4.51296		4.51296	
k_2	26.84162		12.26221		16.78162		26.84163		26.84163	
θ_{01}	1.40442		-		5.66755		1.40441		1.40441	
θ_{02}	0.18190		-		0.11359		0.18190		0.18190	
ϵ_1	0.02356		-		-		0.02356		0.02356	
ϵ_2	0.08719		-		-		0.08719		0.08719	
χ^2	-		54.36841		15.52499		$8,09778 \times 10^{-13}$		$8,09778 \times 10^{-13}$	

Cuadro 5.2: Dos lentes gravitacionales modeladas como elipsoides isotermos actuando sobre cuatro fuentes de fondo. Nótese que a diferencia del Cuadro 5.1, la reconstrucción de los parámetros por medio del método de la mínima χ^2 , muestra que no es posible simular la formación de imágenes con los perfiles SIS y NIS, ya que son submodelos del perfil NIE, allí se aprecia la importancia de las elipticidades en la simulación. En la primer columna se encuentran las posiciones de las fuentes S1 hasta S4. Las posiciones de las imágenes están dadas por (x, y) para cada modelo y en la Fig. 5.2 corresponderían a los centroides de las imágenes.

Vale la pena notar en el Cuadro 5.2 que los ajustes generados por el método para los modelos SIS y NIS no reproduce los parámetros ni las imágenes bajo la columna de la simulación. El valor de χ^2 es el mayor en el caso del perfil SIS y por tanto el valor de sus parámetros es el más alejado de los reales, esto es debido a que constituye un submodelo del perfil NIS y NIE, ya que carece de núcleo y de elipticidad. El mínimo $\chi^2 \approx 10^{-13}$ demuestra que los perfiles NIE reproducen mejor las imágenes, sin embargo, a diferencia del valor de $\chi^2 \approx 10^{-27}$ alcanzado en la subcolumna SIS de la columna *Reconstrucción Numérica* del Cuadro 5.1, la razón del número de parámetros involucrados en la reconstrucción del perfil NIE (10) al número de datos (12) es mayor que la del perfil SIS, parámetros (6), datos (8).

5.4. Lente gravitacional simulada por un sistema SIS+NIE

Supongamos una lente gravitacional compuesta por dos perfiles SIS y NIE.

$$\begin{aligned} \psi(\theta_1, \theta_2) = & k_1 \left((\theta_1 - x_1)^2 + (\theta_2 - y_1)^2 \right)^{1/2} + \\ & k_2 \left(\theta_{02}^2 + (1 - \epsilon_2)(\theta_1 - x_2)^2 + (1 + \epsilon_2)(\theta_2 - y_2)^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

cuya ecuación de la lente se lee como

$$\beta_1 = \theta_1 - \frac{k_1(\theta_1 - x_1)}{\sqrt{(\theta_1 - x_1)^2 + (\theta_2 - y_1)^2}} - \frac{k_2(\theta_1 - x_2)(1 - \epsilon_2)}{\sqrt{(\theta_1 - x_2)^2(1 - \epsilon_2) + (\theta_2 - y_2)^2(1 + \epsilon_2) + \theta_{02}^2}} \quad (5.12)$$

y

$$\beta_2 = \theta_2 - \frac{k_1(\theta_2 - y_1)}{\sqrt{(\theta_1 - x_1)^2 + (\theta_2 - y_1)^2}} - \frac{k_2(\theta_2 - y_2)(1 - \epsilon_2)}{\sqrt{(\theta_1 - x_2)^2(1 - \epsilon_2) + (\theta_2 - y_2)^2(1 + \epsilon_2) + \theta_{02}^2}} \quad (5.13)$$

En el Cuadro 5.3 se hallan los cálculos de las posiciones de las imágenes generadas por una lente gravitacional compuesta por una esfera singular isoterma y un elipsoide isoterma los parámetros e imágenes arrojados por la minimización al simular las dos lentes a través de varios modelos. En la Fig. 5.3 se puede visualizar la configuración de las imágenes formadas.

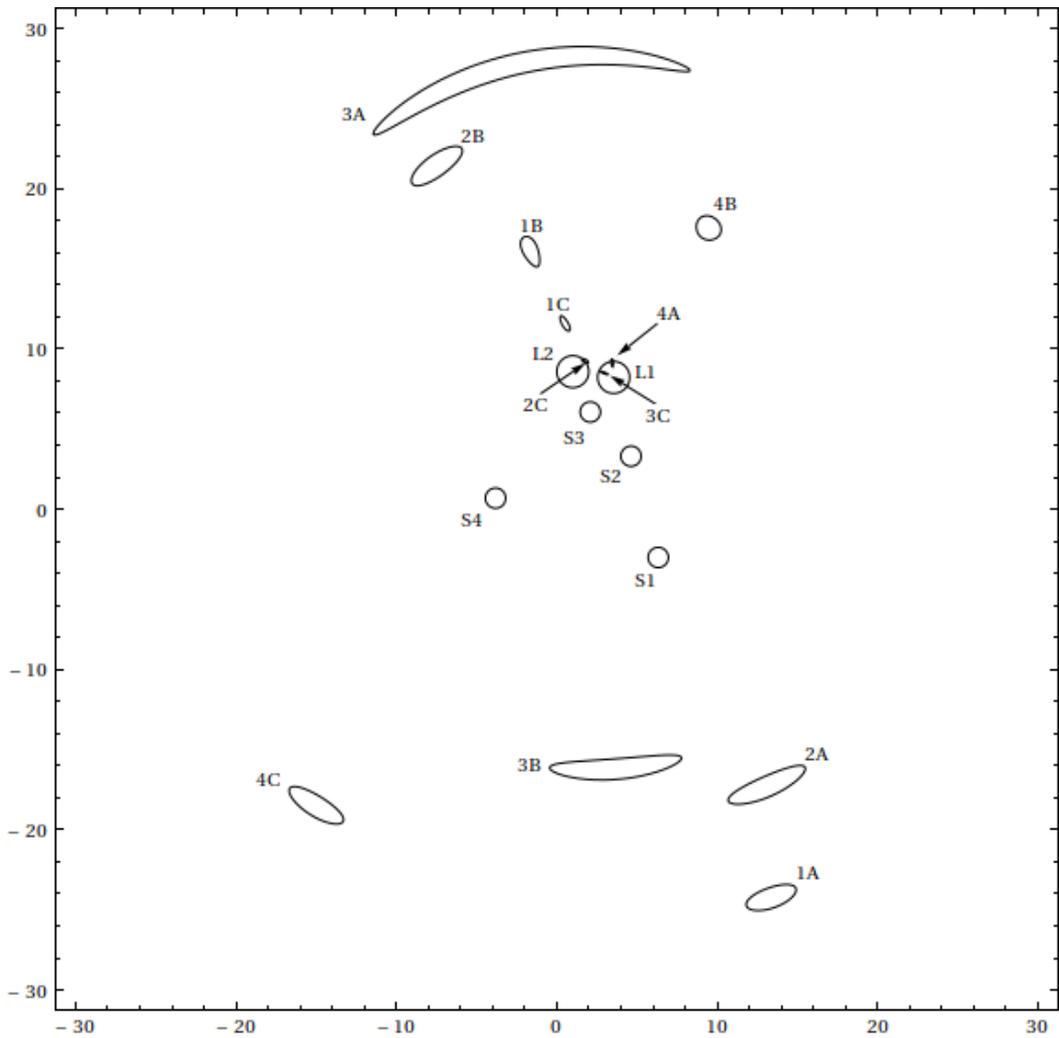


Figura 5.3: 4 fuentes de fondo $S1 - S4$ a través de una lente gravitacional modelada por un perfil SIS, L1, y uno NIE, L2. Las imágenes etiquetadas con la misma letra corresponden a una sola fuente. Las flechas indican tres imágenes demagnificadas que serán utilizadas en la reconstrucción de masa, sin embargo, en el caso real no es posible distinguir y así tampoco poder clasificar ni medir las posiciones de todas las imágenes como en este ejemplo, ya que en este caso las posiciones son calculadas numéricamente. Así mismo, en el problema real deben asociarse las posiciones de las imágenes a sus baricentros, que pueden ser medidos, no obstante a la considerable dispersión de puntos pertenecientes a una sola imagen cuando se trate de los grandes arcos, como el 3A.

Sistema de lentes SIS+NIE			Reconstrucción Numérica					
Simulación			SIS+SIS		SIS+NIS		SIS+NIE	
Fuente	x	y	x	y	x	y	x	y
S1 (5.99025, 8.86971)	13.37598	-24.25391	13.28909	-23.13904	14.90702	-23.79005	13.37598	-24.25391
	-1.65376	16.13760	-0.75644	16.86068	-1.22226	15.32656	-1.65376	16.13760
	0.55059	11.49883	1.15438	9.09980	0.14175	12.26019	0.55059	11.49883
S2 (-8.72443, -5.38179)	13.11969	-17.30915	13.18017	-16.19223	16.14610	-15.90081	13.11969	-17.30915
	-7.53651	21.41626	-4.20279	22.62247	-6.71499	22.01471	-7.53651	21.41626
	1.76315	9.23696	-	-	1.70432	9.14609	1.76315	9.23696
S3 (-7.33855, 3.15114)	-3.83850	27.42153	4.05719	27.21621	-1.87193	27.84337	-3.83850	27.42153
	3.65762	-16.22644	0.06026	-15.11367	6.06129	-15.88787	3.65762	-16.22644
	3.00673	8.47110	1.56359	8.71365	2.93877	8.48779	3.00673	8.47110
S4 (-9.53971, 7.84451)	3.45532	9.11398	-16.92802	-16.09386	-17.13744	-17.38012	3.45532	9.11398
	9.46420	17.53321	9.40086	17.24243	9.06534	17.85099	9.46420	17.53321
	-15.01844	-18.52931	-	-	3.48302	9.02610	-15.01844	-18.52931
Lente	x	y	x	y	x	y	x	y
L1	3.54665	8.21618	3.64665	8.31618	3.50472	8.37522	3.54665	8.21618
L2	0.99798	8.57534	0.89798	8.67534	1.14952	8.07534	0.99798	8.57534
k_1	6.56086		11.00408		5.30052		6.56086	
k_2	15.64169		10.30187		17.34579		15.64169	
θ_{01}	-		-		-		-	
θ_{02}	3.91181		-		4.79036		3.91181	
ϵ_1	-		-		-		-	
ϵ_2	0.04532		-		-		0.04532	
χ^2	-		43.78764		1.82948		$1,95375 \times 10^{-16}$	

Cuadro 5.3: Reconstrucción numérica de una lente simulada por medio de un perfil SIS y uno NIE. Nótese que el valor obtenido de χ^2 es un medidor directo del grado de similitud del modelo escogido y de sus parámetros.

Sistema de lentes SIS+NIE			Reconstrucción numérica					
Simulación			NIS+NIS		NIS+NIE		NIE+NIE	
Fuente	x	y	x	y	x	y	x	y
S1	13.37598	-24.25391	14.66823	-23.75942	13.37598	-24.25391	13.37598	-24.25391
	-1.65376	16.13760	-1.38936	15.97945	-1.65376	16.13760	-1.65376	16.13760
	0.55059	11.49883	0.43832	11.74338	0.55059	11.49883	0.55059	11.49883
S2	13.11969	-17.30915	15.60581	-16.11103	13.11969	-17.30915	13.11969	-17.30915
	-7.53651	21.41626	-6.35162	22.26307	-7.53651	21.41626	-7.53651	21.41626
	1.76315	9.23696	1.72524	9.22853	1.76315	9.23696	1.76315	9.23696
S3	-3.83850	27.42153	-1.53034	27.85838	-3.83850	27.42153	-3.83850	27.42153
	3.65762	-16.22644	5.45821	-15.91977	3.65762	-16.22644	3.65762	-16.22644
	3.00673	8.47110	2.96327	8.48513	3.00673	8.47110	3.00673	8.47110
S4	3.45532	9.11398	-16.77771	-17.50253	3.45532	9.11398	3.45532	9.11398
	9.46420	17.53321	8.89911	18.14155	9.46420	17.53321	9.46420	17.53321
	-15.01844	-18.52931	3.47316	9.01923	-15.01844	-18.52931	-15.01844	-18.52931
Lente	x	y	x	y	x	y	x	y
L1	3.54665	8.21618	3.59167	8.24200	3.54665	8.21618	3.54665	8.21618
L2	0.99798	8.57534	0.89798	8.47534	0.99798	8.57534	0.99798	8.57534
k_1	6.56086		6.75039		6.56087		6.56087	
k_2	15.64169		15.72425		15.64169		15.64169	
θ_{01}	-		4.11079		0.00054		0.00062	
θ_{02}	3.91181		0.12879		3.91181		3.91181	
ϵ_1	-		-		-		$2,28069 \times 10^{-7}$	
ϵ_2	0.04532		-		0.04532		0.04532	
χ^2	-		1.96334		$5,45671 \times 10^{-13}$		$1,16488 \times 10^{-12}$	

Cuadro 5.4: Continuación Cuadro 5.3.

5.4.1. Reconstrucción de parámetros a partir de los baricentros

Las principales incógnitas en el efecto de lente gravitacional son la posición de las fuentes y la masa de la lente, de modo que en una imagen de campo es imposible conocer o medir directamente estos valores con tal de poder hacer la inversión de la ecuación de la lente. En efecto, sólo se dispone de la posición de las imágenes, que además, en todos los casos, se hallan deformadas. En la sección §2.9 del Capítulo 2 se definió el centro de la imagen en términos de su distribución de brillo $I(\boldsymbol{\theta})$, denominada primer momento de la imagen o simplemente baricentro y puede ser calculada como

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\int_{\boldsymbol{\theta} \in S} \boldsymbol{\theta} I(\boldsymbol{\theta}) d^2\boldsymbol{\theta}}{\int_{\boldsymbol{\theta} \in S} I(\boldsymbol{\theta}) d^2\boldsymbol{\theta}} \quad (5.14)$$

donde S representa la distribución espacial de brillo.

En el caso de una imagen de campo, estos parámetros están dados en términos de la distribución de pixeles detectados por encima de algún valor umbral. De este modo, la definición de baricentro toma la forma más simple

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\sum_{i \in S} \boldsymbol{\theta}_i I(\boldsymbol{\theta}_i)}{\sum_{i \in S} I(\boldsymbol{\theta}_i)} \quad (5.15)$$

la cual será utilizada para calcular los centros de las imágenes y así se les asignará un valor a sus posiciones. Esta asociación resulta más realista con miras de reconstruir la masa de un cúmulo y súper cúmulo, ya que las posiciones de las imágenes no pueden ser medidas directamente, en tanto que las posiciones de sus centros son un medio más acertado.

En la primer columna del Cuadro 5.5 se hallan las posiciones de las imágenes halladas al solucionar la ecuación de la lente de un sistema compuesto por las dos galaxias SIS+NIE descritas en la simulación del Cuadro 5.3 y Fig. 5.3. En la segunda columna se aprecian los baricentros calculados por medio de un código que implementa la Ec. (5.15) en la Fig. 5.3.

En el Cuadro 5.6, bajo la columna *Reconstrucción Numérica* se encuentran las posiciones de las imágenes y los mejores parámetros encontrados al emplear la minimización 5.2 con cada modelo descrito en el subtítulo de la columna mencionada, a partir de los baricentros de las imágenes del Cuadro 5.3. Allí se aprecia que a diferencia del Cuadro 5.3, los mínimos alcanzados por χ^2 son del orden de las unidades debido a que no son exactas las posiciones de las imágenes. Un rasgo importante de la minimización a través de los baricentros es que no es posible reproducir todas las imágenes debido a que se pierde precisión en la medida de sus posiciones por medio de los baricentros, sin embargo, los parámetros encontrados coinciden con los reales dentro del margen de sus incertidumbres.

Sistema de lentes SIS+NIE, simulación				
	Sol. Ec. Lente		Baricentro imágenes	
Fuente	x	y	$x \pm s$	$y \pm s$
S1	13.38	-24.25	13.46 ± 0.55	-24.35 ± 0.32
	-1.65	16.14	-1.56 ± 0.24	16.05 ± 0.34
	0.55	11.50	0.65 ± 0.13	11.40 ± 0.17
S2	13.12	-17.31	13.20 ± 0.81	-17.40 ± 0.44
	-7.54	21.42	-7.49 ± 0.55	21.27 ± 0.44
	1.76	9.24	1.85 ± 0.10	9.09 ± 0.05
S3	-3.84	27.42	-2.85 ± 3.33	27.28 ± 0.94
	3.66	-16.23	3.71 ± 1.32	-16.30 ± 0.31
	3.01	8.47	3.15 ± 0.14	8.35 ± 0.05
S4	3.46	9.11	3.59 ± 0.06	8.91 ± 0.06
	9.46	17.53	9.56 ± 0.30	17.41 ± 0.32
	-15.02	-18.53	-14.94 ± 0.58	-18.61 ± 0.43
Lente	x	y	$x \pm s$	$y \pm s$
L1	3.55	8.22	3.62 ± 0.29	8.09 ± 0.29
L2	1.00	8.58	1.11 ± 0.28	8.42 ± 0.29

Cuadro 5.5: Redondeo hasta la segunda cifra significativa de las posiciones reales (calculadas al invertir la ecuación de la lente) de las imágenes y suministradas por medio de los baricentros de las mismas con las respectivas desviaciones estándar, de las cuatro fuentes de fondo del Cuadro 5.3, a través de una lente formada por un perfil SIS y uno NIE. Se aprecia que la posición dada por los baricentros coincide con el valor exacto dentro del margen de error. Sin embargo, los grandes arcos arrojan una dispersión de puntos que inciden en una desviación relativamente alta, como en el caso del arco 3A.

Simulación de lentes SIS+NIE			Reconstrucción Numérica					
Baricentro imágenes			SIS+SIS		SIS+NIS		SIS+NIE	
Fue	$x \pm s$	$y \pm s$	$x \pm s$	$y \pm s$	$x \pm s$	$y \pm s$	$x \pm s$	$y \pm s$
S1	13.46±0.55	-24.35±0.32	13.19±0.57	-23.44±0.32	14.87±0.57	-23.86±0.35	13.33±0.52	-24.37±0.31
	-1.56±0.24	16.05±0.34	-0.59±0.20	16.91±0.25	-1.13±0.27	15.36±0.42	-1.58±0.25	16.05±0.33
	0.65±0.13	11.40±0.17	-	-	0.36±0.17	11.97±0.26	0.72±0.11	11.29±0.15
S2	13.20±0.81	-17.40±0.44	12.83±0.93	-16.62±0.46	15.92±0.88	-16.09±0.58	12.93±0.82	-17.48±0.43
	-7.49±0.55	21.27±0.44	-3.80±0.54	22.81±0.35	-6.51±0.54	21.95±0.43	-7.44±0.56	21.26±0.44
	1.85±0.10	9.09±0.05	-	-	1.85±0.10	8.98±0.05	1.91±0.06	9.10±0.06
S3	-2.85±3.33	27.28±0.94	4.73±1.62	27.11±0.34	-1.37±1.97	27.68±0.46	-2.38±3.69	27.30±0.94
	3.71±1.32	-16.30±0.31	-0.57±1.87	-15.19±0.38	5.70±2.20	-15.90±0.47	3.33±1.30	-16.29±0.29
	3.15±0.14	8.35±0.05	-	-	-	-	-	-
S4	3.59±0.06	8.91±0.06	-	-	-	-	3.58±0.06	8.89±0.06
	9.56±0.30	17.41±0.32	9.55±0.28	17.20±0.26	9.21±0.31	17.76±0.32	9.67±0.30	17.28±0.31
	-14.94±0.58	-18.61±0.43	-16.98±0.55	-16.25±0.46	-17.00±0.60	-17.44±0.49	-14.86±0.58	-18.61±0.44
Len	x	y	$x \pm s$	$y \pm s$	$x \pm s$	$y \pm s$	$x \pm s$	$y \pm s$
L1	3.62±0.29	8.09±0.29	3.65±0.16	8.14±0.07	3.59±0.15	8.27±0.11	3.61±0.51	8.14±0.11
L2	1.11±0.28	8.42±0.29	0.90±-	9.08±0.19	1.08±0.27	8.16±0.22	0.95±0.27	8.62±0.19
k_1	6.56		11.73±0.31		5.87±0.31		7.03±0.35	
k_2	15.64		9.71±0.31		16.68±0.35		15.11±0.34	
θ_{01}	-		-		-		-	
θ_{02}	3.91		-		4.58±0.51		3.80±0.46	
ϵ_{01}	-		-		-		-	
ϵ_{02}	0.05		-		-		0.05±0.03	
χ^2	-		30.89782		1.83898		0.02809	

Cuadro 5.6: Reconstrucción numérica a partir de los baricentros de las imágenes formadas por un sistema de lentes SIS+NIE.

Fuente	Reconstrucción Numérica											
	NIS+NIS				NIS+NIE				NIE+NIE			
	$x \pm s$	$y \pm s$	$x \pm s$	$y \pm s$	$x \pm s$	$y \pm s$	$x \pm s$	$y \pm s$	$x \pm s$	$y \pm s$	$x \pm s$	$y \pm s$
S1	14.72±0.65	-23.81±0.39	13.29±0.61	-24.40±0.37	13.29±0.61	-24.40±0.37	13.29±0.61	-24.40±0.37	13.29±0.61	-24.40±0.37	13.29±0.61	-24.40±0.37
	-1.22±0.26	15.88±0.41	-1.54±0.28	16.06±0.36	-1.54±0.28	16.06±0.36	-1.54±0.28	16.06±0.36	-1.54±0.28	16.06±0.36	-1.54±0.28	16.06±0.36
	0.60±0.15	11.60±0.23	1.91±0.06	9.10±0.06	1.91±0.06	9.10±0.06	1.91±0.06	9.10±0.06	1.91±0.06	9.10±0.06	1.91±0.06	9.10±0.06
S2	15.52±0.99	-16.24±0.61	12.91±0.90	-17.48±0.50	12.91±0.90	-17.48±0.50	12.91±0.90	-17.48±0.50	12.91±0.90	-17.48±0.50	12.91±0.90	-17.48±0.50
	-6.16±0.62	22.16±0.45	-7.41±0.63	21.28±0.50	-7.41±0.63	21.28±0.50	-7.41±0.63	21.28±0.50	-7.41±0.63	21.28±0.50	-7.41±0.63	21.28±0.50
	1.88±0.09	9.06±0.09	1.88±0.09	9.11±0.06	1.88±0.09	9.11±0.06	1.88±0.09	9.11±0.06	1.88±0.09	9.11±0.06	1.88±0.09	9.11±0.06
S3	-1.01±2.02	27.68±0.45	-2.15±4.11	27.24±1.01	-2.15±4.11	27.24±1.01	-2.15±4.11	27.24±1.01	-2.15±4.11	27.24±1.01	-2.15±4.11	27.24±1.01
	4.99±2.34	-15.93±0.45	3.36±1.44	-16.29±0.35	3.36±1.44	-16.29±0.35	3.36±1.44	-16.29±0.35	3.36±1.44	-16.29±0.35	3.36±1.44	-16.29±0.35
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
S4	-	-	3.59±0.06	8.91±0.06	3.59±0.06	8.91±0.06	3.59±0.06	8.91±0.06	3.59±0.06	8.91±0.06	3.59±0.06	8.91±0.06
	9.07±0.36	17.93±0.33	9.59±0.34	17.33±0.35	9.59±0.34	17.33±0.35	9.59±0.34	17.33±0.35	9.59±0.34	17.33±0.35	9.59±0.34	17.33±0.35
	-16.74±0.68	-17.50±0.53	-14.88±0.68	-18.59±0.50	-14.88±0.68	-18.59±0.50	-14.88±0.68	-18.59±0.50	-14.88±0.68	-18.59±0.50	-14.88±0.68	-18.59±0.50
Lente	$x \pm s$	$y \pm s$	$x \pm s$	$y \pm s$	$x \pm s$	$y \pm s$	$x \pm s$	$y \pm s$	$x \pm s$	$y \pm s$	$x \pm s$	$y \pm s$
L1	3.65±0.14	8.18±0.11	3.61±0.22	8.13±0.20	3.61±0.22	8.13±0.20	3.61±0.22	8.13±0.20	3.61±0.22	8.13±0.20	3.61±0.22	8.13±0.20
L2	0.90±0.27	8.48±0.21	0.91±0.46	8.65±0.33	0.91±0.46	8.65±0.33	0.91±0.46	8.65±0.33	0.91±0.46	8.65±0.33	0.91±0.46	8.65±0.33
k_1	6.99±0.31		7.22±0.53		7.22±0.53		7.22±0.53		7.22±0.53		7.22±0.53	
k_2	15.43±0.35		14.91±0.58		14.91±0.58		14.91±0.58		14.91±0.58		14.91±0.58	
θ_{01}	0.11±0.20		0.13±0.28		0.13±0.28		0.13±0.28		0.13±0.28		0.13±0.28	
θ_{02}	4.06±0.47		3.79±0.79		3.79±0.79		3.79±0.79		3.79±0.79		3.79±0.79	
ϵ_{01}	-		-		-		-		-		$2.70 \times 10^{-9} \pm -$	
ϵ_{02}	-		0.05±0.05		0.05±0.05		0.05±0.05		0.05±0.05		0.05±0.05	
χ^2	1.90658		0.02618		0.02618		0.02618		0.02618		0.02618	

Cuadro 5.7: Continuación del Cuadro 5.6.

Capítulo 6

Perfil de masa de Abell 370

En este capítulo investigaremos la distribución de masa de Abell 370 ($z = 0,375$) a partir de la posición de algunas imágenes de las galaxias y fuentes de fondo y los arcos azules observados en tres imágenes CCD en distintas bandas, tomadas con el Telescopio Espacial Hubble.

El potencial del cúmulo será asumido como una superposición de potenciales generados por una distribución bimodal de masa, i.e., un perfil NFWF y dos NIE. El número total de parámetros involucrados será 18, sin embargo, se realizará un ajuste con 5 imágenes o 32 datos observables, con lo cual existirá un buen margen de confianza en la obtención de los parámetros. Encontraremos que los parámetros calculados reproducen, mediante los perfiles de masa, las imágenes en forma, tamaño y posición.

Una de las características más importantes del ajuste es la reconstrucción del gran arco que se extiende por debajo de una de las galaxias más luminosas, ya que el modelo reproduce incluso la posición de su fuente.

Algunas características del cúmulo, como las curvas críticas y cáusticas serán detalladas, y finalmente se exhibirá el perfil de masa de Abell 370.



Figura 6.1: Cúmulo galáctico Abel 370, R.A. 02h 39m 49s.90, Dec. $-01^{\circ} 34'26''.70$. El ancho de la imagen es de 2.4 arcmin, es decir, aproximadamente 3.4 millones de años luz. Créditos: NASA, ESA, the Hubble SM4 ERO Team, and ST-ECFE.

6.1. Abel 370

La Fig. 6.1 muestra el cúmulo galáctico Abel 370, en la constelación Cetus y a una distancia de casi 4.9 billones de años luz, $z = 0,375$, el cual es uno de los más lejanos sistemas en donde es posible observar el efecto de lente gravitacional, deflectando los haces de luz de las galaxias más lejanas de las que se tienen conocimiento²⁵, incluso hasta 12.8 mil millones de años luz, $z = 6,56$ [HCM⁺02].

²⁵El descubrimiento de la galaxia HCM 6A durante el 2002 reposando detrás de Abel 370, [HCM⁺02], la posicionó durante casi un año como el objeto conocido más lejano, incluso por encima de cualquier cuásar o galaxia; en parte, debido a que el cúmulo actúa como un gran telescopio. Sin embargo en 2003 fue descubierta una galaxia del tipo Ly α conocida como SDF J132418.3+271455 a una distancia $z = 6,578$ [KTK⁺03], lo que indica que la actividad de formación estelar ocurrió a $z \approx 6$.

6.1.1. Aspectos históricos

Las observaciones con telescopios terrestres en los años ochenta llevadas a cabo por Soucail et. al. [SFMP87], mostraron evidencias de una estructura galáctica muy particular en forma de arco con una componente difusa reposando junto a una de las galaxias dominantes y más luminosas del cúmulo, con lo que se pudo concluir en principio, que se trataba de un efecto asociado a la interacción galáctica. El trabajo realizado por Soucail y su grupo constituyó la primer observación real de una imagen en forma de arco generada por una lente gravitacional. Un año más tarde, Mellier et. al. [MSFM88], realizaron un análisis fotométrico y espectroscópico de las galaxias del cúmulo incluyendo el redshift de cada uno de sus componentes; y ese mismo año, Soucail et. al. [SMF⁺88] presentaron datos espectroscópicos del arco luminoso gigante obtenidos con el telescopio de 3.6m del observatorio de la ESO, concluyendo que todos los segmentos del arco provenían de la misma fuente a una distancia $z = 0,724$. Al tiempo, 1988, Fort et. al. [FPM⁺88], observaron galaxias amplificadas a través de A370 hasta $z \approx 1$, y supusieron la presencia de materia oscura concentrada en el núcleo de las galaxias para explicar sus efectos.

En la primera mitad de la década del noventa se continuaron los trabajos con la hipótesis sobre materia oscura interior al cúmulo, así como los análisis fotométricos, pero esta vez de los arcos de luz presentes, y los modelos de masa permitieron esbozar mapas de su campo shear [KMFM93], [KMF⁺94], [MAA⁺97]. Pero con el advenimiento del Telescopio Espacial Hubble y el acople de la Advanced Camera for Surveys (ACS) en marzo del 2002, fue posible develar la estructura no sólo del arco sino de varias otras de sus características, así como su efecto sobre las galaxias de fondo [BKSE99], [TLIK04], [dFSB05], [SZB⁺08], [RKL⁺10]. Sin embargo, infortunadamente una falla técnica en la ACS en enero de 2007 suspendió la observación del cúmulo a través del HST hasta mayo de 2009.

La Fig. 6.1 es la composición de imágenes en los filtros verde F475W, rojo F625W e infrarrojo F814W, tomadas con la Hubble's Advanced Camera for Surveys en julio 16 de 2009, y con unos tiempos de exposición de 6780s, 2040s y 3840s, respectivamente.

6.2. Clasificación de imágenes

En este trabajo se hará uso de la clasificación de imágenes de una misma fuente realizada por Richard et. al. [RKL⁺10] y Shu et. al. [SZB⁺08]. No obstante, a través de una inspección visual de la Fig. 6.1 y de las imágenes en las tres bandas anteriormente mencionadas, es posible corroborar y clasificar la multiplicidad generada por el cúmulo.

En las Figuras 6.3 y 6.2 se muestran etiquetadas de acuerdo al número (fuente) y letra (imagen), algunas de las imágenes que pertenecen a una misma fuente y que por efecto del cúmulo exhiben multiplicidad, apreciables a simple vista y encerradas en elipses. La Fig. 6.2 muestra las posiciones de varias secciones del gran arco pro-

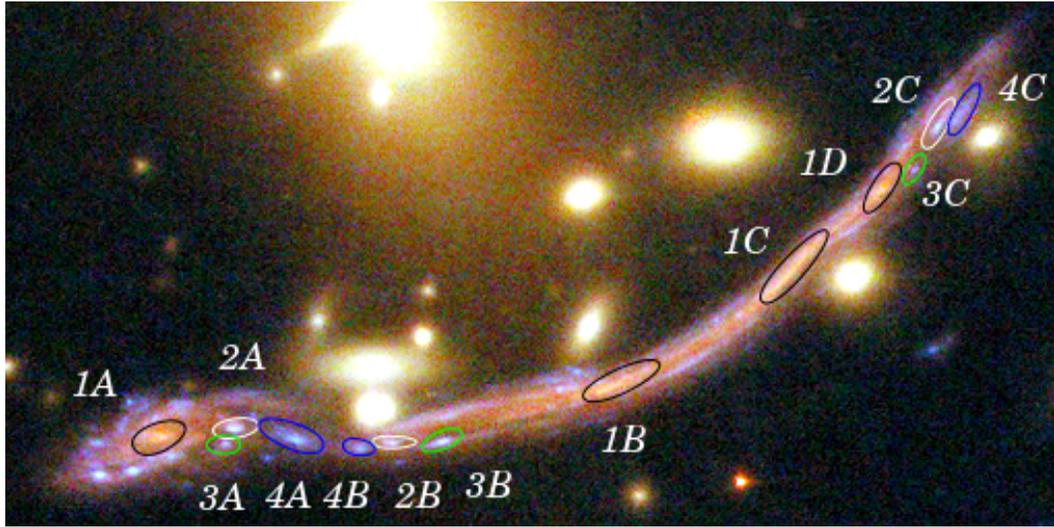


Figura 6.2: Detalle del gran arco generado por el cúmulo, mostrando en elipses del mismo color los conjuntos de imágenes que provienen de la misma fuente.

venientes de una galaxia de fondo.

Todas las imágenes que se pueden distinguir son reproducibles por medio de modelos de lentes, así que resulta perentorio construir la distribución de masa que mejor las reproduce. Sin embargo, debido a la existencia de materia oscura suponiendo uno de los principales componentes en la configuración de la masa, sólo es posible analizar su estructura real combinando el efecto de lente débil y fuerte, y no existe un modelo paramétrico, que al unísono, de cuenta de todas las imágenes observadas.

Las imágenes que utilizaremos para modelar la lente son tangenciales a excepción de las 1 a 4, Fig. 6.2, contenidas en el gran arco, cuya información resulta valiosa ya que constriñe fuertemente el modelo que se utilice. Los redshift de todas las imágenes que utilizaremos serán tomados de los trabajos de Soucail et. al. [SMF⁺88], Kneib et. al. [KMF⁺94] y Richard et. al. [RKL⁺10].

Para la reconstrucción de masa a través de una prueba χ^2 y las imágenes observadas, se utilizará un programa que asigne las posiciones de las imágenes por medio de sus baricentros y se tomará como origen de un sistema de referencia rectangular el centro de la imagen de la Fig. 6.3, cuyas unidades son $14.538Kpc$, es decir, la Fig. 6.3 posee un lado de $726.9Kpc$.

Los cálculos que siguen se harán con base en las magnitudes descritas en el Capítulo 1 y en el modelo estándar de la cosmología, Λ -CDM: $\Omega_m \approx 0,3$, $\Omega_\Lambda \approx 0,7$.

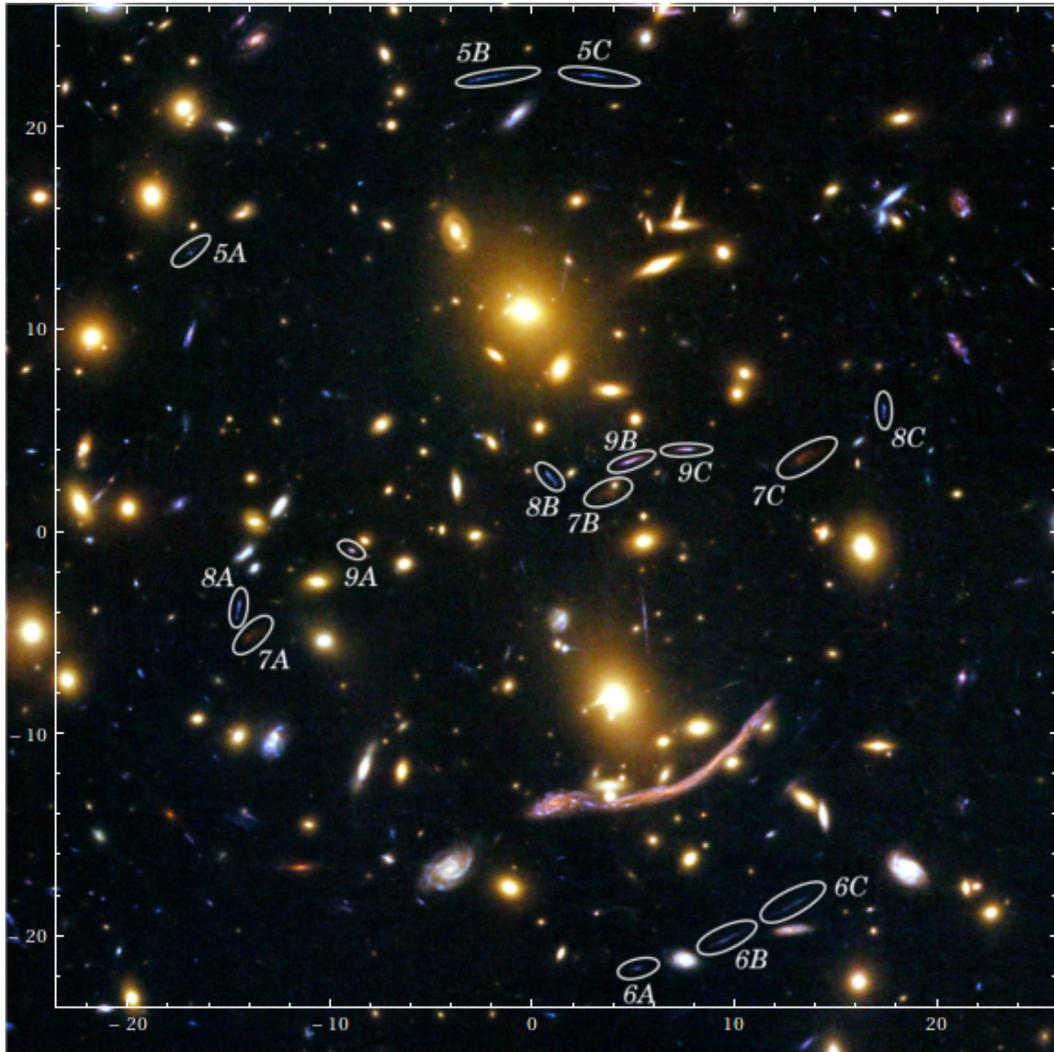


Figura 6.3: Abel 370 con las imágenes de una misma fuente encerradas en elipses y etiquetadas por conjuntos. A través de una imagen más amplia se pueden observar algunas características del gran arco en forma de “dragón” como se le conoce en la literatura, Fig. 6.2. La imagen es cuadrada y posee un lado de $726.9Kpc$, de modo que las unidades son $14.538Kpc$.

6.3. Análisis de la reconstrucción

Supondremos varios modelos paramétricos compuestos por dos perfiles similares, i.e. SIS, NIS, NIE, para describir las dos galaxias dominantes del cúmulo y un perfil NFW para simular el componente de materia oscura. El modelo de lente será entonces la superposición de componentes de masa que den cuenta del mayor número de imágenes observadas. Los perfiles son caracterizados por los siguientes parámetros libres: la posición de su centro (x, y) , elipticidad ϵ , los radios de los núcleos θ_0 y r_s , la orientación de los perfiles, dado por el ángulo α , y la constante k , la cual es proporcional a la velocidad de dispersión de las galaxias para los casos isoterms, sección §3.1,

$$k = \frac{4\pi\sigma^2}{c^2} \frac{D_{OL}D_{LS}}{D_{OS}} \quad (6.1)$$

y proporcional a la sobre-densidad característica del halo, representado por el perfil NFW, y a la densidad crítica del Universo a su redshift. Sección §3.3, del Capítulo 3,

$$k = \frac{r_s^2}{2CD_{OL}} \quad (6.2)$$

donde C está dada por la Ec. (3.35) del mismo capítulo.

Las distancias diametrales angulares serán calculadas a partir del redshift mediante la Ecuación de Dyer-Roeder (1.95) de la sección §1.8.2 del capítulo 1.

No obstante a la libertad de la posición de los centros de los perfiles isoterms, un modelo que use una distribución bimodal de masa en la posición de las dos galaxias dominantes, reproduce mejor las observaciones como lo anotó Kneib et. al. [KMFM93], por tanto, ubicaremos los centros de los modelos isoterms dentro de un rango centrado en las galaxias, mientras que el centro del perfil NFW poseerá libertad a lo largo del área de la imagen.

El potencial del sistema será entonces

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad (6.3)$$

$$\psi_1(\theta_1, \theta_2) = \sum_{l=1}^2 k_l [\theta_{0l}^2 + (1 - \epsilon_l)\bar{\theta}_{1l}^2 + (1 + \epsilon_l)\bar{\theta}_{2l}^2]^{1/2} \quad (6.4)$$

y

$$\psi_2(\theta_1, \theta_2) = k_3 \left(\ln^2 \left(\frac{[(1 - \epsilon)\bar{\theta}_{13}^2 + (1 + \epsilon)\bar{\theta}_{23}^2]^{1/2} D_{OL}}{2r_s} \right) - 4\text{ArcTanh}^2 \left[\frac{(r_s - [(1 - \epsilon)\bar{\theta}_{13}^2 + (1 + \epsilon)\bar{\theta}_{23}^2]^{1/2} D_{OL})^{1/2}}{(r_s + [(1 - \epsilon)\bar{\theta}_{13}^2 + (1 + \epsilon)\bar{\theta}_{23}^2]^{1/2} D_{OL})^{1/2}} \right] \right) \quad (6.5)$$

con

$$\bar{\theta}_{1l} = (\theta_1 - x_l) \cos(\alpha_l) + (\theta_2 - y_l) \sin(\alpha_l) \quad (6.6)$$

y

$$\bar{\theta}_{2l} = (\theta_1 - x_l) \sin(\alpha_l) - (\theta_2 - y_l) \cos(\alpha_l) \quad (6.7)$$

Los mejores parámetros encontrados al realizar la minimización (4.38) y luego (4.43) con las imágenes 1 a 5 de la Fig. 6.3, están consignados en el Cuadro 6.1. Del mismo modo, el valor obtenido de χ^2 y las posiciones de las imágenes medidas y calculadas mediante la ecuación de la lente con los parámetros encontrados, se hallan en el Cuadro 6.2.

Parámetro	NIE1	NIE2	NFWE
x	-0.05 ± 0.1	4.31 ± 1.14	-10.00 ± 1.64
y	9.88 ± 1.59	-8.49 ± 1.46	9.83 ± 1.53
k	11.37 ± 0.88	3.36 ± 0.44	2.62 ± 0.71
θ_0	3.59 ± 1.13	2.43 ± 0.41	-
r_s	-	-	$6.80 \pm -$
ϵ	0.10 ± 0.09	0.03 ± 0.14	0.33 ± 0.21
α	$0.00 \pm -$	$0.34 \pm -$	$0.00 \pm -$

Cuadro 6.1: Parámetros obtenidos con la mejor minimización utilizando los conjuntos de imágenes 1, 2, 3, 4 y 5 de la Fig. 6.3. Algunas desviaciones son del orden de 10^{-4} y por tanto no aparecen.

6.4. Resultados y conclusiones

Distintas distribuciones de masa fueron sometidas a un ajuste para encontrar los mejores parámetros que reprodujeran los arcos observados, sin embargo, como se mencionó en el Capítulo 5, debido a la subestructura del cúmulo, a que no es posible medir y clasificar todas los conjuntos de imágenes, y a que las imágenes se miden por medio de sus baricentros, no existe un modelo paramétrico que lo describa íntegramente, por lo tanto, se escogió el modelo que reprodujera el máximo número de imágenes con un mínimo en el ajuste entre todas las minimizaciones que se efectuaron. Por ejemplo, una sola imagen observada es reproducible con una impresionante similitud (tamaño, forma, posición), pero no se posee confianza en el valor de los parámetros obtenidos ya que el número de datos es considerablemente pequeño. En contraste, un número grande de datos provoca que los parámetros no converjan y la distribución de masa no es capaz de reproducir fielmente las observaciones. Así, la minimización debe cumplir que el número de datos sea superior al de parámetros, al tiempo que su valor, que es un estimativo directo de la eficacia del ajuste, sea el menor. Bajo estas consideraciones el mejor ajuste realizado arrojó los parámetros del Cuadro 6.1.

Con estos valores fue posible comprender la estructura del gran arco, ya que la fuente

Imágenes generadas por Abel 370				
Imágenes reales y parámetros			Reconstrucción Numérica	
	Baricentro imágenes		NIE+NIE+NFWE	
Imagen	$x \pm s$	$y \pm s$	$x \pm s$	$y \pm s$
1A	1.06±0.20	-13.10±0.12	0.47±0.27	-12.81±0.12
1B	6.60±0.21	-12.47±0.12	6.74±0.53	-12.53±0.25
1C	8.72±0.18	-11.11±0.18	8.03±0.05	-11.81±0.07
1D	9.91±0.14	-10.09±0.15	9.41±0.26	-10.64±0.28
2A	2.00±0.12	-12.97±0.11	2.99±1.13	-13.09±0.13
2B	3.91±0.12	-13.17±0.09	-	-
2C	10.53±0.10	-9.33±0.11	10.62±0.14	-9.36±0.17
3A	1.90±0.12	-13.17±0.09	-	-
3B	4.52±0.14	-13.16±0.10	3.23±1.27	-13.20±0.12
3C	10.27±0.09	-9.85±0.09	10.28±0.18	-9.88±0.21
4A	2.76±0.17	-13.12±0.12	-	-
4B	3.54±0.12	-13.22±0.11	2.93±0.81	-13.15±0.10
4C	10.82±0.11	-9.20±0.12	10.63±0.14	-9.45±0.18
4Z	-	-	-14.45±0.06	12.24±0.00
5A	-16.17±0.16	13.08±0.15	-16.15±0.08	13.06±0.05
5B	-2.04±0.53	21.41±0.09	-	-
5C	2.82±0.56	21.53±0.07	3.00±1.63	20.90±0.56
5Z	-	-	-6.71±0.12	-8.69±0.08
χ^2	0.35462967			

Cuadro 6.2: Posiciones de los baricentros de las imágenes 1 hasta 5 de la Fig. 6.3 y las respectivas al modelar el cúmulo por medio de dos perfiles NIE y un NFWE con los parámetros del Cuadro 6.1. Las imágenes etiquetadas con la Z corresponden a imágenes no observadas en la Fig. 6.3, pero que el modelo predice. Nótese el valor de la minimización.

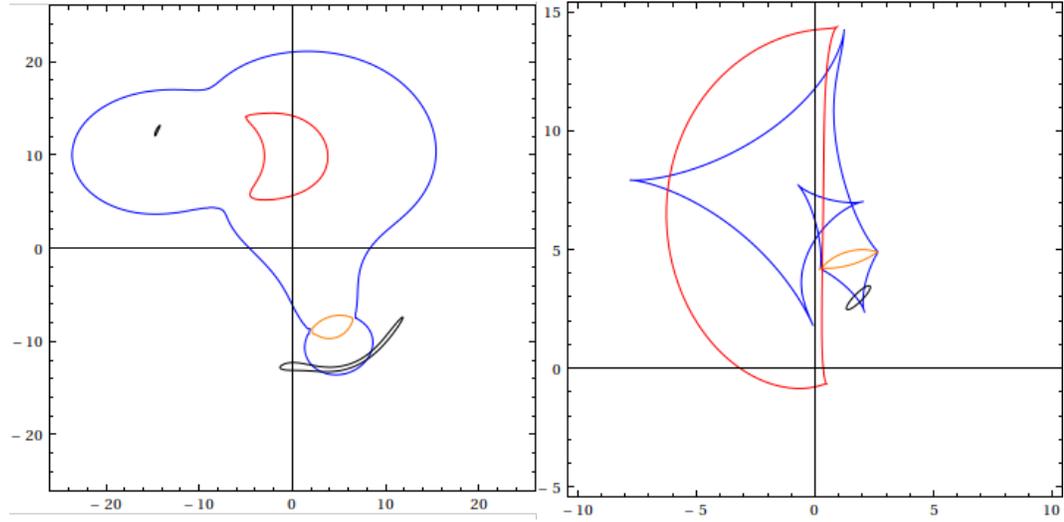


Figura 6.4: Curvas críticas (izquierda) y cústicas (derecha), encontradas numéricamente a partir de los parámetros del Cuadro 6.1 y el potencial 6.3, que representan la estructura másica de Abel 370, nótese su complicada morfología. Las curvas en cada diagrama se corresponden. Nótese también que la posición de la fuente que genera el gran arco coincide con una curva cústica, efecto que produce su impresionante forma y tamaño. Las unidades son $14.538Kpc$.

del mismo se encuentra sobre una de las curvas cústicas generadas por el cúmulo, Fig. 6.4; a su vez, esta Figura muestra las curvas críticas y la formación del gran arco, al igual que una segunda imagen en $(-14.45 \pm 0.06, 12.24 \pm 0.00)^{26}$, que no es medida en la imagen de campo CCD, quizá porque se encuentre demagnificada o detrás de algún componente del cúmulo, pero que según el modelo debería visualizarse.

Las velocidades de dispersión de las galaxias calculadas por medio de las distancias diametrales angulares halladas con la ecuación de Dyer-Roeder, a partir de los redshift encontrados en la literatura y en la página del Sloan Digital Sky Survey (www.sdss.org), de las dos galaxias dominantes del cúmulo $z = 0,36$, y de la imagen del gran arco, tomada como fuente referencia, $z = 0,724$, se resuelve, $D_{OL} = 971,6825Mpc$, $D_{OS} = 1398,6974Mpc$ y $D_{LS} = 632,1728Mpc$.

De este modo, las velocidades de dispersión de las galaxias modeladas como elipsoides isoterms tienen un valor de $\sigma_1 = (1641,81 \pm 63,53)km/s$ y $\sigma_2 = (892,25 \pm 58,43)km/s$.

El gran arco 6.2 posee abundante información del cúmulo, ya que, en realidad exhibe multiplicidad de sub-imágenes de una galaxia de fondo. Estas imágenes al igual que el conjunto de imágenes 5, fueron simuladas al invertir numéricamente la

²⁶Recordar que las unidades son $14.538Kpc$.

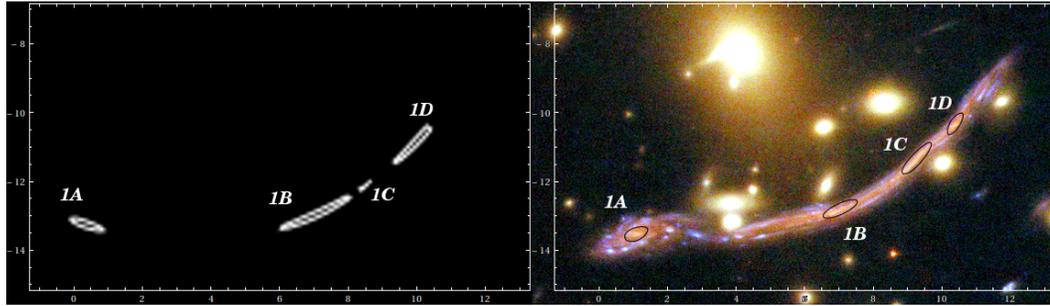


Figura 6.5: Izquierda: imagen generada computacionalmente al modelar A370 con los perfiles que descritos por el potencial (6.3) y los parámetros consignados en el Cuadro 6.1 al realizar una minimización con las imágenes medidas. Derecha: imágenes correspondientes reales.

ecuación de la lente del modelo cuyos parámetros se encuentran en el Cuadro 6.1, para obtener las respectivas posiciones de sus fuentes. De este modo, la configuración de las imágenes puede apreciarse en las Figuras 6.5, 6.6, 6.7, 6.8 y 6.9. A su vez, las posiciones de los baricentros de las imágenes simuladas están dadas en el Cuadro 6.2, donde se puede apreciar que en buena medida coinciden dentro de la incertidumbre en cada dato con las reales, lo que genera un margen de confianza en la reproducción de los parámetros del cúmulo.

En el pánel izquierdo de la Fig. 6.5 se puede observar la reproducción de las cuatro imágenes encerradas por las elipses de color negro del pánel derecho. Por supuesto, para efectuar la simulación de la formación de imágenes, es necesario conocer la posición de la fuente, el modelo de lente y sus parámetros, sin embargo a través de la minimización estas incógnitas pueden ser calculadas, pero existen otras características del sistema, también fundamentales como el tamaño y forma de la fuente, que son, en principio desconocidas y que es necesario suponer. En las figuras de simulación de imágenes 6.5 a 6.9 se tomó como referencia una fuente circular de radio $1027,977pc$. Las galaxias poseen en general formas diversas, pero para efectos de la posición de las imágenes formadas, esta suposición es válida.

Una de las características más importantes de la simulación de imágenes es que el cúmulo puede generar imágenes que no son apreciables, por ejemplo la $4Z$ de la Fig. 6.8. Lo que motiva a buscar estas imágenes para verificar la validez del modelo y del método.

La Fig. 6.10 exhibe la imagen de una fuente elíptica cuyo eje principal se halla rotado un ángulo $\frac{\pi}{4}$, de elipticidad 0,25 y ubicada en $(26,60Kpc, 43,17Kpc)$. En la misma Figura puede observarse la imagen de campo real. Vale la pena resaltar que el ajuste reproduce muy bien la forma y tamaño de la imagen, a su vez que se aprecia la formación de la estructura de la parte inferior izquierda del arco que asemeja una especie de cabeza del mismo, lo que constituye un gran logro del método y de la

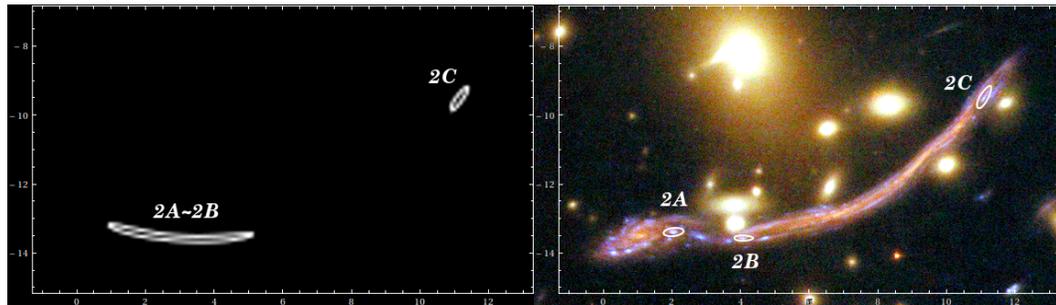


Figura 6.6: Segundo conjunto de imágenes. Debido a que el radio de la fuente circular es supuesto, es de esperar que a medida que éste disminuye, el arco $2A-2B$ del panel izquierdo se dividirá formando la pareja $2A$ y $2B$ del derecho.

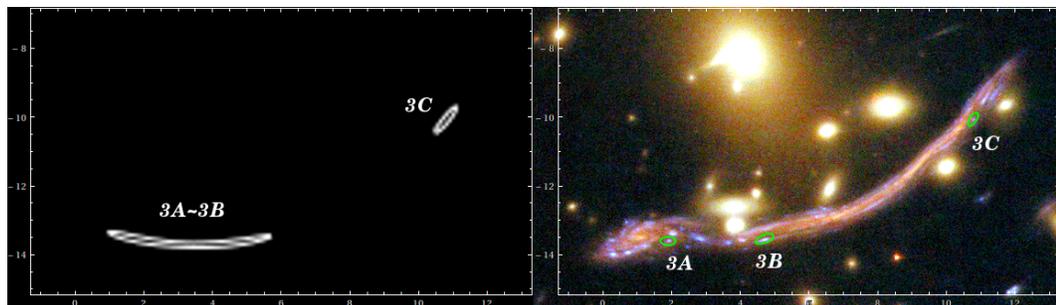


Figura 6.7: Tercer conjunto de imágenes.

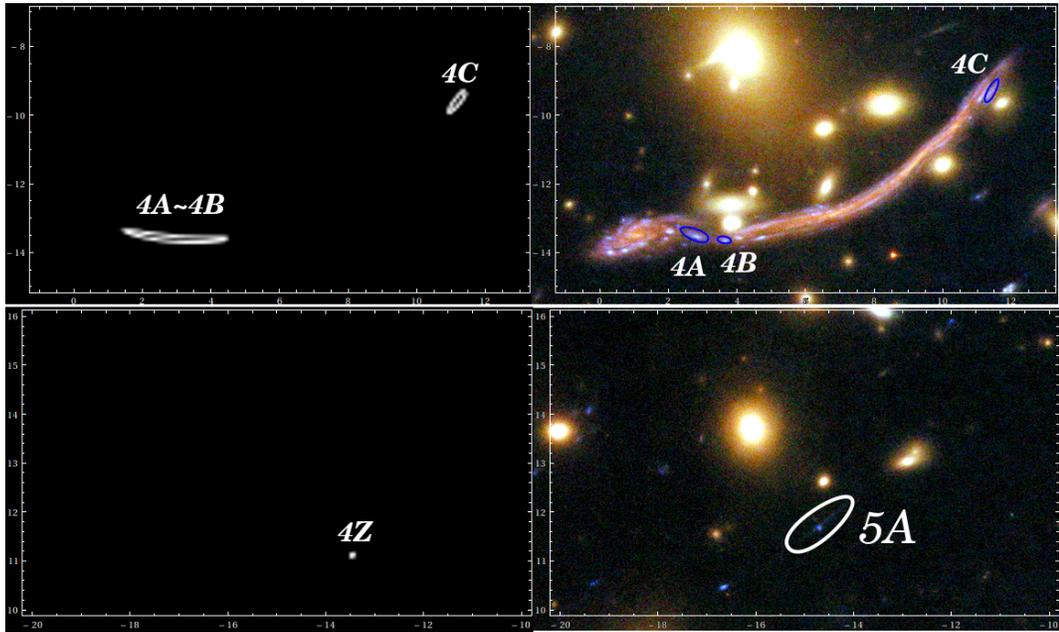


Figura 6.8: Cuarto conjunto de imágenes.

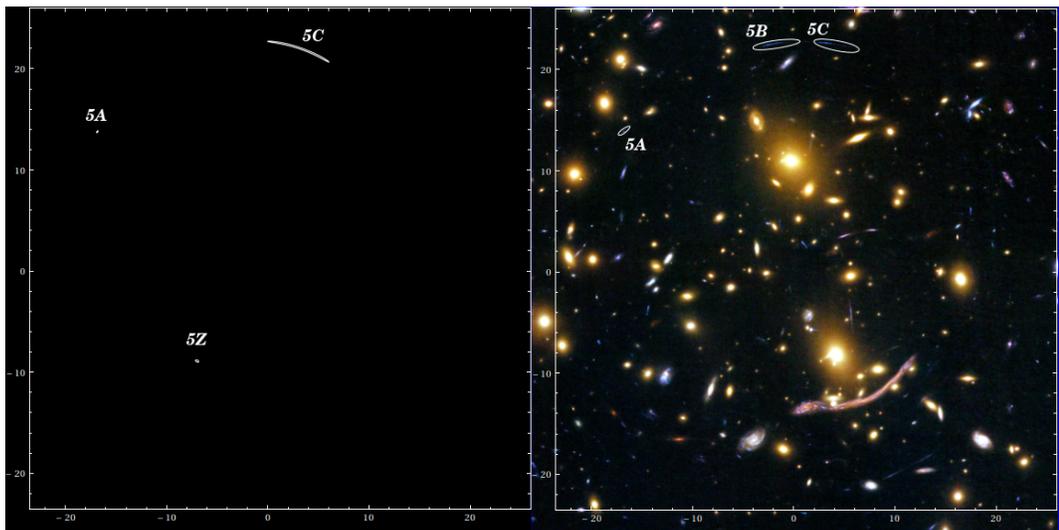


Figura 6.9: Quinto conjunto de imágenes.

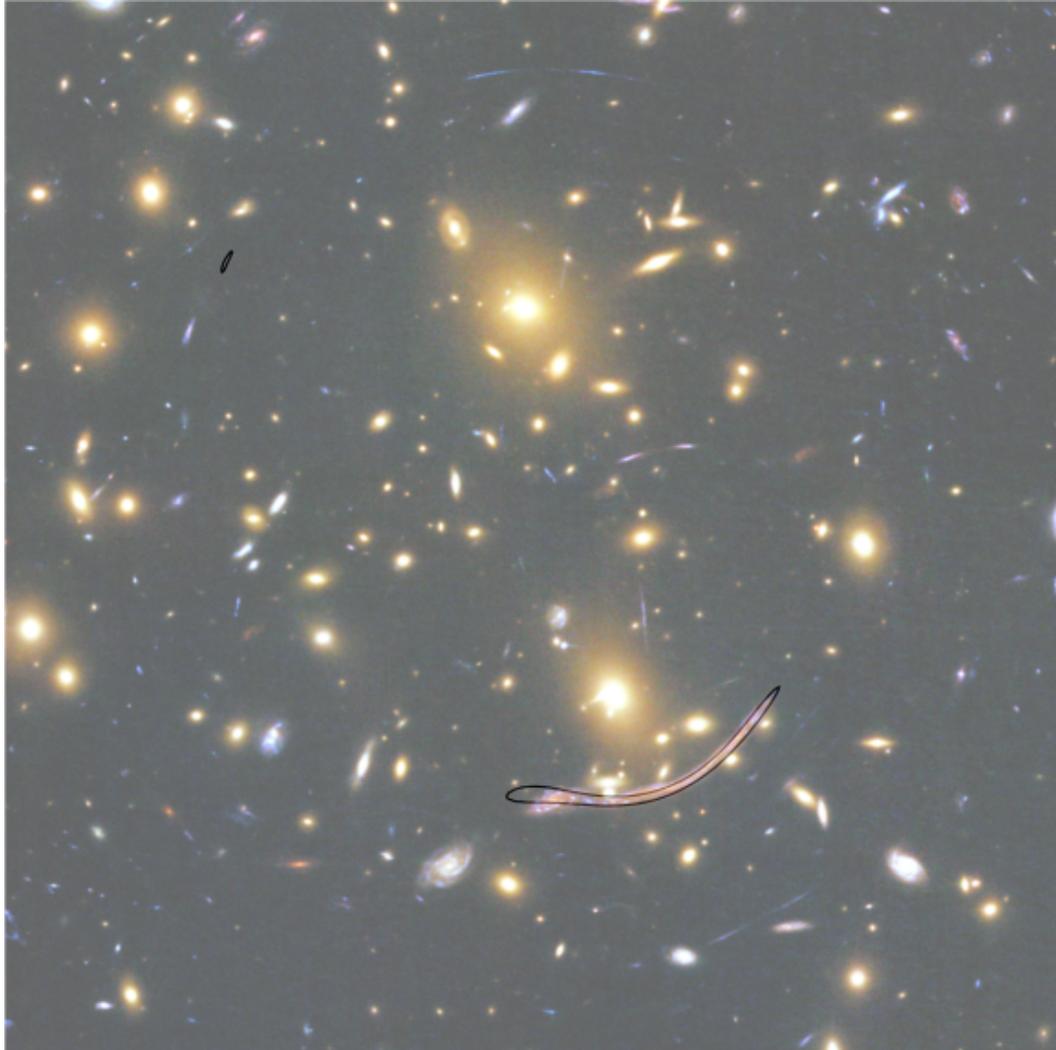


Figura 6.10: Imagen del gran arco generada por medio de la reconstrucción de masa superpuesta sobre la imagen real, donde se aprecian las similitudes del tamaño y forma de ambos arcos. Una segunda imagen se aprecia igualmente mediante la simulación, pero no en la imagen de campo real.

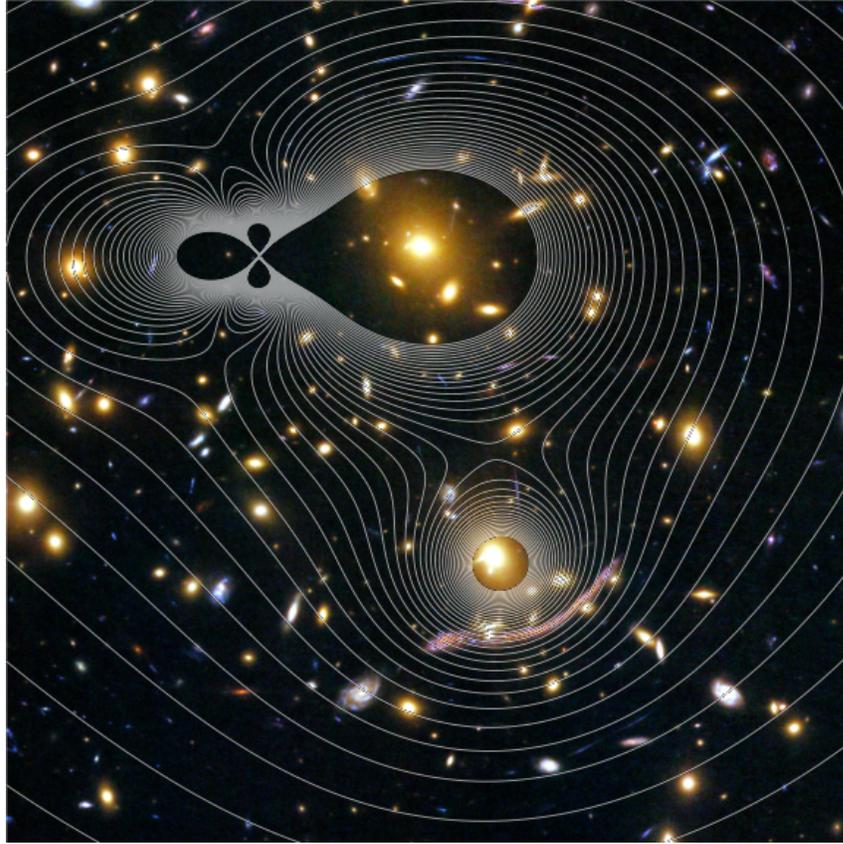


Figura 6.11: Curvas de contorno del perfil de masa de Abel 370 obtenidas con el modelo (6.3) y los parámetros del Cuadro 6.1.

minimización encontrada.

6.5. Perfil de masa del cúmulo

Por medio de la Ec. de Poisson (2.42), el perfil de masa de Abel 370 modelado como una superposición de materia oscura NFWE y NIE es mostrado en la Fig. 6.11 y sus curvas en la Fig. 6.12. En la misma imagen se observa que la distribución de masa se ve afectada fuertemente por el halo de materia oscura NFWE.

La densidad de masa superficial es una función de las coordenadas (θ_1, θ_2) y al integrarse en un área S conduce a la masa m_S encerrada por tal superficie. A través de la ecuación de Poisson se encuentra

$$M_S = \frac{\Sigma_{cr}}{2} \int_S \nabla^2 \psi(\theta_1, \theta_2) d^2\theta. \quad (6.8)$$

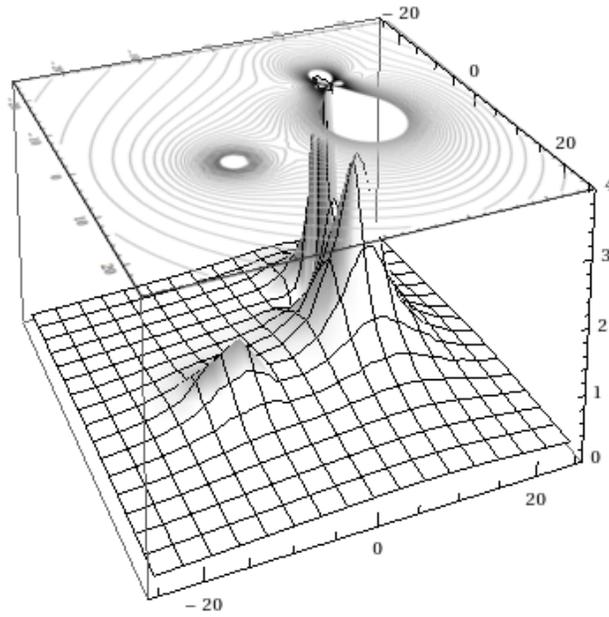


Figura 6.12: Perfil del masa de Abel 370 obtenido con el mejor ajuste realizado con las imágenes 1 hasta 5, contenidas en la Fig. 6.3. Se aprecia la amplia presencia de un componente de materia oscura modelado con el perfil NFWF y de los dos perfiles isoterms NIE. Las unidades son $14.538Kpc$.

La masa encerrada por un área circular de radio $r_c = 262,47 Kpc$ para una fuente a un redshift $z = 2$, es

$$M_S = 4,22 \times 10^{14} M_\odot \quad (6.9)$$

donde $M_\odot \approx 2 \times 10^{30} kg$ es la masa del Sol. Este resultado está acorde con aquel encontrado en [RKL⁺10], $M_S = 3,8 \times 10^{14} M_\odot$ y con el derivado en [BUM⁺08], $M_S = 4,3 \times 10^{14} M_\odot$, donde los autores utilizaron medidas de efecto de lente gravitacional débil. En este punto es importante resaltar que el método desarrollado en este trabajo resulta más directo en el cálculo de la masa, que los autores correspondientes mencionados, ya que en aquellos casos fueron utilizadas herramientas computacionales y códigos especializados en la teoría de lentes gravitacionales, lo que constituye nuevamente un gran logro en la reconstrucción de masa y en la minimización efectuada.

Los cálculos más significativos y novedosos de este trabajo están siendo (a la fecha) preparados para someterlos a publicaciones en revistas de Astrofísica y Cosmología.

Apéndice A

Solución de la ecuación de la órbita de un fotón

Claramente, el término que perturba la trayectoria del haz de luz es el que contiene en la Ec. (2.13) a $r_s = 2GM$, pues en el caso en el que el fotón atraviese el espacio vacío, $M = 0$

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - \frac{3}{2}r_s u^2 = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0 \quad (\text{A.2})$$

cuya solución es

$$u = u_0 \cos \phi = \frac{1}{r_0} \cos \phi \quad (\text{A.3})$$

lo que constituye una línea recta escrita en coordenadas polares y r_0 es la menor distancia al centro del objeto que alcanza el fotón ($\phi = 0$). Sin embargo, esta solución puede ser perturbada en términos del parámetro $r_s u_0 = r_s/r_0$, el cual es muy pequeño¹, de este modo

$$u = \frac{1}{r_0} \left(\cos \phi + \left(\frac{r_s}{r_0}\right) u_1 + \left(\frac{r_s}{r_0}\right)^2 u_2 + \left(\frac{r_s}{r_0}\right)^3 u_3 + \dots \right) \quad (\text{A.4})$$

al reemplazar en la órbita del fotón y asociar los términos de r_s/r_0 , $(r_s/r_0)^2$, $(r_s/r_0)^3$, ..., se obtiene el conjunto iterado de ecuaciones diferenciales de segundo grado

$$\frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_1 - \frac{3}{2} \cos^2 \phi = 0 \quad (\text{A.5})$$

¹Fíjese que $r_s = 2GM$ es un término muy pequeño en comparación a r_0 , el cual representa la distancia más próxima a la que cruza el haz de luz del objeto.

$$\frac{d^2 u_2}{d\phi^2} + u_2 - 3u_1 \cos \phi = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{d^2 u_3}{d\phi^2} + u_3 - 3u_2 \cos \phi - \frac{3}{2}u_1^2 = 0 \quad (\text{A.7})$$

⋮

La soluciones de este conjunto de ecuaciones son

$$u_1(\phi) = \frac{1}{4} (3 - \cos(2\phi)) \quad (\text{A.8})$$

$$u_2(\phi) = \frac{3}{64} (22 \cos \phi + \cos(3\phi) + 20\phi \sin \phi) \quad (\text{A.9})$$

$$u_3(\phi) = \frac{1}{128} (312 - 125 \cos(2\phi) - \cos(4\phi) - 60\phi \sin(2\phi)) \quad (\text{A.10})$$

⋮

Así, la Ec. (A.1) tiene una solución en (A.4) y es importante notar que $u \rightarrow 0$ cuando $\phi \rightarrow \pm(\pi/2 + \delta\phi)$, donde la trayectoria en línea recta del fotón se deflecta en total una cantidad $\Delta\phi = 2\delta\phi$. La expansión en series de Taylor a primer orden en δ de $u(\pi/2 + \delta\phi)$ es

$$u\left(\frac{\pi}{2} + \delta\phi\right) = \frac{r_s}{r_0^2} + \frac{15\pi r_s^2}{32r_0^3} + \frac{109r_s^3}{32r_0^4} - \left(\frac{1}{r_0} - \frac{3r_s^2}{64r_0^3} - \frac{15\pi r_s^3}{32r_0^4}\right) \delta\phi + \mathcal{O}(\delta\phi)^2 \quad (\text{A.11})$$

despreciando potencias superiores a $(r_s/r_0)^2$

$$\delta\phi = \frac{r_s}{r_0} \quad (\text{A.12})$$

finalmente el ángulo de desviación del haz de luz es

$$\Delta\phi = 2\frac{r_s}{r_0} = \frac{4GM}{c^2} \frac{1}{r_0}. \quad (\text{A.13})$$

Esto es dos veces el valor predicho por Newton y fue confirmado experimentalmente para la desviación producida por el Sol a las estrellas de fondo en 1919.

Apéndice B

Lente gravitacional esférica

En este apéndice mostraremos un método novedoso para describir el efecto de lente gravitacional de una distribución de masa con simetría esférica a partir de su densidad de masa superficial $\Sigma(x)$, escrita en términos de una función decreciente $f(x)$. La función depende de la distribución de masa de la lente y es encontrada por medio de una ecuación diferencial de primer orden.

B.1. Convergencia

Supongamos un perfil de masa esféricamente simétrico reposando a la distancia D_{OL} , actuando como una lente gravitacional sobre las fuente de fondo a la distancia D_{OS} , y asumamos que la distancia entre la lente y la fuente es D_{LS} . La proyección de masa sobre el plano de la lente, conocida como densidad de masa superficial Ec. (2.26) de la sección §2.3 del Capítulo 2,

$$\Sigma(x) = 2 \int_0^\infty \rho(x, z) dz, \quad (\text{B.1})$$

donde x es el radio vector adimensional en el plano de la lente y la coordenada z es perpendicular al mismo, esto es, es la coordenada de la línea de visión.

Supongamos

$$\Sigma(x) \propto [f(x) + g(x)], \quad (\text{B.2})$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones monótonas y decrecientes que dependen de la distribución de masa de la lente, y definidas en el intervalo $(0, \infty)$. Vale la pena notar que $\Sigma(x) \geq 0$, o $f(x) + g(x) \geq 0$, y esto es correcto siempre que $f(x) \geq g(x)$ y $f(x) > 0$. Ya que $\Sigma(x)$ puede ser divergente en el origen, imponemos la condición

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = 0. \quad (\text{B.3})$$

Con lo cual, la convergencia puede expresarse como

$$\kappa(x) = \frac{1}{2C} [f(x) + g(x)], \quad (\text{B.4})$$

donde C depende tanto de las distancias, las cuales son funciones del modelo cosmológico, y de los parámetros físicos de la distribución de masa de la lente

$$\Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_{OS}}{D_{OL}D_{LS}}. \quad (\text{B.5})$$

B.1.1. Potencial deflector

La Ecuación de Poisson describe el potencial deflector en términos de la convergencia

$$\nabla^2 \psi(x) = 2\kappa(x), \quad (\text{B.6})$$

pero al escribir el Laplaciano en coordenadas cilíndricas se aprovecha la simetría esférica de la distribución de masa, es decir

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right) = 2\kappa(x) \quad (\text{B.7})$$

que al ser integrada una vez, resulta

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} = \frac{2}{x} \int_0^x x' \kappa(x') dx' \quad (\text{B.8})$$

y la segunda vez

$$\psi(x) = 2 \int_0^x \frac{1}{x'} \left(\int_0^x x' \kappa(x') dx' \right) dx' \quad (\text{B.9})$$

que, escogiendo

$$u = \int_0^x x' \kappa(x') dx' \quad \text{y} \quad v = \ln x' \quad (\text{B.10})$$

permite integrar el potencial

$$\psi(x) = 2 \ln x \int_0^x x' \kappa(x') dx' - 2 \int_0^x x' \kappa(x') \ln x' dx' \quad (\text{B.11})$$

finalmente

$$\psi(x) = 2 \int_0^x x' \kappa(x') \ln \left(\frac{x}{x'} \right) dx'. \quad (\text{B.12})$$

De la misma forma, la Ec. (B.8) permite escribir el ángulo de desviación escalado directamente como

$$\alpha(x) = \frac{2}{x} \int_0^x x' \kappa(x') dx' \quad (\text{B.13})$$

B.1.2. Ecuación de la lente

El ángulo de deflexión, mediante la Ec. (B.4), es

$$\alpha(x) = \frac{1}{C} \frac{1}{x} \int_0^x x' [f(x') + g(x')] dx'. \quad (\text{B.14})$$

Ahora, ya que $f(x)$ es una función decreciente $\partial_x f(x) \leq 0$, y así nos permite escribir la función $g(x)$

$$g(x) = f(x) + x \partial_x f(x), \quad (\text{B.15})$$

y

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{1}{C} \frac{1}{x} \int_0^x x' [2f(x') + x' \partial_x f(x')] dx' \\ &= \frac{1}{C} \frac{1}{x} \int_0^x \partial_x [x'^2 f(x')] dx', \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

esto es

$$\alpha(x) = \frac{1}{C} x f(x). \quad (\text{B.17})$$

El anterior resultado muestra que para un perfil de masa esféricamente simétrico, cuya densidad de masa superficial puede ser escrita en la forma de la Ec. (B.2), el ángulo de deflexión es proporcional a la función $f(x)$.

La ecuación de la lente, la cual relaciona las posiciones de las imágenes y las de sus fuentes, x y y respectivamente, para una situación de simetría esférica, es un escalar y toma una forma unidimensional,

$$y(x) = x - \alpha(x), \quad (\text{B.18})$$

la cual puede ser escrita en términos de la función $f(x)$

$$y(x) = x \left| 1 - \frac{1}{C} f(x) \right|. \quad (\text{B.19})$$

Uniando los resultados anteriores, la función $f(x)$ satisface la siguiente ecuación

$$x \frac{df(x)}{dx} + 2f(x) - 2C\kappa(x) = 0, \quad (\text{B.20})$$

la cual es obtenida al insertar la Ec. (B.15) en la Ec. (B.4), de acuerdo a la condición inicial (B.3). Así, el problema es reducido a solucionar una ecuación diferencial de primer orden Ec. (B.20) para $f(x)$.

B.1.3. $f(x)$ para los perfiles SIS y NIS

Un modelo ampliamente usado en la teoría de lentes gravitacionales es la Esfera Singular Isoterma (SIS) [SEF99], vista en la sección §3.1 del Capítulo 4, cuya convergencia está dada por

$$\kappa_S(x) = \frac{2\pi\sigma^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \frac{1}{x}, \quad (\text{B.21})$$

donde σ_v velocidad de dispersión en la galaxia. Con la Ec. (B.21) introducida en la Ec. (B.20) y la Ec. (B.3), es posible obtener la función $f_S(x)$ para un perfil SIS

$$x \frac{df_S(x)}{dx} + 2f_S(x) - \frac{1}{x} = 0, \quad (\text{B.22})$$

$$f_S(x) = \frac{1}{x^2}, \quad (\text{B.23})$$

con

$$C_S = \frac{c^2}{4\pi\sigma^2} \frac{D_{OS}}{D_{LS}}. \quad (\text{B.24})$$

La función $g_S(x)$ es entonces

$$g_S(x) = 0. \quad (\text{B.25})$$

Para encontrar el ángulo de deflexión, basta efectuar el producto de x con $f_S(x)/C_S$

$$\alpha_S(x) = C_S^{-1}. \quad (\text{B.26})$$

Una generalización del modelo SIS es usualmente establecido por medio de un radio del núcleo x_0 , esto es la Esfera Isoterma No-Singular (NIS), la cual es más realista para modelar galaxias. En este caso la convergencia está dada por

$$\kappa_N(x) = \frac{2\pi\sigma^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \frac{2x_0^2 + x^2}{(x_0^2 + x^2)^{3/2}}, \quad (\text{B.27})$$

A través de un proceso similar al del SIS, podemos encontrar $f_N(x)$, $g_N(x)$ y $\alpha_N(x)$ para el perfil NIS

$$f_N(x) = \frac{1}{(x_0^2 + x^2)^{1/2}}, \quad (\text{B.28})$$

$$g_N(x) = \frac{x_0^2}{(x_0^2 + x^2)^{3/2}}, \quad (\text{B.29})$$

y

$$\alpha_N(x) = C_S^{-1} \frac{x}{(x_0^2 + x^2)^{1/2}}, \quad (\text{B.30})$$

donde C_S está dado por la Ec. (B.24).

B.2. Magnificación y Shear

Ya que el efecto de lente gravitacional conserva el brillo superficial de la fuente, la magnificación de una imagen es definida como la razón entre los ángulos sólidos de las imágenes y la fuente, a saber

$$\mu(x) = \left[\frac{y}{x} \partial_x y(x) \right]^{-1}, \quad (\text{B.31})$$

de la Ec. (B.15) y la Ec. (B.19), esto es

$$\mu(x) = \frac{C^2}{|C - f(x)||C - g(x)|}. \quad (\text{B.32})$$

La Ec. (B.32) implica que la magnificación tiene dos singularidades en $f(x) = C$ y $g(x) = C$ y por tanto su curva tiene dos asíntotas en esos puntos.

Note que la magnificación Ec. (B.32) puede ser escrita en términos de la convergencia $\kappa(x)$ y el shear $\gamma(x)$, el cual mide la distorsión de las imágenes,

$$\mu(x) = \left([1 - \kappa(x)]^2 - \gamma(x)^2 \right)^{-1}, \quad (\text{B.33})$$

de donde

$$\gamma(x) = [1 - \kappa(x)]^2 - \left[1 - \frac{1}{C} f(x) \right] \left[1 - \frac{1}{C} g(x) \right], \quad (\text{B.34})$$

y de la Ec. (B.4), el shear es

$$\gamma(x) = \frac{1}{2C} [f(x) - g(x)]. \quad (\text{B.35})$$

Ahora, reconociendo que

$$f(x) = C \frac{1}{x} \partial_x \psi(x), \quad (\text{B.36})$$

y

$$g(x) = C \partial_x \partial_x \psi(x), \quad (\text{B.37})$$

el shear puede ser escrito en términos del potencial deflector de una distribución de masa esférica, como

$$\frac{1}{x} \partial_x \psi(x) - \partial_x \partial_x \psi(x) = 2\gamma(x). \quad (\text{B.38})$$

En este punto, la definición de la función $f(x)$ muestra nuevamente su utilidad, ya que el shear puede ser encontrado en términos del potencial deflector sin recurrir a sus derivadas parciales.

B.3. Curvas críticas y cáusticas

Las curvas críticas son aquellos puntos x en el plano de la lente donde la ecuación de la lente no puede ser invertida, o equivalentemente donde la magnificación es infinita, véase la sección §2.8

$$[1 - \kappa(x)]^2 - \gamma(x)^2 = 0, \quad (\text{B.39})$$

o

$$\kappa(x) + \gamma(x) = 1, \quad (\text{B.40})$$

$$\kappa(x) - \gamma(x) = 1, \quad (\text{B.41})$$

pero, de la Ec. (B.4) y Ec. (B.35)

$$\kappa(x) + \gamma(x) = \frac{1}{C}f(x), \quad (\text{B.42})$$

y

$$\kappa(x) - \gamma(x) = \frac{1}{C}g(x), \quad (\text{B.43})$$

Así, las curvas críticas son los contornos de nivel de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, y son encontradas cuando

$$f(x_{c1}) = C \quad \text{o} \quad g(x_{c2}) = C. \quad (\text{B.44})$$

Las ecuaciones (B.44) no forman un sistema, así, dado un valor C es posible encontrar dos soluciones x_{c1} y x_{c2} si $g(x) > 0$, o $\partial_x [xf(x)] > 0$, lo cual implica que $xf(x)$ es creciente, y, si $g(x) \neq a$, de modo que $\partial_x [xf(x)] \neq 0$ y por tanto si $f(x) \neq a+b/x$, con a y b dos constantes arbitrarias. De este modo, la única condición para formar dos círculos críticos es que $xf(x)$ sea creciente, de otra forma la lente produce una sola curva crítica asociada a $f(x)$, o ninguna si $f(x) < C$. Al tiempo, las curvas cáusticas son los puntos correspondientes en el plano de la lente de los puntos críticos a través de la ecuación de la lente, y si asumimos que la lente produce dos círculos críticos, esto es,

$$y(x_{c1}) = 0, \quad (\text{B.45})$$

$$y(x_{c2}) = -\frac{1}{C}x_{c2}^2 \partial_x f(x_{c2}), \quad (\text{B.46})$$

con $\partial_x f(x) \leq 0$ en $x \in (0, \infty)$. Así, las curvas cáusticas serán un punto y un círculo concéntrico con la lente.

Apéndice C

Convergencia NFW

A partir del perfil (3.30) la densidad de masa proyectada en el plano de la lente Ec. (2.26)

$$\Sigma(\xi) = 2 \int_0^\infty \rho(\xi, z) dz \quad (\text{C.1})$$

$$\Sigma(\xi) = 2\delta_k \rho_c r_s \int_0^\infty \frac{1}{(\xi^2 + z^2)^{1/2} \left(1 + (\xi^2 + z^2)^{1/2} / r_s\right)^2} dz \quad (\text{C.2})$$

pero haciendo $z = x r_s \text{Tan}(\phi)$ y $\xi = x r_s$, con $dz = x r_s \text{Tan}(\phi) d\phi$

$$\Sigma(x) = r_s \delta_k \rho_c \int_0^{\pi/2} \frac{\text{Sec}(\phi)}{[1 + x \text{Sec}(\phi)]^2} d\phi \quad (\text{C.3})$$

$$\Sigma(x) = -r_s \delta_k \rho_c \left[\frac{x \text{Sin}(\phi)}{(x + \text{Cos}(\phi)) (1 - x^2)} + \frac{2}{(1 - x^2)^{3/2}} \text{ArcTanh} \left(\frac{(x - 1) \text{Tan}(\phi/2)}{(1 - x^2)^{1/2}} \right) \right]_0^{\pi/2} \quad (\text{C.4})$$

$$\Sigma(x) = -\frac{2r_s \delta_k \rho_c}{(1 - x^2)^{3/2}} \left[(1 - x^2)^{1/2} + 2 \text{ArcTanh} \left(\frac{x - 1}{(1 - x^2)^{1/2}} \right) \right] \quad (\text{C.5})$$

y en términos de $\xi = x r_s$

$$\Sigma(\xi) = -\frac{2r_s \delta_k \rho_c}{\left(1 - \frac{\xi^2}{r_s^2}\right)^{3/2}} \left(2 \text{ArcTanh} \left[\frac{\frac{\xi}{r_s} - 1}{\left(1 - \frac{\xi^2}{r_s^2}\right)^{1/2}} \right] + \left(1 - \frac{\xi^2}{r_s^2}\right)^{1/2} \right) \quad (\text{C.6})$$

$$\Sigma(\xi) = -\frac{2\delta_k \rho_c r_s^3}{(r_s^2 - \xi^2)^{3/2}} \left((r_s^2 - \xi^2)^{1/2} + 2r_s \text{ArcTanh} \left[\frac{\xi - r_s}{(r_s^2 - \xi^2)^{1/2}} \right] \right) \quad (\text{C.7})$$

de modo que la convergencia será, mediante Σ_{cr}

$$\kappa(\xi) = -\frac{2\delta_k \rho_c}{\Sigma_{cr}} \frac{r_s^3}{(r_s^2 - \xi^2)^{3/2}} \left((r_s^2 - \xi^2)^{1/2} + 2r_s \text{ArcTanh} \left[\frac{\xi - r_s}{(r_s^2 - \xi^2)^{1/2}} \right] \right). \quad (\text{C.8})$$

Apéndice D

Puntos extremales en varias variables

Sea una función $f(x_1, \dots, x_n)$ de varias variables definida en un dominio D donde sus derivadas de orden superior a uno están definidas.

La matriz Hessiana asociada a la función $f(x_1, \dots, x_n)$ en el punto $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ es

$$\mathbf{H}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_1x_2}(\mathbf{a}) & \dots & f_{x_1x_n}(\mathbf{a}) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{a}) & f_{x_2x_2}(\mathbf{a}) & \dots & f_{x_2x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\mathbf{a}) & f_{x_nx_2}(\mathbf{a}) & \dots & f_{x_nx_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

si \mathbf{a} es un punto crítico de $f(x_1, \dots, x_n)$ y

- $\mathbf{H}(\mathbf{a})$ es definida positiva, entonces f tiene un mínimo en a .
- $\mathbf{H}(\mathbf{a})$ es definida negativa, entonces f tiene un máximo en a .
- $\mathbf{H}(\mathbf{a})$ es no definida, entonces f tiene un punto de silla en a .
- $\mathbf{H}(\mathbf{a})$ es semidefinida, el criterio no decide.

Recordemos que una matriz \mathbf{A} se define positiva o negativa dependiendo del valor de su determinante, sus *menores principales* y *menores principales conducentes*, de acuerdo a

1. En el caso en que $|\mathbf{A}| \neq 0$:
 - (a) Si los *menores principales conducentes* son todos mayores que cero, entonces \mathbf{A} se dice que es definida positiva.
 - (b) Si los *menores principales conducentes* tienen signos alternados empezando por negativo, entonces \mathbf{A} se dice que es definida negativa.

- (c) En otro caso \mathbf{A} es indefinida.
2. En el caso en que $|\mathbf{A}| = 0$:
- (a) Si los *menores principales* son todos mayores o iguales a cero, entonces \mathbf{A} se dice que es semidefinida positiva.
 - (b) Si los *menores principales* tienen signos alternados empezando por negativo o son cero, entonces \mathbf{A} se dice que es semidefinida negativa.
 - (c) En otro caso \mathbf{A} es indefinida.

Donde los *menores principales* de orden r de la matriz \mathbf{A} de dimensión $n \times n$ (con $r \leq n$), son los determinantes formados por r filas de \mathbf{A} (en orden) y las mismas r columnas. Y el *menor principal conducente* de orden r es el menor principal formado por las r primeras filas y las r primeras columnas de la matriz.

Bibliografía

- [Bar96] M. Bartelmann. Arcs from a universal dark-matter halo profile. *Astronomy and Astrophysics*, 313:697–702, September 1996.
- [BG06] L. Bergström and A. Goobar. *Cosmology and particle astrophysics*, volume 1. Springer Verlag, second edition, 2006. ISBN 3-540-32924-2.
- [BKSE99] J. Bézecourt, J.P. Kneib, G. Soucail, and T.M.D. Ebbels. Lensed galaxies in Abell 370. I. Modeling the number counts and redshift distribution of background sources. *Astronomy and Astrophysics*, 347:21–29, 1999.
- [BS99] Matthias Bartelmann and Peter Schneider. Weak gravitational lensing. *Physics Reports*, 340:291–472, 1999.
- [BT94] James Binney and Scott Tremaine. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, 1994. ISBN 0-691-08444-9.
- [BUM⁺08] T. Bradhurst, K. Umetsu, E. Medezinski, M. Oguri, and Y. Rephaeli. Comparison of Cluster Lensing Profiles with Λ CDM Predictions. *The Astrophysical Journal*, 685:L9–L12, September 2008.
- [Car04] Sean Carroll. *Spacetime and geometry. An introduction to General Relativity*, volume 1. Addison Wesley, 2004. ISBN 0-8053-8732-3.
- [Cas00] L. Castañeda. Efecto de la Constante Cosmológica en la probabilidad de lentes gravitacionales. Master’s thesis, Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, 2000.
- [DED20] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson. A determination of the deflection of light by the Sun’s gravitational field, from observations made at the total Eclipse of may 29, 1919. *Philosophical transactions of the Royal Society of London. Series A, containing papers of a Mathematical or Physical character*, 220:291–333, 1920.

- [dFSB05] E. de Filippis, M. Sereno, and M. W. Bautz. Abell 370: A cluster with a pronounced triaxial morphology. *Advances in Space Research*, 36: 715–718, 2005.
- [Dod03] Scott Dodelson. *Modern Cosmology*, volume 1. Academic Press, 2003. ISBN 978-0-12-219141-1.
- [DR73] C. C. Dyer and R. C. Roeder. Distance redshift relations for universes with some intergalactic medium. *The Astrophysical Journal*, 180:L31–L34, 1973.
- [FPM⁺88] B. Fort, J. L. Prieur, G. Mathez, Y. Mellier, and G. Soucail. Faint distorted structures in the core of A 370 - Are they gravitationally lensed galaxies at z about 1? *Astronomy and Astrophysics*, 200(1-2):L17–L20, July 1988.
- [Gam48] G. Gamow. The origin of elements and the separation of galaxies. *Physical Review*, 74:505–506, 1948.
- [Ham13] A. J. S. Hamilton. *General Relativity, Black Holes, and Cosmology*. <http://casa.colorado.edu/~ajsh/>, 2013.
- [HCM⁺02] E. M. Hu, L. L. Cowie, R. J. McMahon, P. Capak, F. Iwamuro, J-P. Kneib, T. Maihara, and K. Motohara. A redshift $z = 6,56$ galaxy behind the cluster Abell 370. *The Astrophysical Journal Letters*, 568: L75, 2002.
- [HCT10] R. Hurtado, L. Castañeda, and J. M. Tejeiro. *2do Congreso Colombiano de Astronomía. Libro de Memorias*, volume 1, chapter Shear Producido por una lente gravitacional modelada con el perfil NFW, pages 171–175. Observatorio Astronómico Nacional, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, 2010. ISBN 978-958-44-7496.
- [HCT13] Roger Hurtado, Leonardo Castañeda, and Juan M. Tejeiro. Gravitational Lensing by Spherical Lenses. *En preparación*, 2013. URL <http://arxiv.org/abs/1308.5271>.
- [Her90] L. Hernquist. An analytical model for spherical galaxies and bulges. *Astrophysical Journal*, 356:359–364, June 1990.
- [Jaf83] W. Jaffe. A simple model for the distribution of light in spherical galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 202:995–999, March 1983.

- [JBD⁺11] N. Jarosik, C. L. Bennett, J. Dunkley, B. Gold, M. R. Greason, M. Halpern, R. S. Hill, G. Hinshaw, A. Kogut, E. Komatsu, D. Larson, M. Limon, S. S. Meyer, M. R. Nolta, N. Odegard, L. Page, K. M. Smith, D. N. Spergel, G. S. Tucher, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP). Observation: Sky maps, systematic errors, and basic results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 192(2):14–29, Febrero 2011.
- [KFI⁺] C. Kochanek, E. Falco, C. Impey, J. Lehar, B. McLeod, and H.-W. Rix. CASTLES 0957+561. URL <http://www.cfa.harvard.edu/castles/Individual/Q0957.html>.
- [KMF⁺94] J.P. Kneib, G. Mathez, B. Fort, Y. Mellier, G. Soucail, and P.Y. Longaretti. Redshift survey up to $b_J = 27$: distance of gravitational arclets behind Abell 370. *Astronomy and Astrophysics*, 286:701–717, 1994.
- [KMFM93] J.-P. Kneib, Y. Mellier, B. Fort, and G. Mathez. The distribution of dark matter in distant cluster-lenses: modeling A 370. *Astronomy and Astrophysics*, 273:367–376, 1993.
- [KTK⁺03] K. Kodaira, Y. Taniguchi, N. Kashikawa, N. Kaifu, H. Ando, H. Karoji, M. Ajiki, M. Akiyama, K. Aoiki, M. Doi, S. S. Fujita, H. Furusawa, T. Hayashino, M. Imanishi, F. Iwamuro, M. Iye, K. S. Kawabata, N. Kobayashi, T. Kodama, Y. Komiyama, G. Kosugi, Y. Matsuda, S. Miyasaki, Y. Mizumuto, K. Motohara, T. Murayama, T. Nagao, K. Nariai, K. Ohta, Y. Ohyama, S. Okamura, M. Ouchi, T. Sasaki, K. Sekiguchi, K. Shimasaku, Y. Shioya, T. Takata, H. Tamura, H. Tereda, M. Umemura, T. Usuda, M. Yagi, T. Yamada, N. Yasuda, and M. Yoshida. The discovery of two Lyman α emitters beyond redshift 6 in the Subaru deep field. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 55:L17, 2003.
- [LDH⁺11] D. Larson, J. Dunkley, G. Hinshaw, E. Komatsu, M. R. Nolta, C. L. Bennett, B. Gold, M. Halpern, R. S. Hill, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, N. Odegard, L. Page, K. M. Smith, D. N. Spergel, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP). Observations: power spectra and WMAP-derived parameters. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 192(2):16–35, January 2011.
- [MAA⁺97] L. Metcalfe, B. Altieri, H. Aussel, A. Biviano, B. Mc Breen, M. Delaney, D. Elbaz, L. Hanlon, M. Kessler, K. Leech, K. Okumura, B. Schulz, J.-L. Starck, and L. Vigroux. ISO mid-infrared observations of Abell 370. *Extragalactic Astronomy in the Infrared*, page 255, 1997.

- [MCJ⁺90] J. Mather, E. Cheng, R. Eplee Jr., R. Isaacman, S. Meyer, R. Shafer, R. Weiss, E. Wright, C. Bennett, N. Boggess, E. Dwek, S. Gulkis, M. Hauser, M. Janssen, T. Kelsall, P. Lubin, S. Moseley Jr., T. Murdock, R. Silverberg, G. Smoot, and D. Wilkinson. A preliminary measurement of the cosmic microwave background spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) satellite. *The Astrophysical Journal*, 354: L37–L40, 1990.
- [MSFM88] Y. Mellier, G. Soucail, B. Fort, and G. Mathez. Photometry, spectroscopy and content of the distant cluster of galaxies Abell 370. *Astronomy and Astrophysics*, 199:13–28, 1988.
- [NFW96] J. Navarro, C. Frenk, and S. White. The structure of cold dark matter halos. *Astrophysical Journal*, 462:563–575, May 1996.
- [Nor97] J. Norbury. *General Relativity & Cosmology for Undergraduates*. University of Wisconsin-Milwaukee, 1997.
- [Pad10] T. Padmanabhan. *Gravitation, foundations and frontiers*, volume 1. Cambridge university press, 2010. ISBN 978-0-511-67553-9.
- [Plu11] H. C. Plummer. On the problem of distribution in globular star clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 71:460–470, March 1911.
- [RKL⁺10] J. Richard, J-P. Kneib, M. Limousin, A. Edge, and E. Jullo. Abell 370 revisited: refurbished Hubble imaging of the first strong lensing cluster. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 402:L44–L48, February 2010.
- [RMC⁺11] A. Riess, L. Macri, S. Casertano, H. Lampeitl, H. Ferguson, A. Filippenko, S. Jha, W. Li, and R. Chornock. A 3% solution: determination of the Hubble constant with the Hubble Space Telescope and Wide Field Camera 3. *The Astrophysical Journal*, 730:119–137, April 2011.
- [RR73] M. S. Roberts and A. H. Rots. Comparison of rotation curves of different galaxy types. *Astronomy and Astrophysics*, 26:483–485, August 1973.
- [Sar05] Juan Manuel Tejeiro Sarmiento. *Principios de relatividad general*, volume 1. Universidad Nacional de Colombia, 2005. ISBN 958-701-547-9.
- [SEF99] P. Schneider, J. Ehlers, and E. Falco. *Gravitational Lenses*. Springer-Verlag, Study edition, 1999. ISBN 3-540-66506-4.
- [SFMP87] G. Soucail, B. Fort, Y. Mellier, and J.P. Picat. A blue ring-like structure in the center of the A370 cluster of galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, 172:L14–L16, 1987.

- [SKW06] P. Schneider, C. Kochanek, and J. Wambsganss. *Gravitational lensing: strong, weak and micro*, volume 1. Springer-Verlag, 2006. ISBN 978-3-540-30309-1.
- [SMF⁺88] G. Soucail, Y. Mellier, B. Fort, G. Mathez, and M. Cailloux. The giant arc in A370 - Spectroscopic evidence for gravitational lensing from a source at $z = 0,724$. *Astronomy and Astrophysics*, 191(2):L19–L21, February 1988.
- [SS97] C. Seitz and P. Schneider. Steps towards nonlinear cluster inversion through gravitational distortions. *Astronomy and Astrophysics*, 318:687 – 699, 1997.
- [SZB⁺08] C. Shu, B. Zhou, M. Bartelmann, J. M. Comerford, J.-S. Huang, and Y. Mellier. Comparisons between Isothermal and NFW Mass Profiles for Strong-Lensing Galaxy Clusters. *The Astrophysical Journal*, 685(1): 70–82, September 2008.
- [TLIK04] A. V. Tuntsov, G. F. Lewis, R. A. Ibata, and J.-P. Kneib. Detecting compact dark matter in galaxy clusters via gravitational microlensing: A2218 and A370. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 353:853–866, 2004.
- [Wam98] J. Wambsganss. Gravitational Lensing in Astronomy. *Living Re. Relativity*, 1:12, 1998.
- [WE06] M. C. Werner and N. W. Evans. A simple model for lensing by black holes in galactic nuclei. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 368:1362–1368, May 2006.
- [Wei72] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, Inc., 1972. ISBN 0-471-92567-5.